关于有向团复杂性的注记

Grzegorz Gutowski
雅盖隆大学理论计算机科学研究所，数学与计算机科学学院，波兰克拉科夫

Mikołaj Rams
雅盖隆大学理论计算机科学研究所，数学与计算机科学学院，波兰克拉科夫

摘要

对于有向图 G以及 G的顶点上的线性序 $\ll$，我们将反向边图 $G^{\ll}$ 定义为同一顶点集上的无向图，其中边$\{u,w\}$属于 $G^{\ll}$ 当且仅当(u,w)是 G 中的一条弧且 $w \ll u$。有向图 G 的有向团数定义为：在 G 的顶点上的所有线性序 $\ll$ 中，反向边图 $G^{\ll}$ 的最大团的最小规模。一个自然的计算问题是：对于给定的有向图 G 和正整数 t，判定 G 的有向团数是否至多为 t。该问题在 $t = 1$ 时存在多项式算法，并且已知对每个固定的 $t \geq 3$都是NP 完全的，即使对于竞赛图也是如此。在本注记中，我们证明当 t 作为输入给出时，该问题是Σ_2^{P}-完全的。

关键词与短语 有向团、计算复杂性、多项式层次

资助 *Grzegorz Gutowski*：部分经波兰国家科学中心资助，资助编号 2023/49/B/ST6/01738。

1 引言

本文讨论的所有图都是有限、简单且无环的。对于有向图，我们允许相反方向的平行弧，但不允许同一方向上的平行弧。无向图 G 的顶点集和边集分别记作 $V(G)$ 和 $E(G)$。有向图 G 的顶点集和弧集分别记作 $V(G)$ 和 $A(G)$。对于子集 $U \subseteq V(G)$，$G[U]$ 表示由 U 在 G 中诱导的子图。有向图 T 是竞赛图，当且仅当对每一对顶点 u、$w \in V(G)$，(u, w) 和 (w, u) 中恰有一个是 $A(G)$ 中的弧。对于有向图 G，以及顶点集 $V(G)$ 上的线性序 $\ll$，我们将回边集定义为：

$$\mathrm{BE}(G, \ll) = \{\{u, w\} : (u, w) \in A(G) \wedge w \ll u\}.$$

我们将反向边图 $G^{\ll}$ 定义为顶点集为 V（G）且边集为BE（G，$\ll$）的无向图。若有向图 G 不包含有向环，则称其为传递的。具有传递竞赛图 TT_n 的 n 个顶点的竞赛图是唯一具有 n 个顶点且传递的竞赛图。

含有 n 个顶点的完全有向图 Q_n，是具有 n 个顶点且包含所有可能的 n（$n-1$）条弧的有向图。具有 t 个顶点且包含所有可能的 $\binom{t}{2}$ 条边的无向图是一个团 K_t。如果一个无向图 G 包含一个团 K_t，也就是说，存在一个由 t 个顶点组成的子集$U \subseteq V$（G），使得 $G[U]$ 是一个团 K_t。对于不包含团K_t的 G，我们称 G 是 K_t-自由的。无向图 G的团数，记作 ω（G），是满足 G 包含一个团 K_t的 t的最大值。自然的计算问题是

问题：团**输入：**一个无向图 G 和一个正整数 t**问题：**当且仅当 ω（G）$\geq t$时为是

2 关于有向团复杂性的注记

这个问题在离散优化的不同领域有广泛的实际应用，同时也具有重要的理论意义。它是最早被证明为 NP 完全的问题之一，参见 [5], ，并被用作无数归约的基础。

继 Nguyen、Seymour 和 Scott 的工作之后， [7], Aboulker、Aubian、Charbit 和 Lopes [1] 给出了有向图团数的如下定义。有向图的有向团数， G记作 $\vec{\omega}(G)$，定义为满足以下条件的最小数： t存在一个线性序 $\ll$ 在 $V(G)$ 上，使得反向边图的团数$G^{\ll}$ 等于 t，即:

$$\vec{\omega}(G) = \min_{\ll} \omega(G^{\ll}),$$

相应的自然计算问题是

> 问题：DirectedClique输入：一个有向图 G 和一个正整数 t问题：当且仅当 $\vec{\omega}(G)$ 时回答“是” $\leq t$

Nguyen、Seymour 和 Scott [7, 第 6]节 6]研究了竞赛图，并提出了以下问题。“我们能否在多项式时间内测试一个竞赛图是否具有较小的有向团数（即使是在近似意义下）？它是否属于co-NP？”让我们定义有向团问题的一个变体，其中要求输入图是竞赛图。

> 问题： TournamentClique输入： 一个竞赛图 T 和一个正整数 t问题： 当且仅当 时回答“是” $\vec{\omega}(T)$ $\leq t$

我们还定义了参数化变体 t-有向团和 t-TournamentClique，其中 t 是一个固定值，而不是作为输入给定。

容易发现， $\vec{\omega}(G) = 0$ 当且仅当 G 是空图；而 $\vec{\omega}(G) = 1$ 当且仅当 G是传递的。利用深度优先搜索算法可以轻松检验传递性，因此我们得出，1-有向团和 1-TournamentClique 属于 P。对于任意 $t \geq 3$，Aubian [4]证明了 t-TournamentClique 和 t-有向团均为 NP 完全，并猜测对于 $t = 2$也同样成立。据我们所知，这个问题尚未解决。

类似于有向团数的定义，也可以利用反向边图为有向图定义其他图参数。关于其他有趣参数的讨论，请参见 Aboulker、Oijid、Petit、Rocton 和 Simon 关于有向图度宽度的论文 [2]。经典概念 二色数最初由 Neumann-Lara 定义 [6] ，也可以等价地将其定义为有向图 G 在所有 $G^{\ll}$ 上的线性序 $\ll$ 中取最小值的 $V(G)$色数。因此，在这些以类似方式定义的参数中，二色数最受关注。毫不意外，二色数与有向团数有关，见 [7, 1, 4, 2]。

Nguyen、Seymour 和 Scott [7] 曾询问 TournamentClique 是否属于 P 或 co-NP。我们无法回答这个问题，但提供了一些有力证据，表明答案应该是否定的。我们通过确定有向图上更一般问题的复杂性来做到这一点。注意，实例 $\langle G, t \rangle$ 上的问题 DirectedClique 可以自然地表述为:

$\exists_{\ll\text{-关于 }V(G)\text{ 的线性序：}} \forall_{A \subseteq V(G),\ |A|=t+1}$： A 不会在 $G^{\ll}$ 中诱导出一个（$t+1$）-团，

由此表述可轻易得出，DirectedClique 属于多项式层次的第二层 Σ_2^{P}。有关多项式层次的介绍，请参阅 Arora 和 Barak 的教科书 [3, 第 5] 章。Schaefer 和 Umans [8, 9, 10] 列出了多项式层次中不同类的许多完全问题。简要来说，Σ_2^{P} 定义为 $\mathrm{NP}^{\mathrm{NP}}$ ——一类可由能够访问 NP 预言机的非确定性图灵机在多项式时间内判定的语言；NP 预言机允许在单个执行步骤中测试任意一个属于 NP 的语言。Σ_2^{P} 的典型完全问题如下。

问题： Existential-2-Level-SAT**输入：** 布尔公式 $\varphi(x_1, \ldots\ldots, x_a, y_1, \ldots\ldots, y_b)$，其变量分属两个互不相交的集合 $\{x_1, \ldots\ldots, x_a\}$ 和 $\{y_1, \ldots\ldots, y_b\}$**问题：** 当且仅当以下布尔公式为真时，答案为“是”。$\exists_{x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_a}: \forall_{y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_b}: \varphi(x_1, \ldots\ldots, x_a, y_1, \ldots\ldots, y_b)$

Stockmeyer [11] 和 Wrathall [12] 独立证明了，复杂性类 Σ_2^{P} 恰好是可通过多项式时间多对一归约归约到 Existential-2-Level-SAT 的语言类。这一事实使 Σ_2^{P} 成为 DirectedClique 和 TournamentClique 问题的一个自然复杂性类。我们提出以下猜想，若成立，将确定这两个问题的复杂性。

▶ **猜想 1**。 *TournamentClique* 是 Σ_2^{P}-完全的。

证明猜想 1 的一个障碍，是缺乏具有较大有向团数的竞赛图构造。Aboulker、Aubian、Charbit 和 Lopes [1] 给出了一种简单的竞赛图构造，其 $\vec{\omega}(T) \geq \Omega(\log |V(T)|)$。对于每条弧的方向都以均匀随机方式选取的竞赛图，我们也有：几乎必然地，$\vec{\omega}(T) = \Theta(\log |V(T)|)$。据我们所知，目前尚无有向团数更大的竞赛图构造。如果猜想 1 成立，那么我们应当预期存在有向团数关于顶点数呈多项式级别的竞赛图。为了补充对数级下界，我们给出有向团数的一个多项式上界。在第 3 节中，我们证明对于任意竞赛图 T，都有 $\vec{\omega}(T) \leq \sqrt{2|V(T)|}$。值得注意的是，对于顶点 TT_n 的一个随机顺序 $\ll$，我们预期 $G^{\ll}$ 的团数为 $\Theta(\sqrt{V(T)})$。然而，$\vec{\omega}(TT_n) = 1$。我们猜想，竞赛图有向团数的下界可以得到显著改进。

▶ **猜想 2.** 存在一族竞赛图 $T_1, T_2, \ldots$ 的显式构造，使得 $|V(T_n)| = \Theta(n)$ 且 $\vec{\omega}(T_n) = \Omega(n^{1/100})$。

由于我们无法解决猜想 1，因此我们证明以下较弱的结果，以提供一些证据表明猜想 1 应当成立。我们将注意力转回有向团问题，因为构造有向团数较大的有向图要容易得多。特别地，对于完全有向图 Q_n，我们有 $\vec{\omega}(Q_n) = n$。本文的主要结果如下。

▶ **定理 3.** *DirectedClique* 是 Σ_2^{P}-完全的。

我们认为，用于证明定理 3 的归约足够稳健，因此，若猜想 2 得到肯定回答，采用类似技术也应能使猜想 1 得到肯定回答。

2 主要结果

证明通过从以下问题进行归约来完成，该问题是量化布尔公式可满足性问题的一种变体。它是一个自然的 Σ_2^{P}-完全问题，可以轻松地从 Existential-2-Level-SAT [11] 归约得到。

问题： 存在性二层3-CNF**输入：** 3-CNF公式 $\varphi(x_1, \ldots\ldots, x_a, y_1, \ldots\ldots, y_b)$，其变量分属于两个不相交的集合$\{x_1, \ldots\ldots, x_a\}$和$\{y_1, \ldots\ldots, y_b\}$**问题：** 当且仅当以下布尔公式为真时，答案为“是”。$\exists_{x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_a}$：$\neg\exists_{y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_b}$：$\varphi(x_1, \ldots\ldots, x_a, y_1, \ldots\ldots, y_b)$

现在我们可以陈述并证明主要定理了。

▶ **定理 3。** *DirectedClique* 是 Σ_2^{P}-完全的。

证明。我们给出一个从存在性二层3-CNF到 DirectedClique 的归约。假设给定了存在性二层3-CNF 的一个实例 X, Y, C，其中$X = \{x_1、\ldots\ldots、x_a\}$ 和 $Y = \{y_1、\ldots\ldots、y_b\}$ 是两个不相交的变量集合，而 $\mathsf{C} = \{C_1、\ldots\ldots、C_c\}$ 是一个子句集合，其中每个子句恰好包含 $X \cup Y$ 中三个互不相同的变量的三次出现。出于技术原因，我们假设 $c > 6$，否则变量数至多为 18，我们可以直接检查所有可能性。令 $t = 2c - 1$，并构造一个图 G，使得 G 具有一个顶点的线性序 $\ll$，且当且仅当以下布尔公式成立时，$G^{\ll}$ 不包含 K_{2c} 作为子图

$$\exists_{x_1,x_2,\ldots,x_a}: \quad \neg\exists_{y_1,y_2,\ldots,y_b}: \quad C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_c$$

为真。接下来的段落将介绍构造图 G 所需的构件。

二元构件对于变量 $x_i \in X$ 在子句 C_k 中的每次出现，我们都引入一个子图 $G_{x_i}^{(k)}$，如图 1 所示，它由以下部分组成：
1. 三个互不相交的完全有向图（图 1 中的灰色节点）：A' 包含 $t-2$ 个顶点，A_F，A_T 各包含 $t-1$ 个顶点。**2.** 顶点 $x_i^{(k)}$、$x_{i\,T}^{(k)}$、$x_{i\,F}^{(k)}$、以及 $w_i^{(k)}$。**3.** 如图 1 所示的弧。顶点与灰色节点之间的一条弧，表示该顶点与灰色节点所代表的完全有向图中的每个顶点之间都存在弧。

顶点 $x_i^{(k)}$、$x_{i\,T}^{(k)}$、以及 $x_{i\,F}^{(k)}$（位于图 *1* 中深蓝色方框内）稍后会与图中的其他顶点相连。构件中的所有其他顶点，即 $A_F \cup A_T \cup A' \cup \left\{w_i^{(k)}\right\}$中的顶点，都是该构件的内部顶点，不会再与图中的其他顶点产生邻接关系。以下命题刻画了该构件的关键性质。

▷ 断言 4. 对于 $G_{x_i}^{(k)}$顶点上的任意线性序 $\ll$，若反向边图$G_{x_i}^{(k)\ll}$不含 K_{2c}，则 BE($G_{x_i}^{(k)}$，$\ll$) 恰好包含边$\{x_i^{(k)}, x_{i\,F,}^{(k)}\}$或$\{x_i^{(k)}, x_{i\,T,}^{(k)}\}$中的一条（由图 1 中的红色弧产生）。

证明。令 $\ll$ 为 $G_{x_i}^{(k)}$ 顶点上的任意线性序。假设反向边图不含 K_{2c}，则可得 $x_{i\,F,}^{(k)} \ll w_i^{(k)}$；否则，$A_F$、$x_{i\,F,}^{(k)}$ 和 $w_i^{(k)}$ 中的 $t-1$ 个顶点会在反向边图中构成一个 $2c$ 团。类似地，利用 A_T、$x_{i\,T,}^{(k)}$ 和 $w_i^{(k)}$ 中的 $t-1$ 个顶点，可得 $w_i^{(k)} \ll x_{i\,T,}^{(k)}$，从而 $x_{i\,F,}^{(k)} \ll x_{i\,T,}^{(k)}$。若 $x_{i\,F,}^{(k)} \ll x_i^{(k)} \ll x_{i\,T,}^{(k)}$ 则这三个

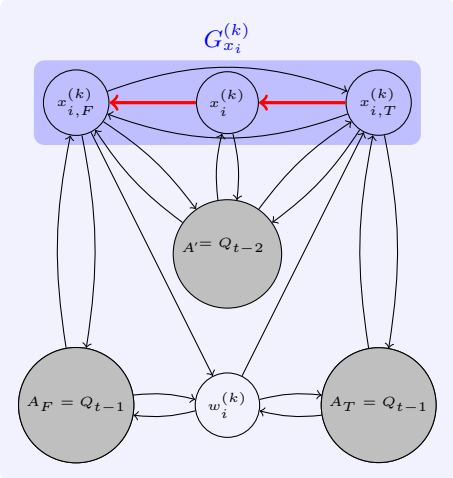

图 1 变量 x_i 在子句 C_k 中出现时所用的二元构件。

v顶点以及 A' 中的 $t-2$ 个顶点会在反向边图中构成一个 $2c$ 团。因此，恰好one $x_i^{(k)} \ll x_{i\,F}^{(k)}$,或 $x_i^{(k)}{}_{,T} \ll x_i^{(k)}$ 中有一个成立，因此结论得证。◁

该构件的设计思路是：反向边图中保留的红边的选择，对应于子句 C_k 中变量 x_i 的赋值。

复制构件 对于同一变量 $x_i \in X$ 在两个不同子句 C_k 和 C_ℓ 中的每一对出现，我们引入一个子图 $G^{(k,\ell)}_{x_i}$，见图 2，它由以下部分组成：
1. 二元构件的一个额外副本（图 2 中的中间层）。**2.** 四个互不相交的完全有向图（图 1 中的灰色节点） A_1、A_2、A_3、A_4，每个有 $t-3$个顶点。**3.** 弧如图 2 所示。

构件中引入的所有新顶点均为该构件的内部顶点，并且在图中不会再获得任何其他邻接关系。注意，该构件不会在 $G^{(k)}_{x_i}$ 的顶点与 $G^{(\ell)}_{x_i}$ 的顶点之间引入任何弧。以下断言刻画了该构件的关键性质。

▷ 断言5。对于 $G^{(k)}_{x_i}$、$G^{(\ell)}_{x_i}$ 和 $G^{(k,\ell)}_{x_i}$ 的顶点上的任意线性序 $\ll$，若反向边图 $G^{(k)\ll}_{x_i}$ 是 K_{2c}-自由的，则 BE($G^{(k,\ell)}_{x_i}$, $\ll$) 包含边 $\{x_i^{(k)}, x_{i\,F}^{(k)},\}$ 当且仅当它包含边 $\{x_i^{(\ell)}, x_{i\,F}^{(\ell)},\}$。

证明。假设 $\{x_i^{(k)}, x_{i\,F}^{(k)},\}$ 是 BE($G^{(k,\ell)}_{x_i}, \ll$) 中的一条边。由此可知，$\{x_i^{(k,\ell)}, x_{i\,T}^{(k,\ell)},\}$ 不是 BE($G^{(k,\ell)}_{x_i}, \ll$) 中的一条边，否则，A_1 中的 $t-3$ 个顶点与周围的四个顶点会在反向边图中诱导出一个 $2c$ 团。由于中间层是二元构件的一个副本，根据断言 4，可知 $\{x_i^{(k,\ell)}$, $x_{i\,F}^{(k,\ell)}$,$\}$ 是 BE($G^{(k,\ell)}_{x_i}, \ll$) 中的一条边。由此可知，$\{x_i^{(\ell)}, x_{i\,T}^{(\ell)},\}$ 不是 BE($G^{(k,\ell)}_{x_i}, \ll$) 中的一条边，否则，A_4 中的 $t-3$ 个顶点与周围的四个顶点会在反向边图中诱导出一个 $2c$ 团。对二元构件 $G^{(\ell)}_{x_i}$ 应用断言 4，可知 $\{x_i^{(\ell)}, x_{i\,F}^{(\ell)},\}$ 是 BE($G^{(k,\ell)}_{x_i}, \ll$) 中的一条边。

类似地，如果 $\{x_i^{(k)}, x_{i\,T}^{(k)},\}$ 是 BE($G^{(k,\ell)}_{x_i}, \ll$) 中的一条边，我们便得到 $\{x_i^{(\ell)}, x_{i\,T}^{(\ell)},\}$ 是 BE($G^{(k,\ell)}_{x_i}, \ll$) 中的一条边，结论随之成立。◁

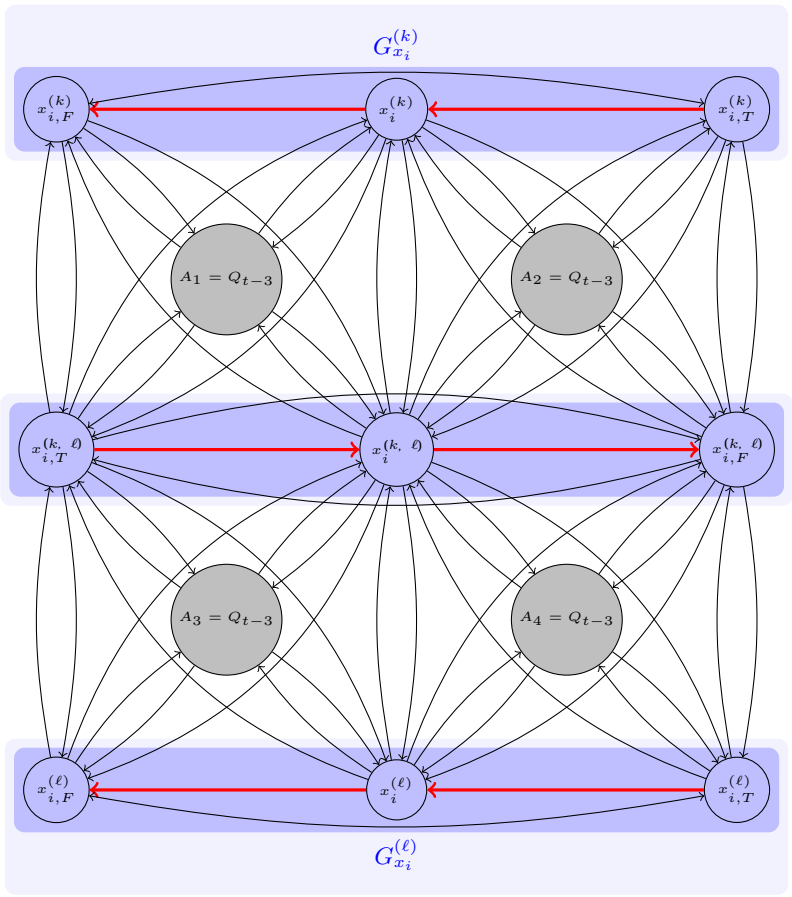

图 2 变量 x_i 在子句 C_k 和 C_ℓ 中各次出现的复制构件。蓝色方框表示二元构件的副本。

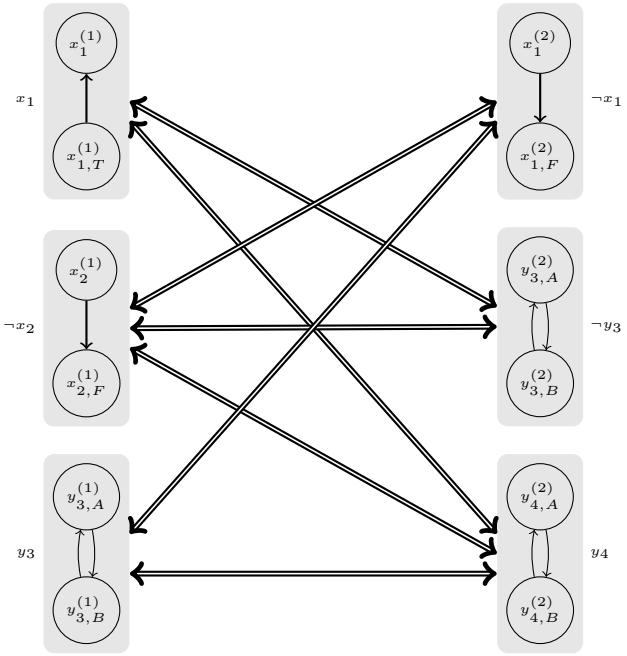

图3 子句 $C_1 = x_1 \vee \neg x_2 \vee y_3$ （左）和 $C_2 = \neg x_1 \vee \neg y_3 \vee y_4$ （右）的子句构件。双重边表示从一个组到另一个组、方向任意的所有可能边。对于 C_1 中的 x_1 和 C_2中的 x_1，对应的顶点之间没有边，因为它们是否定出现。对于 y_3的出现，情况也类似。

该构件的设计思路是确保不同子句中对应于同一变量所有出现的红边，能为变量 x_i给出一致赋值。

子句构件 对于变量 $y_j \in Y$ 在 C_k中的每次出现，我们引入两个顶点$y_{j\,A}^{(k)}$，$y_{j\,B}^{(k)}$，，并用两条平行弧（方向相反）连接它们。对于每个子句 C_k，我们在 G 中使用 6 个顶点，分为三组：每次出现 z 在 C_k中对应一对顶点。

如果对于某个 $y_j \in Y$，有 $z = y_j$ 或 $z = \neg y_j$，那么该组由顶点 $y_{j\,A}^{(k)}$、和 $y_{j\,B}^{(k)}$ 组成。如果对于某个，有，那么该组由顶点 和 组成，它们在$G_{x_i}^{(k)}$中引入。如果对于某个 $x_i \in X$，有 $z = \neg x_i$，那么该组由顶点 $x_i^{(k)}$ 和 $x_{i\,F}^{(k)}$ 组成，它们在 $G_{x_i}^{(k)}$中引入。

归约 我们通过以下方式构造图 G：对于 X 中变量的每次出现，引入一个二元构件；对于同一变量的每一对出现，引入一个复制构件；对于 $\mathcal{C}$ 中的每个子句，引入一个子句构件。最后，对于两个不同子句构件中的任意两个组，如果这两个组对应不同的变量，或对应同一变量的出现且具有相同的符号（两次出现均为正或均为负），则在这两个组之间添加全部八条可能的弧；示例见图3。至此，归约的描述完毕。注意，所构造图的规模关于输入公式的规模是多项式的，并且该归约可以在多项式时间内完成。

8 关于有向团复杂性的一则说明

完备性 假设 $\langle X, Y, \mathcal{C}\rangle$ 是一个是实例，令 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_a)$ 为 $x_1, x_2, \ldots, x_a$ 的一个赋值，使得公式

$$\exists_{y_1, y_2, \ldots, y_b}: \quad (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_c)[x_1 = \nu_1, x_2 = \nu_2, \ldots, x_a = \nu_a]$$

是错误的。我们构造一个线性序 $\ll$，使得反向边图 $G^{\ll}$ 不包含大小为 $2c$ 的团。

首先，我们使用赋值 ν 来定义每个二元构件中的序。设 $G^{(k)}_{x_i}$ 是某个二元构件。若 ν_i 为真，则设定 $x_i^{(k)} \ll x_i^{(k)}{}_{,F} \ll w_i^{(k)} \ll x_i^{(k)}{}_{T}{}_{,}$。否则，设定 $x_i^{(k)}{}_{,F} \ll w_i^{(k)} \ll x_i^{(k)}{}_{,T} \ll x_i^{(k)}$。我们任意地将此序扩展至构件的其余内部顶点，因为由此得到的反向边图对于任何这样的序都相同。我们证明，由该二元构件的顶点所诱导的反向边图是 K_{2c}-自由的。由于我们已假设 $c > 6$，反向边图中任何含有 $2c$ 个顶点的团都必须至少包含一个属于 A_F、A_T 或 A' 的顶点。由于这三个集合之间没有弧，我们可以假设该团恰好包含集合 A_F、A_t 或 A' 中某一个集合的所有顶点，并可能还包含其余四个顶点中的一些。接下来，类似于断言 4 的证明，通过简单的分类讨论可知，由该二元构件的顶点所诱导的反向边图是 K_{2c}-自由的。若 ν_i 为真，则边 $\{x_i^{(k)}, x_i^{(k)}{}_{T,}\}$ 属于所得反向边图。否则，边 $\{x_i^{(k)}, x_i^{(k)}{}_{F,}\}$ 属于反向边图。这样，反向边图中红边的选择就对应于变量 x_i的赋值 ν_i。注意，由于构件的内部顶点与图中的任何其他顶点都不相连，无论我们如何设定其余顶点上的序 $\ll$，在整个图的反向边图中，内部顶点都不可能属于 K_{2c}。

类似地，我们使用赋值 ν 来定义每个复制构件中的顺序。设 $G^{(k,\ell)}_{x_i}$为某个复制构件。如果 ν_i 为真，则设置 $x_i^{(k,\ell)} \ll x_i^{(k,\ell)}{}_{,F} \ll w_i^{(k,\ell)} \ll x_i^{(k,\ell)}{}_{T}{}_{,}$。否则，设置$x_i^{(k,\ell)}{}_{,F} \ll w_i^{(k,\ell)} \ll x_i^{(k,\ell)}{}_{,T} \ll x_i^{(k,\ell)}$。我们任意地将此顺序扩展到该构件其余的内部顶点，因为无论最终采用何种顺序，所得的反向边图都相同。注意，当 x_i 在子句 C_k 和子句 C_ℓ 中的出现具有相同的符号时，归约会在 $G^{(k)}_{x_i}$中的顶点与 $G^{(\ell)}_{x_i}$中的顶点之间添加八条额外的弧，而这些弧在图 2 中并不存在。即使存在这些额外的边，我们仍证明由二元构件的顶点诱导的反向边图是 K_{2c}-自由的。由于我们已假设 $c > 6$，反向边图中任何含有 $2c$ 个顶点的团都必须至少包含 A_1、A_2、A_3 或A_4中的一个顶点。由于这四个集合之间没有弧，我们可以假设该团恰好由集合 A_1、A_2、A_3 或 A_4 中的一个集合的所有顶点，以及可能的一些其余顶点构成。现在，类似于断言5的证明，通过简单的分类讨论可知，由复制构件的顶点诱导的反向边图是 K_{2c}-自由的。与二元构件中一样，在整个图的反向边图中，内部顶点都不能属于 K_{2c}。

我们任意组合为所有二元构件和复制构件定义的序，从而得到这些构件中引入的所有顶点的线性序。最后，我们将子句构件中为变量 Y 的出现所引入的顶点任意插入序 $\ll$ 中。线性序 $\ll$的构造至此完成。

现在我们必须证明反向边图 $G^{\ll}$ 不包含大小为 $2c$的团。反设 X 是一个顶点集合，它们在反向边图中诱导出一个大小为 $2c$ 的团。正如之前所观察到的，X中没有任何内部顶点。每个二元构件中至多有两个顶点属于 X，因为三个非内部顶点中有一个与构件外的任何其他顶点都不相连。同理，每个子句构件中至多有两个顶点属于 X，因为同一个子句构件中不同组的顶点彼此不相连。由于 $|X| = 2c$，我们得知每个子句构件中恰有两个顶点属于 X，且同一个子句构件中的这两个顶点属于同一组，该组对应于

子句 C_k中的某次出现 z。如果 z 是某个 $x_i \in X$ 的一次出现，那么对应的红边必定保留在反向边图中，因此我们得到 ν_i 满足子句 C_k。现在，我们按如下方式构造变量 y_1、y_2、$\ldots$、y_b 的赋值 $\mu = (\mu_1$、μ_2、$\ldots$、$\mu_b)$。如果 z 是某个 $y_j \in Y$ 的一次出现，我们就设置 μ_j，使其满足子句 C_k。由于不同子句构件中对应于同一变量y_j 相反出现的组之间没有边，因此变量 Y 的这一赋值是一致的。如果变量 Y 的赋值 μ尚未确定，我们就任意设定。由此可知，得到的赋值 μ 与 ν 一起满足 C_k中的每个子句。这就产生了矛盾。

可靠性 假设$\langle G, t\rangle$ 是一个是实例，令 $\ll$ 为 G 顶点上的一个线性序，使得 $G^{\ll}$ 中不存在大小为 $2c$ 的团。断言 4 和断言5共同表明，我们可以按以下方式构造变量 X 的赋值 ν。若对于某个子句 C_k 中的某次 x_i 出现，边 $\{x_i^{(k)}, x_{i^T}^{(k)}\}$ 存在于反向边图中，则将 ν_i 设为真。根据断言5，这意味着对于任意子句中的每次 x_i 出现，边 $\{x_i^{(\ell)}, x_{i^T}^{(\ell)}\}$ 都存在于反向边图中。否则，我们将 ν_i 设为假。

现在我们需要证明公式

$$\exists_{y_1,y_2,\ldots,y_b}: \quad (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_c)[x_1 = \nu_1, x_2 = \nu_2, \ldots, x_a = \nu_a]$$

为假。反设存在 y_1，y_2，$\ldots$，y_b 的一个赋值 $\mu = (\mu_1$，μ_2，$\ldots$，$\mu_b)$，该赋值与 ν 一起满足公式中的每个子句。我们将利用此赋值在反向边图 $G^{\ll}$ 中构造一个大小为 $2c$ 的团。对于每个子句 C_k，我们选取两个顶点，它们构成一个组，对应于某个满足 C_k 的变量。归约的构造保证，不同子句构件中的任意两个此类组之间都存在所有四种可能的边。若所选组对应于 Y 中的一个变量，则组内顶点之间由反向边图中的一条边连接。若所选组对应于 X 中的一个变量，则根据赋值 ν 的定义，相应的红边存在于反向边图中。因此，所选顶点在反向边图中诱导出一个大小为 $2c$ 的团。矛盾。◀

3 上界

本节给出竞赛图有向团数的一个简单上界。

▶ **定理 6.** 对于每个具有 $\vec{\omega}(T) \geq t \geq 1$ 的竞赛图 T，我们有 $|V(T)| \geqslant \binom{t+1}{2}$。

证明。 通过对 t 进行归纳法来证明。对于基例 $t = 1$，显然该竞赛图至少需要 $1 = \binom{1+1}{2}$ 个顶点。现在，在归纳步骤中，设 $t \geq 2$，并假设定理的结论对 $t-1$ 成立。

设 T 是一个具有 $\vec{\omega}(T) \geq t$ 的竞赛图。由于 $\vec{\omega}(T) \geq t$，因此对于 $V(T)$ 的每个线性序，反向边图都包含一个团 K_t。因此，至少存在一个顶点子集 $U \subseteq V(G)$，其诱导出一个传递竞赛图的副本 TT_t。设 $U' = V(G) \setminus U$ 为 U 的补集，$T\prime = T[U']$ 为由 $U\prime$ 诱导的竞赛图，$t' = \vec{\omega}(T\prime)$ 为 $T\prime$ 的有向团数，并设 $\ll'$ 为 U' 的某个线性序，满足 $\omega(T\prime^{\ll'}) = t'$。

由于 U 在 T中诱导出一个传递子竞赛图，我们可以在 U 上定义线性序 $\ll''$，使得对于任意 $x, y \in U$，当且仅当 $(x, y) \in A(T)$ 时，有 $x \ll'' y$。考虑 $V(G)$上的线性序 $\ll$：先按 $\ll'$ 中的顺序排列 U' 中的所有顶点，然后按 $\ll''$中的顺序排列 U 中的所有顶点。由于 $\vec{\omega}(T) \geq t$，因此反向边图 $T^{\ll}$ 中至少存在一个团 K_t 的副本。我们知道，反向边图 $T^{\ll}$ 中 U 内的顶点之间没有边。因此，任意

10 关于 DirectedClique 复杂性的注记

反向边图 $T^{\preccurlyeq}$中的团至多包含 U中的一个顶点，并且有 $t' \geq t-1$。根据归纳法假设，我们得到 $|U'| \geq \binom{t}{2}$，并且

$$|V(G)| = |U'| + |U| \geq \binom{t}{2} + t = \binom{t+1}{2}.$$

◀

▶ **推论 7**。 对于每个竞赛图 T，我们有 $\vec{\omega}(T) \leq \sqrt{2\,|V(T)|}$。

证明。 反设 $\vec{\omega}(T) > \sqrt{2\,|V(T)|}$，则有 $\binom{\vec{\omega}(T)+1}{2} > |V(T)|$，这与定理 6 矛盾。 ◀

参考文献

1 Pierre Aboulker、Guillaume Aubian、Pierre Charbit 和 Raul Lopes。竞赛图的团数，2023。 arXiv:2310.04265。2 Pierre Aboulker、Nacim Oijid、Robin Petit、Mathis Rocton 和 Christopher-Lloyd Simon。有向图的度宽度计算是困难的，2024。 arXiv:2407.19270。3 Sanjeev Arora 和 Boaz Barak。《计算复杂性：现代方法》。剑桥大学出版社，2009。4 Guillaume Aubian。竞赛图团数的计算，2024。 arXiv:2401.07776。5 Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解性：NP 完全性理论指南》。W. H. Freeman，1979。6 Víctor Neumann-Lara。有向图的二色数。组合理论杂志 B 辑，33(3):265–270，1982。 doi:10.1016/0095-8956(82)90046-6。7 Tung Nguyen、Alex Scott 和 Paul Seymour。关于竞赛图结构的一些结果与问题。组合理论杂志 B 辑，173:146–183，2025。 doi:10.1016/j.jctb.2025.02.002。8 Marcus Schaefer 和 Christopher Umans。多项式时间层次中的完备性：第一部分：汇编。SIGACT News，33(3):32–49，2002。 doi:10.1145/582475.582484。9 Marcus Schaefer 和 Christopher Umans。多项式时间层次中的完备性：第二部分。SIGACT News，33(4):22–36，2002。 doi:10.1145/601819.601829。10 Marcus Schaefer 和 Christopher Umans。多项式时间层次中的完备性：汇编，2008。网址： https://ovid.cs.depaul.edu/documents/phcom.pdf。11 Larry J. Stockmeyer。多项式时间层次。理论计算机科学，3(1):1–22，1976。 doi:10.1016/0304-3975(76)90061-X。12 Celia Wrathall。完全集与多项式时间层次。理论计算机科学，3(1):23–33，1976。 doi:10.1016/0304-3975(76)90062-1。