arXiv:2602.11595v1 [math.GT] 12 Feb 2026

伪阿诺索夫流、双曲几何与曲线图

JUNZHI HUANG 和 塞缪尔·J·泰勒

Abstract. 从一个闭双曲三维流形 M 上的伪阿诺索夫流 φ以及一个与φ（几乎）横截的嵌入曲面 $S \subset M$ 出发，我们通过 S的曲线图，将 M 的双曲几何（例如体积、周长、短测地线）与 φ 的动力学不变量联系起来。

Contents

1. 引言 1
2. 背景 5
3. 流饱和环带与圆盘 8
4. 交数界 14
5. 几何论证：破损窗口与有界长度曲线 19
6. 收官：主要定理的证明 24
7. 例子与应用 29
参考文献 34

1. Introduction

设 M 是一个闭双曲三维流形，并设 φ 是M上的一个伪阿诺索夫流。本文旨在通过一个与 φ（几乎）横截的闭嵌入曲面 $S \subset M$的曲线图，量化 φ 的动力学性质如何影响 M 的几何。

典型的例子是， S 是 φ的一个截面（即 S 与φ 横截，并与每条轨道相交），因此 M 以 S 为纤维纤维化于圆周之上。在这种情形下， φ 的稳定/不稳定叶状结构限制在 S 上，恰好就是 S所对应的 M 覆盖空间 M_S 的端不变量$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$。因此，根据瑟斯顿端层状猜想的消解结果（由 Minsky [Min10] 和 Brock–$\widetilde{\quad}$Canary–Minsky [BCM12], 证明）， M_S 上的双曲结构完全由这些动力学/几何不变量确定。事实上，诸如 M [Bro01], 的体积、 M [BS19, APT22], 的周长，以及短测地线的位置 [Min01, Via25] 等几何量，都可以由S 及其子曲面上的曲线图所组织的组合量粗略确定（相差的常数仅取决于 $\chi(S)$）。

尽管这些结果意义重大，但在更一般的情形下——曲面 S 与 φ 横截，却不是一个截面（也就是说，它未与$\widetilde{\ }$的某些轨道相交）——我们所知甚少。在这种情况下，双曲流形 M_S 是拟福克斯（[CLR94，Fen99]），而 φ 的稳定/不稳定叶状结构与$\widetilde{\ }$的端不变量之间 M_S没有明显联系。

结果。设 M 是一个闭双曲三维流形，φ 是 M 上的一个近似伪阿诺索夫流，S 是嵌入在 M 中且横截于 φ 的连通曲面。S 与 φ 的不变稳定/不稳定叶状结构 $\mathcal{F}^{s/u}$ 的交集构成了 S 上的一对奇异叶状结构 $\mathcal{F}_S^{s/u}$。当 S 不是纤维曲面（或者更准确地说，不是 φ 的截面）时，叶状结构 $\mathcal{F}_S^{s/u}$ 各自都包含非空的闭叶集合 $c^{s/u}$（见第 2.2 节）。$c^{s/u}$ 是 S 上的本质多重曲线，我们称之为 S 的稳定/不稳定多重曲线。

粗略地说，我们的主定理指出，如果 c^s 和 c^u 相对于彼此而言都很复杂（从 S 的曲线图来看），那么 M 在 S 附近的几何也很复杂。为精确陈述这一点，我们首先引入切割流形 $M\backslash\backslash S$的复杂度概念。这推广了最初在 S 是 M 的深度一叶状结构的紧叶时定义的“核心复杂度”概念（见 [FKLL25]，[Whi24]，以及 第7节）。

回顾一下，$M\backslash\backslash S$ 表示沿着 S切割 M 后得到的流形。其边界是互不相交的并集 $\partial_-(M\backslash\backslash S) \sqcup \partial_+(M\backslash\backslash S)$，流分别指向$M\backslash\backslash S$ 内部或外部。$M\backslash\backslash S$ 中的乘积环带是一个本质的真嵌入环带，其两个边界分支分别位于 $\partial_-(M\backslash\backslash S)$ 和 $\partial_+(M\backslash\backslash S)$上。定义 $M\backslash\backslash S$ 的核心复杂度为

$$\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S) = \begin{cases} 0, & M\backslash\backslash S \text{ contains a product annulus,} \\ \min -\chi(\Sigma), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，最小值取遍所有真嵌入曲面 Σ，它们位于 $M\backslash\backslash S$ 中，横截于（动力学吹起后的）φ，且同时与 $\partial_+(M\backslash\backslash S)$ 和 $\partial_-(M\backslash\backslash S)$相交。动力学爆破和几乎伪阿诺索夫流的定义见第 2.1 节。作为背景，$\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S)$ 会对联系几何与动力系统的定理贡献一个加性误差项。值得注意的是，当 $\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S) < \infty$ 是 φ 悬挂流（即 φ存在截面）时，或者更一般地，当 S 是某个（几乎）横截的有限深度叶状结构的一片叶时（见第7节）。关于$\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S) < \infty$ 的上同调刻画将是后续工作的主题 [HT26]。

我们的第一个主定理将 c^u 与 c^s 之间的曲线图距离，与 M的体积和周长联系起来。分别参见 定理 6.4 和 定理 6.5。

定理 A（体积与周长）。设 M 是一个带有伪阿诺索夫流 φ 的闭双曲 3 维流形。设 S 是 M 中与 φ 近似横截、但不是纤维的闭连通曲面。设 $c^{s/u}$ 是 S 的稳定/不稳定多重曲线。假设 $\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S) < \infty$。

存在一个仅取决于 $\chi(S)$ 的常数 $k_S = k_S(\chi(S)) \geqslant 1$，以及一个仅取决于 $\chi(S)$ 和 $\mathfrak{c}(M\backslash S)$ 的常数 $k_{M\backslash S} \geqslant 1$，使得以下不等式成立：

(1) $d_{\mathcal{C}(S)}(c^s, c^u) \leqslant k_S \cdot$ 体积$(M) + k_{M\backslash S}$，以及 *(2)* $d_{\mathcal{C}(S)}(c^s, c^u) \leqslant k_S \cdot \ell_M(\gamma) + k_{M\backslash S}$，其中 γ 是与 S 本质相交的任意闭测地线，而 $\ell_M(\gamma)$ 是其在 M 中的长度。

我们指出，当 $M\backslash S$ 包含乘积环带时，$\mathfrak{c}(M\backslash S) = 0$ 因此，定理 A 中的常数仅取决于 $|\chi(S)|$。

定理 A 还有一个版本，其起始条件是有限深度叶状结构，而非流；其中多曲线 $c^{s/u}$ 被叶状结构的最小交界所取代。详情请参见第7节，尤其是定理 7.1。

第二个主定理将 c^u 与 c^s 之间的子曲面距离与 M 中的短测地线联系起来。粗略地说，如果从某个距离较远的子曲面 $Y \subset S$ 的角度来看，$c^{s/u}$ 彼此之间十分复杂，那么 ∂Y 在 M 中的测地线长度必定很小。参见 定理 6.7。

定理 B (短曲线)。设 M 是一个带有拟阿诺索夫流 φ 的闭双曲3维流形。设 S 是 M 中的一个闭曲面，它与 φ 近似横截；设 $Y \subset S$ 是 S 的一个子曲面。假设 $\mathfrak{c}(M\backslash S) < \infty$。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个仅取决于 ε 和 $\chi(S)$ 的 $K = K(\varepsilon, \chi(S)) \geqslant 0$，使得若

- $d_{\mathcal{C}(S)}(c^{s/u}, \partial Y) \geqslant k_{M\backslash S}$ 和
- $d_{\mathcal{C}(Y)}(c^s, c^u) \geqslant K + 2 \cdot k_{M\backslash S}$,

then

$$\ell_M(\partial Y) \leqslant \varepsilon.$$

这里，$\ell_M(\partial Y)$ 表示 ∂Y 在 M 中的测地代表的长度，而 $d_{\mathcal{C}(Y)}(c^s, c^u)$ 表示 Y 在 c^s 与 c^u 之间的曲线图子曲面距离。详情请参见第 2.3 节。

注 1.1。控制 M 几何的主要技术结果是定理 6.1。粗略地说，该定理指出，每条多重曲线 $c^{s/u}$ 与 S 上的某条曲线的曲线图距离都有界，且该曲线在 M 中的双曲长度有界。人们或许希望证明更强的结论，即 $c^{s/u}$ 本身长度有界，但这并非总是可能的。事实上，Whitfield [Whi24，定理 A] 给出了这样的例子：在 M 的深度一叶状结构中，“交界曲线”可以任意短。（这里，交界曲线本质上是 $M\backslash S$ 中一个实现最小核心复杂度的适当嵌入曲面的边界分支。）由于在这些例子中，这类曲线必然与 $c^{s/u}$, 相交，因此稳定/不稳定多重曲线可以任意长。

最后，第7节给出了若干例子，其中包括一种灵活的流形与流的构造，可实现主要定理的假设。

1.1. **与现有文献的联系**。 尽管以往大多数涉及双曲几何、动力系统与曲线图之间联系的研究都来自纤维化流形这一背景（如上文所述），但近年来，人们开始关注将这些联系推广到无限型曲面的端周期映射的映射环面上。Field、Kim、Kent、Leininger 和 Loving 的研究尤为突出[FKLL23、FKLL25]他们建立了这些映射环面的双曲体积与上述主题之间的联系；Whitfield [Whi24], 则研究了短测地线的长度。

本文的工作揭示了这些映射环面几何的另一个方面。回到主要定理的情形，在 S 是 M的横截深度一叶状结构的一片紧叶的特殊情况下， $M\backslash S$ 的每个连通分支都是一个特别良好的端周期映射的映射环面——该映射是沿横截流作用于叶状结构的一层叶上的首次返回映射。上述文献研究了 $M\backslash S$各连通分支的内蕴几何，尤其是在唯一的全测地结构存在时对其进行研究。相比之下，我们在此得到的结果关乎原始闭流形 M的几何。粗略地说，定理 A 和定理 B 关注的是 M 在粘合 $M\backslash S$ 以重新得到 M时所强制产生的几何特征，这些特征由稳定与不稳定多曲线的曲线图复杂度来衡量。关于深度一情形下的含义，参见第7节。

1.2. **证明策略与论文提纲**。 定理 定理 A 和 定理 B 的证明分为三个步骤。第一步，我们确定 S 上的多重曲线，它们在 $M\backslash S$中具有拓扑意义，且与$c^{s/u}$的交数有界。若 $M\backslash S$ 含有乘积环带，这些曲线就是 $M\backslash S$ 的 Thurston 窗框的分支（见第 5 节），并证明乘积环带可以相对于流置于特别理想的位置。相关说明见第 3 节。若 $M\backslash S$ 不含乘积环带，但具有有限核复杂度，这些曲线就是具有最小复杂度的适当嵌入横截曲面的边界分支。第一种情况下，交数界在第 3 节中建立；第二种情况下，则在第 4 节中完成。

第二步，我们证明这些多重曲线在 M上的双曲度量中长度有界。相关内容见第 5 节。前两个步骤的结果导出定理 6.1，该定理指出， c^s 和 c^u 与 S中有界长度曲线的交数有界。最后，我们通过转到对应于 S 的拟福克斯覆盖，并运用曲线图和克莱因曲面群研究中的标准工具，以附近的有界长度曲线替换 c^s 和c^u ，从而对 M 取得几何控制。这部分内容见第 6 节。

最后，第7节给出定理 A的一个版本，适用于有限深度叶状结构，以及一种可精确控制动力学量的构造 $d_{\mathcal{C}(S)}(c^s,\ c^u)$ 。

致谢。 作者感谢 Michael Landry 和 Yair Minsky 多次提供有益的建议并给予鼓励。作者还感谢 Ellis Buckminster 和 Brandis Whitfield 对早期稿件提出的宝贵意见。

本文的完成得到了美国国家科学基金会 DMS–2424139 号资助的支持；当时作者正在加利福尼亚州伯克利的西蒙斯·劳弗数学科学研究所驻留，时间为2026年春季学期。Taylor 还获得了 NSF DMS–2503113 号资助和西蒙斯基金会的部分支持，Huang 则获得了 NSF DMS- 2005328 号资助的部分支持。

2. Background

在此，我们简要回顾本文所需的背景，并为读者提供可查阅更多细节的参考文献。

2.1. **伪阿诺索夫流及其轨道空间**。 关于伪阿诺索夫流的出色导论，见 Barthelm´e 与 Mann [BM25],的近期著作，其中可找到该理论的细节与细微之处。非正式地说，伪阿诺索夫流 φ 在闭流形 M 上是满足如下条件的流：存在一对横截的二维奇异叶状结构 $\mathcal{F}^s$ 与 $\mathcal{F}^u$ 于 M中，使得每一叶都是流线的并，并且 $\mathcal{F}^s$（相应地，$\mathcal{F}^u$）的一叶上任意两条流线在正向（相应地，反向）方向上渐近。奇点是由有限条闭轨道组成的集合，每一条局部上都以带 $2n$个棱枝、收缩与排斥交替的伪双曲轨道为模型。

我们还将考虑一类稍为一般的流，称为近伪阿诺索夫流。我们称流 $\varphi^\sharp$ 为近伪阿诺索夫流，若它是由伪阿诺索夫流 φ 经过动力学爆破一组奇异轨道而得到的。在这一操作下，一条奇异轨道被替换为一个复形（称为爆破复形），它由有限个爆破环带沿其边界粘合而成。爆破复形有一个横截截面，它是一个有限树，其顶点对应于 φ的闭轨道；每个爆破环带（对应于树的一条边）都由流线叶状分解，这些流线在正向和反向时间中分别收敛于环带上不同的边界轨道。见图1。

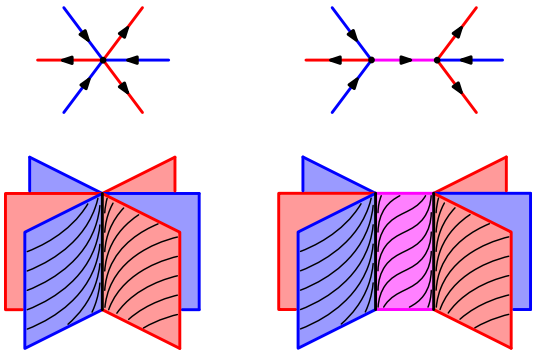

Figure 1. 图片引自 [LMT25a]，展示了一个三棱枝奇异轨道的动态吹起及其横截截面。此处有一个爆破环带。

与 $\varphi^{\#}$ 相关联的还有一对稳定和不稳定叶丛；除爆破环带之外，两者横截相交，而爆破环带包含在每个叶丛中。这两种流由爆破压缩映射 $M \to M$联系起来，该映射与恒同映射同伦，将每个爆破复形压缩为一条奇异轨道，并使流 $\varphi^{\sharp}$ 及其不变叶丛与流 φ 及其不变叶丛半共轭。

近似伪阿诺索夫流和动力学爆破最初由 Mosher 定义[Mos90，Mos92b] 而 Landry–Minsky–Taylor 给出了一种包含诸多细节的显式构造 [LMT25b]。更多细节请参阅这些文献。

现在设 φ 是一个具有不变叶丛 $\mathcal{F}^{s/u}$ 的近似伪阿诺索夫流。若我们将 φ 提升为万有覆盖空间 M 上的流 $\tilde{\varphi}$，其中 M 是 M 的万有覆盖空间，那么轨道空间（也称为流空间） $\mathcal{O}$ 就是 M 关于 $\tilde{\varphi}$ 的商空间，赋予商拓扑。Fenley–Mosher 已证明 $\mathcal{O}$ 与 $\mathbb{R}^2$ [同胚01] （另见[LMT25b，定理 3.6]），我们将投影映射记为 $\Theta\colon M \to \mathcal{O}$。$\tilde{}$ $\tilde{}$ 奇异叶状结构 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$ 也提升为 M 中的奇异叶状结构 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$，并投影为 $\mathcal{O}$ 上的横截一维奇异叶丛，分别记为 $\mathcal{O}^s$ 和 $\mathcal{O}^u$。$\pi_1(M)$ 对 M 的作用下降为 $\pi_1(M)$ 对 $\mathcal{O}$ 的作用，且该作用由保留叶状结构对 $\mathcal{O}^s$ 和 $\mathcal{O}^u$ 的同胚映射构成。$\mathcal{O}^s$ 或 $\mathcal{O}^u$ 中叶 ℓ 的叶切片，是 ℓ 中一个与 $\mathbb{R}$ 同胚的适当嵌入副本。当 ℓ 为周期的时， ℓ 的半叶是 ℓ 中周期点集的一个补分支。请注意，半叶可以是无穷射线，也可以是爆破线段；后者是某个爆破环带的提升的投影。对于 ℓ 的每个半叶 h，我们也将 $\Theta^{-1}(h)$ 及其在 M 中的像都称为相应叶状结构的半叶。同样，我们 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 也可以讨论 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$ 的叶切片。

2.2. 横截曲面与影。对于伪阿诺索夫流 φ 和嵌入在 M中的闭曲面 S，若存在 φ 的动态吹起 $\varphi^{\#}$，使得 S 可以通过同痕变为与 $\varphi^{\#}$横截，我们就称 S 与 φ 近似横截。若不存在一个与 S 横截的 φ 的吹起（在同痕意义下）包含更少的爆破环带，我们就称该吹起是最小的。这等价于 S 与每个爆破环带都相交于其核心曲线这一条件。若 S 与 φ近似横截，则 S 是不可压缩的 [Man98、Fen99]，和 $[S] \in H_2(M, \mathbb{Z})$ 属于锥 $\forall_1(\varphi)$；其中，锥 $\forall_1(\varphi)$ 是 $H_2(M$中的锥，由所有与 φ的任意闭轨道交数非负的类 $\mathbb{R})$ 组成。反过来，Mosher [Mos92a、Mos92b]证明，锥 $\forall_1(\varphi)$ 中的任意类都由一个近似横截曲面表示，而近似横截曲面的集合在 [LMT25b]中得到了刻画。

下文中， φ通常表示经过最小程度膨胀、从而与曲面 S 横截的近似伪阿诺索夫流。

对于与具有不变叶丛 $\mathcal{F}^s$和 $\mathcal{F}^u$的近似伪阿诺索夫流 φ横截的曲面 S， $\mathcal{F}^s$和 $\mathcal{F}^u$与 S的交集在 S上给出一对奇异叶状结构，我们分别记为 $\mathcal{F}^s_S$和 $\mathcal{F}^u_S$。若假设 M是双曲的，那么根据驯性定理 [Ago04、CG06]和覆盖定理 [Can96]， S要么是虚纤维，要么是拟福克斯曲面。当且仅当 $\mathcal{F}^s_S$和 $\mathcal{F}^u_S$之一（等价地，两者）含有闭叶时，曲面 S 才是拟福克斯曲面。对于伪阿诺索夫悬挂流，这一点由Cooper–Long–Reid [CLR94]证明。

而对于一般的伪阿诺索夫流，Fenley [Fen99]证明了这一点。事实上，他们证明，当 $\mathcal{F}^s_S$和$\mathcal{F}^u_S$ 是拟福克斯曲面时，它们是有限叶状结构，即其所有非紧叶都螺旋地趋向闭叶。 S 这一论证可直接推广到 φ 为近似伪阿诺索夫流的情形，具体如下：

假设 S 与近似伪阿诺索夫流 φ 横截。在万有$\sim$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$覆盖空间 M 中，取 S 的原像的任意一个分支 S。 S 在与 $\tilde{\varphi}$ 相关联的轨道空间 $\mathcal{O}$ 中的影 $\Omega(S)$，是通过自然投影映射$\sim$ $\sim$ $\sim\Theta$得到的 S 的像： $M \to \mathcal{O}$。投影映射将 S 同胚映射到 $\Omega(S)$，而 $\pi_1(S)\tilde{}$ 在 $\Omega(S)$ 上的作用是覆盖作用。当且仅当 $\Omega(S)$ 不等于整个 $\mathcal{O}$ 时，曲面 S 才是拟福克斯；否则， S 是 φ 的截面（[Fen99，命题 4.5]）。严格来说，这一结论只在伪阿诺索夫情形下得到证明，但其中的论证在一般情形下同样适用。事实上，第一步是沿奇异叶切开 $\mathcal{F}^s$，从而产生一个与 S 横截的本质层状结构。无论 φ 是否具有爆破复形，所得层状结构都相同，因为切开叶状结构时会将这些复形移除。

当 S 不是截面时， [LMT25b 的第 7 节和$\sim\mathcal{S}$] 证明了 $\Omega(S)$ 由叶切片围成，且每个边界叶切片都是周期的，其在 $\pi_1(S)$ 中的稳定子同构于 $\mathbb{Z}$。若 ℓ是 $\Omega(S)$的边界$\tilde{}$ $\tilde{}$fr $\Omega(S)$ 中的稳定叶切片，则 $\mathrm{Stab}_{\pi_1(S)}(\ell)$ 的一个生成元 γ 作用于 ℓ，并有唯一的不动点$\sim x$，该点处有一条不稳定半叶终止于 x 并与 $\Omega(S)$相交。此外，这样的不稳定半叶是唯一的（[LMT25b，命题 7.8]）。这条不稳定半叶与 $\Omega(S)$ 的交集$\tilde{}$是一条 γ–不变直线，它投影到 $\mathcal{F}^u_S$的一个闭合分支。

类似地，可以在 $\mathcal{F}^s_S$中构造一个闭合分支。 $\mathcal{F}^{s/u}_S$ 中的闭叶之并 $c^{s/u}$ 就是与 φ相关联的 S 的稳定/不稳定多重曲线。

下面我们记录一个观察结果，它将帮助我们识别 c^s 和c^u中的连通分支。该结果由 [CLR94], [Fen99]推出（另见 [LMT23，引理 8。3]）。

引理 2.1. 设 M 是一个无环3维流形，其上有一个闭曲面 S，并且该曲面$\tilde{}$横截于一个近似伪阿诺索夫流 φ。固定 M 中 S 的原像$\sim$的一个连通分支 S，并令 $\pi_1(S)$表示它的稳定子。

设 α 是 S上的一条简单闭曲线，且 $\gamma \in \pi_1(S)$ 是表示$\sim\alpha$的一个元素。若 γ 固定了$\Omega(S)$的一条稳定前沿叶，则 α 同伦于$\sim c^u$的一个连通分支。类似地，若 γ 固定了$\Omega(S)$的一条不稳定前沿叶，则 α 同伦于 c^s的一个连通分支。

$\tilde{}$证明。设 ℓ 是 fr$\Omega(S)$ 中的一个由 γ固定的稳定叶切片。由上述讨论可知，存在唯一的 γ 不动点 $p \in \ell$，它有唯一一条以 p 为基点且与 $\Omega(S)$相交的不稳定半叶 $r\tilde{}$ $\tilde{}$。于是 $r \cap \Omega(S)$ 也由 γ固定，并投影到 c^u 的一个连通分支，该分支同伦于 α。

另一种情况也类似。 □

注 2.2. 正如 [LMT23引理 8 中所指出的，3], 在定理 2.1的陈述中，可以改为假设 γ 固定了一个点 $p \in \mathcal{O}$。点 p 不能

~包含在 Ω 中(S)，因为否则 α 在 M 中会与一个闭轨道同伦~，该闭轨道与 S 相交。因此， p 被唯一的边界叶(S) 与 Ω 隔开 ℓ，而该边界叶必然由 γ固定。此外， ℓ 当 $\Theta^{-1}(\ell)$ 位于~ ~S 之下/之上时， M 相对于由 φ诱导的余定向，在 [中稳定/不稳定。更多细节请参阅上述参考文献，以及3]证明之后的评注。

2.3. 曲线图与子曲面投影。设 $S = S_{g,b}$ 是亏格为 g 且有 b 个边界分支的紧致拓扑曲面。紧致曲面 S 的曲线图 $\mathcal{C}(S)$ 最初由 Harvey [Har81] 引入，并由 Masur–Minsky [MM99]，推广，其定义如下。若 S 不是环带，则 $\mathcal{C}(S)$ 是一个单纯图，其顶点集 $\mathcal{C}^0(S)$ 为 S 上本质简单闭曲线的同伦类；如果两个顶点有代表元的最小交数为 1（当 $S = S_1$ 时）、0 或 S_1、1（当 $S = S_0$ 时）、4，或者在其他情况下为 0，则这两个顶点由一条边连接。我们将每条边的长度设为 1，并考虑赋予诱导图度量的 $\mathcal{C}(S)$。对于 S 上两条本质简单闭曲线 α 和 β，定义 $d_{\mathcal{C}(S)}(\alpha, \beta)$ 为它们对应顶点在 $\mathcal{C}(S)$ 中的距离。对于子集 $X, Y \subset \mathcal{C}(S)$，令 $d_{\mathcal{C}(S)}(X, Y) = \operatorname{diam}(X \cup Y)$。

若 S 是一个环带，我们定义 $\mathcal{C}(S)$ 其顶点为连接 S两条边界的嵌入弧的同痕类。这里的同痕固定端点。若两个顶点有不相交的代表元，则以一条边相连。在这种情况下，可以证明 $\mathcal{C}(S)$与 $\mathbb{Z}$ [MM00第 2 节4]拟等距。

当 Y 是 S的本质子曲面时，存在一个部分定义的子曲面投影 π_Y，它从 $\mathcal{C}(S)$ 映射到 $\mathcal{C}(Y)$的幂集，其定义如下（完整细节见[MM00，第 2]节）。令 S_Y 为对应子群 $\pi_1(Y) < \pi_1(S)$的 S 覆盖空间。在S上任取一个完备双曲度量，并考虑 S_Y的格罗莫夫紧化 S_Y。那么，对于 S上的任意本质多曲线 α，我们考虑它在 S_Y 中的完全原像 $\tilde{\alpha}$，并将 $\pi_Y(\alpha)$定义为 $\tilde{\alpha}$ 中本质的曲线与弧（同痕类）的集合；该集合可以由两两不相交的曲线或弧组成，也可以为空（当 $\alpha \cap Y = \varnothing$在同痕意义下成立时）。因此，严格来说， π_Y是一个从$\mathcal{C}(S)$映射到曲线弧图的幂集的映射，但每条弧都可以借助沿 Y 边界的一条弧补成一条曲线，使所得曲线集合的直径至多为 2 [MM00，引理 2.2]。

给定两条多曲线 α、$\beta \in \mathcal{C}(S)$，我们将它们的 Y-子曲面距离 定义为投影 $\pi_Y(\alpha) \cup \pi_Y(\beta)$ 在 $\mathcal{C}(Y)$中的直径：

$$d_{\mathcal{C}(Y)}(\alpha, \beta) = \operatorname{diam}_{\mathcal{C}(Y)}(\pi_Y(\alpha) \cup \pi_Y(\beta)).$$

如果 α 或 β 与 Y 没有本质交点（即它们在同痕意义下不相交），则我们约定 $d_{\mathcal{C}(Y)}(\alpha, \beta) = 0$。

3. Flow saturated annuli and disks

设 S 是 M 中与近似伪阿诺索夫流 φ 横截的闭嵌入曲面，并设 N 是切割流形 $M \backslash S$。边界 ∂N 可分解为 $\partial_+ N \sqcup \partial_- N$，其中 φ 在 $\partial_- N$ 上流入 N，并在 $\partial_+ N$ 上从 N 流出。

我们有时会隐式地将 $\partial_{\pm}N$ 与 S 视为同一对象，并用 φ_N 表示 N 上诱导的半流。

一个乘积环带 A 位于 N 是一个嵌入的本质环带（即不可压缩且不与边界平行），其一个边界分支 ∂_+A位于 ∂_+N，另一个边界分支 ∂_-A 位于 ∂_-N。此外，乘积流环带是一个由从 ∂_-A 到 ∂_+A的流线段构成叶状分解的乘积环带。本节的主要结果之一是定理 3.2，该定理指出，任何乘积环带 A位于 N 都可以同伦变形为一个乘积流环带 A_φ；或者，该环带的两条边界曲线 $\partial_{\pm}A$ 在 A 中给出连通分支 $c^{u/s}$, ，且在 $\partial_{\pm}N$中同痕。

设 γ 是 $\pi_1(M)$ 中的一个元素，其共轭类由乘积环带 A 的核心~曲线表示；设 A 是 A 在 M 中的一个提升，该提升在 γ 的作用~下保持不变。于是， A 的边界位于两个提升 S_- 和 S_+ 上，它们分别覆盖 ∂_-N 和 ∂_+N~，并且 γ 保持 S_- 和 S_+不变。

~定理 3.2 的证明需要分析 S_- 和 S_+ 在~$\mathcal{O}$中的影。回想一下，对于 U 中 M的子集，其 U 在 $\mathcal{O}$上的投影称为它的影，记作 $\Omega(U)$。与之前一样，$\Omega(U)$ 在 $\mathcal{O}$ 中的边界记作 $\mathrm{fr}\,\Omega(U)$。

~**引理 3.1**。若$\Omega(S_-)$ 与$\Omega(S_+)$ 在 $\mathcal{O}$ 中相交，则它们的交集是连通的。

证明。 $(\mathrm{Fr}\,\Omega(\widetilde{S_-}))\cap\Omega(\widetilde{S_+})$ 的任一分支都是 $\mathcal{O}^{s/u}$ 中某个叶切片 ℓ 的一段。该切片 ℓ 分离 $\mathcal{O}$，而 $(\widetilde{S_+})\,\Omega\,\mathcal{O}^{s/u}$ 的叶彼此相交所得的集合均为连通集，因此 $\ell\cap\Omega(\widetilde{S_+})$ 是连通的。因此， s 将 $\Omega(S_+)$ 分离成两个分支，而 $\Omega(S_-)$ 只能与其中一个相交。对于任何这样的 s，上述论证都成立，因此 $\Omega(S_-)\cap\Omega(S_+)$ 是连通的。□

~回到上面的讨论，注意到 γ 保留了 S_- 和 S_+，因此~也保留了 $\Omega(S_-)$ 和 $\Omega(S_+)$。如果 A_φ 是 N 中与~~A适当同伦的乘积流环带，那么 A_φ 有一个 γ 不变的提升 A_φ，连接 S_- 和 S_+。

~~A_φ 的影 $\Omega(A_\varphi)$ 是一条 γ不变的开弧，且适当嵌入圆盘 $\Omega(S_-)\cap\Omega(S_+)$中。

~反过来，任意一个 γ–不变的适当浸入开路径 α in $\Omega(S_-)\cap\Omega(S_+)$ 都确定一个乘积流环带 $A_\varphi\subset N$，它与 A 适当同伦，具体如下。设 N 为 N 的原像中包含 S_- 且以 S_+ 为边界分支的连通分支，并令 $D_\varphi=\Theta^{-1}(\alpha)\cap\tilde{N}$。这是一个 γ–不变的适当~浸入带状区域，位于 N 中；其像 A'_φ 在 N 中是一个由流线段叶状分解的适当浸入环带。注意， A'_φ 与 A 在 N 中适当同伦，因为~~它们都提升为连接 S_+ 和 S_-的 γ-不变带状区域。我们声称，可以沿流线段消解 A'_φ 的自交点，从而得到一个与 A适当同伦的乘积流环带 A_φ。为此，注意到 $A'_\varphi\cap\partial_+N$ 等于 α 在 S 上的投影（在将 S 与 ∂_+N认同后），因此它与简单闭曲线 $\partial_+A=A\cap\partial_+N$同伦。因此，我们可以沿双边形和单边形对其进行消解，得到一条与 ∂_+A同伦的简单闭曲线。由于 A'_φ 沿流线段与自身相交，这种消解可以扩展为对 A'_φ 的消解，从而得到一个边界简单的乘积流环带 A_φ

（因此是嵌入的）。由于 $\partial_- N$ 不可压缩，这种消解在 $\partial A'_\varphi \cap \partial_- N$中沿平凡双边形和单边形进行手术，因此 $\partial_- A_\varphi$ 在 $\partial_- N$中也与 $\partial_- A$ 同伦。最后，我们声称 A'_φ 与 A 在 N中适当同伦。这是因为我们进行的所有消解都可以通过真同伦实现，所以 A_φ 与 A'_φ适当同伦，而后者又与 A 适当同伦，正如我们先前所述。

现在我们可以证明以下引理了。再次注意，我们默认将 $\partial_+ N$ 和 $\partial_- N$ 与 S视为相同。

引理 3.2 (乘积环带)。设 $A \subseteq N$ 是任意一个乘积环带。那么，要么 A在 N 中与一个乘积流环带适当同伦，要么 $\partial_+ A$ 是 c^u的一个分支，且 $\partial_- A$ 是 c^s的一个分支，在 ∂N中相差一个同痕。

$\sim$ $\sim$ $\sim$证明。若 $\Omega(S_-)$与 $\Omega(S_+)$相交，那么根据定理 3.1，对于任意点 $x \in \Omega(S_-) \cap \widetilde{\Omega}(S_+)$，存在一条弧 α_0 包含在 $\Omega(S_-) \cap \Omega(S_+)$ 中，连接 x 与 γx。该$\sim$连接 $\bigcup_n \gamma^n \cdot \alpha_0$ 是在 $\Omega(S_-) \cap \Omega(S_+)$ 中的一条真浸入路径，且具有γ不变性。根据上述讨论，这给出了 N中的一个乘积流环带 A_φ，它与 A适当同伦。

$\sim$ $\sim$ $\sim$如果 $\Omega(S_-)$与 $\Omega(S_+)$不相交，那么 $\Omega(S_-)$具有一个周期边界叶切片 ℓ_-，$\sim$ $\sim$ $\sim$，将 $\Omega(S_-)$ 与 $\Omega(S_+)$分隔开。由于 $\Omega(S_-)$ 和 $\Omega(S_+)$ 都由 γ固定，因此 $\Omega\ell_-$也一样。 $\widetilde{M}$ 中对应于 ℓ_- 的二维叶 $\Theta^{-1}(\ell)$ 必须将 $\widetilde{S_-}$ 与$\sim$ $\sim$ $\sim$$S_+$分隔开。由于 S_+ 位于 S_- 的正侧，ℓ_- 是不稳定叶（例如参见[LMT25b，命题 7.8]）。根据定理 2.1，$\partial_- A$与c^s的一个分支同伦。关于 $\partial_+ A$和 c^u 的情形类似。□

3.1. 主稳定/不稳定曲线。设 ω 是 φ的一条闭轨道，且包含于 N 中；设 A^u_ω 是不稳定周期半叶，它基于 ω，其反向轨道在 ω上累积，并且 $A^u_\omega \cap S$ 的闭分支（如果有）构成 $c^u \subset S$的子集。注意，c^u 的每个分支都来自这样的交，这基本上是定义所致。$A^u_\omega \cap S$ 的不稳定曲线按照其接近 ω 的程度依次排列为c_1、……、c_k；对于 $2 \leqslant i \leqslant k-1$，成对的 c_i、c_{i+1}界定了 A^u_ω 的一个子环带，而该子环带在 N中自然地是一个乘积流环带。不稳定曲线 c_1 与其自身在 A^u_ω 中界定了一个完全包含于 N的子环带 ω；这样的不稳定曲线称为主曲线（图 2）。我们用 c^u_p表示 c^u 中由主曲线组成的非空子多曲线。

I以相同的方式，我们定义主稳定多曲线，并将其记为 c^s_p。

最后，我们指出，从上述讨论显然可知，$c^{s/u} \subset S$ 的每个分支都继承了一个规范定向，使其沿着环带 $A^{s/u}_\omega$与 ω 同伦。

推论 3.3. 对于 N 中的任意乘积环带 A，我们有

$$d_{\mathcal{C}(S)}(\partial_- A, c^s_p) \leqslant 1 \quad \textit{and} \quad d_{\mathcal{C}(S)}(\partial_+ A, c^u_p) \leqslant 1.$$

证明。根据 定理 3.2，我们可以假设 A 可以经过同伦变形成为乘积流环带 A_φ在 N中。我们将考虑 $\partial_+ A$和 c^u_p的这个不等式，因为前者

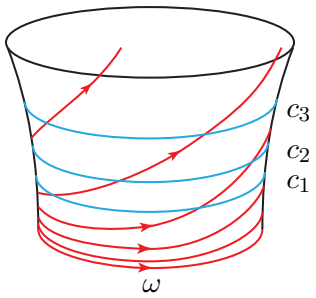

FIGURE 2. 一条以轨道 A^u_ω ω 为基点的不稳定周期半叶 N。它与 S 相交于三条闭叶 $\{c_1,\ c_2,\ c_3\} \subset c^u$，其中 c_1 是主叶，其余各叶与 N 中的乘积流环带共同围成环带。

关于 $\partial_- A$ 和 c^s_p 的情形是类似的。特别地，我们证明：如果 c_1 是一个主不稳定环，那么它与 $\partial_+ A_\varphi$不相交。

根据主不稳定曲线的定义，存在一条位于 N 中的周期轨道 ω，使得 ω 和 c_1 共同围成 A^u_ω 的一个子环带，且该子环带包含于 N 中。如果 $\partial_+ A_\varphi$ 与 c_1 在 x 相交，那么 x 的反向轨道必定包含于 N 中，并渐近于 ω。另一方面， A_φ 中的反向轨道从 $\partial_+ A_\varphi \subset \partial_+ N$ 延伸至 $\partial_- A_\varphi \subset \partial_- N$，由此产生矛盾。

由此可得， $\partial_+ A$ 与 c^u_p 在 $\mathcal{C}(S)$ 中的距离至多为一。 □

注3.4（JSJ 环带）。定理3.3意味着，对于 A中 N、 $d_{\mathcal{C}(S)}(\partial_+ A$、 $c^u) \leqslant 2$与 $d_{\mathcal{C}(S)}(\partial_- A$、 $c^s) \leqslant 2$之间的任意乘积环带，c^u 与 c^s 的曲线图直径至多为一。然而，如果 $\partial_+ A$与某个$c \subset c^u$本质相交，那么 c 就不是主的，因此它与一个乘积流环带 A_φ共同围成边界，这与定理3.3前的讨论相同。因此，本质环带 A 与 A_φ无法彼此同伦分离，由此可知， A不是 JSJ 环带（即不是 $\mathcal{A}$的环带），如第 5.1 节所述。

我们还证明了一个关于非乘积本质环带的类似结果。

引理3.5。若 A 是 N 中的任意一个适当嵌入本质环带，且具有 $\partial A \subset \partial_- N$ （分别为 $\partial A \subset \partial_+ N$），那么 ∂A 的两个连通分支在 ∂N 中都分别同痕于 c^s 的连通分支（分别为 c^u）。

证明。我们只考虑 A 在 $\partial_- N$中有边界的情形。另一种情形类似。设 γ 是 $\pi_1(M)$ 中的一个元素，代表$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$的自由同伦类，即 A的核心。于是 A在 M 中有一个提升 $\widetilde{A}$，且该提升被 γ固定。由于 A是 N中的一个本质环带$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$， ∂A 的两个连通分支分别位于 S的不同提升中，即 $\widetilde{S}_1$ 和 $\widetilde{S}_2$。 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$
我们声称，影 $\Omega(\widetilde{S}_1)$ 和 $\Omega(\widetilde{S}_2)$ 不相交。事实上， A、 $\widetilde{S}_1$ 和 $\widetilde{S}_2$ 都包含在 N的一个提升 $\widetilde{N} \subseteq M$ 中，而且在 $\widetilde{S}_1$ 和 $\widetilde{S}_2$ 上，流 $\tilde{\varphi}$ 流入 $\widetilde{N}$。因此，没有$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$流线能同时与 $\widetilde{S}_1$ 和 $\widetilde{S}_2$相交。

影 $\Omega(\widetilde{S}_1)$ 有一个边界叶切片 ℓ_1，将 Ω(分隔开 $\widetilde{S}_1$) 和 $\Omega(\widetilde{S}_2)$。由于 $\gamma\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$固定了 $\Omega(\widetilde{S}_1)$ 和 $\Omega(\widetilde{S}_2)$，它也固定了 ℓ_1 和某个 $p \in \ell_1$。二维叶

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$中与 ℓ_1 对应的切片位于 S_1 与 S_2 同侧，也就是正侧。这意味着 ℓ_1 是不稳定叶。从$\sim p_1$ 出发并与 $\Omega(S_1)$ 相交的唯一稳定周期射线 r_1，投影到 $\partial_- N$上的 c^s 的一个分支 α_1，而 α_1 与 ∂A 中提升到 $A \cap S_1$ 的分支同伦（见定理 2.1）。同样的论证$\widetilde{\quad}$也可应用于 S_2 和 ∂A的另一分支，从而证明该引理。□

3.2. 横截曲面。 本节其余部分将研究 N 中适当嵌入的横截曲面。

考虑 N 中的一个真嵌入曲面 Σ，它与 φ 横截，这意味着 $\Sigma \cup \partial N$ 上存在一个定向分支曲面结构，该结构与 φ 横截且没有 接触圆盘；在此情形下，接触圆盘是 ∂N 中的一个圆盘 D，其边界是 $\partial\Sigma$ 的一个分支，且 D 位于 ∂D 的单层侧。注意，若存在这样的接触圆盘，我们总可以利用它封住 $\partial\Sigma$ 的分支，从而得到一个边界分支更少的新横截曲面。这有时称为“切开”接触圆盘。

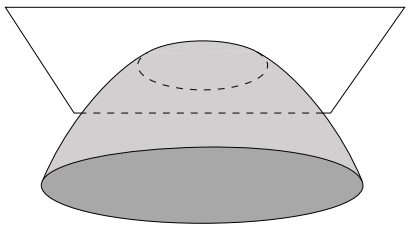

FIGURE 3. $\Sigma \cup \partial N$ 中的一个接触圆盘。

对于任意与 φ横截的真嵌入曲面 $\Sigma \subseteq N$，我们可以将 Σ旋转 ∂N 周围，得到一个横截曲面（通常为无限型） L，具体如下（另见[Ago08，定理 3。7] 或 [LMT25a，第 3 节。2]）。取 $\partial N \times [0$ 的一个邻域，$1]$该邻域位于 ∂N 中， N 并由流线段叶状分解，使得 $\partial N = \partial N \times \{0\}$。那么 L 是以下对象的定向切割粘贴和： Σ 以及曲面族

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \partial N \times \left\{\frac{1}{n}\right\},$$

在移除与 ∂N 的分支同痕的任何闭合分支之后。只有当 $\partial\Sigma$ 在 ∂N 的某个分支上是零调和时，才会出现此类闭合分支。如果对 ∂N 的每个分支都满足这一点，那么 L 就是一个闭曲面。

许多适当嵌入的横截曲面都可以旋转成同一个 L，但我们可以通过记录在 L 上诱导出的交界曲线 来保留初始曲面的信息；这些曲线位于 L 上，与来自 Σ和 ∂N 的平行副本的交中的 $\partial\Sigma$ 相关联。注意，在这一构造中， L 中还诱导出了 Σ 的一个副本，我们称之为 Σ_L，其边界是 “ 最内侧 ” 的交界曲线集合。不存在接触圆盘这一条件，等价于 $\Sigma_L \subset L$ 是一个本质子曲面。

这一构造将在接下来的几个论证中使用，也将在第 4 节中使用。

引理 3.6（横截蕴含不可压缩）。 任何 Σ中横截于 φ 的真嵌入曲面 N 都是不可压缩的。

证明。 根据前面的讨论，我们可以旋转 Σ 沿着 ∂N ，从而得到一个与 φ横截的曲面 $L^{\sim}$。考虑 $N \subset M$ ，并令 L 为$\widetilde{\quad}$ $^{\sim}$中 L 的原像的一个连通分支，其中 M是万有覆盖。注意到 ∂N 不可压缩，因此 L 是适当嵌入的。这意味着 $\widetilde{L}$ 分离 $\widetilde{M}$。事实上，令 $\mathcal{N}(\widetilde{L})$ 为$\widetilde{L}$的一个管状邻域。由 $\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(\widetilde{L}) \cup (\mathbb{R}^3 \setminus \widetilde{L})$ 的梅耶–维托里斯序列可知，包含映射 $H_0(\mathcal{N}(\widetilde{L}) - \widetilde{L}) \to H_0(\mathbb{R}^3 - \widetilde{L})$ 是一个双射。由于 $\widetilde{L}$ 是双侧的，$\mathcal{N}(\widetilde{L}) - \widetilde{L}$ 恰有两个连通分支， $\mathbb{R}^3 - \widetilde{L}$也如此。

$^{\sim}$由横截性可知，每条流线与 L 至多相交一次，因此自然的投影映射从 L 到 $\Omega(L)$是一个同胚。正如上文所述， Σ 可以$^{\sim}$实现为一个本质子曲面 $\Sigma_L \subset L$，因此只需证明 L是单$^{\sim}$连通的，这等价于证明 $\Omega(L)$是单连通的。

$^{\sim}$ $^{\sim}$$\Omega(L)$是单连通的这一断言，源于 $\Omega(L)$由 $\mathcal{O}^s$ 和 $\mathcal{O}^u$中的叶切片围成这一事实；这一点可用与[Fen09，命题 4.1]相同的证明来证明。或者，也可以使用 [LMT25b，命题 7.8]的证明。保证这两种证明都能推广的关键性质，是$^{\sim}$以下这一来自旋转构造的事实： L 在 M 中有一个 ε-邻域$\widetilde{\quad}$ $^{\sim}$，可识别为 $L \times I$ ，其中有界长度流线是I-纤维。事实上，这是 [LMT25b，引理 7.4], 中用到的基本性质，而该处也是证明 [LMT25b，命题 7.8]时唯一用到曲面紧致性的地方。至此，引理得证。□

最后，我们将证明一个关于边界压缩圆盘、类似于定理 3.2 的引理。回想一下， Σ 的边界压缩圆盘是 N 中的一个嵌入闭圆盘 D ，其 ∂D 分成一条位于 ∂N 中的弧 α_∂ 和一条位于Σ中的本质弧 α_Σ 。如果 D 是一个乘积流圆盘 E ，我们就称之为乘积流圆盘：其内部由流线叶状分解，并且存在一个从 E 到单位圆盘 $\Delta = \{|z| \leqslant 1\}$的同胚 h ，将流线映射为竖直直线，其中 $\alpha_\partial = h^{-1}(\{z : \mathrm{Im} z \geqslant 0, |z| = 1\})$ ，且$\alpha_\Sigma = h^{-1}(\{z : \mathrm{Im} z \leqslant 0, |z| = 1\})$。

引理 3.7 (边界压缩)。 设 N 中的一个真嵌入曲面 Σ 横截于一个近似伪阿诺索夫流 φ，并设 Σ的一个边界压缩圆盘为 D 。那么，经过保持 Σ 与 φ横截的真同痕后，可以将 D 同痕为一个乘积流圆盘。

证明。 边界压缩圆盘 D 的边界中的一条弧$\partial_+ N$ 位于 $\partial_- N$ 中，或者位于 $\partial_+ N$中。为便于论证，我们假设它位于 $\partial_+ N$中。另一种情况类似。我们令 $\alpha_+ \subset \partial N$ 和 $\alpha_\Sigma \subset \Sigma$ 为构成 D边界的弧，并将多曲线 $\partial\Sigma \cap \partial_+ N$ 记为 j。

$^{\sim}$ $\widetilde{\quad}$令 N 为 N 在 M 中的万有覆盖的一个副本，其正边界记作 $\partial_+ N$ （覆盖 $\partial_+ N$），并令 D 为 D 在 N 中的一个提升。 D 的边界由 $\partial_+ N$ 中的一条弧 $\tilde{\alpha}_+$ 和一条弧 $\tilde{\alpha}_\Sigma$ 组成，后者位于 Σ 的原像的一个分支 Σ 中。由于 α_Σ 是 Σ 中的一条本质弧，且 Σ 不可压缩，

定理 3.6， $\tilde{\alpha}_\Sigma$ 连接不同的边界分支 j_1 以及 j_2 的 $\partial\Sigma$。若考虑到流空间 $\mathcal{O}$，$\Omega(\tilde{j_1})$ 和 $\Omega(\tilde{j_2})$ 包含在 Ω 中$(\partial_+\tilde{N})$ 并且$\Omega(\Sigma)$，事实上 $\Omega(j_1) \cup \Omega(j_2)$ 位于 Ω 的边界(Σ)。

现在沿着 ∂N 旋转 Σ，得到一个无限型横截曲面 L （参见第 3.2 节开头的讨论）。我们可以安排使 L 中诱导的 Σ_L Σ 由 Σ 得到，具体做法是将 N 内 $\partial\Sigma$ 的一个小邻域沿着流线进行同伦变形。存在一个对应于 Σ 的提升 Σ_L，以及一个包含 Σ_L 的 L 的提升 L。注意，我们有 $\Omega(\Sigma) = \Omega(\Sigma_L) \subset \Omega(L)$。

正如我们在定理 3.6 的证明中所看到的，$\Omega(L)$ 由稳定/不稳定叶状结构的叶切片所界定。用于证明定理 3.1 的同样论证在此处也适用，可以证明 $\Omega(L) \cap \Omega(\partial_+N)$ 是连通的。因此，在 $\Omega(L) \cap \Omega(\partial_+N)$ 中存在一条弧 β，连接 $\Omega(j_1)$ 和 $\Omega(j_2)$。虽然我们无法保证 β 完全包含于 $\Omega(\Sigma)$ 中，但由于 $\Omega(j_1)$和 $\Omega(j_2)$ 分别将 $\Omega(L)$分隔开，我们可以假设其端点的邻域包含在$\Omega(\Sigma)$中。

现在将 β 投影为路径 $\beta_+ \subset \partial_+N$ 和路径 $\beta_L \subset L$，并注意到 β_L 流到 β_+，其含义是存在一个浸入矩形 $R = I \times [0,\ 1]$ 位于 N中，使得β_L 是 $I \times \{0\}$的像， β_+ 是 $I \times \{1\}$ 的像，而线段 $t \times [0,\ 1]$ 对每个 $t \in I$都映入流线。根据构造， $\beta_+ \subset \partial_+N$ 的端点位于 j 上，且与 α_+ 同伦，同时保持端点位于 j 上（因为它们在 ∂_+N 中的提升连接了 j的原像中相同的连通分支）。类似地， β_L 的端点位于 $\partial\Sigma_L$ 上，并且在保持端点位于 $\partial\Sigma_L$ 中的情况下，它与弧 $\alpha_L \subset \Sigma_L$ 同伦；根据将 Σ_L 与 Σ识别， $\alpha_L \subset \Sigma_L$ 流到 $\alpha_\Sigma \subset \Sigma$。

如定理 3.2前面的讨论所述，浸入矩形 R 可以沿流线段消解，此次通过舍弃平凡的乘积流环带，得到嵌入弧 $\beta_+ \subset \partial_+N$ 和 $\beta_L \subset L$，它们具有上文讨论的相同性质。如果 β_L 完全包含在 Σ_L中，那么 R 在将 Σ_L 沿流向上滑回 Σ后，将给出所需的乘积流圆盘。然而，情况未必如此，因此我们可能需要按如下方式同伦变形 Σ。

由于 α_L 位于 Σ_L 中，且 β_L 与 α_L 同伦，同时保持端点沿着$\partial\Sigma_L \subset L$，因此 $\beta_L \cap (L \smallsetminus \Sigma_L)$ 的弧在 $L \smallsetminus \Sigma_L$中是同伦平凡的。换言之，这些弧位于 L 的一组互不相交的圆盘中，这些圆盘沿弧与Σ_L 的边界相交。令 Σ'_L 为将这些圆盘添加到 Σ_L 后得到的子曲面（在 L中同痕）（见图4）。对原来的 Σ 而言，这一操作通过从 ∂_+N 上剥离圆盘（即原始圆盘在 L下的流像），将其扩展为新的真嵌入曲面 Σ'，使得 β_L 的像现在包含于 Σ' 中，并且 R 如上所述地导出边界压缩圆盘。由于 Σ 可以在保持横截的同时真同痕至 Σ'，故证明完成。□

4. Intersection bounds

和之前一样，我们从闭双曲流形 M 上的一个近似伪阿诺索夫流 φ 以及一个闭横截曲面 S 开始。本节不假设 φ 已进行最小程度的爆破，从而与 S 横截。切割流形 $N = M \backslash\backslash S$ 带有诱导的半流 φ_N 和边界 $\partial N = \partial_+N \sqcup \partial_-N$。

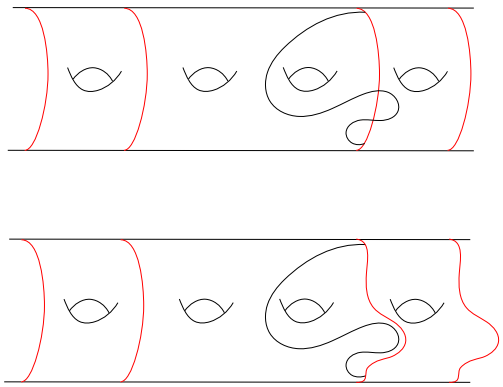

FIGURE 4. 调整 Σ_L 以包含 β_L。

本节我们证明如下结论：

命题4.1. 假设 $\Sigma \subset N$ 是适当嵌入的，并且与 φ横截。若 Σ 是边界不可压缩的，则 c^u 的主分支与 $\partial_+ N$ 上的 $\partial\Sigma$之间的交点数由一个仅依赖于 $|\chi(\Sigma)|$的常数所界定。

将 $\partial_+ N$ 替换为 $\partial_- N$后，对 c^s 同样成立。

我们从一些预备设定开始。

叶状结构 $\mathcal{F}^{s/u}$（属于 M）限制为叶状结构 $\mathcal{F}_N^{s/u}$（属于 N）；并且，按照 [LMT25a第 5], 节，这些叶状结构包含奇异子层状结构 $\Lambda^+ \subset \mathcal{F}_N^u$与 $\Lambda^- \subset \mathcal{F}_N^s$，其定义如下。不过我们指出，我们的记号不同于[LMT25a], 中的记号，其中 $\Lambda^\pm$ 被记为 $W_N^\pm$。

作为 N 的子空间， Λ^+ 是所有不与 $\partial_- N$ 相交的 φ_N 轨道的并集，而 Λ^- 是所有不与 $\partial_+ N$ 相交的 φ_N 轨道的并集。因此，交集 $\Lambda^+ \cap \Lambda^-$ 的连通分支恰好是包含在 N 中的 φ 轨道。事实上，正如 [LMT25a，命题 5.6] 所述， $\Lambda^\pm$ 是 $\mathcal{F}_N^{u/s}$ 的（奇异）子层片。 $\Lambda^\pm$ 的逐叶描述见 [LMT25a，引理 5.4]: 若 H 是 $\mathcal{F}_N^u$ 中的一片叶，则 $H \cap \Lambda^+$ 要么为空，要么是整个 H；为此，可以先移除 H 中与 $\partial_- N$ 相交的所有周期性开半叶。（注意，每个这样的半叶都是 H 与一个爆破环带的交集，该环带的轨道在正向时间趋近于 H 的周期轨道。）此外， Λ^+ 的每片叶都具有这种形式。将 u 替换为 s，并将 $+$ 替换为 $-$后， Λ^- 也有相同的逐叶描述。

设 c 是 c^u 在 $\partial_+ N$ 上的一个分支。那么， c 要么是 $\Lambda^+ \cap \partial_+ N$ 的一个分支，要么存在一个适当嵌入的环形叶 A，属于 $\mathcal{F}_N^u$，其中 $\partial_+ A = c^u$ 和 $\partial_- A \subset \partial_- N$，且 A 中的流线段从 $\partial_- A$ 流向 $\partial_+ A$。环带 A 是将 c 上的点向后流入 N 得到的；由于这些点不在 Λ^+ 中，它们都会从 $\partial_- N$ 离开。因此，参照第 3.1 节， $\Lambda^+ \cap \partial_+ N$ 的闭叶恰为 c_p^u，即主不稳定多曲线。

类似地， c_p^s 是 $\Lambda^- \cap \partial_- N$ 的闭叶子层片。我们将 $\Lambda^+ \cap \partial_+ N$ 的闭叶分类如下：

引理 4.2 (主（非）稳定多曲线)。 $\Lambda^+ \cap \partial_+ N$ 的每个闭叶都是 Λ^+ 的一个周期半叶的边界，该半叶的闭轨道位于 Λ^-的一个边界叶中。此外，这一对应在$\Lambda^+ \cap \partial_+ N$ 的闭叶与 Λ^-的边界叶的孤立侧之间诱导出一个双射。

这里，我们回顾一下， $\Lambda^\pm$ 的边界叶是指至少在其一侧孤立的叶。

$\Lambda^- \cap \partial_- N$的闭叶也有类似的结论。

证明。 设 c 是 $\Lambda^+ \cap \partial_+ N$的一个闭叶。根据构造， c 包含于$\mathcal{F}_N^u$ 的一个叶W 中，并且从 c 上各点出发的反向轨道收敛于一个闭轨道 $\omega \subset W$。此外，这些反向轨道不会离开 N （根据 Λ^+的定义），因此我们可以得出，存在 Λ^+ 的一个周期半叶 ℓ，使得 ℓ 的闭轨道为 ω ，且 $\ell \cap \partial_+ N = c$。

令 ℓ^- 为包含 ω 的 Λ^- 叶。由于 ℓ 中除 ω 以外的轨道会穿过 c，因此会在正向时间内离开 N，所以 ℓ 位于 ℓ^- 的一个孤立侧。这使得 ℓ^- 成为 Λ^- 的边界叶。

反过来，令 ℓ^- 为 Λ^- 的边界叶。根据 [LMT25a，命题 5。6]， ℓ^- 是周期的，即包含一条闭轨道 ω。（该处的陈述针对一个特殊情形，但其论证在一般情况下同样成立。我们也可以直接引用 [LMT25b，命题 8。7] 得出这一结论。）因此，我们可以令 ℓ 为 Λ^+ 中包含 ω 、且从 ℓ^- 的孤立侧出发的半叶。由于所有从 ℓ 附近（但不在其上）出发的轨道都会离开 $\partial_+ N$，因此$\ell \cap \partial_+ N$ 是 $\Lambda^+ \cap \partial_+ N$ 的一个闭合分支。这就完成了证明。□

现在我们固定一个边界不可压缩、真嵌入的曲面 $\Sigma \subset N$ ，它与 φ横截，如定理 4.1所述。注意， Σ 由 φ 自然地赋予余定向，因此 $\partial\Sigma$ 在 ∂N中具有诱导余定向。

我们希望理解 $\partial\Sigma \cap c^u \subset \partial_+ N$ 与$\partial\Sigma \cap c^s \subset \partial_- N$之间的交点，因此假设曲面 Σ 在其同痕类中选取，使其在所有与 φ横截的曲面中，令$\partial\Sigma$ 与 $c^{u/s}$ 作为 $\partial_\pm N$中的曲线时的交点数最少。事实上，由定理 4.3 可知，经过这次同痕后， $\partial\Sigma$ 与 $c^{s/u}$，处于最简位置；不过我们不需要预先用到这一事实。

为简化术语，我们作如下定义。假设 c 是 c^u 的一个分支（ c^s 情形类似）。若 $c \subset \Lambda^+ \cap \partial_+ N$，即 c 是主的，则令$H \subset \Lambda^+$ 为满足 $c = H \cap \partial_+ N$的周期半叶，并令 ω_c 为 φ_N 的闭轨道，它与 c共同围成 H 。否则，令 H 为与c 共同围成的乘积流环带。无论哪种情形，我们都称 H 为 c的支撑环带。

引理 4.3 （相交 Σ）。 设 c 是 $c^{s/u}$ 的一个分支，且设 H 是其支撑环带。若 $\partial\Sigma$ 与 c 相交，则 $H \cap \Sigma$ 由连接 H 的不同边界分支的弧组成。因此，若 c 是主的，则 Σ 与 ω_c 相交。

此外， $\partial\Sigma$ 与 $c^{s/u}$处于最简位置。

证明。考虑横截交 $H \cap \Sigma$，根据假设，其中包含与 c相交的弧。对于第一个结论，只需证明不存在两端都在 c上的弧。反设存在，取一条交弧 α_Σ ，其两个端点都在 $c \subset \partial_+ N$ 上，并且离 $\partial_+ N$最近；也就是说，它与 c 的一段弧沿着 $\partial_+ N$围成一个子圆盘 $D \subset H$ 。

若 α_Σ 是 Σ中的本质弧，则 D 是一个乘积流圆盘，这与Σ 边界不可压缩相矛盾。否则， α_Σ 与 $D_\Sigma \subset \Sigma$ 围成一个圆盘，使得$\partial D_\Sigma \setminus \alpha_\Sigma \subset \partial\Sigma$。因此，将 D_Σ 替换为 D 会得到一个新的真嵌入曲面 Σ'；由 N的不可约性可知，它与 Σ 同痕。此外，由于 D 由流线段叶状分解，经过微小扰动后， Σ' 与 φ_N 横截，且它与 c 的交点数比 Σ 少两个。这与我们对Σ 的假设矛盾，并由此证明 $H \cap \Sigma$ 由连接 H 不同边界分支的弧组成。当 H 是 Λ^+的一条半叶时，这意味着 Σ 与 ω_c相交。

现在我们利用这一点证明 $\partial\Sigma$与 $c^{s/u}$处于最简位置。为导出矛盾，假设 $\partial\Sigma$与 c^u 在 $\partial_+ N$上某个（例如） c 分支围成一个双边形 B 。若 H 是 c的支撑环带，那么上面的论证表明 c不可能是主的，因为 $\partial\Sigma$ 与 c 既有正交也有负交（而Σ与 ω_c只有正交）。因此， H 是一个乘积流环带，并且交集 $\Sigma \cap H$ 的每条弧都连接H的不同边界分支。由双边形 B 确定的交弧在 H 中围成一个带状区域 s ；若这些弧也在 Σ中确定一个带状区域 D ，则可以像上面那样进行手术，将 D 替换为 $s \subset H$ ，并通过扰动消除 $\partial_+ N$上 $\partial\Sigma$与 c^u 的两个交点。否则，可以将并集 $s \cup B$ 从 $\partial_+ N$ 上推开，从而得到一个以 Σ为对象的边界压缩圆盘。这与假设 Σ 边界不可压缩相矛盾，证明至此完成。□

设 L 为通过旋转 Σ而得到的横截无限型曲面 ∂N（参见定理 3.2前的讨论）。由于 L 与 φ横截，因此存在诱导出的（奇异）层状集 $\lambda^\pm = \Lambda^\pm \cap L$。从构造上看，奇异层状集 λ^+ 支撑于点集开集 $\mathcal{U}^-$ 的补集，其中 L上的点的反向轨道与 $\partial_- N$ 相交。类似地， λ^- 支撑于开集 $\mathcal{U}^+$的补集，其中点的正向轨道与 $\partial_+ N$相交。子集 $\mathcal{U}^\pm \subset L$分别称为正/负逃逸集。

$\lambda^\pm$ 的一条半叶（在 L 中也称为射线）若以 L 与 φ_N 的一条闭轨道的交点为基点，则称其为周期的。（稍微滥用术语，我们将 L 与 φ_N 的一条闭轨道的交点称为 L 的周期点。）每条周期射线要么是循环的，要么逃逸出 L 的紧集；后一种情况下，我们称其为逃逸的。我们将 $\lambda^\pm$ 中在 φ 作用下存在良定义首次返回映射的周期逃逸射线称为主射线。下一个引理将 $\lambda^\pm$ 中主射线的结构与 $\Lambda^\pm$ 的周期半叶联系起来，后者确定主不稳定/稳定曲线。

引理 4.4 （ $\lambda^\pm$的主射线）。 若 ℓ 是 Λ^+ 的一条周期半叶，且$\ell \cap \partial_+ N$ 是一条闭叶，即一条主不稳定曲线，那么 $\ell \cap L$ 是由主射线 λ^+组成的（可能为空的）集合。

反过来，若 l 是 λ^+的一条主射线，那么它在 N 中的流饱和是 Λ^+ 的一条周期半叶，并与 $\partial_+ N$ 相交于一条主不稳定曲线。

特别地，若 l 是以周期点 $p \in L$ 为基点的 λ^+ 的主射线，则 $l \setminus p \subset \mathcal{U}^+$。

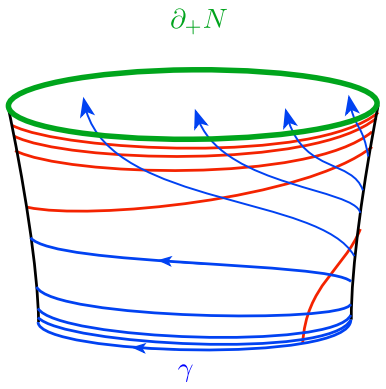

FIGURE 5. 一幅来自 [LMT25a] 的图，展示了与 Λ^+相交于 $\partial_+ N$ 一条闭曲线（主不稳定曲线）的周期叶，以及从其与 λ^+ 的交点出发的L。

证明。 对于第一个结论，设 ℓ 是 Λ^+ 的一个周期半叶，且$\ell \cap \partial_+ N$ 是闭的。那么 ℓ 是 $c = \ell \cap \partial_+ N$ 的支撑环带，结论由定理 4.3得证

对于逆向结论，设 l 是 λ^+ 的一条主射线，并设 ℓ 是包含 l 的 Λ^+ 的半叶。由于射线 l 包含于 λ^+ 中，首次返回映射 $l \to l$ 固定其周期点，且是扩张的。因为 l 是逃逸的，每个点的正向轨道都会离开 L 的正端，因此趋于 $\partial_+ N$ 上的一个点。由此可见， $\ell \cap \partial_+ N$ 是 $\Lambda^+ \cap \partial_+ N$ 的一条闭叶，证毕。□

最后一个引理是控制交点的主要方法。

引理4.5。 如上所述， Σ 和 L 的每条主射线与 $\partial\Sigma_L$相交不超过一次。

证明。 设 l 是 λ^+ 的一条主射线，以周期点 $p \in L$为基点。显然，$p \in \Sigma_L$ 并假设 l 与 $\partial\Sigma_L$ 相交不止一次。由于 $\partial\Sigma_L$ 分离L， l 横截 $\partial\Sigma_L$ 时既正向又反向。因此， $\partial\Sigma$ 横截与 c 相关的主不稳定曲线 l （如 定理 4.4所述）时既正向又反向。这与 定理 4.3 矛盾，因为 Σ与 φ正横截。 □

有了这些工具，我们现在来证明这个命题。

定理 4.1 的证明。设 c 是 c^u 的一个主分支，它与 $\partial\Sigma$ 相交。那么 c 是 $\Lambda^+ \cap \partial_+ N$ 的一个分支，因此我们可以应用定理 4.2 和定理 4.4。特别地，设 ℓ^+ 是 Λ^+ 的周期半叶，且具有 $c = \ell^+ \cap \partial_+ N$。那么， c 与 $\partial\Sigma$ 的交点和 $\ell^+ \cap L$ 与 $\partial\Sigma_L$ 沿 L 的交点之间存在双射（该双射由将 $\partial\Sigma_L$ 沿流映至 $\partial\Sigma$ 给出）。此外，定理 4.4 表明，交集 $\ell^+ \cap L = \{l_1^+, \ldots, l_k^+\}$ 是一族主射线，且 ℓ^+ 是每条 l_i^+ 的流饱和。由于每条 l_i^+ 与 $\partial\Sigma_L$ 的每个分支至多相交一次（定理 4.5），只需用 $\chi(\Sigma)$ 来界定 k。

由 定理 4.2可知，存在一个（周期的）边界叶切片 ℓ^- 属于 Λ^-，其闭轨道与 ℓ的闭轨道相同。因此， $\ell^- \cap L = \{l_1^-, \ldots l_k^-\}$是 λ^- 的一组边界叶切片，使得 l_i^+ 的起点也是 l_i^-的周期点。现在只需界定 λ^-的周期边界叶切片数量。

对于边界叶切片 l，令 l_Σ 为 $l \cap \Sigma_L$ 中包含 l的周期点的分支。这里我们利用了这样一个事实： L 的所有周期点都位于Σ_L中。我们将证明，至多有两条形如 l_Σ 的边界弧能在 Σ中平行。否则，我们可以找到 λ^-的两个这样的边界截面叶 l、 l'，使得弧l_Σ 和 l'_Σ 围成一个带状区域 s，其内部包含于 $\mathcal{U}^+$。注意， s 的另外两条边沿着 $\partial_-\Sigma_L$中的弧，其中 $\partial_-\Sigma_L$ 是 $\partial\Sigma_L$ 中与 $\Sigma \cap \partial_- N$的分支相对应的分支。

令 p为 l的周期点。由于 $p \in l_\Sigma$，它位于 s的边界上，因此存在一条以 p 为基点、指向 s内部的 Λ^+ 的主射线 l^+。根据定理 4.2和定理 4.4可知，该 l^+ 是主的；参见证明开头，若 $l = l_i^-$，则 $l^+ = l_i^+$。由于 l^+ 不穿过 $\partial_-\Sigma_L$，它必定在 s 的边界上某点 $p' \in l'$处穿过 l'。一方面， p' 的反向轨道（沿着 l^+的流饱和）必定在 s 的内部与 L 相交。由于 s 的内部包含于 $\mathcal{U}^+$中，这意味着沿着 p' 的正向轨道离开 $\partial_+ N$。但这与 l' 是 λ^- 的一条叶相矛盾，因此经过其任一点的正向轨道都保持在 N 中。

由于 Σ 中不交非平行本质弧的数量存在一个仅取决于 $\chi(\Sigma)$的上界，只需证明每个 l_Σ 都是本质弧即可完成证明。否则， l_Σ 与一条弧 $a \subset \partial_-\Sigma_L$共同围成一个圆盘 $D \subset \Sigma_L$。但是，由于l_Σ 是包含周期点 p的 λ^- 的一条叶的弧，经过p 的 λ^+ 的叶 l^+ 必定包含一条以 p 为基点、与 D的内部相交的射线 r。然而，这是矛盾的： r 不能经由 l_Σ 离开 D，因为那会在 $\lambda^\pm$的叶之间形成一个双边形；它也不能穿过 a，因为 λ^+ 与 $\mathcal{U}^-$不交。□

5. Geometric arguments: broken windows and bounded length curves

在陈述本节的主要结果之前，我们简要概述三维流形的 JSJ 理论，以及双曲三维流形中的褶皱曲面。

5.1. **JSJ分解**。 关于三维流形 JSJ 分解的完整理论，请读者参阅 [JS79] 和 [Joh79]。本文采用的表述出自 [Ago10]（另见 [BBCM20，第 2 节。2] 其中使用的术语与本文相同）。就本文而言，考虑一个紧致可定向不可约三维流形

N 其边界非空且不可压缩，并且 N 的内部具有双曲结构。根据 JSJ 分解理论，存在一个典范的两两不相交、互不平行的本质环带集合 $\mathcal{A}$，使得

(1) $N\backslash\backslash\mathcal{A}$ 的连通分支是 I-丛、刻痕实心环面和无圆柱刻痕3-流形；(2) N 中的任意浸入本质环带都可以同伦变形到 $N\backslash\backslash\mathcal{A}$ 中属于 I-丛或刻痕实心环面的一个连通分支内。

由瑟斯顿定义的窗口 $W(N)$（属于 N）是 N的一个子流形，由所有 I-丛连通分支以及 $\mathcal{A}$中作为挖补实心环面边界、但不与 I-丛相邻的连通分支的加厚邻域组成。于是，所有浸入本质环带都可以通过同伦变形进入 $W(N)$。窗口曲面 $\partial_w N$ 是 ∂N的一个子曲面，由 $W(N)\cap\partial N$给出。窗口框架 $\mathrm{WF}(N)$定义为 $\partial_w N$的边界。若 ∂N 的一个连通分支 X 不与 $\partial_w N$相交，我们就称其为不透明 。这等价于说，N 中不存在边界分支位于 X的本质环带。

我们需要以下这一事实，相信专家们对此都已十分熟悉。

引理5.1。 设 N 是一个紧致不可约无环<*style id='4'*>*3*流形，且边界不可压缩；设 X 是 ∂N的一个不透明分支。那么，如果 N 中的一条闭曲线 γ 满足：对于某个 $k\neq 0$，γ^k 同伦进入 X，则 γ 同伦进入 X。

因此，X 中的一条本质简单闭曲线在 N中是不可分的，即不与 N中某条闭曲线的真倍数同伦。

证明。 设 $x\in X$，并设 $l\subset X$ 是 x 处的一条代表 γ^k的闭曲线。若用一条以 x 为基点的、位于 N中的闭曲线表示 γ（不改变其名称），则 $\pi_1(N$中的关系 $\gamma\cdot l\cdot\gamma^{-1}=l,\ x)$ 确定了一个从环带 A 出发的映射 $(A,\ \partial A)\to(N,\ X)$，使得 ∂A 的每个分支都映射到 l。由于 X 是不透明的，这个从 A 出发的映射可以被适当地同伦变形进入 X。这就产生了一个从 γ 到 X 中一条闭曲线的同伦，并完成了第一个断言的证明。

对于第二个断言，若 l 是 X 中的一条简单闭环，并且对某个 $k\neq 0$与 $\gamma^k\subset N$同伦，那么我们已经知道 γ 同伦到 X中。因此，假设$\gamma\subset X$。那么，从 l 到 γ^k 的同伦仍由一对映射 $(A,\ \partial A)\to(N,\ X)$ 给出；如上所述，该映射适当同伦到 X中。但由于 X 是可定向曲面，我们必有 $k=\pm 1$，证明至此完成。□

最后，以下定理归功于瑟斯顿 [Thu98，定理 0。1]。另一种证明见 ∂N 的附录，其中明确说明了其依赖关系仅取决于 [BMNS16]。

定理 5.2 (瑟斯顿的"只有窗户会破裂")。设 N 是一个紧致不可约无环3维流形，具有不可压缩边界。那么存在一个常数$C_1\geqslant 0$，仅取决于 $|\chi(\partial N)|$，使得对于int N上的任意完备双曲结构，窗口框架的长度至多为 C_1。

5.2. **褶皱曲面**。 N 中的折叠曲面 是一个映射 f，它从有限型曲面S 映到完备双曲流形 N，其中 S 配备了双曲度量 σ 和测地层状集 λ，并满足以下性质： f 保持

路径长度，将 λ 的每个叶映到 N内部的一条测地线，并且在 λ的补集中是全测地的。我们允许 S 有边界，此时要求 λ 包含 ∂S ，且 σ 是 S 上的一种具有测地边界的双曲度量。我们称σ 为 S上的诱导双曲度量，称 λ 为 f的折叠轨迹。对于任意连续映射 $\rho\colon S \to N$，若折叠曲面 f:（S与 ρ同伦，则称其为 ρ的折叠实现。给定 ρ （实际中通常是包含映射），若 S 上的测地层状集 λ存在一个折叠实现，且其折叠轨迹包含 λ，则称其可实现。若 ρ是 π_1-单射，则 S 上的任意多曲线都可实现。更多详情请参见 [CEG87]。

下一个命题是本节的主要结果，它推广了 [FKLL25，引理4。1] 他们在 N为无环柱的情形下，证明了其（唯一的）全测地双曲结构上的界。 N 。

命题 5.3（有界交界）。 设 N 是一个紧致、不可约且无环的3维流形，其边界不可压缩；设 Σ 是 N中的一个不可压缩、边界不可压缩的真嵌入曲面。假设 α 是 $\partial\Sigma$在一个不透明分支 $X \subseteq \partial N$上的一个分支。那么存在一个常数 $C_2 \geqslant 0$，其仅取决于 $|\chi(\partial N)|$和 $|\chi(\Sigma)|$，使得对于 N上的任意完备双曲结构，均有 $\ell_N(\alpha) \leqslant C_2$。

证明。固定 ∂N 和 Σ在 N 中的一个折叠实现，使多曲线 $\partial\Sigma$ 同时位于 ∂N 和 Σ 的折叠轨迹中。由于这两个褶皱映射都将 $\partial\Sigma$ 映到其在 N 中的测地代表，我们可以将这两个映射合并，得到一个映射 $g\colon \partial N \cup_{\partial\Sigma} \Sigma \to \text{int } N$。我们声称 $g|_{X\cup\Sigma}$ 同伦于恒同包含映射。事实上，由于 N 无环且 X 不透明，将 $\partial\Sigma \cap X$ 中的曲线同伦到其测地代表的方式在同伦意义下是唯一的（见定理 5.1）。 X 和 Σ 都同伦于它们在 g 下的像，因此我们可以合并这些同伦，得到从 $X \cup \Sigma$ 到 $g(X \cup \Sigma)$ 的一个同伦。或者，也可以更仔细地构造 g，使其在整个 $\partial N \cup \Sigma$ 上同伦于恒同映射：首先将 ∂N 实现为褶皱曲面，并将 Σ 在正确的同伦类中实现为单纯复形双曲曲面（如 [Can96] 中所述），使所有顶点都位于 $\partial\Sigma$ 上；然后绕 $\partial\Sigma$ 旋转这些顶点，使 Σ 成为褶皱曲面（如 [Thu78，第 8.39] 节所述）。正如我们稍后将看到的，我们需要 g 在并集 $X \cup \Sigma$ 上同伦于恒同映射，而不只是分别在 X 和 Σ 上同伦于恒同映射，原因在于我们希望 $g(\Sigma)$ 和 $g(X)$ 的一个浸入的边界压缩圆盘能给出 Σ 和 X 的一个浸入的边界压缩圆盘。

褶皱映射 g 在 ∂N上诱导出一个双曲结构 τ，并在 Σ上诱导出一个带测地边界的双曲结构 σ。当讨论 ∂N 和 Σ时，我们将使用这些度量。我们将 N 中任意闭曲线 γ 的唯一测地代表记为 γ^*。注意，在这些固定度量下， $\partial\Sigma$ 在 Σ和∂N上都是测地线。

令 ε_0 为 $\mathbb{H}^3$的马古利斯常数，并回顾 α 来自 定理 5.3的陈述。对于 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，的 ε–薄部记为 $N^{\leqslant\varepsilon}$。

断言1. 存在 $R \geqslant 0$ 和 $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$，它们取决于 Σ 和∂N的拓扑，使得要么我们有 $\ell_N(\alpha^*) \leqslant 2R$，要么 α^*与 $N^{\leqslant\varepsilon_2}$不相交。

断言的证明. 首先，我们需要瑟斯顿的以下观察 [Thu86]。

引理 5.4 (瑟斯顿)。 对于任意拓扑曲面 S，存在一个常数$\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ ，它仅取决于 S 的拓扑，使得对于任意闭褶曲面$f\colon\ S \to N$，都有 $f^{-1}(N^{\leqslant \varepsilon_1}) \subseteq S^{\leqslant \varepsilon_0}$。

固定一个满足关于 ∂N的定理 5.4 的 ε_1 ，并固定一个常数 R ，使得 $\cosh(R) > 1 - \chi(\Sigma)$。那么存在一个一致的 $\varepsilon_2 < \min\{\varepsilon_1, R\}$ ，使得 $d_N(N^{\leqslant \varepsilon_2}, N^{>\varepsilon_1}) > 2R$（参见 [Min99，引理 6.1]）。假设 α^*与一个ε_2-马古利斯管 $\mathbb{T}_{\varepsilon_2}(c)$在 $N^{\leqslant \varepsilon_2}$处相交，其中 c是 N中的一条定向核心曲线。为导出矛盾，假设 α^* 的长度大于 $2R$。

由于 $\varepsilon_2 < R$，曲线 c与 α不同伦。设 x 是 $\alpha^* \cap \mathbb{T}_{\varepsilon_2}(c)$中的一点，并设 x_1 是 $\alpha \subset \partial\Sigma$ 中的一点，使得 $g(x_1) = x$。考虑 Σ中 x_1 的 R-邻域$B_R(x_1)$ 。根据我们对 R的选择，半圆盘 $B_R(x_1)$ 不能嵌入 Σ ，否则 $B_R(x_1)$ 的面积将大于 Σ的面积。因此，要么存在一条位于 Σ 上的本质弧，长度为 $\leqslant R$ ，连接 x_1 和 $\partial\Sigma$；要么我们可以找到一条从 x' 出发并终止于 x' 、长度为 $< 2R$的测地环。如果这条测地环是本质的，那么我们就回到了第一种情况，只不过此时有一条长度为 $\leqslant 2R$ 的本质弧。如果这条测地环与 α同伦，那么这就与假设 $\ell_\sigma(\alpha) = \ell_N(\alpha^*) > 2R$矛盾。

令 a 表示我们刚刚构造出的包含 x_1 的 Σ 的本质弧，并令 x_2 为 a 的另一个端点。注意， x_1 和 x_2 都包含在 $\partial\Sigma \subset \partial N$ 中。根据我们对 ε_2 的选择，路径 $g(a)$ 包含在 $\mathbb{T}_{\varepsilon_1}(c)$ 中。由定理 5.4 可知，x_1 和 x_2 都包含在 $g^{-1}(\mathbb{T}_{\varepsilon_1}(c)) \cap \partial N \subseteq (\partial N)^{\leqslant \varepsilon_0}$ 中。若 x_1和 x_2 位于 ∂N 中两个不同的 ε_0-细管内，那么（取适当的倍数后）这些分支的核心曲线在 ∂N 中非同伦，而在 N 中同伦于 c，这与 X 不透明这一事实矛盾。因此， x_1 和 x_2 包含在 $X^{\leqslant \varepsilon_0}$ 的同一个分支 T 中。取一条与 c 同伦的 T 的定向核心曲线 c' （使用定理 5.1），再取 T 中连接 x_1 和 x_2 的任意一条弧 b。闭曲线 $g(a \cup b)$ 包含在 $N^{\leqslant \varepsilon_0}$ 中，因此它同伦于某个 n。若令 b' 表示在 T 中将 b 绕 c' 缠绕 $-n$ 次所得到的弧，那么 $a \cup b'$ 是平凡的。换言之，本质弧 $a \subset \Sigma$ 与弧 $b' \subset \partial N$ 在端点固定的意义下同伦。注意，此处我们隐含地用到了 $g|_{X \cup \Sigma}$ 同伦于恒同映射。虽然从 a 到 b' 的同伦不一定是边界压缩，因为该同伦的像可能是一个在内部与 $\Sigma \cup \partial N$ 相交的浸入圆盘，但通过标准论证，我们可以去除非本质交点，并取最内侧的本质边界压缩圆盘，这与 Σ 的边界不可压缩性矛盾。□

根据初等双曲几何，对于任意 $L > 0$ ，存在一个常数 $D(L) \geqslant 0$，使得如果 $\ell_\sigma(\alpha) > D(L)$，那么 Σ包含一个矩形带 B ，其一对相对边 $\eta_1 \subseteq \alpha$ 和 $\eta_2 \subseteq \partial\Sigma$ 的长度为 $L_\eta > L$，宽度为 $< \varepsilon_2/8$。这个常数 $D(L)$取决于 L，也取决于 ε_2 和 Σ 的拓扑。注意，η_1 和 η_2 也是 ∂N上的测地线段。通过扩大 $D(L)$，我们可以假设 $D(L)$ 始终大于 $2R$。那么断言1表明， $g(\eta_1)$ 包含在

$N^{>\varepsilon_2}$中。由于 $g(\eta_2)$ 始终位于 $g(\eta_1)$的 $\varepsilon_2/8$邻域内，存在 $\varepsilon_3 > 0$使得 $g(\eta_2)$ 位于 $N^{>\varepsilon_3}$中。我们还假设 ε_3 小于 $\varepsilon_2/4$。

现在，我们应用 [BMNS16]附录中的一个体积论证。更准确地说，我们用弧长对 η_i进行参数化，使得 $d_\Sigma(\eta_1(t),\ \eta_2(t)) < \varepsilon_2/4$ 对所有 $t \in [0,\ L_\eta]$。定义映射 $G\colon\ [0,\ L_\eta] \to \partial N \times \partial N$其定义如下:

$$G(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t)).$$

$\partial N \times \partial N$的体积为 $4\pi(\chi(\partial N))^2$。另一方面，对于任意的 t，$G(t)$ 在 $\partial N \times \partial N$ 中有一个嵌入的邻域 $B_{\varepsilon_3}(\eta_1(t)) \times B_{\varepsilon_3}(\eta_2(t))$，因为 g 在 ∂N上是 1–利普希茨的。这样的邻域体积为 $4\pi^2(\cosh(\varepsilon_3) - 1)^2$。因此，为了寻求矛盾，若有

$$L_\eta > L_0 = \frac{4\pi(\chi(\partial N))^2}{4\pi^2(\cosh(\varepsilon_3) - 1)^2} + 2, \tag{1}$$

于是存在 $t_1,\ t_2 \in [0,\ L_\eta]$，使得 $|t_1 - t_2| \geqslant 1$ 满足上述所述的 $G(t_1)$ 和 $G(t_2)$ 的邻域（由 ε_3-圆盘的乘积给出）有非空交集。换言之，存在点 $\eta_1(t_1),\ \eta_1(t_2)$，位于 η_1中；以及点 $\eta_2(t_1),\ \eta_2(t_2)$，位于 η_2 中，使得

- $d_{\eta_i}(\eta_i(t_1),\ \eta_i(t_2)) \geqslant 1$ 对于 $i = 1,\ 2$;
- $d_{\partial N}(\eta_i(t_1),\ \eta_i(t_2)) \leqslant \varepsilon_2/4$ 对于 $i = 1,\ 2$;
- $d_\Sigma(\eta_1(t_j),\ \eta_2(t_j)) \leqslant \varepsilon_2/4$ 对于 $j = 1,\ 2$。

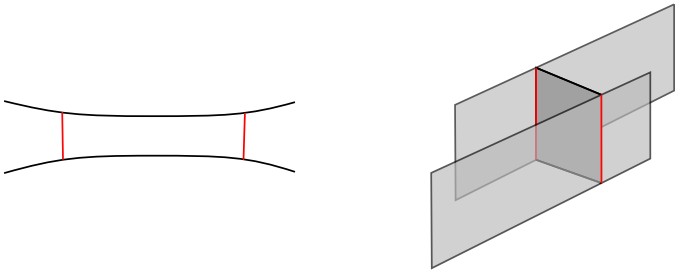

FIGURE 6. 带 B 和圆盘 Δ。

取连接 $\eta_1(t_1)$和 $\eta_2(t_1)$、位于 Σ 中的最短测地弧 γ_1，取连接 $\eta_1(t_2)$ 和 $\eta_2(t_2)$、位于 Σ中的最短测地弧 γ_2，取连接 $\eta_1(t_1)$ 和 $\eta_1(t_2)$、位于 ∂N 中的最短测地弧 γ_3，以及取连接 $\eta_2(t_1)$ 和 $\eta_2(t_2)$、位于 ∂N中的最短测地弧 γ_4。特别注意，γ_1 是 Σ中的一条本质弧，因为 η_1 和 η_2 是两条几乎平行的测地弧。每条 γ_i 的长度都是$< \varepsilon_2/4,$，因此若令闭曲线 γ 为 γ_1、γ_3、γ_2和 γ_4的连接，则 $g(\gamma)$ 是 N中长度为 $< \varepsilon_2$ 的闭曲线。但由于 $g(\eta_1(t_1)) \in g(\eta_1)$ 位于 N的ε_2-厚部分，$g(\gamma)$ 在 N 中平凡，并围成一个浸入圆盘 Δ。见图6。若将 B 中 γ_1 与 γ_2 之间的子带记为 B'，则 $g(B')$ 和 Δ 共同构成 N 中的一个非平凡浸入环带 A，且具有 $\partial A \subseteq g(\partial N)$，而 A 的一条边界包含在 $g(X)$中。

利用从 $g|_{\partial N}$ 到包含映射的同伦，我们可以将环带 A同伦变形回 N 中的一个真浸入平环 A'，且至少有一个边界分支位于 X中。环带 A'具有非平凡核心，因为 $\partial A \cap g(X)$ 是 X 中一个由两条不同测地弧组成的环路的像。我们断言 A' 也不是边界平行的。为此，可以假设 A' 的两个边界都位于 X上，否则无需证明。若 A' 可以同伦变形为 X，则 A 可以同伦变形为$g(X)$，这尤其意味着 $g(\gamma_1)$ 可以同伦变形为 $g(X)$。但由于 γ_1 是 Σ中的一条本质弧，且 g 在 $\Sigma \cup X$上同伦于恒同映射，这与 Σ 是边界不可压缩的假设相矛盾（如断言1证明的最后一段所述）。这一矛盾表明，A' 是 N中的一个本质环带，且有一个边界分支包含在 X中。但这与 X 是不透明的假设相矛盾。由此矛盾可知，$\partial\Sigma$ 的任何分支长度都不大于 $D(L_0)$，其中 L_0 是式（1）中的常数，而 $D(L_0)$ 最终仅取决于 ∂N 和 Σ的拓扑。□

6. Endgame: proof of main theorems

回顾一下，我们已固定一个闭双曲三维流形 M，它带有一个几乎伪阿诺索夫流 φ，并且 S 是一个嵌入的曲面，该曲面对φ横截。

综合至此所做的工作，我们可以建立如下结论：

命题 6.1. 存在常数 L、$d \geqslant 1$，它们依赖于 $|\chi(S)|$ 和 $\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S)$，以及 $\mathcal{C}(S)$ 中的曲线 α 和 β，使得：

- α 和 β 在 M 中的测地代表的长度不超过L，并且• 相交数 $i(c^s、\ \alpha)$ 与 $i(c^u、\ \beta)$ 不超过 d。

证明。 我们将证明关于 c^s的命题。关于 c^u 的陈述类似。

首先，回顾第 5.1 节，$\partial_w N$ 是 $N = M\backslash\backslash S$的窗口子曲面。如果$\partial^w N \cap \partial_- N$非空（例如 $\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S) = 0$的情形），取交集的任意一个分支 P。我们也将 P 视为 S的子曲面。根据窗口的构造，对于 ∂P的任意一个分支 α，在 N 中存在 $\mathcal{A}$ 的一个适当嵌入本质环带 A，且满足 $\alpha \subseteq \partial A$。根据定理3.3，以及当 A 是乘积环带时的定理 3.4（否则根据定理3.5），多曲线 c^s 在同痕意义下必与 α不相交。因此 $i(c^s、\ \alpha) = 0$，并且由于 α 属于 $\mathrm{WF}(N)$，瑟斯顿的“只有窗户会破裂”定理（定理 5.2）意味着 $\ell_M(\alpha) \leqslant C_1$，其中 C_1 仅取决于 $|\chi(S)|$。

若 $\partial_- N$ 是不透明的，令 $\Sigma \subset N$ 为与（动态吹起后的）φ 横截且具有最小复杂度的适当嵌入的本质曲面。注意，根据定义，$\chi(\Sigma) = -\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S)$。令 α 为 $\partial\Sigma \cap \partial_- N$ 的一个分支。根据定理 4.1，交数 $i(\alpha, c_p^s)$ 有一个仅依赖于 $|\chi(\Sigma)|$的常数上界 d。此外，由于 $\partial_- N$ 是不透明的，$c_p^s = c^s$，因为任何非主稳定曲线都与一条本质乘积流环带共同围成边界（见第 3.1 节）。根据定理 5.3，$\ell_M(\alpha) \leqslant C_2$，其中 C_2 依赖于 $|\chi(\Sigma)|$ 和 $|\chi(S)|$。令 $L =$ 为$\{C_1, C_2\}$ 中的最大值，即得证明。□

鉴于定理6.1所提供的几何控制，我们证明主要定理的策略是首先转至对应于 S 的拟福克斯覆盖，然后在该设置下应用先前得到的结果。

为此，令 $p\colon\ Q \to M$ 为 M 对应的覆盖空间，并令 S 为嵌入 $S \to Q$ 的唯一提升 $S \to M$。由于 S 不是 φ的截面，双曲流形 Q 是拟福克斯的（见 第 2.2 节）；也就是说，它是一个凸余紧双曲 3-流形，且 $S \to Q$ 是同伦等价。

要应用我们的策略，我们需要下面这个拓扑引理。首先回忆，若流形 M 中的 S 是半纤维，则 M 是通过将两个以不可定向曲面为底的扭曲区间丛粘合而成的，而 S 是每个丛的边界像。这样的曲面在双覆盖中会成为纤维；因此，拟福克斯曲面既不是纤维，也不是半纤维。

引理 6.2。设 S 是闭的、定向的不可压缩曲面，嵌入于闭双曲3维流形 M 中。假设 S 不是纤维或半纤维。

S 中两两不同伦、但在 M 中变为同伦的闭曲线的最大数量，有一个仅依赖于 $|\chi(S)|$ 的常数上界。

特别地，在覆盖映射 $p\colon Q \to M$ 下映到同一条闭测地线的 Q 中闭测地线的数量有一个统一上界。

证明。固定 α 中曲线的一个同伦类， S 并令 G为一个图，其顶点是 S 中与 α 在 M 内同伦的曲线的同伦类。若存在这些曲线之间的同伦 $H\colon\ S^1 \times I \to M$ 满足 $H^{-1}(S) = S^1 \times \{0,\ 1\}$（称这样的同伦为简单同伦），则在这两个不同顶点之间连一条边。注意，简单同伦诱导出一个同伦 $S^1 \times I \to M\backslash\backslash S$，因此可以通过适当的同伦变形，使其与 JSJ 环带不相交（参见 第 5.1 节）。

我们的目标是给出 G的顶点数的上界。标准论证表明， G 是连通的。更重要的是，Deblois 的一个定理 [DeB16] 指出，任意约化同伦都可以表示为至多 $14g - 12$ 个简单同伦的串接，其中g 是 S的亏格。就 G而言，这意味着 G 的任意两个顶点之间都存在一条长度至多为 $14g - 12$的路径。因此，只需给出 G任意顶点的度的上界。

为此，考虑一条曲线 β ，它位于 $M\backslash\backslash S$的边界上。根据 第 5.1 节概述的 JSJ 理论，显然， β 在 $M\backslash\backslash S$中同伦的意义下，至多与 $\partial(M\backslash\backslash S)$边界上的另一条曲线同伦，除非 β同伦进入 $\mathcal{A}$的某个挖补实心环面补分支。不过，我们断言，$(M\backslash\backslash S)\backslash\backslash\mathcal{A}$ 中的挖补实心环面块数量有上界 $|\chi(S)|$。这是由 S 上不相交曲线同伦类数量的上界，以及以下事实得出的：如果 A 中的一个环带 $\mathcal{A}$ 切分出 X_1 和 X_2 这两个 $(M\backslash\backslash S)\backslash\backslash\mathcal{A}$的挖补实心环面分支，那么 $X_1 \cup_A X_2$ 就是一个（非实心环面的）塞弗特流形，这与M 无环矛盾。证明至此完成。□

约定 6.3. 给定 $A, B \geqslant 0$，下文中我们将简化记号，写作 $A \prec B$ ，表示存在一个常数 $c > 1$，其仅依赖于 $\chi(S)$，使得 $A \leqslant c \cdot B + c$。如果某个粗略不等式还依赖于其他

因素（如核心复杂度 $\mathfrak{c}(M\backslash S)$），我们将在记号中明确标出这种依赖关系。

6.1. **大体积**。再次令 $p\colon\ Q \to M$ 为对应于 S 的拟福克斯覆盖空间，并固定包含映射 $S \to Q$ 的一个提升 $S \to M$。应用 定理 6.1，得到曲线 α 和 β，它们位于 $\mathcal{C}(S)$，并令 α^* 和 β^* 为它们在 Q中的测地代表（这些测地线的长度与它们在 M中的像相同）。

考虑一个折叠曲面 $f\colon S \to Q$，它与包含映射同伦，并实现 α（见第 5.2 节）。回忆一下，存在一个常数 $B \geqslant 1$，它仅依赖于 $|\chi(S)|$，称为 Bers 常数；因此，S 上的任意双曲结构都具有一个长度小于 B 的裤子分解（见 [Bus10]）。因此，我们可以令 P_s 为 S 的一个裤子分解，其长度相对于从$f\colon S \to Q$拉回的双曲度量小于 B。于是，根据领引理（[Kee74]），交数 $i(\alpha, P_s)$ 由一个常数 $d_1 \geqslant 0$ 所界，该常数仅依赖于 $\mathfrak{c}(M\backslash S)$ 和 $|\chi(S)|$，因为它们是 S上长度有界的曲线。

我们同样可以找到一个裤子分解 P_u，使其与 β 的交数也被常数 d_1 所界。

最后，我们回顾亨佩尔界 [Hem01]（由 Schleimer 推广 [Sch11]至带边界的情形）：对于曲面 x上的任意本质多重曲线 y，Y，$d_{\mathcal{C}(Y)}(x,\ y) \leqslant 2$对数$_2(i(x,\ y)) + 2$。最后，我们设

$$D_{M\backslash S} = \max\{d, d_1, 10\},$$

根据前面的讨论，它只取决于 $|\chi(S)|$ 和 $\mathfrak{c}(M\backslash S)$。（这里，$d$是定理 6.1中的常数。）常数 10 是为了保证 $d_{\mathcal{C}(Y)}(\gamma,\ \delta) \leqslant D_{M\backslash S}$，只要 γ 和 δ 是 S上的本质曲线，Y 是 S的子曲面，且$i(\gamma,\ \delta) \leqslant D_{M\backslash S}$。

结合上述工作与 Brock 的主要结果 [Bro03], ，我们证明：

定理 6.4（体积）。设 M 是一个闭双曲3维流形，φ 是 M 上的近似伪阿诺索夫流，S 是一个与 φ 横截但不是纤维的闭曲面。那么

$$d_{\mathcal{C}(S)}(c^s, c^u) < \mathrm{vol}(M) + D_{M\backslash S}$$

证明。根据定理陈述之前的讨论，只需证明

$$d_{\mathcal{C}(S)}(P_s, P_u) < \mathrm{vol}(M).$$

为此，首先令 $\mathcal{P}(S)$表示 S的裤子图。该图的顶点是 S的裤子分解的同痕类；若两个裤子分解相差一次初等移动（详见 [Bro03]），则它们之间以一条边相连。对我们而言，只需知道粗映射 $\pi_S\colon\ \mathcal{P}(S) \to \mathcal{C}(S)$ 将每个裤子分解映射到其底层曲线集，且该映射是 2-利普希茨的。

此外，给定一个双曲流形 N，令 $\mathcal{G}_{\leqslant L}(N)$ 表示N 中长度至多为 L的闭测地线集合。与之前一样，令 B 表示 S的 Bers 常数。Brock 在 [Bro03，引理 4.2]中证明了

$$d_{\mathcal{P}(S)}(P_s, P_u) < \#\mathcal{G}_{\leqslant B}(Q),$$

其中，与之前一样， $p\colon\ Q \to M$ 是相应的拟福克斯覆盖空间。注意， [Bro03，引理 4.2] 讨论的是在 Q“无穷远处”的双曲结构上较短的裤子分解，但他最初将问题归约为由 1-利普希茨双曲曲面得到的 Bers 短裤子分解（见他的引理 4.7）。或者，也可以先重复他在引理 4.2 的证明中使用的插值论证，再应用 [Bro03，引理 4.3] ，但论证完全相同。

接下来，我们应用定理 6.2，并结合与曲线图距离的关系，得到

$$d_{\mathcal{C}(S)}(P_s, P_u) \prec \#\mathcal{G}_{\leqslant B}(M).$$

现在通过一个标准的装箱论证即可完成证明。例如， [Bro03，引理 4。8] 证明存在一个常数 $C \geqslant 1$，它与 M无关，使得

$$\#\mathcal{G}_{\leqslant B}(M) \leqslant C \cdot \mathrm{vol}(M).$$

结合这些不等式即可完成证明。 □

6.2. **大周长**。本节的目标是证明：

定理 6.5 （周长）。设 M 是一个闭双曲3维流形， φ是其上的一个近似伪阿诺索夫流， S 是一个与 φ 横截但不是纤维的闭曲面。那么存在一个常数 $D \geqslant 0$，仅取决于 $|\chi(S)|$ 和 $\mathfrak{c}(M\backslash\backslash S)$，使得

$$d_{\mathcal{C}(S)}(c^s, c^u) \prec \ell(\gamma) + D,$$

其中 γ 是任意一条与 S 本质相交的闭测地线。

证明的策略与体积论证类似，其中 Brock 的结果由 [APT22 的命题 44] （Aougab–Patel–Taylor）取代。不过，此处还存在一个微妙之处，因为 γ 在拟福克斯覆盖空间 Q中的提升是无限的，因此我们必须调整论证，使其适用于 M。在整个论证过程中，我们将请读者参阅 [APT22]以了解细节，不过这些事实的许多非有效版本早已为人所知。

证明。对于曲面 S，令 $L_S = 2\log(|\chi(S)| + 2) \geqslant 0$ 为一个常数（仅依赖于 $|\chi(S)|$），使得对于 S 上的任意双曲结构以及任意点 $p \in S$，都存在一条经过 p 的本质简单闭曲线，其长度至多为 L_S。参见 [APT22，引理 31]。

固定一条闭测地线 γ ，它与 S 有本质相交；也就是说，每个与包含映射同伦的映射 $S \to M$ 都与 γ 相交。令 G 为一个图，其顶点是 $\mathcal{C}(S)$ 中满足以下性质的曲线：若 $\delta \in G^0$ 存在 S 上的双曲结构 X，以及一个与包含映射 $S \to M$ 同伦的 1–Lipschitz 映射 $f\colon X \to M$，使得 δ 可以由 X 中长度至多为 L_S 、且像与 $\gamma \subset M$ 相交的环路实现。若两条曲线 δ_1 和 δ_2 可以借助同一个映射 $f\colon X \to M$（并满足上述性质）实现，则它们在 G 中由一条边连接。由于在这种情况下， δ_1 和 δ_2 可以在某个固定的双曲结构 X 中由长度至多为 L_S 的环路实现，我们记录这一事实： $d_{\mathcal{C}(S)}(\delta_1, \delta_2) \leqslant 20$ （[APT22，引理 3.5]）。

注意，对于长度至多为一的子弧 $p \subset \gamma$ ，与 S上的简单闭曲线同伦的环路中，与p 相交且长度至多为 L_S 的不同同伦类的数量有一个上界，即常数 $C > 0$ ，且该上界与 M无关。（相关内容见 [APT22]中的引理 3.6；若 p 深入薄部，导致该引理不适用，则任何长度小于 L_S 的此类环路都必与相应马古利斯管的核心同伦。这里用到了“与 S上的简单闭曲线同伦”这一条件。）此外，利用定理 6.2， G中对应于可在 S 中实现、且其像与p相交的环路的不同顶点数量，有一个仅取决于 $|\chi(S)|$的上界。因此，

$$\#G^0 \prec \ell_M(\gamma).$$

接下来，令

$$(f_t \colon X_t \to Q)_{t\in[0,1]} \tag{2}$$

是提升 $S \to Q$ 的同伦类中的一个 1–利普希茨扫掠，使得 $\alpha^* \subset f_0(X_0)$ 和 $\beta^* \subset f_1(X_1)$。这样的扫掠的存在性基本上归功于 Canary；参见 [APT22] 的第 2 节。对于每个 $t \in [0,\ 1]$ 与 $\tilde{\gamma}$ （ γ 到 Q 的提升）相交，因此存在一个非空顶点子集 $\Delta_t = \{\delta_t\} \subset G^0$ ，其中的顶点可由 X_t 中长度至多为 L_S 的环路实现，并且这些环路在 f_t 下映射为经过 $\tilde{\gamma}$ 中各点的环路。取诱导子图后， Δ_t 是 G 的完全子图，它们确定了 G 中从 Δ_0 到 Δ_1 的一条路径；特别地， Δ_0 和 Δ_1 包含在 G 的同一个分支中。（这里我们用到这样的事实：使 $\delta \in \Delta_t$ 成立的 $t \in [0、\ 1]$ 的集合是闭的。）因此，存在一条从 Δ_0 到 Δ_1 的路径，其长度至多为 $\#G^0$。由于 G 中的边对应于在 $\mathcal{C}(S)$ 中距离至多为 20 的曲线，我们得出

$$d_{\mathcal{C}(S)}(\Delta_0, \Delta_1) \prec \#G^0 \prec \ell_M(\gamma).$$

现在只需证明 $d_{\mathcal{C}(S)}(c^s、\ \Delta_0) \prec D$ 以及 $d_{\mathcal{C}(S)}(c^u,\ \Delta_1) \prec D$，其中某个常数 D 取决于 $|\chi(S)|$ 和 $\mathfrak{c}(M\backslash S)$。此外，根据定理 6.1，我们可以将 c^u 替换为 α ，并将 c^s 替换为 β。

为此，我们需要知道，扫掠（2）的构造始于一个单纯复形双曲曲面 f_i': $X_i' \to Q$，其中 $i = 0,\ 1$，且满足 $\ell_{X_0'}(\alpha) \leqslant L$和$\ell_{X_1'}(\beta) \leqslant L$，其中 L 来自定理 6.1。接着， X_i 是将奇异双曲度量 X_i'一致化的双曲度量。设 x_i 是 X_i 中的一条闭路，其长度至多为 L_S ，且 $f_0(x_i)$ 经过 γ，也就是说 $x_i \in \Delta_i$。那么，由于 $X_i \to X'$是 1–利普希茨的（根据 [Ahl38]），曲线 x_i 在 X'中的长度至多为 L_S 。根据 [Bro00，引理 3.3]，， x_0 与 α 之间的交数（以及 x_1 与 β之间的交数）有一个仅取决于 $|\chi(S)|$和L的上界。将相交数转换为曲线图距离后，证明即告完成。□

备注 6.6 （电长度）。 进一步调整 [APT22], 中的论证，不难将 定理 6.5 推广为：在相同假设下，

$$d_{\mathcal{C}(S)}(c^s, c^u) \prec \ell_M^{\varepsilon}(\gamma) + D,$$

其中 $\ell_M^{\varepsilon}(\gamma)$ 是 ε在 M中的电长度 γ 留在 ε在 M薄部之外的部分的长度。本节着重于从 M 中恢复几何信息，因此我们省略细节。定理 6.1

6.3. **短曲线**。 最后，我们简要证明以下定理：

定理 6.7 (短曲线)。 设 M 是一个带有近似伪阿诺索夫流 φ 的闭双曲3维流形。设 S 是 M 中与 φ 横截的闭曲面，且 $Y \subset S$ 是 S 的一个子曲面。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $K = K(\varepsilon, \chi(S)) \geqslant 0$，它仅取决于 ε 和 $\chi(S)$，使得如果

- $d_{\mathcal{C}(S)}(c^{s/u}, \partial Y) \geqslant 2D_{M\setminus S} + 2$ *and*
- $d_{\mathcal{C}(Y)}(c^s, c^u) \geqslant K + 4 \cdot D_{M\setminus S}$,

then

$$\ell_M(\partial Y) \leqslant \varepsilon.$$

证明。 与之前一样，设 Q 是与 S 关联的 M 的拟福克斯覆盖。

我们先回顾一下，Minsky 证明了 [Min01，定理 B] 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $K \geqslant 0$ (仅取决于 ε 和 $|\chi(S)|$)，使得如果存在曲线 γ，δ位于 $\mathcal{C}(S)$ 中，并且它们有本质交 Y，满足 $d_{\mathcal{C}(Y)}(\gamma, \delta) \geqslant K$ 且长度不超过 B 在 Q中的长度，那么 $\ell_Q(\partial Y) \leqslant \varepsilon$。当然，在这种情况下，我们还可以得到$\ell_M(\partial Y) \leqslant \varepsilon$，因为 $Q \to M$ 是 1–利普希茨的。

我们可以将此应用于曲线 $\gamma \subset P_s$ 和 $\delta \subset P_u$。事实上，由于 $d_{\mathcal{C}(S)}(c^s, \gamma) \leqslant 2D_{M\setminus S}$ 定理陈述中的第一条意味着 $d_{\mathcal{C}(S)}(\gamma, \partial Y) \geqslant 2$ 因此 γ 与 Y有本质交点。类似地，同样的论证还可得出，α、β 和δ 也分别与 Y 有本质交点，因为它们各自到 $\mathcal{C}(S)$中的 c^s 或 c^u的距离均不超过 $2D_{M\setminus S}$。

此外，

$$d_{\mathcal{C}(Y)}(c^s, \gamma) \leqslant d_{\mathcal{C}(Y)}(c^s, \alpha) + d_{\mathcal{C}(Y)}(\alpha, \gamma) \leqslant 2 \cdot D_{M\setminus S},$$

与 $D_{M\setminus S}$的定义后面那段中的论证相同。类似地，$d_{\mathcal{C}(Y)}(c^u, \delta) \leqslant 2D_{M\setminus S}$。

最后，由三角不等式可得

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}(Y)}(\delta, \gamma) &\geqslant d_{\mathcal{C}(Y)}(c^s, c^u) - d_{\mathcal{C}(Y)}(c^s, \gamma) - d_{\mathcal{C}(Y)}(c^u, \delta) \\ &\geqslant (K + 4 \cdot D_{M\setminus S}) - 2 \cdot D_{M\setminus S} - 2 \cdot D_{M\setminus S} \\ &\geqslant K, \end{aligned}$$

因此可以直接应用 Minsky 定理。证明至此完成。 □

7. Examples and applications

在最后这一节中，我们首先给出主定理在具有有限深度叶状结构的双曲三维流形上的一个应用，然后通过构造横截于深度一叶状结构的流作结；在这些流中，我们的主要动力学量 $d_{\mathcal{C}(S)}(c^s, c^u)$可以得到精确控制。

7.1. **具有有限深度叶状结构的双曲三维流形**。第5 节和第 6 节中的论证使我们能够对具有有限深度叶状结构的双曲三维流形的几何进行一定程度的控制，这或许本身就具有独立的研究价值。关于这些叶状结构的背景知识，请参阅 [CC00]。

就设定而言，设 M 为一个闭双曲三维流形，它带有（余定向的）有限深度叶状结构 $\mathcal{F}$，我们假定其深度至少为一。这是因为零深度叶状结构是到 S^1 上的纤维化，这在 第1节中讨论。为便于阐述，我们作简化假设：闭叶 $\mathcal{F}^0$（属于 $\mathcal{F}$）由单个闭连通曲面 S 组成。在一般情形下，需要在 $M\backslash\mathcal{F}^0$ 的各个连通分支内分别处理。

如前所述，我们将 $\partial_\pm(M\backslash S)$ 的每个分支与 S 等同。在 M 中，每一片一层叶 L 的端螺旋地趋近于 S，正如第3节中的旋转构造那样。因此在 $M\backslash S$ 中，L 的每个端以相同的意义螺旋地趋近于 $\partial_\pm(M\backslash S)$ 的相应分支。这确定了 L 的正端与负端。事实上，旋转过程可以（非唯一地）逆转：将 L 各端的邻域推入 $\partial_\pm(M\backslash S)$（在边界分支的领邻域内），从而得到适当嵌入于 $M\backslash S$ 中的曲面 Σ。这一过程在 [LMT25a 第 3] 节中称为反旋转。沿 $\partial_\pm(M\backslash S)$ 将 Σ 旋转回去（如第3节所述），会再现叶 L，以及与 Σ 相关联的子曲面 $\Sigma_L \subset L$。该子曲面称为 L 的核心，并且通过在领邻域内将其边界同伦变形回 $\partial_\pm(M\backslash S)$，它在真同伦的意义下确定了真嵌入曲面 Σ。从核心子曲面 $\Sigma_L \subset L$ 到真嵌入曲面 Σ 的过程，在 [FKLL25 第3.2]节中也有仔细描述。

一般而言，若核心子曲面 $C \subset L$ 在所有核心子曲面中使 $|\chi(C)|$ 达到最小，则称其为极小。令 $\mathfrak{c}_\mathcal{F}$ =min$\{|\chi(C)|\}$，其中最小值取遍深度一叶 L of $\mathcal{F}$的所有核心 C。

给定 L 的一个核心 C，如上所述，它确定一个真嵌入曲面 Σ，并自然关联正、负交界曲线 $j^\pm \subset S$。它们是该真嵌入曲面 Σ的边界分支 $j^\pm = \partial\Sigma \cap \partial_\pm(M\backslash S)$，视为 S上的多曲线。另一种说法是，j^+ 是 S 上的多曲线，它由 $\partial C \subset L$ 中界定 L 的正端邻域的连通分支 $\partial_+ C$ 构成，并在 $\partial_+(M\backslash S)$ 的领圈邻域内将它们向上作同伦变形至 $\partial_+(M\backslash S)$ 而得到。负交界曲线 j^- 也可类似定义。当核心 C为极小时，我们称 $j^\pm \subset S$ 为最小交界。

以下推论揭示了 $\mathcal{F}$ 的拓扑与 M 的几何之间的联系，而无需明确提及横截流。

定理 7.1 (分界与几何)。设 M 是一个带有有限深度叶状结构 $\mathcal{F}$ 的闭双曲 3 流形，其中 $\mathcal{F}^0$ 是一个连通曲面 S。假设 $j^\pm \subset S$ 是 S 上的极小分界。

存在仅依赖于 $\chi(S)$的常数 $c_S = c_S(\chi(S)) \geqslant 1$，以及仅依赖于 $\chi(S)$ 和 $\mathfrak{c}_\mathcal{F}$的常数$D \geqslant 1$，使得下列不等式成立：

(1) $d_{\mathcal{C}(S)}(j^-, j^+) \leqslant c_S \cdot \mathrm{vol}(M) + D$, *and*

(2) $d_{\mathcal{C}(S)}(j^-,\ j^+) \leqslant c_S \cdot \ell_M(\gamma) + D$，其中 γ是任意一条与S本质相交的闭测地线，$\ell_M(\gamma)$是它在 M中的长度。

为了将该推论与主要定理的设定联系起来，我们回顾一下：根据 Gabai–Mosher 开创性的（但大多未曾写成文字的）工作，每个有限深度叶状结构$\mathcal{F}$的 M 都存在一个近似伪阿诺索夫流 φ，它与 $\mathcal{F}$横截。目前，Landry–Tsang 正在完成并拓展这一结果 [LT24，LT26]。

证明。设 L 是 $\mathcal{F}$ 的一层叶，并假设 $C \subset L$ 是一个复杂度最小的核心，即 $|\chi(C)| = \mathfrak{c}_{\mathcal{F}}$。此外，我们假设推论陈述中的最小交界曲线$j^{\pm}$ 来自 C。也就是说，若 Σ 是由 C确定的 $N = M \backslash S$中的真嵌入曲面，则 $j^{\pm} = \partial\Sigma \cap \partial_{\pm} N$。

现在假设 φ 是一个与 $\mathcal{F}$横截的近似伪阿诺索夫流。证明的要点是说明 Σ 可以调整为与 φ横截；更准确地说，可以在 C 中选择 L 的一个同痕类代表，使得将 C移入 $\partial_{\pm} C$ 中的同痕 $\partial_{\pm} N$ 可以与 φ横截地进行。为此，首先注意到存在一个核心 $C' \subset L$ 包含 C，使得上述条件成立。这是因为我们可以选择 C'使得 $\partial_{\pm} C' \subset \mathcal{U}^{\pm}$。这里，$\mathcal{U}^{\pm}$是 L 的正向／负向逃逸区域，如第 4 节 所述，分别由正向／反向轨道与 $\partial_{\pm} N$相交的点组成。

现在令 C_m 为复杂度最小的核心，使得 C_m 在 L 中同痕的意义下包含 C，且满足 $\partial_{\pm} C_m \subset \mathcal{U}^{\pm}$。另外，令 $\Sigma_m \subset N$ 为与核心 C_m相关联的真嵌入曲面。注意，Σ_m 具有所需的性质，即与 φ横截。

假设 $C \subset \mathrm{int}(C_m)$，但 C 与 C_m 在 L中不同痕。那么，在 C的补集中存在一条包含于 C_m 的适当本质弧 β。将 $L \smallsetminus C$ 推入 $\partial_{\pm} N$ 的同伦（在一个领状邻域内）表明，β 确定了 Σ_m的一个边界压缩圆盘。但是根据定理3.7，在 L 中对 C_m进行同痕后（见图4），该边界压缩圆盘与 Σ_m的一个乘积流圆盘D 同痕。如FKLL25中引理3.2], 所述，可以利用乘积流圆盘 D 沿流将 Σ_m 的一部分推入 $\partial_{\pm} N$，从而得到一个仍包含C的核心 C'（在同痕意义下），但其复杂度小于 C_m。这一矛盾表明，我们可以假设 $C = C_m$，因此 $\Sigma = \Sigma_m$ 横截于 φ。此外，该论证还表明 Σ 是边界不可压缩的，因为任何边界压缩都会产生一个复杂度更低的核心。

根据定理 4.1，距离 $d_S(c^u,\ j^+)$ 和 $d_S(c^s,\ j^-)$ 均有一个仅取决于 $|\chi(\Sigma)| = \mathfrak{c}_{\mathcal{F}}$ 的上界。由于 $\mathfrak{c}(M \backslash S) \leqslant \mathfrak{c}_{\mathcal{F}}$，所需结论由定理 A得出。□

同样，也有一个定理 B的版本以交界曲线为表述对象。

不同的横截流。在定理 7.1的证明中，我们记录了这样一个事实：曲线图距离 $d_S(c^u,\ j^+)$和 $d_S(c^s,\ j^-)$均由一个仅依赖于 $\mathfrak{c}_{\mathcal{F}}$的常数所界定。这里，$c^u$ 和 c^s 是 S 上任意固定的、与 $\mathcal{F}$横截的近似伪阿诺索夫流的稳定与不稳定多曲线。然而，可能存在

许多这样的流彼此并不轨道等价。由于极小分界 $j^{\pm}$ 的定义与流无关，我们得出以下结论：

推论 7.2. 对于 M， $\mathcal{F}$，以及 S如 定理 7.1所述，由所有可能的横截于 $\mathcal{F}$ 的近似伪阿诺索夫流所诱导的 S 上的稳定多曲线集合，其直径有界，且界仅取决于 $\mathcal{C}(S)$。 $\mathfrak{c}_{\mathcal{F}}$

7.2. **之间的无界距离 c^s 与 c^u。** 在本小节中，我们使用端周期映射环面构造一些例子，使得 c^s 与 c^u之间的曲线复形图距离，如 定理 A所述，可以任意大。我们先介绍端周期映射和 Handel-Miller 理论的一些基础知识。关于详细讨论，请参阅 Cantwell–Conlon–Fenley 的权威著作 [CCF19]。

设 L 是一个端数有限且所有端均非平面的无限型曲面。设 $f\colon L \to L$ 是一个无环端周期映射。为使讨论尽可能简单，我们进一步假设 L 恰有两个 f端轨道。f 的映射环面允许典范紧化，记作 $N = N_f$，其中 L 的正端绕着正边界分支 $\partial_+ N$ 盘旋，而 L的负端绕着负边界分支 $\partial_- N$ (参见 [Fen97，第 3] 节，或 [FKLL23，第 3]节)。我们的简化假设意味着 $\partial_{\pm} N$ 是两个同胚的闭曲面。

令 $h\colon \partial_+ N \to \partial_- N$ 为一个反转诱导（斯托克斯）定向的同胚，并令 $M(h)$ 为通过粘合映射 h将 $\partial_+ N$ 与 $\partial_- N$ 粘合而得到的闭三维流形：

$$M(h) = \frac{N}{x \sim h(x) : \forall x \in \partial_+ N}.$$

根据构造， $M(h)$ 上存在一个诱导的深度一叶状结构 $\mathcal{F}$，其唯一的闭叶是 $\partial_{\pm} N$的像，记作 S；其深度一叶则是映射环面 $M(h) \smallsetminus S = N \smallsetminus \partial N$的纤维，且都与 L平行。

我们称粘合映射 h**错开窗口**，如果它没有将 $\partial_w N$（参见 第 5.1 节）上的不同简单闭曲线同伦类相互对应。 h若 h 错开窗口， $M(h)$ 便是无环流形，我们赋予 $M(h)$ 双曲度量（利用瑟斯顿双曲化定理，该度量是唯一的）。如上所述，叶状结构 $\mathcal{F}$ 横截于某个近似伪阿诺索夫流 φ，并令 c^u 和 c^s 分别为 S上的诱导稳定与不稳定多曲线。注意 $M(h) \backslash\backslash S = N$，与之前一样，我们用相同的记号表示诱导多曲线 $c^u \subset \partial_+ N$ 和 $c^s \subset \partial_- N$。

对于 L上的任意标准双曲度量（即满足以下条件的双曲度量：L 不包含嵌入半平面）， f 同痕于一个保留一对典范测地层状的 ***Handel-Miller*** 代表 f_{HM} $\Lambda^{\pm}_{\mathrm{HM}}$；***Handel-Miller*** 层状结构 [CCF19，定理 454]。它们分别是 $\mathcal{U}^{\mp}$的 f_{HM}逃逸集的补集 [CCF19，引理 471],，其中 $\mathcal{U}^{\pm}$是这样一个点集：其中的点在 f_{HM} 的正向／反向迭代下逃离 L的紧集。这些层状集非空，当且仅当 f_{HM} 不是 L 的平移（即 N 不是乘积）。

正逃逸集 $\mathcal{U}^+$ 自然是 $\partial_+ N$ 的一个无限循环覆盖空间，其覆盖变换作用由 $f_{\mathrm{HM}}|_{\mathcal{U}^+}$生成的 $\mathbb{Z}$-作用给出，而 Λ^+ HM $\cap\, \mathcal{U}^+$ 下降为$\partial_+ N$上的一个层状集 Λ^+_∂。这个层状集包含闭叶，它们以下述方式产生。根据[CCF19，定理 6， Λ^- HM 的每个边界叶在 f_{HM} 作用下都是周期的，且有一个或两个周期点；对于这类边界叶上的每个周期点 x ，都存在一条以 x为基点的正逃逸周期射线 $r \subset \Lambda^+$ HM $\cap\, \mathcal{U}^+$。射线 r 在 f_{HM} 作用下也具有周期性，因此 r 覆盖层状集 Λ^+_∂ 中的一条闭叶 c ，且每条闭叶都由此产生。由此可知， x 在固定 r的f_{HM}的幂作用下的悬挂，是 N中的一条闭曲线，并且在 N中同伦于 $c \subset \partial_+ N$。类似地，我们可以将 $\Lambda^- \cap \mathcal{U}^-$经覆盖 $\mathcal{U}^- \to \partial_- N$得到的层状集定义为 Λ^-_∂。我们用 $c^\pm$HM 表示 $\Lambda^\pm_\partial \subset \partial_\pm N$的这组闭叶。

引理 7.3。 设 $M(h)$ 为上述构造的闭流形，且 φ 为 $M(h)$上的任意近似伪阿诺索夫流，并且横截于 $\mathcal{F}$。则在同痕意义下，$c^u \subset \partial_+ N$ 包含 c^+_{HM}，且 $c^s \subset \partial_- N$ 包含 c^-_{HM}。

当 φ 属于“无完美拟合”这一特殊流类时，该引理可由旋转伪阿诺索夫与 Handel–Miller 映射之间的联系得出；这一联系见 [LMT25a第 8]节。这里给出的证明适用于本文所考虑的更一般情形。

证明。 我们先给出以下断言：

断言 2。 对于 $\Lambda^+_{HM} \cap \Lambda^-_{HM} \subset L$中 f_{HM} 的每个周期点，其悬挂是一条闭曲线，并且在 N 中与 φ的一条闭轨道同伦。

假设该断言成立，设 c 是 c^+ HM的一个分支。根据上文的讨论， c在 N 中同伦于 Λ^+ HM $\cap\, \Lambda^-$ HM中一个周期点的悬挂，而根据该断言，它（同样在 N中）同伦于 φ在 N中的一条闭轨道。通过提升到万有覆盖并应用定理 2.1 与定理 2.2，我们看到 c 在 $\partial_+ N$ 中同伦于 c^u的一个分支。

我们现在转而给出该断言的证明。设 $f_\varphi\colon\ L \to L$ 为 φ 的首次返回映射，它同样是端周期的，并且与 f_{HM} 同痕。若 $p \in \Lambda^+$ HM $\cap\, \Lambda^-$ HM 是 f_{HM} 的一个周期点，则我们将 f_{HM} （以及 f_φ）替换为适当的幂，使得 f_{HM} 固定 p ，同时也固定基于 p 的 $\Lambda^\pm$ HM 的半叶。设 $\tilde{p}$ 为万有覆盖 $L \to L$ 下 p 的~原像中的一点，并设 $f_{\mathrm{HM}}\colon\ L \to L$ 为 ~f_{HM} 的提升，且该提升固定 p。此外，设 f_φ 为 f_φ 的提升，它由提升一条从 ~f_{HM} 到 f_φ 、起始于 f_{HM} 的同痕而得到。利用基本的覆盖空间理论，只需证明~ f_φ 也固定 L 的一个点；所需的 φ 的闭轨道就是经过~ f_φ 的不动点到 $L \subset N$ 的投影的轨道。

~ ~ ~根据 [CC13，推论 5]， f_{HM} 和 f_φ 在圆周上诱导相同的作用 ∂L。~此外， f_{HM} 在 ∂L 上的作用具有多重汇-源动力学，也就是说，至少有 4 个孤立的不动点，它们交替为源点和汇点，并且每个这样的汇点/源点都是 $\tilde{\Lambda}^\pm$ HM 中某条叶的端点，该叶经过 $\tilde{f}_{\mathrm{HM}}$的不动点。这些事实基本上源自 [CCF19] ，但在 [LMT25a，~引理 81]中有明确陈述。因此，提升 f_φ 也具有多重汇-源动力学，且具有相同的

不动点集合，因此根据 [LMT25a，引理 49]，边界作用的源点与汇点实际上也是闭圆盘上作用的源点与汇点$\sim \quad \sim L \cup \partial L$。最后，我们运用标准的不动点指标论证（如 [LMT25a，~引理 414]中所述），可知我们的固定提升 f_φ 也在 L中固定了一个点。证明完毕。□

若将诱导映射 $\partial_- N \to S$ 视为恒同映射，则 c^+ HM和 c^- HM 在曲面 $S \subset M(h)$ 中的像分别为 $h(c^+$ HM$)$ 和 c^- HM。将定理 7.3 转译到曲面 S上，可得 c^u 包含 $h(c^+$ HM$)$，且 c^s 包含 c^- HM，在 S中视为同痕等价。由于多重曲线 $c^\pm$ HM 与端周期映射环面存在典范关联，因此现在很容易构造带有流的流形示例，使得定理 A 中的下界受到控制。以下对此作出总结：

定理 7.4。令 $f\colon L \to L$ 为曲面 L上的一个无环端周期映射，该曲面有两个端；令 N 为其紧化映射环面，$c^\pm_{HM} \subset \partial_\pm N$ 为相应的 ***Handel–Miller*** 曲线。

如上所述，对于任意与这些窗不匹配的 $h\colon \partial_+ N \to \partial_- N$，粘合所得流形 $M(h)$ 是双曲的，并继承了一个深度一叶状结构 $\mathcal{F}$。对于任意横截于 $\mathcal{F}$的 $M(h)$ 上的几乎伪阿诺索夫流，我们有

$$d_S(c^-_{HM}, h(c^+_{HM})) \leqslant d_S(c^u, c^s) \leqslant d_S(c^-_{HM}, h(c^+_{HM})) + 2.$$

由于 $d_S(c^-$ HM $h(c^+$ HM$))$ 利用 $\mathrm{Mod}(S)$ 的粗几何工具可以任意增大，这就完成了构造。基本上以相同的方式，还可以类似地控制子曲面投影的大小，以满足定理 B的要求。

References

[Ago04] Ian Agol. 双曲三维流形的驯性。 *arXiv preprint math/0405568*，2004。[Ago08] Ian Agol. 虚纤维化的判据。 *J. Topol.*，1(2):269–284，2008。[Ago10] Ian Agol. 最小体积的可定向双曲 2 3 *Proc. Amer.* 尖点流形。，( ): – *Math. Soc.* 138 10 3723 3732, 2010 。[Ahl38] Lars V Ahlfors. 施瓦茨引理的推广。 *Transactions of the American Mathematical Society* 43 3 359 364, 1938 ，( ): – 。[APT 22] Tarik Aougab、Priyam Patel 和 Samuel J Taylor. 曲面的覆盖、克莱因群与曲线复形。 *Journal of Topology*，15(4):1833–1863，2022。[BBCM20] Jeffrey F Brock、Kenneth W Bromberg、Richard D Canary 和 Yair N Minsky. 窗口、核心与剥离映射。 *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*，53 1 173 216，2020 ( ): – 。[BCM12] J. Brock、R. Canary 和 Y. Minsky. 克莱因曲面群的分类，II：端层猜想。 *Ann. of Math.*，176(1):1–149，2012。[BM25] Thomas Barthelm ´ *arXiv* e 和 Kathryn *preprint arXiv:2509.15375* 2025 Mann. 伪阿诺索夫流：一种平面方法。，。[BMNS16] Jeffrey Brock、Yair Minsky、Hossein Namazi 和 Juan Souto. 双曲三维流形的有界组合与一致模型。 *Journal of Topology*，9(2):451–501，2016。[Bro 00] Jeffrey F Brock. 瑟斯顿长度函数的连续性。 *Geom. Funct. Anal.*，10 4 741 797，2000 ( ): – 。

[Bro01] Jeffrey Brock. 魏尔-彼得森平移距离与映射环面的体积。

Comm. , 。[Bro03]

Anal. Geom 2001
Jeffrey Brock. 魏尔-彼得森度量与三维双曲凸核的体积。 *Journal of the American Mathematical Society*, 16(3):495–535, 2003。[BS19] Ian Biringer 和 Juan Souto. 通过曲线复形研究映射环面的秩。 *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2019 748 153 172, 2019 , ( ): – 。[Bus10] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*。施普林格科学与商业媒体, 2010。[Can96] Richard D Canary. 双曲三维流形的覆盖定理及其应用。*Topology*, 35(3):751–778, 1996。[CC00] Alberto Candel 和 Lawrence Conlon. *Foliations II*。美国数学会，普罗维登斯，2000。[CC13] John Cantwell 和 Lawrence Conlon. 曲面的双曲几何与同伦同胚映射。 *Geometriae Dedicata*, 177:27–42, 2013。[CCF19] John Cantwell、Lawrence Conlon 和 Sergio R. Fenley. 曲面的端周期自同构与叶状结构，即将出版。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*，第66–219页，2019。[CEG87] Richard D Canary、David BA Epstein 和 Paul Green. 瑟斯顿笔记的札记。《双曲空间的解析与几何方面》（考文垂/达勒姆，1984），3–92。*London Math. Soc. Lecture Note Ser*，111，1987。[CG06] Danny Calegari 和 David Gabai. 收缩包裹与双曲三维流形的驯化。 *Journal of the American Mathematical Society*，19(2):385–446，2006。[CLR94] Daryl Cooper、DD Long 和 Alan W Reid. 丛与有限叶状结构。 *Inventiones mathematicae* 118 1 255 283, 1994 , ( ): – 。[DeB16] Jason DeBlois. 循环覆盖的显式秩界。 *Algebraic & Geometric Topology*，16 3 1343 1371，2016 ( ): – 。[Fen97] S´ 3 *Mathematische Zeitschrift* 224 1 1 24, 1997
ergio R. Fenley. 曲面的端周期同胚与-流形。， ( ): – 。[Fen99] S´ergio R. Fenley. 横截于伪阿诺索夫流的曲面与三维流形中的虚纤维。 *Topology*，38(4):823–859，1999。[Fen09] S´ergio R. Fenley. 叶状结构与流的几何 I：几乎横截的伪阿诺索夫流与叶状结构的渐近行为。 *Journal of Differential Geometry* 81 1 89, , : – 。[FKLL2009
23] Elizabeth Field、Heejoung Kim、Christopher Leininger 和 Marissa Loving. 端周期同胚与映射环面的体积。 *Journal of Topology*，16(1):57–105，2023。[FKLL25] Elizabeth Field、Autumn Kent、Christopher Leininger 和 Marissa Loving. 端周期映射环面体积的下界。 *Journal of Topology* 18 3 70037, , ( ):e。[FM01] 2025
S´ 3 *Topology* 40 3 503 537, 2001
ergio R. Fenley 和 Lee Mosher. 双曲-流形中的拟测地流。， ( ): – 。[Har81] W. J. Harvey. 模群的边界结构。97:245–251，1981。[Hem01] John Hempel. 从曲线复形的角度看-流形。， ( ): – 。[HT26] Junzhi Huang 和 Samuel J. Taylor. 构造横截于伪阿诺索夫流的深度一层状结构。准备中，2026。[Joh79] Klaus Johannson. *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*，第761卷，属于 *Lecture Notes in Mathematics*。施普林格，柏林，1979。[JS79] William H. Jaco 和 Peter B. Shalen. 三维流形中的塞弗特纤维空间。

3 *Mem. Amer.* , ( ):viii , 。[Kee74] Linda Keen. 黎曼曲面上的领圈。载于 *Discontinuous groups and Riemann surfaces (Proc. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md., 1973)* *Math. Soc.* 21 220 +192 1979 263 268, 1974 , 第–页。

[LMT23] 迈克尔·P·兰德里、Yair N. Minsky 和塞缪尔·J·泰勒。流、增长率与偏转多项式。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*，43(9):3026–3107，2023。[LMT25a] 迈克尔·P·兰德里、Yair N. Minsky 和塞缪尔·J·泰勒。通过伪阿诺索夫流研究端周期映射。 *Geom. Topol.*， *to appear*，2025。[LMT25b] 迈克尔·P·兰德里、Yair N Minsky 和 Samuel J Taylor。横截曲面与伪阿诺索夫流。 *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*，(0)，2025。[LT24] 迈克尔·P·兰德里和曾智卓。端周期映射、分裂序列与分支曲面。 *To appear in Geometry and Topology*，第1–144页，2024。[LT26] 迈克尔·P·兰德里和曾智卓。由缝合层次构造伪阿诺索夫流。准备中，2026。[Man98] 布莱恩·S·曼格姆。不可压缩曲面与伪阿诺索夫流。 *Topology and its Applications* 87 1 29 51, 1998 ，( ): – 。[Min99] Yair N Minsky。穿孔环面群的分类。 *Annals of Mathematics*，第559–626页，1999。[Min01] Yair N Minsky。克莱因群的有界几何。 *Inventiones mathematicae*，146 1 143 192, 2001 ( ): – 。[Min10] Yair Minsky。克莱因曲面群的分类，I：模型与界。 *Ann.* ，第 – 页。[*of Math.* 1 107, 2010 MM99] 霍华德·A·马苏尔和亚伊尔·N·明斯基。曲线复形的几何。I. 双曲性。 *Invent. Math.*，138(1):103–149，1999。[MM00] 霍华德·A·马苏尔和亚伊尔·N·明斯基。曲线复形的几何。II. 层次结构。 *Geom. Funct. Anal.*，10(4):902–974，2000。[Mos90] Lee Mosher。对“具有 $\mathbb{Z}$-作用的流的等变谱分解”的更正。 *Ergodic Theory and Dynamical Systems*，10(4):787–791，1990。[Mos92a] Lee Mosher。动力系统与三维流形的同调范数 I：曲面与流的有效交。 *Duke Math. J.*，65(3):449–500，1992年03月。[Mos92b] Lee Mosher。动力系统与 3 *Invent.* -流形的同 *Math.* 107 1 243 281, 1992 调范数 II。 ，( ): – 。[Sch11] 索尔·施莱默。曲线复形札记。 *Manuscript available from the author's website http://homepages. warwick. ac. uk/˜ masgar/math. html* 2011 ，。[Thu78] 威廉·瑟斯顿。三维流形的几何与拓扑。 *Lecture notes*，1978。[Thu86] William P Thurston。三维流形上的双曲结构 I：无环流形的变形。 *Ann. of Math.*，第203–246页，1986。[Thu98] William P Thurston。三维流形上的双曲结构，III：具有不可压缩边界的三维流形的变形。 *arXiv preprint math/9801058*，1998。[Via25] 加布里埃莱·维亚吉。微分同胚于 $S \times \mathbb{R}$的双曲三维流形的有效长度投影界。 *arXiv preprint arXiv:2504.06097*，2025。[Whi24] Brandis Whitfield。端周期映射环面的短曲线。 *arXiv preprint arXiv:2408.07044* 2024 ，。