arXiv:2602.11848v1 [math.LO] 12 Feb 2026

# PBNF-变换作为命题演算的表述，II

PELLE BROOKE BORGEKE

摘要。在本系列文章的第二篇中，我们展示了如何用代数多项式计算命题陈述，并以多项式作为联结词的符号，在本文中，这些联结词称为算子。在第一篇文章中，我们阐释了命题演算的这种表述。简言之，我们将其变换到对偶空间，并将其称为多项式族；它是 DBNF 的另一种形式。我们将这些多项式族称为 PBNF，即多项式布尔范式。我们只使用一条推理律，即替换规则。根据命题形式，我们可以使用 PBNF体系中的不同多项式族，使其更为简洁。此外，我们还可以发现新的定理，并推广已有定理，例如 Church 和 Barkley Rosser 关于对偶性的定理（见后续文章）。

## 1. 引言

我们在此采用多项式布尔范式（简称 PBNF），对经典命题演算（仅有 2 个真值：1 或 0 ）进行数学形式化，并将其称为 PBNF- 变换。这是系列文章的第二篇。该方法完全基于模 2 布尔多项式代数，且只使用一条推理规则，即替换规则。此处我们将变换所依据的论证视为一个算子空间， $\mathcal{OP}$, 它由若干算子类组成，包括零类（$p$， $q$ 操作数或字母）、单一算子、二元算子和复合陈述，我们将它们称为形式（$S_{c(k,l}$）），其中 $c$表示经典， $k$ 表示联结词的数量， $l$ 表示字母的数量。PBNF 变换可以在 PBNF体系中的不同多项式族内进行，以适配论证，从而能够以代数方法轻而易举地计算命题。在规程（规则和条件）

日期：2026年2月9日。2010数学学科分类。 主要。关键词和短语。 算子、正规形式、对偶化、布尔值多项式、多项式演算。

下文将概述如何在二次情形下进行。（$[\cdot]$: =存在， $|$: =异或）

(1.1)
$$[f][\mathcal{H}][a_j][\mathrm{T}|\mathrm{F}][p_j,q_k]\big(f:\mathcal{OP}\to(\mathbb{Z}_2|\mathcal{H}\in\mathbb{Z}_2),f(op_{\boldsymbol{x}}):=g_{(p_j,q_k,a_0)}(op_{\boldsymbol{x}})$$

(1.2)
$$=a_1pq+a_2p+a_3q+a_4=(1|0,\big|g(p_j,q_k,a_0));p|q+a=(1|0,\big|g(p_j|q_k,a);$$

(1.3)
$$\mapsto(1|0=(\mathrm{T}|\mathrm{F})|(\mathrm{F}|\mathrm{T})),$$

(1.4)
$$p_j,q_k\in\mathcal{S}=(p,q,p',q',\Leftrightarrow,|;\big).$$

我们注意到， $f$ 的值域为实数（$1\wedge 0$）， $\in\mathbb{Z}_2$ 并且也属于$g\in\mathcal{H}\in\mathbb{Z}_2$。如果得不到重言式（1）或矛盾式（0），我们就得到一个多项式（$a_1pq+a_2p+a_3q+a_4$）（$0|1$），可对其求值，结果为 0 或 1。当然，我们可以利用这些多项式映射回算子空间，应用逆元 $g^{-1}$（$(a_1pq+a_2p+a_3q+a_4)$），因为对于线性多项式和二次多项式， $g$ 是一个双射。 [1] 本文内容安排如下：第2节简要回顾第一篇文章，并证明另外三种标准的二元 PBNF 族。第3节研究多项式的生成元，并将其与数理逻辑中的标准原始联结词进行比较。第4节着重讨论奇异算子，当然会用到 PBNF，并探讨一些专题结果，例如半否定 [6,11] ，其中我们将展示一种对否定进行典范分解的方法。我们还将研究更高级的逻辑理论。

## 2. 简短回顾及另外三个二元 PBNF 族的证明

我们先用八个段落总结迄今为止所提出的 PBNF 表述。我们还补充了一些布尔代数的常见命题，以便汇总于此。随后，我们介绍并证明另外三个多项式族。1§. 我们将 $x_1,x_2\ldots,x_n,n\in\mathbb{N}$ 称为布尔表达式，其取值为 $x_n\in\mathbb{Z}_0,1$。 $\begin{bmatrix}x_1x_2\\x_3x_4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1x_2\\x_3x_4\end{bmatrix}\ldots$以及 $(x_1x_2x_3x_4)$，$(x_1x_2x_3x_4)\ldots$ 也都是布尔表达式，具有布尔项/单位。2§. 布尔多项式范式——PBNF 是一种将 DBNF 规范变换为布尔多项式族 $g(p_j,q_k,a_0)\in\mathcal{H}$ ，其形式为 $g(p_i,q_j,a_0)=a_1pq+a_2p+a_3q+a_4$； $a_{0\leq k\geq 4}=0|1$。它们也可以用 $\begin{bmatrix}g_1&g_2\\g_3&g_4\end{bmatrix}$.表示。3§. 如果 $g_j,g_k\ldots$ 是布尔多项式，那么 $g_jg_k\cdots$ 和 $g_j+g_k+\ldots$ 也是布尔多项式。4§. 如果 $g$ 是布尔多项式，那么 $g'=g+1$ 也是布尔多项式。5§. 定义乘法和加法，使其遵循 $\mathbb{Z}_2$ 的规则，从而满足 $g^2=g$（幂等方程）和 $g+g=0$（消去方程）。例如，

$$(g_1+g_2)^2=g_1^2+2g_1g_2+g_2^2\Leftrightarrow g_1+g_2=g_1+2g_1g_2+g_2$$

[1]对于一个三次多项式，我们有一对有趣的三元算子的弱双射。参见第一篇文章 [3]。

$$\Leftrightarrow 2g_1g_2 = g_1g_2 + g_1g_2 = 0.$$

此外，例如，可以使用布尔矩阵乘法，从 $(p,\ q,\ 1)$ 定义 PBNF 所需的多项式

$$\begin{bmatrix} p\ p \\ q\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q\ p \\ p\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(q+1)\ 0 \\ (p+q)\ (pq+1) \end{bmatrix} \mapsto (p(q+1), 0, p+q, pq+1) \hookrightarrow (\not\Rightarrow, 0 \mid \uparrow)$$

**6§.** 这些多项式的写法并不唯一，例如线性多项式 $g = p + 1 = p - 1$, 因为若在等式两边都加上 $1p + 1 + 1 = p - 1 + 1 \Leftrightarrow\ p = p.$，这不会影响 PBNF，因为书写形式的变化可以得到修正，而且在这里我们不在演算中使用减号。**7§.** 从算子空间 $\mathcal{OP}$ 的值域(R)（即 **1.** 中的布尔表达式 $x_n$ ）到 $\mathcal{H}$ 的映射

$$g : R(\mathcal{OP}) \to \mathcal{H}$$

构成从 $x_n, n = 1,2,\ldots, n = 0/1$ 的双射。在奇异情形（$j = 1$）下，映射 $f$ 定义为

$$f(x_1, x_2) = (0, p, p + 1, 1) \tag{2.1}$$

在布尔群 $\mathcal{B}_1 = \langle 0, p, p + 1, 1$ 中； $+\rangle$. 在二元情形下，我们有一个布尔多项式矩阵环

(2.2)

$$\mathcal{B}_2 = \langle 0, \begin{bmatrix} 00 \\ 00 \end{bmatrix} p, \begin{bmatrix} 11 \\ 00 \end{bmatrix} q, \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} p + 1, \begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix} q + 1, \begin{bmatrix} 01 \\ 01 \end{bmatrix} p + q, p + q + 1, \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \end{bmatrix}$$

$$(p + 1)q, (p + 1)q + 1, p(q + 1), p(q + 1) + 1, \tag{2.3}$$

$$(p + 1)(q + 1), (p + 1)(q + 1) + 1, pq, \begin{bmatrix} 10 \\ 00 \end{bmatrix} pq + 1, 1; +, \cdot, \rangle. \tag{2.4}$$

映射 $g^{-1}$ : $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{OP}$ 是由 $g(\boldsymbol{x})$ 的原像定义的纤维。**7§**。我们还证明了第一族，也就是我们称为正规族的 $\mathcal{H}^*$。我们不使用 $\mathcal{OP}^*$，因为它指的是算子中的对偶

| $N(op_{\boldsymbol{x}})$ | Number string in $g(p, q, 1)$ | Symbol $\in \mathcal{OP}^*$ |
|---|---|---|
| $(1)N(\wedge) = 1000$ | $(1100)(1010) = (1000)$ | $pq$ |
| $(2_p)N(p, \neg p)$ | $(1100), (0011)$ | $p, p + 1$ |
| $(2_q)N(q, \neg q)$ | $(1010), (0101)$ | $q, q + 1$ |
| $(3)N(\vee) = 1110$ | $1100 + 1010 + 1000 = 1110$ | $(p + 1)(q + 1) + 1$ |
| $(4)N(\Rightarrow) = 1011$ | $1000 + 1100 + 1111 = 1011$ | $p(q + 1) + 1$ |
| $(5)N(\Leftarrow) = 1101$ | $1000 + 1010 + 1111 = 1101$ | $(p + 1)q + 1$ |
| $(6)N(\Leftrightarrow) = 1001$ | $(1011)(1101) = 1001$ | $p + q + 1$ |
| $(7)N(\uparrow) = 0111$ | $(1100)(1010) + 1111 = 0111$ | $pq + 1.$ |
| $(8)N(\downarrow) = 0001$ | $1110 + 1111 = 0001$ | $(p + 1)(q + 1).$ |
| $(9)N(\mid) = 0110$ | $1100 + 1010 = 0110$ | $p + q.$ |

space.

我们注意到，使用构件 $0,\ p,\ q,\ p + 1,\ q + 1,\ 1$, 仅使用 $+$ 和 $\cdot$ 即可在 $\mathbb{Z}_2$ 中填表。加上 1，就会对算子$+1 \leftrightarrow \neg op_x$取反；加上 $p,\ q$ 和 1，则逐分量相加，得到 $p + q + 1$ =(1，1，0，0) +(1，0，1，0) +(1，1，1，1) =(0，1，1，0)+(1，1，1，1) =(1，0，0，1)。

$1+1=0$ 由此得到 $\Leftrightarrow$，或者也可以像上面那样使用乘法。现在我们总结布尔代数的一些常见性质（这里 $\mapsto^*$ 变换为 $g(p,\ q,\ 1)$）

**引理 2.1.** *1.* 恒等式 适用于 $\vee$:

$$(p \vee 0 = p) \mapsto^* (p+1)(0+1)+1 = p, \quad g^{-1}(p) = p$$

适用于 $\wedge$:

$$(p \wedge 1 = p) \mapsto^* pq = p1 = p$$

*2.* 零元律适用于 $\vee$:

$$(p \vee 1 = 1) \mapsto^* (p+1)(1+1)+1 = 1$$

适用于 $\wedge$:

$$(p \wedge 0 = 0) \mapsto^* pq = p0 = 0$$

*3.* 幂等律 适用于 $\vee$:

$$(p \vee p = p) \mapsto^* (p+1)(p+1)+1 = p$$

对于 $\wedge$:

$$(p \wedge p = p) \mapsto^* pp = p$$

*4.* 吸收律 对于 $\vee$:

$$(p \vee (q \wedge p)) \mapsto^* (p+1)(pq+1)+1 = pq+p+pq+1+1 = p$$

对于 $\wedge$:

$$p \wedge (q \vee p) = p \ \mapsto^* \ p[(p+1)(q+1)+1] = p.$$

*5.* 对于 *1* 和 *0*，我们得到

$$(1 \vee 1 = 1),\ (1 \wedge 1 = 1), (1 \vee 0 = 1), (1 \wedge 0 = 0), (0 \vee 0 = 0), (0 \wedge 0 = 0)$$

这里我们也考察条件命题 *6.* $(1 \Rightarrow 0) \mapsto p(q+1)+1 = 0$，但是$(0 \Rightarrow 1) \mapsto p(q+1)+1 = 1$ 和 $(0 \Rightarrow 0) \mapsto p(q+1)+1 = 1$，因此只要$p = 0$ 该命题为真。最后$(1 \Rightarrow 1) \mapsto 1(1+1)+1 = 1$

证明。这里我们使用了第一个正规族 $\mathcal{H}^*$，因为其中混合了 $\wedge$，$\vee$改变族并无益处，而且这里的命题也很简单

$S_{c(1,2)}$. □

在第一篇文章中，我们证明了命题，记作 $S_{c(k,l)}$，其中 $k$ 是该命题中联结词的数量，$l$ 是字母的数量。

**例 2.2.** 我们有 $S_{c(k,l)}$： $p \wedge q = \neg(p \Rightarrow \neg q)$，并将其变换为（PBNF）：

$$g_{(p,q,1)}(S_{c(k,l)}) = (pq = g(\neg)p(q^S+1)+1 = g(\neg)(p(q+1+1)+1)$$

$$= g(\neg)pq+1 = pq+1+1 = pq.$$

我们还比较了命题，看看它们是否得到相同或不同的多项式，以检验是否相等。多项式也可用于消去联结词。我们已经讨论过条件命题 $p \Rightarrow q = \neg p \vee q,$，但如果我们从查看条件命题的多项式$p(q+1)+1$开始，只需在表中寻找形式相似的项，就会找到析取对应的$(p+1)(q+1)+1$，再给 $p$加上 1 即可修正。下表的第一行就是上文关于合取的例子。我们无需进行这项计算，只要查看一个可以变换的多项式即可。本例中的多项式是条件命题 $p(q+1)+1$。我们需要进行两处修改：对 $q$取否定，并对命题取否定，从而得到 $\hookrightarrow (pq) = p \wedge q.$

| 陈述与多项式 | A替代多项式 | A替代陈述 |
|---|---|---|
| $(1)(p\wedge)q \mapsto pq$ | $p(q+1)+1$ | $\neg(p \Rightarrow \neg q)$ |
| $(1')(p\wedge)q \mapsto pq$ | $pq+1$ | $\neg(p \uparrow q) = (p \uparrow q)(p \uparrow q)$ |
| $(1'')(p\wedge)q \mapsto pq$ | $p(q+1)$ | $(p \not\Rightarrow \neg q)$ |
| $(1''')(p\wedge)q \mapsto pq$ | $(p+1)q$ | $(\neg p \not\Leftarrow q)$ |

这里，我们只是尝试使用合取来说明其做法。我们将以两种方式回到非条件连接词，将其作为连接词的一类生成元。现在，我们已经概括了系统基，并回顾了第一篇文章中的一些内容，接下来将通过从多项式的补集提取多项式这一思路进一步展开：我们在各处加上 1（所得结果称为补空间！）。

**定理 2.3**。

| $(op_{\boldsymbol{x}}) \in \mathcal{OP}$ | 符号 $\in \mathcal{OP}' g(p,q,1'=0)$ |
|---|---|
| $(1)(p \wedge q)$ | $pq+1$ |
| $(2)(p, \neg p$ | $p+1, p$ |
| $(3)(p \vee q)$ | $(p+1)(q+1)$ |
| $(4)(p \Rightarrow q)$ | $p(q+1)$ |
| $(5)(p \Leftrightarrow q)$ | $p+q$ |
| $(6)(p\|q)$ | $pq.$ |

现在这些多项式看起来更简单了；我们只需加上1就能否定命题。请注意，在下面的例子中，我们并未对各个子命题使用这份列表；相反，它否定的是整个复合命题。

**例2.4.** 我们证明德摩根定律之一 $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$。我们将该命题写成等价关系

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q)) \mapsto_{g(p,q,0)} p^S + q^S = pq + pq = 0.$$

当然，我们立即看到 LS=RS，其中 $g(p,q,1)$

$$pq = ((p+1+1)(q+1+1)+1)+1 = pq.$$

这个例子表明，通往目标的路径可以有好几条。

现在我们将证明所使用的其他多项式族的存在性。

**定理 2.5**。

| $\mathcal{OP}$ | $\mathcal{H}''g(p',\ q',\ 1)$ | $\mathcal{H}^{**}g(p',\ q',\ 0)$ |
|---|---|---|
| $p$ | $p+1(0,\ 0,\ 1,\ 1)$ | $p+1(0,\ 0,\ 1,\ 1)$ |
| $q$ | $q+1(0,\ 1,\ 0,\ 1)$ | $q+1(0,\ 1,\ 0,\ 1)$ |
| $\neg p$ | $p$ | $p+1$ |
| $p \wedge q$ | $(p+1)(q+1)$ | $(p+1)(q+1)\ +1$ |
| $p \vee q$ | $pq+1$ | $pq$ |
| $p \Rightarrow q$ | $(p+1)q+1$ | $(p+1)q$ |
| $\neg p \Rightarrow \neg q$ | $(p+1)q+1$ | $p(q+1)$ |
| $p \Leftarrow q$ | $p(q+1)+1$ | $p(q+1)$ |
| $\neg p \Leftarrow \neg q$ | $(p+1)q+1$ | $(p+1)q$ |
| $p \Leftrightarrow q$ | $(p+q)+1$ | $p+q$ |
| $p \uparrow q$ | $(p+1)(q+1)+1$ | $(p+1)(q+1)$ |

证明。 现在来看我们在第一篇文章中引入的矩阵对表达式的 $\boldsymbol{x_n}$ 变化。我们可以将这些矩阵用作布尔表达式；大多数二元算子在这种形式下也能正常运作，但那些反对角线上有一个或两个元素为 1 的算子则不适用（反对角矩阵在转置时会改变顺序）。我们还用它们来展示某些特征，例如镜像和其他映射，如下所示。

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_* \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix}\right) \\ \boldsymbol{x}_{\prime} \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1' & x_2' \\ x_3' & x_4' \end{smallmatrix}\right) \end{cases} \tag{2.5}$$

这意味着插入位置相同，但条目的字符已发生变化： $\boldsymbol{x}_*$ 已变为其补集 $\boldsymbol{x}_{\prime}$. 。如果我们想改变插入位置，就必须先改变选择器。最简单的方法是取选择器的补集，这样我们就得到 $1^{st}$ 补集 (0，0，1，1) 和 $2^{nd}$ 补集 (0，1，0，1) 作为选择器。如果我们也像之前一样考虑取反，就会得到一个新的矩阵对

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{\prime\prime} \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_4 & x_3 \\ x_2 & x_1 \end{smallmatrix}\right) \\ \boldsymbol{x}_{**} \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_4' & x_3' \\ x_2' & x_1' \end{smallmatrix}\right) \end{cases} \tag{2.6}$$

我们看到，选择器有一个镜像映射；如果再取补集，就得到拉回补族 $\mathcal{H}^{**}$. 。我们通过在 $g(p',q',1)$（拉回族）中为 $p$ 添加一个、为 $q$ 添加一个，并为 $g(p',q',1')$中的表达式添加一个，得到这张表； $1'$表示 and。由于是 $1' \mapsto 1+1=0$，我们甚至使用 $g(p',q',0)$，而不对 $\neg$ 做任何处理，因为它是 $((p+1)+1)+1=p+1$。关于唯一性，我们已经对此作过说明。多项式族可以写成一般标准形；也就是说，它们不再含有任何可约部分，因为它们满足实数公理。例如， $g(p,q,1)(p \vee q)\ = (p+1)(q+1)\ +1$ 并未写成一般标准形，因为它可以化简为 $pq+p+q$。第一个表达式用于简化计算。□

现在给出完整的多项式表，这些多项式也见于我们的第一篇文章。

| $OP$ | $\mathcal{H}^{*}g(p,\ q,\ 1)$ | $\mathcal{H}'g(p,\ q,\ 0)$ | $\mathcal{H}^{''}(p',\ q',\ 1)$ | $\mathcal{H}^{**}(g(p',q',0)$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p(1,1,0,0)$ | $p'$ | $p'$ | $p$ |
| $p'$ | $p'(0,\ 0,\ 1,\ 1)$ | $p$ | $p$ | $p'$ |
| $q$ | $q(1,\ 0,\ 1,\ 0)$ | $q'$ | $q'$ | $q$ |
| $q'$ | $q'(0,1,0,1)$ | $q$ | $q$ | $q'$ |
| $\neg p$ | $p+1$ | $p$ | $p$ | $p+1$ |
| $p\vee q$ | $(p+1)(q+1)+1$ | $(p+1)(q+1)$ | $pq+1$ | $pq$ |
| $p\wedge q$ | $pq$ | $pq+1$ | $(p+1)(q+1)$ | $(p+1)(q+1)\ +1$ |
| $p\Rightarrow q$ | $p(q+1)+1$ | $p(q+1)$ | $(p+1)q+1$ | $(p+1)q$ |
| $p\not\Rightarrow q$ | $p(q+1)$ | $p(q+1)\ +1$ | $(p+1)q$ | $(p+1)q+1$ |
| $\neg p\Rightarrow\neg q$ | $(p+1)q+1$ | $(p+1)q$ | $p(q+1)\ +1$ | $p(q+1)$ |
| $p\Leftarrow q$ | $(p+1)q+1$ | $(p+1)q$ | $p(q+1)\ +1$ | $p(q+1)$ |
| $p\not\Leftarrow q$ | $(p+1)q$ | $(p+1)q+1$ | $p(q+1)$ | $p(q+1)\ +1$ |
| $\neg p\Leftarrow\neg q$ | $p(q+1)+1$ | $p(q+1)$ | $(p+1)q+1$ | $(p+1)q$ |
| $p\downarrow q$ | $(p+1)(q+1)$ | $(p+1)(q+1)\ +1$ | $pq$ | $pq+1$ |
| $p\uparrow q$ | $pq+1$ | $pq$ | $(p+1)(q+1)\ +1$ | $(p+1)(q+1)$ |
| $p\Leftrightarrow q$ | $p+q+1$ | $p+q$ | $p+q+1$ | $p+q$ |
| $p\|q$ | $p+q$ | $p+q+1$ | $p+q$ | $p+q+1$ |
| $\iota_1$ | $(p+1)pq+1$ | $(p+1)pq$ | $p(p+1)(q+1)\ +1$ | $p(p+1)(q+1)$ |
| $\iota_0$ | $(p+1)pq$ | $(p+1)pq+1$ | $p(p+1)(q+1)\ +1$ | $p(p+1)(q+1)$ |

[2]

## 3. 多项式算子的生成元

本节将讨论我们已经熟悉的算子的原始联结词和生成元。正如我们一路学习到的，事实上只需 $\{\wedge,\neg\}\mapsto(pq,1)$或 $\{\vee,\neg\}\mapsto(p+q+pq,1)$，就能在逻辑理论中构造所有算子；现在我们将对此加以证明。

**定理 3.1.** $\{\wedge,\neg\}\mapsto(pq,\ 1)$ 或 $\{\vee,\neg\}\mapsto(p+q+pq,\ 1)$ 可生成逻辑理论中的全部 *16* 个二元算子。事实上，我们可以使用任意 $(3-1,1110)$和 $\neg$ 或 $(1-3,(0001))$ 和 $\neg$ 作为生成元。

证明。我们可以使用算术算子 $+$ 和 $\times$（即重复加法）来构造逻辑算子。借助 $\{\wedge,\neg\}$，我们有多项式 $pq$ 和 1，以及 $p$ 和 $q$，因为 $pq$ 是 $p$ 和 $q$的乘积，它们也是单位正方形中的定义区域（其他区域则由 $p$ 和 $q$的关系给出）。回想一下，单位正方形中的区域为 (1)$x\wedge y$，(2)$x\wedge y'$，(3)$x'\wedge y$，(4)$x'\wedge y'$) $\mapsto pq$，$p(q+1)$，$(p+1)q$，$(p+1)(q+1)$。这意味着，我们能够利用

[2]Church [4]在练习 16 中给出了一个类似的系统，他称之为表达式的对偶，其映射为 $(1\mapsto 0),(\vee\mapsto\wedge),(\Rightarrow\mapsto\not\Leftarrow),(\Leftrightarrow\mapsto\not\Leftrightarrow),(\Leftarrow\mapsto\not\Rightarrow),(\downarrow\mapsto\uparrow)$. 这些映射属于 $\mathcal{OP}\mapsto\mathcal{OP}_{**}$，它们使用 $1^{st}Complement\ \ p'(0011)$ 和 $2^{nd}Complement\ \ q'(0101)$ 作为选择器，然后对结果取反。例如，$\vee\to(\begin{smallmatrix}0011\\0101\end{smallmatrix}\mapsto(0111))+(1111)=(1000)\to\wedge$, 这是解除变换绑定时所进行的操作。在 Stoll [8 p.178], 中，我们找到了一些多项式，同样出现在一道练习中，使用 $\mathbb{Z}_{0,1}$，这正是 Church 对偶空间，但没有引用文献。此外，Bergmann [2] 使用算术计算而不引用文献，但这基于表达式的最大值和最小值。

$(p, q, pq, 1)$构造单位正方形中所有可能的区域，其中它等于 $X_2 = \{p, q, pq, 1\}$，而 $\mathcal{P}(X_2)$则是 16 个不同的多项式。我们可以利用所定义的纤维来构造算子。关于 $\{\vee, \neg\} \mapsto (p + q + pq, 1)$的证明相同，但在这里， $p$和$q$一开始就已给定。我们可以使用任意的 $(3 - 1, 1110)$ 和 $\neg$，或 $(1 - 3, (0001))$ 和$\neg$ 算子，来得到相同的生成元；例如，对于 3-1 $\Rightarrow (1011)$ $\neg \mapsto (p(q + 1) + 1, 1)$，或 1-3 $\not\Rightarrow$ $(0, 1, 0, 0)$ $\neg \mapsto (p(q + 1), 1)$，因为我们可以采用与 $\vee$和 $\wedge$相同的构造方法。至于 $p, q, \neg p, \neg q$， 0 和1 $p$都只连接到一个区域，另一个区域则无法构造；仅使用 $+$ 和 $\times$ （矩阵扩展选择器可用作单元联结词）时， $p'$ 和 $q'$ 覆盖四个区域中的三个，但最后一个区域无法构造。对于平凡算子 0，无法构造任何区域；对于 1，四个区域也都无法构造。□

选择使用 $\wedge$ 或 $\vee$ 以及否定是较为传统的做法，而且直接拥有这些算子也很方便。不过，如果我们使用谢费尔竖线

$$op_{(p\uparrow q)\boldsymbol{x}(0,1,1,1)} \in \mathbb{Z}_{(1,0)} \mapsto pq + 1$$

；我们只需要这个。当然，这是以可读性为代价的。仅使用 $(p \uparrow q)$ 会产生非常笨拙的命题；现在我们来证明这一点。

**定理 3.2.** 每个作用于

$$(1, 0) \times (1, 0) \to 1, 0$$

的映射，都可以由一个在 $op_{\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3,x_4)}$ 中含有奇数个 *1* 的算子生成，该算子遵循 $\uparrow$和 $\downarrow$ . 的投票结果。在 $g(p, q, 1)$ 中，我们有 $pq + 1 \mapsto p \uparrow (0111) q(\neg\wedge)$ 以及 $g(p, q, 1)$ $= (p + 1)(q + 1) \mapsto p \downarrow (0001) = (\neg\vee)$，但在代数环$(+\times)$中，不存在具有这一性质的其他算子。

证明。 众所周知，以（$\neg$， $\vee$）或（$\neg$， $\wedge$）中的任一组算子为起点，都可以将另一组算子定义为原始联结词。现在，由于 $\uparrow = \neg\wedge$ 和$\downarrow = \neg\vee$，这一点可通过在（$pq + 1$） $+ 1 = pq$ 上加一，以及在（（$p + 1$）（$q + 1$）） $+ 1$ 上加一看出，结论随即得到。至于唯一性，我们注意到

$$(p \uparrow p) \mapsto pp + 1 = p + 1 \mapsto \neg p$$

$$(p \downarrow p) \mapsto (p + 1)(p + 1) = p + 1 \mapsto \neg p.$$

因此，这些算子可以用来构成否定。没有其他算子具有这一关键性质，通过使用上述测试对它们进行检验即可发现这一点。□

**例 3.3**。 我们还可以求解多项式方程

$$p \uparrow q = p \downarrow q. \tag{3.1}$$

$$pq + 1 = (p + 1)(q + 1)\ pq + 1 = pq + p + q + 1 \Leftrightarrow p = q \tag{3.2}$$

由此可得

$$p \uparrow p = p \downarrow p$$

$$\neg p = \neg p.$$

这里我们了解到，当命题字母相等时，↑和↓相等；由于这给出了 $p+1=p+1\mapsto\neg p$，我们证明了最后一行。为了使我们信服，我们来看这个映射

$$\begin{matrix}\uparrow\\ \downarrow\end{matrix}\begin{pmatrix}p&1&1&0&0\\ p&1&1&0&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\neg p&0&0&1&1\\ \neg p&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

当我们遵循这些算子的“选取”时。

注3.4。 在这一现象中，当一个二元算子作用于两个相同的命题字母之间时会变成一元算子，如$(p|p)=\neg p$和$(p\downarrow p)=\neg p$所示，这有点像一种嵌合体。显然， $\mathcal{OP}$中的结果并未显示一元算子，因为这是 $p+1\in\mathcal{OP}'\to op_{\boldsymbol{x}(0,0,1,1)}$ $p\ \ p\ \ (p\uparrow p)$通常的多项式之一。如果我们把该表看作

| | $=\neg p$ |
|---|---|
| 1 1 | 0 |
| 0 0 | 1 |

正如Quine [7, 第 46] 页所述并不那么清楚，因为p作为一个命题字母可以具有真值(1,0)，而 $\neg p$ 具有相反的(0,1)，但这里我们讨论的是由算子连接的命题字母（命题形式），于是 $p\star p$具有如下可能性$(1,0)^2=(1,0)\times(1,0)=(1,1)(1,0)(0,1)(0,0)$。这一论证提出了否定之性质的问题：它是无定形的，可以被视为一元算子，但在某些情况下它表现为二元算子。（显然 $p\neg q$ 没有意义，但 $p(p'0011)q=p'$.）正如 $\neg p\mapsto p+1$，这意味着我们使用四位字符串 $1100+1111=0011$，就像任何二元计算一样。而且在上文中，我们看到$(p\uparrow p)(0001)=\neg p(01)$，这意味着左边是二元运算，右边是一元运算，从而引发关于它们相等性的问题。如果我们使用Lebniz的相等的定义“ $x=y\Leftrightarrow x$ 具有 $y$ 所具有的一切性质，且 $y$ 具有 $x$所具有的一切性质”。这并不表明相等。如果我们使用Quine的定义和PBNF，我们得到

$$x=y\Leftrightarrow(z)(z\in x\Leftrightarrow z\in y)$$

与 $(p|p)\mapsto pp+1=p+1$ 和 $\neg p\mapsto p+1$。在符号集 $x=(0,p,p+1,1)$ 和 $y=(0,p,p+1,0)$ 中，因此这使 $x$和 $y$相等，即 $(z)(z=0,z=1,z=p,z=p+1\in x\wedge y)$。如果使用范式 CBNF，左侧为 $(p\uparrow p)=(x\wedge y)'=x'\vee y'=(x'\wedge y)\vee(x\wedge y')\vee(x'\wedge y')$，对应维恩图中的区域 234，但这对 $x'$不起作用，因为它是维恩图中的区域 2，由 $x=1$ 和 $\neg x=2$组成。我们得到

**定理 3.5**。 等式$(p\uparrow p)=\neg p$ 在算子空间中或采用布尔范式时是不可判定的 。在 *PBNF* 的多项式体系 中，我们可以使用 *Quine* 的等号集合论定义证明该等式，因此它是可判定的。

证明。 我们证明了真值表得出 $(p\uparrow p)=p'(0011)$，这意味着我们得到了 $p$的补集，即区域 3 和 4。这与 $p$的否定不同，后者是 $\neg p(01)$，只有两个真值， $x$(区域 1)

和 $\neg x$(区域 2)。在 PBNF 中，不会出现这个问题，因为我们转而考虑多项式的相等。□

**命题 3.6**。对于一元算子 $\neg$，我们有

$$\neg p = p' = (p \uparrow p) = (p \downarrow p) = (p \uparrow (q)^T) = (q')^T.$$

证明。由于所有公式都映射到 $p+1$，且我们在纤维$g^{-1}$中有一个双射，这就证明了该定理。□

这里，我们还注意到以下事实。

$$0|0 = 0 \downarrow 0 = 1 \quad \text{and} \quad 1 \uparrow 1 = 1 \downarrow 1 = 0 \tag{3.3}$$

**命题 3.7**。原始联结词的另一种可能是

$$(\Rightarrow, \not\Leftarrow \mapsto (p(q+1)+1, (p+1)q)$$

但相反，$\Leftrightarrow and \not\Leftrightarrow$ 不起作用。

证明。将这些多项式相加，得到 $1011 + 0010 = 1001$，或 $(p(q+1)+1+(p+1)q) = p+q+1$，因此得到生成元 $p$、$q$、$1$，并且我们知道这作为一个原始算子已经足够了。第二种情况有 $1001 + 0110 = 1111$，通过乘法，我们得到 $\langle 1001、0110\rangle = 0000$，这给出了 1 和 0，因此我们无法产生 $p$ 和 $q$。□

注 3.8。这是一个由 Church 提出的原始联结词的自对偶系统，见[3]:
$\mathcal{OP} \ni \Rightarrow - \not\Leftarrow \in \mathcal{OP}_*$ 正如我们所看到的

$$\neg(A)\neg(p \Rightarrow q \neq \neg A_1(p \not\Leftarrow q) \mapsto^* p(q+1) \neq (p+1)q.$$

Church 随后提出两种不同的否定以得到 $\neg A = \neg_1 A_1$。从多项式中我们看到，要使 0100 变为 0010，需要加上 0110（异或），于是得到恒等式 $\neg A = |A_1$。这并不算太糟，因为$\neg p$(1100) $\mapsto p + 10011$，而在这里 $| p$(1100) $\mapsto p + p + q = q$(1010)，这意味着将 $p$ 移至 $q$，这与

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

$p$的转置。

## 4. 布尔线性多项式、奇异算子与扩张

在此，我们深入研究表示作用于零类算子的奇异算子的布尔线性多项式。这些算子通常被认为毫无价值，除了否定 $\neg$之外，因此大多数地方都不会研究它们；相比之下，二元算子则得到了相当充分的研究。然而，我们将看到，考察线性情形或许是值得的。我们讨论了 [6, 11] 半否定、否定的典范分解等内容。这里有

$$f : (x_1, x_2) \longrightarrow \mathcal{P}(p; q) \tag{4.1}$$

$$p : f(x_1, x_2) = a_1 p + a_2; a_n = 0, 1; \quad q : f(x_1, x_2) = a_1 q + a_2. \tag{4.2}$$

我们没有混合项，但稍后将通过让 $p$ 和 $q$ 都成为线性多项式来扩展这一族，因此在此扩张中，我们将接受 $p+q$(|,0110) 或 $p+q+1$(I,1001)。这些算子是二元的，但属于选择器这一族，因此它们的性质与此处十分契合。我们还将指出，奇异算子与二元算子之间的界限是模糊的。前四个多项式来自奇异算子，$\{0,p,\neg,1\}$ 或与单位元（1，0）在前

$$op_{x_1,x_2}:\{=(1,0),-(0,0),\neg(0,1),+(1,1)\}$$

并且我们有 $X_p=\{p,1\}$ 和 $X_q=\{q,1\}$，其中我们定义了多项式 $f$：($x_1$; $x_2$) $\to \mathcal{P}(p)\{0,p,p+1,1\}$，由此得到空间

$$\mathcal{P}(p;q)=(X_1^*,f).$$

这个空间自然地来自算子空间 ($X_1$，$op_{x_1,\ x_2}$)，其中集合 $X_1=\{1,0\}$ 和 $op_{x_1,\ x_2}$ 已如上定义。当然，我们也可以通过作出变换 $1\mapsto 0$ 和 $0\mapsto 1$ 来定义其他（较小的）族，因此得到

$$op^*_{x_1,x_2}=\{=(0,1),-(1,1),+(0,0),\neg(1,0)\}.$$

进一步，我们可以改变输入顺序 (1，0) $\mapsto 0$，1)，得到顺序

$$op'_{x_1,x_2}=\{=(0,1),-(0,0),+(1,1),\neg(1,0)\}$$

最后，这可以读作 0=真且 1=假。

$$op^{**}_{x_1,x_2}=\{=(0,1),-(1,1),+(0,0),\neg(1,0)\}.$$

由于异质输入只有两种，即 1,0 和 0,1，并且每个空间都有两种不同的读法，因此对于 $op_{x_1,\ x_2}$，最多可得到四个对偶空间，或三个对偶空间。总之

**定理 4.1**。对于奇异算子，我们得到以下对偶空间

$$1.f(p,1)\quad The\ normal\ space$$

2.$f(p,1)\mapsto f(p,1')$ 补空间：将 *1(T)* 的读法改为 *0(T)*3.$f(p,1)\mapsto f(p',1)$ 拉回空间：将输入从 $p$ 改为 $p'=p+1$4.$f(p',1)\mapsto f(p',0)$ 拉回余补空间：更改 $p$ 和 $1'=0$.的输入

我们可以将 $\neg$ 或 $\neg p\mapsto p+1$ 视为切换算子或否定运算符，并将 $p$或 $=$ 视为中性运算符，亦即恒等式。我们称 $-$ 湮灭算子，通常将其定义为以下陈述

$$p\wedge\neg p\mapsto p(p+1)=0.$$

我们将其称为 $+$ 创建算子，也常定义为

$$p\vee\neg p\mapsto p(p+1)+1=1.$$

这些定义是二元的，因此我们在此不采用它们。相反，我们作如下映射，仅对 $p$ 使用加法，因为在这里我们将布尔代数视为一个群。

$$B_2=\langle\ 0,p,p+1,1;+\rangle\cong B_2^T=\langle 0,q,q+1,1;+\rangle \tag{4.3}$$

这里我们对 $p$ 和 $q$ 使用矩阵映射。

$$p(1100) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right);\ q(1010) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \tag{4.4}$$

因此 $p = q^T$. 在下一个定义中，为了让显示更清晰，我们区分命题字母“p”和多项式“$p$”。这并非绝对必要，因为只需观察该字母前面是否有联结词，就能看出区别。但如果只有 $p$，我们就假定它是 $1^{st}$ 选择器的算子。

**定义 4.2**。

$$(\mathrm{p})[p](= \mathrm{p} \mapsto (p+0) = p,\ -\mathrm{p} \mapsto (p+p) = 0, \quad +\mathrm{p} \mapsto p + (p+1) = 1, \tag{4.5}$$

$$\neg\mathrm{p} \mapsto (p+1);\ \mathrm{p} \in S_{c(0,1)},\ \ p \in f(p,1)) \tag{4.6}$$

我们看到，这里用到了此空间中所有可用的多项式 $\mathcal{P}(p)\{0, p, p+1, 1\}$。

**命题 4.3.** 所有一元算子（此处为 $x$）都是自身的逆元

$$x(xp) = (xx)p = p.$$

证明。 这里我们将 $\hookrightarrow$ 用作逆运算。

$$= (= \mathrm{p}) \mapsto (p+0) + 0 = p \hookrightarrow \mathrm{p}$$

$$-(-\mathrm{p}) \mapsto (p+p) + p = p \hookrightarrow \mathrm{p}, (10+10+10 = 10)$$

$$+(+\mathrm{p}) \mapsto\ (p + (p+1)) + (p+1) = p \hookrightarrow \mathrm{p}, (10+01+01) = 10$$

$$\neg(\neg\mathrm{p}) \mapsto (p+1) + 1 = p \hookrightarrow \mathrm{p}, (10+11+11 = 10)$$

当我们考察所提出的扩张（| 和 I）时，得到

$$|(|p) = |(p+q+p) = q+p+q = p.\ \text{For}\ \ \mathrm{II}(p) = I(p+p+q+1)$$

$$= \mathrm{I}(q+1) = p+q+1+q+1 = p$$

因此，该命题对这一扩张成立。 □

像 $-(+p)$这样的组合在此称为算子复合（通常记作 $\circ$），但复合是通过将算子相加来完成的，如上所示。这意味着两个相同的算子会相互抵消，而两个不同的算子会得到第三个算子。

| $\circ$ | $p$ | $-p$ | $\neg p$ | $+p$ |
|---|---|---|---|---|
| $=$ | $p$ | $0$ | $\neg p$ | $1$ |
| $-$ | $0$ | $p$ | $1$ | $\neg p$ |
| $\neg$ | $\neg p$ | $1$ | $p$ | $0$ |
| $+$ | $1$ | $\neg p$ | $0$ | $p$ |

克莱因四元群中的完整对称性，其中任意两个不同元素给出第三个元素，而两个相同的元素互为逆元。

注 4.4。我们把这些一元算子看作维恩图中的 $p$ 一个圆。 $p'$ 补集是方形内的其余部分， $p \cup p' = 1, p \vee \neg p \mapsto p + p + 1 = 1$。在这种情况下，我们可以认定 $\cup$ 和 $\vee$，而对于二元算子，我们可以有非空交集。当我们写作$p(1, 0)$时，我们想到的是有两个可能值的算子：真=1 或假=0，而 $p(1, 0) = p(1) = T$ 表示真， $p(0, 1) = p(0) = F$ 表示 $\neg p$ ，因此 $p$ 在补空间中为假或与之相反。在表格中，我们注意到一些不直观的结果，例如： $-(\neg p) = 1$ 是重言式，而 $+(\neg p) = 0$是矛盾式；这是定义 3.11 的结果，因为 $-(\neg p) \mapsto p + (p + 1) = 1$ 而 $+(\neg p) \mapsto (p + 1) + (p + 1) = 0.$。表中给出的$p = (1, 0)$显示， $-p(1, 0) = (2, 0) = (0, 0) = 0$ 会降低第一个值，而 $+(-p) = +(0, 0) = (0, 1) = \neg p$ 会提高第二个值。对于 $-(+p) = -(1, 1) = (0, 1) = \neg p$。因此，该表是可交换的，因为我们得到 $+(-p) = -(+p)$。对于 $+(\neg p) = +(0, 1) = (0, 2) = (0, 0) = 0$ ，因为我们处于特征 2，最后 $-(\neg p) = -(0, 1) = (1, 1)$，因为 $-1 = 1$ 在此处。

我们将其总结为一个定理，并在此写作 $-p = p_-$， $\neg p = p_\neg$ 和 $+p = p_+$。此外，为使表述更加清晰，我们将使用 $2 \times 2$ 矩阵。

**定理 4.5**。 对于一元算子 $p, p_-, p_\neg, p_+$，提升算子 $p_+$ 作用于 $p(1,0)$ 的第二个坐标，使其加 $1$；降低算子 $p_-$ 作用于第一个坐标，使其加 $1$。否定算子 $p_\neg$ 使两个坐标都加 $1$ 。变换通过转置输入矩阵 $q^T_{2\times 2} = p_{2\times 2}$ 实现

$$\left(\begin{smallmatrix} p_+ & 1 & 0 \\ p_- & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

如果我们转而考察

$$\left(\begin{smallmatrix} p_- & 1 & 0 \\ p_+ & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

该变换为 $q^T_{2\times 2} \mapsto p_{2\times 2} + 1_{2\times 2}$. 否定的作用方式为

$$\neg p(1,0) = p(1+1;\ 0+1) = p(0\ 1)$$

并且该变换是通常的那种 $\neg p \mapsto p + 1$。我们还有

$$(p_x \circ p_y) \neq (x \circ y) \circ p$$

其中 $x$ 与 $y$ 表示不同的算子。我们还有$(p_x \circ p_x) = 0$。

证明。 设作用于 $p$上的算子的值（$p$， $p_-$， $p_\neg$， $p_+$） $\mapsto$(10)，(00)，(0，1)，(11)。将这些值相加，得到

| $+$ | $p$(10) | $p_-$(00) | $p_\neg$(01) | $p_+$(11) |
|---|---|---|---|---|
| $p$(10) | 00 | 10 | 11 | 01 |
| $p_-$(00) | 10 | 00 | 01 | 11 |
| $p_\neg$(01) | 11 | 01 | 00 | 10 |
| $p_+$(11) | 01 | 11 | 10 | 00. |

这意味着，对一个论元的算子值进行复合，与复合算子作用于同一论元所得的值不同，例如：

$$(4.7)\ \ p_+ \circ p_- = 11+00 = 11 = p_+ \neq\ (+\circ-)\circ p = (11+00)+10 = 01 = p_\neg.$$

在这个空间中，我们唯一的复合运算是加法。我们还发现，实际上我们加上了一个布尔值，因为主对角线上得到的是 00。□

我们发现，创建算子与湮灭算子之间存在如下关系 [3] 在内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 当然这里的运算是加法。

**定理 4.6**。 我们有 $\langle p_\rightarrow, p_x\rangle \circ \langle p_x, p_+\rangle = 1$ 但显然 $\langle p_\rightarrow, p_+\rangle \circ \langle p_+ p_-\rangle = 0.$

证明。 该陈述由 $p = 10$ 得出

$$\langle(0,0)+(1,0)\rangle + \langle(1,0)+(1,1)\rangle = (1,0)+(0,1) = (1,1) = 1$$

对于 $x$ 在 $p_x$ 中的其他取值： $p = 01$

$$\langle(0,0)+(0,1)\rangle + \langle(0,1)+(1,1)\rangle = (0,1)+(1,0) = (1,1) = 1$$

并且对于 $p = 00$

$$\langle(0,0)+(0,0)\rangle + \langle(1,1)+(0,0)\rangle = (0,0)+(1,1) = (1,1) = 1$$

以及 $p = 11$

$$\langle(0,0)+(1,1)\rangle + \langle(1,1)+(1,1)\rangle = (1,1)+(0,0) = (1,1) = 1.$$

对于最后一个陈述，我们得到

$$\langle(0,0)+(1,1)\rangle + \langle(1,1)+(0,0)\rangle = (1,1)+(1,1)+1 = (1,1) = p_+.$$

□

我们可以说，这些算子的作用类似于伴随算子；它们都加 1，但作用在不同的坐标上。正如我们从第一张表中所见， $\neg$ 可以分解为 $(+(-p)) = \neg p$ 或 $(-(+p)) = \neg p$，但并非以典范方式，因此我们得到如下关于否定的分解定理。

**定理 4.7**。 否定 $(\neg \mapsto x+1)$ 无法在正规空间中分解为规范迭代 $f(f(x)) = x+1$，但在补空间中可以，如 $\neg p \mapsto p+1+1 = p$ 和 $f(f(x)) = x$ 所示。如果我们用 $/$ 和 $I$ 扩充奇异算子，那么正规空间中的迭代否定 $f(f(x)) = x+1$ 便可以表述为： $f$ 对 $f(x)$ 的否定，就是 $x$ 的否定， $f(f(x)+1) = x+1$。

[3] 在谐振子 $P = D_x^2 + x^2$ 的研究中，我们可以分解为 $P = p_- \circ p_+ + 1$，其中 $p_+ = D_x + ix$ 和 $p_- = D_x - ix$ $(D_x = \frac{1}{i}\frac{d}{dx})$ 分别称为产生算子和湮灭算子，用于研究 $P$ 的特征值

证明。 转到对偶空间后，我们得到正规空间的 $\neg p \mapsto p+1$. 根据上表，这里没有规范迭代。对于补空间，我们得到 $p = 10$ ，其中 $\neg p = p' \mapsto '(p+1) + 1 = p$，因为我们加入了 1 ； 或者 $\neg(\neg(10) = 10+11 = 01) = \neg 01 = 10.$。现在我们得到了一个典范分解，事实上

$$-(-p) = p \mapsto p+p+p = p.$$

上表之后的其他算子（$=$）、（$+$）和 $\neg$ 也同样如此，但前两个算子要么是中性（$=$），要么是 1；而 $\neg(\neg(p))$ 不能被视为对否定的分解，因为它是自迭代。请注意，我们可以使用 | 或 I，得到相同的结果

$$||p = \mathrm{II}p \mapsto ||p = |1 = p+q+p+1 = p.$$

如果我们混合这两个算子，就会得到

$$I|(p) = \mathrm{I}(p+q+1+p) = \mathrm{I}q+1 = p+q+q+1 = p+1 \hookrightarrow (p+1) = \neg p.$$

当然，我们注意到$(p+q)+(p+q+1)+p = p+1$ ，且 $\hookrightarrow (p+1) = \neg p$。这并不符合 $f(f(x) = x+1$，但这意味着，由于 $f(x) + 1$是 $f(x)$ 的否定，我们得到： $f$ 否定的 $f(x)$ 是.....的否定$x$。□

注记 4.8。 在 BD[10, 第 233]页，作者将¬的分解定义为$\sqrt{\neg}$（Hu[5] 中以 § 表示，作者是这一讨论的开创者），但正如我们所见，这在普通二值逻辑中并不存在，随后 Belnap 和 Dunn 将其推广到四值逻辑。接着，作者得到的结果是：像我们在此处惯常采用的那样， $\sqrt{\neg} = -\ \ +p = {}^{-}$ 奇数 $2n+1$， $n \geq 1$ 偶数 $4n = \breve{}\breve{} \ldots = p$，而 $2n$， $n = 2n+1 = 2$、6、10.....给出 $\neg p$。

| $\times$ | $=$ | $-$ | $\neg$ | $+p$ |
|---|---|---|---|---|
| $=$ | $p$ | $-p$ | $\neg p$ | $+p$ |
| $(-p)$ | $+p$ | $\neg p$ | $+p$ | $p$ |
| $(\neg p)$ | $+p$ | $+p$ | $p$ | $-p$ |
| $(+p)$ | $+p$ | $p$ | $-p$ | $\neg p$ |

这不是上面的系统；这里 $\breve{}p = \neg p$ 因此 $-(-p) = p$。算子 $-$现在分两步改变输入值，因此对于 $p(1, 0)$，我们得到

$$-(-(p(1,0)) = -p_{-}(0,0) = p_{\neg}(0,1) = \neg p$$

或者，如果我们从第二个坐标开始

$$-(-(p(1,0)) = -p_{+}(1,1) = p_{\neg}(0,1) = \neg p$$

这意味着它并不否定前一步。如果我们用模 4 构造一张表，其中

$$= 0(0), -(1), (\neg) - -(2), (+) - - - (3), (=) - - - -$$

我们发现

| * | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

2 和 3 都构成半否定，因为 $3+3=6=2+2+2=0+2$（模 4），且 2 是其自身的逆元，而 1 和 3 互为逆元。但这意味着我们在前一注记中所评论的那个虽不直观却正确的结果将会出现，因为 $-(\neg)p = -\neg(1,0) = -(0,1) = (1,1) = +p$ 以及 $+\neg(p) = +\neg(1,0) = +(0,1) = (1,1) = +p$。我们可以把这样的算子称为部分真值改变算子，因为它进行一次半翻转：$10 \mapsto 00$与否定形成对照，否定是完全真值改变算子或翻转：$10 \mapsto 01$。当然，这意味着我们有四个真值而非 2 个，即对于正规空间，我们可以称它们为 (11) 大真($T$)、(10) 小真($t$)、$(0,1)$ 小假($f$) 以及 $(0,0)$ 大假($F$)。这些名称源于这样一个事实：我们在真值上把 (1,0) 看得高于 (0,1)，因为我们把第一个坐标视为“本位”坐标，把第二个视为外部坐标（如同电子邮件：此消息来自组织外部），而我们对后者的核查较少。在此我们可以看到它是如何运作的。

$$11$$

$$10 \qquad 01$$

$$00$$

生成元 $-$ 在此处按顺时针方向加 1，并从左向右变化，因此实际上我们可以分两步改变真值。如果使用多项式，我们可以得到如下结果：这里是一个正规空间

$$g(p,q,1)$$

$$g(p,q',1) \qquad g(p',q,1)$$

$$g(p',q',1)$$

这意味着输入值（真值）会逐一被否定

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 0 & 0 \\ q+1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} p+1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ q & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p+1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ q+1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

现在，否定的生成元是 1，我们按顺时针方向移动，逐个改变输入值，并得到与 4 个真值时所见相同的模式。这意味着我们有

**命题4.9.** $g'(g'(g(p,q,1))) = g(p',q',1)$ 与 $g'((g'(g'(g(p,q,1))))) = g(p',q',1')$ 是带否定的多项式迭代，加*1*。

证明. 这是一种规范迭代，因为它由两个相同的算子组成；它不是自迭代，并遵循上文所设定的规则，即我们从左侧开始一次改变一个。 $p$ 与 $q$ 被映射为$p+1 \mapsto \neg p$ 与 $q+1 \mapsto \neg q$，这是一种否定。经过三次改变，当我们把1加到零上时，得到的只是真的次序 $10 \mapsto 01$的改变，因此¯0现在表示真值，我们用0.来强调这一点。

$$\begin{array}{ccc} & \left(\begin{smallmatrix} p & 1 & 1 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \searrow & \\ \left(\begin{smallmatrix} p & 1 & 1 & \bar{0} & \bar{0} \\ q & 1 & \bar{0} & 1 & \bar{0} \end{smallmatrix}\right) \nearrow & & \left(\begin{smallmatrix} p{+}1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ q & 1 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \downarrow \\ \left(\begin{smallmatrix} p & 1 & 1 & \bar{0} & \bar{0} \\ q{+}1 & \bar{0} & 1 & \bar{0} & 1 \end{smallmatrix}\right) \uparrow & & \left(\begin{smallmatrix} p{+}1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ q{+}1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \swarrow \\ & \nwarrow \left(\begin{smallmatrix} p{+}1 & \bar{0} & \bar{0} & 1 & 1 \\ q{+}1 & \bar{0} & 1 & \bar{0} & 1 \end{smallmatrix}\right) & \end{array}$$

□

我们以指出以下内容来结束这段讨论

**引理 4.10**。 $-(-)$ 这一类德摩根否定的奇异降阶算子

$$\left\{\begin{array}{l} i) -(p \vee\ q) = \neg p \wedge q = p \not\Leftarrow q \\ ii) -(p \wedge\ q) = p \wedge \neg q\ = p \not\Rightarrow q \end{array}\right. \tag{4.8}$$

是对条件命题 $(\Rightarrow, \Leftarrow)$ 的否定。

证明。 对于 i)，我们在多项式一侧得到 $(p+1)(q+1)+1+p = (p+1)q$，取纤维 $g^{-1}(p, q)$，便得到 $p \not\Leftarrow q$或 $\neg p \wedge q.$。用同样的方法，我们得到 ii)。虽然 $-$ 不是否定，但它确实尽了最大努力！ □

事实上，我们现在可以定义

**定义 4.11**。

$$\left\{\begin{array}{l} i) -(p \vee\ q) := \neg(\neg p \vee q) = p \wedge \neg q \\ ii) -(p \wedge\ q) := \neg(p \vee\ \neg q) = \neg p \wedge\ q \end{array}\right. \tag{4.9}$$

此外，如果我们研究奇异算子对二元陈述的影响，我们便可以了解

**定理 4.12**。

| $*$ | $(p \wedge q)$ | $(p \vee q)$ | $(p \Rightarrow q\ \ )$ | $(p \Leftarrow q)$ | $(p \Leftrightarrow\ q)$ | $+p$ | $\neg q$ | $p \downarrow\ q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $=$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $p \wedge q$ | $p \Leftrightarrow\ q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \downarrow\ q$ |
| $-$ | $p \wedge \neg q$ | $p \vee q$ | $1$ | $p \Leftarrow q$ | $\neg p / \neg q$ | $1$ | $1$ | $p \Leftarrow q$ |
| $\neg$ | $p \uparrow q$ | $1$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Rightarrow q$ | $(p\|q)$ | $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
| $+$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftarrow q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $0$ | $0$ | $\neg p \wedge q$ |

表格续下页

| $*$ | $p \uparrow q$ | $(p\|q)$ | $(p \not\Rightarrow q)$ | $(p \not\Leftarrow q)$ | $p$ | $q$ | $1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $=$ | $p \uparrow q$ | $(p\|q)$ | $(p \not\Rightarrow q)$ | $(p \not\Leftarrow q)$ | $p$ | $q$ | $1$ | $0$ |
| $-$ | $p \Rightarrow q$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $0$ | $0$ | $\neg p$ | $-p$ |
| $\neg$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Leftrightarrow\ q)$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftarrow q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $0$ | $1$ |
| $+$ | $p \Leftarrow q$ | $\neg q$ | $p \uparrow q$ | $p \downarrow q$ | $1$ | $1$ | $p$ | $+p$ |

注记 4.13. 若并不显然我们将使用 $f(q, 1)$，则我们使用多项式 $f(p, 1)$，例如当 $q$ 单独出现时。

在下一篇论文中，我们将继续探讨算子理论和多项式布尔范式（PBNF）作为命题演算的一种表述。我们研究二元算子的格，并证明 Church-Rosser 对偶定理的扩张。以下是参考文献。

## 参考文献

[1] 1978 Barkley Rosser J. 数学家逻辑学，Dover，Bergmann, M.：多值逻辑与模糊逻辑导论，剑桥大学出版社，2008。[2] [3] Borgeke Brooke, P.：*PBNF*-变换作为命题演算的一种表述，*I*，http://arxiv.org/abs/2602 06272 。Church, A.：数理逻辑导论，普林斯顿大学出版社，[4] 1956。[5] Halmos, P.R，《布尔代数》，Martino 出版社，2013。[6] Humberstone, L. 迭代否定。Theoria，61，1，1995。第1-24页。[7] Quine, W.V,.: 数理逻辑W.W. Norton & Company Inc. Soc. 1940。[8] Stoll R. R.：集合论与逻辑Dover，1979。[9] Tarski, A.：逻辑学导论，牛津大学出版社，2013。[10] Veatch, W. S. 作为布尔代数的命题逻辑——一种新视角，第*1*卷，Amazon 出版社，2017。[11] Wansing, H. Omori, H. *Belnap-Dunn* 逻辑新论。施普林格，2019。[12] Whitehead, A.N., Russel B.《数学原理》第*1*卷。Merchant Books，1910。

林奈大学电子邮件地址：
pelle.borgeke@lnu.se