arXiv:2602.11755v1 [math.MG] 12 Feb 2026

斐波那契数与互素对上的度量

MITSUAKI KIMURA

摘要。本文在互素自然数对的集合上引入一种度量。我们借助斐波那契数，明确构造了从自然数集合到该度量空间的拟等距嵌入。

1. 引言

令 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ 为自然数集合。我们考虑集合

$$\mathcal{X}=\{\{n_1,n_2\}\subset\mathbf{N}\mid \gcd(n_1,n_2)=1\}$$

互素自然数对的集合。注意，$\{1,1\}=\{1\}\in\mathcal{X}$。本文在 $\mathcal{X}$ 上引入一种自然度量，并观察到，相邻的斐波那契数对在这个空间中表现良好。

$\mathcal{X}$ 上的度量定义如下。对于$\mathbf{n}=\{n_1,n_2\}\in\mathcal{X}$，数对$\mathbf{n}$生成整数的加法群$\mathbf{Z}$。因此，每个 $m\in\mathbf{N}$ 都可表示为 $m=n_1x+n_2y$，其中 $x,y\in\mathbf{Z}$。我们定义

$$q_{\mathbf{n}}(m)=\min\{|x|+|y|\mid m=n_1x+n_2y,\ x,y\in\mathbf{Z}\}$$

并令 $q_{\mathbf{n}}(\mathbf{m})=\max_{m\in\mathbf{m}}\{q_{\mathbf{n}}(m)\}$ 对$\mathbf{m},\mathbf{n}\in\mathcal{X}$。于是满足次乘性不等式（引理2.1）。对于 $a>1$，我们定义

$$d_a(\mathbf{m},\mathbf{n})=\log_a\bigl(\max\{q_{\mathbf{n}}(\mathbf{m}),q_{\mathbf{m}}(\mathbf{n})\}\bigr).$$

于是 d_a 是$\mathcal{X}$ 上的度量（命题2.2）。

我们对度量的定义 d_a 受到 Tsuboi 的构造 [7]的启发；另见[5, 2, 3]。注意，d_a 可视为度量$\hat{\varrho}$ 在 [8, 定义 3。4] 中定义的$\mathbf{Z}$情况下的限制。度量空间$(\mathcal{X},d_a)$将在即将发表的工作 [4]中进一步研究。

我们简要回顾拟等距这一概念，它是大尺度几何中的一个基本概念。更多细节请参见 [6] 。设 $K\geq1$ 且 $L\geq0$。度量空间之间的映射 $f\colon(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 称为(K,L)-拟等距嵌入，如果对所有 $x_1,x_2\in X$，

$$\frac{1}{K}d_X(x_1,x_2)-L\ \leq\ d_Y\bigl(f(x_1),f(x_2)\bigr)\ \leq\ Kd_X(x_1,x_2)+L.$$

如果存在从 X到 Y以及从 Y到 X的拟等距嵌入，我们就称 X 和 Y拟等距。对于 $a,b>1$，有 $d_a(\mathbf{m},\mathbf{n})=(\log_a b)d_b(\mathbf{m},\mathbf{n})$，因此 $(\mathcal{X},d_a)$ 和 $(\mathcal{X},d_b)$ 拟等距。由此，度量空间 $(\mathcal{X},d_a)$ 的拟等距类不依赖于 $a>1$的选取。

令 F_n 表示第 n 个斐波那契数。由于相邻的斐波那契数互素，因此对 $n\in\mathbf{N}$，有 $\{F_n,F_{n+1}\}\in\mathcal{X}$。令 $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 表示黄金比例，并设 $d=d_\varphi$。我们的主要结果如下：

定理 1.1. 映射

$$(\mathbf{N}, |\cdot|) \longrightarrow (\mathcal{X}, d), \qquad n \longmapsto \{F_n, F_{n+1}\},$$

是一个(1,1)-拟等距嵌入。

本文结构如下。第 2 节给出了证明，说明 d_a 在 $\mathcal{X}$ 上定义了一个度量，并回顾了斐波那契数的经典性质。第 3节包含定理 1.1 的证明。第 4 节讨论了定理 1.1 的进一步推广。

2. 预备知识

2.1. **互素对上的度量。** 我们证明 d_a 在 $\mathcal{X}$ 上定义了一个度量。尽管这可以由 [8, 4], 中的一般框架推出，为求完整起见，我们仍给出证明。

引理 2.1. 对于所有的 $\mathbf{k}$、$\mathbf{m}$、$\mathbf{n} \in \mathcal{X}$, 有

$$q_{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) \le q_{\mathbf{m}}(\mathbf{k})\, q_{\mathbf{n}}(\mathbf{m}).$$

证明。 令 $\mathbf{k} = \{k_1, k_2\}$, $\mathbf{m} = \{m_1, m_2\}$ 和 $\mathbf{n} = \{n_1, n_2\}$，并设 $M = q_{\mathbf{m}}(\mathbf{k})$， $N = q_{\mathbf{n}}(\mathbf{m})$。由于 $q_{\mathbf{m}}(k_1) \le M$ 且 $q_{\mathbf{m}}(k_2) \le M$，存在整数 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{Z}$使得

$$\begin{aligned} k_1 &= m_1 x_1 + m_2 y_1, \qquad |x_1| + |y_1| \le M, \\ k_2 &= m_1 x_2 + m_2 y_2, \qquad |x_2| + |y_2| \le M. \end{aligned}$$

同理，由于 $q_{\mathbf{n}}(m_1) \le N$ 且 $q_{\mathbf{n}}(m_2) \le N$，存在整数 $x_1', y_1', x_2', y_2' \in \mathbf{Z}$使得

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1 x_1' + n_2 y_1', \qquad |x_1'| + |y_1'| \le N, \\ m_2 &= n_1 x_2' + n_2 y_2', \qquad |x_2'| + |y_2'| \le N. \end{aligned}$$

综合以上，得到

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{n}}(k_1) &\le |x_1 x_1' + y_1 x_2'| + |x_1 y_1' + y_1 y_2'| \\ &\le |x_1|(|x_1'| + |y_1'|) + |y_1|(|x_2'| + |y_2'|) \\ &\le (|x_1| + |y_1|)\, N \\ &\le MN. \end{aligned}$$

对 k_2 同样适用这一论证；因此， $q_{\mathbf{n}}(\mathbf{k}) \le MN = q_{\mathbf{m}}(\mathbf{k})\ q_{\mathbf{n}}(\mathbf{m})$. □

命题 2.2。 对于 $a > 1$, d_a 是 $\mathcal{X}$ 上的一个度量。

证明。 三角不等式由引理 2.1得出，而对称性由定义直接可知。剩下需要验证非退化性。注意， $q_{\mathbf{n}}(m) = 1$ 当且仅当 $m \in \mathbf{n}$；因此 $q_{\mathbf{n}}(\mathbf{m}) = 1$ 当且仅当 $\mathbf{m} \subset \mathbf{n}$。于是 $d_a(\mathbf{m},\mathbf{n}) = 0$ 恰在 $\mathbf{m} = \mathbf{n}$时成立。因此， d_a 是一个度量。 □

2.2. **斐波那契数**。 我们回顾斐波那契数的经典性质，以便后续使用。斐波那契序列 $(F_n)_{n\geq 0}$ 由以下递推关系定义：

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

这个定义自然地扩展到负指标，从而得到一个双无限序列。特别地，对于所有 $n \in \mathbf{N}$，

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

引理 2.3 (Honsberger 恒等式)。 对于所有 $m, n \in \mathbf{Z}$，以下结论成立：

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n.$$

证明。 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 对于所有 $n \in \mathbf{N}$，我们可以通过归纳法验证

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

利用恒等式 $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$，同一公式对所有 $n \in \mathbf{Z}$ 均成立。比较 $A^{m+n} = A^m A^n$ 中的各项即可得到所需的恒等式。□

引理2.4. 令 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 表示黄金比例。对所有 $n \in \mathbf{N}$，有

$$\varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^{n-1}.$$

证明。 证明通过归纳法进行，并使用恒等式 $\varphi^2 = \varphi + 1$。 □

3. Main Result

本节中，我们证明定理 1.1。对于 $n \in \mathbf{N}$，令 $\mathbf{f}_n = \{F_n, F_{n+1}\}$。定理 1.1 的陈述涉及对其进行估计

$$d(\mathbf{f}_m, \mathbf{f}_n) = \log_\varphi\big(\max\{q_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{f}_m), q_{\mathbf{f}_m}(\mathbf{f}_n)\}\big),$$

因此，证明归结为给出.....的界

$$q_{\mathbf{f}_n}(F_m) = \min\{|x| + |y| \mid F_m = xF_n + yF_{n+1},\ x, y \in \mathbf{Z}\}.$$

从上方和下方进行估计。因此，我们研究丢番图方程

$$F_m = xF_n + yF_{n+1}. \tag{3.1}$$

引理 3.1 (下界)。 设 $m, n \in \mathbf{N}$ 且 $m > n$。则

$$q_{\mathbf{f}_n}(F_m) \geq \frac{F_m}{F_{n+1}}.$$

证明。 若 $(x,\ y)$ 是（3.1）的一个解，则

$$F_m = |xF_n + yF_{n+1}| \leq |x|F_n + |y|F_{n+1} \leq (|x| + |y|)F_{n+1},$$

这就得到了所需的不等式。 □

引理 3.2 (上界)。 设 $m,\ n \in \mathbf{N}$。则

$$q_{\mathbf{f}_n}(F_m) \leq |F_{m-n-1}| + |F_{m-n}| = \begin{cases} F_{m-n+1}, & \text{if } m \geq n, \\ F_{n-m+2}, & \text{if } m \leq n. \end{cases}$$

证明。 根据引理 2.3，数对 $(x, y) = (F_{m-n-1}, F_{m-n})$ 是（3.1）的一个解。结合恒等式 $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ 即可得到所需结果。 □

定理 1.1的证明。 对于 $m,n\in\mathbf{N}$，我们证明

$$|m-n|-1\le d(\mathbf{f}_m,\mathbf{f}_n)\le |m-n|+1. \tag{3.2}$$

情形 $m=n$ 显然成立。我们不妨假设 $m>n$。由引理 2.4 和3.1，可得

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_n}(F_m)\ge \log_\varphi F_m-\log_\varphi F_{n+1}\ge (m-2)-n.$$

结合 $\log_\varphi q_{\mathbf{f}_n}(F_{m+1})\ge m-n-1$，可得

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{f}_m)\ge m-n-1. \tag{3.3}$$

另一方面，由引理 2.4 和 3.2，

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_n}(F_m)\le \log_\varphi F_{m-n+1}\le m-n$$

成立。因此，结合 $\log_\varphi q_{\mathbf{f}_n}(F_{m+1})\le m-n+1$，可得

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{f}_m)\le m-n+1. \tag{3.4}$$

同理，由

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_m}(F_n)\le \log_\varphi F_{m-n+2}\le m-n+1$$

以及 $\log_\varphi q_{\mathbf{f}_m}(F_{n+1})\le m-n$，我们得到

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_m}(\mathbf{f}_n)\le m-n+1. \tag{3.5}$$

结合（3.3）、（3.4）和（3.5），可得

$$m-n-1\le \log_\varphi q_{\mathbf{f}_m}(\mathbf{f}_n)\le \log_\varphi\big(\max\{q_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{f}_m),q_{\mathbf{f}_m}(\mathbf{f}_n)\}\big)\le m-n+1,$$

这就证明了（3.2）。 □

4. Generalizations

4.1. **k-斐波那契数**。 对于 $k\in\mathbf{N}$， k-斐波那契序列 $(F_{k,n})_{n\in\mathbf{Z}}$ 定义如下，见 [1] 其递推关系为

$$F_{k,0}=0,\quad F_{k,1}=1,\qquad F_{k,n+2}=kF_{k,n+1}+F_{k,n}.$$

它满足 $F_{k,-n}=(-1)^{n+1}F_{k,n}$ 对所有 $n\in\mathbf{N}$均成立。注意，$F_{1,n}$ 表示标准斐波那契数，而$F_{2,n}$ 表示佩尔数。

二次方程 $x^2=kx+1$ 的正根，

$$\varphi_k:=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2},$$

称为第 k 个金属比例。例如， $\varphi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是黄金比例，$\varphi_2=1+\sqrt{2}$ 是白银比例。

现在我们将定理 1.1 推广；令 $k=1$ 即可得到原始表述。

定理 4.1。设 $k\in\mathbf{N}$。映射

$$(\mathbf{N},|\cdot|)\longrightarrow(\mathcal{X},d_{\varphi_k}),\qquad n\longmapsto\{F_{k,n},F_{k,n+1}\},$$

是一个(1,1)-拟等距嵌入。

为证明定理 4.1，我们将第 2.2 小节中的引理推广。

引理 4.2 ([1, 命题 14])。 设 $k\in\mathbf{N}$。对于所有 m， $n\in\mathbf{Z}$，有

$$F_{k,m+n}=F_{k,m}F_{k,n+1}+F_{k,m-1}F_{k,n}.$$

证明。 对于 $n \in \mathbf{Z}$，有

$$\begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{k,n+1} & F_{k,n} \\ F_{k,n} & F_{k,n-1} \end{bmatrix}.$$

通过比较 $A^{m+n} = A^m A^n$ 的各项即可得到该恒等式。 □

引理 4.3. 设 $k \in \mathbf{N}$。对于所有 $n \in \mathbf{N}$，以下不等式成立：

(1) $k\varphi_k^{n-2} \le F_{k,n} \le k\varphi_k^{n-1}$(2)

$\varphi_k^{n-2} \le F_{k,n-2} + F_{k,n-1} \le \varphi_k^{n-1}$

证明。 两个结论都可通过归纳法，利用恒等式 $\varphi_k^2 = k\varphi_k + 1$ 得出。 □

与定理 1.1的证明中一样，我们考虑丢番图方程

$$F_{k,m} = xF_{k,n} + yF_{k,n+1}.$$

由引理 4.2，数对 $(x, y) = (F_{k,m-n-1}, F_{k,m-n})$ 满足该方程。

设 $\mathbf{f}_{k,n} = \{F_{k,n}, F_{k,n+1}\}$。引理 3.1 和 3.2的以下推广成立；证明类似，故略去。

引理 4.4。 设 $k \in \mathbf{N}$。对于所有满足 $m > n$ 的 $m, n \in \mathbf{N}$，有

$$q_{\mathbf{f}_{k,n}}(F_{k,m}) \ge \frac{F_{k,m}}{F_{k,n+1}}.$$

引理 4.5。 设 $k \in \mathbf{N}$。对于所有 $m, n \in \mathbf{N}$，有

$$q_{\mathbf{f}_{k,n}}(F_{k,m}) \le |F_{k,m-n-1}| + |F_{k,m-n}| = \begin{cases} F_{k,m-n-1} + F_{k,m-n} & \text{if } m \ge n, \\ F_{k,n-m} + F_{k,n-m+1} & \text{if } m \le n. \end{cases}$$

定理 *4.1*的证明。 证明与定理1.1的证明类似。我们证明

$$|m-n| - 1 \le d(\mathbf{f}_{k,m}, \mathbf{f}_{k,n}) \le |m-n| + 1.$$

对所有 m，$n \in \mathbf{N}$。不妨设 $m > n$。根据引理 4.3 （1）和 4.4，可得

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_{k,n}}(\mathbf{f}_{k,m}) \ge m - n - 1.$$

根据引理 4.3 （2）和 4.5，可得

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_{k,n}}(\mathbf{f}_{k,m}) \le m - n + 1 \quad \text{and} \quad \log_\varphi q_{\mathbf{f}_{k,m}}(\mathbf{f}_{k,n}) \le m - n + 1.$$

合并这些结果即可得到所需的不等式。 □

4.2. **ℓ-互素数。** 对于 $\ell \ge 2$，我们考虑 ℓ-互素数的集合

$$\mathcal{X}^\ell = \{\{n_1, \dots, n_\ell\} \subset \mathbf{N} \mid \gcd(n_1, \dots, n_\ell) = 1\}.$$

注意，$\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}$。我们将 $\mathbf{X}$ 上的度量 d 按如下方式扩展到 $\mathbf{X}^\ell$。

对于 $\mathbf{n} = \{n_1, \dots, n_\ell\} \in \mathbf{X}^\ell$ 和 $m \in \mathbf{N}$，定义

$$q_{\mathbf{n}}(m) = \min\{|x_1| + \cdots + |x_\ell| \mid m = n_1x_1 + \cdots + n_\ell x_\ell,\ x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{Z}\}.$$

对于 $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbf{X}^\ell$，令 $q_{\mathbf{n}}(\mathbf{m}) = \max_{m \in \mathbf{m}}\{q_{\mathbf{n}}(m)\}$，并定义

$$d^\ell(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \log_\varphi\big(\max\{q_{\mathbf{n}}(\mathbf{m}), q_{\mathbf{m}}(\mathbf{n})\}\big).$$

与小节 2.1 中的类似论证表明 d^ℓ 是 X^ℓ上的一个度量。

下面的定理推广了定理1.1，而后者是以下特殊情形 $\ell = 2$。

定理 4.6。设 $\ell \geq 2$。映射

$$(\mathbf{N}, |\cdot|) \longrightarrow (\mathcal{X}^\ell, d^\ell), \qquad n \longmapsto \{F_n, F_{n+1}, \ldots, F_{n+\ell-1}\},$$

是一个(1,1)-拟等距嵌入。

证明。该论证与定理 1.1 的论证相平行。设 $\mathbf{f}_n^\ell = \{F_n,\ F_{n+1},\ \ldots\ldots,\ F_{n+\ell-1}\}$。我们证明

$$|m-n| - 1 \leq d^\ell(\mathbf{f}_m^\ell, \mathbf{f}_n^\ell) \leq |m-n| + 1. \tag{4.1}$$

对所有 $m,\ n \in \mathbf{N}$。我们可以假设 $m > n$。设 $i \in \{0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ \ell-1\}$。

首先我们估计 $q_{\mathbf{f}_n^\ell}(F_{m+i})$。假设 $m+i \geq n+\ell$；否则 $q_{\mathbf{f}_n^\ell}(F_{m+i}) = 1$。于是我们有

$$q_{\mathbf{f}_n^\ell}(F_{m+i}) \geq \frac{F_{m+i}}{F_{n+\ell-1}}.$$

因此，由引理 2.4，我们得到

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_n^\ell}(\mathbf{f}_m^\ell) = \log_\varphi \left(\max_{0 \leq i \leq \ell-1} \{ q_{\mathbf{f}_n^\ell}(F_{m+i}) \} \right) \geq \log_\varphi \frac{F_{m+\ell-1}}{F_{n+\ell-1}} \geq m-n-1. \tag{4.2}$$

由于丢番图方程

$$F_{m+i} = x_1 F_n + x_2 F_{n+1} + \cdots + x_\ell F_{n+\ell-1}$$

有一个解 $(x_1, \ldots, x_\ell) = (0, \ldots, 0, F_{m+i-n-\ell+1}, F_{m+i-n-\ell+2})$，因此我们有

$$q_{\mathbf{f}_n^\ell}(F_{m+i}) \leq F_{m+i-n-\ell+1} + F_{m+i-n-\ell+2} = F_{m+i-n-\ell+3} \leq F_{m-n+2}.$$

因此我们有

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_n}(\mathbf{f}_m) \leq \log_\varphi F_{m-n+2} \leq m-n+1. \tag{4.3}$$

接下来我们估计 $q_{\mathbf{f}_m^\ell}(F_{n+i})$。设 $n+i < m$；否则 $q_{\mathbf{f}_m^\ell}(F_{n+i}) = 1$。由于丢番图方程

$$F_{n+i} = x_1 F_m + x_2 F_{m+1} + \cdots + x_\ell F_{m+\ell-1}$$

有一个解 $(x_1, \ldots, x_\ell) = (F_{n+i-m-1}, F_{n+i-m}, 0, \ldots, 0)$，因此我们有

$$q_{\mathbf{f}_m}(F_{n+i}) \leq |F_{n+i-m-1}| + |F_{n+i-m}| = F_{m-n-i+1} + F_{m-n-i} = F_{m-n-i+2} \leq F_{m-n+2}$$

因此我们有

$$\log_\varphi q_{\mathbf{f}_m}(\mathbf{f}_n) \leq \log_\varphi F_{m-n+2} \leq m-n+1. \tag{4.4}$$

结合（4.2）、（4.3）和（4.4），我们得到（4.1）。 □

致谢

作者谨向 Morimichi Kawasaki 致谢，感谢他提出了促成本论文主要结果的问题。作者还感谢 Hiroki Kodama 就定理 4.6 提供了有益的建议，使得不必要的假设得以删除。

作者部分受日本学术振兴会科研费资助（项目编号：JP24K16921）。

参考文献

[1] S. Falcón 和 A. Plaza。《斐波那契 k 数》。《混沌、孤子与分形》，32(5):1615– 1624，2007。[2] T. Ishida。由 Calabi同态的核导出的度量空间的拟等距类型。《辛几何杂志》，16(4):1041–1050，2018。[3] M. Kawasaki、M. Kimura、H. Kodama、Y. Matsuda、T. Matsushita 和 R. Orita。变换群万能覆盖的相对单纯性与 Tsuboi度量。*arXiv* 预印本 *arXiv:2412.00839*，2024。[4] M. Kawasaki、H. Kodama、Y. Matsuda 和 T. Matsushita。准备中。[5] H. Kodama。论非一致单纯群。*arXiv* 预印本 *arXiv:1107.5125*，2011。[6] C. Löh。几何群论。Universitext丛书。Springer，Cham，2017。[7] T. Tsuboi。论微分同胚群的一致单纯性。载于微分几何，第43–55页。World Sci. Publ.，Hackensack，NJ，2009。[8] T. Yagasaki。关于群幂集上的诱导度量的注记。*arXiv* 预印本 *arXiv:2504.04184*，2025。

数学系，Osaka Deltal Univercity，日本电子邮箱：
kimura-m@cc.osaka-dent.ac.jp