arXiv:2602.11803v1 [math.DG] 12 Feb 2026

四元数空间形式中某些子流形上的 Hineva 不等式

Idrees Fayaz Harry、Mehraj Ahmad Lone、Lokenath Ganguly
harryidrees.96@nic.in、 mehraj.jmi@gail.com、 lokenathganguly@gmail.c

摘要
本文建立了四元数空间形式中不同类型子流形的 Hineva 不等式。

1 引言

约翰·F·纳什 [75] 关于将黎曼流形等距浸入欧几里得空间的奠基性工作，为将黎曼流形视为欧几里得空间的子流形提供了强有力的推动。因此，在黎曼子流形的内蕴不变量与外蕴不变量之间建立简洁而尖锐的关系，已成为子流形理论中的核心问题。在外蕴不变量中，平均曲率平方尤为重要。另一方面，内蕴不变量包括截面曲率、里奇曲率和数量曲率等经典量。

陈省身教授在其 1993 年的开创性论文 [1], 中提出了 δ-不变量（或称 Chen 不变量）理论；如今，这一理论已发展成为子流形微分几何领域中最活跃、最重要的研究方向之一。这些新黎曼不变量最初旨在解决陈省身提出的一个公开问题：黎曼流形是否存在浸入任意维欧几里得空间的极小等距浸入 [2]。在 Chen 的研究之前，这个问题一直未能解决，因为经典内蕴不变量不足以控制子流形的外蕴几何（见 [3]）。

1984年，Hineva 建立了以平均曲率表示的黎曼流形子流形截面曲率上下界。

曲率向量和第二基本形式的平方范数，建立了黎曼流形子流形的截面曲率上下界（见[68], [69]）。随后，1990年，她提出了子流形里奇曲率类似的上下界（未给出证明） [70]。

定理1.1 (A) *[70]* 设(M, g) 为某个~黎曼流形$(M, \tilde{g})$的 n维子流形。则

$$K(\Pi_p^2) \geq \tilde{K}(\Pi_p^2) + \frac{n^2|H|^2}{2(n-1)} - \frac{1}{2}\|\sigma\|^2, \tag{1.1}$$

$$K(\Pi_p^2) \leq \tilde{K}(\Pi_p^2) + \frac{4-n}{2}\|H\|^2 + \frac{n-2}{2n}\|\sigma\|^2 + \sqrt{\frac{2(n-2)}{n}}\|H\|^2(\|\sigma\|^2 - n\|H\|^2), \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Ric}(X) \leq \tilde{\mathrm{Ric}}_{T_pM}(X) + \frac{n^2|H|^2}{4}, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Ric}(X) \geq \tilde{\mathrm{Ric}}^{T_pM}(X) + 2(n-1)\|H\|^2 - \frac{n-1}{n}\|\sigma\|^2 - \frac{n(n-2)}{n-1}\sqrt{\frac{(n-1)}{n}}\|H\|^2(\|\sigma\|^2 - n\|H\|^2) \tag{1.4}$$

2008年，她给出了里奇曲率界(A_3)与(A_4)的证明，并讨论了等号情形 [71]。

在 [1], Chen导出了黎曼流形 M 到欧几里得空间的极小等距浸入存在的必要条件。他还建立了一个涉及内蕴不变量（数量曲率和截面曲率）与主要外蕴不变量（平均曲率平方）的最佳不等式。随后，在 [4], Chen进一步得到了关于任意余维数实空间形式中子流形的 k-里奇曲率、平均曲率平方与形算子的最佳不等式，并分析了等号情形。

定理1.2（B） *[4]* 设 M 是实~空间形式 M（c）中的一个 n维子流形。那么，下列结论成立。

(a) 对于 $X \in T_p^1 M$，我们有

$$\mathrm{Ric}(X) \leq (n-1)c + \frac{n^2}{4}\|H\|^2.$$

(b) 若 $H(p) = 0$，则对于 $X \in T_p^1 M$，**(B)** 中的等号情形成立，当且仅当 $X \in \mathcal{N}(p)$。

(c) **(B)** 中的等号情形对每个 $X \in T_p^1 M$ 都成立，当且仅当 p 是测地点，或者 $n = 2$ 和 p 是脐点。

值得注意的是，这些不等式是最优的，因为许多重要类别的子流形都能取到等号。此后，关于各种子流形类别的 Chen不变量及相关不等式的研究文献大量涌现，涉及多种环境几何，包括复空间形式 [5]–[7],余辛空间形式 [8]–[10], Sasaki空间形式 [11]–[13], 局部共形 K¨ahler 空间形式 [[14]–[16]], 广义复空间形式 [[17]–[19]], 局部共形几乎余辛流形 [20, 21], (k, μ)-接触空间形式 [22, 23], Kenmotsu空间形式 [24, 25], S空间形式 [26, 27],以及 T-空间形式 [28]；另请参阅 [29] 及其中的参考文献。

2005年，Oprea利用优化技术得到了实空间形式中子流形的里奇曲率不等式，并针对复空间形式中的拉格朗日子流形改进了该不等式 [76, 77]。同年，Hong和Tripathi推广了Chen的工作 [4] ，导出了任意黎曼流形中子流形的里奇曲率不等式，并讨论了等号情形。

定理1.3 (C) （见 *[72]*）设(M, g) 为黎曼流形$(M, \tilde{g})$的一个 n维子流形~。则下列陈述成立。

(a) 对于 $X \in T_p^1 M$，我们有

$$\mathrm{Ric}(X) \leq \frac{1}{4} n^2 \|H\|^2 + \tilde{\mathrm{Ric}}_{(T_p M)}(X).$$

(b) ***(C)*** 中的等号情形对 $X \in T_p^1 M$ 成立当且仅当

$$\begin{cases} \sigma(X, Y) = 0 & \text{for all } Y \in T_p M \text{ orthogonal to } X, \\ 2\sigma(X, X) = nH(p). \end{cases}$$

若 $H(p) = 0$，则***(C)*** 中的等号情形对 $X \in T_p^1 M$ 成立当且仅当 $X \in \mathcal{N}(p)$。

(c) ***(C)*** 中的等号情形对所有单位向量 $X \in T_p M$ 均成立，当且仅当 p 是测地点，或者 $n = 2$ 和 p 是脐点。

到2008年，不等式（**C**）被称为 Chen–Ricci 不等式 [73]。2009年，Deng 运用关键的代数不等式，得到了一个改进的

拉格朗日子流形在复空间形式中的 Chen–Ricci 不等式，并分析了其等号情形 [49]。在 [74], ，作者推导出了满足代数高斯方程的黎曼流形上 Kulkarni–Nomizu 张量场的 Chen–Ricci 不等式及其改进形式，并讨论了等号情形。根据 Hineva 的研究成果，不等式（**A4**）今后将称为 Hineva 不等式。

定理 1。**4** *[71]* 设 (M, g) 是一个 n 维子流形，嵌入于一个 m-$\tilde{}$ 维黎曼流形 $(M, \tilde{g})$中。则下列结论成立。

(a) 对于 $X \in T_p^1 M$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X) \;\geq\; & Ric(T_p\tilde{M})(X) \\ & +\frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2-(n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|\sigma\|^2-n\|H\|^2)}{n-1}}\right)\end{aligned} \tag{1.5}$$

(b) 当且仅当 $X \in T_p^1 M$ 是一个准脐点时，(1.5) 中的等号情形成立，也就是说，矩阵 (σ_1^0) 具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

且矩阵

$$\frac{\lambda_n-\mu_n}{\lambda_n+(n-1)\mu_n} \tag{1.7}$$

在 $\alpha \in \{n+1, \ldots, m\}$ 上保持不变，其中 λ_n 和 μ_n 是第二基本形式矩阵 (σ_1^0) 的两个不同特征值，并且

$$\lambda_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{tr}(\sigma^n) \pm (n-1)\sqrt{\frac{n\,\mathrm{tr}(\sigma^n)^2-(\mathrm{tr}(\sigma^n))^2}{n-1}}\right), \tag{1.8}$$

$$\mu_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{tr}(\sigma^n) \pm \sqrt{\frac{n\,\mathrm{tr}(\sigma^n)^2-(\mathrm{tr}(\sigma^n))^2}{n-1}}\right). \tag{1.9}$$

(c) 对每个 $X \in T_p^1 M$，(1.5) 中的等号情形成立，当且仅当 p 是一个脐点。

近期，针对满足代数高斯方程的黎曼流形上的 Kulkarni–Nomizu 张量场，提出了 Chen–Ricci 不等式和 Hineva 不等式，并研究了等号情形 [78]。应用这些结果，进一步研究了黎曼子流形上的这些不等式。此外，还针对几乎接触度量流形的一般子流形提出了一种新的表述，并推导出广义 Sasakian 空间形式（包括 Sasaki、余辛和 Kenmotsu 空间形式）中各种黎曼子流形的 Hineva 不等式。

定理 1。**5** *[78]* 设(M, g) 是一个 n 维子流形，嵌入于一个 m-$\tilde{}$ 维黎曼流形$(M, \tilde{g})$中。则以下陈述成立。

(a) 对于 $X \in T_p^1 M$，有

$$Ric_{(T_pM)}(X) + \tfrac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2 - \|\sigma\|^2 - (n-2)(n-1)\|H\|^2\right) \quad (1.10)$$
$$\leq Ric(X) \leq Ric_{(T_pM)}(X) + \tfrac{n^2}{4}\|H\|^2. \quad (1.11)$$

(b) 当且仅当 p 是一个准脐点时，(1.10)中两个不等式同时取等情形对于 $X \in T_p^1 M$成立，也就是说，矩阵(h_{ij}^{α})具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_\alpha \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

其中， λ_α 和 μ_α 是每个矩阵(h_{ij}^{α}) 的两个不同特征值，使得 $\lambda_\alpha = \mathrm{tr}(h^\alpha)/2$ 和 $\mu_\alpha = \mathrm{tr}(h^\alpha)/(2(n-1))$。

(c) (1.10)中的两个不等式同时取等的情形对每个 $X \in T_p^1 M$都成立，当且仅当 p是测地点，或 $n = 2$和p是脐点。

2 预备知识

设 M^m 是一个带度量 g的 $4m$维黎曼流形。若存在一个定义在 M^m 上的 3 维张量$(1,1)$ 向量丛 V，其局部基由近似厄米结构 I、 J 和 K 构成，则称 M^m为四元数凯勒流形，其中

(a) $IJ=-JI=K$, $JK=-KJ=I$, $KI=-IK=J$, $I^2=J^2=K^2=-1$.

(b) 对于 V 的任意局部截面 ϕ， $\nabla_X\phi$ 也是 V 的截面，其中 X 是 M^m 上的任意向量场， ∇ 是 M^m 上的黎曼联络。

事实上，条件 (b) 等价于以下条件:

(b') 存在局部 1-形式 p、 q 和 r，使得

$$\bar{\nabla}_X I=r(X)J-q(X)K,\quad \bar{\nabla}_X J=-r(X)I+p(X)K,\quad \bar{\nabla}_X K=q(X)I-p(X)J.$$

现在令 X 为 M^m 上的一个单位向量，则 X、IX、JX、KX 在 M^m 上构成一个标准正交标架。我们用 $Q(X)$ 表示由它们张成的 4-平面。对于 M^m 上任意两个正交单位向量 X、Y，若 $Q(X)$ 与 $Q(Y)$ 正交，则由 X、Y 张成的平面 $\pi(X,Y)$ 称为全实平面。 $Q(X)$ 中的任意 2-平面称为四元数平面。四元数平面 π 的截面曲率称为 π 的四元数截面曲率。若四元数凯勒流形的四元数截面曲率为常数，则称其为四元数空间形式。四元数射影空间记为 $QP^m(4c)$，它是四元数截面曲率恒为 $4c$ 的四元数凯勒流形。

已知，四元凯勒流形 M^m 是四元空间形式，当且仅当其曲率张量 R 具有如下形式 [32]:

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z=c\big\{&g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\\&+g(IY,Z)IX-g(IX,Z)IY+2g(X,IY)IZ\\&+g(JY,Z)JX-g(JX,Z)JY+2g(X,JY)JZ\\&+g(KY,Z)KX-g(KX,Z)KY+2g(X,KY)KZ\big\},\end{aligned}\tag{2.1}$$

对于切于 M^m的向量 X， Y， Z。

Le设 M^n 为一个 n 维黎曼流形，并等距浸入

于四元数射影空间 $QP^m(4c)$ 中。我们用 $K(\pi)$ 表示与平面截面 $\pi \subset T_pM$、$p \in M$ 相关的 M 的截面曲率。此外，我们用 h 表示 M 的第二基本形式，用 R 表示 M 的黎曼曲率张量。若 M^n 的每个二维平面都映射到 $QP^m(4c)$ 中的一个全实平面，则称 M^n 为 $QP^m(4c)$ 的全实子流形。因此，如果 M^n 是 $QP^m(4c)$ 的全实子流形，那么 $\phi(TM^n) \subset T^\perp M^n$ 对于 $\phi = I$， J 或 K，其中 $T^\perp M^n$ 是 M^n 在 $QP^m(4c)$ 中的法丛。

我们知道，若 M^n 是 $QP^m(4c)$ 的全实子流形，则对于 M^n 中任意两个正交的单位向量 X, Y，由 X 和 Y 张成的平面 $\pi(X, Y)$ 在 $QP^m(4c)$ 中是全实的，$Q(X)$ 与 $Q(Y)$ 正交，并且对于 $\phi = I, J$ 或 K，有 $g(X, \phi Y) = g(\phi X, Y) = 0$。

于是，高斯方程可写为

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + g(h(X,W),h(Y,Z)) - g(h(X,Z),h(Y,W)), \tag{2.2}$$

对于与 M 相切的任意向量 X, Y, Z, W。

我们将 H 记为平均曲率向量，即

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i), \quad p \in M, \tag{2.3}$$

其中 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是切空间 T_pM 的一组标准正交基。此外，我们记

$$h_{ij}^r = g(h(e_i, e_j), e_r),$$

and

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)).$$

对于任意 $p \in M$ 和任意 $X \in T_pM$，定义

$$IX = P_1X + F_1X, \quad JX = P_2X + F_2X, \quad KX = P_3X + F_3X,$$

其中 $P_iX \in T_pM$、 $F_iX \in T_p^\perp M$。

设 T_pM 的标准正交基为 $\{e_1, \ldots, e_n\}$。记

$$\|P_l\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g^2(P_l e_i, e_j), \quad l = 1, 2, 3.$$

定理 2。**1** *[43]* 设 M 是四元数射影空间 $QP^m(4c)$ 中的一个 n 维子流形。则:

(i) 对于每个单位向量 $X \in T_pM$，我们有

$$Ric(X) \leq \frac{n^2}{4}\|H\|^2 + (n-1)c + \frac{3}{2}c\sum_{i=1}\|P_i\|^2 \tag{2.4}$$

3 四元数射影空间 QP^m中的子流形的主要结果$(4c)$

以下关于四元数射影空间中子流形的里奇曲率估计最早由 [43]证明。

定理 3。**1** *[43]* 设 M 是四元数射影空间 $QP^m(4c)$中的一个 n维子流形。则:

(i) 对于每个单位向量 $X \in T_pM$，我们有

$$Ric(X) \leq \frac{n^2}{4}\|H\|^2 + (n-1)c + \frac{3}{2}c\sum_{i=1}\|P_i\|^2 \tag{3.1}$$

根据上述定理，我们得到以下结果

定理 3.2 设 M 是四元数射影空间 $QP^m(4c)$中的一个 n 维子流形。那么:

(a) 对于每个单位向量 $X \in T_pM$，我们有

$$\begin{aligned} Ric(X) \;&\geq\; (n-1)c + \frac{3}{2}c\sum_{i=1}\|P_i\|^2 \\ &+\; \frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2 - \|h\|^2 - (n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|h\|^2 - n\|H\|^2)}{n-1}}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

（***b***） 当且仅当矩阵h_{ij}^{α} 具有以下形式时，$X \in T_p^1M$ 式(3.2) 中的等号情形成立

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

并且对于矩阵

$$\frac{|\lambda_\alpha - \mu_\alpha|}{\lambda_\alpha + (n-1)\mu_\alpha} \quad is\ invariant\ over\ \alpha \in \{n+1, \ldots, 2m\}, \tag{3.4}$$

其中， λ_α 和 μ_α 是第二基本形式矩阵 $\left(h_{ij}^{\alpha}\right)$ 的两个不同特征值，并且

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{n}\left(\mathrm{tr}(h^\alpha) \mp (n-1)\sqrt{\frac{n\ \mathrm{tr}(h^\alpha)^2 - (\mathrm{tr}(h^\alpha))^2}{n-1}}\right), \tag{3.5}$$

$$\mu_\alpha = \frac{1}{n}\left(\mathrm{tr}(\sigma^\alpha) \pm \sqrt{\frac{n\ \mathrm{tr}(h^\alpha)^2 - (\mathrm{tr}(h^\alpha))^2}{n-1}}\right). \tag{3.6}$$

(c) 对每个 $X \in T_p^1 M$，(3.2) 中的等号情形成立，当且仅当 p是一个脐点。

推论 3.1 设 M 是四元射影空间 $QP^m(4c)$中的一个 n维子流形。那么：
(a) 对每个单位向量 $X \in T_pM$，有

$$\begin{aligned}(n-1)c + \tfrac{3}{2}c\textstyle\sum_{i=1}\|P_i\|^2 + \frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2 - \|h\|^2 - (n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|h\|^2 - n\|H\|^2)}{n-1}}\right)\\ \leq Ric(X) \leq (n-1)c + \tfrac{3}{2}c\textstyle\sum_{i=1}\|P_i\|^2 + \frac{n^2}{4}\|H\|^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

(b) 对 $X \in T_p^1 M$，(3.7) 中的等号情形成立，当且仅当矩阵h_{ij}^{α} 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

其中， λ_α 和 μ_α 是矩阵 $\left(h_{ij}^{\alpha}\right)$ 的两个不同特征值，满足 $\lambda_\alpha = {}^{tr}{}_{(h^\alpha)\,2}$ 并且 $\mu_\alpha = {}^{tr}{}_{(h^\alpha)\,2(n-1)}$.

（*c*） 当且仅当 p 是测地点，或者 $n=2$ 且 p 是脐点时，对于每个 $X \in T_p^1 M$，(3.7) 中的等号情形成立。

4 四元数空间形式中 CR-子流形上的 Hineva 不等式

若四元数 K¨ahler 流形（M, σ, g）上的子流形 M 存在两个相互正交且互补的分布 D 和 $D^{\perp}$，使得 D 在四元数结构下不变，且 $D^{\perp}$ 是全实的（见 [44]），则称其为四元数CR子流形。文献 [45], 建立了四元数空间形式中四元数CR子流形的里奇曲率估计如下:

定理 4.1 *[45]* 设 M 是四元数空间形式 $M(c)$中的一个 n 维四元数 ***CR*-子流形** ˜。则:

(i) 对每个单位向量 $X \in D_x^{\perp}$，有

$$\mathrm{Ric}(X) \leq (n-1)\frac{c}{4} + \frac{n^2}{4}H^2. \tag{4.1}$$

(ii) 对每个单位向量 $X \in D_x$，有

$$\mathrm{Ric}(X) \leq (n+8)\frac{c}{4} + \frac{n^2}{4}H^2. \tag{4.2}$$

(iii)

定理4.2 设 M 是四元数空间形式 $M(c)$中的一个 n维四元数 ***CR*-子流形**，其中空间形式为˜。则:

(i) 对每个单位向量 $X \in D_x^{\perp}$，有

$$\mathrm{Ric}(X) \geq (n-1)\frac{c}{4} + \frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2 - \|h\|^2 - (n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|h\|^2 - n\|H\|^2)}{n-1}}\right). \tag{4.3}$$

(ii) 对于每个单位向量 $X \in D_x$，有

$$\mathrm{Ric}(X) \geq (n+8)\frac{c}{4} + \frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2 - \|h\|^2 - (n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|h\|^2 - n\|H\|^2)}{n-1}}\right). \tag{4.4}$$

(iii) 当且仅当矩阵 h_{ij}^{α} 具有(1.6)-(1.9)的形式时， $X \in T_p^1 M$ 在(4.3) 和 (4.4) 中的等号情形成立。

(iv) 若 $H(x) = 0$，则当且仅当.....时， x 处的单位切向量 X 满足(4.3)（分别为(4.4)）的等号情形

$$X \in D_x^{\perp} \cap N_x \quad \textit{(respectively } X \in D_x \cap N_x\textit{)}.$$

定理 4.3 设 M 是一个 n维的四元数 ***CR***-子流形，嵌入于一个~四元数空间形式 $M(c)$ 中。则:

(i) 对每个单位向量 $X \in D_x^{\perp}$，有

$$(n-1)\frac{c}{4} + \frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2 - \|h\|^2 - (n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|h\|^2 - n\|H\|^2)}{n-1}}\right) \leq \mathrm{Ric}(X) \leq (n-1)\frac{c}{4} + \frac{n^2}{4}H^2 \quad (4.5)$$

(ii) 对每个单位向量 $X \in D_x$，有

$$(n+8)\frac{c}{4} + \frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2 - \|h\|^2 - (n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|h\|^2 - n\|H\|^2)}{n-1}}\right) \leq \mathrm{Ric}(X) \leq (n+8)\frac{c}{4} + \frac{n^2}{4}H^2 \quad (4.6)$$

(iii) (4.5) 和(4.6) 中的两个不等式同时取等情形对 $X \in T_p^1 M$ 成立，当且仅当 p 是一个准脐点，即矩阵(h_{ij}^{α}) 具有如下形式(1.12)

(iv) 若 $H(x) = 0$，则当且仅当.....时， x 处的单位切向量 X 满足(??)（分别为(??)）的等号情形

$$X \in D_x^{\perp} \cap N_x \quad \textit{(respectively } X \in D_x \cap N_x\textit{)}.$$

5 四元数空间形式中斜子流形上的 Hineva 不等式

显然，尽管四元数CR-子流形也是四元数子流形和全实子流形的推广，但四元数CR-子流形与斜子流形这两个类之间不存在包含关系,

以下关于四元数空间形式中斜子流形的里奇曲率估计最早由 [40] , 证明, 另一个简洁的证明可见 [47] 。

定理5.1 *[40]* 设 M 是四元数˜空间形式 $M(c)$中的一个 θ-斜真子流形。则:

(i) 对每个单位向量 $X \in T_pM$，有

$$Ric(X) \leq (n-1)\frac{c}{4} + \frac{3c}{8}cos^2\theta + \frac{n^2}{4}\|H\|^2 \tag{5.1}$$

(ii) 若 $H(x) = 0$，则 x 处的单位切向量 X 满足等号情形，当且仅当 X 属于 M在p处的相对零空间

$$N_p = \{X \in T_pM / h(X,Y) = 0, \forall Y \in T_pM\} \tag{5.2}$$

(iii) 定理中的等号情形对p处所有单位切向量恒成立，当且仅当p是全测地点，或者$n=2$ 且p是全脐点。

定理5.2 设 M 是四元数空间˜形式 $M(c)$中的一个 θ-斜真子流形。则:

(i) 对每个单位向量 $X \in T_pM$，有

$$\begin{aligned} Ric(X) \geq \ & (n-1)\frac{c}{4} + \frac{3c}{8}cos^2\theta \\ & + \frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2 - \|h\|^2 - (n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|h\|^2 - n\|H\|^2)}{n-1}}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

（*ii*） 当且仅当矩阵h_{ij}^{α} 具有(1.6)-(1.9)的形式时，(5.3) 中的等号情形对 $X \in T_p^1M$成立。

(ii) 若 $H(x) = 0$，则在 x 处的单位切向量 X 满足等号情形，当且仅当 X 属于 M 在 p 处的相对零空间

$$N_p = \{X \in T_pM / h(X,Y) = 0, \forall Y \in T_pM\} \tag{5.4}$$

(iii) 定理中的等号情形对 p 处所有单位切向量恒成立，当且仅当 p 是全测地点，或者 $n=2$ 且 p 是全脐点。

定理 5.3 设 M 是四元数空间形 $M(c)$中的一个 θ-斜真子流形。那么：

(i) 对每个单位向量 $X \in T_pM$，有

$$(n-1)\frac{c}{4}+\frac{n-1}{n}\left(2n\|H\|^2-\|h\|^2-(n-2)\sqrt{\frac{n\|H\|^2(\|h\|^2-n\|H\|^2)}{n-1}}\right)$$
$$\leq \mathrm{Ric}(X) \leq (n-1)\frac{c}{4}+\frac{n^2}{4}H^2+\frac{3c}{8}cos^2\theta \quad (5.5)$$

(ii) (5.5) 中两个不等式同时取等情形对$X \in T_p^1M$成立，当且仅当 p是一个准脐点，也就是说，矩阵 (h_{ij}^{α})具有以下形式 (1.12)。

(iii) 定理中的同时取等情形对 p 处所有单位切向量恒成立，当且仅当 p 是全测地点，或者 $n=2$且 p 是全脐点。

利益冲突： 作者声明，就本文的发表而言，他们不存在任何利益冲突。

致谢：

参考文献

[1] ChenB.Y. 极小子流形的一些钉扎与分类定理。Arch.Math. 60, 568-578(1993)[2] ChernS.S. 黎曼流形中的极小子流形。堪萨斯大学出版社，劳伦斯（1968）[3] Suceav˘aB., V^aji˘ac M. 关于黎曼空间中陈基本不等式与经典曲率不变量的评注。An.S,tiint,.Univ.Al.I. CuzaIa,si.Mat. 54(1), 27-37(2008)

[4] *Chen B.Y.* 子流形的里奇曲率与形算子之间的关系（任意余维数）。*Glasg. Math. J. 41, 33-41 (1999)*[5] *Chen B.Y.* 复空间形式中子流形的一个一般不等式及其应用。*Arch. Math. 67(6), 519-528 (1996)*[6] *Chen B.Y.* 复空间形式中*CR*翘曲积的一个最优不等式，涉及*CR* δ-不变性。*Int. J. Math. 23(3), 1250045 (2012)*[7] *Oiag˘a A., Mihai I.* 复空间形式中斜子流形的 *B.-Y. Chen* 不等式。*Demonstr. Math. 32, 835-846 (1999)*[8] *Kim J.-S., Choi J.* 余辛空间形式中子流形的一个基本不等式。*Int. J. Math. Math. Sci. 9, 539-547 (2003)*[9] *Liu X., Su W.* 余辛空间形式中斜子流形的形算子。*Studia Sci. Math. Hung. 42(4), 387-400 (2005)*[10]*Yoon D.W.* 余辛空间形式中斜子流形里奇曲率的不等式。*Turk. J. Math. 30, 43-56 (2006)*[11] *Cioroboiu D., Oiag˘a A. Sasaki*空间形式中斜子流形的 *B.Y. Chen* 不等式。*Rend. Circ. Mat. Palermo 52, 367-381 (2003)*[12] *Defever F., Mihai I., Verstraelen L. Sasaki*空间形式中 C-全实子流形的 *B.-Y. Chen* 不等式。*Boll. Unione Mat. Ital, B 11(2), 365-374 (1997)*[13] *Mihai I. Sasaki*空间形式中子流形的里奇曲率。*J. Aust. Math. Soc. 72(2), 247-256 (2002)*[14] *Carriazo A., Kim Y.H., Yoon D.W.* 局部共形 *K¨ahler*空间形式中全实子流形的一些不等式。*J. Korean Math. Soc. 41(5), 795-808 (2004)*[15] *Hong S., Matsumoto K., Tripathi M.M.* 局部共形*K¨ahler*空间形式中子流形的若干基本不等式。*SUT J. Math. 41(1), 75-94 (2005)*[16] *Kim J.-S., Yoon D.W.* 局部共形*Kaehler*空间形式中全实翘曲积的不等式。*Kyungpook Math. J. 44(4), 585- 592 (2004)*

[17] Alegre P., Carriazo A., Kim Y.H., Yoon D.W. 广义空间形式中子流形的 *B.-Y. Chen* 不等式。《印度纯粹与应用数学杂志》38(3), 185-201 (2007年)[18] Kim J.-S., Song Y.M., Tripathi M.M. 广义复空间形式中子流形的 *B.-Y. Chen* 不等式。《韩国数学会会报》40, 411-423 (2003年)[19] Mihai A. 广义复空间形式中斜子流形的形算子 A_H 。Turk. J. Math. 27(4), 509-523 (2003年).[20] Arslan K., Ezentas R., Mihai I., Murathan C., Ozg¨ur C. 局部共形几乎余辛流形中子流形的 *B.Y. Chen* 不等式。《中央研究院数学研究所集刊》29(3), 231-242 (2001年)[21] Yoon D.W. 局部共形几乎余辛流形中某些子流形的里奇曲率不等式。《国际数学与数学科学杂志》10, 1621-1632 (2005年).[22] Arslan K., Ezentas R., Mihai I., Murathan C., Ozg¨ur C. *(*, μ)-接触空间形式中子流形的某些不等式。《澳大利亚数学会会报》64(2), 201-212 (2001年)[23] Tripathi M.M., Kim J.S. C*(*, μ)-接触空间形式中的全实子流形。《澳大利亚数学会会报》67(1), 51-65 (2003年).[24] Arslan K., Ezentas R., Mihai I., Murathan C., Ozg¨ur C. *Kenmotsu*空间形式中子流形的里奇曲率。《国际数学与数学科学杂志》29(12), 719-726 (2002年)[25] Carriazo A., Fernandez L.M., Hans-Uber M.B. *S*-空间形式的 *B.Y. Chen* 不等式：斜浸入的应用。《印度纯粹与应用数学杂志》34(9), 1287-1298 (2003年)[26] Fern´andez L.M., Hans-Uber M.B. 涉及 *S*-空间形式中斜子流形平均曲率的新关系。J. Korean Math. Soc. 44(3), 647-659 (2007年)[27] Kim J.-S., Dwivedi M.K., Tripathi M.M. *S*-空间形式的积分子流形的里奇曲率。《韩国数学会会报》44(3), 395-406 (2007年)

[28] *Aktan N., Zeki Sarikaya M., Ozusaglam E. T*-空间形式中半斜子流形的 *B.Y. Chen* 不等式。*Balk. J. Geom. Appl. 13(1), 1-10 (2008*年*)*[29] *Chen B.Y.* δ-不变量、子流形不等式及其应用。《微分几何专题》，第 *29-155*页。罗马尼亚学术出版社，布加勒斯特 *(2008*年*)*[30] *Chen B.Y.* 伪黎曼几何、 δ-不变量及其应用。世界科学出版社，哈肯萨克 *(2011*年*)*[31] *Berger M.* 关于具有仿射联络的齐性全纯群以及黎曼流形的全纯群。法国数学会通报*83, 279-330 (1955*年*)*[32] *Ishihara S.* 四元数凯勒流形。微分几何杂志*9, 483-500 (1974*年*)*[33] *Besse A.* 爱因斯坦流形。施普林格，柏林 *(1987*年*)*[34] *Salamon S.* 四元数流形的微分几何。《法国高等师范学院科学年刊》*19, 31-55 (1986*年*)*[35]*Adachi T., Maeda S.* 四元数空间形式的若干刻画。日本学士院院刊，*A*辑，数学科学*76(10), 168-172 (2000*年*)*[36] *Gray A.* 关于全纯群为 *Sp(n)·Sp(1)* 子群的流形的一则注记。密歇根数学杂志*16, 125-128 (1969*年*)*[37] *Chen B.Y., Houh C.S.* 四元数射影空间中的全实子流形。纯粹与应用数学年刊*120(1), 185-199 (1979*年*)*[38] *Hong Y., Houh C.S.* 满足 *Chen* 等式的四元数凯勒流形的拉格朗日子流形。几何与代数文集*39(2), 413-421 (1998*年*)*[39] *S¸ahin B.* 四元数凯勒流形的斜子流形。韩国数学会通讯*22(1), 123-135 (2007*年*)*[40] *Vˆılcu G.E.* 四元数空间形式中斜子流形的 *B.-Y. Chen* 不等式。*Turk. J. Math. 34(1), 115-128 (2010*年*)*

[41] *Chen B.Y.* 关于极小等距浸入和拉格朗日等距浸入的一些新障碍。*J pn. J. Math. 26(1)，105-127*（*2000*年）[42] *Yoon D.W.* 四元数空间形式中子流形的一个基本不等式。*Balk. J. Geom. Appl. 9(2)，92-102*（*2004*年）[43] *Liu X.* 关于四元数射影空间中全实子流形的里奇曲率。*Arch. Math. 38(4)，297-305*（*2002*年）[44]*Barros M., Chen B.Y., Urbano F.* 四元数流形的四元数 *CR*-子流形。*Kodai Math. J. 4，399-417*（*1981*）[45] *Mihai I., Al-Solamy F., Shahid M.H.* 关于四元数空间形式中四元数 *CR*-子流形的里奇曲率。*Rad. Mat. 12(1)，91-98*（*2003*年）[46] *Decu S.* 具有半对称度量联络的四元数空间形式中子流形的最优不等式。*Bull. Transilv. Univ. Braşov, Ser. III 2(51)，175-184*（*2009*）[47] *Shahid M.H., Al-Solamy F.* 四元数射影空间中斜子流形的里奇张量。巴黎科学院数学报告 *349(9)，571-573*（*2011*年）[48] *Oprea T.* 关于一个几何不等式。*arXiv:math/0511088*（*2005*年）[49] *Deng S.* 一个改进的 *Chen-Ricci* 不等式。*Int. Electron. J. Geom. 2(2)，39-45*（*2009*）[50] *Deng S.* 四元数空间形式中拉格朗日子流形的改进 *Chen-Ricci* 不等式。*Int. Electron. J. Geom. 5(1)，163-170*（*2012*年）[51] *Liu X., Dai W.* 关于四元数射影空间中子流形的里奇曲率。*Commun. Korean Math. Soc. 17(4)，625-633*（*2002*年）[52] *Vˆılcu G.E.* 四元数空间形式的斜子流形。*Publ. Math. (Debr.) 81(3-4)，397-413*（*2012*年）[53] *Bejancu A.* 四元数凯勒流形的 *QR*子流形。中国数学杂志 *14，81-94*（*1986*年）

[54] *Papaghiuc N.* 凯勒流形的半斜子流形。*An. S¸tiint¸. Univ. Al. I. Cuza Ia¸si 40(1)，55-61*（*1994*）[55] *Shukla S.S., Rao P.K.* 四元数空间形式中四元数斜子流形的里奇曲率。*Acta Math. Acad. Paedagog. Nyh´azi. 28(1)，69-81*（*2012*年）[56] *Tripathi M.M.* 类曲率张量的改进 *Chen-Ricci* 不等式及其应用。*Differ. Geom. Appl. 29(5)，685-698*（*2011*年）[57] *Mihai A., R˘adulescu I.* 复空间形式中凯勒斜子流形的改进 *Chen-Ricci* 不等式。*Taiwan. J. Math. 16(2)，761-770*（*2012*年）[58] *Oprea T.* 拉格朗日情形中的陈不等式。*Colloq. Math. 108，163-169*（*2007*年）[59] *Chen B.Y., Dillen F.* 复空间形式中拉格朗日子流形的最优一般不等式。*J. Math. Anal. Appl. 379(1)，229-239*（*2011*年）[60] *Li G., Wu C.* 复空间形式的斜浸入与陈不等式。*Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed. 25(2)，223-232*（*2005*年）[61] *Chen B.Y., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L.* 满足基本等式的全实子流形。*Arch. Math. 63(6)，553-564*（*1994*） CP^n *Chen B.Y., Prieto-Mart´ın A., Wang X.* 满足涉及 δ*(2, 2)* 的改进等式的复空间形式中的拉格朗日子流形。*Publ. Math. (Debr.) 82(1)，1-25*（*2013*）[63]*Chen B.Y., Vrancken L.* 满足基本等式的拉格朗日子流形。*Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 120(2)，291-307*（*1996*年）[64] *Chen B.Y., Vrancken L.* 复双曲空间中的拉格朗日子流形。*Tsukuba J. Math. 26(1)，95-118*（*2002*年）[65] *Casorati F.* 按照共同观点测量曲率。其与高斯曲率和平均曲率的测量的关系。*Acta Math. 14(1)，95-110*（*1890*）

[66] Decu S.、Haesen S.、Verstraelen L. 涉及 *Caso-rati* 曲率的最优不等式。Bull. Transilv. Univ. Bra˛sov, Ser. B 14(49)，增刊，85-93（2007年）[67] Decu S.、Haesen S.、Verstraelen L. 刻画准脐子流形的最优不等式。JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9(3)，文章79（2008年）。[68] Hineva，Stefka 子流形与第二基本张量。载于：整体微分几何与整体分析 *1984*年（柏林，*1984*年），194-203，数学讲义，1156，施普林格，柏林，1985年。MR0824067（87k:53131）[69] Hineva，Stefka；Beltchev，Evgueni 关于某个 δ- *pinched* 流形的子流形。Annu. Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 81（1987年），第1期，59-65（1994年）。MR1291885（96a:53046）[70] Hineva，Stefka 关于子流形的截面曲率和里奇曲率的不等式。载于：数学与数学教育（阳光海岸，*1990*年），7-8，保加利亚科学院出版社，索非亚，1990年。MR1110608[71] Hineva，Stefka 达到里奇曲率下界的子流形。J. Geom. 88（2008年），第1-2期，53-69。MR2398475（2009c:53068）[72] Hong，Sungpyo；Tripathi，Mukut Mani：关于子流形的里奇曲率，Int. J. Pure Appl. Math. Sci. **2** （2005年），第2期，227–245。[73] Tripathi，Mukut Mani：接触度量流形子流形的 *Chen-Ricci* 不等式，J. Adv. Math. Stud. **1** （2008年），第1-2期，111–134。[74] Tripathi，Mukut Mani：曲率型张量的改进 *Chen-Ricci* 不等式及其应用，Differential Geom. Appl. **29** （2011年），第5期，685–698。[75] Nash，John Forbes，Jr.：黎曼流形的嵌入问题，Ann. of Math.**63** （1956年），20–63。[76]Oprea，Teodor Vasile：关于一个几何不等式，arXiv:math.DG/0511088v1，2005年11月3日。

[77] Oprea，Teodor Vasile：复空间形式中拉格朗日子流形的里奇曲率，Math. Inequal.Appl. **13** （2010年），第4期，851–858。

[78] K. K. Verma、A. Mihai、I. Mihai、M. M. Tripathi *Kulkarni-Nomizu*张量场的 *Hineva* 不等式及其应用