arXiv:2602.11612v1 [math.GT] 12 Feb 2026

三维扣结数为二的属二纤维化纽结的部分分类

TETSUYA ITO

Abstract. 纽结 K 的三维扣结数 $cl(K)$，是其扣结圆盘中扣结奇点数量的最小值。扣结圆盘是一个奇异浸入圆盘，其边界为 K，且其奇异集仅由扣结奇点组成。我们在假设其存在某种特定类型的扣结圆盘（我们称之为 II 型）的条件下，对扣结数为二、亏格二的纤维化纽结进行分类。

1. Introduction

每个 K 纽结都围成一个扣结圆盘 D，它是一个奇异浸入圆盘，其奇异集仅由扣结奇点组成。纽结 K 的三维扣结数[1]$cl(K)$（简称扣结数）是纽结 K 的扣结圆盘 D 的 $cl(D)$ 的最小值，其中 $cl(D)$ 表示 D[2] 的扣结奇点数量。扣结奇点的符号定义为圆盘与 K 在扣结处交的符号（见图 1 (a)）。

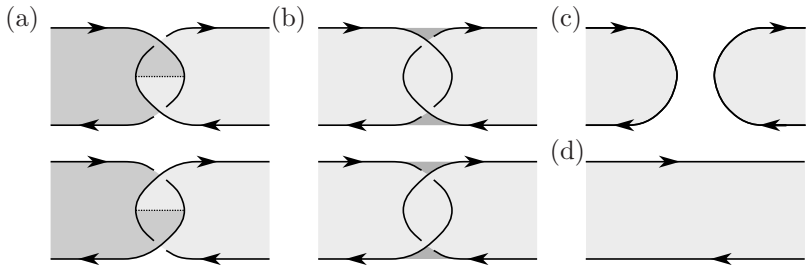


Figure 1. (a) 正、负扣结奇点。(b) 由扣结圆盘得到的塞弗特曲面。(c) 扣结奇点的消解。(d) 扣结奇点的平滑化

由于一个扣结奇点可通过一次交叉变换消解（见图 1 (c)），因此 $u(K) \leq cl(K)$，其中 $u(K)$ 是 K 的解纽数。

另一方面，通过按照图 1 (b) 所示替换扣结邻域，扣结圆盘 D 可以转换为塞弗特曲面 S_D。更确切地说，塞弗特曲面 S_D 是通过在曲面 S_D^0 上拼接一个正或负的霍普带得到的，其中 S_D^0 是按照图 1 (d) 所示将扣结替换为无扭带后得到的曲面。我们将这种用带替换扣结的操作称为

[1]还有一种四维扣结数的概念。本文只讨论三维扣结数。[2]扣结数通常记作 $c(K)$，但为避免与交叉数混淆，我们采用记号 $cl(K)$。

扣结奇点的平滑。特别地，可得 $g(K) \leq cl(K)$，其中 $g(K)$ 是纽结 K 的亏格。

容易看出，扣结数为一的纽结恰好就是双纽结。由于纽结 K 是双纽结当且仅当 $g(K) = u(K) = 1$ [Ko, ST], ，故可得 $cl(K) = 1$ 当且仅当 $g(K) = u(K) = 1$。

当扣结数大于一时，情况有所不同。在 [KK]中，Kadokami与Kawamura证明，扣结数为二的纽结的康威多项式具有某种特殊表达式。由此，他们证明扣结数为二的纽结不可能具有康威多项式 $\nabla_K(z)$，其形式为$a_4(K)z^4 + a_2(K)z^2 + 1$，且满足 $a_4(K) \equiv 3 \pmod 8$以及 $a_2(K) \equiv 2 \pmod 4$。此处$a_2(K)$与 $a_4(K)$分别表示 z^2 与 z^4 在康威多项式$\nabla_K(z)$中的系数。利用这一约束，他们给出了无穷多个纽结 $\{K_n\}$，它们满足 $cl(K_n) > 2 \geq \max\{g(K_n), u(K_n)\}$。

根据两个扣结的位置，扣结数为二的扣结圆盘自然地被分为两类，我们称之为 X 型和 II 型。若按图 1 (d) 对扣结进行光滑化后得到具有单一边界的亏格一曲面（相应地，具有三个边界的零亏格曲面），则称该扣结圆盘为 X 型（相应地，为 II 型）。详见定义2.1。

本短文旨在确定扣结数为二的亏格二纤维化纽结，前提是它们容许一个 II 型扣结圆盘。

定理 1.1（II 型亏格二、扣结数为二的纤维化纽结的分类）。设 K 是具有 $cl(K) = 2$ 的二属纤维结。若 K 容许一个 II 型扣结圆盘，则在取镜像的意义下， K 为下列纽结之一。

(i)（非素纽结） $3_1\#3_1, 3_1\#4_1, 4_1\#4_1, 3_1\#\overline{3_1}$。(ii)（双桥纽结） $6_2, 6_3, 7_6, 7_7$。(iii)（Montesinos 纽结）

Montesinos 纽结

$$K\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{4n \pm 1}\right), K\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{4n \pm 1}\right), K\left(\frac{1}{2n}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$
$$K\left(\frac{1}{2n}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{5}\right), K\left(\frac{1}{2n}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{3}\right), K\left(\frac{1}{2n}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(iv)（例外纽结）图2中的12个纽结$K^{\mathrm{ex}}_{i;\varepsilon_1,\varepsilon_2}(i = 1, 2, 3, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\})$。

关于 Montesinos 纽结 $K(r_1, r_2, r_3)$ 的术语，见附录 B。

尽管定理 1.1 仅处理 K 容许 II 型扣结圆盘的情形，我们仍将观察到纽结容许 X 型扣结圆盘的若干约束，因而常常能够识别满足 $cl(K) > 2 \geq \max\{g(K), u(K)\}$ 的纽结。

推论 1.2. 纽结 $K \in \{11n_{74}, 11n_{116}, 11n_{142}, 12n_{462}, 12n_{838}\}$ 满足 $u(K) \leq g(K) = 2 < 3 \leq cl(K)$。

证明。这些纽结是纤维化的、亏格为二的纽结，且满足 $u(K) \leq 2$。此外，这些纽结的 $a_2(K)$ 为偶数，故由推论 2.3，它们不容许 X 型扣结圆盘。由于这些纽结未出现在定理 1.1 的列表中，它们也不容许 II 型扣结圆盘。□

一个二属纤维结满足 $a_4(K) = \pm 1 \not\equiv 3$ (模 8)，因此上述 Kadokami-Kawamura 障碍不适用。推论 1.2 中的纽结首次给出了满足 $cl(K) > \max\{g(K), u(K)\}$ 的纤维化纽结实例。

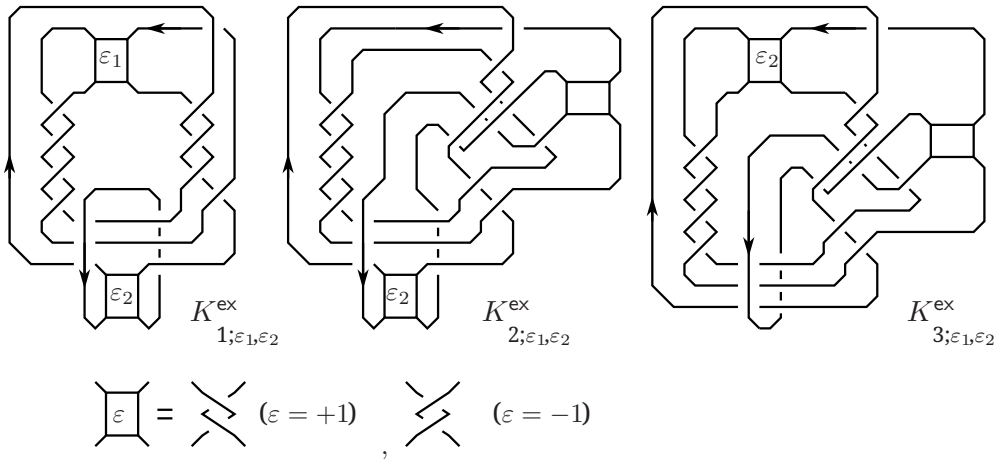


FIGURE 2. 12例外纽结 $K^{\mathrm{ex}}_{i;\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$

ACKNOWLEDGEMENT

作者受到 JSPS KAKENHI 基金编号 21H04428、23K03110 和 25H00588 的部分资助。作者谨此感谢 Teruhisa Kadokami 提出的意见。

2. A QUICK REVIEW OF CONWAY AND HOMFLY POLYNOMIAL OF CLASP NUMBER TWO KNOTS

本节简要回顾《KK, Ta》中出现的扣结数为二的纽结的康威多项式和 HOMFLY 多项式零次系数的计算。我们将看到，这些不变量对纽结能否具有 X 型扣结圆盘构成约束。

2.1. 康威多项式。设 $K = K_{\gamma_1,\ \gamma_2}$ 是一个扣结数为二的纽结， D 是其具有两个扣结奇点 γ_1, γ_2 的扣结圆盘。我们用 $\varepsilon_i\,(i = 1, 2)$ 表示扣结奇点 γ_i的符号。

我们考虑由 K 导出的以下纽结，它们构成一棵纽结 skein 消解树（见下图3）。

- $K_{u,\ \gamma_2}$ 是通过消解扣结 γ_1 而从 K 得到的链环。
- $K_{o,\ \gamma_2}$ 是通过对 K 的扣结 γ_1进行平滑处理得到的链环。
- $K_{u,\ u}$ 是通过消解$K_{u,\ \gamma_2}$ 中的扣结 γ_2得到的链环。这就是平凡纽结。

- $K_{u,\ o}$ 是通过对$K_{u,\ \gamma_2}$ 中的扣结 γ_2进行平滑处理得到的链环。
- $K_{o,\ u}$ 是通过消解$K_{o,\ \gamma_2}$ 中的扣结 γ_2得到的链环。
- $K_{o,\ o}$ 是通过对$K_{o,\ \gamma_2}$ 中的扣结 γ_2进行平滑处理得到的链环。

我们将由扣结圆盘 D得到的$K_{*,\ *}$ 的塞弗特曲面记为$S_{*,\ *}$ $(* \in \{o, u\})$。在下文中，我们通常以显而易见的方式将$S_{o,\ u}$ 和$S_{u,\ o}$ 视为$S_{o,\ o}$的子曲面。

根据 skein 关系， K 的康威多项式为

$$\nabla_K(z) = 1 + \varepsilon_1 z \nabla_{K_{o,u}}(z) + \varepsilon_2 z \nabla_{K_{u,o}}(z) + \varepsilon_1\varepsilon_2 z^2 \nabla_{K_{o,o}}(z)$$

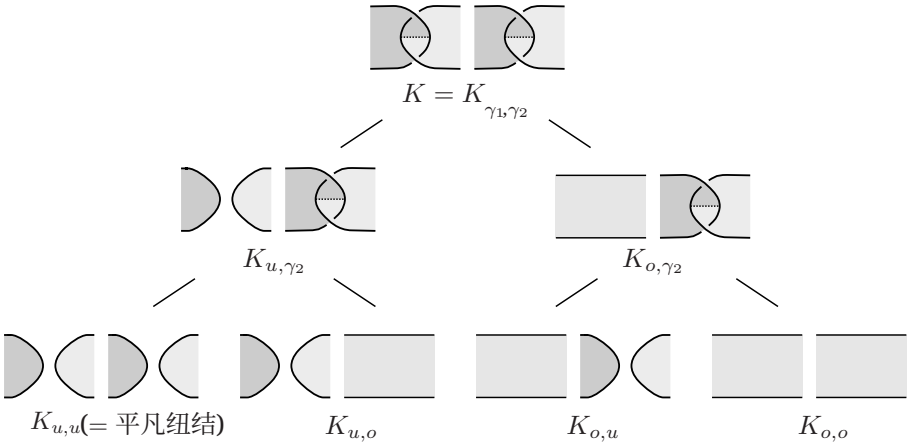


FIGURE 3. 辫子树：纽结 K_{u,γ_2}, K_{o,γ_2},$K_{u,u}$,$K_{u,o}$,$K_{o,u}$, $K_{o,o}$

为了给出$K_{o,\ u}$、$K_{u,\ o}$、$K_{o,\ o}$的康威多项式的更详细表达式，我们将扣结圆盘分为以下两种类型。

定义2.1. 如果扣结圆盘 D 是 X 型（分别为 II 型），且 $K_{o,o}$是一个纽结（分别为三分支链环）[3]，则称该扣结圆盘为相应类型。

类型 X 和 II 的扣结圆盘示意图见图4，其中“X”和“II”的含义显而易见。

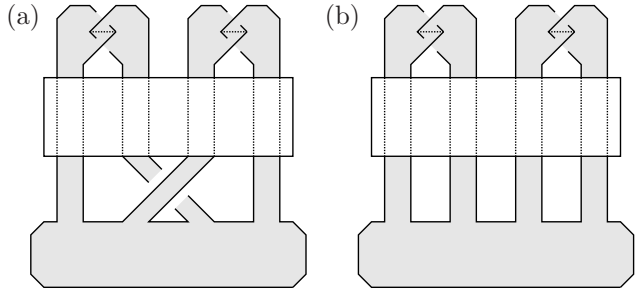


FIGURE 4. (a) X 型扣结圆盘。(b) II 型扣结圆盘。方框表示一个缠结。

首先，$K_{o,\ u}$ 和 $K_{u,\ o}$ 是边界为环带的双分支链环，因此其 Conway 多项式为

$$\nabla_{K_{o,u}}(z) = \ell_1 z, \quad \nabla_{K_{u,o}}(z) = \ell_2 z$$

其中，ℓ_1, ℓ_2 分别是链环 $K_{o,\ u}$ 和 $K_{u,\ o}$的链接数。

假设扣结圆盘 D 为 X 型。令 α 和 β 为 $S_{o,\ o}$ 上的简单闭曲线，取法如下（见图5(i)）。

- α 是环带 S_o的核u_o。

[3]在 [Ta1],中，X 型和 II 型分别称为 0 型和 1 型。

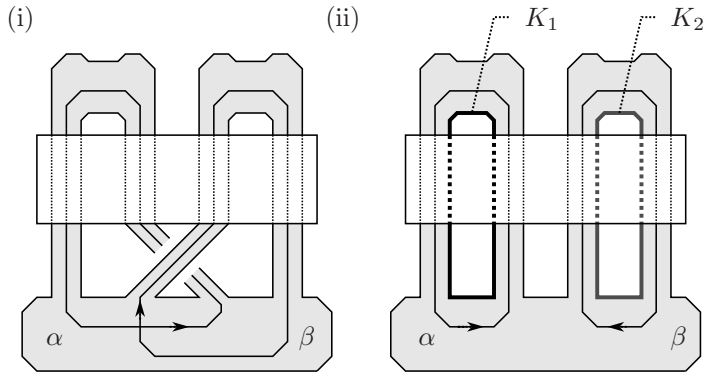


FIGURE 5. (i) X 型情形的基底。(ii) II型情形的基底。一个关键特征是，分支 K_1 等于$K_{o,u}$ 的分支，而分支 K_2 等于 K_2。

- β 是环带 S_u的核o。
- α 和 β 的定向选取使它们在一点处正相交。

令 α_+ 为沿 S的法向推出的曲线 α ，令 α_+^r 为反向定向的曲线 α_+ 。曲线 β_+ 和 β_+^r 也以类似方式定义。于是

$$\ell_1 = lk(K_{o,u}) = lk(\alpha, \alpha_+^r) = -lk(\alpha, \alpha_+)$$
$$\ell_2 = lk(K_{u,o}) = lk(\beta, \beta_+^r) = -lk(\beta, \beta_+^r).$$

最后，令

因此，$S_{o,o}$ 的塞弗特矩阵为 $\begin{pmatrix} -\ell_1 & \ell = lk(\alpha, \beta_+) \\ \ell+1 & -\ell_2 \end{pmatrix}$，故

$$\nabla_{K_{o,o}}(z) = 1 + (\ell_1\ell_2 - \ell(\ell+1))z^2$$

当扣结圆盘 D 为 II 型时，我们类似地取简单闭曲线 α 和 β（见图5 (ii)）。那么 $S_{o,\ o}$ 的塞弗特矩阵为 $\begin{pmatrix} -\ell_1 & \ell \\ \ell & -\ell_2 \end{pmatrix}$，因此

$$\nabla_{K_{o,o}}(z) = 1 + (\ell_1\ell_2 - \ell^2)z^2$$

综上，我们得到扣结数为二的纽结的康威多项式公式。

定理 2.2. [KK] 如果 K 是一个扣结数为二的纽结，那么

$$\nabla_K(z) = \begin{cases} 1 + (\varepsilon_1\ell_1 + \varepsilon_2\ell_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)z^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(\ell_1\ell_2 - \ell(\ell+1))z^4 & \text{（如果 } D \text{ 是 } X \text{ 型）} \\ 1 + (\varepsilon_1\ell_1 + \varepsilon_2\ell_2)z^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2(\ell_1\ell_2 - \ell^2)z^4 & (\textit{if } D \textit{ is of type } II) \end{cases}$$

作为康威多项式计算的一个应用，我们给出以下简单约束，以判定纽结是否存在 X 型扣结圆盘。

推论 2.3. 若 K 是一个扣结数为二的亏格为二的纽结。若 $a_4(K) \equiv 1 \pmod 2$ 且 $a_2(K) \equiv 0 \pmod 2$，则 K 不容许 X 型扣结圆盘。

证明。假设 K 容许一个 X 型扣结圆盘。由定理 2.2 $a_4(K) = \varepsilon_1\varepsilon_2(\ell_1\ell_2 - \ell(\ell+1)) \equiv \ell_1\ell_2 \pmod 2$，因此若 $a_4(K) \equiv 1 \pmod 2$，则 $a_2(K) = \varepsilon_1\ell_1 + \varepsilon_2\ell_2 \equiv \ell_1 + \ell_2 \equiv 0 \pmod 2$。□

特别地，可知当 $a_2(K)$ 为偶数时，亏格二、扣结数为二的纤维化纽结 K 不存在 X 型扣结圆盘。

注 2.4. 当 D 为 II 型时，与 α^r（α 定向相反）平行的 $K_{o,\,o}$ 的分支 K_1，与链环 $K_{o,\,u}$ 的分支相同。类似地，与 β 平行的 $K_{o,\,o}$ 的分支 K_2，与链环 $K_{u,\,0}$ 的分支相同。剩余分支 K_3 是 K_1 与 K_2 的带和。因此，它们的链接数为

$$\begin{cases} lk(K_1,K_2) = lk(\alpha^r,\beta) = -lk(\alpha,\beta_+) = -\ell \\ lk(K_1,K_3) = lk(\alpha^r,\alpha_+) + lk(\alpha^r,\beta^r) = \ell_1 + \ell \\ lk(K_2,K_3) = lk(\beta,\alpha) + lk(\beta,\beta^r) = \ell_2 + \ell \end{cases} \tag{2.1}$$

因此，当 D 为 II 型时，$\nabla_K(z)$ 由扣结的符号 ε_1、ε_2 以及链环 $K_{o,\,o}$ 的链接数确定。

2.2. HOMFLY 多项式的（零次）系数。我们使用相同的论证，给出 HOMFLY 多项式零次系数的公式。

纽结或链环 K 的 HOMFLY 多项式由以下 skein 关系定义

$$v^{-1}P_{K_+}(v,z) - vP_{K_-}(v,z) = zP_{K_0}(v,z), \quad P_{\mathsf{Unknot}}(v,z) = 1$$

其中 K_+、K_-、K_0 是所谓的辫 skein 三元组，即除了一个小球内的部分外完全相同的链环；它们在该小球内的形态如下图所示。



K_+ K_- K_0

已知 $(v^{-1}z)^{\#K-1}P_K(v,z) \in \mathbb{Z}[v^{-2},v^2][z^2]$，因此我们记作

$$P_K(v,z) = (v^{-1}z)^{-\#K+1}\sum_{i=0} p_K^i(v)z^{2i}, \qquad p_K^i(v) \in \mathbb{Z}[v^2,v^{-2}]$$

其中 $\#K$ 表示 K 的分支数。我们称多项式 $p_K^i(v)$ 为 K 的第 i 次系数（HOMFLY）多项式。

HOMFLY 多项式的 skein 关系导出以下更简单得多的 skein 关系

$$v^{-2}p^0_{K_+}(v) - p^0_{K_-}(v) = \begin{cases} p^0_{K_0}(v) & \text{if } \delta = 0, \\ 0 & \text{if } \delta = 1. \end{cases}$$

对于零次系数多项式 $p_K^0(v)$。这里 $\delta = \frac{1}{2}(\#K_+ - \#K_0 + 1)$。也就是说，当且仅当辫 skein 交叉的两股属于同一分支时，$\delta = 0$（若属于不同分支则为 1）。

因此，对于一个 n 分支链环 $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$，其零次系数多项式由各分支的零次系数多项式 $p^0_{K_i}(v)$ 以及（总）链接数 $lk(K) = \sum_{i<j} lk(K_i,K_j)$ 决定，即

$$p_K^0(v) = (v^{-2}-1)^{n-1}v^{2lk(K)}p^0_{K_1}(v)p^0_{K_2}(v)\cdots p^0_{K_n}(v)$$

当一个二分支链环 $L = K \cup K'$ 界定一个环带时，它的两个分支是同一个纽结，但定向相反。由于纽结的 HOMFLY 多项式与定向无关，因此可得

$$p_L^0(v) = (v^{-2}-1)v^{2lk(K)}p_K^0(v)^2 = (v^{-2}-1)v^{2lk(K)}p_{K'}^0(v)^2. \tag{2.2}$$

注 2.5. $p_K^0(v)$ 的这些特殊性质在无痕交叉猜想 [It1] 和解纽数 [It2]方面有应用。此外，skein 关系的简单性意味着，零次系数多项式的计算在理论上 [Pr] 和实践中都远比整个 HOMFLY 多项式的计算容易。它可以作为一种工具，用来区分那些复杂到难以计算其他不变量的无穷多个纽结族（例如，参见[Ta2, KP]）。

可以用与计算康威多项式类似的方法，计算扣结数为二的纽结 K的零次系数多项式。根据 skein 关系， K 的 HOMFLY 多项式为

$$\begin{aligned} P_K(v,z) = {} & v^{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2} + \varepsilon_1 v^{\varepsilon_1+2\varepsilon_2} z P_{K_{o,u}}(v,z) \\ & + \varepsilon_2 v^{2\varepsilon_1+\varepsilon_2} z P_{K_{u,o}}(v,z) + \varepsilon_1\varepsilon_2 v^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} z^2 P_{K_{o,o}}(v,z). \end{aligned} \tag{2.3}$$

由于 $K_{o,\ u}$ 和 $K_{u,\ o}$ 都是以一个环带为界的二分支链环，根据 (2.2)

$$p^0_{K_{o,u}}(v) = (v^{-2}-1)v^{2\ell_1}p^0_{K_1}(v)^2$$

$$p^0_{K_{u,o}}(v) = (v^{-2}-1)v^{2\ell_1}p^0_{K_2}(v)^2$$

其中 K_1 （分别为 K_2）是 $K_{o,\ u}$ （分别为 $K_{u,\ o}$）的一个分支。

当 D 是 X 型时，纽结 $K_{o,\ o}$ 不对 $p_K^0(v)$ 作出贡献。

当 D 是 II 型时，$K_{o,\ o}$ 是一个三分支链环，其分支为 K_1、K_2 和另一个分支 K_3。由 (2.1) 可得

$$\begin{aligned} P_{K_{o,o}}(v,z) &= (v^{-1}-v)^2 v^{2(lk(K_1,K_2)+lk(K_2,K_3)+lk(K_1,K_3))} p^0_{K_1}(v)p^0_{K_2}(v)p^0_{K_3}(v) \\ &= (v^{-1}-v)^2 v^{2(\ell_1+\ell_2+\ell)} p^0_{K_1}(v)p^0_{K_2}(v)p^0_{K_3}(v) \end{aligned}$$

因此，由 (2.3) 可得零次系数公式的一个更精确版本。

定理 2.6。 [Ta1，定理 1.3] 设 K 是一个扣结数为二的纽结。

(i) 若 K 具有一个 X 型扣结圆盘，

$$\begin{aligned} p_K^0(z) = {} & v^{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \varepsilon_1 v^{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}(v^{-1}-v)v^{2\ell_1}(p^0_{K_1}(v))^2 \\ & + \varepsilon_2 v^{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}(v^{-1}-v)v^{2\ell_2}(p^0_{K_2}(v))^2 \end{aligned}$$

其中 ε_1、$\varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$、$\ell_1$、$\ell_2 \in \mathbb{Z}$，使得 $a_2(K) = \varepsilon_1\ell_1 + \varepsilon_1\ell_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$。

(ii) 若 K 存在一个 II 型扣结圆盘，则

$$\begin{aligned} p_K^0(v) = {} & v^{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \varepsilon_1 v^{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}(v^{-1}-v)v^{2\ell_1}(p^0_{K_1}(v))^2 \\ & + \varepsilon_2 v^{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}(v^{-1}-v)v^{2\ell_2}(p^0_{K_2}(v))^2 \\ & + \varepsilon_1\varepsilon_2 v^{2(\ell_1+\ell_2+\ell)+\varepsilon_1+\varepsilon_2}(v^{-1}-v)^2 p^0_{K_1}(v)p^0_{K_2}(v)p^0_{K_3}(v) \end{aligned}$$

where $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}, \ell_1, \ell_2, \ell \in \mathbb{Z}$ *such that* $a_2(K) = \varepsilon_1\ell_1 + \varepsilon_2\ell_2$ *and* $a_4(K) = \varepsilon_1\varepsilon_2(\ell_1\ell_2 - \ell^2)$.

这为纽结能够拥有 X 型扣结圆盘提供了一个额外的限制。

推论 2.7. 如果一个扣结数为二的纽结 K 拥有一个 X 型扣结圆盘，那么

$$\begin{aligned}\frac{p_K^0(z)-v^{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{v^{-2}-1} &= \varepsilon_1 v^{1+\varepsilon_1+2(\ell_1+\varepsilon_2)} p_{K_1}^0(v)^2 + \varepsilon_2 v^{1+\varepsilon_2+2(\ell_2+\varepsilon_1)} p_{K_2}^0(v)^2 \\ &= \varepsilon_1 f_1(v)^2 + \varepsilon_2 f_2(v)^2\end{aligned}$$

对某个 $f_1(v)$ $f_2(v)$ $\in \mathbb{Z}[v^2, v^{-2}] \cup v\mathbb{Z}[v^2, v^{-2}]$。

3. Classification

我们关于分类的证明基于如下观察：由扣结圆盘得到的塞弗特曲面可通过霍普夫拼接获得。

设 H_+ 与 H_- 分别为正霍普夫链环和负霍普夫链环。众所周知，它们是纤维化链环。所谓正霍普夫带和负霍普夫带，是指 H_+ 与 H_- 的纤维曲面。在记号滥用的情况下，我们常常将 Hopf 链环与霍普夫带混同。我们用相同的符号 H_+ 与 H_- 表示霍普夫带，而不是 Hopf 链环。

定义 3.1（霍普夫拼接）。设 K 为一个纽结或链环， S 为其连通的塞弗特曲面。设 α 为 S 中的一条真嵌入弧，并设 $\gamma \subset H_\pm$ 为 $H_\pm$ 的余核，即连接不同边界分支的那条真嵌入弧。

沿着 α 进行正霍普夫拼接所得的曲面是 $S_+ = S \cup_f H_+$，其中 $f : \alpha \times [-1,1] \to \gamma \times [-1,1]$ 是一个同胚，将一个正则邻域$\alpha \times [-1,1] \subset S$与一个正则邻域 $\gamma \times [-1,1] \subset H_+$对应起来，使得 $f(\alpha \times \{t\}) = [-1,1] \times \{p\}$)对 $\alpha \in [-1,1]$、 $p \in \gamma$成立，反之亦然（见图6）。

我们称 S_+ 是通过沿附着弧 α对 S 进行正霍普带拼接得到的。我们通常简单地说，链环 $L = \partial S_+$ 是通过对 K进行（正或负）霍普夫拼接得到的，而不提及曲面 S 和 S_+。

负霍普夫拼接 S_- 的定义类似。

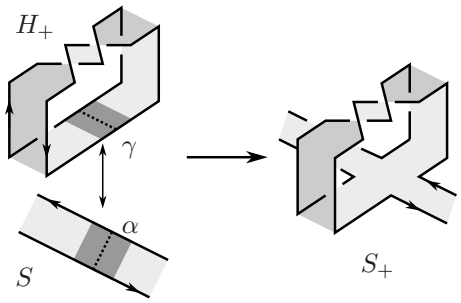


Figure 6. 霍普夫拼接

霍普夫拼接是更一般的运算——Murasugi 和——的一个特例。我们所用到的霍普夫拼接（Murasugi 和也具有）的一个关键性质如下。

定理 3.2. [St, Ga] 设 $S_\pm$ 是由 S 经过正或负霍普夫拼接得到的曲面。 $S_\pm$ 是纤维曲面（即它是纤维化链环 $\partial S_\pm$的一个纤维），当且仅当 S 是纤维曲面。

设 K 是一个扣结数为二的二属纤维化纽结， D 是它的扣结圆盘。正如引言中所提到的，从扣结圆盘 D 得到的 $K = K_{\gamma_1}$的二属塞弗特曲面$S_D = S_{\gamma_1,\ \gamma_2}$，是由 $S_{o,\ o}$ 的塞弗特曲面 $K_{o,\ o}$ 经过霍普夫拼接得到的（再次参见图 1）。由定理 3.2 可得以下关键观察。

引理 3.3. 设 K 是扣结数为二的二属纤维化纽结， D 是其扣结圆盘。那么$K_{o,\ o}$ 要么是一属纤维结，要么是零属三分支纤维链环。由扣结圆盘 D 得到的塞弗特曲面$S_{o,\ o}$ 是其纤维曲面，而纽结 K 是由$S_{o,\ o}$ 同时拼接两个霍普夫带得到的。

众所周知，一属纤维结要么是（正或负）三叶结，要么是八字结。同样，零属三分支纤维链环已在 [Ro]中完成分类。

定理 3.4（零属三分支纤维链环的分类 [Ro]）。设 L是一个零亏格的三分支纤维化链环。那么 L 要么是

（A）两个霍普夫链环的连通和 $H_{\pm}\#H_{\pm}$。（B）椒形链环 $P(2, 2n, -2)$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$（见图7（i））。（C）图7（ii）中的例外链环 L^{ex}，或其镜像。

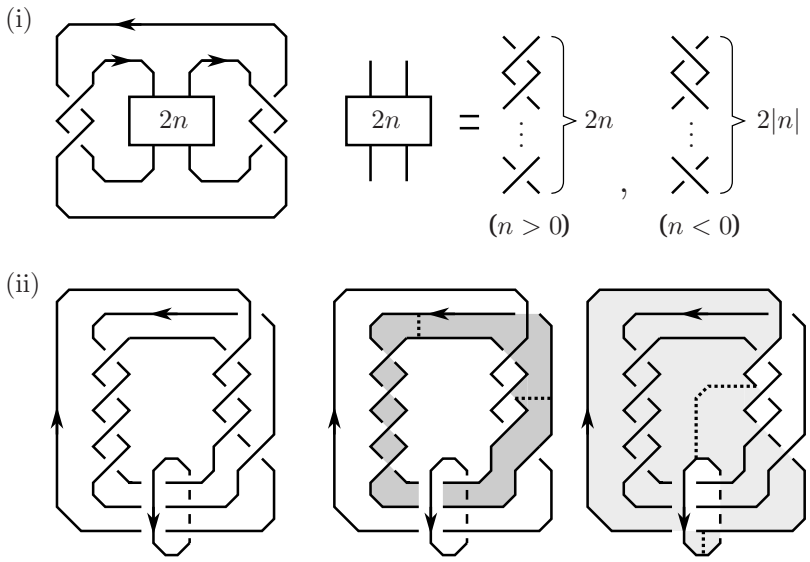


FIGURE 7. (i) 椒形链环 $P(-2, 2n, 2)$。(ii) 例外链环 L^{ex}及其纤维曲面（图示为两个环带的并），以及其三种可能的附着弧。

这里，椒形链环 $P(2, 2n, -2)$ 指的是图7 (i) 所示的定向链环。特别地， $P(-2, 0, 2) = H_+\#H_-$。

由于我们的结果基于这一分类定理，为方便读者查阅并使内容完整，我们在附录A中附上了定理 3.4 的证明。

定理 1.1 的证明。由引理 3.3，纽结 K 是通过沿不相交的附着弧拼接两条霍普带得到的。

由于霍普夫拼接的结果是一个纽结，因此每条粘接弧都必须连接 $K_{o,o} = \partial S_{o,o}$ 的两个不同分支。对三孔球面而言，除同痕外，这样的弧只有三条（见图7和图 8）。此外，两条粘接弧不能彼此平行，否则拼接所得将是一个链环。

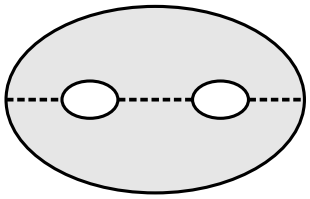


FIGURE 8. 三孔球面上霍普夫拼接的粘接弧

这意味着，定理 3.4 中的每个链环 $K_{o,o}$ 至多能产生 $2^2 \times \binom{3}{2} = 12$（= （霍普夫带符号的选择） × （粘接弧的选择））个亏格二、扣结数为二的纤维化纽结。

接下来需要确定对定理 3.4 中的零属三分支纤维化链环 $K_{o,o}$ 进行霍普夫拼接后得到的纽结。通过取镜像，我们可以假设 $K_{o,o}$ 是 $H_+\#H_+$、$P(2, 2n, -2)$ 或 L^{ex}。

对于 $H_+\#H_+$ 或 $P(2, 2n, -2)$ 的情况，使用有理缠结和 Montesinos 纽结来表述结果会更方便。关于有理缠结和 Montesions 结的约定和记号，请参见附录 B。若在椒盐纽结的 $2m$ 扭转带部分（即有理缠结 $\frac{1}{2m}$）上附加一个正或负霍普带，则会得到一个有理缠结

$$Q\left(\frac{1}{2m \pm \frac{1}{2}}\right) = Q\left(\frac{2}{4m \pm 1}\right)$$

因此，对于 $K_{o,o} = K_{o,o} = H_+\#H_+ = P(-2, 0, -2) = K(-\frac{1}{2}, \infty, -\frac{1}{2})$ 的情况，拼接会产生以下纽结之一。

- $K(-\frac{2}{3}, \infty, -\frac{2}{3})$ =两个正三叶结的连通和，
- $K(-\frac{2}{3}, \infty, -\frac{2}{5})$ =正三叶结与八字结的连通和。
- $K(-\frac{2}{3}, \infty, -\frac{2}{5})$ =两个八字结的连通和。
- $K(-\frac{2}{3}, \pm 2, {}_{1}{}_{2})$ $= 6_2, 6_3$
- $K(-\frac{2}{5}, \pm 2, {}_{1}{}_{2})$ $= 7_7, \overline{7_6}$
- $K(-\frac{1}{2}, \pm 2, {}_{2}{}_{3})$ $= \overline{6_2}, \overline{6_3}$
- $K(-\frac{1}{2}, \pm 2, {}_{2}{}_{5})$ $= \overline{7_7}, 7_6$

其中，$\overline{K}$ 表示 K的镜像。

同样，对于情形 $K_{o,o} = P(2, 2n, -2)$，拼接会产生以下纽结之一。

- $K({}_{1}{}_{2}, \frac{2}{4n \pm 1}, -\frac{2}{3})$
- $K({}_{1}{}_{2}, \frac{2}{4n \pm 1}, -\frac{2}{5})$
- $K({}_{2}{}_{3}, \frac{1}{2n}, -\frac{2}{3})$

- $K(2_1\#3, \frac{1}{2n}, -\frac{2}{5})$
- $K(2_1\#5, \frac{1}{2n}, -\frac{2}{3})$
- $K(2_1\#5, \frac{1}{2n}, -\frac{2}{5})$
- $K(2_1\#3, \frac{2}{4n\pm1}, -\frac{1}{2})$
- $K(2_1\#5, \frac{2}{4n\pm1}, -\frac{1}{2})$

最后，对于 $K_{o,\ o}$ 为例外链环 L^{ex} 的情况，我们得到图2中的纽结 $K^{\mathsf{ex}}_{i;\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}(i = 1,2,3)$。□

AppendixA. Classification of three component, genus zero fiberedlinks in S^3

我们给出定理 3.4 的证明。这里给出的证明与 [Ro], 中的证明几乎完全相同，区别在于我们使用基本群来确定可能的单值化，这大大简化了证明。

为进行分类，使用开书的术语会比较方便。开书 (S, ϕ) 是由一个带非空边界的定向紧曲面 S 和其映射类群 $MCG(S)$ 中的一个元素 ϕ 组成的二元组。

Let

$$M_\phi = S \times [0,1]/(x,1) \sim (\phi(x), 0)$$

是 ϕ 的映射环面。严格来说， M_ϕ 定义中的 ϕ 应理解为代表 ϕ 的一个同胚。下文中，为方便起见，我们不区分映射类群中的元素 ϕ 与代表 ϕ 的同胚。

令 $M_{(S,\phi)}$ 为由下式给出的定向闭三维流形

$$M_{(S,\phi)} = M_\phi \cup \left(\bigsqcup_{\#\partial S} S^1 \times D^2 \right).$$

这里，$\#\partial S$ 是 ∂S 的连通分支数；每个实心环面 $S^1 \times D^2$ 都连接到映射环面 M_ϕ 的一个边界上，使得对于所有 $p \in \partial S$， $\{p\} \times S^1 \subset \partial M_\phi$ 都围成附接的实心环面 $S^1 \times D^2$ 中的一个圆盘。若 $M = M_{(S,\phi)}$, 则称 (S, ϕ) 是三维流形 M 的开书分解。

我们将 S 的边界记为 C_1、C_2 和 C_3, 并将沿着 C_i 的右手德恩扭转记为 $T_i(i = 1,2,3)$ （见图 9 ）。 S 的映射类群是一个由 T_1、 T_2、 T_3 生成的秩为三的自由阿贝尔群，因此我们令 $\phi = T_1^a T_2^b T_3^c (a, b, c \in \mathbb{Z})$。

由于 C_1、C_2、C_3 的作用是可互换的，以下设$|a| \le |b| \le |c|$。

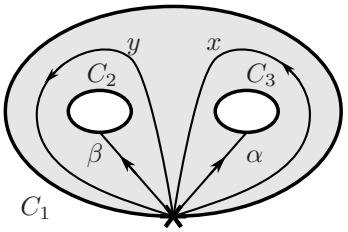


Figure 9. 三孔球面 S

由于 S^3 的开书分解对应于 S^3中的纤维化链环，我们首先对三维球面的开书分解（S，ϕ）进行分类，其中页面 S 是具有三个边界的零亏格曲面。

命题 A.1。假设 $|a| \le |b| \le |c|$。则 $\pi_1(M_{(S,(S,T_1^aT_2^bT_3^c))}) = \{1\}$ 当且仅当

$$(a,b,c) \in \left\{ \begin{array}{l} (0,-1,-1),(0,-1,1),(0,1,-1),(0,1,1) \\ (-1,1,n),(1,-1,n) \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ (-1,2,3),(1,-2,-3) \end{array} \right\}$$

证明。我们取 C_1 上的基点 $*$，以及如图 9 (b) 所示的环路 x、y 和弧 α、β。根据范坎彭定理

$$\pi_1(M_{(S,T_1^aT_2^bT_3^c)}) = \langle x, y \mid \overline{\alpha} \cdot \phi(\alpha), \overline{\beta} \cdot \phi(\beta) \rangle$$

这里，$\cdot$ 表示路径的连接，而 $\overline{\alpha}$、$\overline{\beta}$ 分别是 α 和 β 的逆路径。因此

$$\pi_1(M_{(S,T_1^aT_2^bT_3^c)}) = \langle x, y \mid (xy)^a x^b = 1, (xy)^a y^c = 1 \rangle$$

代入 $z = (xy)^{-1}$，得到

$$\pi_1(M_{(S,T_1^aT_2^bT_3^c)}) = \langle x, y, z \mid z^a = x^b = y^c, xyz = 1 \rangle$$

因此 $\pi_1(M_{(S,T_1^aT_2^bT_3^c)})$ 映射满射到三角群

$$\Delta_{a,b,c} = \langle x, y, z \mid z^a = x^b = y^c = 1, xyz = 1 \rangle.$$

当 $|a|, |b|, |c| > 1$ 时，三角群 $\Delta_{a,b,c}$ 非平凡，因此得到 $|a| \le 1$。若 $a = 0$，

$$\pi_1(M_{(S,T_2^bT_3^c)}) = \langle x, y \mid x^b = 1, y^c = 1 \rangle$$

因此，当且仅当 $|b| = |c| =$ 时，它是平凡的 1.

若 $a = -1$，则

$$\pi_1(M_{(S,T_1^{-1}T_2^bT_3^c)}) = \langle x, y \mid y^{-1}x^{b-1} = 1, x^{-1}y^{c-1} = 1 \rangle = \langle x \mid x^{bc-b-c} = 1 \rangle.$$

因此，$\pi_1(M_{(S,T_1^{-1}T_2^bT_3^c)})$ 当且仅当 $bc - b - c = \pm 1$ 时是平凡的。由于我们假设 $|a| \le |b| \le |c|$，可得 $(b, c) = (1, n)$ 或 $(2, 3)$。

$a = 1$ 的情形类似。 □

接下来需要指定一个与命题 A.1 中开书相对应的纤维化链环。为了明确构造一个纤维化链环，我们采用 Stallings 扭转 [St] 的稍一般形式，遵循 Harer [Ha]。

定义 A.2（Stallings 扭转）。设 $S \subset S^3$ 是 S^3 中纤维化链环 L 的纤维曲面，其单值化为 ϕ。假设 F 上存在一条本质简单闭曲线，且该曲线在 S^3 中是平凡纽结。设 c 的框架数 f 由纤维曲面 S 给定（即 c 与沿 S 的法向对其作平行推移所得曲线之间的链接数）。假设 $f + \delta_1 = \delta_2$，其中 δ_1、$\delta_2 \in \{\pm 1\}$。那么，沿 c 进行 δ_2 德恩手术会得到一个单值化为 $\phi T_c^{\delta_1}$ 的纤维化链环。我们称此操作为沿 c 的 Stallings 扭转。

当 $f = 0$ 时，我们可以不进行 $\delta_2 = \pm 1$ 手术，而是施行 $\frac{1}{n}$ 手术，得到单值化为 ϕT_c^{-n} 的纤维化链环。这可以理解为沿纤维曲面上的同一条曲线 c 反复进行 Stallings 扭转，因为框架数 $f = 0$ 意味着

经过 Stallings 扭转后，曲线 c 相对于新的纤维曲面仍具有零框架。

定理 3.4 的证明。在下文中，我们将在适当地编号其边界分支后，给出一个具有命题 A.1 中单值化的纤维化链环。

(i) $T_2^{\pm 1}T_3^{\pm 1}$

这是正或负霍普夫链环 $H_\pm \# H_\pm$ 的连通和的单值化。

(ii) $T_1T_2^{-1}T_3^n$

这是通过沿图 10 (i) 中描绘的曲线 c，对纤维曲面 S of$H_+\#H_- = P(2, 0, -2)$ 施加 Stallings 扭转获得的，即对 c 施加 $\frac{1}{n}$ 手术。所得结果是椒形链环 $P(2, -2n, -2)$,

(iii) $T_1^{-1}T_2^2T_3^3$

这是沿着图 10 (ii) 中描绘的曲线 c，对$P(2, -6, -2)$的纤维曲面 S 施行 Stallings 扭转所得。结果是例外链环 L^{ex}。

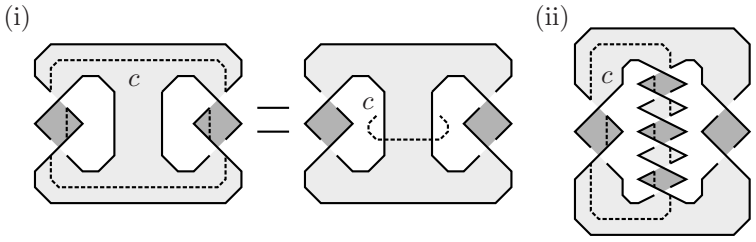


FIGURE 10.(i) 沿着$H_+\#H_- = P(2, 0, -2)$的一个纤维上的曲线 c 施行 Stallings 扭转。(ii) 产生例外链环 L_*的 Stallings 扭转。

尽管在最后一种情形下绘制 Stallings 扭转的结果颇为繁琐，但只要给出 L^{ex} 的图示，就有几种方法可以验证这一点。通过计算 HOMFLY 多项式，我们可以轻易验证 L^{ex} 不等于 $P(2, 2n, -2)$ 或 $H_\pm \# H_\pm$。因此，根据命题 A.1，要确认 Stallings 扭转的结果与 L^{ex} （或其镜像）相同，只需验证链环 L^{ex} 确实是一个零亏格纤维化链环。这一点可以通过多种方法验证。

其余情形可通过取镜像得到。

□

APPENDIX B. RATIONAL TANGLE AND MONTESINOS KNOT

我们回顾有理缠结和蒙特西诺纽结的定义，以概述本文采用的记号和约定。详情请参阅 [BZ，第 12] 节。

对于整数 n，我们定义缠结 $[n]$、$[\frac{1}{n}]$ 和 $[\infty] = [\frac{1}{0}]$，如图11 (i) 所示。缠结和 $A + B$ 是通过连接 n 的东北端点

与 B 的西北端点，以及 A 的东南端点与 B 的西南端点而得到的缠结。类似地，缠结乘积 $A*B$ 是通过连接 A 的西南端点与 B 的西北端点，以及 A 的东南端点与 B 的西北端点而得到的缠结。缠结 A 的闭包是通过连接其东北端点与西北端点、东南端点与西南端点而得到的链环（见图 1 1 (ii)）。

对于有理数 $\frac{p}{q}$，取其连分数表达式

$$\frac{p}{q} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_{n-2} + \cdots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}$$

有理缠结 $Q(\frac{p}{q})$ 是由下式给出的缠结

$$Q\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} \left(\cdots\left(\left(\left([a_1] * \left[\frac{1}{a_2}\right]\right) + [a_3]\right) * \cdots\right) * \left[\frac{1}{a_{n-1}}\right]\right) + [a_n] & (n : \text{odd}) \\ \left(\cdots\left(\left(\left[\frac{1}{a_1}\right] + [a_2]\right) * \left[\frac{1}{a_3}\right]\right) + \cdots\right) * \left[\frac{1}{a_{n-1}}\right]\right) + [a_n] & (n : \text{even}) \end{cases}$$

（见图11 (iii)）。

缠结 $Q(\frac{p}{q})$ 的同痕类不依赖于连分数的选取。

定义 B.1（（长度为三的）Montesinos 结）。（长度为三的）Montesinos 结 $K(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3})$ 是缠结 $Q(\frac{p_1}{q_1}) + Q(\frac{p_2}{q_2}) + Q(\frac{p_3}{q_3})$ 的闭包。

对于 $\{1, 2, 3\}$ 的每个置换 σ，

$$K\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}\right) = K\left(\frac{p_{\sigma(1)}}{q_{\sigma(1)}}, \frac{p_{\sigma(2)}}{q_{\sigma(2)}}, \frac{p_{\sigma(3)}}{q_{\sigma(3)}}\right).$$

此外，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$。

$$K\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}\right) = K\left(\frac{p_1}{q_1} + n, \frac{p_2}{q_2} - n, \frac{p_3}{q_3}\right).$$

已知 $K(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}) = K(\frac{p_1'}{q_1'}, \frac{p_2'}{q_2'}, \frac{p_3'}{q_3'})$ 当且仅当它们通过 y 这两种操作相关。也就是说，

$$\left\{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}\right\} = \left\{\frac{p_1'}{q_1'}, \frac{p_2'}{q_2'}, \frac{p_3'}{q_3'}\right\} \pmod 1 \text{ and } \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1'}{q_1'} + \frac{p_2'}{q_2'} + \frac{p_3'}{q_3'}.$$

References

[BZ] G. Burde 和 H. Zieschang, *Knots*. 第二版。De Gruyter 数学研究丛书，第 5 卷，Walter d e Gruyter & Co.，柏林，2003年。xii+559 页。

[Ga] D .Gabai, 《低维拓扑》（旧金山，加利福尼亚州，1981年），131–143。《当代数学》，第20卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1983年。

[Ha] J. Harer, *How to construct all fibered knots and links.* 《拓扑学》21 (1982年), 第3期, 263–280. [It1] T. Ito, *An obstruction of Gordian distance one and cosmetic crossings for genus one knots.* 《纽约数学杂志》28 (2022年), 175–181. [It2] T.Ito, *Genus non-increasing totally positive unknotting number.* 《东北数学杂志》即将出版. [KK] *An infinite family of prime knots with a certain property for the clasp number.* 23 2014 13, 1450071, 14 T. Kadokami, K. Kawamura,《纽结理论及其分支》（），第 期，页码。

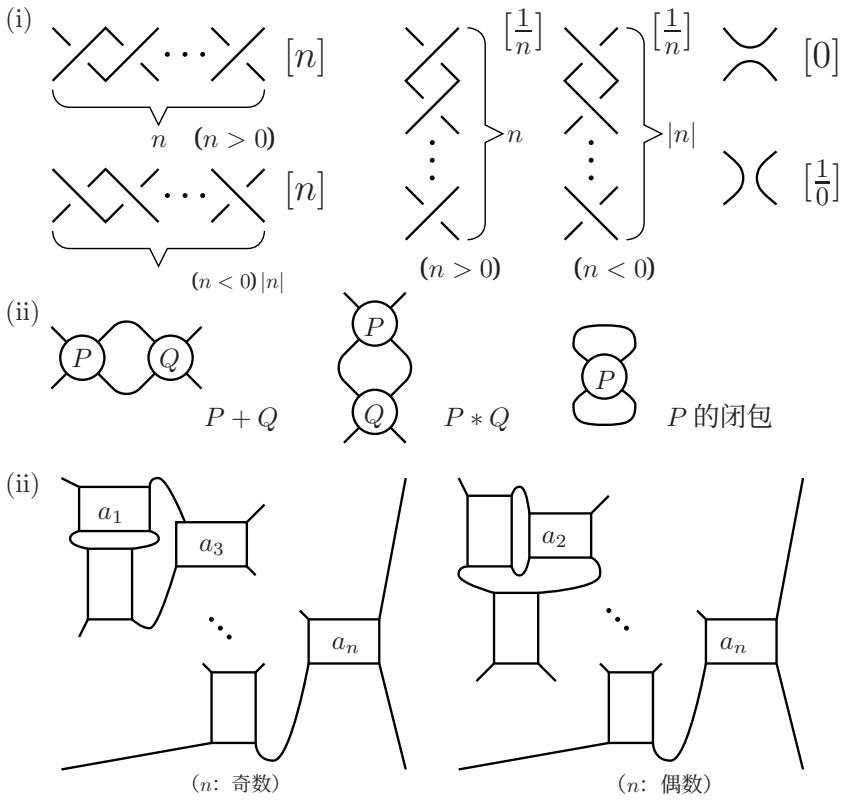


FIGURE 11. 有理缠结。(i) 缠结的定义 $[n]$, $[\frac{1}{n}]$,o, $[\infty]=[\frac{1}{0}]$。(ii) 缠结 $P+Q$, $P*Q$ 以及 P的闭包。(iii) 有理缠结 $Q(\frac{p}{q})$

[ ] 2505 13168 KP M. Kegel, L. Piccirillo, [ ] *Minimal genus Seifert surfaces for unknotting number 1 knots.* *Knots that share four surgeries*. arXiv. Ko T. Kobayashi, 神户数学杂志 6 (1989), 第1期, 53–62. [Pr] J. Przytycki, *The first coefficient of Homflypt and Kauffman polynomials. Perhaps proof of polynomial complexity using dynamic programming.* 《纽结》、链环、空间图与代数不变量, 1–6. 《当代数学》, 689. 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2017[Ro] C. Rogers, *The genus zero, 3-component fibered links in S^3*. arXiv:2006.01341v1. [St] J. Stallings, *Constructions of fibred knots and links*. 代数与几何拓扑（《代数与几何拓扑》（斯坦福大学，斯坦福，加利福尼亚州，1976年）专题讨论会论文集），第2部分，第55–60页，《纯数学专题讨论会论文集》, XXXII，美国数学会，普罗维登斯，RI，1978年[ST] M. Scharlemann, 和 A. Thompson, *Link genus and the Conway moves*. 《赫尔维蒂数学评论》64 (1989), 第4期, 527–535. [Ta 1] *A characterization of the Γ-polynomials of knots with clasp number at most* H. Takioka, 《纽结 *two*. 26 2017 4, 1750013, 27 理论及其分支》（），第 期，页码。[Ta2] H. Takioka, *Classification of Abe-Tange's ribbon knots*. 《拓扑学及其应用》264 (2019), 27–50.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO 606-8502, JAPAN
Email address: tetitoh@math.kyoto-u.ac.jp