arXiv:2602.11819v1 [math.GR] 12 Feb 2026

不具有虚唯一积性质的剩余有限群

NAOMI BENGI 和 DANIEL T. WISE

Abstract. 我们构造了一个有限生成的剩余有限群 G，其具有如下性质：它的每个有限指数子群都 G 包含一个与 Promislow 群同构的子群。因此， G 没有任何具有唯一积性质的有限指数子群。

1. Introduction

定义 1.1（持续包含）。设 P是一个群。若群 G 持续包含P，则对每个有限指数子群 $G' \subset G$，都存在一个子群 $H \subset G'$，使得 $H \cong P$。

例如，若 G 有一个与 $\mathbb{Z}^r$ 同构的有限指数子群，则 G 持续包含 $\mathbb{Z}^r$。对于持续包含一个秩为 r 的自由群，情况也类似。当然，如果 G没有真有限指数子群，那么 G 持续包含 G的每个子群，因此我们将重点讨论 G是剩余有限群的情形。

一个具有显著性质的简单群是*Promislow* 群，其表示如下：

$$P = \langle x, y \mid x^{-1}y^2xy^2 \ , \ y^{-1}x^2yx^2 \rangle$$

上述表示掩盖了 P的简单结构。它有一个与 $\mathbb{Z}^3$同构的指数为 4 的子群。事实上， P 可表示为一个 amalgamated 积，确切地说是一个“双”：

$$P \ \cong \ K \underset{T}{*} K$$

其中 K 是克莱因瓶的 π_1，而 $T \subset K$ 是与 $\mathbb{Z}^2$同构的指数为 2 的子群。从这个角度很容易看出， P 是无挠的，且虚拟地具有 $\mathbb{Z}^3$。

如果群 G 具有唯一积性质 (UPP)，那么对于任意非空有限子集 A、$B \subset G$，都存在一对 $(a$、$b) \in A \times B$，使得 $ab \neq a'b'$ 当且仅当 $(a'$、$b') \in A \times B - \{(a$、$b)\}$。如果 G 满足 UPP，那么 G 满足 Kaplansky 的“零因子猜想”，该猜想断言，当 $\mathbb{F}$ 是一个域且 G 是无挠群时， $\mathbb{F}G$ 没有零因子。Promislow 群是第二种不满足 UPP 的无挠群；首批例子不久前在 [12] 中被发现。

最近，Gardam 证明了 P 同样不满足 Kaplansky 的“单位猜想” [7]，该猜想断言 $\mathbb{F}G$ 中仅有的单位具有形式 kg，其中 $k \in \mathbb{F} - 0$ 且 $g \in G$。

本文的目标是证明：

Date：2026年2月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 20F65, 20E26。

Key words and phrases. 唯一积性质、Promislow 群、剩余有限。

定理 1.2。 存在一个有限生成的残余有限无挠群，它始终包含 *Promislow* 群。

这回答了 [8] 提出的一个问题：每个有限生成的剩余有限无挠群是否都是虚拟弥散群？弥散是一种蕴含 UPP 的性质，Bowditch [5] 曾对此进行研究。最近，Ng 也构造出了并非虚拟弥散的剩余有限群 [11]。

我们很想知道，还有哪些群会被持续包含在剩余有限群中。或许下述命题成立：

猜想 1.3。设 H 是一个有限生成的剩余有限群。那么存在一个有限生成的剩余有限群 G，使其持续包含 H。

从积极的方向来看，或许有：

问题 1.4。设 G 是一个有限生成线性群。 G 是否有一个具有 UPP 的有限指数子群?

2. Doubles

本文反复使用“沿子群的群双构造”这一概念。对于子群 $H \subset G$，设 G 是 G 的一个副本，因此存在一个同构 $G \to G$，记作 $g \mapsto g$，并设 H 是 H 在 G 中的像。沿 H 对 G 作双构造，得到合并自由积 $G *_{H=H} G$；该合并自由积通过利用此同构将 H 与 H 等同，从而合并 G 和 G。我们将简记为 $G *_H G$。

双构造最著名的例子是克莱因瓶群 $K = \mathbb{Z} *_{2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$。正如引言中提到的，Promislow 群 P 是由双构造 $P = K *_T K$ 得到的。

我们将经常用到以下结论：

引理 2.1. 若 $A \subset B$ 且 $C = A \cap D$，则 $A *_C A$ 嵌入 $B *_D B$。

证明。 根据 amalgamated 积的正规形定理 [9]，此结论成立。事实上，该假设保证正规形映射为正规形。□

对于 $z \in G$， z 的中心化子 是 $C_G(z) = \{g \in G \mid zgz^{-1} = g\}$。

引理 2.2。 设 $N \subset H \subset F$是满足 $[H\colon N] = 2$的群。考虑双倍 $L = H *_N H$和 $G = F *_N F$。根据引理 *2.1*，我们可以将 L 视为 G的子群。

取 $h \in H - N$，并令 $\ell = hh^{-1} \in L$。那么 $C_G(\ell)$ 是L的指数为 *2* 的正规子群，且与 h 的选择无关。此外， $C_G(\ell)$可在内部拆分为直积$N \times \langle \ell \rangle$。

证明。 $L = H *_N H$ 的 Bass-Serre 树 A 是一条直线。 $H - N$ 和 $H - N$中的元素通过反射作用，而 N 固定 A。令 M 为 L 中由所有平移组成的指数为 2 的子群。于是 $N \subset M$，且 $\ell \in M$，因为 $\ell = hh^{-1}$ 是反射的乘积。

首先我们证明 $M = N \times \langle \ell \rangle$。 N 和 ℓ 都属于 M。$\ell = hh^{-1}$ 与每个 $n \in N$ 都可交换，这是因为：

$$\underline{h}^{-1} n \underline{h} = \underline{h}^{-1} \underline{n}\, \underline{h} = h^{-1} n h \quad \Longrightarrow \quad (h\underline{h}^{-1})n = n(h\underline{h}^{-1})$$

由于 ℓ^q 是 $q \neq 0$ 的非平凡平移，我们可知 $N \cap \langle \ell \rangle$ 是平凡的。因此，$\langle N, \ell \rangle \cong N \times \langle \ell \rangle \subseteq M$。最后，由于有两个顶点轨道，长度为 2 的平移 ℓ 是长度最小的平移。因此，任意 $m \in M$ 都具有这样的性质：对于某个 $q \in \mathbb{Z}$， $m\ell^q$ 的作用是平凡的，故 $m\ell^q \in N$。因此 $M = N \times \langle \ell \rangle$。

现在我们证明 $M = C_G(\ell)$。由上文可知 $M \subseteq C_G(\ell)$ 成立，因此我们证明 $C_G(\ell) \subseteq M$。

令 T 为 $G = F * F$ 的 Bass-Serre 树。注意， A 嵌入为 T 的一个子树。此外，对于任意 $s \in H - N$， A 是 $\underline{s}s^{-1}$ 的轴；特别地， A 是 ℓ 的轴。

现在我们证明 $C_G(\ell) \subseteq \mathrm{Stab}_G(A)$。令 $g \in C_G(\ell)$。 $g\ell g^{-1}$ 的轴是 gA。由于 $g\ell g^{-1} = \ell$，它们的轴相同，因此 $gA = A$。

现在我们证明 $\mathrm{Stab}_G(A) = L$。我们已经知道 $L \subseteq \mathrm{Stab}_G(A)$，因此只需证明 $\mathrm{Stab}_G(A) \subseteq L$。假设 $gA = A$。令 v， v 为由 F 和 F 稳定的 A 的顶点。那么对某个 $q \in \mathbb{Z}$，有 $g\ell^q v = v$ 或 $g\ell^q v = v$，也可能两者皆有。然而，$\mathrm{Stab}_G(v) \cap \mathrm{Stab}_G(A) = H$，这可由 v 处的边与 F 中 N 的陪集之间的对应关系得出。同理，$\mathrm{Stab}_G(v) \cap \mathrm{Stab}_G(A) = H$。因此 $g\ell^q \in L$，所以 $g \in L$。

总之， $C_G(\ell) \subseteq \mathrm{Stab}_G(A) = L$，因此 $C_G(\ell) = C_L(\ell) = M$。 □

3. Preliminaries on residual finiteness

子群 $H \subset G$ 若是 H 中有限指数子群的交集，则称为可分。这等价于说， H 是有限拓扑下的闭子集；该拓扑定义在 G 上，其基由 G的有限指数子群的陪集构成。由定义可得以下标准观察：

引理 3.1。若 G 是剩余有限的，则 G 上的有限拓扑是豪斯多夫的。群之间的同态在有限拓扑下是连续的。

以下结论已在 [3], 中明确证明，但也可由 [2]推出。

引理 3.2。设 G 是剩余有限群， $H \subset G$ 是可分的。那么 *amalgamated product* $G \underset{H}{*} G$ 是残有限的。

证明思路。对于 G 或 G中的非平凡元素，可通过同态 $G \underset{H}{*} G \to G$处理，再利用 G 是剩余有限的这一事实。对于 $x \notin G \cup G$，考虑 x [9]的正规形 $x_1 x_2 \cdots x_p$。 $H \subset G$的可分性给出一个有限商群 $G \to \bar{G}$，使 $\bar{H}$中的每个 $x_i H$ 都与 H分离。 x 在 $G \underset{\bar{H}}{*} G$ 中的像是非平凡的，因为其正规形映射为一个 $\bar{H}$非平凡正规形。而 $G \underset{\bar{H}}{*} G$ 是残有限的，因为它是虚自由的。 □

引理 3.3（等化子是闭集）。设 f、g： $X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射。若 Y 是豪斯多夫空间，则等化子 $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ 是一个闭子集。

证明。 我们证明 $X - E$ 是开集。设 $x \in X - E$，则 $f(x) \neq g(x)$。由于 Y是豪斯多夫空间，存在互不相交的邻域 U和 V，分别包含 $f(x)$ 和 $g(x)$，且都属于 Y。

设 $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$。那么， W是 x的开邻域。

对于任意 $w \in W$，我们有 $f(w) \in U$且 $g(w) \in V$。因此，由于 $U \cap V = \emptyset$， $f(w) \neq g(w)$，故 $w \notin E$。所以， $W \subseteq X - E$。因此， $X - E$是开集。□

推论 3.4. 设 G 是一个剩余有限群。设 $H \subset G$ 是 G的一个收缩，即存在一个同态 r：$G \to G$，满足 $H = r(G)$ 和 $r(h) = h$ 对所有 $h \in H$ 均成立。那么， $H \subset G$ 是可分的。

证明。由引理 3.3 应用于 r 的等化子即可得出： $G \to G$ 和 id： $G \to G$. □

推论 3.5 （中心化子的可分性）。 设 G 是一个剩余有限群，且$z \in G$。那么中心化子 C_G（z）是 G的一个可分子群。

证明。 由于 G是剩余有限的，因此 G 上的有限拓扑是豪斯多夫的。

注意， C_G（z）是从 G到其自身的两个连续映射的等化子：

（1）由 $g \mapsto zgz^{-1}$给出的内自同构 ψ_z： $G \to G$。（2）由 $g \mapsto g$给出的恒等映射 id： $G \to G$。

根据引理 3.3， C_G（z）是 G的一个闭子集，因此是可分的。 □

4. A family of doubles

若对每个 i， n_{i+1} 都是 n_i 的倍数，则称序列 $\vec{n}$ 是乘法的。

令 F 为由 a, b 生成的自由群。令 $\vec{n} = (n_i)$ 为一个自然数的乘法序列。令 $H = H(\vec{n})$ 为以下子群：

$$H = \langle a^{-i} b^{n_i} a^i \ : \ 0 \leq i \rangle. \tag{1}$$

我们还使用以下有限生成子群 $H_k = H_k(\vec{n})$，其几何描述如下：

$$H_k = \langle a^k, \ a^{-i} b^{n_i} a^i \ : \ 0 \leq i < k \rangle.$$

我们采用 Stallings 推广的观点，将浸入图与自由群 [13] 的子群联系起来。下文不再提及基顶点，但当顶点不止一个时，可以将其视为 $\{0\}$ 的一个副本。

令 $\mathcal{F}$ 为两个圆的花束，其方向和标记分别为 a 和 b。因此 $F = \pi_1 \mathcal{F}$。

对于 $k \geq 0$， 令 $\mathcal{C}_k$ 为 $\mathcal{F}$ 中 b-圆的连通 n_k 度覆盖。因此 $\pi_1 \mathcal{C}_k = \langle b^{n_k} \rangle$.

令 $\mathcal{H}$ 为从射线 $R = [0, \infty)$ 得到的图，如图 1 右侧所示：沿着 k 附加圆 $\mathcal{C}_k$。因此 $H = \pi_1 \mathcal{H}$。

令 $\mathcal{H}_k$ 为 $\mathcal{H}$ 的第 k 个汇总图，如图 2 右侧所示。它由 $[0, k]/\{0 \sim k\}$ 构成，方法是在 $0 \leq j < k$ 时于 $\{j\}$ 附加一份 $\mathcal{C}_j$。乘法性 $\vec{n}$ 的关键推论是，对每个 k， $\mathcal{H} \to \mathcal{F}$ 都可分解为 $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_k \to \mathcal{F}$。注意，$H_k = \pi_1 \mathcal{H}_k$，其中基点以粗体标出。

T这些子群在 [14] 中被引入，并在 [6] 中得到进一步研究，其中证明了 :

定理 4.1. 设 H 和 H_k 与乘法序列 $\vec{n}$相关联。那么 $H = \cap_k H_k$。因此， H 是可分的。

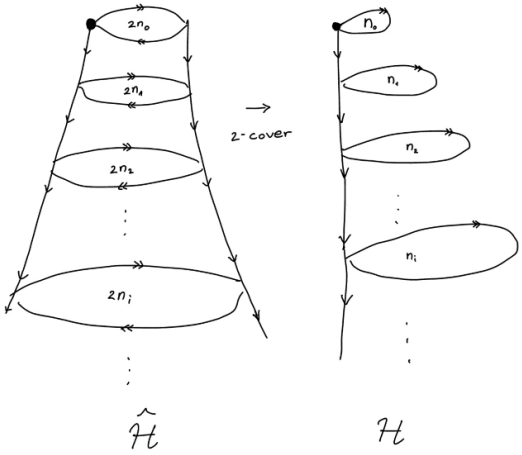

FIGURE 1. $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$的双重覆盖

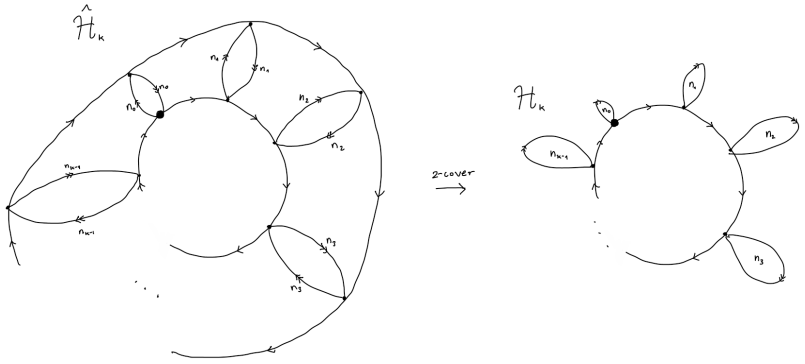

FIGURE 2. $\mathcal{H}_k$ 是 $\mathcal{H}_k$的双重覆盖

证明概要。设 $\mathcal{F}$ 是具有 $\pi_1\mathcal{F} = H$的 $\mathcal{F}$ 的基点覆盖空间，并注意到存在一个嵌入 $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{F}$。类似地定义 $\mathcal{F}_k$，并注意到对每个 k都有 $\mathcal{H}_k \hookrightarrow \mathcal{F}_k$。

考虑一条路径 σ，它表示 $F - H$ 的一个元素，因此 σ 提升为$\mathcal{F}$中的一条非闭路径 $\hat{}\sigma$。这里我们用到这样一个事实： $\mathcal{H}_k$ 是对 $\mathcal{H}$ 的良好“汇总图”，也就是说，对于充分大的 k，它们的大球看起来相同。因此，当 k充分大时，$\hat{}\sigma_k$ 到 $\mathcal{F}_k$ 的基点提升也不是闭合的。因此 $\sigma \notin H_k$。

每个 $H_k = \pi_1\mathcal{H}_k$ 都是可分的，因为它是自由群的有限生成子群。因此 $H = \cap_k H_k$ 是可分的。□

现在我们通过构造 $\mathcal{H}$ 的双重覆盖，来描述 H 的指数为 2 的子群 $H = H(\vec{n})$。令 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 的双重覆盖，它是将 C_k、的连通双重覆盖 C_k 沿着 k 的副本粘合到两条射线上得到的，如图 1 所示。令 $H = \pi_1\mathcal{H}$。因此 $[H : H] = 2$。

定理 4.2。 $H(\vec{n})$ 在 F 中可分，当 $\vec{n}$ 是乘法的。

可以按照定理 4.1 的证明概要，直接证明 $H = \cap_k H_k$；但我们改为将其作为定理 4.1 的推论得到。

证明。 我们有 $[H : H] = 2$。根据定理 4.1，$H = \cap_k H_k$。令 $\mathcal{H}_k$ 为图 2 所示的 $\mathcal{H}_k$ 的双重覆盖，且 $H_k = \pi_1\mathcal{H}_k$。为证明 H 的可分性，我们将证明 $H = \cap_k H_k$。由于 $\mathcal{H} \to \mathcal{F}$ 可分解为 $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_k \to \mathcal{F}$，我们有 $H \subset H_k$。因此，$H \subseteq \cap_k H_k$。对于反方向，考虑包含关系 $H \subseteq \cap_k H_k \subseteq \cap_k H_k = H$。注意到 $\cap_k H_k \neq H$，因为 $b^{n_0} \in H$，但 $b^{n_0} \notin \cap_k H_k$。由于 $[H : H] = 2$ 不存在真中间子群，因此 $H = \cap_k H_k$。□

考虑双 $G = F *_{\widehat{H}} F$。根据引理 3.2， G 具有剩余有限性。

对于每个 i， G 都有一个克莱因瓶子群：

$$K_i = \langle a^{-i}b^{n_i}a^i,\ \underline{a}^{-i}\underline{b}^{n_i}\underline{a}^i\rangle.$$

设 $Y = H \underset{\widehat{}}{*} \underline{H}$。引理 2.1 给出了一个单射 $Y \hookrightarrow G$。将 Y 视为 G的子群。H

设 $Y = C_G(z)$，其中$z = b^{-n_0}b^{n_0}$。那么由引理 2.2， $Y \subset Y$和 $[Y : Y] = 2$。

对于每个 i，K_i 都有指数为 2 的子群，它通过 Y 移作用在引理 2.2 证明中 z 的轴上。

$$T_i = \langle a^{-i}b^{2n_i}a^i,\ a^{-i}b^{n_i}a^i\underline{a}^{-i}\underline{b}^{-n_i}\underline{a}^i\ \rangle.$$

我们感兴趣的群是以下这些双倍：

$$D = D(\vec{n}) = G \underset{\widehat{Y}}{*} \underline{G}.$$

定理 4.3。 $Y \subset G$ 是可分的。

因此， $D = G \underset{\widehat{}}{*} G$ 是剩余有限的。Y

证明。第二个结论由引理 3.2 从第一个结论推出。

第一个结论由引理 2.2 和推论 3.5 得出。 □

设 $P_i = \langle K_i, K_i\rangle$ 是 D 中 Promislow 群的第 i 个副本。事实上，由引理 2.1 可知，每个 $K_i \underset{T_i}{*} K_i \to G \underset{\widehat{Y}}{*} G$ 都是单射。因此 $P_i \cong K_i \underset{T_i}{*} K_i \cong P$。现在我们已经达成了主要目标：

定理 4.4。假设 $\vec{n}$ 具有这样的性质：对每个 $r \geq 1$，都有 $r!$ 整除某个n_i。那么 $D = D(\vec{n})$ 持续包含 P。

特别地，这对 $n_i = 2 \cdot (i!)$成立。

证明。对于一个 对于 n 指数 q 子群 $C \subset D$，我们对每个 $d \in D$都有 $d^{q!} \in C$。因此 $P_q \subset C$。□

5. A few remarks

注5.1（非线性）。 每个 $D = D(\vec{n})$ 都是非线性的。事实上，子群 $G \subset D$ 不是线性的。确实，用 a 共轭 G 的左因子，并用 a共轭 G 的右因子，可得到一个并非“最终单射”–的端同态（对双群也同样成立）。因此这些群不是线性的 [15]。参见问题 1.4。

注5.2（可 amenable）。 根据 Tits 替代定理，有限生成的线性可 amenable 群几乎可解。此外，在特征零下，根据 Selberg 定理，它们几乎无挠 [1]。根据 Mal´cev [10] 的一个定理，它们几乎是（无挠幂零）群的阿贝尔扩张。因此可以证明它们几乎是局部可示群。由此可知，它们几乎是左序群，因而几乎具有 UPP。

注5.3（不可数多个）。 改变序列 $\vec{n}$，便可得到不可数多个剩余有限但不具有虚拟 UPP 的例子。正如 [6]中所做的那样，可以通过同调计算区分它们的同构类型。O

ne ca n 还可以应用 [4] ，证明存在不可数多个拟等距类 .

致谢： 我们感谢审稿人提出的许多有益修正。

References

[1] Roger C. Alperin。Selberg 引理的初等论述。 *Enseign.Math.*，33(3-4)：269–273，1987。[2] Gilbert Baumslag。关于幂零群广义自由积的剩余有限性。

Trans. , ：–。

Amer. Math. Soc. 106 193 209, 1963

[3] James Boler 和 Benny Evans。沿收缩子群 amalgamated 的剩余有限群的自由积是剩余有限的。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，37：50–52，1973。[4] B. H. Bowditch。

2 *Comment. Math.* 生成

Helv. 73 2 232 236, 1998

群的连续多个拟等距类。，( )：–。[5] B. H. Bowditch。唯一积性质的一种变体。 *J. London Math. Soc. (2)*, 62 826，2000 3 813( )：–。[6] Hip Kuen Chong 和 Daniel T. Wise。一个由有限生成剩余有限群构成的不可数族。 *J. Group Theory*，25(2)：207–216，2022。[7] Giles Gardam。群环单位猜想的一个反例。 *Ann. of Math. (2)*，194(3)：967–979，2021。[8] Steffen Kionke 和 Jean Raimbault。关于弥散群的几何方面。 *Doc. Math.*，21 915，2016 873：–。附录由 Nathan Dunfield 撰写。[9] Roger C. Lyndon 和 Paul E. Schupp。 *Combinatorial group theory*。Springer-Verlag，柏林，1977。数学及其边界领域成果，第89卷。[10] A. I. Mal′cev。关于无限可解群的若干类。 *Mat. Sbornik N.S.*，28/70：567–588，1951。[11] Andrew Ng。GGS 群的虚拟第一贝蒂数，2025。[12] Eliyahu Rips 和 Yoav Segev。不具有唯一积性质的无挠群。 *J. Algebra*，108 1 116( )：–126，1987。[13] John R. Stallings。有限图的拓扑。 *Invent. Math.*，71(3)：551–565，1983。[14] Daniel T. Wise。有限生成剩余有限群的一个持续下降端同态。 *Bull. London Math. Soc.*，31(1)：45–49，1999。[15] Daniel T. Wise。关于最终单射端同态。 *J. Comb. Algebra*，9(1-2)：121–127，2025。

Dept. of Mathematics, Weizmann Institute of Science
Email address: naomi.bengi@weizmann.ac.il*Email address*:
daniel.wise@weizmann.ac.il