arXiv:2602.11599v1 [math.CV] 12 Feb 2026

复单位球上不变调和函数的 Schwarz-Pick引理

KAPIL JAGLAN 和 AERYEONG SEO

Abstract. 本文为定义在复单位球 $\mathbb{B}^n$ 上的实值不变调和函数建立了一个最佳Schwarz-Pick型不等式。该主结果的证明同时解决了哈文森猜想在不变调和函数情形下的一个自然推广，表明梯度和径向导数的最佳常数相同。作为主定理的进一步推论，我们推导出两个推论。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 4 2.1. Poisson核的复导数 4 2.2. 曲面元的变换公式 5 3. 主要结果及相关结果的证明 6 3.1. 定理 1 中不等式的证明 6 3.2. 不等式的尖锐性 7 3.3. 推论的证明 9 4. 使用 Burgeth 方法证明不变调和函数的 Schwarz 引理 10 致谢 11 参考文献 11

1. Introduction

著名的经典 Schwarz-Pick引理指出，如果 f 是一个从单位圆盘映射到其自身的全纯映射，并满足 $f(0) = 0$，那么

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2} \quad \text{for any } |z| < 1.$$

这个不等式意味着单位圆盘上的全纯自映射相对于庞加莱度量是距离递减的，并表明全纯映射受到

Date: 2026年2月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 31B05；次要分类 30C80。*Key words and phrases.* 复单位球、不变调和函数、梯度估计。

底层双曲度量的制约。施瓦茨–皮克引理及其推广到复流形之间全纯映射的高维版本，在多复变函数和复几何中发挥着基础性作用。它是科巴亚希度量和卡拉泰奥多里度量等不变度量理论的基础，也是理解全纯映射的刚性、双曲性和边界行为的基本工具。

这一视角自然引出了一个问题：类似的施瓦茨–皮克型不等式是否也适用于更广泛的映射类，尤其是（不变）调和函数。尽管调和函数不具备全纯函数那样强大的结构性质，但在适当条件下，它们仍会表现出刚性现象。特别是，可以探究定义在单位圆盘或更高维区域上的调和函数，是否满足与经典施瓦茨–皮克引理类似的尖锐梯度估计或距离递减性质。

近年来，针对调和函数的这类施瓦茨–皮克型结果受到广泛关注。它们旨在探究双曲几何如何继续支配调和函数的行为，尽管这些函数并非全纯函数。关于这一研究方向，参见 [11, 9, 7, 3, 10, 12, 13]及其中的参考文献。特别是，Liu [9] 最近针对 $\mathbb{R}^n$的单位球上的调和函数建立了一个施瓦茨–皮克型不等式。

定理 A (Liu [9])。 设 u 是单位球$\mathbb{B}^n_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| < 1\}$ 上的有界实值调和函数，其中 $\mathbb{R}^n$。

(i) 当 $n = 2$ 或 $n \geq 4$时，不等式成立：

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{2\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\frac{n+1}{2})} \frac{1}{1-\|x\|^2} \sup_{y\in\mathbb{B}^n_{\mathbb{R}}} |u(y)|, \quad x \in \mathbb{B}^n_{\mathbb{R}}. \tag{1.1}$$

当且仅当 $z = 0$ 且对于某个正交变换 T有 $u = U \circ T$ 时，式 (1.1) 在点 z 处取等号，其中 U 是函数的泊松积分，该函数在一个半球上等于 1，在另一个半球上等于 -1 。

(ii) 当 $n = 3$时，有

$$|\nabla u(x)| < \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{1}{1-\|x\|^2} \sup_{y\in\mathbb{B}^3_{\mathbb{R}}} |u(y)|, \quad x \in \mathbb{B}^3_{\mathbb{R}}.$$

此处的常数 $\frac{8}{3\sqrt{3}}$是最佳的。

这项工作延续了 Liu 先前的研究 [8], ，他在该研究中给出了哈文森猜想的完整证明。该猜想断言，对于 $\mathbb{R}^n$单位球上的有界调和函数，径向导数与梯度的最佳常数相同。关于哈文森猜想求解过程的逐步进展，见 [4, 5, 6, 11, 14]。

令 $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \ \|z\| < 1\}$ 为复欧几里得空间$\mathbb{C}^n$ 中的复单位球，并令 K: $\mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ 为其（归一化）伯格曼核，定义如下：

$$K(z, w) := \frac{1}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1}}$$

其中 $\langle,\ \rangle$ 表示厄米内积，即 $\langle z,\ w\rangle = \sum_j z_j w_j$。令 $g = (g_{i\bar{j}})$表示由下式定义的伯格曼度量：

$$g_{i\bar{j}} = (n+1)\left(\frac{\delta_{ij}}{1-\|z\|^2} + \frac{\overline{z}_i z_j}{(1-\|z\|^2)^2}\right)$$

且 $g^{-1} = (g^{i\bar{j}})$ 为其逆映射，定义为

$$g^{i\bar{j}} = \frac{1-\|z\|^2}{n+1}(\delta_{ij} - z_i\overline{z}_j).$$

记 Δ_B 为与度量 g相关联的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。若函数f: $\mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ 满足 $\Delta_B f \equiv 0$，则称其为不变调和函数。具体而言，f 满足

$$\Delta_B(f)(z) = 4(1-\|z\|^2)\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij} - z_i\overline{z}_j)\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(z),$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克δ。令 ∇表示 $\mathbb{C}^n$关于欧几里得度量的梯度，即对于实值函数 f: $\mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ 及坐标 $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$,

$$\nabla f = 4\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

本文研究不变调和函数，并将定理 A 推广到 $\mathbb{B}^n$上的不变调和函数情形。

定理 1. 设 h 是单位球 $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$上的实值不变调和函数，且在 $\mathbb{B}^n$上满足 $|h| \le 1$。那么，

$$\|\nabla h(z)\| \le \frac{2\,\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}\frac{1}{1-\|z\|^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{1.2}$$

此外，该不等式是尖锐的。

在 $n = 1$ 这一特例中，不等式 (1.2) 化简为：

$$|\nabla h(z)| \le \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{B}^1,$$

这与 [2,定理 3] 中得到的结果一致。

此外，我们证明，哈文森猜想的类似结论对复单位球上的有界不变调和函数也成立（见备注 1）。具体而言，对于 $\mathbb{B}^n$ 中的任意一点，当沿径向求导时，梯度达到最大值。

作为定理 1 的推论，我们得到两个推论。我们用 ∇_B 表示关于 g 的梯度，即

$$\nabla_B f = \sum_{i,j} g^{i\bar{j}}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_i},$$

以及相对于 g的向量 v 的范数 $\|v\|_B$。

推论 1。 设 h 是单位球 $\mathbb{B}^n$ 上的实值不变调和函数，并且$|h| \leq 1$ 在 $\mathbb{B}^n$. 上成立。那么，对于任意 $z \in \mathbb{B}^n$,

$$\frac{1-\|z\|^2}{2\sqrt{n+1}}\|\nabla h\| \leq \|\nabla_B h(z)\|_B \leq \frac{2\,\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi(n+1)}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}$$

第二个不等式是最佳的。因此，我们得到

$$|h(z)-h(w)| \leq \frac{2\,\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi(n+1)}\,\Gamma(n+\frac{1}{2})} d_{\mathbb{B}^n}(z,w), \tag{1.3}$$

其中 $d_{\mathbb{B}^n}$ 是 $\mathbb{B}^n$上的双曲距离。

下一个推论表明，定理 1 中的不等式 (1.2) 对分量为不变调和函数的向量值函数也成立。作者在 [19]中得到了单位球 $\mathbb{R}^n$ 上向量值调和函数的类似结果。

推论 2. 设 $H=(h_1, ..., h_m)$: $\mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个分量为不变调和函数的映射。假设对所有 $z \in \mathbb{B}^n$，均有 $\|H(z)\| \leq 1$ 。那么，

$$\|\nabla H(z)\| \leq \frac{2\,\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{1}{1-\|z\|^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n, \tag{1.4}$$

其中 $\|\nabla H(z)\|$ 表示雅可比矩阵 $\nabla H(z) \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$的算子范数。

本文的结构安排如下。第 2 节中，我们推导了式 (2.1) 中给出的 Poisson-Szeg¨o 核的梯度以及单位球 $\mathbb{B}^n$ 上曲面元变换的显式公式。第 3 节专门证明主定理及其推论。最后，在第 4 节中，我们将经典施瓦茨引理推广到不变调和函数的情形，并采用 Burgeth [1] 引入的技巧。

2. Preliminaries

2.1. **Poisson核的复导数**。设

$$\mathcal{P}_z(w) = \frac{1}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)} \frac{(1-\|z\|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}} \tag{2.1}$$

是 $\mathbb{B}^n$的Poisson-Szeg¨o（或不变Poisson）核，其中 $\sigma(\partial\mathbb{B}^n)$表示 $\partial\mathbb{B}^n$的表面积。设 $h(z)$是单位球 $\mathbb{B}^n$上的有界不变调和函数。它几乎处处有径向边界值

$$h^*(w) = \lim_{r\to 1^-} h(rw)$$

对于几乎每个 $w \in \partial\mathbb{B}^n$都成立。此外， $h(z)$可表示为泊松积分

$$h(z) = P[h^*](z) = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \mathcal{P}_z(w) h^*(w) d\sigma(w) \tag{2.2}$$

其中 $d\sigma$ 是 $\partial\mathbb{B}^n$的标准表面积。更多详情请参见 [15, 定理4.3.3、定理3.3.8] 和 [18]。

由于 $\mathcal{P}_z(w)$是一个实值函数，其梯度为

$$\nabla\mathcal{P}_z = 2\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\mathcal{P}_z}{\partial\overline{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial\mathcal{P}_z}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\right) = 4\,\mathrm{Re}\,\sum_{j=1}^n \frac{\partial\mathcal{P}_z}{\partial\overline{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

偏导数$\partial\mathcal{P}_z/\partial z_j$ 推导如下。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{P}_z(w)}{\partial\overline{z}_j} &= \mathcal{P}_z(w)\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\log\mathcal{P}_z(w)\\ &= \frac{1}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)}\frac{(1-\|z\|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}\left(n\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\log(1-\|z\|^2)-n\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\log(1-\langle w,z\rangle)\right)\\ &= \frac{1}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)}\frac{n(1-\|z\|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}\left(\frac{-z_j}{1-\|z\|^2}-\frac{-w_j}{1-\langle w,z\rangle}\right).\end{aligned} \tag{2.3}$$

这给出

$$\frac{\partial\mathcal{P}_z}{\partial\overline{z}} = \frac{n(1-\|z\|^2)^n}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)|1-\langle z,w\rangle|^{2n}}\left(\frac{-z}{1-\|z\|^2}+\frac{w}{1-\langle w,z\rangle}\right). \tag{2.4}$$

2.2. 曲面元的变换公式。 对于一个不动点 $a\in\mathbb{B}^n\setminus\{0\}$，令$\phi_a$ 为 $\mathbb{B}^n$ 的一个自同构，由下式给出:

$$\phi_a(z) = \frac{a-P_a(z)-s_aQ_a(z)}{1-\langle z,a\rangle},\quad z\in\mathbb{B}^n, \tag{2.5}$$

其中 $s_a=\sqrt{1-\|a\|^2}$, $P_a(z)=a\langle z,\ a\rangle/\|a\|^2$ 表示将 $\mathbb{C}^n$ 正交投影到由 a张成的一维子空间 $[a]$ 上的正交投影，而 $Q_a(z)=z-P_a(z)$ 是投影到其正交补上的正交投影。在特殊情形 $a=0$下，我们直接定义$\phi_0(z)=-z$。此外，这些映射是对合的，即 $\phi_a\circ\phi_a(z)=z$，并且满足 $\phi_a(0)=0$。以下引理在定理的证明中很有用。

引理 A。 ([20, 引理 1。3]) 假设 $a\in\mathbb{B}^n$。则

$$1-\langle\phi_a(z),\phi_a(w)\rangle = \frac{(1-\langle a,a\rangle)(1-\langle z,w\rangle)}{(1-\langle z,a\rangle)(1-\langle a,w\rangle)}$$

对于闭单位球 $\mathbb{B}^n$ 上所有的 z 和 w。

引理 1. 对于任意 $\gamma\in Aut(\mathbb{B}^n)$，我们有

$$\gamma^*d\sigma(\eta) = \left(\frac{1-\|z\|^2}{|1-\langle z,\eta\rangle|^2}\right)^n d\sigma(\eta)$$

对于 $z=\gamma^{-1}(0)$。

证明。 由 [17, 引理 4.1], 可得

$$\gamma^*d\sigma(\eta) = |\det\mathcal{J}_{\mathbb{C}}\gamma(\eta)|^{\frac{2n}{n+1}}d\sigma(\eta)$$

对于任意 $\eta\in\partial\mathbb{B}^n$ 和 $\gamma\in$Aut($\mathbb{B}^n$)。另一方面， [20] 中的引理 1.7 给出

$$\det\mathcal{J}_{\mathbb{R}}\gamma(\eta) = |\det\mathcal{J}_{\mathbb{C}}\gamma(\eta)|^2 = \left(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle\eta,z\rangle|^2}\right)^{n+1}.$$

结合这两个结果即可得到所需的引理。 □

3. Proof of the Main Result and Related Results

3.1. 定理 1 中不等式的证明。 对于 $z \in \mathbb{B}^n$ 和方向 $l = (l_1, \ldots\ldots, l_n) \in \partial\mathbb{B}^n$, h的泊松积分表示 (2.2) 给出

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}, l \right\rangle = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \left\langle \frac{\partial \mathcal{P}_z(w)}{\partial \overline{z}}, l \right\rangle h^*(w) d\sigma(w).$$

将 l 视为由分量 (Re l_1, Im l_1, ..., Re l_n, Im l_n) 构成的实向量，则点积$\nabla \mathcal{P}_z \cdot l$ 为

$$\nabla \mathcal{P}_z \cdot l = \langle \nabla \mathcal{P}_z(w), l \rangle = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z_j} l_j + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \overline{z}_j} \overline{l_j} \right) = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial \mathcal{P}_z}{\partial \overline{z}}, l \right\rangle.$$

我们先来计算

$$\mathcal{C}(z, l) = \int_{\partial\mathbb{B}^n} |\nabla \mathcal{P}_z \cdot l| \, d\sigma(w) = \int_{\partial\mathbb{B}^n} 2 \left| \operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial \mathcal{P}_z(w)}{\partial \overline{z}}, l \right\rangle \right| d\sigma(w). \tag{3.1}$$

我们作变量替换 $w = \phi_z(\eta)$, 其中 ϕ_z 是 (2.5) 中给出的对合自同构。由引理 1 可得边界雅可比公式

$$d\sigma(w) = \left(\frac{1 - \|z\|^2}{|1 - \langle z, \eta \rangle|^2} \right)^n d\sigma(\eta).$$

这意味着

$$\mathcal{C}(z, l) = \int_{\partial\mathbb{B}^n} 2 \left| \operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial \mathcal{P}_z}{\partial \overline{z}}(\phi_z(\eta)), l \right\rangle \right| \left(\frac{1 - \|z\|^2}{|1 - \langle z, \eta \rangle|^2} \right)^n d\sigma(\eta).$$

在引理 A 中将 $a \to z$、 $z \to 0$ 和 $w \to \eta$ 分别替换为.....，可得

$$1 - \langle z, w \rangle = \frac{1 - \|z\|^2}{1 - \langle z, \eta \rangle}.$$

由此，等式 (2.3) 可得

$$\frac{\partial \mathcal{P}_z}{\partial \overline{z}_j} = \frac{n}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1 - \|z\|^2)^{n+1}} \left(\frac{-z + \phi_z(\eta)(1 - \overline{\langle z, \eta \rangle})}{|1 - \langle z, \eta \rangle|^{-2n}} \right).$$

因此

$$\mathcal{C}(z, l) = \frac{2n}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1 - \|z\|^2)} \int_{\partial\mathbb{B}^n} |\operatorname{Re}((1 - \overline{\langle z, \eta \rangle}) \langle \phi_z(\eta), l \rangle - \langle z, l \rangle)| d\sigma(\eta)$$

并进一步简化

$$\begin{aligned}
(1 - \overline{\langle z, \eta \rangle}) \langle \phi_z(\eta), l \rangle - \langle z, l \rangle &= (1 - \overline{\langle z, \eta \rangle}) \left\langle \frac{z - P_z(\eta) - s_z Q_z(\eta)}{1 - \langle \eta, z \rangle}, l \right\rangle - \langle z, l \rangle \\
&= \langle z - P_z(\eta) - s_z Q_z(\eta), l \rangle - \langle z, l \rangle \\
&= -\langle P_z(\eta) + s_z Q_z(\eta), l \rangle
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(z,l) &= \frac{2n}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1-\|z\|^2)}\int_{\partial\mathbb{B}^n}|\mathrm{Re}(\langle P_z(\eta)+s_zQ_z(\eta),l\rangle)|d\sigma(\eta)\\ &= \frac{2n}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1-\|z\|^2)}\int_{\partial\mathbb{B}^n}\left|\mathrm{Re}\left(\frac{\langle\eta,z\rangle\langle z,l\rangle}{\|z\|^2}+s_z\left(\langle\eta,l\rangle-\frac{\langle\eta,z\rangle\langle z,l\rangle}{\|z\|^2}\right)\right)\right|d\sigma(\eta)\\ &= \frac{2n}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1-\|z\|^2)}\int_{\partial\mathbb{B}^n}|\mathrm{Re}\langle\eta,v(z,l)\rangle|d\sigma(\eta) \qquad (3.2)\end{aligned}$$

其中

$$v(z,l):=\begin{cases}s_zl\ +\ (1-s_z)\langle l,z\rangle\frac{z}{\|z\|^2}, & \text{if } z\neq 0\\ l, & \text{if } z=0.\end{cases}$$

球坐标 $\eta_1=e^{i\psi_1}\cos\theta_1$, $\eta_2=e^{i\psi_2}\sin\theta_1\cos\theta_2$,$\cdots$，由 $d\sigma$ 的旋转不变性，并假设 $v=(\|v\|,0,0,...,0)$，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(z,l) &= \frac{2n\|v\|}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1-\|z\|^2)}\int_{\partial\mathbb{B}^n}|\mathrm{Re}(\eta_1)|d\sigma(\eta)\\ &= \frac{2n\|v\|}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1-\|z\|^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{S}^{2n-3}}|\cos\psi_1\cos\theta_1|\cos\theta_1\sin^{2n-3}\theta_1 d\sigma_{\mathbb{S}^{2n-3}}(\eta)d\psi_1d\theta_1\\ &= \frac{2n\|v\|\sigma(\mathbb{S}^{2n-3})}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1-\|z\|^2)}\int_0^{2\pi}|\cos\psi_1|d\psi_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta_1\sin^{2n-3}\theta_1d\theta_1\\ &= \frac{2n\|v\|\sigma(\mathbb{S}^{2n-3})}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)(1-\|z\|^2)}\frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n-1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\\ &= \frac{2n\|v\|}{1-\|z\|^2}\frac{\Gamma(n)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

由此可得

$$|\nabla h(z)\cdot l|\le\frac{2n\|v\|}{1-\|z\|^2}\frac{\Gamma(n)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}.$$

进一步化简可得

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= s_z^2\|l\|^2+(1-s_z)^2\frac{|\langle l,z\rangle|^2}{\|z\|^2}+2s_z(1-s_z)\mathrm{Re}\left\langle l,\frac{\langle l,z\rangle z}{\|z\|^2}\right\rangle\\ &= 1-\|z\|^2+|\langle l,z\rangle|^2\quad(\text{since } s_z=\sqrt{1-\|z\|^2}). \qquad (3.4)\end{aligned}$$

显然 $\|v\|=\sqrt{1-\|z\|^2+|\langle l,\ \ z\rangle|^2}\le 1$，因此

$$|\nabla h(z)|=\sup_{l\in\partial\mathbb{B}^n}|\langle\nabla h(z),l\rangle|\le\frac{2n}{1-\|z\|^2}\frac{\Gamma(n)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}.$$

不等式的证明至此完成。

3.2. 不等式的尖锐性。 对于固定的 $z\in\mathbb{B}^n$，回顾方程 (3.1) 和 (3.3)，可知

$$\mathcal{C}(z,l)=\int_{\partial\mathbb{B}^n}|\nabla\mathcal{P}_z(w)\cdot l|d\sigma(w)=\frac{2n\|v\|}{1-\|z\|^2}\frac{\Gamma(n)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}.$$

考虑不等式

$$|\nabla h(z)\cdot l|=\left|\int_{\partial\mathbb{B}^n}(\nabla\mathcal{P}_z(w)\cdot l)\,h^*(w)d\sigma(w)\right|\le\int_{\partial\mathbb{B}^n}|\nabla\mathcal{P}_z(w)\cdot l|\,|h^*(w)|d\sigma(w). \qquad (3.5)$$

注意，由于

$$\operatorname{sgn}(\nabla \mathcal{P}_z(w)\cdot l)(\nabla \mathcal{P}_z(w)\cdot l) = |\nabla \mathcal{P}_z(w)\cdot l|$$

每当 $\nabla \mathcal{P}_z(w)\cdot l \neq 0$ 时，我们便得到边界函数在 (3.5) 中的等式 on

$$h^*(w) = \operatorname{sgn}(\nabla \mathcal{P}_z(w)\cdot l) \quad \text{a.e } w \in \partial\mathbb{B}^n$$

or

$$h^*(\phi_z(\eta)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\langle \eta, v(z,l)\rangle) \quad \text{a.e. } w \in \partial\mathbb{B}^n,$$

利用方程 (3.2)。换言之

$$h^*(\phi_z(\eta)) = \begin{cases} 1, & \operatorname{Re}\langle \eta, v(z,l)\rangle > 0, \\ -1, & \operatorname{Re}\langle \eta, v(z,l)\rangle < 0, \end{cases} \quad \text{a.e.}$$

对于 $z \in \mathbb{B}^n$ 和 $l \in \partial\mathbb{B}^n$，定义半球

$$H_{z,l} = \{\eta \in \partial\mathbb{B}^n \colon \operatorname{Re}\langle \eta, v(z,l)\rangle > 0\},$$

以及边界函数

$$\psi_{z,l}(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{if } \eta \in H_{z,l}, \\ -1, & \text{if } \eta \notin H_{z,l}. \end{cases}$$

现在通过对合 $\eta = \phi_z(w)$ 将其拉回到原始边界变量 w，从而定义一个新的边界函数（因为 $\phi_z \circ \phi_z = I$）：

$$h^*_{z,l}(w) := \psi_{z,l}(\phi_z(w)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\langle \phi_z(w), v(z,l)\rangle).$$

令 $h_{z,\ l}$ 为$h^*_{z,\ l}$ 的泊松积分表示，定义如下

$$h_{z,l}(\xi) = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \mathcal{P}_\xi(w)\, h^*_{z,l}(w) d\sigma(w).$$

这表明 $h_{z,l}$ 是定义在 $\mathbb{B}^n$ 上的不变调和函数，并且 $|h_{z,l}(\xi)| \leq 1$ 对所有 $\xi \in \mathbb{B}^n$都成立。

断言： 如上所定义的函数 $h_{z,l}$ 使（1.2）中的等号成立，由定理 1 可知，它是极值函数。

断言的证明如下：由于 $h^*_{z,l}(w) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\langle \eta, v(z,l)\rangle)$，且几乎处处逐点成立。

$$\operatorname{Re}\langle \eta, v(z,l)\rangle \ \operatorname{sgn}(\operatorname{Re}\langle \eta, v(z,l)\rangle) = |\operatorname{Re}\langle \eta, v(z,l)\rangle|,$$

b通过重复定理 1 证明中的计算，我们可以证明

$$\nabla h_{z,l}(z)\cdot l = \int_{\partial\mathbb{B}^n} |\nabla \mathcal{P}_z(w)\cdot l| d\sigma(w) = \mathcal{C}(z,l)$$

因此$|\nabla h_{z,l}(z)\cdot l| = \mathcal{C}(z,l)$. 在等式（3.4）中，每当 l与 z平行，即 $l = \hat{}z := z/\|z\|$ 对 $z \neq 0$成立，并取 $l = e_1$ 为 $z = 0$时，我们有 $\|v(z,l)\| = 1$。因此，对于函数$h_{z,\hat{z}}$，利用等式（3.3），我们有

$$|\nabla h_{z,\hat{z}}(z)| \geq |\nabla h_{z,\hat{z}}(z)\cdot \hat{z}| = \mathcal{C}(z,\hat{z}) = \frac{2n}{1-\|z\|^2} \frac{\Gamma(n)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})},$$

因此，该不等式在任意点 $z \in \mathbb{B}^n$ 处都是尖锐的。

注 1. 方程 (3.3) 和 (3.4) 表明，在估计 $|\langle \nabla h(z)\ l\rangle| \le \mathcal{C}(z,\ l)$ 中，与 z （径向）平行的方向使有界不变调和函数 h 在单位球上定义时的方向导数 $\mathcal{C}(z,\ l)$ 达到最大值。不等式 (1.2) 的尖锐性表明，同一个常数也适用于函数 $h.$ 的梯度估计。这为单位球上的有界不变调和函数所对应的 Khavinson 猜想提供了解答 $\mathbb{B}^n$。

3.3. **推论的证明**。

推论 *1* 的证明。由于

$$\|\nabla_B h(z)\|_B^2 = \|\nabla_B h\circ\phi_z(0)\|_B^2 = \|\nabla_B (h\circ\phi_z)(0)\|_B^2 = \frac{1}{n+1}\|\nabla(h\circ\phi_z)(0)\|^2$$
$$\le \frac{1}{n+1}\left(\frac{2\,\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}\right)^2,$$

and

$$\|\nabla_B h(z)\|_B^2 = \frac{1-\|z\|^2}{n+1}\left(\sum_j \left|\frac{\partial h}{\partial z_j}\right|^2 - \left|\sum_j z_j \frac{\partial h}{\partial z_j}\right|^2\right) \ge \frac{(1-\|z\|^2)^2}{4(n+1)}\|\nabla h\|^2,$$

这些不等式得证。由于 (1.2) 在 $z=0$ 处是尖锐的，我们还得到第二个不等式的尖锐性。

设 $\gamma:\ [0,1]\to\mathbb{B}^n$ 是一条分段光滑的 C^1 曲线，满足 $\gamma(0)=z$ 且 $\gamma(1)=w$。由链式法则和柯西-施瓦茨不等式可得

$$|h(z)-h(w)| \le \left|\int_0^1 \langle \nabla_B h(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle_B\, dt\right| \le \int_0^1 \|\nabla_B h(\gamma(t))\|_B \|\gamma'(t)\|_B\, dt.$$

利用推论中的不等式，我们得到

$$|h(z)-h(w)| \le \frac{2\,\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi(n+1)}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_0^1 \|\gamma'(t)\|_B\, dt.$$

对所有连接 z 和 w 的此类曲线 γ 取下确界，便得到 (1.3)。 □

推论 *2* 的证明。设 $v\in\mathbb{R}^m$ 为任意单位向量，$\|v\|=1$，并定义标量函数$G_v(z) = H(z)\cdot v$。显然，函数 $G_v(z)$ 是定义在 $\mathbb{B}^n$ 上的实值不变调和函数，并且对所有 $z\in\mathbb{B}^n$，柯西-施瓦茨不等式 $|G_v(z)| \le \|H(z)\|\|v\| \le 1$ 进一步表明，$G_v(z)$ 满足定理 1 的假设。不等式 (1.2)) 随即给出

$$\|\nabla G_v(z)\| = |(\nabla H(z))^T v| \le \frac{2\,\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}\frac{1}{1-\|z\|^2}.$$

由于 v 是 $\mathbb{R}^m$中的任意单位向量，对所有此类 v 取上确界即可得到所需的不等式 (1.4)。□

4. Schwarz lemma for invariant harmonic functions using Burgeth's method

经典施瓦茨引理指出，不等式

$$|f(z)| \le |z| \quad \text{for all} \quad |z| < 1, \quad \text{and} \quad |f'(0)| \le 1$$

对所有从单位圆盘映入自身且满足 $f(0) = 0$ 的全纯映射 f 均成立。本节采用 Burgeth [1] 的方法，得到关于不变调和函数的类似施瓦茨型结果。令 $\mathbb{1}_A$ 表示集合 $A \subset \partial\mathbb{B}^n$ 的示性函数。设

$$M_c^n(\|z\|) = 2\int_{\partial\mathbb{B}^n} \mathbb{1}_{S(c,\hat{z})}\, \mathcal{P}_z d\sigma - 1, \tag{4.1}$$

其中 $z \in \mathbb{B}^n$ 和

$$S(c,\hat{z}) = \{w \in \partial\mathbb{B}^n : \mathrm{Re}\langle \hat{z}, w\rangle > \cos(\alpha(c)),\ \alpha(c) \in [0,\pi]\}$$

是一个极角为 $\alpha(c)$、中心位于 $\hat{z}$ 且测度为 c 的球冠。

定理 2. 设 h 是单位球 $\mathbb{B}^n$ 上的实值不变调和函数，满足 $|h| \le 1$，且 $h(0) = a$，$-1 < a < 1$。则对于 $c = (a+1)/2$ 以及所有 $z \in \mathbb{B}^n$

$$h(z) \le M_c^n(\|z\|).$$

等号成立当且仅当 h 是 $\partial\mathbb{B}^n$ 上某个球冠的示性函数的泊松积分（相差一个旋转）。

证明。证明过程与 [1, 定理 1] 相同，因此略去。□

在平面情形 $n = 1$中，极值函数 M_c^1可直接由 on $\mathbb{B}^1$ 计算得到: (4.1)

$$M_c^1(\|z\|) = \frac{4}{\pi}\arctan\left(\frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}\tan\frac{\alpha(c)}{2}\right) - 1. \tag{4.2}$$

特别地，对于 $a = 0$ （因此 $\alpha(c) = \pi/2$），可得 $M_{1/2}^1(\|z\|) = \frac{4}{\pi}\arctan(\|z\|)$，从而恢复了 Schwarz 的经典估计 [16]。

利用 σ 的旋转不变性，并将右端的积分改写为球坐标下的形式，我们可以简化式 (4.1)，得到仅依赖于 $r = \|z\|$ 的显式积分表示。这使极值函数的形式一目了然，并导出关系式 (4.2)。设 $n \ge 2$。我们采用恒等对应 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$，并在 $\partial\mathbb{B}^n \cong \mathbb{S}^{2n-1}$ 上引入实球坐标。将点 $w \in \partial\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ 写作 $w = (w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n)$，使得 $w_j = a_j + ib_j$，相应的实向量为 $(a_1, b_1, \ldots\ldots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$。引入实球坐标 $a_1 = \cos\theta_1, b_1 = \sin\theta_1\cos\theta_2, \cdots$，并利用 σ 的旋转不变性，设 $z = (\|z\|, 0, 0, \ldots\ldots, 0)$，可得

$$\begin{aligned}
&M_c^n(\|z\|)\\
&= \frac{2}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)}\int_0^{\alpha(c)}\int_0^{\pi}\int_{\mathbb{S}^{2n-3}} \frac{(1-\|z\|^2)^n}{|1-\|z\|\overline{w_1}|^{2n}}\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2 d\sigma_{\mathbb{S}^{2n-3}}(\zeta)d\theta_2 d\theta_1 - 1\\
&= \frac{2(1-\|z\|^2)^n\sigma(\mathbb{S}^{2n-3})}{\sigma(\partial\mathbb{B}^n)}\int_0^{\alpha(c)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2}{[(1-\|z\|\cos\theta_1)^2+(\|z\|\sin\theta_1\cos\theta_2)^2]^n}d\theta_2 d\theta_1 - 1\\
&= \frac{2\,\Gamma(n)(1-\|z\|^2)^n}{\pi\Gamma(n-1)}\int_0^{\alpha(c)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2}{[(1-\|z\|\cos\theta_1)^2+(\|z\|\sin\theta_1\cos\theta_2)^2]^n}d\theta_2 d\theta_1 - 1,
\end{aligned}$$

利用如下事实：对于任意 $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(\mathbb{S}^{k-1}) = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}$。

致谢。本研究得到韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号：RS-2025-00561084）支持。

References

1. Burgeth, B., *A Schwarz lemma for harmonic and hyperbolic-harmonic functions in higher dimensions*, 《Manuscripta Mathematica》77(2-3) (1992), 283–291. 2. Colonna, F., *The Bloch constant of bounded harmonic mappings*, 《Indiana University Mathematics Journal》38(4) (1989), 829–840. 3. Chen, H., *The Schwarz-Pick lemma and Julia lemma for real planar harmonic mappings*, 《中国科学：数学》56(11) (2013), 2327–2334. 4. Khavinson, D., *An extremal problem for harmonic functions in the ball*, 《加拿大数学通报》35(2) (1992), 218–220. 5. Kresin, G. and Maz'ya, V., *Sharp pointwise estimates for directional derivatives of harmonic functions in a multidimensional ball* **169** 2 2010 167 187 , 《数学科学》 ( ) ( ), – . 6. Kalaj, D., *A proof of Khavinson's conjecture in* $\mathbb{R}^4$, 《伦敦数学学会通报》49(4) (2017), 561–570. 7. Kalaj, D. and Vuorinen, M., *On harmonic functions and the Schwarz lemma*, 《美国数学学会会刊》140(1) (2012), 161–165. 8. Liu, C., *A proof of the Khavinson conjecture*, 《数学年刊》380(1-2) (2021), 719–732. 9. Liu, C., *Schwarz-pick lemma for harmonic functions*, 《国际数学研究通知》19 (2022), 15092– 15110. 10. Markovi´c, M., *On harmonic functions and the hyperbolic metric*, 《数学研究》26(1) (2015), 19–23. 11. Markovi´c, M., *Solution to the Khavinson problem near the boundary of the unit ball*, 《构造逼近》45(2) (2017), 243–271. 12. Melentijevi´c, P., *Invariant gradient in refinements of Schwarz and Harnack inequalities*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 43(1) (2018), 391–399. 13. Mateljevi´c, M., *Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions*, 《数学分析及其应用》464(1) (2018), 78–100. 14. Melentijevi´c, P., *A proof of the Khavinson conjecture in* $\mathbb{R}^3$, 《数学进展》352 (2019), 1044–1065. 15. Rudin, W., *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, 《数学科学基础丛书》, 施普林格, (1980). 16. Schwarz, H. A., *Gesammelte mathematische abhandlungen*, 美国数学学会, 260 (1972). 17. Seo, A., *On discrete subgroups of the complex unit ball*, 《数学通讯》298(10) (2025), 3272–3286. 18. Stoll, M., *Invariant potential theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, 伦敦数学学会讲义系列, 剑桥大学出版社, 199 (1994). 19. Xu, Z. and Yu, T. and Huo, Q., *Schwarz lemma for harmonic functions in the unit ball*, 《爱丁堡数学学会会刊》(2) 68(2) (2025), 616–633. 20. Zhu, K., *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, 《数学研究生文本》, 施普林格出版社，纽约 226 (2005).

Kapil Jaglan, Department of Mathematics, Kyungpook National University, Daegu 41566, Republic of Korea.

Email address: kapiljaglan0501@gmail.com

Aeryeong Seo, Department of Mathematics, Kyungpook National University, Daegu 41566, Republic of Korea.

Email address: aeryeong.seo@knu.ac.kr