¨莫比乌斯带图代数

DANIEL W. COLLISON 和 DANIEL TUBBENHAUER

Abstract. 我们引入莫比乌斯带图代数（及其幺半群版本和范畴版本），将其视为一种分拆式图演算的子代数，其中弦可以带有把手和莫比乌斯带特征。我们将由此得到的图范畴识别为非定向二维配边范畴的一个线性商。最后，我们发展相关的胞腔理论，并用它对单模进行分类，同时计算若干情形下的维数。

arXiv:2602.11591v1 [math.RT] 12 Feb 2026

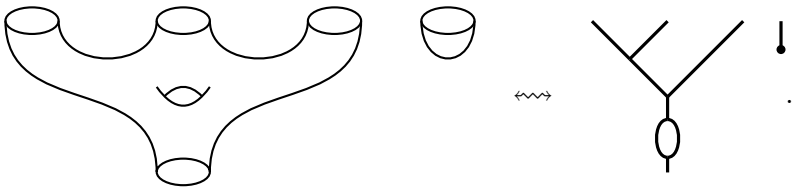
Contents

1. 引言2. M¨obiusstrip 图幺半群与范畴 3. M¨ 1
obiusstrip 拓扑量子场论 4. 夹心胞腔性 5. 分类 3
6. 格拉姆矩阵 参考文献 7
10
16
22
27

1. Introduction

图示代数的核心思想是，可以通过绘图将复杂的代数运算局部化。态射置于矩形中，复合通过堆叠实现，张量积则通过并置实现。这种视角屡屡证明了自身的价值：它将表示论问题转化为图形组合学问题，并从拓扑构造中产生可行计算的代数结构。经典示例包括支配 SL2 理论的 Temperley– Lieb 代数 [RTW32], 以及在正交群和辛群中发挥类似作用的 Brauer代数 [Bra37]。

图示范畴一个尤为稳健的来源是 (1+1) 维（或二维）配边，尤其是在转而研究它们的脊时，例如：



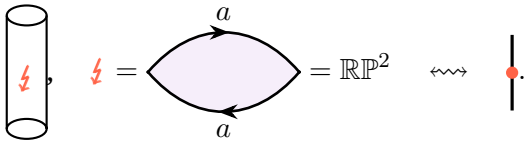
一方面，配边范畴对于拓扑场论具有普适性：二维拓扑量子场论是从适当的配边范畴出发的对称幺半函子。另一方面，一旦施加局部关系，例如闭分支的求值、颈部切割型关系、把手关系等，如 [BHMV95，BN05、KS24], 中所述，通常就能得到熟悉的代数结构：分拆式范畴及其相关的 Deligne型插值范畴，以及其他具有丰富胞腔结构的图代数；这早已广为人知，关于较新的视角，可参见例如 [Com20，KS24、KOK22]。

此外，许多常见的图演算虽然并非二维拓扑量子场论的直接产物，却受到相同的局部性理念驱动，并由极为相似的基本构件（合并、分裂、杯、帽及其相关构件）构成。示例包括张量范畴的图示方法（例如总结于 [TV17、Tub25]中的方法）、例如 [EK10], 中的Soergel图，以及例如 [Kup 96] 中的网（特别是对于SO3 [Yam89、MPS17、Tub24a]），以及表示论相关的

Mathematics Subject Classification 2020. 主分类：20M30，57R56；次分类：16G10，18M05。*Keywords.* M¨莫比乌斯带；图代数；分拆幺半群；无定向协边；二维拓扑量子场论；夹心胞腔代数；格拉姆矩阵；单模。

与胞腔代数相关的结构，参见例如 [AST18、BT18]。还有许多其他示例，数量过多，无法在此一一列举；特别是，相关的图示演算也出现在曲面上的嵌入图/带状图及其范畴化所使用的形式体系中。这些曲面上图的设置有一个共同特征，即引入半扭转（或者在处理真正非平凡的曲面拓扑时），从而导致不可定向性。

本文以尽可能简单的方式将不可定向性引入二维拓扑量子场论框架：通过添加莫比乌斯带，我们在骨架图中用点来表示它们



由此诞生了一类新的图示对象：不可定向图示幺半群，我们称之为***M¨obius strip*** 图示幺半群、代数或范畴。它们深得“装饰型”图代数的神韵，与 blob 代数 [MS94] 或点缀坦普利–利布代数（例如 [Gre98、DT24], 所述）颇为相似，只是如今处于分划式框架中。我们的目标是表明，它们是对现有图示体系的自然扩展，同时仍具有易于处理的内部结构和表示论。

即便你未曾要求，不可定向性为何也会出现。图示演算及其相邻领域中反复出现一种现象。为使讨论具体些，我们以低维拓扑学，尤其是结理论和图论的拓扑学方面，作为引导性示例：如果坚持局部性（关系仅支撑在小圆盘内），并扩大环境图示类（例如允许曲面上的结或图），那么无向配边和非定向配边往往会不期而至。

一个清晰的例子，是将 Bar-Natan几何形式体系 [BN05] 扩展到曲面上的链环图：当允许曲面本身在稳定化意义下变化（在远离图的位置添加或移除把手）时，解之间的自然配边并不总是可定向的，因此相应的拓扑量子场论输入必须从“有向”升级为“无向”。同样的模式也出现在 [TT06], 中，其中引入并分类了无向（1+1）拓扑量子场论（以带有额外结构的 Frobenius代数来表述），以便为稳定等价类构造链环同调理论；另见 [Tag13、Tub14]。这种“无向升级”的一个图论实例，是拓扑量子场论处理图着色的方法，例如见 [BM23]。更一般地，嵌入图的边上的半扭转操作提供了一种基本机制，使不可定向性进入带状图的拓扑；例如见 [EMM12]。

从图示演算的角度来看，“不可定向性”只需通过记录曲面的某个局部片段何时发生了半扭转来体现。在平面演算中，半扭转可以自然地通过将 ***M¨obius*** 带视为一种基本装饰来编码。类似地，通过把手进行稳定化，需要引入把手作为另一种基本局部特征。由此得到一种演算，其中弦可以带有把手和 M¨obius 带，并满足模拟相应配边变换的局部关系。

注1.1。对于熟悉 [TT06] 的读者：我们不将扭转本身用作粘合操作。我们认为，这样做使图示演算更简洁，尽管会丢失少量信息；这种损失本质上相当于一个因子 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，参见定理 3.14 及 [Cze23，定理 II]。◇

主要结果（非正式表述）。现在我们概述本文的贡献；精确表述见正文。

（a）定义与标准形。我们首先将主要对象——M¨obius 带图范畴/幺半群/代数——定义为一种分拆式演算，其中包含把手生成元和 M¨obius 生成元，以及自然的局部关系。我们给出一个显式生成集和便于计算的标准形。 **（b）配边识别**。我们通过构造一个从非定向二维配边范畴到我们的图范畴的对称幺半函子，明确其背后的拓扑动机。施加定义关系后，该函子诱导出一个等价关系。换言之，我们的图范畴可以看作非定向配边的线性商。

（c）胞腔理论与单模。我们发展相应的胞腔理论，并描述相应的胞模。随后，我们运用所发展的理论对单模进行分类，并确定其参数化方式。

（d）维数与示例。 我们计算若干简单模/胞模的维数，并给出具有说明性的低秩例子，着重展示新的不可定向特征如何改变熟悉的分拆型结果。

致谢。 本文是第一作者博士论文的一部分。

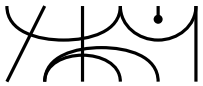
DC 得到了英联邦通过澳大利亚政府研究培训计划奖学金提供的资助 [https://doi.org/10.82133/C42F-K220]。DT 获得了 ARC Future Fellowship FT230100489 的资助，任何遗留错误都是单边方法固有的特征。

2. Möbius strip diagram monoids and categories

下文及全文中，我们假定读者对幺半范畴及其图示演算的语言有一定了解，例如可参见 [EGNO15]或 [Tub25]。

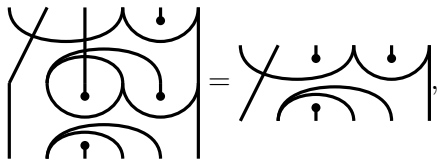
我们首先考虑一个 $2n$ 元集合的所有分拆的图示所构成的分拆幺半群 $\mathrm{Pa}_1(n)$，以及 $\mathrm{Pa}_1(n)$ 的相应平面子幺半群 $\mathrm{Pa}_1^p(n)$，它们分别作为相应幺半范畴 Pa_1^p 与 Pa_1 中的自同态幺半群出现。更具体地说，分拆范畴 Pa_1 以非负整数为对象，从 n 到 m 的态射是对应于 $\{1,\dots n\}\cup\{1',\dots m'\}$ 的分拆的分割图。下面的示例总结了我们的约定；详尽论述见例如 [Jon94、Mar94、HR05] 。

示例 2.1. $\mathrm{Pa}_1(6)$ 的元素表示 $\{1,\dots 6\}\cup\{1',\dots 6'\}$ 的分拆，其中带撇的数字对应于相应分割图顶部一端的弦的数目。例如：

$\{\{1,2'\},\{2,4,5\},\{3,3'\},\{6,1',4',6'\},\{5'\}\} \leftrightsquigarrow a =$  $\in \mathrm{Pa}_1(6),$

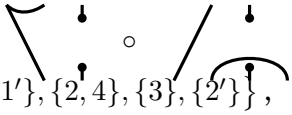
$\{\{1,1'\},\{2,4,5\},\{3\},\{6,2',4',6'\},\{3'\},\{5'\}\} \leftrightsquigarrow b =$  $\in \mathrm{Pa}_1^p(6).$

复合 $\circ$ 在 $\mathbf{Pa}_1$ 中是图示的纵向拼接以及内部分量的移除。幺半积 $\otimes$ 是横向并置。我们的约定如下：

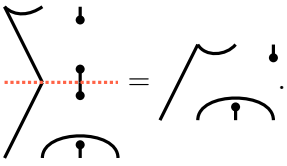
$a\circ b =$  $,\quad a\otimes b =$ 

其中，我们注意到，分割图等价当且仅当它们定义了相同的分拆，因此简化了左侧所得的图。

再举一例，以下图示的复合

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pa}_1}(2,3) \ni$  $\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Pa}_1}(4,2),$

对应于 $\{\{1,1',2'\},\{2\},\{3'\}\}$ 和 $\{\{1,1'\},\{2,4\},\{3\},\{2'\}\}$，其结果为

$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Pa}_1}(4,3) \ni$ 

熟悉分拆范畴线性版本的读者可能会想在移除内部分量时乘以一个标量；我们将在下文允许对此类操作作一般化推广。 ◇

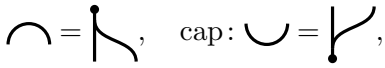
$\mathbf{Pa}_1$ 的一组 $\circ$-$\otimes$-生成元由下式给出（名称依次为：恒等元、乘法、单位、余乘法、余单位、交叉）：

(2.2) $1_1 = \mathrm{id}_1:$  $,\quad \mu:$  $,\quad \eta:$  $,\quad \Delta:$  $,\quad \epsilon:$  $,\quad s:$  $.$

记号 2.3. 定义 $1_k = \mathrm{id}_k = \otimes^k 1_1$，即 $\mathrm{End}_{\mathbf{Pa}_1}(k)$ 中的恒等态射。 ◇

利用

$$\mathrm{cup}: \quad = \quad, \qquad \mathrm{cap}: \quad = \quad,$$

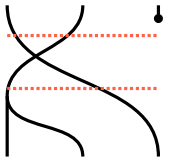


容易看出，$\mathbf{Pa}_1$ 和 $\mathbf{Pa}_1^p$ 是幺半对偶的（以杯和帽作为结构）。此外，利用交叉 s，$\mathbf{Pa}_1$是对称的。

记号 2.4. 对于下文中所有允许杯和帽的图示范畴，我们始终使用它们所定义的幺半对偶结构。同样，当它们允许交叉时，它们便具有由交叉结构给出的对称性，我们始终使用这种对称性。◇

示例 2.5. 下面给出一个例子，说明如何将一个分划图分解为生成元的 $\circ$-$\otimes$-乘积：

$$\mathrm{Pa}_1(3) \ni \quad = \quad (1_2 \otimes \eta) \circ s \circ (\mu \otimes 1_1).$$



正如我们稍后将看到的，切片对应于三明治结构的部分。 ◇

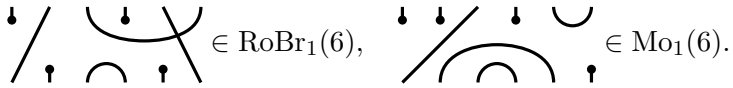
这些生成元满足以下关系，我们建议将其绘制出来。 :

$$s^2 = 1_2, \tag{2.6}$$
$$(1_1 \otimes s) \circ (s \otimes 1_1) \circ (1_1 \otimes s) = (s \otimes 1_1) \circ (1_1 \otimes s) \circ (s \otimes 1_1), \tag{2.7}$$
$$s \circ (1_1 \otimes \eta) = \eta \otimes 1_1, \tag{2.8}$$
$$(1_1 \otimes \mu) \circ (s \otimes 1_1) \circ (1_1 \otimes s) = s \circ (\mu \otimes 1_1), \tag{2.9}$$
$$(1_1 \otimes \epsilon) \circ s = \epsilon \otimes 1_1, \tag{2.10}$$
$$(1_1 \otimes s) \circ (s \otimes 1_1) \circ (1_1 \otimes \Delta) = (\Delta \otimes 1_1) \circ s, \tag{2.11}$$
$$\mu \circ (1_1 \otimes \eta) = 1_1 = \mu \circ (\eta \otimes 1_1), \tag{2.12}$$
$$(1_1 \otimes \epsilon) \circ \Delta = 1_1 = (\epsilon \otimes 1_1) \circ \Delta, \tag{2.13}$$
$$(\mu \otimes 1_1) \circ (1_1 \otimes \Delta) = \Delta \circ \mu = (1_1 \otimes \mu) \circ (\Delta \otimes 1_1), \tag{2.14}$$
$$\mu \circ s = \mu, \tag{2.15}$$
$$\mu \circ \Delta = 1_1. \tag{2.16}$$

由(2.2) 中的生成元和(2.6)–(2.16) 中的关系给出$\mathbf{Pa}_1$，（参见 [Com20，定理 2。1]；除去 s一个后，得到$\mathbf{Pa}_1^p$ 的生成元-关系表示。

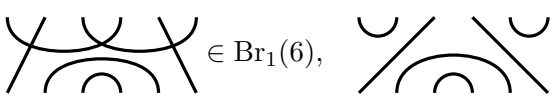
除了$\mathbf{Pa}_1^p$ 之外，我们还考虑以下重要的子幺半群和范畴；此列表逐字摘自 [KST24]。

- 由所有分支大小为 1 或 2 的图组成的车-布劳尔幺半群 $\mathrm{RoBr}_1(n)$。平面车-布劳尔幺半群 $\mathrm{RoBr}_1^p(n) = \mathrm{Mo}_1(n)$ 也称为莫茨金幺半群。



$\in \mathrm{RoBr}_1(6)$, $\in \mathrm{Mo}_1(6)$.

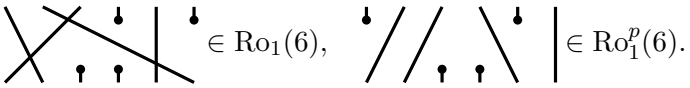
- 由所有分支大小为 2 的图组成的布劳尔幺半群 $\mathrm{Br}_1(n)$。平面布劳尔幺半群 $\mathrm{Br}_1^p(n) = \mathrm{TL}_1(n)$ 称为坦普利-利布幺半群 （有时 $\mathrm{TL}_1(n)$称为琼斯幺半群 或考夫曼幺半群）。



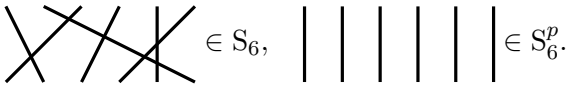
$\in \mathrm{Br}_1(6)$, $\in \mathrm{TL}_1(6)$.

- 车幺半群 或对称逆半群 $\mathrm{Ro}_1(n)$ 由所有分支大小为 1 或 2 的图组成，且每个分拆在底部至多有一个分支

在顶部也至多有一个分支。平面 ***rook*** 幺半群 $\mathrm{Ro}_1^p(n)$ 是相应的平面子幺半群。



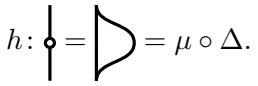
- 由所有分支大小为 1 的匹配组成的对称群 S_n。平面对称群 是平凡群 $\mathrm{S}_n^p \cong 1$。



此外，还有相应的范畴$\mathbf{RoBr}_1$,$\mathbf{Mo}_1$,$\mathbf{Br}_1$,$\mathbf{TL}_1$ 等。

记号 2.17。 下文将 $\mathrm{D}_1(n)$ 或 $\mathbf{D}_1$ 表示上文列出的任意幺半群/范畴，并将其视为分拆范畴的子幺半群/子范畴。事实上，也可以取 $\mathbf{Pa}_1$ 的任意子幺半群（例如 [KMY19]中的那些）。 ◇

现在，我们通过忽略最后一个关系式 $\mathbf{D}_1$ (2.16) (2.16) 来修改它，并设



此外，引入一个额外的生成元

(2.18)



满足这些关系

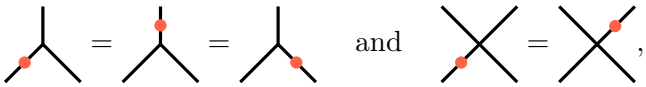
$$\mu \circ (m \otimes 1_1) = m \circ \mu = \mu \circ (1_1 \otimes m) \tag{2.19}$$

$$s \circ (m \otimes 1_1) = (1_1 \otimes m) \circ s \tag{2.20}$$

$$m^3 = h \circ m. \tag{2.21}$$

态射 h 和 m 是把手点（有时简称孔）和***M¨obius*** 点。

示例 2.22. 两个关系 (2.19)和 (2.20) 的图示形式为



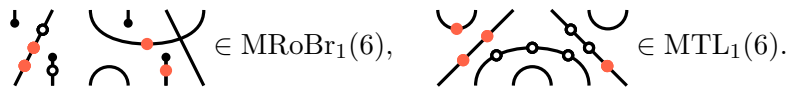
而最后一个关系 (2.21)为



我们稍后会看到，这个看起来有些别扭的关系是一个著名的拓扑关系，我们将其称为***M¨obius*** 关系。 ◇

记号 2.23. 令$\mathbf{MD}_1$ 表示上文所述的修正后的$\mathbf{D}_1$ ； 幺半群也同理。 ◇

示例 2.24. 换言之，$\mathrm{MD}_1(n)$ 的元素是 $\mathrm{D}_1(n)$ 中的图示，其部分带有 h 和 m 装饰，分别表示白色圆和红色圆；它们彼此可交换，能沿弦自由移动，并满足(2.21)。例如，



注意，每个连通分支只能包含零个、一个或两个 M¨obius 点。 ◇

从现在起，固定一个基域 $\mathbb{K}$。

定义 2.25. 固定以下有理函数:

$$Z_\alpha = \frac{p_\alpha(T)}{q(T)} = \sum_{k\geq 0} \alpha_k T^k, \quad Z_\beta = \frac{p_\beta(T)}{q(T)} = \sum_{k\geq 0} \beta_k T^k, \quad Z_\gamma = \frac{p_\gamma(T)}{q(T)} = \sum_{k\geq 0} \gamma_k T^k,$$

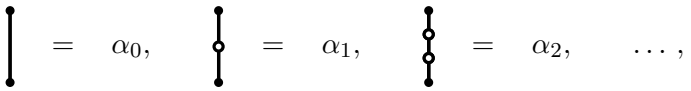
其中 $p_\alpha(T)\,p_\beta(T)\,p_\gamma(T)\ q(T)\ \in \mathbb{K}[T]$ 满足 $q(0)\ = 1$

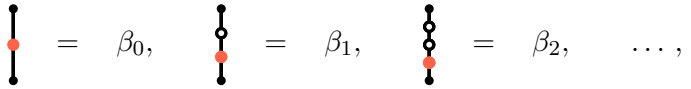
$$\deg\big(p_\beta(T)\big), \deg\big(p_\gamma(T)\big) < K = \max(N+1, M), \tag{2.26}$$

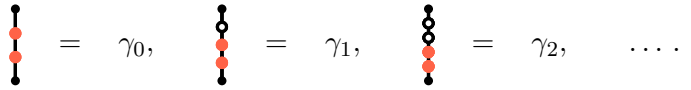
其中

$$N = \deg\big(p_\alpha(T)\big) \quad \text{and} \quad M = \deg\big(q(T)\big).$$

我们定义$\mathbf{MD}'_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$ 为 $\mathbb{K}$-线性范畴，其同态空间基取自$\mathbf{MD}_1$ 中的图示，基元素的乘法由图示的 $\circ$ 或 $\otimes$ 拼接给出，但所有闭分支均按如下方式求值：

(2.27)  $= \alpha_0, \quad = \alpha_1, \quad = \alpha_2, \quad \dots,$

(2.28)  $= \beta_0, \quad = \beta_1, \quad = \beta_2, \quad \dots,$

(2.29)  $= \gamma_0, \quad = \gamma_1, \quad = \gamma_2, \quad \dots.$

这些是求值规则。 ◇

注记 2.30。 由关系 (2.21)，含有生成元 m 的实例多于三个的闭分支（以及事实上任何单独的部分）均可化简为两个或更少。因此，(2.27)，(2.28)以及 (2.29) 合起来表示所有可能的闭分支。 ◇

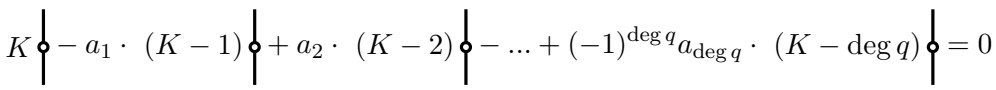
最后，使用在定义 2.25中引入的记号，给定

$$q(T) = 1 - a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + (-1)^M a_M T^M,$$

我们定义柄关系

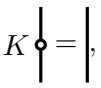
$$\sigma = h^K + \sum_{i=1}^{M} (-1)^i a_i h^{K-i} = 0, \tag{2.31}$$

其形式为



以图示形式表示（把手点旁边的标签表示其数量）。

例 2.32. 对于奇数 K，“单位根关系”



源自于选择 $p_\alpha(T)\ = 1$ 和 $q(T)\ = 1 - T^K$。 ◇

定义 2.33. *M¨*缪比乌斯带图范畴 $\mathbf{MD}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 定义为商$\mathbf{MD}'_{\alpha,\beta,\gamma}/\mathcal{I}(\sigma)$，其中 $\mathcal{I}(\sigma)$ 是由 σ 生成的 $\circ$-$\otimes$-理想。

同理，我们得到*M¨*莫比乌斯带图代数$\mathbf{MD}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n)$。当所有涉及的参数均为零或一时，我们可以并且将会在添加一个形式零元后，将 $\mathbf{MD}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n)$ 视为幺半群。◇

在此阶段，我们对莫比乌斯带图范畴还无法断言什么，例如，我们不知道复合是否满足结合律（事实上满足，但从定义出发证明这一点并不直接）；我们将在第3节讨论这些问题。

注记2.34。 我们将在下一节更清楚地看到，定义 2.33 中的商限制了 h 在任意单个部分上的出现次数，使其不超过 $K-1$，也就是说，莫比乌斯带图代数是有限维的。对于幺半群参数，我们得到有限幺半群族的例子。对它们的表示取张量积后，例如可以探索 [COT24、HT25b]的类似物。 ◇

一旦建立起来，很容易看出这些范畴 $\mathbf{MD}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 是幺半的；存在交叉时它们是对称的，存在杯和帽时它们是枢轴的。

3. Möbius strip TQFT

现在，我们想为莫比乌斯带图代数的构造提供一些动机，尤其是其定义关系(2.21)。顾名思义，我们需要联系拓扑学。本节的灵感来自 [TT06、Tub14、Cze23], ；此外，熟悉二维拓扑量子场论（例如 [Koc04]中的内容）也会有所帮助。

我们首先考虑 $\mathbb{K}$-线性幺半分拆范畴 $\mathbf{Pa}_\delta$，其对象和态射与 $\mathbf{Pa}_1$，相同，只是允许取 $\mathbb{K}$-线性组合的分割图，并且在复合图示时，将闭分支赋值为某个固定的 $\delta \in \mathbb{K}$。事实上，与之前类似，$\mathbf{Pa}_\delta$ 是对称枢轴范畴。此外，对 $\mathbf{Pa}_\delta$ 进行加性幂等完备化（先取加性闭包，再取 Karoubi 包络），得到 Deligne 范畴$\mathbf{Rep}(S_\delta)$ 的非阿贝尔版本，参见例如 [Del07、CO11]。

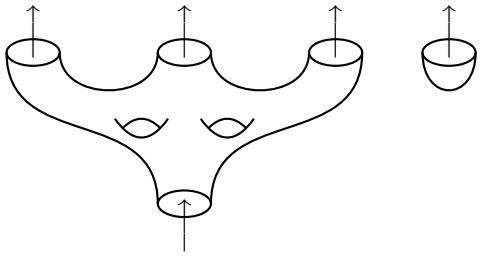
注 3.1。 幺半群 $\mathsf{D}_1(n) \subset \mathrm{End}_{\mathbf{Pa}_\delta}(n)$ 以及相关图代数 $\mathsf{D}_\delta(n)$，例如 [Tub24b] 中所示，都是 $\mathrm{End}_{\mathbf{Pa}_\delta}(n)$ 的子代数。 ◇

注3.2。$\mathbf{Pa}_\delta$的一组生成元由上一节中的 μ、η、Δ、ϵ、s 给出，并满足相同的关系以及 $\epsilon \circ \eta = \delta$。◇

注3.3。下文将配边视为抽象流形，也就是说，它们不嵌入在任何空间中。（尽管研究下述构造的嵌入类比很有意思，参见[BW10], ，但我们在此不作探讨。）不过，为了说明问题，我们仍会使用常见的图示。我们也会默认将所有范畴严格化；根据通常的相容性定理，这不会影响我们的讨论。◇

一个重要的相关范畴是定向二维配边**2Cob**范畴。**2Cob** 的对象是非负整数，从 n 到 m 的态射是配边 $\coprod_{i=1}^{n} \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \coprod_{i=1}^{m} \mathbb{S}^1$（的微分同胚类）。

例 3.4。 下面给出一个示例：

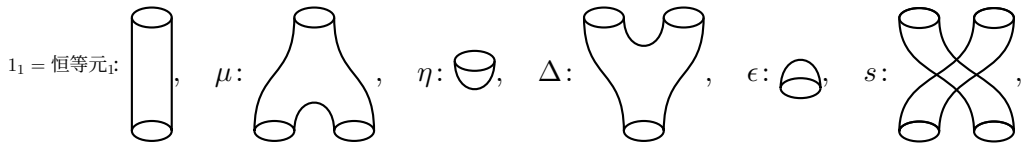


$\in \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{2Cob}}(1,\ 4)$。

边界 $\mathbb{S}^1$ 的定向用箭头标示；本文始终采用这一约定，因此后文将省略箭头。我们还将单个配边视为其对应微分同胚类的代表。◇

这是一个众所周知的事实（例如参见 [Koc04]）：**2Cob** 在不交并运算下构成一个幺半范畴，它是对称且枢轴的（交叉、杯和帽），并具有以下生成元（同前，依次为：恒等元、乘法、单位、余乘法、余单位、交叉）：

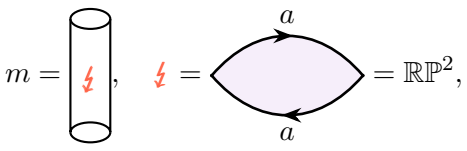
(3.5)



满足关系 (2.6)–(2.15)。若 $\mathbb{K}$**2Cob** 表示 $\mathbb{K}$-线性化的 **2Cob**，则可直接推出$\mathbf{Pa}_\delta$ 作为一个 $\mathbb{K}$-线性幺半范畴，等价于由 $\mathbb{K}$**2Cob** 添加关系 (2.16) 及 $\epsilon \circ \eta = \delta$，再取商所得的范畴；参见 [Com20]。

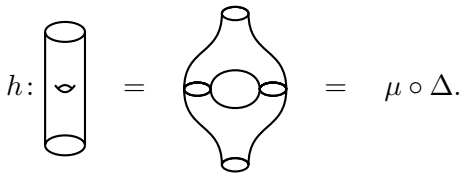
现在，我们为 **2Cob** 引入以下额外的生成元：

(3.6)



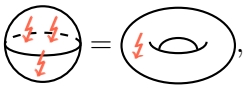
它表示圆柱与实射影平面的连通和 $\mathbb{RP}^2$ 也就是说， m可以看作一条莫比乌斯带与恒等配边粘合而成。用 **MCob** 表示由此得到的范畴。

为了简化插图，我们将经常用配边的脊来指代配边：我们不绘制(3.5)，而是绘制(2.2) （按照术语命名进行对应），并且不绘制(3.6)，而是绘制一个 M¨obius 点(2.18)。我们还使用柄点来代替



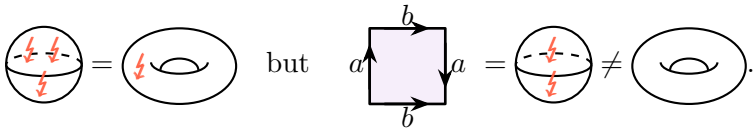
引理 3.7。 态射 m 满足关系*(2.19)*、*(2.20)*和*(2.21)*。

证明。 利用拓扑论证，可以直接看出 m 满足关系(2.19)和(2.20)。对于(2.21)，通过可视化练习可以看出



由此可得这些关系；这并不容易看出，但却是众所周知的（YouTube 上有演示它们之间微分同胚的动画）。所涉及的曲面称为戴克曲面。□

备注 3.8。 戴克曲面是 M¨obius 条带表现得如同幺半群元素的一个示例（它们通常不可消去），因为

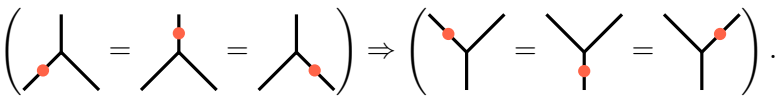


后者是著名的观察：克莱因瓶并不是环面。 ◇

现在我们考虑不可定向二维配边的概念，它们基于通常的无定向二维配边，例如 [TT06]（不包括粘合数据），但我们保留为边界定向所采用的约定， $\mathbb{S}^1$ 如例 3.4所示；特别地，我们不考虑 $\mathbb{S}^1$ 的反向定向微分同胚，而这类微分同胚在例如 [Cze23], 中已明确包含，正如注 1.1所述。

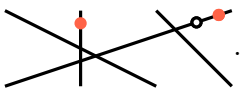
定理 3.9。 范畴**MCob** 是不可定向二维配边的范畴。该范畴是对称的、枢轴的，并且具有一个生成元-关系表示，其生成元为*(3.5)*和*(3.6)*，关系为*(2.6)–(2.16)*以及*(2.19)–(2.21)*。

证明。 首先，不难看出，所述关系蕴含了它们所有其他“合理的变体”。例如，



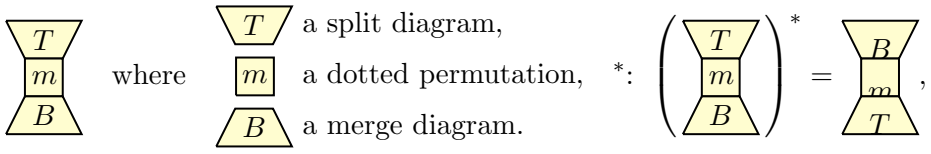
证明的剩余部分是 [Koc04], 的一种变体，因此我们将从简。首先，可以利用这些关系证明，每个配边都有一种标准形，我们称之为 预夹心结构，如下所示。

记号 3.10。 图示反 ***involution*** * 将配边上下翻转。若一个图只包含乘法、余单位、最少数量的交叉，以及位于图的底部的分支上的点（把手或 M¨obius），则称其为合并图。分裂图是经 * 翻转的合并图。带点置换图只包含点（把手或 M¨obius）和交叉。例如（将左侧图示翻转后可得到一个分裂图）：

合并图：  ， 带点置换图：  .

◇

标准形如下：



这与 [Koc04](另见 [GT25、FST25]) 中的情形几乎相同，因为涉及莫比乌斯生成元的关系意味着莫比乌斯点可以在其连通分支内自由移动。假设每个连通分支至多包含两个莫比乌斯点，标准形也是唯一的。

还要回顾一下（众所周知的）曲面分类：给定 $\mathbb{S}^2$ 双球面、 $\mathbb{D}$圆盘和 $\mathbb{T}$环面，任意曲面 S 都完全由 $S \cong \mathbb{S}^2\#(\#^d\mathbb{D})\#(\#^t\mathbb{T})\#(\#^p\mathbb{RP}^2)$ 唯一确定d， p， $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 其中 $tp = 0$。莫比乌斯关系 (2.21) 由引理 3.7成立；从右向左读可知，一个连通分支上要么有把手，要么有莫比乌斯点，但不能同时有两者；这就是条件 $tp = 0$。当然，也可以从左向右读，此时得到的条件是每个连通分支至多包含两条莫比乌斯带。换句话说，上述标准形与曲面分类完全吻合。

由此，结论可由 [Koc04] 得出。 □

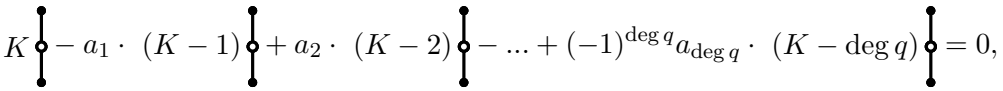
采用与定义 2.33 相同的设定，接下来考虑 MCob 的 $\mathbb{K}$-线性化，其中闭曲面按照 (2.27)–(2.29) 求值（空配边 $\emptyset$ 的取值为 $1 \in \mathbb{K}$）。按照 [BHMV95] （另见 [KS24]）的做法，我们使用泛构造，并采用给定的闭曲面求值。将由此得到的范畴记为 $\mathbf{MCob}_{\alpha,\beta,\gamma}$。利用 h，我们可以如 (2.31) 中那样定义 σ，而在此语境下， $\sigma = 0$ 也是柄关系。

命题 3.11。 范畴 $\mathbf{MCob}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}$ 是对称且枢轴的，并具有生成元-关系表示，其生成元为 *(3.5)* 和 *(3.6)*，关系为 *(2.6)–(2.16)* 和 *(2.19)–(2.21)*，以及柄关系*(2.31)*。

证明。 （读者或许可以查阅 [EST17]，其中有一个类似论证的详细展开。）

泛构造表明$\mathbf{MCob}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 是一个定义良好的幺半范畴（例如，它满足结合律）；而该范畴是对称且为枢范畴，这一点显而易见。

对于剩下的结论，首先注意到柄关系成立：这基本上就是 (2.27) 中的第一行。事实上，我们有



其图示形式为

$$\alpha_K - a_1 \cdot \alpha_{K-1} + a_2 \cdot \alpha_{K-2} - \ldots - \ldots + (-1)^{\deg q} a_{\deg q} \cdot \alpha_{K-\deg q} = 0,$$

根据构造，这一关系成立（回顾定义 2.25）。此外，很容易看出，任何其他通过闭合关系得到的方式也会给出一个成立的等式。沿用 [EST17],，很容易看出，定理 3.9 证明中的唯一标准形构成了同态空间的一组基。 □

当然，也可以对 $\mathbf{Pa}_\delta$ 作出相同的修改：首先忽略关系 (2.16)and $\epsilon \circ \eta = \delta$，然后引入一个满足 (2.19)–(2.21) 的额外生成元 m。显然，所得范畴作为 $\mathbb{K}$- 线性对称枢范畴，与上一节中的 $\mathbf{MPa}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 等价，而后者满足：

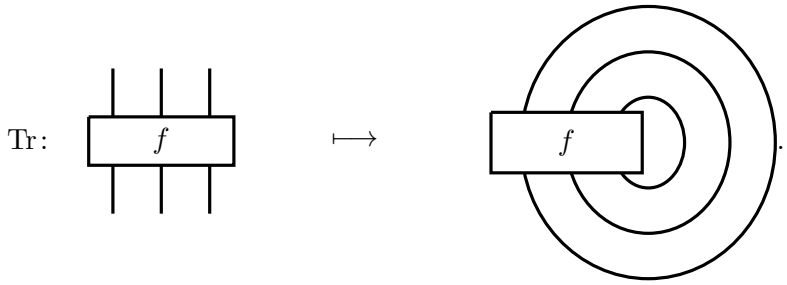
定理 3.12. 我们有 $\mathbf{MPa}_{\alpha,\beta,\gamma} \cong \mathbf{MCob}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 作为 $\mathbb{K}$-线性对称枢轴范畴。

证明。 由上可得。 □

因此，今后我们将只提及范畴 $\mathbf{MPa}_{\alpha,\beta,\gamma}$。

注记 3.13。 M¨obius 带图代数 $\mathrm{MD}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n)$ 是 $\mathrm{End}_{\mathbf{MPa}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}}(n)$ 的子代数，因此它们是有限维的。◇

令 $\underline{\mathbf{MPa}}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 为 $\mathrm{MPa}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 的半单化（例如见 [EO22]），使用 [EO22]所定义的迹 (2.27)–(2.29)，其迹映射为（另见 [KS24]）：



我们以一个定理结束本节，该定理将 $\mathbf{MPa}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 与 Deligne 范畴 $\mathbf{Rep}(S_\delta)$ 联系起来。首先，令$\mathbf{MRep}(S_{\alpha,\beta,\gamma})$ 表示 $\mathbf{MPa}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 的加性幂等完备化。此外，令 $\mathbf{MRep}(S_{\alpha,\beta,\gamma})$ 和 $\mathbf{Rep}(S_\delta)$ 分别表示 $\underline{\mathbf{MRep}}(S_{\alpha,\beta,\gamma})$ 与 $\mathbf{Rep}(S_\delta)$ 关于以下理想的商 $\underline{\quad}$
$\circ$-$\otimes$-可忽略态射理想。我们有：

定理 3.14。在以下情形下

$$Z_\alpha(T)=\frac{\alpha_0}{1-\lambda T},\qquad Z_\beta(T)=\frac{\beta_0}{1-\lambda T},\qquad Z_\gamma(T)=\frac{\gamma_0}{1-\lambda T}, \tag{3.15}$$

其中 $\alpha_0\beta_0,\gamma_0,\sqrt{\lambda}\in\mathbb{K}^\times$，存在一个 $\mathbb{K}$-线性对称枢轴范畴之间的等价关系

$$\underline{\mathbf{MRep}}(S_{\alpha,\beta,\gamma})\cong\mathbf{Rep}(S_\delta)\boxtimes\mathbf{Rep}(S_{\delta_+})\boxtimes\mathbf{Rep}(S_{\delta_-}), \tag{3.16}$$

where $\delta=\lambda\alpha_0-\gamma_0$, $\delta_+=\frac{1}{2}(\gamma_0+\sqrt{\lambda}\beta_0)$, *and* $\delta_-=\frac{1}{2}(\gamma_0-\sqrt{\lambda}\beta_0)$. *All of these are semisimple.*

证明。我们首先注意到，范畴 MCob 是 U2Cob 的子范畴；U2Cob 是二维无定向协边范畴，例如见 [Cze23]中的表述。事实上，要从 U2Cob 得到 MCob，只需忽略表示圆的反向定向微分同胚的生成元 ϕ。接着，$\mathrm{MRep}(S_{\alpha,\beta,\gamma})$ 的构造与 $\mathrm{U2Cob}_{\alpha,\beta,\gamma}$ 的构造相仿。因此，该定理的证明可由 [Cze23, 定理 II] 的证明推出，只需做少许修改：由于缺少 ϕ，会消去一个 $\mathbb{Z}_2$ 因子，这体现为在 (3.16) 的 Deligne 张量积第一因子中使用 $\mathbf{Rep}(S_\delta)$ 而非 $\mathbf{Rep}(S_\delta\wr\mathbb{Z}_2)$，并将 δ 乘以 2。 $\underline{\quad}$

最后，半单性可由一个更一般的事实推出：给定一个 $\mathbb{K}$-线性 Karoubian 刚性幺半范畴 $\mathcal{C}$，其同态空间均为有限维，且具有满足某些性质的幺半对偶结构，则对 $\mathcal{C}$ 取商，即商去由可忽略态射生成的张量理想，所得范畴是半单范畴（参见 [EO22，定理 2。6]）。□

例 3.17. 取 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 和 $\lambda=1$，并设 $\alpha_0=19$，$\beta_0=4$ 以及 $\gamma_0=10$。根据 定理 3.14，我们有如下等价关系

$$\underline{\mathbf{MRep}}(S_{\alpha,\beta,\gamma})\cong\mathbf{Rep}(S_9)\boxtimes\mathbf{Rep}(S_7)\boxtimes\mathbf{Rep}(S_3),$$

其中$\mathbf{Rep}(S_k)$ 表示对称群 S_k的复有限维表示。 ◇

4. Sandwich cellularity

我们现在运用夹心胞腔代数的框架，研究莫比乌斯带图代数的表示论。对于本节的大部分内容，我们遵循 ¨中发展的理论，并假设读者对 [Bro55],以及 [Tub24b]有一定了解。

设 $\mathscr{A}$ 是一个结合含幺 $\mathbb{K}$-代数。回顾以下定义：

定义 4.1. $\mathscr{A}$的一个夹心胞腔数据 是一个四元组 $(\mathcal{P},(\mathcal{T},\mathcal{B}),(\mathscr{H}_\lambda,B_\lambda)\ C)$，其中：

- $\mathcal{P}=(\mathcal{P},\ <_{\mathcal{P}})$ 是一个偏序集（带夹层序 的中间偏序集）
- $\mathcal{T}=\bigcup_{\lambda\in\mathcal{P}}\mathcal{T}(\lambda)$ 和 $\mathcal{B}=\bigcup_{\lambda\in\mathcal{P}}\mathcal{B}(\lambda)$ 是有限集的集合（即顶/底集合），
- 对于 $\lambda\in\mathcal{P}$，我们有代数 $\mathscr{H}_\lambda$（即夹心代数）以及 $c^\lambda_{\mathscr{H}_\lambda}$ 的基 B_λ，
- $C:\ \coprod_{\lambda\in\mathcal{P}}\mathcal{T}(\lambda)\times B_\lambda\times\mathcal{B}(\lambda)\to\mathscr{A};\ (T,\ m,\ B)\mapsto c^\lambda_{T,\ m,\ B}$ 是一个单射，

使得：
（$\mathbf{AC}_1$）集合 $B_{\mathscr{A}}=\left\{c^\lambda_{T,m,B}\,\middle|\,\lambda\in\mathcal{P},T\in\mathcal{T}(\lambda)\ B\in\mathcal{B}(\lambda)\ m\in B_\lambda\right\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个基。（我们称 $B_{\mathscr{A}}$ 为夹层胞腔基。）

（$\mathbf{AC}_2$）对于所有 $x \in \mathscr{A}$，都存在标量 $r^x_{TU} \in \mathbb{K}$，它们不依赖于 B 或 m，使得

$$xc^\lambda_{T,m,B} \equiv \sum_{U\in\mathcal{T}(\lambda),n\in B_\lambda} r^x_{TU} c^\lambda_{U,n,B} \pmod{\mathscr{A}^{>_\mathcal{P}\lambda}}. \tag{4.2}$$

对由 x进行的右乘同样如此。

($\mathbf{AC}_3$) 存在一个自由的 $\mathscr{A}$-$\mathscr{H}_\lambda$-双模 $\Delta(\lambda)$、一个自由的 $\mathscr{H}_\lambda$-$\mathscr{A}$-双模 $\nabla(\lambda)$，以及一个 $\mathscr{A}$-双模同构

$$\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}^{\geq_\mathcal{P}\lambda}/\mathscr{A}^{>_\mathcal{P}\lambda} \cong \Delta(\lambda) \otimes_{\mathscr{H}_\lambda} \nabla(\lambda), \tag{4.3}$$

其中 $\mathscr{A}^{\geq_\mathcal{P}\lambda}$($\mathscr{A}^{>_\mathcal{P}\lambda}$)表示 $\mathscr{A}$中由.....张成的 $\mathbb{K}$-子模

$$\{c^\mu_{U,n,V} \mid \mu \in \mathcal{P}, \mu \geq_\mathcal{P} \lambda\,(\mu >_\mathcal{P} \lambda), U \in \mathcal{T}(\mu), V \in \mathcal{B}(\mu), n \in B_\mu\}.$$

我们将 $\mathscr{A}_\lambda$ 称为胞腔代数，并将 $\Delta(\lambda)$与 $\nabla(\lambda)$称为左、右胞模。

若代数 $\mathscr{A}$ 具有夹心胞腔数据，则它是一个夹心胞腔代数 ◇

定义 4.4。 在 定义 4.1 的设定下，假设 $\mathcal{T}(\lambda) = \mathcal{B}(\lambda)$ 对所有 $\lambda \in \mathcal{P}$ 都成立，并且存在一个反对合 $(_)^\star$: $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 以及二阶双射 $(_)^\star : B_\lambda \to B_\lambda$ 满足：

($\mathbf{AC}_4$) 我们有 $(c^\lambda_{T,m,B})^\star \equiv c^\lambda_{B,m^\star,T}$(模 $\mathscr{A}^{>_\mathcal{P}\lambda}$)。

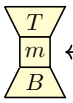
在此情形下，我们称该数据为对合的，并将其记作 $\big(\mathcal{P}, \mathcal{T}, (\mathscr{H}_\lambda, B_\lambda)\ C, (_)^\star\big)$。 ◇

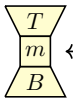
备注 4.5。 夹心胞腔代数多年来曾被多次重新发现，早期参考文献可参见例如[Bro55] 。对合的夹心胞腔代数有两个特殊情形：

(a) 若 $\mathscr{H}_\lambda \cong \mathbb{K}$，则 $\big(\mathcal{P}, \mathcal{T}, (\mathscr{H}_\lambda \cong \mathbb{K}, B_\lambda = \{1\})\ C, (_)^\star\big)$ 是一个胞腔数据，且 $\mathscr{A}$是一个 胞腔代数 依照 [GL96]的意义而言。

(b) 如果所有夹心代数都是交换的，那么 $\big(\mathcal{P},\ \mathcal{T},\ (\mathscr{H}_\lambda,\ B_\lambda)\ C,\ (_)^\star\big)$ 是仿射胞腔数据，而 $\mathscr{A}$ 是一个仿射胞腔代数，其定义见 [KX12]。

下面是一个有用的示例：

cellular: $c^\lambda_{T,1,B}$ ⇜⇝  ← $\mathscr{H}_\lambda \cong \mathbb{K}$，　affine cellular: $c^\lambda_{T,m,B}$ ⇜⇝  ← commutative $\mathscr{H}_\lambda$，

(4.6)　sandwich cellular: $c^\lambda_{T,m,B}$ ⇜⇝  ← general $\mathscr{H}_\lambda$，

其中，我们假设前两幅图存在一个反对合。 ◇

例4.7。 研究夹心胞腔性有几个重要原因：首先，许多代数都具有“良好”的夹心基，而它们的胞基却表现不佳；例如 Brauer代数就是如此，如 [FG95、SS22], 中的 KLR 代数（A型和C型），参见 [MT24],，或各种图代数的变体，例如见 [LRMD23、Liu25]。

此外，有些代数根本不是胞腔代数，但仍然具有结构良好的夹心数据，例如更特殊类型的 KLR 代数，参见 [MT23a、MT23b], ，其中反对合“杂乱”的代数，例如见 [GW15], ，或仿射图代数 [KX12、HT25a]。

最后，夹心胞腔性的概念直接源于半群的相应理论，并对其作了部分推广；例如参见 [GMS09] 中的引理 4.12。特别是，“大多数”半群环都是夹心胞腔的，例如参见 [Eas06]。◇

例4.8。一个重要的例子是上文提到但不含莫比乌斯带的图代数¨。它们具有自然的夹心胞结构，参见 [FST25]。◇

关于夹心胞腔代数的最重要定理是 H-约化，它将 $\mathscr{A}$-模的单模与夹心代数上的单模联系起来。我们先给出以下定义和引理。下文中，除非另有说明，所有模均为左模。

De定义 4.9。如果存在，则 $\mathscr{A}$-模 M的一个顶点是一个极大的 $\lambda \in \mathcal{P}$，使得　　at

$$\mathbb{K}\big\{c^\lambda_{T,m,B} \,\big|\, T \in \mathcal{T}(\lambda), B \in \mathcal{B}(\lambda), m \in B_\lambda\big\}$$

不会消灭 M。对于 $\mathscr{A}_\lambda$ 替代 $\mathscr{A}$ 的情况，也采用相同的概念。 ◇

引理 4.10。 每个简单 $\mathscr{A}$-模都有一个顶点 $\lambda \in \mathcal{P}$ （与之唯一对应），简单 $\mathscr{A}_\lambda$-模也同样如此。

证明。 这是标准结果，参见例如 [TV23，引理 2。15]。 □

记号 4.11。 对于一类 X 模，我们用 $X / \cong$ 表示通过将同构的模视为相同而得到的同构类集合。◇

引理 4.12。*（H-约化）* 设 $\mathbb{K}$ 是一个域。

(a) 若 $\lambda \in \mathcal{P}$ 是一个顶点且 $\mathscr{H}_\lambda$ 是阿廷的，则存在双射

$$\begin{aligned} &\text{起始：}\ \{\text{顶点为 } \lambda\}/\cong \text{的简单 } \mathscr{A}\text{-模} \xleftrightarrow{1:1} J\text{-} \\ &\text{约化：}\ \{\text{顶点为 } \lambda\}/\cong \text{的简单 } \mathscr{A}_\lambda\text{-模} \xleftrightarrow{1:1} H\text{-约化：} \\ &\{\text{简单 } \mathscr{H}_\lambda\text{- 模}\}/\cong . \end{aligned}$$

此外，每个简单的 $\mathscr{A}$-模都以这种方式得到。

(b) 所有顶点为 λ 的 $\mathscr{A}$-模，其合成因子的顶点均为 μ，且满足 $\mu \leq_{\mathcal{P}} \lambda$。

证明。这是标准结果，参见例如 [TV23，定理 2。16]。 □

记号 4.13。在引理 4.12 适用的情况下，我们将 $\mathcal{P}^{ap} \subset \mathcal{P}$ 记作简单$\mathscr{A}$-模的顶点集合。◇

现在我们想要为 $\mathrm{MD}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n)$ 描述一个夹心胞腔数据。首先，固定一个非负奇整数 r，并考虑有理函数

$$Z_\alpha(T) = \frac{p_\alpha(T)}{1-T^r}, \qquad Z_\beta(T) = \frac{p_\beta(T)}{1-T^r}, \qquad Z_\gamma(T) = \frac{p_\gamma(T)}{1-T^r}, \tag{4.14}$$

其多项式次数满足定义 2.25中的条件。为了说明夹心胞结构的动机，我们有以下引理，参见 [Tub24b，引理 4B。9]:

引理 4.15. 设 $\mathrm{MD}_1(n)$ 是对称的。对于 $a \in \mathrm{MD}_1(n)$，存在唯一的如下形式的因子分解：

$$a = \tau \circ \sigma_\lambda^{\mathcal{M}} \circ \beta$$

(i) β 和 τ 具有最少数量的交叉、把手点和 *Möbius* 点；

(ii) β 不含杯、 Δ或 η；

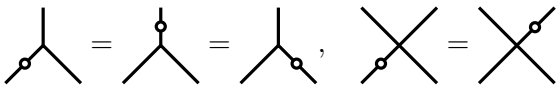
(iii) τ 不含帽、 μ或 ϵ；

(iv) $\sigma_\lambda^{\mathcal{M}} \in \mathcal{M} \wr \mathrm{S}_\lambda$ 具有最少的 λ，其中 $\mathcal{M}$ 是具有以下表示的幺半群：

$$\mathcal{M} = \langle a, b \,|\, ab = ba,\ ab = b^3,\ a^K = a^{K-r} \rangle.$$

类似地，当$\mathrm{MD}_1(n)$ 是平面的时，对于 $a \in \mathrm{MD}_1(n)$ 也有类似结论，但需加上 $\sigma_\lambda^{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}^\lambda$。 □

证明。 (i)–(iii)与 定理 3.9 的证明相同。首先注意，由于关系 ¨，莫比乌斯点可以沿着弦自由移动 (2.19) 和 (2.20) （镜像图由其他关系推出）。孔也可以自由移动，因为



（及其镜像）可由关系 (2.6)、(2.8)–(2.11)和 (2.14) 得出。因此，出现在连接图底部与顶部的弦上的任意孔或莫比乌斯点，都可以移动到中部。这时，条件 (i)–(iii) 可由 [Tub24b、引理 4B9] 得出。

对于最后一个条件 (iv)，在连接图底部与顶部的彼此分离的弦上有孔和莫比乌斯点，这些弦可能包含交叉，也可能不包含交叉。显然，在前一种情形下，弦的构型由 $\mathcal{M} \wr \mathrm{S}_\lambda$ 中的一个元素唯一确定；在后一种情形下，则由 $\mathcal{M}^\lambda$ 唯一确定。□

记号 4.16. 就引理 4.15中的因子分解而言，我们称 λ 为贯穿线的数量， β 为底部， τ 为顶部，而 $\sigma_\lambda^{\mathcal{M}}$为中部， a。◇

命题 4.17. 以下内容给出了$\mathrm{MD}_{\alpha、\beta、\gamma}(n)$的对合沙威奇元胞数据：

- 中间偏序集 $\mathcal{P}$ 由非负整数集合构成，其夹层序为反向标准序 $<_{\mathcal{P}}$；
- 对于 $\lambda \in \mathcal{P}$，顶/底集合由所有具有固定数量贯穿线 λ 的 $a \in \mathrm{MD}_1(n)$ 的顶部/底部给出；
- 对于 $\lambda \in \mathcal{P}$，有 $\mathscr{H}_\lambda = \mathcal{M} \wr \mathrm{S}_\lambda$；而在平面情形下则为 $\mathscr{H}_\lambda = \mathcal{M}^\lambda$（我们指的是相应幺半群的 $\mathbb{K}$-线性化，称其为夹心代数时均如此）；
- 单射 C 是引理 引理 *4.15*给出的显然映射；
- 对合 $(_)^\star$ 将各个图示关于水平线作反射。

证明。 根据构造，$\mathrm{MD}_1(n)$ 的元素是 $\mathrm{MD}_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$ 的基，因此 (AC_1) 成立。

对于 (AC_2)，我们首先注意到，当孔和 M¨obius 点为恒等元时（这迫使$p_\alpha(T) = p_\beta(T) = p_\gamma(T) = \alpha_0$ 以及 $r = 1$ 在 (4.14)中成立），存在一个类似的胞腔数据，其中 $\mathcal{M}$ 是平凡幺半群 [Tub24b, 命题 4B。10]。由于孔和 M¨obius 点可以自由移动，我们只需证明，在夹心代数 $\mathcal{M} \wr \mathrm{S}_\lambda$（或在平面情形下）中的乘法不会引入依赖于元素的系数。相关的关系只有 M¨obius 关系（它不会引入任何系数）以及柄关系：

$$K \left| \circ \right. - a_1 \cdot (K-1) \left| \circ \right. + a_2 \cdot (K-2) \left| \circ \right. - \ldots + (-1)^{\deg q} a_{\deg q} \cdot (K - \deg q) \left| \circ \right. = 0,$$

根据 (4.14)，在我们的语境中，它简化为

$$K \left| \circ \right. = (K-r) \left| \circ \right.,$$

因此也不会引入任何系数。

此外，显然可以验证，左 $\Delta(\lambda)$（右 $\nabla(\lambda)$）胞腔，其元素定义为对所有具有固定数量贯穿线的 $a \in \mathrm{MD}_1(n)$的顶部与中部（中部与底部）取 $\mathbb{K}$-线性组合，满足最后一个条件（AC_3）。

最后，给定映射（_）*，定义 4.4 中的条件显然成立。 □

在描述上文给出的 $\mathrm{MD}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n)$ 的夹心胞腔数据的一些性质之前，我们先简要回顾带基代数的胞腔概念及其与夹心胞腔数据的联系；这对接下来的两节很重要。

假设代数 $\mathscr{A}$有一个基 $B_{\mathscr{A}}$，因此（$\mathscr{A}$，$B_{\mathscr{A}}$）是一个（带基）对。对于 a，b，$c \in B_{\mathscr{A}}$，我们记 $b \Subset ca$，如果将 ca 按 $B_{\mathscr{A}}$展开时，b 以非零系数出现在 ca中。

定义 4.18. 预拟序

$$(a \leq_l b) \Leftrightarrow \exists c : b \Subset ca, \quad (a \leq_r b) \Leftrightarrow \exists d : b \Subset ad, \quad (a \leq_{lr} b) \Leftrightarrow \exists c, d : b \Subset cad$$

在 $B_{\mathscr{A}}$ 上称为左、右和双侧胞序。 ◇

注 4.19. 我们的胞序约定遵循胞状代数理论中通行的约定，但与幺半群理论中通常采用的约定相反。◇

定义 4.20. 由以下关系定义的等价类

$(a \sim_l b) \Leftrightarrow (a \leq_l b \text{ and } b \leq_l a)$, $(a \sim_r b) \Leftrightarrow (a \leq_r b \text{ and } b \leq_r a)$, $(a \sim_{lr} b) \Leftrightarrow (a \leq_{lr} b \text{ and } b \leq_{lr} a)$

分别称为左胞腔、右胞腔和双侧胞腔。一个 H-胞腔 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{L}, \mathcal{R}) = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ 是一个左胞腔 $\mathcal{L}$ 与一个右胞腔 $\mathcal{R}$的交集。◇

记号 4.2 1. 我们也沿用 J-胞 这一说法来代替双侧胞，遵循 [Gre51]中的记号。 ◇

由于左、右和 J-胞序在左、右和 J-胞上分别诱导出预拟序 [Tub24b，引理 2B。5], 因此，按各自的预拟序为胞编上指标是有意义的。例如，给定一个 $\mathcal{P}$-胞的 J指标集，记号 $\mathcal{J}_\lambda$，$\lambda \in \mathcal{P}$，表示固定的 J-胞。

现在我们引入幂等元 J-胞的概念：

记号 4.22. 如果一个等式等在模 $\mathscr{A}^{>_{lr}\lambda} = \mathbb{K}\{\bigcup_{\mu \in \mathcal{P}, \mu >_{lr} \lambda} \mathcal{J}_\mu\}$ 的意义下成立，那么称其在高阶项 意义下成立； $\mathscr{A}^{>_{lr}\lambda} = \mathbb{K}\{\bigcup_{\mu \in \mathcal{P}, \mu >_{lr} \lambda} \mathcal{J}_\mu\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的一个双侧理想。◇

定义 4.23. 如果一个 J-胞腔 $\mathcal{J}$ 的 $\mathbb{K}$-线性张成空间包含一个（非零）伪幂等元（模高阶项），也就是说，存在 $e \in \mathbb{K}\mathcal{J} \setminus \{0\}$，使得对于 $s(e) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$，有 $e^2 = s(e) \cdot e$（模 $\mathscr{A}^{>_{lr}\lambda}$），那么我们称 $\mathcal{J}$ 为幂等元。如果 $\mathcal{J}$ 本身包含一个（模高阶项的）伪幂等元，我们就称 $\mathcal{J}$ 是严格幂等的 。对于 H-胞腔，我们也使用相同的术语。◇

记号 4.24. 我们用 $\mathcal{J}_\lambda(e)$、 $\mathcal{H}_\lambda(e)$ 等表示幂等胞腔。 ◇

引理 4.25. 对于这一对 $(\mathscr{A}, B_{\mathscr{A}})$:

(a) 每个 H-胞腔都包含于某个 J-胞腔中，且每个 J-胞腔都是若干 H-胞腔的不交并。**(b)** 若 $s(e) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ 可逆，则 $\mathscr{H}_\lambda = \mathbb{K}\mathcal{H}_\lambda(e)/\mathscr{A}^{>_{lr}\lambda}$ 是以 $s^{-1}e()e$为恒等元的代数。该代数是 —— $\mathscr{A}^{\leq_{lr}\lambda}/\mathscr{A}^{>_{lr}\lambda}$ 和 $\mathscr{A}^{\lambda} = \mathscr{A}^{\leq_{lr}\lambda} \cap \mathbb{K}\mathcal{J}_\lambda$ 的子代数。

证明。 参见 [Tub24b，引理 2B。15]。 □

此外，在这一对 $(\mathscr{A}, B_{\mathscr{A}})$ 是对合的这一特殊情形下，即它存在一个二阶双射 $_^{\star}\colon B_{\mathscr{A}} \to B_{\mathscr{A}}$，该双射在 $\mathscr{A}$ 上诱导出一个反对合，此时存在互逆双射 $\{\text{左胞腔}\} \leftrightarrow \{\text{右胞腔}\}$，它们保持 J-胞腔中的包含关系，参见 [Tub24b，引理 2B。18]。

与夹心胞腔代数的联系如下:

引理 4.26。 对于任意夹心胞腔代数 $\mathscr{A}$，我们得到一对 $(\mathscr{A}, B_{\mathscr{A}})$，使得上述理论适用于以下胞腔结构:

(i) 基 $B_{\mathscr{A}}$ 是夹心胞腔基。**(ii)** 偏序集可以取为（必要时改变阶） $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, <_{lr})$。**(iii)** 集合 $\mathcal{T}(\lambda)$ 为 $\mathcal{J}_\lambda$ 中的右胞腔编指标，而 $\mathcal{B}(\lambda)$ 为 $\mathcal{J}_\lambda$ 中的左胞腔编指标。**(iv)** 同一个 J-胞腔中的所有左胞腔、右胞腔和 H-胞腔大小相同。**(v)** 若 $\mathcal{J}_\lambda$ 是幂等元，则相应的夹心代数和胞腔代数分别与 $\mathscr{H}_\lambda$ 和 $\mathscr{A}^{\lambda}$ 同构。

证明。 参见 [Tub24b，定理 2B。19]。 □

换言之，对于任意（带对合的）夹心胞腔代数，我们可以关联一个（带对合的）夹心对 $(\mathscr{A}, B_{\mathscr{A}})$。最后，给定 命题 4.17中描述的夹心胞腔数据，我们描述 $\mathrm{MD}_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$ 的胞腔，参见 [Tub24b，命题 4B。10]:

命题 4.27。 对于对 $\left(\mathrm{MD}_{\alpha、\beta、\gamma}(n)，\mathrm{MD}_1(n)\right)$，我们有如下结论。

(a) $MD_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$ 的 J-胞腔由具有固定数量贯穿线 λ 的图示给出。 $\leq_{lr}$-阶是全序，并且随着贯穿线数量减少而递增。总结见 *(4.28)*。*(b)* $MD_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$ 的左（右）胞腔由固定图示底部（顶部）的图示给出。 $\leq_l$ 和 $\leq_r$-阶随着贯穿线数量减少而递增。关于 $\#\mathcal{L}_\lambda = \#\mathcal{R}_\lambda$，见 *(4.28)*。*(c)* 假设所有求值参数均可逆。则 $MD_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$ 的所有 J-胞腔都是严格幂等的。一般情形将在本节末尾讨论。*(d)* 对 $\left(MD_{\alpha,\beta,\gamma}(n), MD_1(n)\right)$ 是一个对合夹心对；对于非平面的 $MD_1(n)$，它既不是来自胞腔代数，也不是来自仿射胞腔代数。

我们有如下表格：

(4.28)

幺半群	$\mathcal{P}=\mathcal{P}^{ap}$ (*)	$\#\mathcal{L}_\lambda$	$\mathscr{H}_\lambda$
$\mathrm{MPa}_1(n)$	$\{n<_{lr}n-1<_{lr}\dots<_{lr}0\}$	$\sum_{t=0}^{n}\left\{ {n \atop t} \right\}\binom{t}{\lambda}(3K)^{t-\lambda}$	$\mathcal{M}\wr\mathrm{S}_\lambda$
$\mathrm{MPa}_1^p(n)$	$\{n<_{lr}n-1<_{lr}\dots\dots<_{lr}0\}$	$\frac{4\lambda+2}{2n+2\lambda+2}\binom{2n}{n-\lambda}/\binom{2n-2}{n-1}(3K)^{n-\lambda}$	$\mathcal{M}^\lambda$
$\mathrm{MRoBr}_1(n)$	$\{n<_{lr}n-1<_{lr}\dots<_{lr}0\}$	$\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{2t-\lambda}(2t-1)!!(3K)^{n-\lambda-t}$	$\mathcal{M}\wr\mathrm{S}_\lambda$
$\mathrm{MMo}_1(n)$	$\{n<_{lr}n-1<_{lr}\dots<_{lr}0\}$	$\sum_{t=0}^{n}\frac{2t+1}{\lambda+t+1}\binom{n}{\lambda+2t}\binom{\lambda+2t}{t}(3K)^{n-\lambda-t}$	$\mathcal{M}^\lambda$
$\mathrm{MBr}_1(n)$	$\{n<_{lr}n-2<_{lr}\dots<_{lr}0,1\}$	$\binom{n}{\lambda}(n-\lambda-1)!!(3K)^{(n-\lambda)/2}$	$\mathcal{M}\wr\mathrm{S}_\lambda$
$\mathrm{MTL}_1(n)$	$\{n<_{lr}n-2<_{lr}\dots<_{lr}0,1\}$	$\frac{(n+\lambda+2)!}{(n-\lambda)!!(n+\lambda+2)!!}(3K)^{(n-\lambda)/2}$	$\mathcal{M}^\lambda$
$\mathrm{MRo}_1(n)$	$\{n<_{lr}n-1<_{lr}\dots<_{lr}0\}$	$\binom{n}{\lambda}(3K)^{n-\lambda}$	$\mathcal{M}\wr\mathrm{S}_\lambda$
$\mathrm{MRo}_1^p(n)$	$\{n<_{lr}n-1<_{lr}\dots<_{lr}0\}$	$\binom{n}{\lambda}(3K)^{n-\lambda}$	$\mathcal{M}^\lambda$
MS_n	$\{n\}$	1	$\mathcal{M}\wr\mathrm{S}_\lambda$
MS_n^p	$\{n\}$	1	$\mathcal{M}^\lambda$

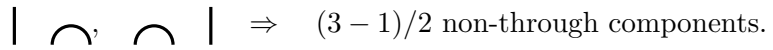
(*) 这假设所有求值参数都是可逆的；
一般情形在 命题 4.27 的证明末尾给出。

证明。 令 $\mathscr{A}=\mathrm{MD}_{\alpha,\,\beta,\,\gamma}(n)$。

(a)。该结果是标准结论，故略去。

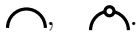
(b)。如上所述，除 $\#\mathcal{L}_\lambda$的计数和 M¨obius 点的计数外，其余都显而易见：由于孔和 M¨obius 点可以沿弦自由移动，我们需要计数带点的非贯通弦的可能构型。忽略孔和 M [obius点，利用 Tub24b 命题 4B。10] 得到整体计数，再结合简单的组合论论证，便可得到每个计数中涉及未连接到贯穿线的部分数目的那一部分；将其记为 x。由于根据 M $K-1$ obius 关系，每个部分最多可带有 个孔和两个 M¨obius 点，因此我们必须将计数中相关的部分乘以 $(3K)^x$。

示例 4.29。 我们以 Temperley–Lieb 情形为例，设 $n=3$、 $\lambda=1$ 和 $K=2$。该幺半群有两个为左胞腔编指标的半图：



$\Rightarrow$ $(3-1)/2$ non-through components.

非贯通分量可以标记为带有 0 个或 1 个把手点



而这两种情况分别还可以带有 0、1 或 2 个 M¨obius 点，例如



因此，总体缩放因子为 $(3\cdot 2)^{(3-1)/2}$。 ◇

所有其他图代数都可以照原样处理。（对于平面分拆情形，可以利用它与弦数加倍的 Temperley–Lieb 情形之间的同构，参见例如 [HR05，（1-5）] 关于这一同构的讨论。）

(c)。为了证明 $\mathcal{P}=\mathcal{P}^{ap}$，我们使用以下引理。

引理 *4.30*。 *</style}*一个 H-胞腔是严格幂等的，当且仅当将其视为同一代数的一个 H-胞腔（但其



（因此，所有把手点和莫比乌斯点都会消失。）

证明。 这里唯一需要注意的是，任何带有（把手或莫比乌斯）点的伪幂等元，其底层图都必须不含任何点。□

注意，根据 引理 4.30，现在可以忽略孔和莫比乌斯点，并令 $p_\alpha(T)=\alpha_0$。那么，根据 J-胞腔中都存在幂等元，这由 [Tub24b，命题 4B，10] 和 [FST25，第 2]节可知；在一般情形下，这些幂等元依然存在，不过归一化因子可能有所不同。

现在我们描述顶点的完整列表。设**x** 为参数集合 α,β,γ 中的任意一个。

(4.31)

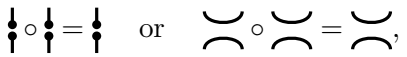
幺半群	$\mathcal{P}^{ap}$： $x_k=0$ 对所有 k，$\mathbf{x}$	$\mathcal{P}^{ap}$： $x_k\neq 0$ 对某些 k，$\mathbf{x}$
$\mathrm{MPa}_1(n)$	$\{0,\dots\dots\ n\}\setminus\{0\}$	$\{0,\dots\ n\}$
$\mathrm{MPa}_1^p(n)$	$\{0,\dots\ n\}\setminus\{0\}$	$\{0,\dots\ n\}$
$\mathrm{MRoBr}_1(n)$	$\{0\text{或}1,\dots\ n-2,n\}\setminus\{0\}$	$\{0,\dots\ n\}$
$\mathrm{MMo}_1(n)$	$\{0\text{或}1,\dots\ n-2,n\}\setminus\{0\}$	$\{0,\dots\ n\}$
$\mathrm{MBr}_1(n)$	$\{0\text{或}1,\dots\ n-2,n\}\setminus\{0\}\ (\forall k\geq 1)$	$\{0\text{或}1,\dots\ n-2,n\}\ (\exists k\geq 1)$
$\mathrm{MTL}_1(n)$	$\{0\text{或}1,\dots\ n-2,n\}\setminus\{0\}\ (\forall k\geq 1)$	$\{0\text{或}1,\dots\ n-2,n\}\ (\exists k\geq 1)$
$\mathrm{MRo}_1(n)$	$\{n\}$	$\{0,\dots\ n\}$
$\mathrm{MRo}_1^p(n)$	$\{n\}$	$\{0,\dots\ n\}$
MS_n	$\{n\}$	$\{n\}$
MS_n^p	$\{n\}$	$\{n\}$

引理 4.32. 顶点集合如上所示。

证明。 以下操作可用于构造幂等元，同时减少贯穿弦的数量，且不会产生内部分量，参见 [FST25，定理 2C。6]:



此外，每当 $\mathrm{D}_1(n)$ 使用

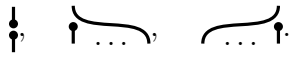


来构造幂等元时，只需向由此得到的顶部构件添加适量的孔和 M¨obius 点，使乘法因子非零，例如



在 $\beta_1\neq 0$ 等情形下。

剩下唯一困难的部分，是证明在条件$x_k=0$ 对所有 k,$\mathbf{x}$成立时，在 $\mathrm{MD}_1(n)\in\{\mathrm{MRoBr}_1(n),\mathrm{MMo}_1(n)\}$ 的情形下，不可能为$\{0\text{或}1、\dots\ n-3,n-1\}\setminus\{0\}$ 构造幂等元。我们首先注意到，这样一个（未装饰的）幂等元必须包含 ，因为贯穿线的数量相较于 n减少了奇数条。此外，很容易看出，以下结构不能用于构造幂等元:



因此，幂等元必须具有如下形式



或者是它关于虚线的镜像。然而，这是不可能的，因为 n 是有限的，而序列必须最终以图的顶部或底部的一条贯穿线，或 , , 结束；这些都无法得到幂等元。 □

(d). 我们利用如下结果：给定任意一个幺半群 S（带有反对合），若其 J-胞腔要么是幂等的，要么包含大小为一的 H-胞腔，则可以构造一个（对合的）夹心对 $(\mathbb{K}\mathrm{S},\mathrm{S})$ [Tub24b，命题 2E.1]。取 $\mathrm{S}=\mathrm{MD}_1(n)$，则夹心对 $(\mathbb{K}\mathrm{MD}_1(n),\mathrm{MD}_1(n))$ 的构造可以推广到 $\left(\mathrm{MD}_{\alpha,\beta,\gamma}(n),\mathrm{MD}_1(n)\right)$。 □

5. Classification

现在我们对 $\mathbb{K}\mathrm{MD}$ 的线性表示$_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n)$ 进行分类，相关结论见下文的 定理 5.2 以及引理 4.12。

考虑夹心对 $\left(\mathrm{MD}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n),\ \mathrm{MD}_1(n)\right)$。简单 $\mathcal{P}^{ap}$ MD 的顶点$_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n)$-¯模的集合见(4.28)。当 $s=1+3r$ 且 $\mathbb{K}=\mathbb{K}$ 具有特征零时，令；更一般地

(5.1)

$$s=1+N_{\mathbb{K}}(r)+N_{\mathbb{K}}(2r),$$

其中 $N_{\mathbb{K}}(k)$ =#{是 $\mathbb{K}[x]$} 中 $x^{m(k)}-1$ 的首一不可约因子

并且 $m(k)$ 由 $m(k) = k$ 在 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ 时显式定义，或由某个非负整数 e 和 $p = \mathrm{char}(\mathbb{K}) > 0$, $p \nmid m(k)$ 隐式定义。

令 $p(\lambda)$表示 λ的（整数）分拆数。

定理 5.2。给定 $\lambda \in \mathcal{P}^{ap}$:

¯*(i)* 在特征零的 $\mathbb{K} = \mathbb{K}$ 非平面情形下，恰有

$$\sum_{(\lambda)} p(\lambda_1) \cdots p(\lambda_s)$$

顶点为 λ的简单 $\mathrm{MD}_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$-模，其中求和遍及所有满足 $\sum \lambda_i = \lambda$的 s元非负整数元组$(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$; 对于一般的 $\mathbb{K}$，这是一个上界;

(ii) 在平面情形下，恰有 s^λ 个顶点为 λ的简单 $\mathrm{MD}_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$-模。

注记 5.3。我们对 $\mathbb{K}$ 在定理 5.2 的非平面情形中施加了一项限制，这是因为我们使用广义共轭类来枚举幺半群的简单表示。（在平面情形中无需此类限制，因为该论证对任意域均成立。）[MQS15] 的结果应当可以消除这一限制。 ◇

本节余下部分将致力于证明 定理 5.2，其主要依据是 H-约化引理 4.12，以及对 $\mathcal{M}$-简单对象和 $\mathcal{M} \wr \mathrm{S}_\lambda$-简单对象更一般的分类。

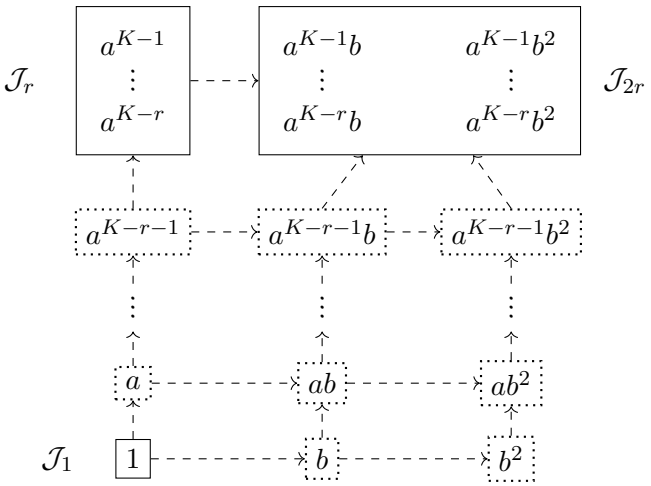
我们首先将上一节概述的一般概念改用于幺半群 $\mathcal{M}$ 的情形，以对其简单表示进行分类。具体而言，我们希望描述 $\mathcal{M}$ 的J-胞腔，相关命题如下:

命题 5.4。在下图*(5.5)*中:

(a) J-胞腔（即左胞腔、右胞腔和 H-胞腔）在 $\mathcal{M}$ 中用方框（虚线或实线）标示; *(b)* 实线方框表示一个 J-胞腔包含一个幂等元，该幂等元也是下列 J-胞腔群结构的单位元: $\mathcal{J}_1$: 平凡群; $\mathcal{J}_r$: $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$，阶为 r的循环群; $\mathcal{J}_{2r}$: $\mathbb{Z}/2r\mathbb{Z}$，阶为 $2r$ 的循环群。

(c) 虚线箭头表示 J-胞腔上的预序。

(5.5)



证明。*(a)*。首先注意到，交换幺半群 $\mathcal{M}$ 中的每个元素都可以写成 $a^i b^j$ 的形式，其中 $0 \le i < K$, $0 \le j \le 2$，因此每个元素都包含在图中。此外， J-胞腔既是左胞腔，也是右胞腔。

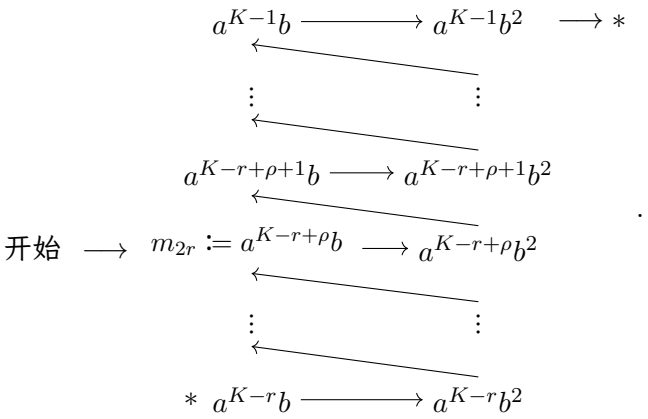
接下来，对于任意给定的元素 $a^k b^\ell$，满足 $0 \le k < K - r$、 $0 \le \ell \le 2$，在 $\mathcal{M}$ 中不存在任何元素可与之相乘以降低 a 的幂: 反复乘以 a，要么使 a 的幂增加至 $K - 1$，超过该值后幂始终至少为 $K - r$，因为 $a^K = a^{K-r}$; 另一方面，反复乘以 b，根据关系 $ab = b^3$，要么使 b 的幂增加，要么 a，于是又回到前一种情况。因此，图中 $(K - r)th$ 以下的各行构成彼此分离的 J-胞腔。由于在保持 a 的幂不变的同时也无法降低 b 的幂，相应的各列也属于彼此分离的 J-胞腔。

现在我们转而考察位于 $(K-r)th$ 行上或其上方的元素。首先， b 的非零次幂绝不可能被化为零次幂，因此，最后两列必定与第一列构成彼此分离的 J-胞腔。对于任意两个元素 a^k、 $a^{k'}$、 $K-r \leq k < k' < K$，显然有 $a^{k'-k} \cdot a^k = a^{k'}$；另一方面， $a^{(K-k')+[k-(K-r)]} \cdot a^{k'} = a^{K+[k-(K-r)]} = a^{(K-r)+[k-(K-r)]} = a^k$，因此第一列构成一个单独的 J-胞腔。

根据前面的论证，最后两列，分别记为 c 和 c'，也必须各自位于单个 J-胞中。显然，将一个元素乘以 c 会得到 c' 中的一个元素。将 c' 中的一个元素乘以 b，所得元素的 b 的幂降低一阶，且 a 至少为 $K-r$，即该元素属于 c。因此， c 和 c' 构成一个单独的 J-胞。

(b)。 $\mathcal{J}_1$ 的情形是显然的。令 $\rho \equiv -K$ 模 r, $0 \leq \rho < r$；换言之，对于某个整数 q，有 $\rho + K = qr$，其中 $qr \geq K > 0$，因此由于 $r > 0$，有 $q > 0$。通过归纳法，我们还得到对于任意整数 $\delta \geq 0$， $a^{K-r+\delta r} = a^{K-r}$。注意， $a^{K-r+\rho} \cdot a^{K-r+\rho} = a^{(K-r+\rho)+(-r+qr)} = a^{(K+\rho)+(-r+qr)} = a^{K-r+\rho}$ 是 $\mathcal{J}_r$ 中的一个幂等元。现在令 $m_r = a^{K-r+\rho+1}$。不难看出， m_r 生成了 $\mathcal{J}_r$ 中的所有 r 元素，因为对于任意整数 $\delta \geq 0$, 都有 $a^{K-r+\delta} \cdot a^{K-r+\rho+1} = a^{(K-r+\delta)+(-r+qr+1)} = a^{(K+\delta)+(-r+qr+1)} = a^{K-r+\delta+1}$。

考虑到 $\mathcal{J}_{2r}$，首先我们设 $\rho' \equiv -K-1 \bmod r$, $0 \leq \rho' < r$，使得 $\rho' + K + 1 = q'r$，其中某个$q' > 0$ 如上所述。于是可得， $a^{K-r+\rho'}b^2 \cdot a^{K-r+\rho'}b^2 = a^{(K-r+\rho')+(-r+q'r-1)} \cdot ab^2 = a^{K-r+\rho'}b^2$是 $\mathcal{J}_{2r}$中的一个幂等元。设 $m_{2r} = a^{K-r+\rho}b$，其中 ρ 如上所述。由于 $a^{K-r+\rho}$ 在$\{a^{K-r}, \dots a^{K-1}\}$中充当恒等元，反复将 m_{2r}与自身相乘，得到如下 $2r$ 循环：



最后，利用与*(a)*中类似的论证，可以很容易看出不存在其他幂等元J-胞腔。

(c)。乘以 b 会沿着 J-胞腔水平推进，而乘以 a 则会垂直推进。将两者结合起来即可得到该结果。□

采用一种适用于幺半群的 H-约化版本，也称为***Clifford-Munn-Ponizovskiĭ*** 定理 （详情请参阅 [Ste16，特别是定理 5。5] ，或参见 [GMS09]），我们得出：

$$\{\text{simple } \mathbb{K}\mathcal{M}\text{-modules}\} / \cong$$
$$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$$
$$\{\text{simple } \mathbb{K}\mathcal{J}_1\text{-, } \mathbb{K}\mathcal{J}_r\text{-, or } \mathbb{K}\mathcal{J}_{2r}\text{-modules}\} / \cong .$$

换言之，存在 s 个单 $\mathbb{K}\mathcal{M}$-模，其中 s 如(5.1)所示。根据以下众所周知的结果引理 5.6：

引理 5.6。 简单 $\mathbb{K}[\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}]$-模的同构类数等于 $N_{\mathbb{K}}(k)$。

证明。 由于 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m(k)\mathbb{Z}$，我们有 $\mathbb{K}[\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}] \cong \mathbb{K}[\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\mathbb{Z}/m(k)\mathbb{Z}]$。由于代数 $\mathbb{K}[\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}]$ 是局部的，因此只有一个简单模（即平凡模），所以 $\mathbb{K}[\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}]$ 的简单模恰好是 $\mathbb{K}[\mathbb{Z}/m(k)\mathbb{Z}]$ 的简单模。最后， $\mathbb{K}[\mathbb{Z}/m(k)\mathbb{Z}] \cong \mathbb{K}[x]/(x^{m(k)}-1)$，其简单模对应于 $x^{m(k)}-1$的不可约因子。□

现在我们转而关注幺半群的花环积的分类 $\mathcal{M} \wr \mathrm{S}_\lambda$。为此，我们主要遵循 [JK81第 4], 章中关于给定群时 $G \wr \mathrm{S}_\lambda$ 的表示的描述 G，并依据 [Ste16]将其改编到幺半群情形。

固定一个有限幺半群 M。我们从基本定义开始:

定义 5.7。（幺半群缠绕积定义为集合

$$M \wr \mathrm{S}_\lambda := \{(f;\pi) \,|\, f : \{1,\dots,n\} \to M, \pi \in \mathrm{S}_\lambda\},$$

以及二元运算

$$(f;\pi)(f';\pi') = (f f'_\pi; \pi\pi')$$

其中

$$f_\pi := f \circ \pi^{-1} \in M^n$$

and

$$(ff')(i) = f(i) \cdot f'(i),\ i \in \{1,\dots,n\}$$

在 M^n 上定义乘法。 ◇

容易证明， $M \wr \mathrm{S}_\lambda$ 确实是一个幺半群，其单位元为 $(e; 1_{\mathrm{S}_\lambda})$，其中$e(i) := 1_M$对所有 $i \in \{1,\dots,n\}$ 均成立，并且

$$(f_\pi)_{\pi'} = f_{\pi'\pi}. \tag{5.8}$$

根据下文将要介绍的 M 的广义共轭类 这一概念，有如下关键事实:

¯**引理 5.9.** 假设 $\mathbb{K} = \mathbb{K}$ 的特征为零。简单 $\mathbb{K}M$-模的同构类数量与 M 的广义共轭类数量相同。

证明。 众所周知，参见 [Ste16，定理 7。10]。 □

为了描述广义共轭类，我们先总结有限幺半群（或更一般地说，半群）的一些性质。首先，取一个有限半群 S ，并令 $s \in S$。显然，存在最小的正整数 c，称为 s 的指标 ，使得对某个 $d > 0$ 有 $s^c = s^{c+d}$ ；满足此条件的最小 d 称为 s 的周期 。

引理 5.10. 给定指标为 c 、周期为 d 的 $s \in S$ ，有如下结论:

(i) $s^i = s^j$ 当且仅当 $i = j$ 或 $i,\ j \geq c$ 和 $i \equiv j$ 模 d。 *(ii)* $\langle c\rangle$ 的子半群 $C = \{s^n \,|\, n \geq c\}$ 是一个阶为 d 的循环群。 C 的恒等元是 $\langle c\rangle$ 中唯一的幂等元，且由 s^m 给出，其中 $m \geq c$ 且 $m \equiv 0$ 模 d；将该元素统记为 s^ω。若 $s^{\omega+1} := s^\omega s$，则 $C = \langle s^{\omega+1}\rangle$。

(iii) 存在一个正整数 a ，使得对于所有 $s \in S$， $s^a = s^\omega$ 。

证明。 关于*(i)*和*(ii)*的证明分别见 [Ste16]的命题 1.1 和推论 1.2。最后，对于*(iii)*，若 S 的阶为 n，则 $n!$ 就是这样一个整数（见 [Ste16，注 1。3]）。 □

现在在 $\sim$ 上定义关系 M 如下： $m \sim n$ 当且仅当存在 $x,\ x'$ 使得 $xx'x = x,\ x'xx' = x',\ x'x = m^\omega,\ xx' = n^\omega$，并且 $xm^{\omega+1}x' = n^{\omega+1}$。关系 $\sim$ 是 M[Ste16，命题 7。2] 中的一个等价关系，而 $\sim$类就是广义共轭类。

示例 5.11。 如果 M 是一个群，那么对于所有 $m \in M$， m^ω 都是恒等元，而关系 $\sim$ 就是标准共轭。因此，可以将 x' 视为 x的广义逆，并将 $m^{\omega+1}$ 和 $n^{\omega+1}$ 视为共轭。◇

注记 5.12. 从现在起，为了具体起见，我们可以将 m^ω 视为由 m^a 对所有 $m \in M$给出，利用 引理 5.10(iii)。◇

现在的目标是确定 $M \wr \mathrm{S}_\lambda$ 的广义共轭类数量。首先，假设 M 的广义共轭类由 C^1，...， $C^{\mathscr{C}}$ 给出，并考虑元素 $(f;\ \pi) \in M \wr \mathrm{S}_\lambda$。我们将一个元素与 π 的 νth 循环因子 $(j_\nu \dots \pi^{\ell_\nu - 1}(j_\nu))$ 相关联

$$\begin{aligned} m_\nu(f;\pi) &:= f(j_\nu) f(\pi^{-1}(j_\nu)) \cdots f(\pi^{-\ell_\nu+1}(j_\nu)) \\ &= f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}}(j_\nu) \end{aligned}$$

的 M称为 νth 循环乘积（f； π），参见 [JK81，4.2。1]；注意，该元素在广义共轭下是良定义的:

引理 5.13。对于所有 ν，t，$f\cdots f_{\pi^{\ell_\nu-1}}(j_\nu)\sim f\cdots f_{\pi^{\ell_\nu-1}}(\pi^t(j_\nu))$。

证明。证明与 [JK81，4.2 节相同。5] 因为我们还有 $m'm\sim mm'$ 对所有 m'，$m\in M$。令 $x=m'(mm')^{2a-1}=(m'm)^{2a-1}m'$ 以及 $x'=(mm')^am=m(m'm)^a$，即可得到后一个结果，参见 [Ste16，命题 7。3]。□

引理 5.13 启发了以下关于循环乘积的刻画：

定义 5.14。构造如下的 $r\times\lambda$ 矩阵

$$a(f;\pi):=(a_{ik}(f;\pi))$$

其中，$a_{ik}(f;\pi)$ 表示与一个 k-循环相关联且属于 M 的广义共轭类 C^i 的循环乘积数量。我们将此矩阵称为 $(f;\pi)$ 的类型。◇

现在我们想要证明，$M\wr S_\lambda$ 中的两个元素类型相同，当且仅当它们共轭；参见 [JK81，定理 4.2。8]。我们先陈述一些预备结果：

引理 5.15. 给定一个元素 $(f;\pi)\in M\wr S_\lambda$，有如下结论：

(i) $a(f;\pi)=a(f_{\pi'};\pi'\pi\pi'^{-1})$; *(ii)* 若 $a(f;\pi)=a(f';\pi')$，则存在一个 $\pi''\in S_\lambda$，满足 $\pi=\pi''\pi'\pi''^{-1}$，且具有如下性质：对每个 ν，$m_\nu(f;\pi)\sim m_\nu(f'_{\pi''};\pi)$。

证明。关于 *(i)* 和 *(ii)* 的证明分别与 [JK81, 4.2.6]和 [JK81, 引理 4.2.7]完全相同。□

引理 5.16. $M\wr S_\lambda$ 中的两个元素 $(f;\pi)$ 和 $(f';\pi')$ 具有如下性质：$(f;\pi)\sim(f';\pi')$ 当且仅当 $a(f;\pi)=a(f';\pi')$。

证明。假设 $(f;\pi)\sim(f';\pi')$。那么存在 $(x;\sigma)$、$(x';\sigma')\in M\wr S_\lambda$，使得

(a) $(x;\sigma)(x';\sigma')(x;\sigma)=(x;\sigma)$; (b) $(x';\sigma')(x;\sigma)(x';\sigma')=(x';\sigma')$; (c) $(x';\sigma')(x;\sigma)=(f;\pi)^\omega$; (d) $(x;\sigma)(x';\sigma')=(f';\pi')^\omega$; (e) $(x;\sigma)(f;\pi)^{\omega+1}(x';\sigma')=(f';\pi')^{\omega+1}$.

由 (a) 立即可得 $\sigma'=\sigma^{-1}$，因此，由 (c)、(d) 和 (e) 分别可得 $|\pi|\,|a$、$|\pi'|\,|a$ 和 $\pi'=\sigma\pi\sigma^{-1}$。

现在只考虑上文（a）–（e）的 M 分量：

(i) $xx'_\sigma x=x$;

(ii) $x'x_{\sigma^{-1}}x'=x'\Rightarrow x'_\sigma xx'_\sigma=x'_\sigma$;

(iii) $x'x_{\sigma^{-1}}=ff_\pi\cdots f_{\pi^{a-1}}\Rightarrow x'_\sigma x=f_\sigma f_{\sigma\pi}\cdots f_{\sigma\pi^{a-1}}=f_\sigma f_{\pi'\sigma}\cdots f_{\pi'^{a-1}\sigma}$;

(iv) $xx'_\sigma=f'f'_{\pi'}\cdots f'_{\pi'^{a-1}}$;

(v) $xf_\sigma f_{\sigma\pi}\cdots f_{\sigma\pi^{a-1}}f_\sigma x'_{\sigma\pi}=f'f'_{\pi'}\cdots f'_{\pi^{a-1}}f'\Rightarrow xf_\sigma f_{\pi'\sigma}\cdots f_{\pi'^{a-1}\sigma}f_\sigma x'_{\pi'\sigma}=f'f'_{\pi'}\cdots f'_{\pi^{a-1}}f'$。

假设 π' 的 νth 循环因子由 $(j_\nu\dots\pi'^{\ell_\nu-1}(j_\nu))$ 给出。取 (v)，将等式两边分别与 π' $\ell_\nu-1$ 的递增次幂复合，并从 (v) 开始按阶将所有结果相乘，得到

$$\begin{aligned}xf_\sigma f_{\pi'\sigma}\cdots f_{\pi'^{a-1}\sigma}f_\sigma x'_{\pi'\sigma}x_{\pi'}f_{\pi'\sigma}f_{\pi'^2\sigma}\cdots f_{\pi'^{\ell_\nu+a-2}\sigma}f_{\pi'^{\ell_\nu-1}\sigma}x'_{\pi'^{\ell_\nu}\sigma}\\=f'f'_{\pi'}\cdots f'_{\pi'^{a-1}}f'f'_{\pi'}f'_{\pi'^2}\cdots f'_{\pi'^{\ell_\nu+a-2}}f'_{\pi'^{\ell_\nu-1}},\end{aligned}$$

其中 将（iii）替换为与 π' 的适当次幂复合后，得到

$$x(f_\sigma f_{\pi'\sigma}\cdots f_{\pi'^{a-1}\sigma})^{\ell_\nu}f_\sigma f_{\pi'\sigma}\cdots f_{\pi'^{\ell_\nu-1}\sigma}x'_{\pi'^{\ell_\nu}\sigma}=(f'f'_{\pi'}\cdots f'_{\pi'^{a-1}})^{\ell_\nu}f'f'_{\pi'}\cdots f'_{\pi'^{\ell_\nu-1}},$$

换句话说，

$$x(j_\nu)(f_\sigma f_{\pi'\sigma}\cdots f_{\pi'^{a-1}\sigma})^{\ell_\nu}(j_\nu)m_\nu(f_\sigma;\pi')x'_\sigma(j_\nu)=(f'f'_{\pi'}\cdots f'_{\pi'^{a-1}})^{\ell_\nu}(j_\nu)m_\nu(f';\pi').$$

此外，由于 $|\pi'|\,|a$，量 $f_\sigma f_{\pi'\sigma}\cdots f_{\pi'^{a-1}\sigma}(j_\nu)$ 和 $f'f'_{\pi'}\cdots f'_{\pi'^{a-1}}(j_\nu)$ 分别是 $m_\nu(f_\sigma;\pi')$ 和 $m_\nu(f';\pi')$ 的幂，且满足引理 5.10（ii）的条件。因此，我们找到了广义逆，即 $x(j_\nu)$ 和 $x'_\sigma(j_\nu)$，使得 $m_\nu(f_\sigma;\pi')\sim m_\nu(f';\pi')$。

最后，利用 引理 5.15 (i)，可得 $a(f';\ \pi') = a(f_\sigma;\ \pi') = a(f;\ \pi$。

反之，假设 $a(f;\ \pi) = a(f';\ \pi')$。由引理 5.15（$ii$），我们知道存在一个$\pi'' \in S_\lambda$满足 $\pi = \pi''\pi'\pi''^{-1}$，并且具有如下性质：对于每个 ν，$m_\nu(f;\ \pi) \sim m_\nu(f'_{\pi''};\ \pi)$。特别地，$(f';\ \pi') \sim (f'_{\pi''};\ \pi)$，因为我们可以找到广义逆 $x = (e;\ \pi'')$ 和 $x' = (e;\ \pi''^{-1})$。因此，只需证明 $(f;\ \pi) \sim (f'_{\pi''};\ \pi)$。

首先，由于对于每个 ν，$m_\nu(f;\ \pi) \sim m_\nu(f'_{\pi''};\ \pi)$，我们知道存在 $x_\nu, x'_\nu \in M$使得

(a) $x_\nu x'_\nu x_\nu = x_\nu$;
(b) $x'_\nu x_\nu x'_\nu = x'_\nu$;
(c) $x'_\nu x_\nu = (f \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}}(j_\nu))^\omega$;
(d) $x_\nu x'_\nu = (f'_{\pi''} \cdots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''}(j_\nu))^\omega$;
(e) $x_\nu (f \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}}(j_\nu))^{\omega+1} x'_\nu = (f'_{\pi''} \cdots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''}(j_\nu))^{\omega+1}$.

给定一个非负整数 $m, 0 \le m \le \ell_\nu - 1$，定义函数 $\tilde{f}^\nu$：$\{j_\nu, \ldots, \pi^{\ell_\nu - 1}(j_\nu)\} \to M$˜为 $f^\nu_{\pi^m}(j_\nu) = f^\nu_m$，其中

$$\tilde{f}^\nu_m := x'_{\pi^{-m}(j_\nu)} (f'_{\pi^m\pi''} f'_{\pi^{m+1}\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''})^\omega f'_{\pi^m\pi''} x_{\pi^{-m-1}(j_\nu)}$$

其中

$$x'_{\pi^{-m}(j_\nu)} = x'_{f f_\pi \cdots f_{\pi^{m-1}}} x'_\nu x_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}}$$
$$x_{\pi^{-m}(j_\nu)} = x'_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} x_\nu x_{f f_\pi \cdots f_{\pi^{m-1}}},$$

and

$$\begin{aligned}
x_{f f_\pi \cdots f_{\pi^m}} &= (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}})^\omega f f_\pi \cdots f_{\pi^m} \\
x'_{f f_\pi \cdots f_{\pi^m}} &= f_{\pi^{m+1}} \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}} (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}})^{2a-1} \\
x_{f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^m \pi''}} &= (f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''})^\omega f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^m\pi''} \\
x'_{f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^m \pi''}} &= f'_{\pi^{m+1}\pi''} \cdots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''} (f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''})^{2a-1}.
\end{aligned}$$

˜注记 5.17。 上面 f^ν_m 的表达式中出现的所有函数都在 j_ν 处取值。 ◇

例 5.18. 当 $m = 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^\nu(j_\nu) = \tilde{f}^\nu_0 &= x'_\nu (f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \ldots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''})^\omega f'_{\pi''} x'_{f'_{\pi''}} x_\nu x_f \\
&= x'_\nu (f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \ldots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''})^{\omega+1} x_\nu (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}})^{2a-1} f \\
&= (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}})^{\omega+1} (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}})^{2a-1} f \quad \text{by } (e) \\
&= (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}})^\omega f.
\end{aligned}$$

◇

事实上，不难看出，一般而言

$$\tilde{f}^\nu_m = (f_{\pi^m} f_{\pi^{m+1}} \cdots f_{\pi^{m-1}})^\omega f_{\pi^m},$$

因此

$$\begin{aligned}
\tilde{f}^\nu_m \tilde{f}^\nu_{m+1} \cdots \tilde{f}^\nu_m &= (f_{\pi^m} f_{\pi^{m+1}} \cdots f_{\pi^{m-1}})^\omega f_{\pi^m} (f_{\pi^{m+1}} f_{\pi^{m+2}} \cdots f_{\pi^m})^\omega f_{\pi^{m+1}} \cdots (f_{\pi^m} f_{\pi^{m+1}} \cdots f_{\pi^{m-1}})^\omega f_{\pi^m} \\
&= (f_{\pi^m} f_{\pi^{m+1}} \cdots f_{\pi^{m-1}})^\omega f_{\pi^m}.
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
x_{\pi^{-m}(j_\nu)} x'_{\pi^{-m}(j_\nu)} &= x'_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} x_\nu x_{f f_\pi \cdots f_{\pi^{m-1}}} x'_{f f_\pi \cdots f_{\pi^{m-1}}} x'_\nu x_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} \\
&= x'_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} x_\nu (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu - 1}})^\omega x'_\nu x_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} \\
&= x'_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} x_\nu x'_\nu x_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} \quad \text{by } (a) \text{ and } (c) \\
&= x'_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} (f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''})^\omega x_{f'_{\pi''} f_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}} \quad \text{by } (d) \\
&= f'_{\pi^m\pi''} \cdots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''} (f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{\ell_\nu - 1}\pi''})^\omega f'_{\pi''} f'_{\pi\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''}
\end{aligned}$$

$$= (f'_{\pi^m\pi''} f'_{\pi^{m+1}\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''})^\omega$$

类似地，$x'_{\pi^{-m}(j_\nu)} x_{\pi^{-m}(j_\nu)} = (f_{\pi^m} f_{\pi^{m+1}} \cdots f_{\pi^{m-1}})^\omega$。因此，根据 $\tilde{f}^\nu_m$ 的定义，很容易看出

$$\tilde{f}^\nu_m \tilde{f}^\nu_{m+1} \cdots \tilde{f}^\nu_m = x'_{\pi^{-m}(j_\nu)} (f'_{\pi^m\pi''} f'_{\pi^{m+1}\pi''} \cdots f'_{\pi^{m-1}\pi''})^\omega f'_{\pi^m\pi''} x_{\pi^{-m-1}(j_\nu)}.$$

此外，由于

$$\begin{aligned}(f_{\pi^m} f_{\pi^{m+1}} \cdots f_{\pi^{m-1}\pi''})^\omega f_{\pi^m} \cdots f_{\pi^{\ell_\nu-1}} (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu-1}})^{2a-1} x'_\nu \\ = f_{\pi^m} \cdots f_{\pi^{\ell_\nu-1}} (f f_\pi \cdots f_{\pi^{\ell_\nu-1}})^{2a-1} x'_\nu \quad \text{by } (b) \text{ and } (c),\end{aligned}$$

因此有 $x'_{\pi^{-m}(j_\nu)} x_{\pi^{-m}(j_\nu)} x'_{\pi^{-m}(j_\nu)} = x'_{\pi^{-m}(j_\nu)}$。通过类似的论证，我们还可以得到$x_{\pi^{-m}(j_\nu)} x'_{\pi^{-m}(j_\nu)} x_{\pi^{-m}(j_\nu)} = x_{\pi^{-m}(j_\nu)}$。

最后，我们定义函数 $x(f)^\nu_{\pi^m}(j_\nu) := x(f)_{\pi^{-m}(j_\nu)}$，其定义在 $\{j_\nu, \dots, \pi^{\ell_\nu-1}(j_\nu)\}$ 上。由于这些函数对所有 ν 都有定义，因此我们可以将它们拼接起来，得到定义在所有$\{1, \dots, \lambda\}$上的函数 $x(f)$。根据上述已证明的关系，显然 $x(f)$ 是广义逆，因此 $(f;\ \pi) \sim (f'_{\pi''};\ \pi)$。□

以下结果还给出了简单 $\mathcal{M}\wr\mathrm{S}_\lambda$-模的数量（对于特征为零的代数闭域）：

命题 5.19. 假设有 $\mathscr{C}$ 个 M 的广义共轭类。$M\wr\mathrm{S}_\lambda$ 中元素的允许类型数量由下式给出

$$\sum_{(\lambda)} p(\lambda_1) \cdots p(\lambda_\mathscr{C})$$

其中，求和遍历所有满足 $\sum \lambda_i = \lambda$ 的非负整数 $\mathscr{C}$-元组 $(\lambda_1, \dots, \lambda_\mathscr{C})$。

证明。根据定义，我们知道矩阵 $a(f;\ \pi)$ 的各项满足

$$\lambda_i := \sum_k k \cdot a_{ik} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{and} \quad \sum_i \lambda_i = \lambda$$

其中 $i \in \{1, \dots, \mathscr{C}\}$。反过来，给定一个大小适当、各项满足以下条件的矩阵 (b_{ik})

$$\lambda'_i := \sum_k k \cdot b_{ik} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{and} \quad \sum_i \lambda'_i = \lambda,$$

$i \in \{1, \dots, \mathscr{C}\}$，容易找到一个元素 $(f';\ \pi')$，其类型由 (b_{ik}) 给出。这样的矩阵的数量是一个简单的练习，参见 [JK81，引理 4.2。9]。□

定理 5.2 的证明。首先，我们知道存在 s 个简单 $\mathbb{K}\mathcal{M}$-模，其 s 见 (5.1)。此外，如果 $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{K}}$ 是特征零的，则存在 $s = 1 + 3r$ 个简单 $\mathbb{K}\mathcal{M}$-模，因此根据引理 5.9，存在 $\mathcal{M}$ 的广义共轭类。

在非平面情形下，$\mathscr{H}_\lambda = \mathcal{M}\wr\mathrm{S}_\lambda$ 对所有 $\lambda \in \mathcal{P}^{ap}$均成立。我们可以使用 引理 5.16、命题 5.19，结合 H-约化来得到（i）的结果。

最后，鉴于在平面情形下，$\mathscr{H}_\lambda = \mathcal{M}^\lambda$ 对所有 $\lambda \in \mathcal{P}^{ap}$均成立，（$ii$）的结果立即由 H-约化得到。□

6. Gram matrices

在本节的最后部分，我们使用格拉姆矩阵的概念来研究简单 $\mathrm{MD}_{\alpha、\beta、\gamma}(n)$-模的维数。

记号 6.1。 在 H-约化 引理 4.12的语境下，我们将 $L(\lambda,\ K)$ 记作与 $\lambda \in \mathcal{P}^{ap}$ 和一个简单 $\mathscr{H}_\lambda$-模 K相关联的简单 $\mathscr{A}$-模。◇

定义 6.2。 对于夹心对 $(\mathscr{A}, B_\mathscr{A})$，其 格拉姆矩阵 G^λ（与 $\lambda \in \mathcal{P}^{ap}$ 相关联）是一个取值于 $\mathbb{K}$ 的 $(\#\mathcal{R}_\lambda)$-$(\#\mathcal{L}_\lambda)$ 矩阵，其定义为

$$(\mathrm{G}^\lambda)_{i,j} = \begin{cases} s(e) & \text{if } \mathcal{H}_{ij} \text{ is a pseudo idempotent with eigenvalue } s(e)\ (*), \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

（回忆一下，(*) 表示存在 $e \in \mathcal{H}_{ij}$，使得 $e^2 = s(e) \cdot e$。此外，若这样的元素存在，则它是唯一的，因此条件 (*) 是明确无歧义的。） ◇

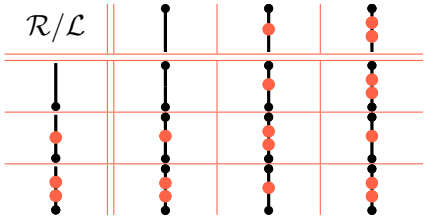
例 6.3. 固定有理函数

$$Z_\alpha(T) = \frac{\alpha_0}{1-T}, \qquad Z_\beta(T) = \frac{\beta_0}{1-T}, \qquad Z_\gamma(T) = \frac{\gamma_0}{1-T}, \tag{6.4}$$

其多项式次数满足定义 2.25的条件；特别是，$K = 1$ 因此没有孔。给定 $\mathrm{MRo}_{\alpha,\,\beta,\,\gamma}(1)$，其中 $\lambda = 0$ （即没有贯穿线的一弦情形），我们可以定义如下矩阵：

- 行（列）以右（左）胞腔为指标；
- 矩阵项 $(i,\ j)$ 由图 h_{ij}^2 的“中部”部分给出，其中 $h_{ij} \in \mathcal{H}_{ij}$ （此情形下只有一个元素）。

于是我们可以立即读出格拉姆矩阵：



$$\rightsquigarrow \mathrm{G}^0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

对 G^0 进行一些行约简后，得到

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \overset{\text{row } 1-3}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha_0 - \gamma_0 & 0 & 0 \\ \beta_0 & \gamma_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \beta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

因此，$\det(\mathrm{G}^0) = (\alpha_0 - \gamma_0)(\gamma_0^2 - \beta_0^2)$ 可以很容易地读出，因此当 ^{0} 时，G $\alpha_0 \neq \gamma_0$ 的秩为满秩 $\gamma_0 \neq \pm\beta_0$。当然，可以直接计算 G^0 的行列式；不过，以这种方式进行行约简，为下文证明更一般的结论奠定了基础，即命题 6.6。◇

在 $\mathrm{MRo}_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$ 的情形下，我们有以下将 Gram 矩阵与简单表示的维数联系起来的定理：

定理 6.5。 考虑对合夹心对 $\big(\mathrm{MRo}_{\alpha,\beta,\gamma}(n), \mathrm{MRo}_1(n)\big)$，其中假设 $\mathbb{K} = \mathbb{K}$，且 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \nmid \{2, r\}$ （例如 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$）。对于给定的简单 $\mathscr{H}_\lambda$-模 K，简单 $\mathrm{MRo}_{\alpha,\beta,\gamma}(n)$-模的维数为

$$\dim_{\mathbb{K}}\big(L(\lambda, K)\big) = \mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(\mathrm{G}^\lambda) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(K) = \mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(\mathrm{G}^\lambda).$$

证明。第二个等式源于交换代数的简单表示维数为一这一事实。通过（复制） [Tub24b，定理 4B 的证明，25] 或 [Liu25，定理 3.5 的证明，3], 第一个等式在夹心代数为交换的，且所有作出贡献的表示都来自半单循环群时成立。因此由 命题 5.4即可得证。□

在本节余下部分，我们计算若干选定情形下的格拉姆矩阵秩，包括 $\mathrm{MRo}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n)$。与 定理 6.5不同，以上所有结果都适用于任意域。总结如下：

命题 6.6。 给定对合夹心对 $\big(\mathrm{MD}_{\alpha,\ \beta,\ \gamma}(n),\ \mathrm{MD}_1(n)\big)$，部分格拉姆矩阵的秩如下：

(i) We have $\mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(\mathrm{G}^n) = 1$ *whenever* $n \in \mathcal{P}^{ap}$;

此外，假设条件*(6.4)* 如*例 6.3*所述：

(ii) 对于 $\mathrm{MD}_1(n) \in \{\mathrm{MRo}_1(n), \mathrm{MRo}_1^p(n)\}$，我们有 $\mathrm{秩}_{\mathbb{K}}(\mathrm{G}^\lambda) = \binom{n}{\lambda} \cdot 3^{n-\lambda}$，当 $\lambda \in \mathcal{P}^{ap}$ 时

$$\left[\prod_{i=1}^{\bar{\lambda}} \left((\alpha_0^i - \gamma_0^i) - \sum_{k=1}^{i-1} \binom{i}{k} (\alpha_0^{i-k}\gamma_0^k - \gamma_0^i)\right)^{\binom{\bar{\lambda}}{i} \cdot 2^{\bar{\lambda}-i}}\right] (\gamma_0^2 - \beta_0^2)^{\bar{\lambda} \cdot 3^{\bar{\lambda}-1}} \neq 0 \tag{6.7}$$

¯其中 $\bar{\lambda} = n - \lambda$。

(*iii*) 对于 $\mathrm{MD}_1(n) \in \{\mathrm{MRoBr}_1(n), \mathrm{MMo}_1(n)\}$ 以及 $n-1 \in \mathcal{P}^{ap}$，它也满足 (6.7)，我们有秩$_{\mathbb{K}}(\mathsf{G}^{n-1}) = 3n$。

证明。*(i)*。条件 $\lambda = n$ 意味着每条弦都是贯穿线，因此只有一个既是左胞腔又是右胞腔的胞腔，而且恒等图显然是幂等元。*(ii)*。我们首先注意到，对于 $n=0$，$0 \in \mathcal{P}^{ap}$，$\mathrm{MD}_{\alpha,\beta,\gamma}(n) \cong \mathbb{K}$，且该结论显然成立。我们因此着重讨论 $n>0$ 的情形。

策略是证明，对于每个 $n>0$，G^0 都可以通过行简化化为分块下三角形式

$$\begin{pmatrix} A_n & 0 \\ * & B_n \end{pmatrix}$$

其中矩阵 B_n 的行列式 $\det(B_n) = (\gamma_0^2 - \beta_0^2)^{n\cdot 2^{n-1}}$ 不包含 α_0，而矩阵 A_n 是块下三角矩阵，其对角块具有如下形式

$$\Big((\alpha_0^i - \gamma_0^i) - \sum_{k=1}^{i-1} \binom{i}{k} (\alpha_0^{i-k}\gamma_0^k - \gamma_0^i)\Big) B_{n-i},$$

对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$ 以及 $B_0 := (1)$；此类块的数量由二项式系数 $\binom{n}{i}$给出。于是我们有

$$\det(A_n) = \prod_{i=1}^{n} \Big((\alpha_0^i - \gamma_0^i) - \sum_{k=1}^{i-1} \binom{i}{k} (\alpha_0^{i-k}\gamma_0^k - \gamma_0^i)\Big)^{\binom{n}{i}\cdot 2^{n-i}} (\gamma_0^2 - \beta_0^2)^{\binom{n}{i}(n-i)\cdot 2^{n-i-1}},$$

因此

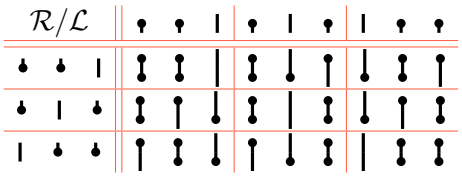
$$\det(\mathsf{G}^0) = \left[\prod_{i=1}^{n} \Big((\alpha_0^i - \gamma_0^i) - \sum_{k=1}^{i-1} \binom{i}{k} (\alpha_0^{i-k}\gamma_0^k - \gamma_0^i)\Big)^{\binom{n}{i}\cdot 2^{n-i}}\right] (\gamma_0^2 - \beta_0^2)^{n\cdot 3^{n-1}},$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (n-i)\cdot 2^{n-i-1} + n\cdot 2^{n-1} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i)\cdot 2^{n-i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i \cdot 2^{i-1} = n\cdot 3^{n-1}, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式可通过对 $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$ 两边关于 x 求导，然后令 $x=2$，得到。

确定固定 $n>0$时 G^0 的形式后，我们便可确定 $\lambda \in \mathcal{P}^{ap}$时的 G^λ：G^λ 的非零项出现在贯穿线对齐时，例如在 $n=3$, $\lambda = 1$的情形下（忽略 M¨obius 点），我们有



$$\rightsquigarrow \mathsf{G}^1 = \begin{pmatrix} \alpha_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0^2 \end{pmatrix}.$$

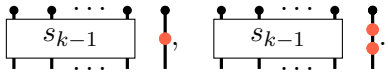
由于不能通过添加 M¨obius 点使非幂等元图变为幂等元图（参见 引理 4.30），因此相对容易看出，G^λ 通常可以化为分块对角形式，其中每个分块由 G^0 在情形 $n-\lambda$下的取值给出。G^λ 满秩，即 $\det(\mathsf{G}^\lambda) \neq 0$的条件因而由 (6.7)给出，而 G^λ 的大小由 (4.28) 中的 $\#\mathcal{L}_\lambda$ 确定，其中 $K=1$，即 $\binom{n}{\lambda}\cdot 3^{n-\lambda}$。

现在我们转而证明矩阵 A_n 和 B_n 具有所需性质的矩阵确实存在。我们已经在 示例 6.3 中看到存在这样的矩阵 A_1、B_1，而我们希望推广的正是其中所示的求取这些矩阵的过程。

首先，考虑以下左胞腔的排序：先定义序列

s_1 : 

然后对 $k>1$ 中的序列进行归纳定义

s_k : 

左胞腔的排序方法是：首先将底部元素分组，条件是它们在相同的 i 分支上含有 M¨obius 点，然后根据 s_i进行排序。现在假设有两组 I 和 J，它们分别在 i 和 j 分支上含有 M¨obius 点。如果 $i<j$，则在排序中将组 J 置于组 I 的右侧；否则，如果 $i=j$，则图中含有 M¨obius 点且位置最靠左的分支排在最前面。

例 6.8。 对于 $n=2$，左胞腔的排序为



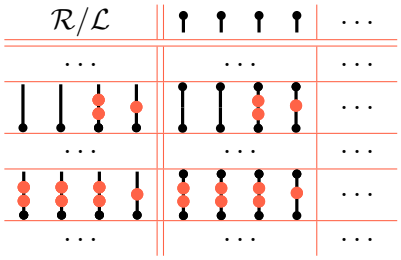
这一模式可以推广。 ◇

含有 M I 的组数为 ¨obius 点的 i 个分支为 $\binom{n}{i}$，且每组包含 2^i个元素，序列总长度为 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 2^i=3^n$，与 (4.28)的预期一致。

现在，我们通过对左胞腔的单元排序取对合来直接排列右胞腔，从而使 G^0成为一个对称矩阵。下一步是对 G^0 进行行化简，使其剩下两个对角块：右下角的一个 $2^n\times 2^n$ 子式，我们将其与 B_n对应起来；以及一个互补块，经过进一步化简后将由此产生 A_n。

我们首先注意到，G^0 的前 $u:=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot 2^i$ 行中，每一行至少包含一个$\alpha_0^a\beta_0^b\gamma_0^c$ 带有 a 非零值的条目；例如，可以取对角线上的条目。相比之下，最后 2^n 行（以及根据对称性得到的最后 2^n 列）中的条目带有 $a=0$，因为无法消去一个 M¨obius 点。现在，我们考虑前 u 行中的每一行，其中相应右胞腔的单元排序中存在不含任何 M¨obius 点的分支，并从最后 2^n 行中减去一行；在这些分支中，前者被替换为包含两个 M¨obius 点的分支。

例 6.9. 对于 $n=4$，将图示的第二行从第一行中减去：



$$\leftrightsquigarrow \mathrm{G}^0=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \alpha_0^2\beta_0\gamma_0 & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \beta_0\gamma_0^3 & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ (\alpha_0^2-\gamma_0^2)\beta_0\gamma_0 & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \beta_0\gamma_0^3 & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix},$$

正如所需。 ◇

重要的是，由于



右上角所得的 $u\times 2^n$ 子式是（恒等于）零矩阵，因为替换并未改变原先存在的 M¨obius 点的数量。

注 6.10. 进行化简时，我们关注一般参数 $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$，因此它们尤其都不恒等于零。关键在于在化简过程中得到恒等于零的元素。◇

完成第一步后，现在考察 B_n，即右下角的 $2^n\times 2^n$ 子式。根据单元排序，不难看出 B_n 具有如下形式

$$\begin{pmatrix}\gamma_0 B_{n-1} & \beta_0 B_{n-1}\\ \beta_0 B_{n-1} & \gamma_0 B_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_0 & \beta_0\\ \beta_0 & \gamma_0\end{pmatrix}\otimes B_{n-1},$$

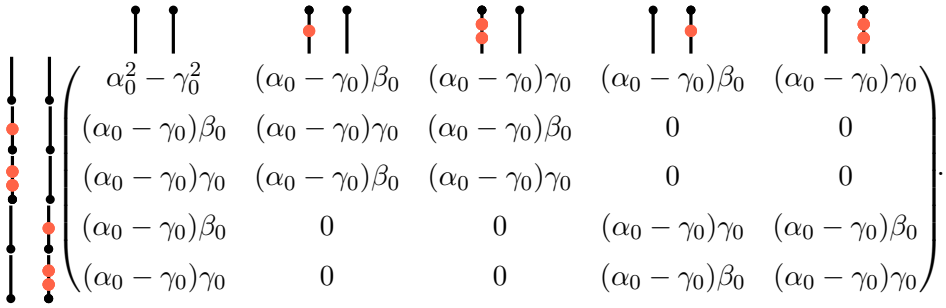
因此，根据归纳法，$\det(B_n)=(\gamma_0^2-\beta_0^2)^{n\cdot 2^{n-1}}$。

现在我们来关注左上角剩下的 $u \times u$ 子式，它目前的形式为

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^n - \gamma_0^n & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & (\alpha_0^i - \gamma_0^i) B_{n-i} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & (\alpha_0 - \gamma_0) B_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

对角线上形如 $(\alpha_0^i - \gamma_0^i)\ B_{n-i}$ 的块的数量由 $\binom{n}{i}$给出。我们希望将 (6.11) 化简，使对角块上方的元素为零。

例 6.12。 我们以 A_2 为例进行说明，其中左胞腔的排序如 例 6.8所示。经过第一阶段的化简，我们得到一个大小为 $u \times u$ 的矩阵，其中$u = \sum_{i=0}^{2-1} \binom{2}{i} \cdot 2^i = 1 + 4 = 5$,



我们可以立即看出三个对角块，分别对应于左胞腔的三组分组：$\binom{2}{2-2} = \binom{2}{0} = 1$个 $(\alpha_0^2 - \gamma_0^2)$ 块 $B_0 = (\alpha_0^2 - \gamma_0^2)$ 以及 $\binom{2}{2-1} = \binom{2}{1} = 2$个

$$(\alpha_0 - \gamma_0) B_1 = (\alpha_0 - \gamma_0) \begin{pmatrix} \gamma_0 & \beta_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

从右下方开始，查看位置 (3,5) 处对角块上方的条目，我们看到该条目为零，且第 3 行中与其余最终左胞腔分组对应的条目也为零（以及延伸至第 2 行的相应右胞腔分组）。

剩下第一行：从对应于 (1,4) 和 (1,5) 的最终左胞腔分组开始，我们注意到，一个具有匹配部分、无 M¨obius 点且另有两个 M¨obius 点的右胞腔代表对应于最后一行。因此，从第 1 行减去第 5 行，会使条目 (1, 4) 和 (1,5) 变为零。通过同样的方法，从第 1 行减去第 3 行，可以将与下一个左胞腔分组对应的条目 (1,2) 和 (1, 3) 置为零。

我们 于是剩下最终分块下三角形式，其中 (1,1) 条目增加了 :

$$\alpha_0^2 - \gamma_0^2 - 2(\alpha_0 - \gamma_0)\gamma_0 = \alpha_0^2 - \gamma_0^2 - \sum_{k=1}^{2-1} \binom{2}{k} (\alpha_0^{2-k} \gamma_0^k - \gamma_0^2),$$

而其他对角块则乘以 $\alpha_0 - \gamma_0 = \alpha_0 - \gamma_0 - \sum_{k=1}^{1-1} \binom{1}{k} (\alpha_0^{1-k} \gamma_0^k - \gamma_0^1)$，其中按定义，最后的和为空和。 ◇

更一般的过程如下：从右下角开始，沿着各行逆向进行，直到遇到块对角条目。我们可以看到，当排序中的相应左、右胞腔代表没有（至少有一个）不带 M¨obius 点的共同分支时，该条目为零（非零）。

此外，如果某个条目为零，那么同一行中属于同一个左胞腔分组的所有其他条目也都为零。因此，给定一行 ℓ，其右胞腔代表恰好包含 i个不带莫比乌斯点的部分，在与非零条目相关联的块对角组右侧有 $\sum_{k=1}^{i-1} \binom{i}{k}$ 个左胞腔分组；对于每个这样的分组，我们从行 ℓ 中减去一个较低的行，该行的右胞腔代表具有相匹配的不带莫比乌斯点的部分，并且在所有其他分支上都有两个莫比乌斯点。（注意，对于相应的分组，这一行要么与对角块相交，要么位于其下方。）

由此可见，对角块上方的所有条目均为零，而对角块受到的影响如下所示：

$$\Big((\alpha_0^i-\gamma_0^i)-\sum_{k=1}^{i-1}\binom{i}{k}(\alpha_0^{i-k}\gamma_0^k-\gamma_0^i)\Big)B_{n-i},$$

对于 $i=1,\dots,n$，由此完成证明。

(iii). 证明与 [Tub24b定理 4B 中对应的情形完全相同。15]；也就是说，秩$_{\mathbb{K}}(\mathrm{G}^{n-1})$ $=\binom{n}{n-1}\cdot 3^{n-(n-1)}=3n$ 如上文 (ii) 所述。□

示例 6.13. 假设满足命题 6.6.(ii) 中列出的条件。固定 $n=5,\lambda=2$，并进一步假设并非所有 $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0$ 都为零。

根据定理 6.5</style}，对于任意简单的-模，顶点为 2 的简单 MRo,β,γ(5)-模的维数为

$$\dim_{\mathbb{K}}\big(L(2,K)\big)=\mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(\mathrm{G}^2).$$

现在，根据命题 6.6.(ii)，我们有

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(\mathrm{G}^2)=\binom{5}{2}\cdot 3^{5-2}=270,$$

每当

$$(\alpha_0^3-3\alpha_0^2\gamma_0-3\alpha_0\gamma_0^2+5\gamma_0^3)(\alpha_0-\gamma_0)^{24}(\gamma_0^2-\beta_0^2)^{27}\neq 0;$$

我们可以取例如 $\alpha_0=\beta_0=1$ 和 $\gamma_0=0$。

另一方面，如果我们改为取 $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=1$，那么根据 命题 6.6.(ii) 的证明中给出的论证，G^2 由 $\binom{5}{2}=10$ 个 G 的块^0 在情形 $5-2=3$下求值得到，其秩为一。因此，我们有

$$\dim_{\mathbb{K}}\big(L(2,K)\big)=\mathrm{rank}_{\mathbb{K}}(\mathrm{G}^2)=10,$$

维数为十。 ◇

References

[AST18] H.H. Andersen、C. Stroppel 和 D. Tubbenhauer。利用 U$_q$-倾斜模构造胞腔结构。《太平洋数学杂志》，292(1):21–59，2018年。网址：https://arxiv.org/abs/1503. 00224, doi:10.2140/pjm.2018.292.21。[BM23] S. Baldridge 和 B. McCarty。图着色的拓扑量子场论方法。2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2303.12010。[BN05] D. Bar-Natan。缠结与配边的 Khovanov 同调。《几何与拓扑》，9:1443–1499，2005年。网址：https://arxiv.org/abs/math/0410495，doi:10.2140/gt.2005.9. 1443。[BW10]A. Beliakova 和 E. Wagner。关于由扩展配边构造的链环同调理论。《量子拓扑》，1(4):379–398，2010年。网址：https://arxiv.org/abs/0910.5050，doi: 10.4171/QT/9。[BT18] G. Bellamy 和 U. Thiel。具有三角分解的有限维分次代数的最高权理论。《数学进展》，330:361–419，2018年。网址：https://arxiv. org/abs/1705.08024，doi:10.1016/j.aim.2018.03.011。[BHMV95]C. Blanchet、N. Habegger、G. Masbaum 和 P. Vogel。由 Kauffman 括号导出的拓扑量子场论。《拓扑学》，34(4):883–927，1995年。doi: 10.1016/0040-9383(94)00051-4。[Bra37] R. Brauer。关于与半单连续群相关的代数。《数学年刊》(第二辑)，38(4):857–872，1937年。doi:10.2307/1968843。[Bro55] W.P. Brown。广义矩阵代数。《加拿大数学杂志》，7:188–190，1955年。doi: 10.4153/CJM-1955-023-2。[Com20] J. Comes。水母分拆范畴。《代数与表示论》，23(2):327–347，2020年。网址：https://arxiv.org/abs/1612.05182，doi:10.1007/s10468-018-09851-7。[CO11]J. Comes 和 V. Ostrik。关于 Deligne 范畴 Rep(S_t) 的块。《数学进展》，226(2):1331–1377，2011年。网址：https://arxiv.org/abs/0910.5695，doi:10.1016/j. aim.2010.08.010。

[COT24] K. Coulembier、V. Ostrik 和 D. Tubbenhauer。张量幂中不可分解直和项数量的增长率。《代数与表示论》，27(2):1033–1062，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2301.00885，doi:10.1007/s10468-023-10245-7。[Cze23] A. Czenky。无定向二维拓扑量子场论与范畴 $Rep(S_t \wr \mathbb{Z}_2)$。2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2306.08826。[DT24] P. DeBello 和 D. Tubbenhauer。二循环群的图示演算。2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2412.12376。[Del07] P. Deligne。当 t 不是自然数时，对称群的表示范畴 ´ ´ ´。载于《代数群与齐性空间》，Tata 基础研究院数学研究丛书第19卷，第209–273页。Tata 基础研究院，孟买，2007年。[Eas06] J. East。胞腔代数与逆半群。《代数杂志》，296(2):505–519，2006年。doi:10.1016/j.jalgebra.2005.04.027。[EST17]M. Ehrig、C. Stroppel 和 D. Tubbenhauer。Blanchet–Khovanov代数。载于《范畴化与高阶表示论》，当代数学第683卷，第183–226页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017年。网址：https://arxiv.org/abs/1510. 04884，doi:10.1090/conm/683。[EK10] B. Elias 和 M. Khovanov。Soergel范畴的图示演算。《国际数学杂志》，数学科学分册，第978635号文章，58页，2010年。网址：https://arxiv.org/abs/0902.4700，doi: 10.1155/2010/978635。[EMM12] J.A. Ellis-Monaghan 和 I. Moffatt。嵌入图的扭对偶。《美国数学会汇刊》，364(3):1529–1569，2012年。网址：https://arxiv.org/abs/0906.5557，doi: 10.1090/S0002-9947-2011-05529-7。[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《张量范畴》，数学调查与专著第205卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年。doi:10.1090/surv/205。[EO22]P. Etingof 和 V. Ostrik。关于张量范畴的半单化。载于《表示论与代数几何——庆祝 Sasha Beilinson 和 Victor Ginzburg 诞辰的会议》，数学趋势丛书，第3–35页。Birkh¨auser/施普林格，查姆， [2022] ©2022年。网址：https://arxiv.org/abs/1801.04409，doi:10.1007/ 978-3-030-82007-7_1。[FG95] S. Fishel 和 I. Grojnowski。Brauer中心化子代数的典范基。《数学研究快报》，2(1):15–26，1995年。doi:10.4310/MRL.1995.v2.n1.a3。[FST25] M. Fresacher、W. Stewart 和 D. Tubbenhauer。广义图示范畴、幺半群及其表示。2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2512.17177。[GMS09] O. Ganyushkin、V. Mazorchuk 和 B. Steinberg。关于有限半群的不可约表示。《美国数学会会刊》，137(11):3585–3592，2009年。网址：https://arxiv.org/abs/0712.2076，doi:10.1090/S0002-9939-09-09857-8。[GL96] J.J. Graham 和 G. Lehrer。胞腔代数。《数学发明》，123(1):1–34，1996年。doi: 10.1007/BF01232365。[Gre51] J.A. Green。关于半群结构。《数学年刊》(第二辑)，54:163–172，1951年。doi:10.2307/1969317。[Gre98] R.M. Green。广义Temperley–Lieb代数与装饰缠结。《结理论及其分支》，7(2):155–171，1998年。网址：https://arxiv.org/abs/q-alg/9712018，doi:10.1142/S0218216598000103。[GT25] J. Gruber 和 D. Tubbenhauer。图示范畴中的增长问题。《伦敦数学会通报》，57(11):3454–3469，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2503.00685，doi: 10.1112/blms.70163。[GW15] N. Guay 和 S. Wilcox。近似胞腔代数。《纯粹与应用代数杂志》，219(9):4105–4116，2015年。doi:10.1016/j.jpaa.2015.02.010。[HR05] T. Halverson 和 A. Ram。分拆代数。《欧洲组合学杂志》，26(6):869–921，2005年。网址：https://arxiv.org/abs/math/0401314，doi:10.1016/j.ejc.2004.06.005。[HT25a] D. He 和 D. Tubbenhauer。仿射图示范畴、代数与幺半群。2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2512.05510。[HT25b]D. He 和 D. Tubbenhauer。有限幺半群表示的增长问题。《西北欧数学杂志》，11:103–117，i，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2502. 02849。

[JK81] G. James 和 A. Kerber。《对称群表示论》，数学及其应用百科全书第 16 卷。Addison-Wesley 出版公司，马萨诸塞州雷丁，1981年。附有 P. M. Cohn 撰写的前言，以及 Gilbert de B. Robinson 撰写的导言。[Jon94] V. F. R. Jones。Potts 模型与对称群。载于《子因子》（Kyuzeso，1993年），第 259–267 页。World Sci. Publ.，新泽西州里弗埃奇，1994年。[KMY19] Z. K´ad´ar、P.P. Martin 和 S. Yu。关于 Temperley– Lieb 范畴在 Brauer 范畴中的几何定义扩张。Math. Z.，293(3-4):1247–1276，2019年。网址：https: //arxiv.org/abs/1401.1774, doi:10.1007/s00209-019-02246-4。[Koc04]J. Kock。Frobenius代数与二维拓扑量子场论，伦敦数学学会学生教材第 59 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[KOK22] M. Khovanov、V. Ostrik 和 Y. Kononov。二维拓扑理论、有理函数及其张量包络。Selecta Math. (N.S.)，28(4): 论文编号 71，68 页，2022年。网址：https://arxiv.org/abs/2011.14758，doi:10.1007/s00029-022-00785-z。[KS24] M. Khovanov 和 R. Sazdanovic。二维配边上的双线性配对与 Deligne 范畴的推广。Fund. Math.，264(1):1–20，2024年。网址：https: //arxiv.org/abs/2007.11640, doi:10.4064/fm283-8-2023。[KST24] M. Khovanov、M. Sitaraman 和 D. Tubbenhauer。幺半范畴、表示间隙与密码学。Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B，11:329–395，2024年。网址：https: //arxiv.org/abs/2201.01805，doi:10.1090/btran/151。[KX12] S. K¨onig 和 C. Xi。仿射胞腔代数。Adv. Math.，229(1):139–182，2012年。doi: 10.1016/j.aim.2011.08.010。[Kup96] G. Kuperberg。秩二李代数的蜘蛛图。Comm. Math. Phys.，180(1):109–151，1996年。网址：https://arxiv.org/abs/q-alg/9712003，doi:10.1007/bf02101184。[LRMD23] A. Langlois-R´emillard 和 A. Morin-Duchesne。非卷曲仿射 Temperley–Lieb 代数及其 Wenzl–Jones 投影算子。2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2302.12782。[Liu25] J. Liu。循环图幺半群的表示。2025年。网址：https://arxiv.org/ abs/2511.15945。[Mar94] P. Martin。非平面统计力学中的 Temperley–Lieb 代数——分割代数构造。J. Knot Theory Ramifications，3(1):51–82，1994年。doi:10.1142/ S0218216594000071。[MS94] P. Martin 和 H. Saleur。blob 代数与周期 Temperley–Lieb 代数。Lett. Math. Phys.，30(3):189–206，1994年。网址：https://arxiv.org/abs/hep-th/9302094，doi:10.1007/BF00805852。[MQS15] A.M. Masuda、L. Quoos 和 B. Steinberg。任意域上幺半群的特征标理论。J. Algebra，431:107–126，2015年。网址：https://arxiv.org/abs/1410.7107，doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.02.017。[MT24] A. Mathas 和 D. Tubbenhauer。KLR 代数与加权 KLRW 代数的胞腔性及细分。Math. Ann.，389(3):3043–3122，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2111. 12949, doi:10.1007/s00208-023-02660-4。[MT23a] A. Mathas 和 D. Tubbenhauer。类型 B、$A^{(2)}$、$D^{(2)}$的加权 KLRW 代数的胞腔性。J. Lond. Math. Soc. (2)，107(3):1002–1044，2023年。网址：https://arxiv.org/ abs/2201.01998，doi:10.1112/jlms.12706。[MT23b] A. Mathas 和 D. Tubbenhauer。通过晶体研究 KLR 代数与加权 KLRW 代数的胞腔性。2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2309.13867。[MPS17] S. Morrison、E. Peters 和 N. Snyder。由三价顶点生成的范畴。Selecta Math. (N.S.)，23(2):817–868，2017年。网址：https://arxiv.org/abs/1501.06869，doi: 10.1007/s00029-016-0240-3。[RTW32]G. Rumer、E. Teller 和 H. Weyl。适用于价理论的二元向量不变量的一组基。Nachrichten von der Ges. der Wiss. Zu G ¨ottingen。Math.- Phys. Klasse，第 498–504 页，1932年。德文。[SS22] S.V. Sam 和 A. Snowden。Brauer 范畴的表示论 I：三角范畴。Appl. Categ. Structures，30(6):1203–1256，2022年。网址：https://arxiv.org/ abs/2006.04328，doi:10.1007/s10485-022-09689-7。

[Ste16] B. Steinberg。有限幺半群表示论。Universitext。施普林格，查姆，2016年。doi:10.1007/978-3-319-43932-7。[Tag13] K. Tagami。由无定向 HQFT 导出的、针对加厚曲面中链环的 Khovanov 型不变量。Internat. J. Math.，24(10):1350078，28 页，2013年。网址：https://arxiv. org/abs/1311.1909，doi:10.1142/S0129167X1350078X。[Tub24a]D. Tubbenhauer。网范畴上的秩一 2-表示。Algebr. Comb.，7(6):1813–1843，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2307.00785，doi:10.5802/ alco.389。[Tub25] D. Tubbenhauer。没有拓扑学的量子拓扑。2025年。网址：https://arxiv. org/abs/2307.00785。[Tub24b] D. Tubbenhauer。夹心胞腔性与一种胞腔理论。Rocky Mountain J. Math.，54(6):1733–1773，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2206.06678，doi:10. 1216/rmj.2024.54.1733。[Tub14]D. Tubbenhauer。利用配边构造虚 Khovanov 同调。J. Knot Theory Ramifications，23(9):1450046，91 页，2014年。网址：https://arxiv.org/abs/1111.0609，doi:10.1142/S0218216514500461。[TV23]D. Tubbenhauer 和 P. Vaz。把手体图代数。Rev. Mat. Iberoam.，39(3):845–896，2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2105.07049，doi:10.4171/rmi/ 1356。[TT06] V. Turaev 和 P. Turner。无定向拓扑量子场论与链环同调。Algebr. Geom. Topol.，6:1069–1093，2006年。网址：https://arxiv.org/abs/math/ 0506229，doi:10.2140/agt.2006.6.1069。[TV17]V.G. Turaev 和 A. Virelizier。幺半范畴与拓扑场论，Progress in Mathematics 第 322 卷。Birkh¨auser/施普林格，查姆，2017年。doi:10.1007/978-3-319-49834-8。[Yam89]S. Yamada。空间图的不变量。J. Graph Theory，13(5):537–551，1989年。doi:10.1002/jgt.3190130503。D.W.C.: The University of Sydney, School of Mathematics and Statistics F07, NSW 2006, Australia*Email address*: daniel.collison@sydney.edu.auD.T.: The University of Sydney, School of Mathematics and Statistics F07, Office Carslaw 827, NSW 2006 Australia , , www.dtubbenhauer.com, https://orcid.org/0000-0001-7265-5047*Email address*: daniel.tubbenhauer@sydney.edu.au