arXiv:2602.11657v1 [math.MG] 12 Feb 2026

图的度量测地线覆盖

Jerry Chen、Kyle Hess 和 Matthew Romney

摘要。我们研究这样一个问题：对于给定的一维拓扑空间 X，如何在某种度量下用测地线以最少的数量覆盖X 。这类集合的最小基数称为 X的度量测地线覆盖数 。我们证明了一些约化方法，使我们能够借助计算机辅助求得图的最优测地覆盖，并利用这些结果确定若干标准图的覆盖数，包括 K_4、 K_5 和 $K_{3,\ 3}$。我们还给出了覆盖数为 3 的拓扑空间分类目录，并据此推导出任何此类空间都必定是平面的。

1. 引言

测地线 是长度最短的曲线，也是度量几何中的基本对象之一。本文探讨以下自然问题：给定一个一维拓扑空间（例如拓扑图），如何在某种度量下用数量最少的测地线覆盖该空间。我们给出以下定义。

定义 1.1。 设 X 为一个拓扑空间。 X 的度量测地线覆盖数 是满足以下条件的最小 $n \in \mathbb{N}$：存在一个定义在 X 上的度量，该度量诱导相同的拓扑，并且在此度量下， X 是 n 条测地线在 X中的并集。

我们还给出下面的变体。

定义 1.2。 设 X 为一个拓扑空间。 X 的扩展度量测地线覆盖数 是满足以下条件的最小 $n \in \mathbb{N}$ ： 存在一个包含 X 的拓扑空间 Y ，以及定义在 Y 上的一个度量，该度量诱导相同的拓扑，并且在此度量下， X 是 n 条测地线在 Y中的并集。

第二个定义的优点是，它随集合包含关系单调变化：如果 $X_1 \subset X_2$，那么 X_1 的扩展度量测地线覆盖数不大于 X_2 的扩展度量测地线覆盖数。然而，扩展度量测地线覆盖数更难计算，而我们在这方面取得的进展也十分有限。

据我们所知，尽管图论中已经广泛研究了各种类似的概念，但此前尚未研究过这些定义。我们的定义与图的边测地线覆盖数 最为相似。其定义方式类似，但有三个关键区别：

1. 对于边测地线覆盖数，测地线只能以图顶点为起点和终点。我们的定义没有这一要求。2. 对于边测地线覆盖数，每条边的长度都隐含地设为 1。根据我们的定义，每条边都可以赋予任意正长度。3. 我们的定义不要求该空间是拓扑图。例如，考虑由两条测地线组成、且它们在一个康托尔集上相交的度量空间。

由于这些差异，度量测地线覆盖数与边测地线覆盖数在性质上有着本质区别。我们在术语中使用“度量”一词，主要是为了将我们的定义与文献中的其他定义区分开来。为简洁起见，本文通常只称空间的“覆盖数”和“扩展覆盖数”。

其他相关概念包括图的顶点测地线覆盖数，在文献中通常简称为测地覆盖数或等距路径数。其定义与边测地线覆盖数类似，但只要求覆盖顶点。关于这些主题的一些研究成果，参见 Manuel–Klavzar–Prabha–Arokiaraj [12] 和 Chakraborty–Foucaud–Hakanen [3]；综述可参见 Manuel [10] 。需要注意的是，尽管这一概念的两个版本都见于文献，但顶点版本似乎更为常见。关于顶点版本，具体可参见 Fisher–Fitzpatrick [7], Pan–Chang [13] 和 Manuel [11] 。

2020数学主题分类。05C12,05C10。关键词和短语。测地覆盖、等距路径覆盖、度量图、度量嵌入。M. Romney 和 J. Chen 的研究部分得到了美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-2413156。

顶点测地线覆盖数。另一个相关概念是图的测地数，由 Harary–Loukakis–Tsouros 于 [8] 年引入。测地数是集合 S 的最小大小，其中集合内的顶点使得任意其他顶点都位于 S 中两个顶点之间的一条测地线上。关于这一主题的综述，参见 Brešar–Kovše–Tepeh [1] 。最后，我们的工作与 Schnyder 研究的图的序维数有一定相似之处[14]。

我们还提及由 Cizma–Linial 在 [5]中引入、并在[4]中进一步研究的可度量化图这一概念。可度量化图的定义是：对任意所谓的一致路径族，都存在一种长度度量，使集合中的每条路径都是一条测地线。他们的研究旨在探讨与本文相同的核心问题：对于给定的路径族，确定一个空间是否存在某种度量，使这些路径成为测地线。然而，他们的结果与本文的结果似乎没有直接对应关系。特别是， [5] 中的一个结论是，可度量化图相当罕见。另一方面，每个有限图必然都存在一个大小最小的测地覆盖。

本文有三个主要目标。首先，充分发展度量测地覆盖的基础理论，使其能够用于计算给定图的覆盖数，至少在计算时间充足的情况下如此。我们在这一方向上的主要结果是下面的定理，它保证任意图都有一种特定类型的最优测地覆盖。相关术语见第3节。

定理 1.3。 令 X 为一个有限拓扑图。那么存在一个规模最小的缩回测地覆盖，其端点是 X的二次细分的图顶点。

第二个目标是利用定理 1.3 通过计算机辅助，实际求出若干示例图的最优覆盖。虽然我们的计算能力仅限于顶点较少的图，但这些结果仍能为该主题积累一批基准硬数据，从而为今后的研究提供指引。

第三个目标是，在命题 5.2 中给出测地覆盖数为三的空间的完整分类目录。这似乎是能够具有相对简单结构的最大数值。尽管我们的分类目录包含若干个别情形，但它导出了以下推论。

定理1.4。 如果 X 的覆盖数不超过 3，那么 X 是平面图。

特别地，任何非平面图的扩展覆盖数至少为 4。命题5.2 还将使我们能够在命题 K_4 中确定6.1的扩展覆盖数。

本项目部分受到近期一篇论文的启发 [9]，该论文研究所谓的度量多边形。一个度量多边形是一个度量空间，可表示为有限多个集合的并；每个集合都与一个闭区间等距，并按循环方式连接。已有研究证明，任何度量三角形都可以通过畸变一致有界的双利普希茨映射嵌入平面。在 [9]中，这一问题被提出为问题 1.5：任何度量四边形是否都能通过双利普希茨映射嵌入平面？本文证明，尽管两个基本的非平面图 K_5（五个顶点的完全图）和$K_{3,\,3}$ （“三公用事业图”）的覆盖数均为4，但它们仍无法表示为度量四边形。详见下文第6.1 节。这为 [9]中的问题 1.5 存在肯定答案提供了证据。

最后，我们提出两个留待未来研究的问题。对于大型图，计算确定一个图的精确覆盖数可能难以实现，因此，找到有用的上界或下界或许就足够了。证明覆盖数或扩展覆盖数的上界在概念上较为简单，只需构造一个高效的测地覆盖。另一方面，寻找下界的技术似乎要困难得多。

问题 1.5。 是否存在广泛适用的方法，可以求出空间的覆盖数和扩展覆盖数的下界?

其次，目前我们还没有计算图的扩展覆盖数的一般方法。若以下问题得到肯定回答，就能提供这样一种技术；该问题询问是否存在定理 1.3 的类似结论。

问题 1.6。 是否存在一个通用过程，能够针对给定的有限图 X构造一个更大的有限图 Y，使得 X 的一个最优扩展测地覆盖必然作为子图出现在 Y 中?

理想情况下， Y 应尽可能简单。例如，我们能否假设 Y 是以 X的二次细分的顶点为顶点集的完全图？请注意， X 的最小规模扩展测地覆盖可能

比空间 X 本身复杂得多。例如，下面例3.4 中描述的毛虫图可以由3 条测地线覆盖2 ，这些测地线构成图 2b 所示的锯齿形构型，且锯齿数可以任意多。我们注意到，本文讨论的所有单个图的覆盖数都很小，因此可以通过计算或特设论证来处理，例如利用平面性。

本文结构如下。第2节介绍本文所需的度量空间和拓扑图预备知识。第3 节给出一些简单的命题和例子，以说明覆盖数和扩展覆盖数的主要特征。第4节探讨确定图的覆盖数的技巧，其中包括定理1.3的证明。第5 节研究覆盖数为3的空间，并以定理1.4的证明收尾。第6 节介绍我们对若干值得关注的图进行计算机辅助分析所得的结果。最后，本文包含两个附录：第一个附录详述了我们用于寻找最优测地覆盖的算法的计算机实现，第二个附录则包含了命题5.2证明中所用的分类讨论。

致谢。作者感谢 Anton Lukyanenko，以及乔治·梅森大学的梅森实验几何实验室。作者最初在那里相识，并着手开展本文的主要研究工作。

2. 预备知识

本节回顾一些基本概念，并统一本文所用的术语。关于度量几何的更多一般性背景知识，我们推荐阅读 Bridson–Haefliger 的专著 [2]。

本文中，我们始终假设所有拓扑空间都是豪斯多夫的：对于空间中的任意两个不同的点x 和 y ，存在分别包含 x和 y且互不相交的开集。给定一个拓扑空间 X， X 上的**度量**是一个连续函数 d: $X \times X \to [0, \infty)$，并满足以下性质，其中 $x, y, z \in X$均成立：

(i) 正定性： $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；(ii) 对称性： $d(x, y) = d(y, x)$；(iii) 三角不等式： $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

尽管一个空间可以赋予多种度量，我们主要关注长度度量这一类。下面回顾相关术语。 X 中的一条路径是一个连续函数 $\gamma\colon [a, b] \to X$ ，其中 $a < b$。路径 γ 的长度为

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)), \tag{1}$$

上确界取遍所有有限划分 $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$。度量 d 是一个**长度度量**，如果

$$d(x, y) = \inf \ell(\Gamma), \tag{2}$$

下确界取遍所有连接 x 和 y的路径 γ 。虽然定义 1.1 和 1.2 并未规定度量必须是长度度量，但不失一般性，我们可以假设情况如此。为此，注意到若 d 是 X 上的一个度量，其中 X 是有限条测地线的并，且 X 是连通的，那么 X 中的任意一对点都可由一条有限长度的路径连接。因此，度量 d通过定义 $d(x, y) = \inf \ell(\gamma)$，诱导出一个长度¯ ¯度量 d；其中下确界取遍如 (2) 中连接 x 和 y 的所有路径 γ。容易看出，原度量中的任意测地线在诱导长度度量_ _d中仍是测地线。若 X 不连通，则允许 d 在某些取值处取值 ∞ ，也能得到相同结论。

本文考虑的空间主要是拓扑图。（拓扑）图是一个二元组$G = (V, E)$，其中 V是顶点（即点）的集合，E 是边的集合（即端点为顶点的闭区间）。我们考虑的所有图都是无向的。我们将 G视为由边集构成的拓扑空间。更准确地说， G 是将代表同一顶点的端点识别后，由边组成的集合所给出的商空间。我们不假设图是简单图；也就是说，一对顶点之间可以有多条边。我们也允许图中存在环（端点为同一顶点的边）。我们不假设图是连通的。



(a) 偶数个叶子　　(b) 奇数个叶子

图 1. n-星形图的测地覆盖。

顶点的度（或价）是该顶点作为边的端点出现的次数。若图的所有顶点的度存在最大值，则该值称为图的最大度。

图上的长度度量可以通过简单地为每条边 I指定一个长度或权重 ℓ_I 来确定。更准确地说，对于每条边 I，我们固定一个同胚 $\varphi_I\colon I \to [0,\ell_I]$。对于两个点 x、$y \in I$，我们定义$d_I(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$。路径长度定义如下：给定一个划分后，我们可以添加点，以确保任意两个相邻点都属于同一条边。然后，我们可以如式 (1) 中那样定义 $\ell(\gamma)$，但用 d_I（其中 I 是公共边）代替 d。接着，利用式 (2) 定义 X 上的度量 d 。

3. 首要性质与例子

本节将介绍一些基本事实和例子，以说明度量测地线覆盖数的性质。首先，我们注意到一个关于顶点度的下界。

命题 3.1. 设 Δ 为有限图 X的最大度。则 X 的扩展测地覆盖数至少为 $\lceil \Delta/2 \rceil$。特别地， n-星图$K_{1,n}$ 的测地覆盖数至少为 $\lceil n/2 \rceil$。

证明。 考虑包含 X的图 Y 中 X 的任意测地覆盖。设 v 为 X中度为 Δ的顶点，设 α 为 Y中的一条测地线，以及同胚 $f\colon [0,L] \to Y$，使得 $\mathrm{Im}(f) = \alpha$，且对某个 $r \in [0,L]$有 $f(r) = v$。由于 $[0,1] \setminus \{r\}$ 在 r附近局部至多有两个连通分支，故 $\alpha \setminus \{v\}$在 v附近也必须如此。但图 $X \setminus \{v\}$ 在 v 附近局部有 Δ 个待覆盖的连通分支。□

下文中，若一个环所连接的顶点没有其他边，则称该环为孤立的。对于下面的命题，我们回顾：并不假定一个图是连通的。

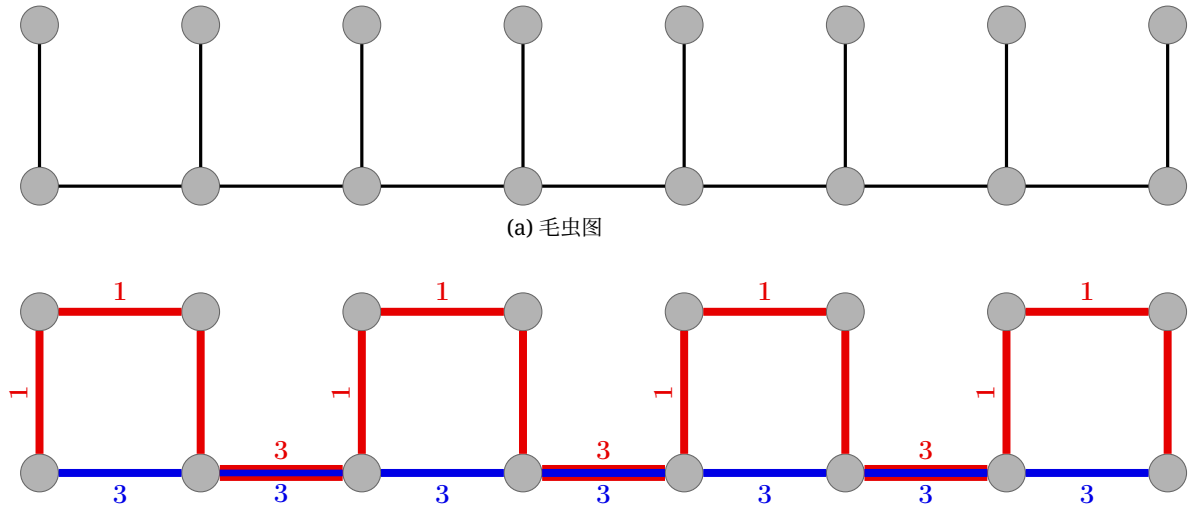
命题 3.2. 设 X 是一个包含 m 条边和 k 个孤立自环的图。则其测地覆盖数至多为 $m + k$。

证明. 将每条边的长度指定为1。在所有自环上，添加一条始于其中点、终于其所连通顶点的测地线，并用一条测地线覆盖所有其他边。对于每个没有孤立自环的顶点，固定一个从其自环到其边的单射，使得没有自环被映到自身。将此函数像中的任意一条边延拓，绕过该自环尚未被覆盖的一半。对于孤立自环，只需再添加一条覆盖另一半的边。□

前述命题是紧的；当 n为奇数时，取由单个顶点上的 n个环构成的图。下一命题考虑有 X 个度为 1 的顶点的情形。

命题 3.3. 设 X 是一个具有 n 个度为 1 的顶点的图。则 X 的测地覆盖数至少为 $\lceil n/2 \rceil$。

证明。 如果 v 是度为 1 的顶点，那么 v 的任意邻域都局部同胚于一个区间的端点。但任何测地线只有两个这样的点（位于其两个端点处），因此最多只能覆盖两个这样的顶点。□



(a) 毛虫图

(b) 扩展毛虫图

图2. 毛虫图及其最小规模的扩展测地覆盖。

特别地，如果 X 是一棵有 n 个叶子的树，那么 X 的覆盖数至少为 $\lceil n/2 \rceil$。

下面的例子表明，图的覆盖数和扩展覆盖数可能不同，而且两者之间的差距实际上可以任意大。

例3.4. 对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 X 为由以下方式构成的第 n 个毛虫图：在长度为 的简单路径图的每个顶点上附加一条额外的边 n，如图 2a所示。那么， X 的覆盖数为$\lceil (n+1)/2 \rceil$，而 X 的扩展覆盖数为 2。

首先，注意到 X有 $n+1$个叶子，因此根据命题 3.3 X，其覆盖数至少为 $\lceil (n+1)/2 \rceil$。为证明覆盖数为 $\lceil (n+1)/2 \rceil$，我们将每条边的长度设为 1。首尾两个顶点由一条测地线连接，该测地线横跨整个底层简单路径。我们用一条测地线连接其余成对的叶子，末尾可能剩下一个孤立的叶子。我们将这个叶子连接到底层简单路径上的任意一点。这组测地线恰好包含 $\lceil (n+1)/2 \rceil$ 条测地线。我们还注意到，命题 3.1 表明扩展覆盖数至少为 2。

对于上界，按顺序将底行的顶点标记为 $v_1, \ldots, v_n$，将顶行的顶点标记为 $u_1, \ldots, u_n$。如有需要，通过扩展空间，我们可以假设 n 为偶数。令 Y 为由空间 X 以及在 u_{2i-1} 和 u_{2i} 之间添加的边构成的空间，其中每个 $1 \leq i \leq n/2$ 均如图 2b 所示。现在，将 Y 主路径上的每条边的权重设为 3，其余每条边的权重设为 1。令 α 为沿底行行进的路径。令 β 为路径 β_i 的拼接；这些路径依次经过顶点 v_{2i-1}、 u_{2i-1}、 u_{2i}、 v_{2i}、 v_{2i+1}（对每个 $1 \leq i \leq k$ 而言），并在 $i = k$ 时省略从 v_{2i} 到 v_{2i+1} 的最后一条边。显然， β 是一条测地线，并且 $\{\alpha, \beta\}$ 构成 X 的一个大小为 2 的测地覆盖。

接下来，长度度量该如何选择？我们按照定义 *1.1* 定义图的无权（测地）覆盖数，但要求每条边的长度都为1。下面的例子表明，无权覆盖数可能大于覆盖数，而且两者的差距可以任意大。

例 3.5。 对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 X_n 为由 n 个锯齿图组成的链式图 n ，如图 3所示。对于所有 X_n ， n的覆盖数均为 2：给每条下边赋予权重1 ，并给每条上边赋予权重 $1/2$ 。另一方面， X_n 的无权覆盖数为 n，当 $n \geq 2$时。

为了证明下界，注意到一条测地线不可能覆盖三角形的两条上边。因此，每个三角形都必须包含两条测地线的端点。这就迫使 $2n$ 个端点，进而迫使 n 条测地线。为了证明下界，从左到右将上边标记为 u_1、……、 u_{2n}，并从左到右将下边标记为 l_1、……、 l_n。对于第一条测地线，从 u_1的中点开始，然后沿着所有下边前进，最后在 u_{2n}的中点结束。对于第二条测地线，再次从 u_1的中点开始，然后前往 u_2、 u_3，并

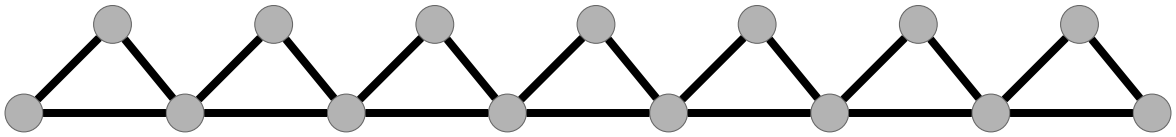


图 3. 锯齿图



(a) 原始测地覆盖　　(b) 收缩后的测地覆盖

图 4. 收缩测地覆盖。

在 u_4的中点结束。对于第 i条测地线，其中 $i \geq 3$ （在 $n \geq 3$ 的情形下），从$u_{2(i-1)}$的中点开始，然后经过 u_{2i-1}，最后在 $2i$的中点结束。

4. 计算度量测地线覆盖数的化简

定义 1.1 要求考虑该空间所有可能的测地覆盖，因此确定空间的覆盖数先验地 是一个困难问题。本节中，我们证明定理 1.3，通过说明只需考虑来自特定有限构型集的覆盖，简化了问题。对于给定的覆盖，随后只需常规地检查（可借助计算机）它能否实现为一组测地线；具体来说，需要检查一组线性约束是否具有非空可行域。

我们首先介绍一些术语。给定一个图 G， G 的二次细分是通过对每条边 (u, v) 添加一个新顶点 w，并将 (u, v) 替换为两条边 (u, w) 和 (w, v)，从而得到的图 G' 。

接下来，如果不存在一条边，其内部同时包含测地线 α 的两个端点，我们就称测地线 α 是适当的。如果图 G 的测地覆盖仅由适当的测地线组成，我们就称该测地覆盖是适当的。给定图 G 的测地覆盖 Γ ，如果存在测地线 $\alpha \in \Gamma$ 的某个端点的一个邻域，包含于 Γ 中其余测地线的并集内，我们就称测地线 $\alpha \in \Gamma$ 在 Γ 中是可收缩的。相应地，如果 Γ 不含任何可收缩的测地线，我们就称 Γ 是缩回后的。显然，通过按需缩短（或直接移除）任意可收缩的测地线，可以将任意测地覆盖 Γ 转化为缩回测地覆盖。

定理 1.3 的证明依赖于以下引理。

引理 4.1。 如果 G 具有大小为 k 的测地覆盖，那么它具有大小为 k 的适当的缩回测地覆盖。

证明。 令 Γ_0 为 G的缩回测地覆盖。我们应用以下过程，逐一将 Γ_0 中的每条非适当测地线及其相邻测地线替换为数量相同的适当测地线，使其覆盖 G的同一子集。根据一条测地线是否完全包含在其对应边的内部中，非适当测地线可分为两类。这两种情况如图 5所示。我们对第一类的所有非适当测地线应用该过程；我们将看到，第二类的任何测地线都会作为这一过程的副产品被消除。

设 Γ 是该过程中某个阶段出现的 G 的测地覆盖。设 $\alpha \in \Gamma$ 是一条非适当测地线。假设 α 完全包含在相应边 e 的内部。我们假设 e 不是环，即 e 的两个端点不同。 e 是环的情形，可用类似但更简单的论证处理。在 e 和 α 上固定相容定向；设 u 是 e 的起点， v 是其终点；设 x 是 α 的起点， y 是其终点。



(a) 一条非正常测地线
包含在单条边中

(b) 一条非正常测地线
穿过多条边

图 5。非正常测地线示例。

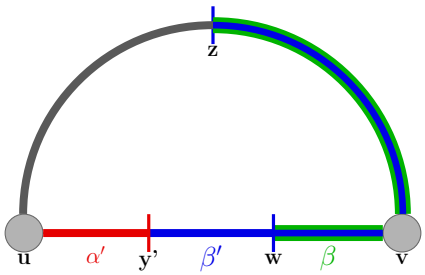


图 6。 引理4.1证明中的测地线构型

现在设 α' 是包含在 e 中、以 u 为起点的极大测地线。用 y' 表示 α' 的另一个端点。接下来，取 Γ 中任意一条包含 v 且与 e 的内部相交的测地线 β。注意， β 必须有一个端点 w 位于 e 的内部。按以下方式从 β 构造一条新路径。首先，将端点 w 延长或缩短至点 y'。接下来，如果 β 的另一个端点也位于 e 的内部，则将此端点收缩至 u。将所得路径记为 β'。构型示意见图 6。用路径 α' 和 β' 替换 α 和 β，然后按需收缩 Γ 中的其他测地线，从而构成新的路径集 Γ'。注意，这些收缩有两种：将穿过 u 且端点位于 e 中的测地线收缩回 u，或移除包含在边 e 中的任何其他非适当测地线。这些操作不会产生新的非适当测地线。注意， Γ' 仍是 G 的覆盖，且其大小与 Γ 相同；根据定义， α' 是一条测地线。此外， α' 和 β' 都是适当的。剩下只需证明 β' 是一条测地线。

若 w 位于 α' 中，则 β' 包含于 β，因而为测地线。因此我们可以假设 w 不包含于 α'。设 z 为 β' 的端点，且不在 e的内部。设 γ 为从 y' 到 z的任意路径。若 γ经过点 v，则立即可得 $\ell(\gamma) \geq \ell(\beta')$，因为 β' 从 v 到 z 的限制是一条测地线，且这两条路径在到达 v 之前重合。

现假设 γ 经过点 u。 α' 的极大性蕴含 y' 与 u 由另一条经过 v的测地线 σ 连接。设 γ' 为 σ 与 $\gamma|_{[u,z]}$的拼接；立即可知 γ 与 γ' 长度相同。但 γ' 经过 v，因此如上所述，我们有 $\ell(\gamma) = \ell(\gamma') \geq \ell(\beta')$。我们由此得出 β' 确实是一条测地线。

我们现在断言，按照这一过程，得到的覆盖 Γ 不包含第二类非适当测地线。现在考虑 G 中的一条边 $e = (u, v)$。由于 Γ 是收缩后的，若 e 完全包含在一条测地线中，则其他测地线都不能以 e 内部的点为端点。否则，存在一条经过 u 的测地线 γ_1，其端点位于 e 中且最靠近 v；还存在一条经过 v 的测地线 γ_2，其端点位于 e 中且最靠近 u。由于我们已消除包含在 e 中的所有非适当测地线，因此 γ_1 和 γ_2 合起来覆盖 e。由于 Γ 是收缩后的， γ_1 和 γ_2 必须有相同的端点，因此特别可得 $\gamma_1 \neq \gamma_2$。此外，没有其他测地线可以与 e 的内部相交。断言得证。□

我们继续证明定理 1.3。

证明。 设 Γ是 G的任意测地覆盖。由引理4.1，不妨设 Γ是适当的且为收缩后的。特别地，对于每条边 $e = (u, v)$，以下情形之一成立：（1） e 包含于某一条测地线中，并且没有其他测地线的端点位于 e的内部；或（2）存在两条测地线，它们具有

公共端点 x 位于 e的内部，其中一条测地线经过 u ，另一条经过v。在第二种情形下，我们可以将 x 视为 G 的二次细分中位于 e内部的顶点。□

5. 可由三条测地线覆盖的空间

三条测地线的情形足够简单，因此可以明确描述覆盖数为三的空间。如下文命题 5.2 所述。

简单路径 Y 上的定向 是对起点和终点的选择；一个定向在 Y 上诱导出一个序，记为 $\prec$。若从 Y 的起点走向其终点时，先遇到 x 再遇到 y，则 $x \prec y$ 。若两个定向路径 Y_1、Y_2 的相应序分别为 $\prec_1$ 和 $\prec_2$，且对于所有 x、$y \in Y_1 \cap Y_2$，$x \prec_1 y$ 当且仅当 $x \prec_2 y$，则称它们相容定向 。此时，两个序 $\prec_1$ 和 $\prec_2$ 在 $Y_1 \cup Y_2$ 上诱导出一个偏序，该偏序与 Y_1 和 Y_2 上各自的序相容。若 Y 是一条包含点 x、y 的简单路径，我们用 $Y(x$、$y)$ 表示 Y 上介于 x 和 y 之间的子路径。

作为预备，我们给出下面关于两条测地线的命题。

命题 5.1. 设 X 是一个连通拓扑空间，且是两个子集 X_1，X_2 的并，其中每个子集都与一个区间同胚。那么，X 存在一个长度度量，使得 X_1，X_2 是测地线，当且仅当 X_1，X_2 存在相容定向。

证明。 先假设 X 存在一个长度度量，使得 X_1，X_2 是测地线。若 X_1，X_2 仅交于一点，则任意定向显然相容。现在假设 X_1 与 X_2 至少交于两点。在 X_1 上选取一个定向，并令 $\prec_1$ 为相应的序。令 a 为按照此定向在 $X_1 \cap X_2$ 中的第一个点，b 为 $X_1 \cap X_2$ 中的最后一个点。通过规定 $a \prec_2 b$，我们在 X_2 上得到一个定向，其相应的序为 $\prec_2$。

假设存在点 x，$y \in X_1 \cap X_2$，使得 $x \prec_1 y$，但 $y \prec_2 x$。注意，根据 a 和 b的定义，必然有 $a \preceq_1 x \prec_1 y \preceq_1 b$。如果 $y \prec_2 a$，那么就会得到矛盾

$$d(y,b) = \ell(X_2(y,b)) > \ell(X_2(a,b)) = \ell(X_1(a,b)) > \ell(X_1(y,b)) = d(y,b).$$

由此可见，$a \preceq_2 y$。接下来我们立即得到矛盾

$$d(a,y) = \ell(X_2(a,y)) < \ell(X_2(a,x)) = \ell(X_1(a,x)) < \ell(X_1(a,y)) = d(a,y).$$

我们得出结论：任意两点 x，y满足 $x \prec_1 y$当且仅当 $x \prec_2 y$，因此 X_1，X_2具有相容定向。

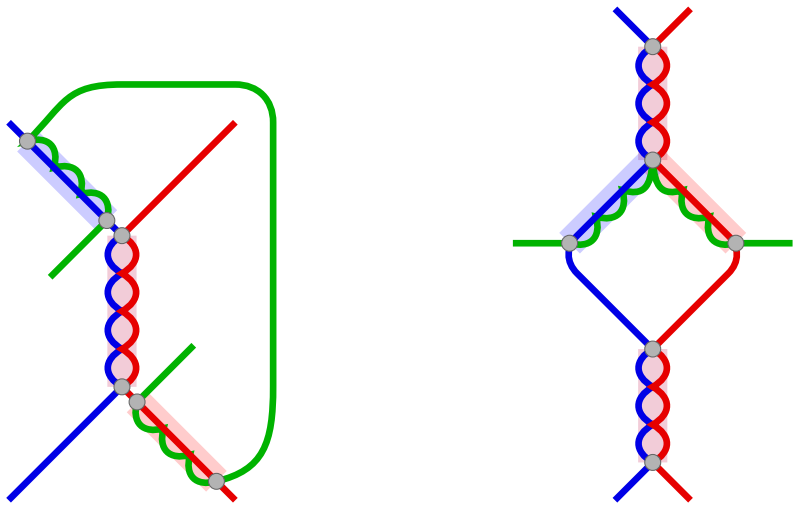
对于逆向蕴含，假设 X_1、X_2 具有相容定向 $\prec_1$、$\prec_2$。对每个 $i = 1$，2，记 X_i的端点为 a_i、b_i。如果 $X_1 \cap X_2$包含零个或一个点，那么任意长度度量都适用。因此假设 $X_1 \cap X_2$至少包含两个点。固定一个同胚 φ: $X_1 \to [0,1]$，使得 $\varphi^{-1}(0) \prec_1 \varphi^{-1}(1)$。我们将 φ 的定义扩展到整个 X，如下所示。 $X_2 \setminus X_1$ 的每个连通分支都是开区间或半开区间。设 I是一个开区间连通分支，其端点为 a、$b \in X_1 \cap X_2$。将 φ 定义在 I 上，使其为到 $[0,1]$ 中的任意嵌入，并满足 $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$ 以及 $\lim_{x \to b} \varphi(x) = \varphi(b)$。如果 I 是半闭区间，我们也类似地定义 φ，并要求 $\varphi(a_2) = 0$ 且 $\varphi(b_2) = 1$。现在令 d 为由映射 φ在 X 上诱导的长度度量。也就是说，我们将路径 γ 的长度定义为

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\gamma(t_{i-1})) - \varphi(\gamma(t_i))|, \tag{3}$$

上确界取遍 γ的定义域的所有有限划分 $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$。然后我们 $d(x,y) = \inf \ell(\gamma)$，下确界取遍从 x 到 y的所有路径 γ 。由构造立即可知，d 是 X上的长度度量。

尚需证明 X_1 与 X_2 在该度量下是测地线。注意，由构造可知 X_1 本身的长度为1。现设 γ 是从 a_1 到 b_1的任意路径。现在 $\varphi(\gamma)$是到 $[0,1]$,上的满射，由此根据(3)与三角不等式立即可得 $\ell(\gamma) \geq 1$。我们得出 $\ell(X_1) = 1 = d(a_1, b_1)$，从而 X_1 是一条测地线。

接下来，我们断言 X_2的长度为 $\varphi(b_2) - \varphi(a_2)$。令 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$为 X_2定义域的任意划分。由定向假设可知，对于所有 i，都有 $\varphi(X_2(t_{i-1})) < \varphi(X_2(t_i))$。因此，由（3）可知，$X_2$ 的长度为 $\varphi(b_2) - \varphi(a_2)$。最后，若 γ 为从 a_2 到 b_2的任意路径，则上一段中的相同论证表明，$\ell(\gamma) \geq \varphi(b_2) - \varphi(a_2)$。我们得出 $\ell(X_2) = d(a_2, b_2)$，从而 X_2 是一条测地线。□



(a) (b)

图 7. 测地线仅被限制为在所示区间内相交，并遵循所示定向。

下一个命题描述了由三条测地线构成的拓扑空间。首先，我们介绍一些术语。设 X_1, X_2 是拓扑空间 X 中的两条路径。若 U 是 $X_1 \setminus X_2$ 的一个连通分支，并且它同胚于半开区间 $[0,1)$，则称其为**端连通分支**。注意，在该同胚映射下，0 在 X_1中的像必然是 X_1的一个端点。按照约定，我们允许端连通分支为空，因此可以说它们总是存在。接下来，假设 U 是 $X_1 \setminus X_2$ 的一个连通分支，V是 $X_2 \setminus X_1$的一个连通分支，其中 X_1 和 X_2 具有相容定向。若根据 $X_1 \cup X_2$上的诱导偏序，一个集合中的每个点都大于或等于另一个集合中的每个点，则称 U和 V是**可比较** 的。

命题 5.2. 设 X 是一个连通拓扑空间，由三个子集 X_1、X_2、X_3 的并组成，且每个子集都同胚于一个区间。那么，X 存在一种长度度量，使得 X_1、X_2、X_3 都是测地线，当且仅当 X_1、X_2、X_3 可以赋予定向，使得（经过重新标记后）以下情形之一成立：

(1) X_1、X_2、X_3 上的定向在 X 上诱导出一个相容的偏序。(2) 空间 X 具有图 7 所示的两种可能的例外构型之一。(a) 每一对 X_i、X_j $(i \neq j)$ 均两两相容定向。设 U 是 $X_1 \setminus X_2$ 的最后一个端连通分支，V 是 $X_2 \setminus X_1$ 的第一个端连通分支。那么 $X_1 \cap X_3 \subset U$ 和 $X_2 \cap X_3 \subset V$。(b) X_1、X_2 这一对以及 X_1、X_3 这一对相容定向，而 X_2、X_3 这一对不相容。$X_1 \setminus X_2$ 中存在不可比较的连通分支 U，且 $X_2 \setminus X_1$ 中存在不可比较的连通分支 V；它们具有共同的末端点 e，使得 $X_1 \cap X_3 \subset U \cup \{e\}$ 和 $X_2 \cap X_3 \subset V \cup \{e\}$。

本证明的主要思路是考虑路径 X_1、X_2、X_3 所有可能的相交方式，并排除任何与成为测地线不相容的构型。由于可能的构型数量很大，该分析的主体部分推迟至附录 B。

证明。设 X 是三条路径 X_1、X_2、X_3之并所成的拓扑空间。我们首先注意到，若X_1、X_2、X_3 可被赋予在 X 上诱导偏序的定向，则 X 带有一个长度度量，使得X_1、X_2、X_3 为测地线。这可由与命题 5.1中类似的论证得出。

容易看出，若对于某些互不相同的 i、j、$k \in \{1,2,3\}$，$|X_i \cap X_j| \leq 1$和 $|X_i \cap X_k| \leq 1$，则可以为 X赋予一个相容的偏序。因此，下文假设 $|X_1 \cap X_2| \geq 2$ 和 $|X_1 \cap X_3| \geq 2$。在 X_1上选取一个定向；这会在 X_2 和 X_3 上诱导出定向。如前所述，若这三个定向与 X上的某个偏序相容，则可以为 X 赋予一个度量，使得 X_1、X_2、X_3 都是测地线。出现以下两种情况时，这一点无法成立（必要时反转 X_1 上的定向）：（1）存在点 $a \in X_1 \cap X_3$、$b \in X_1 \cap X_2$ 和 $c \in X_2 \cap X_3$，使得 $a \prec_1 b$、$b \prec_2 c$ 和 $c \prec_3 a$；（2）存在点

a、 $b \in X_2 \cap X_3$ 使得 $a \prec_3 b$ 和 $b \prec_2 a$。附录 B 中对这些情形进行了分析，排除了所有构型，只留下定理第（2）项中列出的构型。

To 完成证明时，我们证明存在一种度量，可以实现这些剩余的构型 s.

(a) 令 I_{ij}为 $X_i \cup X_j$被 $X_i \cap X_j$（图中灰点之间的区域）夹住的部分7a）。为每条 I_{ij} 赋予长度 1，分配方式与命题 5.1的证明中相同。为 X_1、 X_2、 X_3 中位于 I_{ij} 之间的每条子弧赋予长度 1。其余边的长度任意指定。(b) 与前一种情况类似地定义 I_{12}^a、 I_{12}^b、 I_{13}、 I_{23} 。为每条边赋予长度 1。为中间的边赋予长度 1，其余边的长度任意指定。

在每种情况下，都可以验证 X_1、 X_2、 X_3 在给定度量下都是测地线。 □

现在我们可以证明定理 1.4 ： 所有测地覆盖数至多为 3 的拓扑空间 X 都是平面的。证明中需要注意，仅排除图 K_5 和 $K_{3,3}$ 作为子集出现在 X中还不够。由于 X 并未假设为拓扑图，因此还有其他构型也不得作为子集出现；参见 Claytor [6]。我们的证明不直接处理这些可能性，而是直接构造所需的嵌入。

证明。 首先，我们注意到，对于两条测地线的情形，很容易找到一个平面嵌入。考虑两条相容定向且重叠的测地线 X_1 和 X_2 ，它们以弧长为参数，其中 X_1 定义在$[a_1, b_1]$ 上， X_2 定义在 $[a_2, b_2]$上，且对所有 $x \in X_1 \cap X_2$, $X_1^{-1}(x) = X_2^{-1}(x)$。然后定义映射 φ 在X_1 上，令 $\varphi(X_1(t)) = (t, \pm d(X_1(t)\ X_2))$，且 $\varphi(X_2(t)) = (t, \mp d(X_2(t)\ X_1))$；其中，在 $X_1 \setminus X_2$的每个连通分支上， $\pm$的选取保持一致，而在 $X_2 \setminus X_1$中不可比较的连通分支上， $\mp$ 的选取则取相反方向。容易看出，这是一个定义良好、连续、单射的闭映射，因此是从 $X_1 \cup X_2$ 到 $\mathbb{R}^2$的一个嵌入。

接下来，假设 X 是三条测地线 X_1、 X_2、 X_3的并。若 X 具有图 7中的某种例外构型，那么我们可以按照这些图中的表示，将 X 嵌入平面。具体而言，可以沿着图中标出的灰色顶点，将 X 分成若干连通分支。在这些顶点上定义 φ ，将它们映到平面中与图示位置相同的点上。在两条测地线的每个交集区域上，按照上一段所述，取一个嵌入的仿射像来定义 φ 。在其余线段上，将这些顶点用弧连接起来，以此定义 φ。这样可以使 φ 连续、单射且闭，因此是一个嵌入。

最后一种情形是， X_1、 X_2、 X_3 在 X上诱导出一个相容的偏序。在这种情形下，首先按照第一段所述嵌入$X_1 \cup X_2$ ，其中， $X_1 \setminus X_2$ 的每个连通分支上 $\pm$ 的选取将在本证明中确定。将 $X_3 \setminus (X_1 \cap X_2)$的连通分支依次记为 U_1、 U_2、 U_3、.....。给定 U_i，接着将 $U_i \setminus (X_1 \cup X_2)$的连通分支记为 U_i^1、 U_i^2、.....。连通分支 U_i^j有三种可能类型：(1) U_i^j 的两个端点属于 $X_1 \setminus X_2$ 或 $X_2 \setminus X_1$的同一个连通分支；(2) U_i^j 的一个端点属于 $X_1 \setminus X_2$ 的连通分支 W_1 ，另一个端点属于 $X_2 \setminus X_1$的连通分支 W_2 ，且这两个连通分支不可比较；(3) U_i^j 的两个端点属于 $X_1 \setminus X_2$ 或$X_2 \setminus X_1$ 中可比较的连通分支。我们为 $X_1 \setminus X_2$ 的每个连通分支选择 $\pm$ ，以确保对于每条类型(3)的弧，其两个端点都位于上半平面或下半平面。更准确地说，令 j_0 为使$U_i^{j_0}$属于类型(3)的最小值。任意选取与之对应的 $X_1 \setminus X_2$连通分支上的 $\pm$ 。根据这一选择，其余类型(3)的连通分支可分别记为 $U_i^{j_k}$（按 $U_i^{j_0}$递增排列）和 $U_i^{j_{-k}}$（按 $U_i^{j_0}$递减排列）。从这一初始选择出发，沿两个方向归纳地确定 $\pm$。其余 $X_1 \setminus X_2$ 连通分支的方向可任意指定。现在，我们在每个集合 U_i^j 上定义 φ ： 在情形(2)中，用连接其两个端点的直线段；否则，用一条斜率为 2 的线段和一条斜率为 -2 的线段连接端点，并使它们位于 $\varphi(X_1 \cup X_2)$的外侧。注意， X 上偏序的存在保证每条垂直线至多与一个集合 $\varphi(U_i^j)$相交，尤其是集合 $\varphi(U_i^j)$彼此不相交。因此，φ 连续、单射且闭，故是一个嵌入。□

对于覆盖数为 n 、 $n \geq 5$ 的空间，无法作出类似的描述。例如，著名的彼得森图可以由 5 条路径覆盖，且任意两条路径仅交于一个点，但它不允许任何相容的长度度量。参见 [5] 中的图1a。由此可见，一个由 5 条

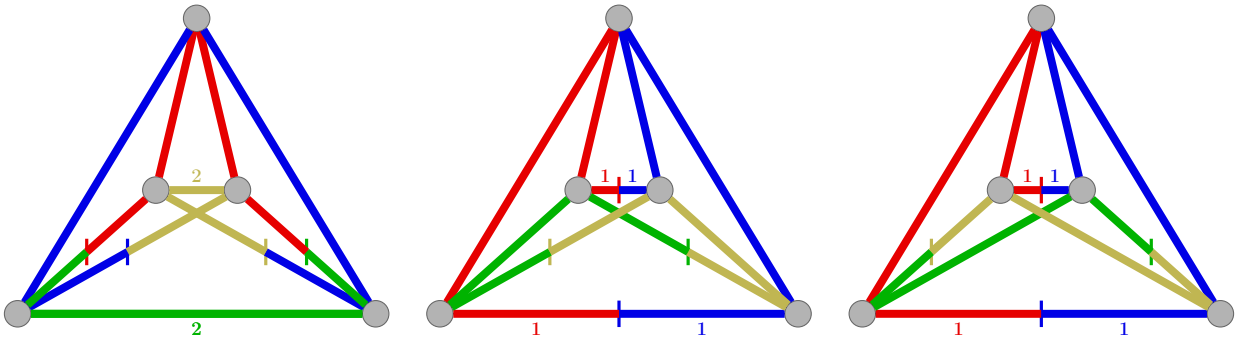


图8。 K_5的三种不同的最优测地覆盖

路径覆盖的空间是否存在相容的度量，并不能由这些路径相交的点集决定。我们不确定 $n = 4$ 这种情形是否可以用这种方式刻画。

6. 计算结果

本节中，我们展示使用附录A所述算法得到的一些值得关注的图的计算结果。

6.1. **五个顶点上的完全图** K_5 。**图** K_5 的覆盖数为 4。如图 8所示，有三种不同的缩回测地覆盖达到这一数值。由于 K_5 是非平面图，根据定理1.4，其扩展覆盖数必为 4。不难看出， K_5的无权覆盖数为 5，因为 K_5 有 10 条边，且在无权度量下直径为 2 。对于 K_5 ，所有最优测地覆盖都由如下赋权诱导：某个 K_4 子图中的边权重为 2，而连接到另一个“捷径”顶点的边权重为 1。

6.2. **四个顶点上的完全图** K_4 。 K_4 的覆盖数为4。有趣的是，这与更大的图 K_5相同。接下来我们通过直接论证证明， K_4 的扩展覆盖数也为4:

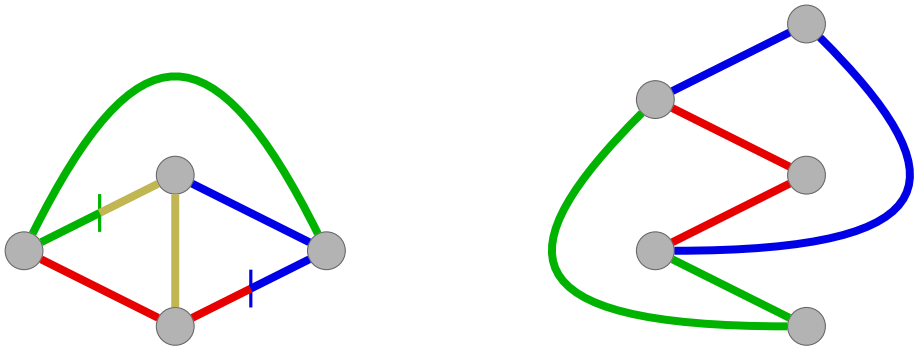
Prop命题 6.1. K_4 不会作为由 3 条测地线构成的度量空间的子集出现 s.

证明。假设存在一个空间 X ，由 3 条测地线 X_1、 X_2、 X_3 构成，且满足 $K_4 \subset X$。根据定理5.2，要么 X 具有与测地线上的一致定向相容的偏序，要么X 属于两种例外情形之一。在第一种情形中，赋予 X 这样一个序。按照命题 5.1 的证明中的过程，定义一个映射φ： $X \to \mathbb{R}$ ，使其在每条测地线上都是等距映射。注意， φ 在每条测地线 X_i上必然是单调的，因此对每个 $a \in \mathbb{R}$，原像 $\varphi^{-1}(a)$至多包含 3 个值。接下来，观察到每个顶点至少属于两条测地线。因此任意两个顶点都属于一条公共测地线，从而必须可比较。将这些顶点标记为 p_1、 p_2、 p_3、 p_4，其中$\varphi(p_1) < \varphi(p_2) < \varphi(p_3) < \varphi(p_4)$。 φ 在边(p_i, p_j)上的限制（对每一对 $i \neq j$）包含区间 $[\varphi(p_i)\ \varphi(p_j)]$。因此，对任意满足 $\varphi(p_2) < a < \varphi(p_3)$的 a ，原像 $\varphi^{-1}(a)$至少包含四个点（分别来自边(p_1, p_3)、(p_1, p_4)、(p_2, p_3)、(p_2, p_4)中的每一条）。这是一个矛盾。

在第二种情形中，我们经检查发现， K_4 并未作为子集出现在这些例外情形中的任何一种构造里。特别是， K_4 的每个顶点都必须属于三条边，每条边都通向 K_4 中的另一个不同顶点，且不穿过 K_4中的任何其他顶点。沿着每条这样的边，都可以到达 K_4 中的其他每个顶点，而无需返回 a。经检查，这些空间中不存在可以选出四个点并满足该性质的情况。□

有许多由四条测地线构成的 K_4 覆盖。在图9a中，我们给出了一个例子，其中每条图边的长度均为一。另请注意，所有测地线的长度都相等。

6.3. **完全二部图** $K_{3,\ 3}$ **由两个各含三个顶点的集合构成**。 图 $K_{3,\ 3}$ 的覆盖数为 4。除测地线重布线外，共有八种不同的缩回测地覆盖。参见图 10。



(a) 最优覆盖的 K_4，边长为单位长度

(b) 最优覆盖$K_{2,\,3}$，边长为单位长度边

图 9. 测地覆盖，适用于 K_4，$K_{2,\,3}$

6.4. **完全二部图 $K_{2,\,3}$ 其顶点集分别包含两个和三个顶点。** 图 $K_{2,\,3}$ 的覆盖数为 3。存在许多不同的最优覆盖。图 9b给出了其中一种，其中图的每条边长度均为 1。

附录A：算法与实现

在本附录中，我们将详细介绍一种用于确定图的覆盖数的算法。该算法分为两个部分。首先，我们编制一份大小不超过某个预先设定的 M 的候选覆盖列表。根据定理 1.3 ，我们可以令所有端点均为原图 2-细分图的图顶点。此步骤的核心子程序通过递归构建子覆盖，并在每一步筛除所有非缩回子覆盖。

其次，对于每个候选覆盖，我们检验它是否可以通过对线段进行某种赋权实现为测地覆盖。具体做法是将该构型表示为一个线性规划，其中权重为变量，并将覆盖中的每条路径都是最短路径这一条件表示为一组线性约束。如果找到测地覆盖，则可知测地覆盖数至多为 M；否则，它大于 M。随着 M 的取值递增，重复这一过程，直到找到测地覆盖。

算法 1 FindSubCovers(s)

要求： 当前部分覆盖 s；路径池 P；最大规模 M；全局列表 C

如果CoversAllSegments(s)**则**
  将 s追加到 C ▷ 找到完全覆盖
  返回
否则如果 $|s| = M$ **则**
  返回
结束 if
对所有 $p \in P$ **执行**
  如果 $\exists g \in s:\ p[0] \in g \vee\ p[-1] \in g$ **则** ▷确保满足收缩性质
    继续
  否则，如果 $\exists g \in s:\ g[0] \in p \vee g[-1] \in p$ **则**
    继续
  结束条件判断
  $s' \leftarrow s \cup \{p\}$
  FindSubCovers(s')
结束循环

找到上述算法生成的潜在覆盖后，我们进一步缩小线性规划需要考虑的覆盖范围：舍弃那些在

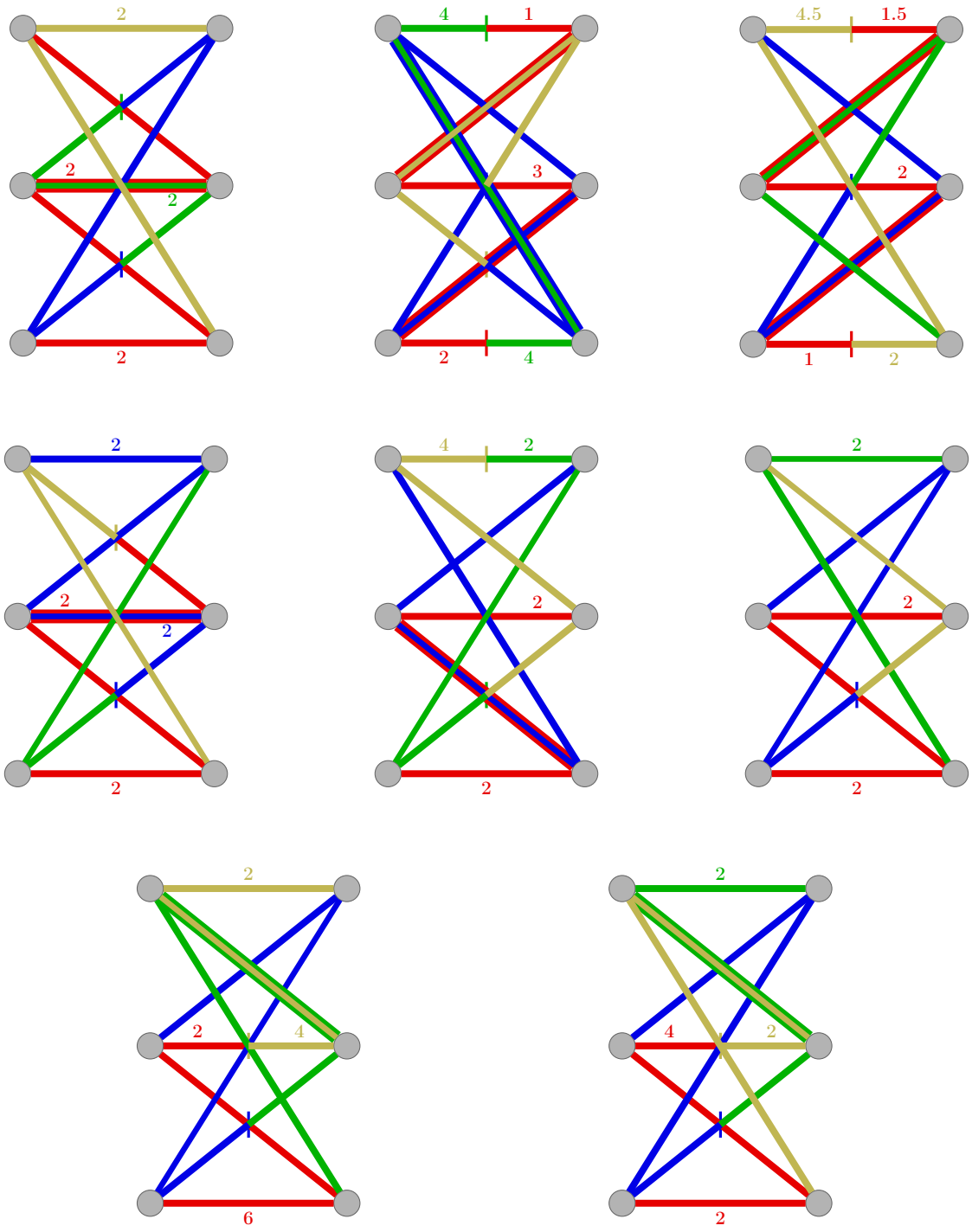


图 10. 的八种不同的最优测地覆盖$K_{3,\ 3}$

图的某个自同构下等价的多余覆盖。我们只保留在所有自同构下等价的覆盖中，按照某个任意全序取最小的覆盖。具体做法是检查自同构群（已预先计算）中的任意置换是否会产生更小的覆盖；若会，则舍弃原覆盖。

算法 2 对称性下的最小性判定(c)

要求： 覆盖 c，预先计算的对称群 $\mathcal{S}$ =对称性(G)，覆盖的全序 $<$

对所有 $\sigma \in \mathcal{S}$ **执行**
  如果 应用置换(σ, c) $< c$ **则**
    返回 false
  结束 if
结束循环
返回 true

最后，我们还可以选择丢弃那些在测地线重路由下等价的覆盖。为此，我们通过检查局部重路由操作是否会产生新的覆盖（若会，则将其加入 Q），迭代更新重路由集合，并持续这一过程，直到检查完所有由重路由形成的覆盖。每一步中，我们都将新覆盖与起始覆盖进行比较；如果起始覆盖并不更小（相对于任意选定的全序），则该覆盖不符合条件。

算法 3 重路由下的最小性判定(c)

要求： 覆盖 c；覆盖上的全序 $<$ ；迭代器 Reroutings(·)，给出在一次重路由操作下的邻居

已访问集合 $\leftarrow \{c\}$
Q ←队列
入队(Q c)
当 为空(Q) **时执行**
  $x \leftarrow$ 出队(Q)
  对所有 $y \in$重路由(x) **执行**
    如果 $y \notin$已访问集合 **则**
      如果 $y < c$ **则**
        返回假
      结束如果
      添加 y 到 已访问集合
      入队(Q y)
    结束 if
  结束 for
结束 while
返回 true

用于寻找候选覆盖的整体算法首先通过第一个子程序生成一份初始候选覆盖列表，然后再通过第二个和第三个子程序筛选该列表。

为了判断给定的覆盖能否通过对线段赋权而成为测地覆盖，我们首先将这些线段设为变量，并约束其取值至少为 1。这样可以确保距离严格为正；并且我们注意到，这不会改变所得线性规划的可行性。我们将目标函数设为最小化这些变量之和。请注意，其他目标函数也同样可行；我们关心的只是解的可行性，而非最优性。最后，使用线性规划求解器验证该覆盖能否成为测地覆盖。

算法4 测地线可行性测试(c)

要求： 候选覆盖 c （路径元组）；全局线段集 S；全局路径列表 P

创建线性规划 $\mathcal{P}$，为每个 $s \in S$设置决策变量 $w[s]$；每个变量的下界为 1
将 $\mathcal{P}$ 的目标函数设为最小化 $\sum_{s \in S} w[s]$
对于所有路径 g 中 c，**执行**
    对于所有 路径 p 中满足 $p[0] = g[0]$ 和 $p[-1] = g[-1]$ 的 P **执行**
        添加约束：
            sum{$w[s]$： $s \in$从路径提取线段(g)} $\leq$ sum{$w[s]$： $s \in$从路径提取线段(p)}
    结束循环
结束循环
求解 $\mathcal{P}$

附录 B：与测地线不兼容的三条路径构型

这里，我们补充命题 5.2 证明的其余细节。具体而言，我们证明，除命题 5.2 中所述的构型外，任何路径构型都不存在一种长度度量，使得 X_1、X_2、X_3 是测地线。回顾一下，我们可以假设这些测地线满足 $|X_1 \cap X_2| \geq 2$ 和 $|X_1 \cap X_3| \geq 2$，且每对 X_1、X_2 和 X_1、X_3 都是相容定向的，尽管 X 本身不存在与这些定向相容的偏序。这种情况有两种可能：(1) 存在点 $a \in X_1 \cap X_3$、$b \in X_1 \cap X_2$ 和 $c \in X_2 \cap X_3$，使得 $a \prec_1 b$、$b \prec_2 c$ 和 $c \prec_3 a$；(2) 存在点 a、$b \in X_2 \cap X_3$，使得 $a \prec_3 b$ 和 $b \prec_2 a$。这些点迫使 X 采用下列某一种构型，而这些构型已证明是可行的。交集 $X_1 \cap X_2$、$X_1 \cap X_3$、$X_2 \cap X_3$ 中任何其他点也必须与同一构型相容。我们分别讨论每种情况。

第 1 组。假设存在点 $a \in X_1 \cap X_3$、$b \in X_1 \cap X_2$ 和 $c \in X_2 \cap X_3$，使得 $a \prec_1 b$、$b \prec_2 c$ 和 $c \prec_3 a$。首先注意到 $a \notin X_2$、$b \notin X_3$ 和 $c \notin X_1$。

设 e 为 $X_1 \cap X_3$ 中不同于 a 的一个点；根据假设，这样的点存在。设 f 为 $X_1 \cap X_2$ 中不同于 b 的一个点；根据假设，这样的点也存在。注意，点 a、b、e、f 属于 X_1，而 b、c、f 属于 X_2，a、c、e 属于 X_3。我们注意到，$e = f$ 是可能的。沿测地线 X_1、X_2、X_3 对这些点进行任意排列，只要满足约束 $a \prec_1 b$、$b \prec_2 c$、$c \prec_3 a$、$b \prec_1 f \iff b \prec_2 f$ 和 $a \prec_1 e \iff a \prec_3 e$，就能得到一个有效构型。这样的构型共有 21 种：

(1) $a \prec_1 b \prec_1 e \preceq_1 f$, $b \prec_2 c \prec_2 f$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(2) $a \prec_1 b \prec_1 e \preceq_1 f$, $b \prec_2 f \prec_2 c$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(3) $a \prec_1 b \prec_1 f \preceq_1 e$, $b \prec_2 c \prec_2 f$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(4) $a \prec_1 b \prec_1 f \preceq_1 e$, $b \prec_2 f \prec_2 c$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(5) $a \prec_1 e \prec_1 b \prec_1 f$, $b \prec_2 c \prec_2 f$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(6) $a \prec_1 e \prec_1 b \prec_1 f$, $b \prec_2 f \prec_2 c$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(7) $a \prec_1 e \preceq_1 f \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(8) $a \prec_1 f \prec_1 b \prec_1 e$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(9) $a \prec_1 f \preceq_1 e \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(10) $e \prec_1 a \prec_1 b \prec_1 f$, $b \prec_2 c \prec_2 f$, $c \prec_3 e \prec_3 a$
(11) $e \prec_1 a \prec_1 b \prec_1 f$, $b \prec_2 c \prec_2 f$, $e \prec_3 c \prec_3 a$
(12) $e \prec_1 a \prec_1 b \prec_1 f$, $b \prec_2 f \prec_2 c$, $c \prec_3 e \prec_3 a$
(13) $e \prec_1 a \prec_1 b \prec_1 f$, $b \prec_2 f \prec_2 c$, $e \prec_3 c \prec_3 a$
(14) $e \prec_1 a \prec_1 f \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $c \prec_3 e \prec_3 a$
(15) $e \prec_1 a \prec_1 f \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $e \prec_3 c \prec_3 a$
(16) $e \preceq_1 f \prec_1 a \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $c \prec_3 e \prec_3 a$
(17) $e \preceq_1 f \prec_1 a \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $e \preceq_3 c \prec_3 a$
(18) $f \prec_1 a \prec_1 b \prec_1 e$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $c \prec_3 a \prec_3 e$
(19) $f \prec_1 a \prec_1 e \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $c \prec_3 a \prec_3 a$
(20) $f \preceq_1 e \prec_1 a \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $c \prec_3 e \prec_3 a$
(21) $f \preceq_1 e \prec_1 a \prec_1 b$, $f \prec_2 b \prec_2 c$, $e \prec_3 c \prec_3 a$

可以通过手工分析或应用附录A中的算法4来分析这些构型。除（6）、（7）、（9）、（12）和（14）外，其余均会导致矛盾。此外，只有在 $e = f$ 时，（9）才有可能。所有这些情形都对应于命题 5.2中的（2a）构型（若 X_2 和 X_3 具有一致定向），或同一命题中的（2b）构型（若 X_2 和 X_3 具有不一致定向）。请注意，X_2 和 X_3 可能仅交于一点，此时（2a）和（2b）都会化为同一构型。另请注意，在（2b）的情形下，等式 $e = f$ 是允许的；而在（2a）的情形下，它会导致矛盾。

第2组。假设存在点 $a, b \in X_2 \cap X_3$，使得 $a \prec_2 b$ 和 $b \prec_3 a$。令 c, e 为 $X_1 \cap X_2$ 中的不同点，并令 f, g 为 $X_1 \cap X_3$ 中的不同点。如有必要，通过重新标记 c, e 和 f, g，我们可以假设 $c \prec_1 e$（因此 $c \prec_2 e$ 也成立），并且 $f \prec_1 g$（因此 $f \prec_3 g$ 也成立）。我们还可以利用对称性假设

f 是 X_3 中 b, a, f, g 这些点里最小的点（否则，反转 X_2 上的定向，将 X_3 置于 X_1 的位置，并按需重新标记顶点，使其与表相匹配）。根据这些约束，需要考虑 108 种构型，即以下情形的所有组合（要求任意两个连续的不等式中至少有一个是不适当的）：

(1a) $c \prec_1 e \preceq_1 f \prec_1 g$ (2a) $a \prec_2 b \preceq_2 c \prec_2 e$ (3a) $f \prec_3 g \preceq_3 b \prec_3 a$(1b) $c \preceq_1 f \preceq_1 e \preceq_1 g$ (2b) $a \preceq_2 c \preceq_2 b \preceq_2 e$ (3b) $f \preceq_3 b \preceq_3 g \preceq_3 a$(1c) $c \preceq_1 f \prec_1 g \preceq_1 e$ (2c) $a \preceq_2 c \prec_2 e \preceq_2 b$ (3c) $f \preceq_3 b \prec_3 a \preceq_3 g$(1d) $f \prec_1 g \preceq_1 c \prec_1 e$ (2d) $c \prec_2 e \preceq_2 a \prec_2 b$(1e) $f \preceq_1 c \preceq_1 g \preceq_1 e$ (2e) $c \preceq_2 a \preceq_2 e \preceq_2 b$(1f) $f \preceq_1 c \prec_1 e \preceq_1 g$ (2f) $c \preceq_2 a \prec_2 b \preceq_2 e$

在某些情形下，并非所有 6 个点都是导出矛盾所必需的，因此如有需要，可以适当减少情形的数量。不过，为求简洁，我们在此不作探讨。通过计算机分析可以证明，除以下七种主要情形外，每种情形都会导致矛盾（其中 a、b、c、e、f、g 是互不相同的点）：

(1) (1a) $c \prec_1 e \preceq_1 f \prec_1 g$, (2a) $a \prec_2 b \prec_2 c \prec_2 e$, (3a) $f \prec_3 g \preceq_3 b \prec_3 a$(2) (1a) $c \prec_1 e \prec_1 f \prec_1 g$, (2d) $c \prec_2 e \prec_2 a \prec_2 b$, (3a) $f \prec_3 g \preceq_3 b \prec_3 a$(3) (1c) $c \prec_1 f \prec_1 g \preceq_1 e$, (2f) $c \prec_2 a \prec_2 b \preceq_2 e$, (3a) $f \prec_3 g \preceq_3 b \prec_3 a$(4) (1f) $f \preceq_1 c \prec_1 e \prec_1 g$, (2a) $a \prec_2 b \preceq_2 c \prec_2 e$, (3c) $f \preceq_3 b \prec_3 a \prec_3 g$(5) (1f) $f \preceq_1 c \prec_1 e \preceq_1 g$, (2d) $c \prec_2 e \preceq_2 a \prec_2 b$, (3c) $f \prec_3 b \prec_3 a \preceq_3 g$ (6) (1d) $f \prec_1 g \preceq_1 c \prec_1 e$, (2a) $a \prec_2 b \preceq_2 c \prec_2 e$, (3a) $f \prec_3 g \preceq_3 b \prec_3 a$(7) (1d) $f \prec_1 g \prec_1 c \prec_1 e$, (2d) $c \prec_2 e \preceq_2 a \prec_2 b$, (3a) $f \prec_3 g \prec_3 b \prec_3 a$

注意，在每种情况下，对于何时不等式必须为严格不等式，都有一些限制。我们还注意到，上表中的许多其他组合也会产生可容许构形，但这只能通过将某些点对识别为同一点来实现。然而，每个这样的“退化”构形都是上述七种构形之一的子情形。

我们通过观察可知，七种构形中的每一种都与命题5.2中的（2b）相容。证明完毕。

参考文献

[1] B. Brešar、M. Kovše 和 A. Tepeh。《图中的测地集》。载于 复杂网络的结构分析，第197–218页。Birkhäuser/Springer，纽约，2011年。[2] M. R. Bridson 和 A. Haefliger。《非正曲率度量空间》，《数学科学基础丛书》第319卷，/数学科学基本原理/。Springer-Verlag，柏林，1999年。[3] D. Chakraborty、F. Foucaud 和 A. Hakanen。给定圈秩的图的基于距离（及基于路径）的覆盖问题。《离散数学》，348(11)：论文编号114595，13页，2025年。[4] M. Chudnovsky、D. Cizma 和 N. Linial。可度量化图的结构。《离散与计算几何》，2024年。[5] D. Cizma 和 N. Linial。图上的测地几何。《离散与计算几何》，68(1)：298–347，2022年。[6] S. Claytor。不能嵌入球面的Peano连续统。《数学年刊》（第2辑），38(3)：631–646，1937年。[7] D. C. Fisher 和 S. L. Fitzpatrick。图的等距路径数。《组合数学与组合计算杂志》，38 110，2001 97：–。[8] F. Harary、E. Loukakis 和 C. Tsouros。图的测地数。第17卷，第89–95页。1993年。《计算机科学中的图论模型》II（拉斯克鲁塞斯，新墨西哥州，1988–1990年）。[9] X. Luo、M. Romney 和 A. L. Tao。平面中的度量三角形的双利普希茨嵌入。《分析、几何与度量空间》，即将出版。[10] P. Manuel。重新审视路径型覆盖与划分问题，2018年。arXiv预印本1807.10613。[11] P. Manuel。等距路径划分问题。《数学讨论：图论》，41(4)：1077–1089，2021年。[12] P. Manuel、S. Klavzar、R. Prabha 和 A. Arokiaraj。蝴蝶网络的测地覆盖问题。《信息学基础》，第194卷，第3期，2025年10月。[13] J.-J. Pan 和 G. J. Chang。图的等距路径数。《离散数学》，306(17)：2091–2096，2006年。[14] W. Schnyder。平面图与偏序集维数。《序》，5(4)：323–343，1989年。

数学科学系，史蒂文斯理工学院电子邮箱：jchen9@stevens.edu

数学系 ，UCLA
电子邮箱：kghess@g.ucla.edu

数学系，夏威夷大学马诺阿分校电子邮箱：mromney@hawaii.edu