arXiv:2602.11905v1 [math.SP] 12 Feb 2026

有限群自由积的随机表示的强收敛

MARCO BARBIERI 和 URBAN JEZERNIK

ABSTRACT. 我们将 Chen–Garza-Vargas–Tropp– van Handel 和 Magee–Puder–van Handel 针对随机置换模型中算子范数界提出的多项式方法，推广到存在扭元的情形。主要的新特点是，迹的渐近展开自然涉及 N 的分数次幂，而非通常的洛朗级数。我们提出该方法关键假设的分数次幂类比，并证明这些类比能够推出强收敛。我们验证了这些类比适用于有限群的自由积 $\Gamma = G_1 * \cdots * G_m$。具体而言，对于均匀随机的 $\phi_N \in$ 同态Γ，对称群(N)，令 $\pi_N = \mathrm{std} \circ \phi_N$，其中 std 表示对称群$(N)$ 的标准 $(N-1)$ 维表示（即去掉平凡子表示后的置换表示）。由此我们推出 π_N 强收敛到 Γ的左正则表示。作为应用，我们得到相关随机 Schreier 图的渐近尖锐谱隙，其中包括 $C_2 * C_2 * C_2$的近似拉马努金性质，以及$C_2 * C_3 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ 的一个显式非拉马努金极限谱半径。

1. INTRODUCTION

1.1. **扩展图**。扩展图是组合学、几何学、概率和群论交汇而成的非凡成果。若一族有限连通图的顶点数不断增加 N，且每个图的次数固定为 d，那么如果这族图中的每个邻接算子 $\mathcal{A}$ 在最大特征值 d （其佩龙–弗罗贝尼乌斯特征向量为全 1 向量 $\mathbf{1}$）与绝对值次大的特征值之间都存在统一的谱隙，则称其为 $\|\mathcal{A}|_{\mathbf{1}^\perp}\|$[Lub95、Kow19]所述的扩张子族。这样的图族是理论计算机科学（去随机化、编码理论、概率可检验证明、网络设计）和数学（随机游走的混合、群中的增长、筛法、拓扑与几何应用）中的基础工具。关于全面综述，请参见[HLW06]。

最早的扩张子族显式构造由 Margulis 给出[Mar73], ，其方法利用算术格以及表示论中的 Kazhdan 性质（T）。此后，人们发现了能够达到最大可能谱隙的显式构造。阿隆–博帕纳界 [HLW06，定理 5.3] 断言，在任何一族 d-正则图中，都有

$$\|\mathcal{A}|_{\mathbf{1}^\perp}\| \geq 2\sqrt{d-1} - o(1) \qquad (N \to \infty),$$

这为谱隙提供了一个普适约束。若一个扩张子族中的每个图都满足 $\|\mathcal{A}|_{\mathbf{1}^\perp}\| \leq 2\sqrt{d-1}$，则称该扩张子族为拉马努金族 。因此，拉马努金族是最优的扩张图，而首批显式构造由 Lubotzky、Phillips 和 Sarnak [LPS88] 以及 Margulis [Mar88],在数论中的深刻成果基础上获得。

本研究得到斯洛文尼亚研究署项目 P1-0222 及资助项目 J1-70033、J1-50001、J1-4351 的支撑。

随机图中的展开式。 本文的一个核心观点是，利用随机性可以构造（非显式的）扩张子族。与 Margulis 的工作同期，Pinsker [Pin73] 以及独立开展研究的 Barzdin 和 Kolmogorov [Bar93] 证明，随机 d-正则图在 N 个顶点上以高概率构成扩张子族，也就是说 $1-o(1)$，当 $N \to \infty$时。后来，Friedman [Fri08] 证明了一个强得多的结果：随机 d-正则图是近似拉马努金，这意味着 $\|\mathcal{A}|_{\mathbf{1}^\perp}\| \leq 2\sqrt{d-1}+o(1)$ 以高概率成立，当 $N \to \infty$时。

生成随机正则图的一种便捷方法是使用对称群 Sym(N) 中的置换。固定一个大小为 $2d$ 的对称生成集 S （例如 $S = \{\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_d^{\pm 1}\}$），其中 σ_i 是在 Sym(N) 中独立且均匀随机选取的。相应的 ***Schreier*** 图 的顶点集为 $[N] = \{1, \dots, N\}$，其边为

$$\{j, \sigma_i(j)\} \qquad (1 \leq i \leq d,\ j \in [N]),$$

且是 $2d$-正则的（允许平行边和环路）。就渐近性质而言，该模型等价于随机 $2d$-正则图 [Wor99，JLR00] 的均匀模型。Friedman 的证明在这一框架下进行，并依赖于对相应邻接算子 $\mathcal{A}$ 的高次幂的迹进行精细分析。

更一般地，给定任意有限生成群 $\Gamma = \langle x_1, \dots, x_d \rangle$ 以及一列有限置换表示 $\sigma_N \colon G_N \to \mathrm{Sym}(N)$，可以按如下方式构造随机 Schreier 图。令 $\phi_N \colon \Gamma \to G_N$ 为均匀随机同态，设 $\pi_N = \sigma_N \circ \phi_N \colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(N)$，并在顶点集 $[N]$ 上构造 Schreier 图，其边为

$$\{j, \pi_N(x_i)(j)\} \qquad (1 \leq i \leq d,\ j \in [N]).$$

Friedman 的证明中使用的上述随机模型是这一模型的一个特例，对应于 $\Gamma = \mathbf{F}_d$（由 d 个生成元生成的自由群）以及 $G_N = \mathrm{Sym}(N)$，后者以自然方式作用于 $[N]$。固定 $\Gamma = \mathbf{F}_d$，但允许 G_N 取遍 Sym(N) 之外的对象，人们已针对一些重要的置换群数列证明了 Pinsker 定理的变体（尽管并未证明 Friedman 的近 Ramanujan 结论）。值得一提的是，根据 Bourgain 和 Gamburd [BG08]以及 Breuillard、Green、Guralnick 和 Tao [BGGT15]的工作，对于以左乘作用于自身的固定李型有限单群族，展开以高概率发生。

1.2. **多项式方法**。 最近，Chen、Garza-Vargas、Tropp 和 van Handel [CGVTvH24]提出了一种用于上述随机置换模型中算子范数界的新方法，称为多项式方法。 [vH25]中对此方法有详尽的阐述。简单来说，该方法通过在满足以下先决条件的情况下，对随机算子（例如随机 Schreier 图的邻接算子）应用光滑函数演算，来界定其算子范数。

A. 期望迹的渐近展开：对于群代数 Γ 中的任意 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$，求出 N 的一个有理表达式，使其表示 $\mathbf{E}[\mathrm{Tr}(\pi_N(x))]$，并控制分子和分母的次数。由此得到期望迹关于 N 的洛朗级数渐近展开。B. 首项系数的温和性：设 $\lambda \colon \Gamma \to \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ 是 Γ 的左正则表示，由 $\lambda(\gamma) f(x) = f(\gamma^{-1}x)$ 给出，其中 $\gamma,\ x \in \Gamma,\ f \in \ell^2(\Gamma)$。沿着幂 x^p，上面洛朗级数的前两个首项系数的增长至多为 $\|\lambda(x)\|^p$ 在 $p \to \infty$ 时的增长。

C.唯一迹性质：约化 C^*-代数 $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ 是 $\lambda(\Gamma)$ 的范数闭包。该代数配备典范迹 $\tau(a) = \langle a\delta_e,\ \delta_e\rangle$。这应当是 $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ 上唯一的正的幺正迹泛函。

在这些条件下，多项式方法得出随机表示 $\pi_N : \Gamma \to \mathcal{U}(N)$ 向左正则表示强收敛，这意味着对于每个 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$，都有

$$\big\|\pi_N(x)\big\| \to \big\|\lambda(x)\big\| \quad \text{in probability as } N \to \infty.$$

如 [CGVTvH24], 所示，这一范式可应用于 $\Gamma = \mathrm{F}_d$ 与 $G_N =$ 对称群(N) 的情形，其中采用其标准不可约表示 std : 对称群(N) $\to \mathcal{U}(N-1)$；该表示由将置换作用限制到超平面 $\mathbf{1}^\perp$ 上而得到。结果是随机表示 $\pi_N = \mathrm{std} \circ \phi_N$ 向 F_d 的左正则表示强收敛。对于特定选择 $x = \sum_{i=1}^{d}(x_i + x_i^{-1})$，这意味着对称群$(N)$ 通过 ϕ_N 在 $[N]$ 上作用所产生的随机施莱尔图的邻接算子 $\mathcal{A}$，以高概率满足 $\big\|\mathcal{A}|_{\mathbf{1}^\perp}\big\| \to 2\sqrt{2d-1}$（根据 Kesten [Kes59]），当 $N \to \infty$ 时。因此可得 Friedman 定理：随机 $2d$-正则图是近似拉马努金的。

多项式方法的扩展与局限。自 [CGVTvH24], 以来，多项式方法已沿多个方向得到扩展。Magee 和 de la Salle[MdlS24] 分析了以 $\mathcal{U}(N)$取代 Sym(N) 的情形，并证明对于 $\mathcal{U}(N)$的许多不可约表示，强收敛仍然成立。在此基础上，Cassidy [Cas 25] 研究了 Sym(N)中 std 以外的其他不可约表示，并证明这些情形下也有强收敛。此外，该方法所得到的收敛速率定量界也得到了发展。Chen、Garza-Vargas 和 van Handel [CGVvH24], 最先开展了这项工作：他们将相关工具专用于经典系综，并证明在这一情形下，该方法可用于提升向自由半圆分布强收敛的速率。随后，Magee、Puder 和 van Handel [MPvH25] 以及 Hide、Macera 和 Thomas [HMT25]进一步强化了这一结果。论文 [MPvH25]大幅拓展了原始多项式方法的框架：它不再要求 $\mathrm{E}\left[\mathrm{Tr}\ \pi_N(x)\right]$ 具有精确有理性，而是要求其关于 N的洛朗级数渐近展开具有足够的解析性。他们运用这一方法证明，当 Γ 是亏格至少为 2 的闭可定向曲面的基本群，且 $G_N =$ 为 Sym(N)、表示为 std 时，强收敛成立。

然而，并非所有自然随机置换模型都能纳入现有的、哪怕是最广泛的理论框架。如下例所示， Γ 中非平凡扭元 的存在，会在$\mathbf{E}[\mathrm{Tr}(\pi_N(\gamma))]$的渐近展开中引入新的现象。具体而言，渐近展开不再是关于 N 的简单洛朗级数，而是包含 N的分数次幂。

例子。 令 $\Gamma = C_2 = \langle\gamma\rangle$为 2 阶循环群。随机同态$\phi_N : C_2 \to$ Sym(N)对应于选取一个随机对合 $\sigma \in$ Sym(N)。于是，由于 $\pi_N = \mathrm{std} \circ \phi_N$,

$$\mathbf{E}_{\pi_N}\left[\mathrm{Tr}(\pi_N(\gamma))\right] = \mathbf{E}_\sigma\left[|\operatorname{fix}(\sigma)|\right] - 1.$$

令 a_N 为对称群 Sym(N) 中的对合数。那么，由对称性可得,

$$\mathbf{E}_\sigma\left[|\operatorname{fix}(\sigma)|\right] = N\mathbf{P}(\sigma(1) = 1) = Na_{N-1}/a_N.$$

对合数满足 $a_N = a_{N-1} + (N-1)a_{N-2}$，因此比值 $r_N = a_N/a_{N-1}$ 满足 $r_N = 1 + (N-1)/r_{N-1}$。由此递推可得$r_N = \sqrt{N} + O(1)$ 为 $N \to \infty$。因此

$$\mathbf{E}_{\pi_N}\left[\mathrm{Tr}(\pi_N(\gamma))\right] = \sqrt{N} + O(1).$$

Bordenave 和 Collins 曾分析过相关的扭结约束置换模型 [BC19], 以及 Shen 和 Wu [SW25]。这两项工作都考虑这样的模型：将 Γ 的生成元映射为有限阶的置换，但要求这些置换是 无不动点的。

Bordenave 和 Collins [BC19] 提出了一种基于非回溯算子的精细迹方法，早于多项式方法。该方法不仅为 Friedman 定理提供了另一种证明，还给出了由无不动点对合生成的随机图的算子范数极限（等价地说，这些图是随机完美匹配的并）。他们的无不动点设定适用于源自随机提升的置换模型，而其方法不易推广到对 Sym(N) 中的对合进行均匀抽样的情形。另一方面，Shen 和 Wu [SW25] 分析了由 Brooks–Makover 模型构造的随机贝利曲面的谱隙。该模型按照两个阶分别为 2 和 3 的随机置换粘合双曲三角形，并且这两个置换同样都限制为无不动点，才能使粘合成立。在此设定下，期望迹呈现出与曲面群中相同的、关于 N 的整数次幂渐近展开（见 [SW25，命题 1。2]），因而适用于 Magee–Puder–van Handel 的扩展多项式方法现有框架。

无不动点条件具有限制性：对于在 Sym(d N) 中均匀随机选取的、阶整除 $-N^{1/d}$ 的元素，当 $N \to \infty$ 时，没有不动点的概率按 exp([1]) 的速度衰减。此外，禁止不动点会消除均匀模型中期望迹里由扭元导致的首项。上文均匀 $\sqrt{N}$ 例子中的 C_2 项恰好就是这样一个不动点贡献。

1.3. 具有扭结限制的随机图展开式。 本文展示了如何处理随机置换模型中的一般扭结约束。我们通过在生成元上独立施加关系，取

$$\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m, \tag{1}$$

其中每个 G_i 都是一个有限群，且 $m \geq 2$。和之前一样，令 $\phi_N \in \mathrm{hom}(\Gamma,$ Sym(N)) 均匀随机选取，并定义 $\pi_N = \mathrm{std} \circ \phi_N : \Gamma \to \mathcal{U}(N-1)$。我们能够将多项式方法扩展到涵盖迹渐近中由扭元引发的新现象，并且重要的是，验证有限群的自由积满足由此得到的假设。这使得在我们的模型中， π_N 强收敛到 Γ 的左正则表示。

定理 1.1 （有限群的自由积的强收敛）。 设 Γ 是式 （1）中所述的有限群的自由积。那么，随机表示 $\pi_N = \mathrm{std} \circ \phi_N$强收敛于 Γ的左正则表示。

在更详细地讨论这些方法之前，我们着重指出定理 1.1 所涵盖的两个特殊情形，其中极限谱半径可以显式计算，从而为随机 Schreier 图给出渐近显式的谱隙。

[1]所有解的计数生成函数为 exp($P(z)$)，而无不动点解的计数生成函数为 exp($P(z) - z$)，其中 $P(z) = \sum_{k|d} z^k/k$。由 [M¨ul97，定理 1], 表明，它们的系数比渐近为 exp($-N^{1/d}$)，相差一个常数因子。

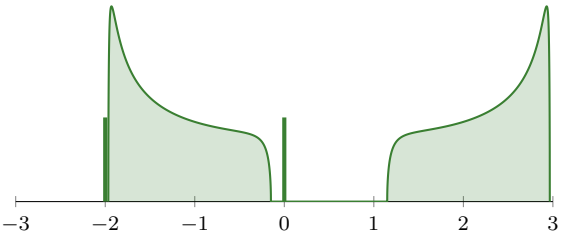


FIGURE 1. 邻接算子的谱测度。该测度的支撑由两个区间的并集构成，边界点分别为 $(1 \pm \sqrt{13 + 8\sqrt{2}})/2$ 和 $(1 \pm \sqrt{13 - 8\sqrt{2}})/2$；此外，在 -2 和 0 处还有离散原子，每个原子的质量为 $1/6$。这些原子对应于由扭元诱导的邻接算子 $\mathcal{A}f\ g\ = f\ xg\ + f\ yg\ +$-特征函数 ( ) ( ) ( ) ( )。要求在每个 -三角形上的和为零，可将特征值方程 $\mathcal{A}f = \lambda f$ 化简为 $f(xg) = (\lambda + 1)f(g)$，而关系 $x^2 = 1$ 则迫使 $\lambda + 1 = \pm 1$。

例子。 考虑 $\Gamma = C_2 * C_3 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$，即模群，其生成元$x$ 与 y 的阶分别为 2 和 3。随机同态 ϕ_N 对应于在对称群 (N) 中选取一个随机对合和一个随机的 3 阶元素（对照 [SW25], ，其中要求置换是无不动点的）。相应的 Schreier 图是随机 3-正则图。由定理 1.1，它们的第二大特征值以高概率收敛于 $\left\|\lambda(x + y + y^2)\right\|$。两个有限群的自由积中的邻接算子已由 Cartwright 与 Soardi 的工作 [CS86] 得到充分理解。可以显式确定其谱测度（见颇为奇特的图 1），尤其可以计算谱半径。在本情形中，它由下式给出

$$\frac{1 + \sqrt{13 + 8\sqrt{2}}}{2} \approx 2.9654.$$

这个值超过了 3-正则图的拉马努金界，即 $2\sqrt{2} \approx 2.8284$。因此，我们得到了一种简单的随机模型，可用于生成具有明确谱隙的非拉马努金 3-正则图。

例子。考虑由 $d \geq 3$ 个 C_2 组成的 $\Gamma = C_2 * C_2 * \cdots * C_2$。令 x_1、x_2、…、x_d 表示相应的二阶生成元。相对于这些生成元，Γ 的凯莱图是 d 正则树，其邻接算子的谱半径为 $2\sqrt{d - 1}$。根据定理 1.1，由 d 个在对称群 Sym(N) 中均匀随机选取的对合生成的随机 Schreier 图（允许存在不动点），随着 $N \to \infty$，以高概率是近似拉马努金的。这些图可以解释为 d 个随机匹配的并集，而这些匹配不一定是完美匹配（参见 [BC19]）。更一般地，可以分析邻接算子作用于 Γ 的情形：通过给生成元 x_i 赋予不同权重，对邻接算子加权。在这种情况下，谱半径可以用这些权重和 d 表示为闭式（见 [AK88，例子 1]）。

当 $\Gamma = C_2 * C_2$ 时，情况相当不同。这个群是可和的，这意味着它的邻接算子的谱半径为 2。相应的随机 Schreier 图由两个随机对合生成，因此是由 N 个顶点上的环组成的并。随着 $N \to \infty$，以高概率得到一个非连通图，因此$\left\|\mathcal{A}|_{\mathbf{1}^\perp}\right\| = 2$。这里的强收敛是自然而然的。

除了 $C_2 * C_2$之外，式（1）中的群都不是可和群。通过选取一个对称生成集 S，相应的邻接算子 $\sum_{s \in S} s$ 具有一个

范数严格小于 $|S|$。作为强收敛的直接推论，这意味着当 $N \to \infty$ 时，该模型中的随机施莱尔图以高概率连通。等价地，随机同态 $\phi_N : \Gamma \to \mathrm{Sym}(N)$ 以高概率具有传递像。对于式（1）中的群，乃至更广泛的群族，这一现象早已为人所知，正如 Liebeck 和 Shalev 的证明所示 [LS04，定理 1。12]。他们证明传递性的方法依赖于 Sym(N) 的特征标界，以及对相关表示ζ函数的分析。强收敛则为这些结果提供了互补的谱视角。[2]

1.4. 方法。 现在我们说明如何进一步推进多项式方法，使其能够涵盖关于 N 的分数次幂的渐近展开，随后说明我们如何验证由此得到的要求。

超越整数指数的多项式方法。 我们遵循 Magee、Puder 和 van Handel 的框架 [MPvH25]。设 Γ 为一个有限生成群，其对称生成集为 S。对于任意 $\gamma \in \Gamma$，令 $|\gamma|$ 表示 γ 相对于 S的字长。对于每个 N，考虑一个如上所述的随机表示 $\pi_N = \mathrm{std} \circ \phi_N$，并令 $\mathbf{tr}(\pi_N(\gamma)) = \mathrm{Tr}(\pi_N(\gamma))/N$ 表示归一化迹。

我们首先讨论 $\mathbf{E}[\mathrm{tr}(\pi_N(\gamma))]$的渐近展开所需满足的条件。在[MPvH25], 中，作者指出该展开具有类似解析的性质：对于任意给定的精度 $s \geq |\gamma|$，截断至 $s-1$ 项的洛朗级数对期望迹的近似误差为 $O(s)^{O(s)} N^{-s}$。在我们的设定中，我们需要类似的控制，但将 N 替换为 $N^{1/\mu}$，其中 μ 是一个依赖于 Γ的正整数。以下给出精确表述。

要求 A。 存在一个常数 $C \geq 1$，使得对于每个 $\gamma \in \Gamma$、每个$s \geq |\gamma|$以及每个 $N \geq Cs^C$，都存在常数 $u_k(\gamma) \in \mathbf{R}$，使得对所有非负整数 k 均有 $u_0(\gamma) = \tau(\lambda(\gamma))$，并且

$$\left| \mathbf{E}\big[\mathrm{tr}\, \pi_N(\gamma)\big] - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{u_k(\gamma)}{N^{k/\mu}} \right| \leq \frac{(Cs)^{Cs}}{N^{s/\mu}}.$$

在多项式方法的第二个要素中，控制 u_k 的取值至关重要。注意到，上述近似唯一确定了每个 $u_k(\gamma)$。此外，由于迹可以表示为不动点的数量，我们有 $u_k(\gamma) = u_k(\gamma^{-1})$，并且根据迹的共轭不变性，是类函数。我们将 u_k 线性延拓到$\mathbf{C}[\Gamma]$。按照 [MdlS24], ，我们称一个泛函 $u\colon \mathbf{C}[\Gamma] \to \mathbf{C}$ 在以下是温和的： $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$，如果

$$\limsup_{p \to \infty} |u(x^p)|^{1/p} \leq \|\lambda(x)\|.$$

[CGVTvH24] 和 [MPvH25] 的多项式方法要求泛函 u_1 具有温和性。在我们的设定中，我们要求所有前 μ 个泛函都具有温和性。

条件 B。对于每个正整数 $k \leq \mu$，泛函 u_k 在$\mathbf{C}[\Gamma]$的所有自伴元素处都是温和的。

[2]利用有限单群分类，Liebeck 和 Shalev 进一步加强了这一结论，证明当 $\langle \mathrm{im}\ \phi_N \rangle \geq \mathrm{Alt}(N)$ 的概率趋近于 1。我们例子中考虑的具体模型早已在 $N \to \infty$中研究过 [LS96]。若要通过谱方法绕开分类，就必须处理 Sym(N的所有不可约表示，而不只是 std。

在这些条件下，我们可以沿用 [MPvH25] 的方法扩展多项式方法，从而得到上界，约束 $\pi_N(x)$ 对每个 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$的算子范数。

定理 1.2。 假设要求 A 和 B 成立。那么对每个 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$,

$$\|\pi_N(x)\| \leq \|\lambda(x)\| + o(1) \quad \textit{with high probability as } N \to \infty.$$

事实上，证明给出了这一界的定量形式。[3] 要得到强收敛，还需证明一个类似的 下 界。然而，在唯一迹性质（原多项式方法中的要求 C）成立的情况下，这个下界可通过一般的 C^*-代数论证，由上界自动推出，正如 [vH25第 2 节所述。3]。幸运的是，许多群都具有这一性质。根据 [BKKO17], ，唯一迹性质等价于群的可和根平凡；这包括式（1）中的所有有限群自由积，唯一的例外情形 $C_2 * C_2$ （已在上文的例子中讨论）。因此，只要在我们的情形下验证上述两个要求，定理 1.1 中的强收敛便随之成立。

验证要求 A。设 Γ 是式 (1) 中的有限群自由积，并设 $\gamma \in \Gamma$。为了得到 E[Tr $\pi_N(\gamma)$] 的合适渐近展开，第一步是考察局部情形，即 γ 属于某个自由因子G_i。在这种情况下，期望迹仅取决于在均匀随机同态 $G_i \to \mathrm{Sym}(N)$ 下， G_i 的像的分布。例如，若 $G_i = C_2$ 的生成元为 γ，则如前面的例子所示，E[Tr $\pi_N(\gamma)$] $= Na_{N-1}/a_N$。Moser 和 Wyman [MW55] 得到了对合数的渐近展开。这些渐近结果源自对主导奇点处生成函数 $\exp(z + z^2/2)$ 的分析。M¨uller [M¨ul97]，在此基础上进一步推进了研究，其工作建立在 Harris 和 Schoenfeld [HS68]，更一般的研究之上；后者为任意有限群中的任意元素 γ 给出了渐近展开，特别是适用于任意自由因子 G_i。结果表明，期望迹 E[Tr$(\pi_N(\gamma))$] 可展开为关于 $N^{-1/|G_i|}$ 的幂级数。然而，这些展开式包含形如 $O_s(N^{-s/|G_i|})$ 的误差项，对我们的目的而言还不够强。在要求 A 中，我们需要误差项中的隐含常数至多以双指数方式依赖于 s 。因此，我们首先要做的是通过仔细追踪误差项对 s 的依赖关系，对 [HS68] 和 [M¨ul97] 的分析作更定量的处理。这是本文的技术核心。

处理完 γ 属于单个自由因子的局部情形后，我们必须处理一般情形。为此，我们借助 Puder 和 Zimhoni[PZ24], 的工作。他们将 E[Tr $\pi_N(\gamma)$] 改写为关于一个 CW复形X_Γ 的覆盖空间的问题，该复形具有 $\pi_1(X_\Gamma) \cong \Gamma$。同态 $\Gamma \to \mathrm{Sym}(N)$ 与 N叶覆叠空间 X_Γ之间存在双射对应关系（见 [Hat02]）。迹 Tr $\phi_N(\gamma)$ 是 $\phi_N(\gamma)$ 的不动点数，因此对应于胞腔映射 $Y_\gamma \to X_\Gamma$ 到与 ϕ_N 对应的覆盖空间中的提升数。在 [PZ24], 中，作者提出了一种系统方法，通过将映射 $Y_\gamma \to X_\Gamma$ 组合分解为更简单的组成映射来分析这些提升，然后利用上述局部渐近行为分析这些组成映射。与之前一样，我们必须对这一分析进行定量化，以确保所有依赖关系至多为关于 s 的双指数级。关键观察是，从该复形到该复形的满射胞腔映射数

[3]对于每个固定的 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ 和 $\varepsilon > 0$，事件 $\|\pi_N(x)\| \geq \|\lambda(x)\| + \varepsilon$ 的概率按 $\epsilon^{-O(1)}N^{-1/\mu}$ 的速度衰减，当 $N \to \infty$时，其中 μ 是条件 A中的整数。参见注释 2.4。

复形 Y_γ 具有 $O(s)$ 个顶点和边，数量至多为 $O(s)^{O(s)}$。综合这些结果可知，RequirementA中的常数 C 仅取决于群的大小G_i，而整数 μ 是它们的阶的最小公倍数。

验证条件 B。设 $x \in$C[Γ] 是自伴的。我们需要控制当 $p \to \infty$ 时 x^p 的 u_k 增长，对每个 $1 \le k \le \mu$ 都如此。这里的关键工具是 Magee 和 de la Salle [MdlS 24]，提出的正化技巧，它使我们能够将问题化归为元素 x，这些元素是 Γ 上随机游走的对称生成元。这意味着在 x 的群基展开式中，系数均非负、总和为 1，且在取逆下保持不变。对于这样的 x，其幂 x^p 可以用经过 p 步后，相关随机游走在 Γ 上的命中概率 P($X_1X_2\dots X_p = \gamma$) 表示。此时，Γ 的特定群论性质便起到关键作用。命中概率在很大程度上取决于 γ 是否为挠元；若不是，还取决于 γ 是否为真幂，或是否包含于一个与 $C_2 * C_2$ 同构的子群中。我们分别讨论每种情形，并使用由 [PZ24] 推导出的 $u_0(\gamma)$ 的显式表达式。接着，我们将 [vH25, MPvH25] 中 Friedman 谱技巧的一个变体应用于对所有 γ 求和，从而能够控制落入上述某一特定情形的命中概率。最终，这便控制了 x^p 的 u_k 增长。

备注。实现要求A 的途径在许多方面都特定于对称群，因为借助覆盖空间的工具，可以非常明确地以组合方式分析词的不动点统计。若能为其他有限群族及其自然的置换作用（例如 PSL$_2$($\mathbf{F}_p$) 在射影直线 $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p)$ 上的作用）发展出类似理论，将会很有意义。主要挑战在于，必须将范围限制在单值群为 PSL$_2$($\mathbf{F}_p$) 子群的覆盖空间。尽管如此，计算实验表明，由 $\|\mathcal{A}_{\mathbf{1}^\perp}\|$ 以及取值于 PSL Γ 的随机同态所产生的 Schreier 图中的谱范数，$_2$($\mathbf{F}_p$) 而非对称群，趋近于 Γ 在自由群 $\mathbf{F}_2$ 和自由积 中相应的谱半径。

1.5. **读者指南**。第2 节说明要求 A和 B共同推出定理 1.2的强收敛上界。第 3 节推导多项式的指数的泰勒系数的定量渐近式。接着，第 4节将这些渐近式转化为群作用归一化计数的分数阶展开。第 5 节再运用覆盖空间理论，将这些展开转化为要求A所需的展开式。最后，第 6 节通过分析随机游走在 Γ上的命中概率，确立要求 1.1B，从而完成定理1.1的证明。

2. Assumptions imply strong convergence

多项式方法中使用的基本原理是一条由马尔可夫提出的不等式（参见 [vH25，引理 3。6]）。我们将使用这个不等式的一个更精细的版本。

引理 2.1 (Lemma4.2in [MdlS24])。对于任意次数至多为 P 的实多项式 q 以及任意正整数 k，都有

$$\sup_{t\in[0,1/(2q^2)]}\left|P^{(k)}(t)\right| \le \frac{2^{2k+1}q^{4k}}{(2k-1)!!}\sup_{n\ge q^2}\left|P(1/n)\right|.$$

我们的下一个目标是将要求 A 中给出的 E[tr $\pi_N(\gamma)$] 的近似，推广为 E[tr $h(\pi_N(x))$] 在 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ 下的类似近似。在多项式方法中，这称为主不等式 [vH25，推论 3.9]。此处的证明仿照 [MPvH25，引理 3.1]。两者的不同之处在于式 (3) 中的多项式 f_h 、它在式 (5) 中于 $N^{-1/\mu}$ 处的取值，以及我们需要在式 (6) 中将引理 2.1 应用于阶数高得多的导数这一事实。

始终固定 S 的一组对称生成集。对于 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$，令 $|x|$ 表示 x的支撑中群元素的最大字长，并令$\|x\|_{C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)}$表示$\|\pi(x)\|$ 在 Γ的所有酉表示 π 上的上确界。对于多项式h，记 $\|h\|_I = \sup_{t\in I} |h(t)|$。

命题 2.2 （主不等式）。 假设 *Requirement A* 以常数C成立。设 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ 为自伴的，且 $K = \|x\|_{C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)}$。那么对于每个正整数$N$、每个次数至多为 q的实多项式 h 以及每个正整数 $k \le \mu$，有

$$\left|u_k(h(x))\right| \le O_{\mu,|S|,C,|x|}\left(q^{O_{\mu,C}(1)}\|h\|_{[-K,K]}\right),$$

and

$$\left|\mathbf{E}\left[\operatorname{tr} h(\pi_N(x))\right] - \sum_{k=0}^{\mu}\frac{u_k(h(x))}{N^{k/\mu}}\right| \le O_{\mu,|S|,C,|x|}\left(\frac{q^{O_{\mu,C}(1)}\|h\|_{[-K,K]}}{N^{1+1/\mu}}\right).$$

证明。 如果 $x = 0$ 或 h 的次数为 0，则有 $u_k(h(x)) = 0$ ，且两个不等式显然成立。因此，假设 $|x| \ge 1$ 且 $q \ge 1$。记

$$h(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma\gamma \quad (\alpha_\gamma \in \mathbf{C}).$$

中的单项式最大长度 $h(x)$ 不超过 $q|x|$。因此，非零系数的数量 α_γ至多为 $(2|S|+1)^{q|x|} \le (3|S|)^{q|x|}$。对 A 的支撑中的每个元素分别应用要求 $h(x)$，逼近阶数为 $q|x| + \mu + 1 \le 3\mu q|x|$。只要 $N \ge C(3\mu q|x|)^C$，我们便得到

$$\left|\mathbf{E}\left[\operatorname{tr} h(\pi_N(x))\right] - f_h(N^{-1/\mu})\right| \le \frac{(3\mu C q|x|)^{3\mu C q|x|}}{N^{(q|x|+\mu+1)/\mu}}\sum_{\gamma\in\Gamma}\left|\alpha_\gamma\right|, \tag{2}$$

其中我们记

$$f_h(t) = \sum_{k=0}^{q|x|+\mu} u_k(h(x))t^k = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{k=0}^{q|x|+\mu}\alpha_\gamma u_k(\gamma)t^k. \tag{3}$$

注意，由于 $h(x)$ 是自伴的，且 $u_k(\gamma) = u_k(\gamma^{-1})$，系数 $u_k(h(x))$ 为实数。因此，f_h 是一个实多项式。等式 (2) 中系数 α_γ 的求和遍历至多含有 $(3|S|)^{q|x|}$ 个元素的集合。因此，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$(3|S|)^{-q|x|/2}\sum_{\gamma\in\Gamma}\left|\alpha_\gamma\right| \le \left\|h(x)\right\|_{\ell^2(\Gamma)} = \left\|h(\lambda(x))\delta_e\right\|_{\ell^2(\Gamma)} \le \|h\|_{[-K,K]},$$

其中最后一个不等式用到了函数演算和假设$\|x\|_{C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)} \le K$。由此可知，只要 $N \ge (3|S|)^{1/2}(3\mu C q|x|)^{3\mu C}$，就有

$$\left|\mathbf{E}\left[\operatorname{tr} h(\pi_N(x))\right] - f_h(N^{-1/\mu})\right| \le \frac{\|h\|_{[-K,K]}}{N^{1+1/\mu}}. \tag{4}$$

由于 $\|\pi_N(x)\| \le \|x\|_{C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)} = K$，期望 $\mathbf{E}\left[\operatorname{tr} h(\pi_N(x))\right]$ 的绝对值至多为 K/N。因此，利用函数演算和等式（4），可得

$$\left|f_h(N^{-1/\mu})\right| \le 2\|h\|_{[-K,K]}. \tag{5}$$

现在，我们可以估计 f_h 的导数。将引理 2.1 应用于次数至多为 $(3|S|)^{1/4}(3\mu Cq|x|)^{3\mu C/2}$ 的实多项式 f_h，得到

$$\left\|f_h^{(k)}\right\|_{\left[0,1/(2(3r)^{1/2}(3\mu Cq|x|)^{3\mu C})\right]} \le \frac{4^{k+1}\cdot(3|S|)^k(3\mu Cq|x|)^{6\mu Ck}}{(2k-1)!!}\|h\|_{[-K,K]}. \tag{6}$$

对每个整数 $1 \le k \le \mu$，都有 $u_k(h(x)) = f_h^{(k)}(0)/k!$。因此，结论的第一部分立即由式（6）得出。

利用相同的界，我们还可以推出结论的第二部分。首先，在满足 $N \ge (2(3|S|)^{1/2}(3\mu Cq|x|)^{3\mu C})^{\mu}$ 的情形下，将 f_h 在0处泰勒展开至 μ 次，得到

$$\begin{aligned}\left|f_h(N^{-1/\mu}) - \sum_{k=0}^{\mu}\frac{u_k(h(x))}{N^{k/\mu}}\right| &\le \frac{1}{(\mu+1)!N^{1+\frac{1}{\mu}}}\left\|f_h^{(\mu+1)}\right\|_{[0,1/N^{-1/\mu}]}\\ &\le O_{\mu,|S|,C,|x|}\left(\frac{q^{O_{\mu,C}(1)}\|h\|_{[-K,K]}}{N^{1+1/\mu}}\right).\end{aligned}$$

因此，在此情形下，结论的第二部分由式（4）结合三角不等式得出。另一方面，在满足 $N < (2(3|S|)^{1/2}(3\mu Cq|x|)^{3\mu C})^{\mu} = O_{\mu,|S|,C,|x|}(q^{O_{\mu,C}(1)})$ 的情形下，我们可以利用 $\left|u_0(h(x))\right| = \left|\tau(h(\lambda(x)))\right| \le \|h\|_{[-K,K]}$ 直接估计，

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}\left[\operatorname{tr} h(\pi_n(x))\right] - \sum_{k=0}^{\mu}\frac{u_k(h(x))}{N^{k/\mu}}\right| &\le 2\|h\|_{[-K,K]} + \sum_{k=1}^{\mu}\frac{\left|u_k(h(x))\right|}{N^{k/\mu}}\\ &\le O_{\mu,|S|,C,|x|}\left(\frac{q^{O_{\mu,C}(1)}\|h\|_{[-K,K]}}{N^{1+1/\mu}}\right).\end{aligned}$$

这也同样确立了该情形下陈述的第二部分。证明完毕。□

从这里开始，我们遵循多项式方法的通常步骤。我们首先将命题 2.2 推广到所有光滑函数 h。

命题 2.3. 假设要求 A 在常数 C 下成立。设 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ 为自伴的，且带有 $K = \|x\|_{C^*(\Gamma)}$。

1. 对所有正整数 $k \le \mu$，泛函 $\nu_k\colon h \mapsto u_k(h(x))$ 从多项式定义域延拓为 $C^\infty(\mathbf{R})$ 上的紧支撑分布。*2.* 对所有正整数 N 以及所有 $h \in C^\infty(\mathbf{R})$，我们有

$$\left|\mathbf{E}\left[\operatorname{tr} h(\pi_N(x))\right] - \tau(h(\lambda(x))) - \sum_{k=1}^{\mu}\frac{\nu_k(h)}{N^{k/\mu}}\right| \le O_{\mu,|S|,C,|x|}\left(\frac{\left\|f^{(\omega)}\right\|_{[0,2\pi]}}{N^{1+\frac{1}{\mu}}}\right),$$

其中 ω 仅取决于 μ 和 C，而 $f(\theta) = h(K\,\text{余弦}\,\theta)$。

证明。 关于将 ν_k 扩展为紧支撑分布的陈述部分，直接由命题 2.2 以及[CGVTvH24，引理 4。7]即可得到。对于第二部分，我们先假设 h 是一个次数为 q 的多项式。将 h 按切比雪夫多项式 T_ℓ(余弦 θ) = 余弦($\ell\theta$) 展开为

$$h(t) = \sum_{\ell=0}^{q} a_\ell T_\ell(t/K).$$

分别将命题2.2 的第二部分应用于每个切比雪夫多项式，可得

$$\left| \mathbf{E}\left[\operatorname{tr} h(\pi_N(x))\right] - \tau(h(\lambda(x))) - \sum_{k=1}^{\mu} \frac{u_k(h(x))}{N^{k/\mu}} \right| \le \frac{O_{\mu,|S|,C,|x|}(1)}{N^{1+1/\mu}} \sum_{\ell=1}^{q} \ell^{O_{\mu,C}(1)} |a_\ell|.$$

关于 h 多项式的陈述的第二部分现在可直接由[MPvH25，引理 23]推出。注意，所得的界与 h的次数无关，因此，由 C^∞(**R**)中多项式的稠密性，该陈述通过连续性可推广到每个光滑 h。□

现在我们可以完成定理1.2的证明了。

定理*1.2*的证明。首先假设 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ 是自伴的，且$K = \|x\|_{C^*(\Gamma)}$。设 ω 和 ν_k 如命题2.3 中所述。由 [CGVTvH24，引理 410], ，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个光滑函数 $h \in C^\infty($**R**)，具有以下性质：

- $h(z) \in [0,1]$ 对所有 z，
- $h(0) = 0$对于 $|z| \le \|\lambda(x)\| + \epsilon/2$和 $h(z) = 1$对于 $|z| \ge \|\lambda(x)\| + \epsilon$，
- $\|f_{(\omega)}\|_{[0,2\pi]} \le O_{\mu,\ C,\ K}(\epsilon^{-O_{\mu,\ C(1)}})$ 对于 $f(\theta) = h(K$余弦 $\theta)$。

因此 $\tau(h(\lambda(x))) = 0$。此外，根据条件 B 和 [CGVTvH24，引理 4。9],我们有 $\operatorname{supp}(\nu_k) \subseteq [-\|\lambda(x)\|, \|\lambda(x)\|]$，因此 $\nu_k(h) = 0$ 对所有 $1 \le k \le \mu$。现在，

$$\mathbf{P}\left[\|\pi_N(x)\| \ge \|\lambda(x)\| + \epsilon\right] \le \mathbf{P}\left[\operatorname{Tr} h(\pi_N(x)) \ge 1\right] \le \mathbf{E}\left[\operatorname{Tr} h(\pi_N(x))\right],$$

而后者可由命题 2.3 上界估计为

$$O_{\mu,|S|,C,|x|,K}\left(\frac{1}{\epsilon^{O_{\mu,C}(1)} N^{1/\mu}}\right).$$

若取 $\epsilon = N^{-a}$，并使 a 足够小，从而有$1/a \gg_{\mu,\ C} 1$，则后一个界为$O_{\mu,\ |S|,\ C,\ |x|,\ K}(N^{-1/(2\mu)})$。这就完成了 x 为自伴时的证明。一般情形则由以下事实推出：对于任意 $y \in \mathbf{C}[\Gamma]$，都有 $\|y\|^2 = \|y^* y\|$，然后对 $x = y^* y$ 重复上述论证。□

注 2.4。 由上述证明可知，我们还可以控制定理 1.2中的收敛速率。具体而言，若选择 a 相对于 μ 和 C足够小，则证明表明

$$\mathbf{P}\left[\|\pi_N(x)\| \ge \|\lambda(x)\| + N^{-a/2}\right] \le O_{\mu,|S|,C,|x|,K}(N^{-1/(2\mu)}).$$

3. Asymptotics for exponentials of polynomials

设 $P(z) = \sum_{i=1}^{q} c_i z^i$ 是一个次数为 $q \ge 2$、实系数为 c_i的多项式，满足

$$c_i \ge 0 \quad \text{for } 1 \le i \le q, \qquad c_1 = 1, \qquad c_q = 1/q, \qquad c_i = 0 \quad \text{for } i \nmid q. \tag{7}$$

考虑整函数 exp(P(z))，并设其在 0 处的泰勒展开式为

$$\exp(P(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

M¨uller [M¨ul97] 给出了用 $P(z$的系数表示的显式公式，用于泰勒系数 α_n 当 $n \to \infty$ 时的渐近展开。我们在此回顾这些公式，并明确列出应用中所需的所有依赖关系。

3.1. **关于 r_n的定量渐近。** M¨uller 的公式基于 Harris 和 Schoenfeld 更一般的结果 [HS68]，适用于生成函数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

这些函数在原点的某个邻域内解析，并满足下文列出的条件 (A)–(E)。

(A) 函数 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 上解析，其中某个 $R \in (0, \infty]$，且当 z 为实数时其值为实数。(B) 存在 $R_0 \in (0, R)$ 以及定义在 (R_0, R) 上的实值函数 $d(r)$，使得对于任意 $r \in (R_0, R)$，$0 < d(r) < 1$ 且 $r(1 + d(r)) < R$。此外，对于每个满足 $|z - r| \le r d(r)$ 的 z 以及任意 $r \in (R_0, R)$，$f(z) \neq 0$。(C) F

or $k \ge 1$, define

$$A(z) = f'(z)/f(z), \quad B_k(z) = z^k A^{(k-1)}(z)/k!, \quad B(z) = zB_1'(z)/2.$$

于是，当 $R_0 < r < R$ 时，$B(r) > 0$，且当 $r \to R^-$ 时，$B_1(r) \to \infty$。

(D) 设 $R_1 \in (R_0, R)$ 满足 $B_1(R_1) > 0$。对于任意整数 $n \ge B_1(R_1)$，令 r_n 为方程 $B_1(r) = n + 1$ 在 $r \in (R_1, R)$ 下的唯一解。对于 $j \ge 1$，定义

$$C_j(r) = -(B_{j+2}(r) + (-1)^j B_1(r)/(j+2))/B(r).$$

假设存在非负的 D_n，E_n 和 $n_1 > 0$，使得对所有 $n \ge n_1$ 和 $j \ge 1$，不等式 $\left|C_j(r_n)\right| \le E_n D_n^j$ 都成立。

(E) 当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$B(r_n) d(r_n)^2 \to \infty, \quad D_n E_n B(r_n) d(r_n)^3 \to 0, \quad D_n d(r_n) \to 0.$$

Harris 和 Schoenfeld 证明，在这些条件下，系数 α_n 当 $n \to \infty$ 时具有如下形式的渐近展开式。

定理 3.1 ([HS68], 定理 1)。假设 $f(z)$ 满足条件 (A)–(E)。那么对于所有 $N \ge 0$，存在常数 K_N，$L_N > 0$ 使得对于所有 $n \ge K_N$，我们都有

$$\left| \frac{\alpha_n}{f(r_n)/(2r_n^n \sqrt{\pi B(r_n)})} - 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{F_k(n)}{B(r_n)^k} \right| \le L_N \cdot \varphi_N(n),$$

其中

- $F_k(n)$ 对于 $1 \le j \le 2k$，可以用 $C_j(r_n)$ 显式计算得出，
- $\varphi_N(n)$ 可以表示为 D_n、E_n、$B(r_n)$ $d(r_n)$的显式函数，并且 $\left|f(z)\right|$ 对于 z 在依赖于 r_n、$d(r_n)$ 的某条曲线上取最大值。

M¨uller 通过显式验证确认，对于如上所述的 $P(z)$，exp($P(z)$) 满足条件 (A)–(E)。所有隐含依赖均为绝对依赖，而仅依赖于多项式 $P(z)$ 的所有依赖记为 $O_P(1)$ 或 $\ll_P$。

定理 3.2 ([M¨ul97], 引理 1)。 设 $P(z)$ 是满足式 (7)的多项式。则函数 $f(z) = \exp(P(z))$ 满足条件 (A)–(E)，其中：

（A）取 $R = \infty$。（B）取 R_0 为 1 与 B（r）的最大实根中的较大者。（D）取 $n_1 \gg_P 1$、$E_n \ll_P 1$ 和 $D_n = 1$。（E）取 d（r）$= r^{-2q/5}$。

对于我们的应用，还需要用 K_N、L_N 和 φ_N（n，d）关于 N的显式界。我们由 [HS68] 和 [M¨ul97] 中的证明推导出这些界。

命题 3.3。 设 P（z）是满足等式 （7）的多项式。则

$$\varphi_N(n) \ll O_P(1)^{N+1} n^{-N-1}, \quad K_N = O_P(1) N^{O_P(1)}, \quad L_N = (O_P(1)N)^{O(1)N}.$$

证明。 我们先处理 φ_N（n）。我们遵循 [M¨ul97，引理 2]。有

$$\varphi_N(n) = \max\left\{X(n), Y(n), Z(n)\right\},$$

其中三项定义及界如下。第一项对于某个仅依赖于 P 的显式常数 q_0，

$$X(n) = \left(\frac{q_0}{\sqrt{B(r_n)}}\right)^{2N+2} \leq O_P(1)^{N+1} r_n^{-q(N+1)} \leq O_P(1)^{N+1} n^{-(N+1)},$$

我们在第一个不等式中使用了 $B(r_n) \geq r_n^q$，在第二个不等式中使用了 $n < B_1(r_n) \ll_P r_n^q$。对于第二项，我们首先有

$$Y(n) = \frac{\exp(-B(r_n) r_n^{-4q/5})}{r_n^{-2q/5}\sqrt{B(r_n)}} \leq r_n^{9q/10} \exp(-r_n^{q/5}) \leq (2n)^{9/10} \exp(-(2n)^{1/5}),$$

其中我们再次使用了 $B(r_n) \geq r_n^q$ 和 $2n \geq B_1(r_n) \geq r_n^q$，并假设 n 足够大，使得 $r_n > 2000$。取 $n \gg N^{10}$，并对满足 $t = (2n)^{1/5}$ 和 $k = 5N + 10$的 $t \geq k^2$使用 $e^{-t} \leq t^{-k}$，于是得到

$$Y(n) \ll (2n)^{9/10-(5N+10)/5} \ll n^{-(N+1)}.$$

最后，对于第三项，对所有 $n \gg_P 1$，我们有

$$Z(n) = \lambda(r_n)\sqrt{B(r_n)} \leq \max\left\{\exp(-((q-1)/2)^2 q^{-1} r_n^{q/5}), \exp(-A r_n)\right\},$$

其中 $A \gg_P 1$。使用 $2n \geq B_1(r_n) \geq r_n^q$，于是得到

$$Z(n) \leq \max\left\{\exp(-(2n)^{1/5}/8), \exp(-A(2n)^{1/q})\right\}.$$

取 $n \gg_P N^{\max\{10,2q\}}$，我们可以像前一种情况那样再次对指数函数进行估计，从而得到 $Z(n) \ll n^{-(N+1)}$。

现在转而讨论常数 K_N 和 L_N。由上述论证可知，我们当然必须取 $K_N \gg_P N^{O_P(1)}$。对 K_N、L_N的其他限制来自：

- 条件 (D) 见 [HS68], ，其中我们需要 $n \gg_P 1$,
- 条件 (E) 见 [HS68]，具体为：– 界定 $|Y_3| \leq \frac{1}{2}$，其中我们需要 $B(r_n)d(r_n)^3 \ll_q 1$，因此 $n \gg_P 1$; – 方程 (20) 用于界定 $V_p(\varphi) \ll \beta_n \varphi^2 (e\varphi)^{2p} + (eE_n\beta_n\varphi^3)^{2p}$，其中我们需要 $1 - e|\varphi| \ll 1$，因此 $n \gg_P 1$；– 界定 $\Delta_n \geq 6N$，其中我们需要 $n \gg_P (6N)^5$；– 界定 $V_1(\delta_n) \leq 1$，其中我们需要 $n \gg_P 1$,

- 方程 (16) 中的 [HS68] 用于界定 $|Y_4| \ll O_P(1)^{N+1} Y_5$,

- 方程 (20) 之后紧接着用于界定 $V_{N+1}(\varphi) \ll O(1)^{N+1}Y_5$,
- 上界为 $Y_6 \ll E_n\beta_n^{-N-3/2}(E_n^{2N+1}+1)\cdot\Gamma(3N+7/2)$，其中 Γ 是欧拉伽马函数，可将其上界估计为 $\Gamma(3N+7/2) \le (3N+4)! \le (7N)^{7N}$。

因此，总体而言，我们可以取 $K_N = O_P(1)N^{O_P(1)}$ 以及 $L_N = (O_P(1)N)^{O(1)N}$。 □

Let

$$\mathcal{M}(r) = \frac{\exp(P(r))}{2r^n\sqrt{\pi B(r)}}, \quad \mathcal{S}_N(r) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{P_k(r)}{B(r)^{3k}},$$

其中 $P_k(r)$ 如 [M¨ul97、命题 1]中所述。由以上所有结果可知，Harris 和 Schoenfeld 的渐近展开可归结为以下形式。

定理 3.4 ([M¨ul97], 命题 1 的定量形式)。 设 $P(z)$ 是满足等式 (7) 的多项式。那么对于所有 $N \ge 0$ 和 $n \gg_P N^{O_P(1)}$，有

$$\alpha_n = \mathcal{M}(r_n)\left(\mathcal{S}_N(r_n) + E_{n,N}\right), \quad \left|E_{n,N}\right| \le (O_P(1)N)^{O(1)N} n^{-N-1}.$$

3.2. **逼近** r_n。 为了将上面的渐近展开转换为关于 n的渐近展开，我们需要像 [M¨ul97第 3 节6] 中那样，将 r_n 关于 n 展开，然后用它展开上一节渐近展开式中的所有其他项。

3.2.1. 展开 r_n。 定义多项式

$$Q(z) = z^{q-1}P'(1/z) = \sum_{i=1}^{q} ic_i z^{q-i}$$

满足 $Q(0) = 1$。令 $\phi(z) = Q(z)^{1/q}$。这是一个在以 0 为圆心的圆盘上解析的函数，且 $\phi(0) = 1$。因此，函数 $z \mapsto z/\phi(z)$ 也是解析函数，在 $z = 0$ 处的导数为 1，因此它在 0 的某个邻域内可逆。特别地，存在$0 < \epsilon$， $\delta < 1$ 使得对每个满足$|w| < \epsilon$ 的 w，方程 $w\phi(z) = z$ 在区域$|z| < \delta$内有唯一解。此外，根据拉格朗日反演，该解可以表示为幂级数

$$z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\beta_\nu}{\nu} w^\nu,$$

其中 β_ν 可以用 P 显式计算（参见 [M¨ul97，公式（17）]）。

令我们将上述结果用于 $w = (n+1)^{-1/q}$，并记为 $z = r^{-1}$。对于 $n \gg_\epsilon 1$，方程 $rP'(r) = n+1$ 因此在定义域 $|r| > 1/\delta$内有唯一解 r_n，该解为

$$\frac{1}{r_n} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\beta_\nu}{\nu}(n+1)^{-\nu/q} = n^{-1/q}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i n^{-i/q}\right),$$

其中我们通过展开（ γ_i ）（ [) ，得到了系数 ¨Mul97，公式（24）] $n+1$ $^{-\nu/q} = n^{-\nu/q}1 + n^{-1-\nu/q}$。因此

$$r_n = n^{1/q}\left(1 + G(n^{-1/q})\right)^{-1}, \qquad G(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i w^i.$$

函数 $G(w)$ 在以 0 为圆心、半径为 ϵ 的圆盘上也解析。由柯西估计可知，系数 γ_i 满足 $|\gamma_i| \le O_P(1)\epsilon^{-i}$。

3.2.2. 用 $\rho_n(s)$ 逼近 r_n。对于 $s \geq 1$，令

$$\rho_n(s) = n^{1/q}\left(1 + G_s(n^{-1/q})\right)^{-1}, \qquad G_s(w) = \sum_{i=1}^{q+s-1} \gamma_i w^i.$$

因此， G_s 是将 G 截取前 $q+s-1$ 项后得到的截断。对于 $n \gg_P 1$， $\rho_n(s)$定义良好。

引理 3.5. 对于所有 $s \geq 1$ 和所有 $n \gg_P 1$,

$$\left|r_n - \rho_n(s)\right| \ll_P (\epsilon/2)^{-s} n^{-(q+s-1)/q}.$$

证明。 注意到

$$\left|G(n^{-1/q}) - G_s(n^{-1/q})\right| \leq O_P(1) n^{-(q+s)/q} \sum_{i=q+s}^{\infty} \epsilon^{-i} n^{-(i-q-s)/q}.$$

由于当 $n \gg_P 1$时 $n^{-1/q} < \epsilon/2$ ，上述值至多为

$$O_P(1)(\epsilon/2)^{-s} n^{-(q+s)/q}.$$

特别是，由于我们有先验界

$$\left|G(n^{-1/q})\right| \ll_P n^{-1/q},$$

由此可得，对于 $n \gg_P 1$,

$$\left|G_s(n^{-1/q})\right| \ll_P n^{-1/q}.$$

现在，函数 $x \mapsto (1+x)^{-1}$ 关于 $|x| < \delta$ 是利普希茨的，其常数为 $1/(1-\delta)^2$。因此，对于 $n \gg_P 1$，我们得到

$$\left|r_n - \rho_n(s)\right| \leq \frac{n^{1/q}}{(1-\delta)^2} \cdot O_P(1)(\epsilon/2)^{-s} n^{-(q+s)/q} = O_P(1)(\epsilon/2)^{-s} n^{-(q+s-1)/q}. \quad \square$$

3.2.3. 将 r_n 替换为 $\rho_n(s)$于定理3.4中。

定理 3.6 ([M¨ul97], 公式（33）的定量形式)。 对于所有 $s \geq 1$， $N \geq 0$以及 $n \gg_P N^{O_P(1)}$,

$$\alpha_n = \mathcal{M}(\rho_n(s))\left(\mathcal{S}_N(\rho_n(s)) + E_{n,N,s}\right),$$

其中

$$\left|E_{n,N,s}\right| \ll (O_P(1)N)^{O(1)N} n^{-N-1} + (O(1)N)^{O(1)N} O_P(1)^s n^{-s/q}.$$

我们需要三个预备引理，它们将结合起来证明上述定理。

引理 3.7。 对于所有 $s \geq 1$ 和 $n \gg_P 1$,

$$\left|\frac{\alpha_n}{\mathcal{M}(r_n)}\right| \ll 1.$$

证明。 随着 N 增大，近似效果会改善，因此我们可以在定理 $N = 0$ 中选择 $N = 0$ 3.4。因此 $\alpha_n = \mathcal{M}(r_n)(1 + E_{n,\,0})$ 且$\left|E_{n,\,0}\right| \ll_P n^{-1}$。对于 $n \gg_P 1$，因此我们有$\left|\alpha_n/\mathcal{M}(r_n)\right| \leq 2$。 $\square$

引理 3.8. 对于所有 $s \geq 1$ 和 $n \gg_P 1$,

$$\left|\frac{\mathcal{M}(r_n)}{\mathcal{M}(\rho_n(s))} - 1\right| \ll_P (\epsilon/2)^{-s} n^{-s/q}.$$

证明。 定义

$$\Psi(r) = \log \mathcal{M}(r) = P(r) - n\log(r) - \frac{1}{2}\log(B(r)) + O(1).$$

令 $I_{n,\ s}$ 为 r_n 与 $\rho_n(s)$ 之间的区间。根据中值定理，我们有

$$\left|\Psi(r_n) - \Psi(\rho_n(s))\right| \leq \sup_{r\in I_{n,s}} \left|\Psi'(r)\right| \cdot \left|r_n - \rho_n(s)\right|.$$

现在，$\Psi'(r) = P'(r) - n/r - B'(r)/(2B(r))$。对于 $n \gg_P 1$，我们有 $r_n,\ \rho_n(s) \sim n^{1/q}$，因此可推得，对于 $r \in I_{n,\ s}$，有

$$\left|P'(r)\right| \ll_P n^{(q-1)/q}, \quad \left|n/r\right| \ll_P n^{(q-1)/q}, \quad \left|\frac{B'(r)}{B(r)}\right| \ll_P n^{-1/q},$$

只要 $n \gg_P 1$。因此，导数 $\Psi'(r)$ 有界于 $O_P(1)n^{(q-1)/q}$ 对于$r \in I_{n,\ s}$。引理 3.5 推出

$$\left|\Psi(r_n) - \Psi(\rho_n(s))\right| \ll_P (\epsilon/2)^{-s} n^{-s/q}.$$

最后，由于 $|e^x - 1| \leq 2|x|$ 对于 $|x| \leq 1$，可得

$$\left|\exp\left(\Psi(r_n) - \Psi(\rho_n(s))\right) - 1\right| \ll_P (\epsilon/2)^{-s} n^{-s/q},$$

如所需。 □

引理 3.9。 对于所有 $s \geq 1$ 和 $n \gg_P 1$,

$$\left|\mathcal{S}_N(r_n) - \mathcal{S}_N(\rho_n(s))\right| \ll_P (O(1)N)^{O(1)N}(\epsilon/2)^{-s} n^{-s/q}.$$

证明。 根据定义，$\mathcal{S}_N(r) - 1$ 是由以下形式的 N 项组成的和：$P_k(r)/B(r)^{3k}$ 当 $1 \leq k \leq N$时。参照 [M¨ul97，命题 1], 中的每个 $P_k(r)$ 都是关于 r 的多项式，其和式为

$$P_k(r) = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} \sum_{i=1}^{2k} (-1/4)^i A_{k,i} B(r)^{2k-i} V_{k,i}(r).$$

这里，$A_{k,\ i}$ 是仅取决于 k 和 i 的常数，且其上界可由 $(O(1)k)^{O(1)k}$给出。加项 $V_{k,\ i}(r)$ 是关于 r 的多项式，其和式为

$$V_{k,i}(r) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_i=2k \\ j_1,\ldots,j_i\geq 1}} W_{j_1}(r)\cdots W_{j_i}(r),$$

其中 $W_j(r)$ 是关于 r 的多项式，次数至多为 q，其系数的绝对值不超过 $O_P(1)$。与前一个引理中一样，令 $I_{n,\ s}$ 为r_n 与 $\rho_n(s)$之间的区间。因此，对于 $n \gg_P 1$ 和 $r \in I_{n,\ s}$，我们有

$$\left|W_j(r)\right| \ll_P n, \quad \left|V_{k,i}(r)\right| \ll_P O_P(1)^k \binom{2k-1}{i-1} n^{2k} \ll_P O_P(1)^k n^{2k}.$$

由于对于 $r \in I_{n,\ s}$，有 $B(r) \sim_P r^q$ 且 $B'(r) \ll_P r^{q-1}$，因此可得

$$\left|P_k(r)\right| \ll_P (O(1)k)^{O(1)k} r^{2kq}, \quad \left|P_k'(r)\right| \ll_P (O(1)k)^{O(1)k} r^{2kq-1}. \tag{8}$$

现在我们可以对 $r \in I_{n,\ s}$ 时 $\mathcal{S}_N(r)$ 的导数进行估计：

$$\left|\mathcal{S}_N'(r)\right| = \left|\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{P_k'(r)}{B(r)^{3k}} - k\frac{P_k(r)B'(r)}{B(r)^{3k+1}}\right)\right| \ll \sum_{k=1}^{N}(O(1)k)^{O(1)k} r^{-kq-1}.$$

只要 $n \gg_P 1$，这就意味着$\left|\mathcal{S}_N'(r)\right|$至多为 $(O(1)N)^{O(1)N} r^{-q-1}$对$r \in I_{n,\ s}$。现在由介值定理和定理 3.5 可知

$$\left|\mathcal{S}_N(r_n) - \mathcal{S}_N(\rho_n(s))\right| \ll_P (O(1)N)^{O(1)N} r_n^{-q-1} \cdot (\epsilon/2)^{-s} n^{-(q+s-1)/q}.$$

The latter is $(O(1)N)^{O(1)N}O(1)^s n^{-s/q}$ for $n \gg_P 1$, completing the proof. □

定理 3.6的证明。 将 r_n 处与 $\rho_n(s)$ 处的误差项之差界定为

$$\left|E_{n,N,s} - E_{n,N}\right| \le \left|\frac{\alpha_n}{\mathcal{M}(r_n)}\right| \cdot \left|\frac{\mathcal{M}(r_n)}{\mathcal{M}(\rho_n(s))} - 1\right| + \left|\mathcal{S}_N(r_n) - \mathcal{S}_N(\rho_n(s))\right|.$$

由前三个引理结合定理 $E_{n、N、s}$ 中关于 $E_{n、N}$ 的界3.4，即可得到所述的□

现在，我们在前一个定理中选取一个特定值 $N = \lceil s/q \rceil - 1$，以平衡两个误差项。采用这一选择后，我们有 $n^{-N-1} \le n^{-s/q}$。因此，定理3.6 给出如下结论。

推论 3.10. 对所有 $s \ge 1$ 和 $n \gg_P s^{O_P(1)}$，

$$\alpha_n = \mathcal{M}(\rho_n(s)) \left(\mathcal{S}_{\lceil s/q \rceil - 1}(\rho_n(s)) + E_{n,s}\right), \quad \left|E_{n,s}\right| \le (O_P(1)s)^{O(1)s} n^{-s/q}.$$

3.3. **关于 n 的定量渐近。** 现在，我们可以完成最后一步，将上一节中的渐近展开转换为仅关于 n 的渐近展开。仿照 [M¨ul97，公式 (26)], 给出的仅依赖于多项式 $K(P$ 的显式常数 P，令

$$\mathrm{Pref}(u) = \frac{K(P)}{2\sqrt{\pi}} u^{n+q/2} \exp(P(u^{-1}))$$

作为 α_n 的渐近公式中的前因子，该公式来自 [M¨ul97]，其中 $u = n^{-1/q}$。记 $\mathrm{Pref}_n = \mathrm{Pref}(n^{-1/q})$。

引理 3.11。 设 u 为一个复变量，并令

$$\rho(u) = u^{-1}(1 + G_s(u))^{-1}, \quad X_s(u) = \frac{\mathcal{M}(\rho(u))}{\mathrm{Pref}(u)}, \quad Y_s(u) = \mathcal{S}_{\lceil s/q \rceil - 1}(\rho(u)).$$

存在仅依赖于 P 的 $\epsilon > 0$ 和 $M > 0$，使得对每个 $s \ge 1$:

1. X_s 在 $0 < |u| < \epsilon$ 上全纯，且
$$\sup_{0<|u|<\epsilon} |X_s(u)| \le M;$$
2. Y_s 在 $0 < |u| < \epsilon$ 上全纯，且
$$\sup_{0<|u|<\epsilon} |Y_s(u)| \le (Ms)^{Ms};$$
3. X_s 和 Y_s 都可以全纯延拓至 $|u| < \epsilon$，且 $X_s(0) = Y_s(0) = 1$。

证明。 取对数，得到

$$\left|\log X_s(u)\right| \ll \left|P(\rho(u)) - P(u^{-1}) - n\big(\log \rho(u) + \log u\big)\right| + \left|\log B(\rho(u)) + q \log u\right|.$$

由于 $\log \rho(u) = -\log u - \log(1 + G_s(u))$，且 G_s 在 $\{|u| < \epsilon\}$ 上解析，并且 $G_s(0) = 0$，因此乘积 $\rho(u)u$ 在该圆盘上有界于 $O_P(1)$。由于 B 是一个次数为 q、首项系数为 $q/2$ 的多项式，商 $B(\rho(u))/u^{-q}$ 也有界于$O_P(1)$（从上方和下方）. 因此，$\log B(\rho(u)) = -q \log u + O_P(1)$，且第二项对 $|u| < \epsilon$ 有界于 $O_P(1)$。

剩下需要对第一项求和进行界定。根据 [M¨ul97，第 3 节。6] 系数γ_i 的 $G_s(u)$ 在 $i < q/2$处为零，因此我们可以写成 $G_s(u) = u^{q/2}\Delta_s(u)$，其中$\Delta_s$ 在 $\{|u| < \epsilon\}$ 上解析且有界于 O_P（1）。展开后，

$$P(\rho(u)) - P(u^{-1}) = \sum_{i=1}^{q} c_i u^{-i} \big[(1 + G_s(u))^{-i} - 1\big]. \tag{9}$$

由于在圆盘上， $G_s(u) = O_P(u^{q/2})$，由泰勒展开可得，

$$(1+G_s(u))^{-i} - 1 = -iG_s(u) + O_P(G_s(u)^2) = O_P(u^{q/2}).$$

对于 $i < q$ 等式（9）中的任何非零贡献，只有在 $i \le q/2$时才会出现。于是

$$u^{-i}O_P(u^{q/2}) = O_P\big(u^{q/2-i}\big),$$

由于指数非负，该式在 $\{|u| < \epsilon\}$ 上一致有界。对于最高次数 $i = q$，我们必须更仔细地处理这些项。利用 $c_q = 1/q$ 和 $u^q = n^{-1}$，相关部分化简为

$$c_q n\big((1+G_s(u))^{-q} - 1\big) + n\log(1+G_s(u)).$$

像之前一样展开幂，并在 G_s 很小时展开对数（u）（必要时缩小 ϵ，使得 $|G_s$（u）$| \ll 1/q$），得到

$$c_q n\big(-qG_s(u) + O_P(G_s(u)^2)\big) + n\big(G_s(u) + O_P(G_s(u)^2)\big).$$

线性项相互抵消，因为 $c_q = 1/q$，剩下的余项为 nG_s（u）^{2}阶。由于 G_s（u）$= O_P$（$u^{q/2}$），可得 nG_s（u）$^2 = O_P$（nu^q）$= O_P$（1）。

结合以上界可知，对数 X_s（u）在 O_P上有界于（1）$0 < |u| < \epsilon$，因此每个 X_s 在此处都是全纯且有界的。因此 X_s 根据黎曼可去奇点定理，可全纯延拓至 0，并取值 X_s（0）$= 1$，正如 [M¨ul97，第 3 节6]所述。

Y_s 的论证更简单。根据定义， $Y_s(u)$ 是形如$P_k(\rho(u))/B(\rho(u))^{3k}$ 的项之和，其中 $k \le \lceil s/q \rceil - 1$。在圆盘 $|u| < \epsilon$ 上，如上所示，函数 $\rho(u)u$ 和$B(\rho(u))/u^{-q}$ 均由 $O_P(1)$ 界定。每个 $P_k(\rho(u))$ 根据式（8）均由 $(O(1)k)^{O(1)k}\rho(u)^{2kq}$ 界定。因此，每个加项均由以下数值界定：

$$\left|\frac{P_k(\rho(u))}{B(\rho(u))^{3k}}\right| \ll_P (O(1)k)^{O(1)k}u^{kq}$$

在半径为 ϵ 的圆盘上。对 k 求和，得到界 $(O_P(1)s)^{O(1)s}$。由于每个非常数加项在 0 处均为零，因此 0 处的延拓值为 $Y_s(0) = 1$。□

定理 3.12 （ [M¨ul97], 定理 2 的定量形式）。 对所有 $s \ge 1$ 和$n \gg_P s^{O_P(1)}$，

$$\frac{\alpha_n}{\mathrm{Pref}_n} = 1 + \sum_{\nu=1}^{s-1} \mathcal{C}_\nu n^{-\nu/q} + R_{n,s},$$

其中系数 $\mathcal{C}_\nu$ 定义同 [M¨ul97中的公式 (25)–(27)]，，且余项满足

$$\big|R_{n,s}\big| \le O_P(s)^{O_P(s)}n^{-s/q}.$$

证明。 令 $Z_s(u) = X_s(u)Y_s(u)$。根据前面的引理， Z_s 在$\{|u| < \epsilon\}$ 上全纯，且在那里有界于 $(O_P(1)s)^{O(1)s}$。因此， Z_s 有泰勒展开式

$$Z_s(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{s,\nu}u^\nu$$

在圆盘 $\{|u| < \epsilon\}$ 上，其中 $c_{s,\ 0} = 1$。此外，对于 $|u| < \epsilon/2$,

$$\left|Z_s(u) - \sum_{\nu=0}^{s-1} c_{s,\nu}u^\nu\right| \le \frac{\sup_{0<|u|<\epsilon}|Z_s(u)|}{1-|u|/\epsilon}(|u|/\epsilon)^s \le (O_P(1)s)^{O(1)s}|u|^s.$$

令 $u = n^{-1/q}$，并设 $n \gg_P s^{O_P(1)}$。根据推论 3.10，我们有

$$\frac{\alpha_n}{\mathrm{Pref}_n} = Z_s(n^{-1/q}) + X_s(n^{-1/q})E_{n,s}.$$

由于 $\left|E_{n,\ s}\right| \le (O_P(1)s)^{O(1)s} n^{-s/q}$，误差项 $E_{n,\ s}$ 以及 $Z_s(n^{-1/q})$ 的泰勒展开尾项阶数相同，而 X_s 对于 $n \gg_P 1$ 有界。因此

$$\left| \frac{\alpha_n}{\mathrm{Pref}_n} - \sum_{\nu=0}^{s-1} c_{s,\nu} n^{-\nu/q} \right| \ll (O_P(1)s)^{O(1)s} n^{-s/q}.$$

由于这一展开式对每个 s 且误差为 $O_{P,\ s}(n^{-s/q})$ 时均成立，因此系数 $c_{s,\ \nu}$实际上必须与 s无关，并且必须等于 $\mathcal{C}_\nu$ 中[M¨ul97，公式 (25)–(27) 中的系数]。□

4. Fractional expansions for the number of group actions

设 $(\beta_n)_{n\ge a}$ 为一个实数数列。若存在实系数 $(b_k)_{k\ge 0}$，其零次系数为 $b_0 = 1$，使得对所有$s \ge 1$ 以及所有 $n \ge As^B$，均有下式成立，则称 $(\beta_n)_{n\ge a}$ 具有参数为 q, A, B, C, D, $E \ge 1$ 的分数展开式，q（A, B, C, D, E），记作 FE

$$\left| \beta_n - \sum_{k=0}^{s-1} b_k n^{-k/q} \right| \le C(Ds)^{Es} n^{-s/q}.$$

注意，若要使此定义有意义，必须满足 $A \ge a$。

定理 3.12 的一个重要推论是，归一化系数数列 $(\alpha_n/\mathrm{Pref}_n)_{n\ge 0}$ 具有有限误差q，且所有参数均为 $O_P(1)$。我们现在将证明一系列引理，说明具有有限误差q 的数列类在各种运算下封闭。这将使我们能够把数列 $(\alpha_n/\mathrm{Pref}_n)_{n\ge 0}$变换为验证要求 A所需的数列。

4.1. 渐近展开的运算。

引理 4.1 (系数界)。 设数列$(\beta_n)_{n\ge a}$ 具有有限误差$q(A, B, C, D, E)$，其系数为$(b_k)_{k\ge 0}$。那么，对于所有 $k \ge 1$，这些系数满足

$$|b_k| \le 2C(2Dk)^{2Ek}.$$

证明。 取 $n \ge A(k+1)^B$。应用分数阶展开估计，分别取 $s = k$ 和 $s = k+1$，并将二者相减，得到

$$|b_k|\, n^{-k/q} \le C(Dk)^{Ek} n^{-k/q} + C(D(k+1))^{E(k+1)} n^{-(k+1)/q}.$$

乘以 $n^{k/q}$，得到 $|b_k| \le 2C(2Dk)^{2Ek}$，即为所求。 □

引理 4.2 (有限误差的闭包性质：乘积)。 设数列$(\beta_n)_{n\ge a_1}$ 和$(\gamma_n)_{n\ge a_2}$ 分别具有有限误差 $q(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1)$ 和有限误差$q(A_2, B_2, C_2, D_2, E_2)$。那么，乘积序列$(\beta_n\gamma_n)_{n\ge \max(a_1,a_2)}$ 具有

$$\mathrm{FE}_q\left(\max(A_1, A_2),\ \max(B_1, B_2),\ 2C_1C_2,\ 2\max(D_1, D_2),\ 18\max(E_1, E_2)\right).$$

证明。假设 $(\beta_n)_{n\ge a_1}$ 和 $(\gamma_n)_{n\ge a_2}$ 分别具有分数展开，其系数分别为 $(b_k)_{k\ge 0}$ 和 $(c_k)_{k\ge 0}$。令

$A = \max(A_1, A_2)$ $B = \max(B_1, B_2)$ $D = \max(D_1, D_2)$ $E = \max(E_1, E_2)$。对于 $n \ge As^B$，记

$$\beta_n = M_\beta + E_\beta, \quad \gamma_n = M_\gamma + E_\gamma,$$

其中

$$M_\beta = \sum_{i=0}^{s-1} b_i n^{-i/q}, \quad M_\gamma = \sum_{i=0}^{s-1} c_i n^{-i/q}, \quad \left|E_\beta\right|, \left|E_\gamma\right| \le \max(C_1, C_2)(Ds)^{Es} n^{-s/q}.$$

根据定理4.1，对于每个 $i \le s-1$，我们有

$$|b_i|, |c_i| \le 2\max(C_1, C_2)(2Ds)^{2Es}.$$

因此

$$|M_\beta|, |M_\gamma| \le 2\max(C_1, C_2)s(2Ds)^{2Es}.$$

注意，

$$\beta_n\gamma_n = M_\beta M_\gamma + E_\beta M_\gamma + E_\gamma M_\beta + E_\beta E_\gamma.$$

最后三项之和至多为

$$3 \cdot C_1C_2 \cdot (Ds)^{Es}n^{-s/q} \cdot 2s(2Ds)^{2Es} \le 3C_1C_2(2Ds)^{4Es}n^{-s/q}.$$

对于主项，令

$$d_k = \sum_{i+j=k} b_ic_j.$$

注意， $d_0 = b_0c_0 = 1$，并且

$$|d_k| \le (k+1)4C_1C_2(2Dk)^{4Ek}.$$

Then

$$M_\beta M_\gamma = \sum_{k=0}^{s-1} d_k n^{-k/q} + \sum_{k=s}^{2s-2} d_k n^{-k/q},$$

其中第二个求和至多为

$$s \cdot 8sC_1C_2(4Ds)^{8Es} \cdot n^{-s/q} \le 2C_1C_2(2Ds)^{18Es}n^{-s/q}.$$

因此， $\beta_n\gamma_n$ 具有带系数 $(d_k)_{k\ge 0}$的 $\mathrm{FE}_q(A,\ B,\ 2C_1C_2,\ 2D,\ 18E)$。 □

引理 4.3 （FE 的闭包性质：倒数）。 设数列 $(\beta_n)_{n\ge a}$ 具有FE_q（A， B， C， D， E）。假设对于所有 $n \ge a$， $\beta_n \ne 0$。那么倒数数列（$1/\beta_n$）$_{n\ge a}$ 具有

$$\mathrm{FE}_q\left(\max(A, (2CD^E)^q),\ B,\ 6,\ 8CD,\ 6E\right).$$

证明。 设 $(b_k)_{k\ge 0}$ 是 $(\beta_n)_{n\ge 0}$的分数展开系数。对 $s = 1$ 应用 $\mathrm{FE}_q(A,\ B,\ C,\ D,\ E)$，得到，对于 $n \ge A$，

$$|\beta_n - 1| \le CD^E n^{-1/q}.$$

因此，如果 $n \ge (2CD^E)^q$，那么 $|\beta_n| \ge 1/2$。递归地通过 $e_0 = 1$ 定义系数 $(e_k)_{k\ge 0}$，并且对于 $k \ge 1$，

$$e_k = -\sum_{j=1}^{k} b_j e_{k-j}.$$

对于 $s \ge 1$，设

$$B_s(x) = \sum_{k=0}^{s-1} b_k x^k, \qquad E_s(x) = \sum_{k=0}^{s-1} e_k x^k.$$

由此可知 E_s（x）B_s（x） $= 1 + x^sQ_s$（x）是某个多项式 Q_s，其次数至多为$s-2$。现在我们的目标是界定这些多项式在 $x = n^{-1/q}$处的大小。步骤 *1*：关于 e_k 的界。令 $k \ge 1$。由定理 4.1应用于（β_n），可得$|b_k| \le 2C$（$2Dk$）^{2Ek}。我们断言，对于 $k \ge 1$，

$$|e_k| \le (8CDk)^{2Ek}.$$

确实，对于 $k = 1$，这是成立的，因为

$$|e_1| = |b_1| \le 2C(2D)^{2E} \le (8CD)^{2E}.$$

对于 $k \geq 2$，利用递推可得 e_k 的界

$$|e_k| \leq |b_k||e_0| + \sum_{j=1}^{k-1} \left|b_j\right|\left|e_{k-j}\right|.$$

根据系数界引理，第一项可由下式界定

$$|b_k| \leq 2C(2Dk)^{2Ek} \leq \frac{(8CDk)^{2Ek}}{2}.$$

根据归纳假设，和可由下式界定

$$\sum_{j=1}^{k-1} 2C(2Dj)^{2Ej} \cdot (8CD(k-j))^{2E(k-j)}.$$

利用 $2C \leq (2C)^{2Ej}$ 和 $8CD(k-j) \leq 8CDk$，可得其至多为

$$(8CDk)^{2Ek} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{j}{2k}\right)^{2Ej} \leq \frac{(8CDk)^{2Ek}}{2}.$$

因此 $|e_k| \leq (8CDk)^{2Ek}$，如所声称。

步骤 *2*： B_s、E_s、Q_s 的界。令 $x = n^{-1/q} \leq 1$。则

$$\left|B_s(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{s-1} |b_k| \leq s \cdot 2C(2Ds)^{2Es} \leq (8CDs)^{3Es},$$

类似地

$$\left|E_s(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{s-1} |e_k| \leq 1 + s \cdot (8CDs)^{2Es} \leq (8CDs)^{3Es}.$$

由于 $E_s(x)B_s(x) = 1 + x^s Q_s(x)$，我们得到

$$\left|x^s Q_s(x)\right| \leq \left|E_s(x)B_s(x)\right| + 1 \leq 2(8CDs)^{6Es}.$$

步骤 *3*：对 $1/\beta_n$ 进行近似。在阶 s 下应用有限误差$_q(A, B, C, D, E)$，对于$n \geq As^B$，得到

$$\beta_n = B_s(n^{-1/q}) + F_s, \qquad |F_s| \leq C(Ds)^{Es} n^{-s/q}.$$

由此得到

$$\left|\beta_n E_s(n^{-1/q}) - 1\right| \leq \left|B_s(n^{-1/q})E_s(n^{-1/q}) - 1\right| + |F_s|\left|E_s(n^{-1/q})\right|.$$

第一项至多为 $n^{-s/q}|Q_s(n^{-1/q})| \leq 2(8CDs)^{6Es} n^{-s/q}$，而第二项至多为

$$C(Ds)^{Es} n^{-s/q} \cdot (8CDs)^{3Es} \leq (8CDs)^{4Es} n^{-s/q}.$$

最后，由于 $|\beta_n| \geq 1/2$ 对 $n \geq \max\left(A,\ (2CD^E)^q\right)$，我们得到

$$\left|\frac{1}{\beta_n} - E_s(n^{-1/q})\right| = \frac{|\beta_n E_s(n^{-1/q}) - 1|}{|\beta_n|} \leq 6(8CDs)^{6Es} n^{-s/q}$$

由此得到

$$\mathrm{FE}_q(\max(A, (2CD^E)^q), B, 6, 8CD, 6E)$$

对于（$1/\beta_n$），其系数为（e_k）$_{k\geq 0}$。 □

引理 4.4 (FE 的闭包性质：移位). 设数列 $(\beta_n)_{n\geq a}$ 满足 有限误差$_q(A, B, C, D, E)$，并设 $\ell \in \mathbf{Z}$ 满足 $\ell \neq 0$。则移位后的数列$(\beta_{n+\ell})_{n\geq \max(a-\ell,0)}$ 满足

$$\mathrm{FE}_q\left(2\max(A, |\ell|),\ B,\ 4C,\ 2D|\ell|,\ 5E\right).$$

证明。 设 $(b_k)_{k\geq 0}$ 为 $(\beta_n)_{n\geq 0}$ 的分数展开系数。假设 $n \geq \max(2A, 2|\ell|)s^B$，从而 $n+\ell \geq n/2 \geq As^B$。特别地， $n+\ell \geq 0$，因此我们可以在指数 $n+\ell$ 处应用有限误差$q(A,B,C,D,E)$。考虑到 $(n+\ell)^{-s/q} \leq 2^{s/q} n^{-s/q}$，我们得到

$$\beta_{n+\ell} = \sum_{k=0}^{s-1} b_k (n+\ell)^{-k/q} + X, \qquad |X| \leq C(Ds)^{Es}(n+\ell)^{-s/q} \leq 2C(Ds)^{2Es} n^{-s/q}.$$

设

$$(n+\ell)^{-k/q} = n^{-k/q}\left(1+\frac{\ell}{n}\right)^{-k/q}.$$

令 $u = \ell/n$，使得 $|u| \leq 1/2$。我们可以将第二个因子展开为关于 u 的幂级数，直到项 $J = \lceil (s-1-k)/q \rceil$，即

$$(1+u)^{-k/q} = \sum_{j=0}^{J} \binom{-k/q}{j} u^j + R_J(u).$$

利用

$$\left|\binom{-k/q}{j}\right| \leq (e(k+1))^j$$

以及 $k < s$，我们得到

$$|R_J(u)| \leq \sum_{j=J+1}^{\infty} (es|u|)^j \leq 2(es|u|)^{J+1},$$

这里我们用到了 $n \geq 2|\ell|s$，因此 $es|u| \leq 1/2$。所以，

$$|R_J(\ell/n)| \leq 2(3s)^{J+1}\left(\frac{|\ell|}{n}\right)^{J+1}.$$

代入后得到

$$(n+\ell)^{-k/q} = \sum_{j=0}^{J} \binom{-k/q}{j} \ell^j n^{-(k+jq)/q} + 2(3s)^{J+1}|\ell|^{J+1} n^{-(k+q(J+1))/q}.$$

由于选择 J 时满足 $k+q(J+1) \geq s$ 且 $J+1 \leq s$，因此第二个加项至多为 $2(3s)^s|\ell|^s n^{-s/q}$。乘以 b_k 并对 $0 \leq k \leq s-1$ 求和后，我们将 $0 \leq r < s$ 的所有 $n^{-r/q}$ 形式的项收集到系数 $\widetilde{b}_r$ 中，并将其余所有尾项吸收到一个统一的误差界中。由此得到

$$\widetilde{\beta}_n = \sum_{r=0}^{s-1} \widetilde{b}_r n^{-r/q} + \widetilde{X}.$$

注意 $\widetilde{b}_0 = 1$。由定理 4.1，我们有 $|b_k| \leq 2C(2Dk)^{2Ek} \leq 2C(2Ds)^{2Es}$ 对所有 $k \leq s-1$均成立。

$$\sum_{k=0}^{s-1} |b_k| \leq 2Cs(2Ds)^{2Es},$$

因此，余项可以界定为

$$|\widetilde{X}| \leq 2|\ell|^s (3s)^s n^{-s/q} \sum_{k=0}^{s-1} |b_k| + C(Ds)^{Es} n^{-s/q} \leq 4C(2D|\ell|s)^{5Es} n^{-s/q}.$$

证明至此完成。 □

引理 4.5 (FE 的闭包性质：和)。 设 $r \geq 2$。假设对所有 $t \leq r$，数列 $(n^{-e_t/q}\beta_n^{(t)})_{n\geq a}$ 满足有限误差$_q(A_t, B_t, C_t, D_t, E_t)$，其中 e_t 是一个整数。令 $e = \max_{1\leq t\leq r} e_t$，且 $T = \left|\{t \mid 1 \leq t \leq r,\, e_t = e\}\right|$。则和数列

$$\left(\frac{n^{-e/q}}{T} \sum_{t=1}^{r} \beta_n^{(t)} \right)_{n\geq a}$$

允许

$$\mathrm{FE}_q \left(\max_{1\leq t\leq r} A_t,\ \max_{1\leq t\leq r} B_t,\ 2r \max_{1\leq t\leq r} C_t,\ 2 \max_{1\leq t\leq r} D_t,\ 2 \max_{1\leq t\leq r} E_t \right).$$

证明。令 $A = \max_{1\leq t\leq r} A_t$，并定义 B，C，D，E类似地。记

$$\widetilde{\beta}_n^{(t)} = n^{-e_t/q}\beta_n^{(t)}, \qquad \delta_t = e - e_t \geq 0.$$

设 $(b_k^{(t)})_{k\geq 0}$ 是 $\widetilde{\beta}_n^{(t)}$ 的渐近展开系数。对任意 $s \geq 1$，根据我们的假设，对 $n \geq As^B$，

$$\widetilde{\beta}_n^{(t)} = \sum_{k=0}^{s-1} b_k^{(t)} n^{-k/q} + X_t, \qquad |X_t| \leq C_t (Ds)^{Es} n^{-s/q}.$$

因此，由于 $e = \delta_t + e_t$，

$$n^{-e/q} \sum_{t=1}^{r} \beta_n^{(t)} = \sum_{t=1}^{r} n^{-\delta_t/q} \widetilde{\beta}_n^{(t)} = \sum_{t=1}^{r} \sum_{k=0}^{s-1} b_k^{(t)} n^{-(k+\delta_t)/q}.$$

对任意 $p \geq 0$，令

$$Y_p = \{(t,k) \mid 1 \leq t \leq r,\, 0 \leq k \leq s-1,\, k + \delta_t = p\}.$$

于是，双重求和可以改写为

$$\sum_{p=0}^{s-1+\delta_{\max}} \left(\sum_{(t,k)\in Y_p} b_k^{(t)} \right) n^{-p/q}, \qquad \delta_{\max} = \max_{1\leq t\leq r} \delta_t.$$

将此和拆分为主要部分（满足 $p \leq s-1$）和尾项部分（满足 $p \geq s$）。根据引理 4.1，后者可以估计为

$$\left| \sum_{p=s}^{s-1+\delta_{\max}} \sum_{(t,k)\in Y_p} b_k^{(t)} \right| \leq \sum_{t=1}^{r} \sum_{k=0}^{s-1} \left| b_k^{(t)} \right| \leq s \cdot \sum_{t=1}^{r} 2C_t (2Ds)^{2Es} \leq 2rC \cdot (2Ds)^{2Es}.$$

注意，这个数列的零阶系数为 $T \geq 1$。除以 T 后，我们得到所需的分数展开式，证明至此完成。□

4.2. 商的分数展开式 α_n。 我们将借助以下一般工具，利用上一节中的解析性结果导出有限误差$_q$ 。

引理 4.6. 设 u 为复变量。设 $F(u)$ 在圆盘$\{|u| < \epsilon\}$ 上全纯，其中某个 $\epsilon > 0$ 满足 $\sup_{|u|<\epsilon} |F(u)| \leq C$。假设 F 在 $\mathbf{R}$ 上取实值，且 $F(0) \neq 0$。那么存在实系数 $(f_k)_{k\geq 0}$，满足 $f_0 \neq 0$，使得对于所有 s、$q \geq 1$ 和 $n \geq (2/\epsilon)^q$，都有

$$\left| F(n^{-1/q}) - \sum_{k=0}^{s-1} f_k n^{-k/q} \right| \leq 2C(1/\epsilon)^s n^{-s/q}$$

特别地，数列$(f_0^{-1} F(n^{-1/q}))_{n\geq 0}$容许

$$\mathrm{FE}_q \left((2/\epsilon)^q,\ 1,\ 2C/|f_0|,\ 1/\epsilon,\ 1 \right).$$

证明。函数 F 具有泰勒展开

$$F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k u^k$$

并且柯西估计给出 $|f_k| \le C\epsilon^{-k}$。因此，对于所有 $s \ge 1$,

$$\left| F(u) - \sum_{k=0}^{s-1} f_k u^k \right| \le C \frac{1}{1 - |u|/\epsilon} \left(\frac{|u|}{\epsilon} \right)^s .$$

因此，对于满足 $n \ge (2/\epsilon)^q$ 的 $u = n^{-1/q}$，我们有

$$\left| F(n^{-1/q}) - \sum_{k=0}^{s-1} f_k n^{-k/q} \right| \le 2C(1/\epsilon)^s n^{-s/q}.$$

将不等式两边除以 $|f_0|$，即可得到所需的分数展开。 □

例4.7. 设 $k \ge 1$，并令 $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 表示波赫哈默符号。考虑以 $(n^k/(n)_k)_{n \ge k}$ 为项的数列。利用 $u = n^{-1/q}$，我们可以写成

$$\frac{n^k}{(n)_k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n}{n-j} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - ju^q)^{-1} .$$

最后一个表达式定义了圆盘 $\{|u| < \epsilon\}$ 上的一个全纯函数，其中$\epsilon = 1/(4k^2)^{1/q}$。事实上，对于所有 $0 \le j \le k-1$,

$$|ju^q| < k\epsilon^q < 1/(4k) < 1.$$

此外，在这个圆盘上，我们可以计算

$$\left|(1 - ju^q)\right| \ge 1 - |ju^q| \ge 1 - 1/(4k),$$

这意味着乘积有界于 $(1 - 1/(4k))^{-k} \le 4/3$。因此，在上述引理中，我们可以取 $C = 2$，并采用此处的 ϵ 和 $f_0 = 1$。由此可得数列 $(n^k/(n)_k)_{n \ge k}$ 具有

$$\mathrm{FE}_q\left((2/\epsilon)^q,\, 1,\, 2C,\, 1/\epsilon,\, 1\right) = \mathrm{FE}_q\left(O_q(k^2),\, 1,\, 4,\, O_q(k^2),\, 1\right).$$

现在我们可以推导α_n 与其移位之商的数列的分数展开。

定理4.8。 对于任意 $k \ge 0$，数列 $(n^{k/q}\alpha_{n+k}/\alpha_n)_{n \ge 0}$ 具有

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k),\, O_P(1),\, O_P(1),\, O_P(k),\, O_P(1)\right).$$

证明。 设

$$n^{k/q} \cdot \frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_n} = n^{k/q} \frac{\mathrm{Pref}_{n+k}}{\mathrm{Pref}_n} \cdot \frac{\alpha_{n+k}/\mathrm{Pref}_{n+k}}{\alpha_n/\mathrm{Pref}_n}. \tag{10}$$

由定理 3.12，项为

$$a_n = \alpha_n/\mathrm{Pref}_n$$

对于 $n \ge 0$，其在某些参数下具有分数展开，且这些参数均为 $O_P(1)$。应用移位引理并取 $\ell = k$ 后，数列 $(a_{n+k})_{n \ge 0}$ 具有

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k),\, O_P(1),\, O_P(1),\, O_P(k),\, O_P(1)\right),$$

并且，对 $(a_n)_{n\geq 0}$应用倒数引理后，数列 $(1/a_n)_{n\geq 0}$ 具有分数展开，其参数均为 $O_P(1)$。现在应用乘积引理即可得出，数列 $(a_{n+k}/a_n)_{n\geq 0}$ 具有

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k),\, O_P(1),\, O_P(1),\, O_P(k),\, O_P(1)\right).$$

这涉及式（10）中的第二个因子。现在我们也来处理前因子比值。我们有恒等式

$$\log\left(n^{k/q}\frac{\mathrm{Pref}_{n+k}}{\mathrm{Pref}_n}\right) = -\frac{n+k+q/2}{q}\log(1+k/n) + P((n+k)^{1/q}) - P(n^{1/q}).$$

令 $u = n^{-1/q}$，则有 $1 + k/n = 1 + ku^q$ 以及 $(n+k)^{1/q} = u^{-1}(1+ku^q)^{1/q}$。因此，对于复变量 u，定义

$$L_k(u) = -\frac{u^{-q}+k+q/2}{q}\log(1+ku^q) + \left(P\big(u^{-1}(1+ku^q)^{1/q}\big) - P(u^{-1})\right).$$

我们声称，$L_k(u)$ 可延拓为圆盘 $\{|u| < k^{-1/q}/2\}$ 上的全纯函数。写作 $z = ku^q$，于是 $|z| < 1/2^q$ 在该圆盘上成立。令

$$f(z) = \log(1+z)/z, \quad g_i(z) = ((1+z)^{i/q} - 1)/z \quad (1 \leq i \leq q).$$

函数 f 和 g_i 在圆盘 $\{|z| < 1\}$上全纯，因此在圆盘 $\{|z| < 1/2^q\}$上有界。令 C 为它们在那里共同的界，这是一个只依赖于 q的常数。我们可以将 $L_k(u)$ 重写为

$$L_k(u) = -\frac{k}{q}f(z) + \frac{k+q/2}{q}\log(1+z) + \sum_{i=1}^{q} c_i u^{-i} z g_i(z).$$

第一项由 kC/q界定，第二项由 $(k+q/2)\,C2^{-q}/q$界定。二者都是 $O_{C,\,q}(k)$。我们可以将第三项界定为

$$\left|\sum_{i=1}^{q} c_i u^{-i} z g_i(z)\right| \leq \sum_{i=1}^{q} |c_i||u|^{-i}|z|\,C = \sum_{i=1}^{q} |c_i||u|^{q-i}\,Ck.$$

在圆盘 $\{|u| < k^{-1/q}/2\}$ 上，我们有 $|u|^{q-i} \leq k(k^{-1/q}/2)^{q-i} \leq 1$，因此上式至多为 $O_{P,C}(k)$。此外，当 $u \to 0$ 时，$L_k(u)$ 中第一项的首项为 $-k/q$，第二项的首项为 k/q（来自 $i = q$）。这两个首项相消，因此 $L_k(u)$ 在圆盘 $\{|u| < k^{-1/q}/2\}$ 上全纯，且在 $L_k(0) = 0$ 处的值为。由此可知，$\exp(L_k(u))$ 在同一圆盘上也全纯，在 0 处的值为 1，并且在该圆盘上有界于 $O_P(k)$。根据引理 4.6，数列 $(\exp(L_k(n^{-1/q})))_{n\geq 0} = (n^{k/q}\,\mathrm{Pref}_{n+k}/\mathrm{Pref}_n)_{n\geq 0}$ 因而存在

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k), O_P(1), O_P(1), O_P(k^{1/q}), O_P(1)\right).$$

将两个分数阶展开合并起来，由乘积引理可知，数列 $(n^{k/q}\alpha_{n+k}/\alpha_n)_{n\geq 0}$ 存在

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k),\, O_P(1),\, O_P(1),\, O_P(k),\, O_P(1)\right).$$

证明至此完成。 □

4.3. 群作用数量的渐近行为。 在我们的应用中，需要与以下多项式相对应的数列 α_n 。设有限群 G 的阶为 m，令

$$P_G(z) = \sum_{d|m} \frac{s_G(d)}{d} z^d,$$

其中 $s_G(d)$ 是 G 指数为 d的子群数。这些多项式满足等式 (7)。根据 [M¨ul97，公式 (5)],可得

$$\exp(P_G(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(G) z^n, \quad \alpha_n(G) = \frac{\left|\hom(G, \mathrm{Sym}(n))\right|}{n!}.$$

在 $G = 1$ 的特殊情形下，展开式的系数为 $(1/n!)_{n\geq 0}$。其有限误差$_1$ 性质即为斯特林公式。现在假设 G 是任意有限群，并令

$$\chi_n(G) = \left|\hom(G, \mathrm{Sym}(n))\right| = n!\, \alpha_n(G).$$

根据定理 4.8，对于每个固定的 $k \geq 0$，数列

$$(n^{k/q} \alpha_{n+k}(G)/\alpha_n(G))_{n\geq 0} \tag{11}$$

存在分数展开。现在我们将其转换为对应于 $\chi_n(G)$ 的类似数列的分数展开。

定理 4.9 ([PZ24], 命题 3.4 的定量形式)。 对于任意 $k \geq 1$，数列$(n^{-k/q}(n)_k \chi_{n-k}(G)/\chi_n(G))^{n\geq k}$ 存在

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k^{O_P(1)}), O_P(1), O_P(1), O_P(k^2), O_P(1)\right).$$

证明。 我们可以用 $\alpha_n(G)$ 表示给定数列，如下：

$$n^{-k/q}(n)_k \frac{\chi_{n-k}(G)}{\chi_n(G)} = n^{-k/q} \frac{\alpha_{n-k}(G)}{\alpha_n(G)} = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k/q} \cdot \frac{\alpha_{n-k}(G)}{(n-k)^{k/q}\alpha_n(G)}. \tag{12}$$

对于第一个因子，写作

$$\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k/q} = (1 - ku^q)^{k/q}$$

其中 $u = n^{-1/q}$。函数 $(1 - ku^q)^{k/q}$ 在圆盘 $\{|u| < k^{-1/q}/2\}$ 上全纯，且在该处有界于 2，并在 0 处取值为 1。因此，根据引理4.6，对应于 $n \geq k$ 的数列满足

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k), O(1), O(1), O(k^{1/q}), O(1)\right).$$

对于式 (12) 中的第二个因子，我们使用定理 4.8。将式 (11) 中的数列移位 $-k$ ，然后取其倒数。因此，该数列

$$\left(\frac{\alpha_{n-k}(G)}{(n-k)^{k/q}\alpha_n(G)}\right)_{n\geq k+1}$$

满足

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k^{O_P(1)}), O_P(1), O_P(1), O_P(k^2), O_P(1)\right).$$

将上述两个数列相乘，根据乘积引理可知，式 (12) 给出的数列满足

$$\mathrm{FE}_q\left(O_P(k^{O_P(1)}), O_P(1), O_P(1), O_P(k^2), O_P(1)\right).$$

证明完成。 □

5. Asymptotic expansion of expected traces

本节将说明，多项式指数函数的渐近展开如何推出随机表示期望迹的渐近展开，从而证明假设A 当 Γ 是有限多个有限群的自由积时成立。Puder 和 Zimhoni 在 [PZ24], 中探讨了这两种渐近展开之间的关系，并将其置于覆盖空间的背景下。这里，我们将概述其中与本文相关的定义和结果，并补充定量细节，使其适用于本文的目的。

5.1. 子覆叠与提升。设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 如式 (1) 所示。对于每个$1 \le i \le m$，设 X_{G_i} 为一个仅有一个顶点 v_i 和若干条边 e_i^x 的 CW 复形，这些边以非平凡元 $x \in G_i$ 为索引，并满足 $\pi_1(X_{G_i}, v_i) \cong G_i$。我们通过取 $X_{G_1}, \dots, X_{G_m}$的不交并，添加一个基点 o，并用一条边 e_i将 o与每个 v_i 相连，从而构造 X_Γ。因此， $\pi_1(X_\Gamma, o) \cong \Gamma$。

[PZ24]中的一个关键概念是 X_Γ的子覆叠。它是一个 CW复形 Y，嵌入到 X_Γ 的某个覆盖空间中。每个子覆叠都配有一个限制覆盖映射 $p\colon Y \to X_\Gamma$。可以通过与这些覆盖映射相容的态射来比较和复合子覆叠。子覆叠Y的一个分解是一组子覆叠态射 $\{f\colon Y \to Z_f\}$，使得从 Y到 X_Γ 的任意覆盖空间 X 的每个态射 $\hat{}\,h\colon Y \to X$，都能唯一地分解为 $h = g \circ f$；其中， f 属于该分解，且 g为一个嵌入。类似地， Y 的一个嵌入分解是一组单态射，使得从Y到任意覆盖空间的每个单态射 h，都能唯一地分解为 $h = g \circ f$；其中， f 属于该嵌入分解，且 g为一个嵌入。

令 $N \ge 1$，并令 $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(N)$ 为一个均匀随机同态。存在一个相应的 N 叶覆叠空间 $\pi\colon X_\phi \to X_\Gamma$ （见 [Hat02]）。现在令 $p\colon Y \to X_\Gamma$ 是 X_Γ 的任意覆盖空间的一个子覆盖。 p 到 X_ϕ 的一个提升是子覆盖态射 $\tilde{p}\colon Y \to X_\phi$，满足 $p = \pi \circ \tilde{p}$。令 $\mathbf{E}_Y(N)$ 表示 p 到 X_ϕ 的提升的期望数量，即

$$\mathbf{E}_Y(N) = \mathbf{E}_\phi[|\{\tilde{p}\colon Y \to X_\phi \mid p = \pi \circ \tilde{p}\}|].$$

类似地，令 $\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N)$ 表示 p 到 X_ϕ 的嵌入提升的期望数量。对于紧子覆盖 Y，任意有限分解 $\mathcal{R}$ of Y 满足（见 [PZ24，引理 2。4]）

$$\mathbf{E}_Y(N) = \sum_{f \in \mathcal{R}} \mathbf{E}_{Z_f}^{\mathrm{emb}}(N),$$

对于 Y 的有限嵌入分解 $\mathcal{R}^{\mathrm{emb}}$，同样有

$$\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N) = \sum_{f \in \mathcal{R}^{\mathrm{emb}}} \mathbf{E}_{Z_f}^{\mathrm{emb}}(N). \tag{13}$$

我们现在的目标是借助较易处理的渐近展开式，推导出$\mathbf{E}_Y(N)$ 的渐近展开式，其中较易处理的是$\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N)$ 的渐近展开式。

5.2. **有限群的嵌入提升预期数量**。 在本小节中，假设 $\Gamma = G$ 是一个有限群。令 Y 为 X_G的紧子覆盖。那么，根据 [PZ24，命题 3。3], 集合

$$\mathcal{R}_Y = \left\{ f\colon Y \to Z_f \;\middle|\; \begin{array}{c} Z_f \text{ is a covering space of } X_G \text{ and} \\ f(Y) \text{ meets every connected component of } Z_f \end{array} \right\}$$

是 Y 的有限分解。类似地，将 $\mathcal{R}_Y$ 限制到嵌入 f，定义 $\mathcal{R}_Y^{\mathrm{emb}}$。对我们的目的而言，需要量化该分解的大小。

引理 5.1. 设 G 是一个有限群，且 Y 是 X_G 的一个紧致子覆盖，具有 V 个顶点。则

$$|\mathcal{R}_Y| \leq O_{|G|}(V)^{O(V)}.$$

证明。 Y 的连通分支数至多为 V。 X_G 的连通覆盖有 $O_{|G|}(1)$ 种同构类型，因此，X_G 上至多有 V 个连通分支的覆盖 Z 数目为 $O_{|G|}(1)^V$。固定一个这样的覆盖 Z。条件 $f(Y)$ 与 Z 的每个连通分支都有交，迫使存在一个满射 $\pi_0(Y) \to \pi_0(Z)$，因此至多有 V^V 种选择。给定 Y 的每个连通分支所对应的目标连通分支后，胞腔映射 $Y \to Z$ 在 1-骨架 $Y^{(1)}$ 上唯一确定。由于 Z 至多有 V 个连通分支，且每个连通分支都是 X_G 的一个至多为 $|G|$ 重的连通覆盖，我们必须有$|V(Z)| \leq |G|V^2$。选定各顶点的像后，对于 Y 中的每条 $O_{|G|}(V)$ 边，至多还有$O_{|G|}(1)$ 种选择，因为 Z 的每个顶点都关联着 $O_{|G|}(1)$ 条边。因此，胞腔映射 $Y \to Z$ 的数目至多为

$$V^V \cdot |V(Z)|^V \cdot O_{|G|}(1)^{O_{|G|}(V)} \leq O_{|G|}(V)^{O_{|G|}(V)}.$$

乘以 Z 的选取数量，即得所需的界。 □

在本节余下部分，我们将对 CW复形 X_G 的子覆盖的嵌入提升的期望数量给出定量界。这是上一节所建立的渐近展开式的关键切入点。我们先考虑 Y 是紧覆盖空间的情形。

命题 5.2 （ [PZ24],命题 3.4 的定量形式）。 设 G 是一个有限群，且 Y 是 X_G 的一个紧覆盖空间，具有 V 个顶点。则数列 $(N^{-V/|G|}\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N))_{N\geq V}$存在

$$\mathrm{FE}_{|G|}\left(O_{|G|}(V^{O_{|G|}(1)}), O_{|G|}(1), O_{|G|}(1), O_{|G|}(V^2), O_{|G|}(1)\right).$$

证明。 X_G 的 N 层覆盖的数量恰为 $\left|\text{同态}(G, \text{对称群}(N))\right| = \hat{\chi}_N(G)$（参见 [Hat02]）。对于从 Y 到 X_G 的任意一个 N 层覆盖 $\hat{}$ 的嵌入 $h\colon Y \to X$，其像 $h(Y)$ 包含 X 的 V 个顶点。由于 Y 是覆盖空间，$h(Y)$ 及其补集是不连通的。因此，嵌入 h 可先通过从其中选择 V 个不同的顶点（共 N 个）来确定，然后再选择一个与之互补的 $(N-V)$ 层覆盖。总计，

$$\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N) = (N)_V \cdot \frac{\chi_{N-V}(G)}{\chi_N(G)}.$$

该结论现在可由定理4.9立即推出。 □

现在我们可以处理 X_G 的任意紧子覆盖 Y。按照 [PZ24，定义 2.5],，我们将欧拉示性数 $\chi^{\mathrm{grp}}(Y)$ 与 Y 相关联。这个示性数定义为各群的欧拉示性数之和[4] $p_*(\pi_1(Y_i))$，其中Y_i 遍历 Y 的连通分支，且 $p\colon Y \to X_G$ 是限制覆盖映射。对于有限群 G，总有 $\chi^{\mathrm{grp}}(Y) \geq 0$。此外，若 Y 是 X_G 的覆盖，则有 $\chi^{\mathrm{grp}}(Y) = |V(Y)|/|G|$ （参见 [PZ24] 中命题 3.4 证明的最后部分）。

[4]关于群的欧拉示性数的概述，参见 [PZ24，定义 1。3]。

命题 5.3 （ [PZ24], 推论 3.5 的定量形式）。设 G 是一个有限群， Y 是 X_G 的一个紧子覆盖，且有 V 个顶点。那么数列$(N^{-\chi^{\mathrm{grp}}(Y)}\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N))_{N\geq V}$ 存在

$$\mathrm{FE}_{|G|}\left(O_{|G|}(V^{O_{|G|}(1)}),\, O_{|G|}(1),\, O_{|G|}(V)^{O_{|G|}(V)},\, O_{|G|}(V^2),\, O_{|G|}(1)\right).$$

证明。 利用公式 $\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N)$ 对分解 $\mathcal{R}_Y^{\mathrm{emb}}$展开

$$\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N) = \sum_{f\in\mathcal{R}_Y^{\mathrm{emb}}} \mathbf{E}_{Z_f}^{\mathrm{emb}}(N).$$

每个求和项 $\mathbf{E}_{Z_f}^{\mathrm{emb}}(N)$ 对应于 X_G 的一个紧覆盖 Z_f ，其连通分支数至多为 V。特别地， Z_f 有 $V_f = O_{|G|}(V)$ 个顶点。由前述命题可知，每个数列

$$(N^{-V_f/|G|}\mathbf{E}_{Z_f}^{\mathrm{emb}}(N))_{N\geq V}$$

都存在

$$\mathrm{FE}_{|G|}\left(O_{|G|}(V^{O_{|G|}(1)}),\, O_{|G|}(1),\, O_{|G|}(1),\, O_{|G|}(V^2),\, O_{|G|}(1)\right).$$

同时，根据定理 5.1，嵌入分解的大小有上界 $|\mathcal{R}_Y| \leq O_{|G|}(V)^{O(V)}$。引理 4.5 说明，对于某个常数 $T \geq 1$ ，数列

$$\left(\frac{N^{-\max_f V_f/|G|}}{T}\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N)\right)_{N\geq V}$$

都存在

$$\mathrm{FE}_{|G|}\left(O_{|G|}(V^{O_{|G|}(1)}),\, O_{|G|}(1),\, O_{|G|}(V)^{O_{|G|}(V)},\, O_{|G|}(V^2),\, O_{|G|}(1)\right).$$

现在，根据 [PZ24，推论 3 的证明：5], 最大值 $\max_f V_f/|G| = \max_f \chi^{\mathrm{grp}}(Z_f)$ 在唯一的 $f \in \mathcal{R}_Y^{\mathrm{emb}}$处取得，其值为 $\chi^{\mathrm{grp}}(Y)$。因此 $T = 1$ 证明完毕。 □

5.3. **自由积的嵌入提升的期望数量**。 现在假设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 是由有限群构成的自由积，如式（1）所示。令

$$\mu(\Gamma) = \mathrm{lcm}\big(|G_1|,\ldots,|G_m|\big), \qquad M(\Gamma) = |G_1| + \cdots + |G_m|. \tag{14}$$

利用前一小节的结果，我们现在可以证明，对于 X_Γ 的任意紧子覆盖，提升的期望数量具有分数阶展开式。

命题 5.4。 设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 满足 $\mu = \mu(\Gamma)$ 且 $M = M(\Gamma)$ ， 如式 (14)所示，并设 Y 是 X_Γ 的一个紧子覆盖，具有 V 个顶点。那么数列$(N^{-\chi^{\mathrm{grp}}(Y)}\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N))_{N\geq V}$ 具有

$$\mathrm{FE}_{\mu}\left(O_{\mu,M}(V^{O_{\mu,M}(1)}),\, O_M(1),\, O_M(V)^{O_M(V)},\, O_{\mu,M}(V^2),\, O_M(1)\right).$$

证明。令 $p\colon Y \to X_\Gamma$ 为限制覆盖映射。对于 $1 \leq i \leq m$， 令$Y|_{G_i} = p^{-1}($ X_{G_i}) 为位于 X_{G_i} 上方的 Y 的子复形，并令 $v = |p^{-1}(o)|$、 $v_i = |V(Y|_{G_i})|$、 $\epsilon_i = |p^{-1}(e_i)|$。所有这些数都不超过 V。PZ24 的命题 2 证明中已证明[6] 满足

$$\mathbf{E}_Y^{\mathrm{emb}}(N) = (N)_v \cdot \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{(N)_{\epsilon_i}}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^m \mathbf{E}_{Y|_{G_i}}^{\mathrm{emb}}(N)\right).$$

回忆例子 4.7 中的数列 $(N^v/(N)_v)_{N\geq v}$ 和 $(N^{\epsilon_i}/(N)_{\epsilon_i})_{N\geq \epsilon_i}$ 满足

$$\mathrm{FE}_\mu\left(O_\mu(V^2),\, 1,\, O(1),\, O_\mu(V^2),\, 1\right).$$

将第一个数列取倒数，得到 $((N)_v/N^v)_{N\geq v}$，根据倒数引理，可得如下形式的分数展开

$$\mathrm{FE}_\mu\left(O_\mu(V^{O_\mu(1)}),\, 1,\, O(1),\, O_\mu(V^2),\, O(1)\right).$$

根据前述命题，每个数列

$$(N^{-\chi^{\mathrm{grp}}(Y|_{G_i})}\mathbf{E}^{\mathrm{emb}}_{Y|_{G_i}}(N))_{N\geq V}$$

都存在

$$\mathrm{FE}_\mu\left(O_M(V^{O_M(1)}),\, O_M(1),\, O_M(V)^{O_M(V)},\, O_M(V^2),\, O_M(1)\right).$$

剩下的工作是将所有这些分数展开相乘。乘积引理表明，数列

$$\left(N^{-v+\sum_{i=1}^m \epsilon_i-\sum_{i=1}^m \chi^{\mathrm{grp}}(Y|_{G_i})}\mathbf{E}^{\mathrm{emb}}_Y(N)\right)_{N\geq V}$$

都存在

$$\mathrm{FE}_\mu\left(O_{\mu,M}(V^{O_{\mu,M}(1)}),\, O_M(1),\, O_M(V)^{O_M(V)},\, O_{\mu,M}(V^2),\, O_M(1)\right).$$

指数 $-v+\sum_{i=1}^m \epsilon_i-\sum_{i=1}^m \chi^{\mathrm{grp}}(Y|_{G_i})$ 根据 χ^{grp}(Y等于 [PZ24，引理 4。2],证明得证。□

5.4. **随机表示的期望迹**。 最后，我们可以证明条件 A 在 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 如式（14）所示的情形下。为建立记号，令 γ 为 Γ的一个非平凡元素，其正规形式为

$$\gamma = x_1x_2\cdots x_{|\gamma|}, \qquad \text{for some } x_i \in G_{i_j}\backslash\{1\},\ i_{j+1}\neq i_j.$$

每个 x_i 都对应复形 $X_{G_{i_j}}$中的一条边 $e^{x_i}_{i_j}$。元素 $\gamma \in \pi_1(X_\Gamma)$ 可表示为一个环路，依次沿着每个 $i=1$，2，.....，$|\gamma|$的线段

$$o \xrightarrow{e_{i_j}} v_{i_j} \xrightarrow{e^{x_i}_{i_j}} v_{i_j} \xrightarrow{e_{i_j}} o.$$

令 C_γ 为一个圈，它有 $3|\gamma|$个顶点映射到上述 γ 的组合表示。根据覆盖空间中的提升判据（例如，参见 [PZ24，命题 2。8]），此映射可提升到 X_Γ的普遍覆盖。令 Y_γ 为该提升的像，并配备限制覆盖映射 $p\colon Y_\gamma \to X_\Gamma$。子覆盖 Y_γ 是连通的，且至多有 $3|\gamma|$ 个顶点和边。

现在假设 $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(N)$ 是一个均匀随机表示，并令 X_ϕ 为相应的 N叶覆叠空间，其底空间为 X_Γ。根据提升判据，作用 $\phi(\gamma)$ 在 γ上的不动点数 $\mathbf{fix}\ \{1,2,\dots,N\}$，再次等于 $p\colon Y_\gamma \to X_\Gamma$ 到 X_ϕ (见 [Hat02]) 的提升数。因此，我们可以将 $\phi(\gamma)$ 的期望迹表示为

$$\mathbf{E}_\phi[\operatorname{tr}\phi(\gamma)] = N^{-1}\mathbf{E}_\phi\left[\left|\operatorname{fix}\phi(\gamma)\right|\right] = N^{-1}\mathbf{E}_{Y_\gamma}(N). \tag{15}$$

我们可以利用分解展开最后一个期望

$$\mathcal{R}_\gamma = \left\{f\colon Y_\gamma \to Z_f \mid f \text{ is a surjective morphism of subcovers}\right\}.$$

引理 5.5. 对于每个非平凡的 $\gamma \in \Gamma$,

$$|\mathcal{R}_\gamma| \leq O(|\gamma|)^{O(|\gamma|)}.$$

证明. Y_γ 的顶点和边的数量至多为 $3|\gamma|$。任意子覆盖态射 $f\colon Y_\gamma \to Z$ 都由其在 1-骨架上的作用确定。因此，我们通过粗略估计指定顶点和边像的方式数，来计算满射态射的数量。由于 f 在顶点上是满射，映射 $f_V\colon V(Y_\gamma) \to V(Z)$ 将 $V(Y_\gamma)$ 划分为非空纤维，记为划分 Π；每个块对应于 Z的一个顶点。因此， Π 的可能数量至多为贝尔数 $B_{|V(Y_\gamma)|} \le (3|\gamma|)^{3|\gamma|}$。

现在固定这样一个划分 Π。对于 Π 中的每一对块 $\{A,B\}$，令 $E_{AB} \subseteq E(Y_\gamma)$ 表示 Y_γ 中端点分别位于 A 和 B 的边的集合。由于 f 保持关联关系， E_{AB} 中的每条边都必须映射到 Z_f 中的一条边，且其端点是分别对应于 A 和 B 的顶点。因此，对于每个固定的 $\{A,B\}$，在 E_{AB} 上指定 $f_E\colon E(Y_\gamma) \to E(Z)$，等价于将 E_{AB} 划分为非空纤维（每个纤维都是 Z 中连接 A 和 B 的某条边的原像）。因此， f_E 的可能取值数至多为

$$\prod_{\substack{\{A,B\}\in\Pi \\ E_{AB}\neq\emptyset}} |E_{AB}|^{|E_{AB}|}.$$

利用 $\sum_{\{A,B\}\in\Pi} |E_{AB}| = \big|E(Y_\gamma)\big| \le 3|\gamma|$ 以及对 $a_i > 0$ 成立的不等式 $\prod_i a_i^{a_i} \le (\sum_i a_i)^{\sum_i a_i}$，可知上述量至多为 $(3|\gamma|)^{3|\gamma|}$。

综上，满射态射的总数 $f\colon Y_\gamma \to Z_f$ 为

$$\big|\mathcal{R}_\gamma\big| \le (3|\gamma|)^{6|\gamma|},$$

正如所需。 □

现在我们可以推导出期望迹所需的渐近展开式。为了陈述该结果，我们需要引入一些记号。令 Γ^{tors} 表示 Γ的挠元集合，令 $\Gamma^\infty = \Gamma \setminus \Gamma^{\mathrm{tors}}$ 表示无限阶元素的集合。我们定义一个依赖于群元素 $\gamma \in \Gamma$ 的参数如下:

$$h(\gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma \in \Gamma^{\mathrm{tors}} \\ |\mathcal{H}_\gamma| & \gamma \in \Gamma^\infty, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{H}_\gamma$ 是 Γ 中包含 γ 且同构于$\mathbf{Z}$或 $C_2 * C_2$的子群集合(h的值将在引理6.2 和 6.3中显式计算。此外，对于 $\gamma \in \Gamma^\infty$，我们将 $1/|\langle\gamma\rangle|$ 解释为 0。

定理 5.6。 设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 满足 $\mu = \mu(\Gamma)$ 且 $M = M(\Gamma)$ 如式 (14)所示。对于每个 $\gamma \in \Gamma$，数列

$$\left(\frac{N^{-1/|\langle\gamma\rangle|}}{h(\gamma)} \cdot \mathbf{E}_\phi\left[\operatorname{Tr}\phi_N(\gamma)\right] \right)_{N \gg_M |\gamma|}$$

具有

$$\mathrm{FE}_\mu\left(O_{\mu,M}(|\gamma|)^{O_{\mu,M}(1)},\, O_M(1),\, O_M(|\gamma|)^{O_M(|\gamma|)},\, O_{\mu,M}(|\gamma|^2),\, O_M(1) \right).$$

证明。 首先假设 γ 不是一个扭元。我们可以利用分解 $\mathcal{R}_\gamma$展开式（15）。每个求和项 $\mathbf{E}^{\mathrm{emb}}_{Z_f}(N)$ 都对应于 X_Γ 的一个紧子覆盖Z_f，其顶点数至多为 $3|\gamma|$。由命题 5.4 可知，每个数列 $(N^{-\chi^{\mathrm{grp}}(Z_f)/\mu}\mathbf{E}^{\mathrm{emb}}_{Z_f}(N))_{N\ge 3|\gamma|}$都具有

$$\mathrm{FE}_\mu\left(O_{\mu,M}(|\gamma|)^{O_{\mu,M}(1)},\, O_M(1),\, O_M(|\gamma|)^{O_M(|\gamma|)},\, O_{\mu,M}(|\gamma|^2),\, O_M(1) \right).$$

令 $e = \max_f \chi^{\mathrm{grp}}(Z_f)$。根据引理 5.5，分解的大小有界于$O(|\gamma|)^{O(|\gamma|)}$。现在，求和引理意味着数列 $(T^{-1}N^{-e/\mu}\mathbf{E}_Y(N))^{N\geq 3|\gamma|}$具有

$$\mathrm{FE}_\mu\left(O_{\mu,M}(|\gamma|)^{O_{\mu,M}(1)}, O_M(1), O_M(|\gamma|)^{O_M(|\gamma|)}, O_{\mu,M}(|\gamma|^2), O_M(1)\right).$$

e 和 T 的值可如下确定。在 [PZ24 的定理 1.4] 证明中，已证明对所有 f， $\chi^{\mathrm{grp}}(Y_\gamma) \leq 0$，且 0 的最大值至少取得一次。特别地，我们有 $e = 0$，而 T 对应于满足 $\chi^{\mathrm{grp}}(Z_f) = 0$的 f的数量。此类 f 的数量，正如 [PZ24 的定理 1.4],所述，等于包含 γ 的 Γ 中与 Z 或$C_2 * C_2$同构的子群数量，我们在上文将其记为 $h(\gamma)$。

另一方面，当 γ 是一个扭元时，我们可以用更直接的方式处理，并使用一个更简单的 Y_γ。在这种情况下，关于$\pi_N(\gamma)$的所有统计量仅取决于 G 的有限因子 Γ，而 γ 共轭到该因子中。特别地，设 Y_γ 为 X_G 对应于 γ 在 $\pi_1(X_G)$中生成的有限循环子群的有限覆盖。其顶点数为 Y_γ 的指数 $|G\colon \langle\gamma\rangle|$。在这种情况下，我们可以使用命题5.2 中更直接的分数展开式，推导出数列

$$\left(N^{-1/|\langle\gamma\rangle|}\mathbf{E}_{Y_\gamma}(N)\right)_{N\geq|G:\langle\gamma\rangle|}$$

满足有限误差$|G|$，因此也满足有限误差μ，且所有参数均由 $O_{|G|}(1) = O_M(1)$界定。 □

5.5. **期望迹的渐近展开**。 最后，我们已准备好推导要求 A。

定理 5.7。 令 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 及 $\mu = \mu(\Gamma)$ 和 $M = M(\Gamma)$ 如等式 (14)所示。对于每个 $\gamma \in \Gamma$、每个 $s \geq |\gamma|$以及每个 $N \geq O_{\mu,M}(s)^{O_{\mu,M}(1)}$，存在常数 $a_\ell \in \mathbf{R}$，使得对所有非负整数 ℓ，均有 $a_0 = \mathbf{1}_{\gamma=1} = \tau(\lambda(\gamma))$ 以及

$$\left|\mathbf{E}\left[\operatorname{tr}\pi_N(\gamma)\right] - \sum_{\ell=0}^{s-1} a_\ell N^{-\ell/\mu}\right| \leq O_{\mu,M}(s)^{O_{\mu,M}(s)} N^{-s/\mu}.$$

证明。 对于每个 $\gamma \in \Gamma$，以及一个随机同态 $\phi\colon \Gamma \to$对称群(N)，其扩张为 $\pi_N = \mathrm{std} \circ \phi_N$，我们有

$$\mathbf{E}\left[\operatorname{tr}\pi_N(\gamma)\right] = N^{-1+1/|\langle\gamma\rangle|}\left(N^{-1/|\langle\gamma\rangle|}\mathbf{E}\left[\operatorname{Tr}\phi_N(\gamma)\right] - N^{-1/|\langle\gamma\rangle|}\right). \tag{16}$$

根据定理 5.6，存在系数 $b_k \in \mathbf{R}$，它们依赖于 γ，使得对于所有$s \geq 1$以及所有$N \geq O_{\mu,M}(|\gamma|)^{O_{\mu,M}(1)}s^{O_M(1)}$，我们有

$$N^{-1/|\langle\gamma\rangle|}\mathbf{E}\left[\operatorname{Tr}\phi_N(\gamma)\right] = \sum_{k=0}^{s-1} b_k N^{-k/\mu} + X$$

其中 $b_0 = h(\gamma)$，且

$$|X| \leq O_M(|\gamma|)^{O_M(|\gamma|)} \cdot O_{\mu,M}(|\gamma|^2 s)^{O_M(1)s} N^{-s/\mu}.$$

此外，由引理 4.1，可得

$$|b_k| \leq O_M(|\gamma|)^{O_M(|\gamma|)} \cdot O_{\mu,M}(|\gamma|^2 k)^{O_M(1)k}.$$

将此展开式代入式（16）得到

$$\mathbf{E}\left[\operatorname{tr}\pi_N(\gamma)\right] = \sum_{k=0}^{s-1} b_k N^{-1+1/|\langle\gamma\rangle|-k/\mu} - N^{-1} + N^{-1+1/|\langle\gamma\rangle|}X.$$

令 $t=\mu(1-1/|\langle\gamma\rangle|)\geq 0$。注意，$t\leq\mu$，且仅当 γ 为无限阶时等号成立。进一步令 $\ell=t+k$ 随 k 变化。于是，上式可改写为

$$\sum_{\ell=t}^{t+s-1} a_\ell N^{-\ell/\mu}+N^{-1+1/|\langle\gamma\rangle|}X,\qquad a_\ell=b_{\ell-t}-\mathbf{1}_{\ell=\mu}. \tag{17}$$

将上面的求和拆分为两部分：主要部分中，ℓ 取值至 $s-1$；尾项中，ℓ 从 s 到 $t+s-1$。后者可由下式估计

$$\sum_{\ell=s}^{s+t-1}|a_\ell|N^{-\ell/\mu}\leq t\cdot O_M(|\gamma|)^{O_M(|\gamma|)}\cdot O_{\mu,M}(|\gamma|^2 s)^{O_M(1)s}\cdot N^{-s/\mu}. \tag{18}$$

假设 $s\geq|\gamma|$。因此，对于$N\geq O_{\mu,M}(s)^{O_{\mu,M}(1)}$，我们有

$$N^{-1+1/|\langle\gamma\rangle|}|X|\leq O_{\mu,M}(s)^{O_{\mu,M}(s)}N^{-s/\mu}.$$

将这一结果与式（18）结合，由式（17）可得

$$\left|\mathbf{E}\left[\operatorname{tr}\pi_N(\gamma)\right]-\sum_{\ell=0}^{s-1}a_\ell N^{-\ell/\mu}\right|\leq O_{\mu,M}(s)^{O_{\mu,M}(s)}N^{-s/\mu}.$$

这就是所需的展开式。注意，系数 a_ℓ 对所有满足 $\ell\,0\leq\ell<t=\mu(1-1/|\langle\gamma\rangle|)$ 的情形都为零。当 γ 是无限阶时，这意味着对于 $a_\ell=0\,0\leq\ell<\mu$，而根据式（$a_\mu=a_t=b_0-1=\left|\mathcal{H}_\gamma\right|-1$）17）。另一方面，当 γ 是扭元时，a_0 只有在 $t=0$ 时才可能非零，这等价于 $\gamma=1$在 Γ中。此时，$a_0=b_0=1$。综上，我们得到 $a_0=\mathbf{1}_{\gamma=1}=\tau(\lambda(\gamma))$，证毕。□

6. Temperedness of leading coefficients

在本节中，我们证明首项系数的温和性，即要求 B，当 Γ 是有限多个有限群的自由积时成立。

6.1. 正化技巧。 配备生成集 S 的离散群 Γ 满足快速衰减性质，如果存在一个多项式 $P\in\mathbf{C}[X]$，使得对于每个 $x\in\mathbf{C}[\Gamma]$，我们都有

$$\left\|\lambda(x)\right\|\leq P(|x|)\cdot\|x\|_{\ell^2(\Gamma)},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ 上的算子范数。Haagerup 最初证明自由群具有这一性质 [Haa79], ，而 Jolissaint 随后对其进行了形式化介绍 [Jol90]。快速衰减性质在取自由积时保持不变 [Jol90，定理 A], ，且有限群也具有该性质 [Jol90，命题 B]。特别地，我们 Γ在此考虑的群满足快速衰减性质。

在快速衰减性质下，Magee 和 de la Salle [MdlS24，第 6 节。2]将证明首项系数的温和性的问题约化为对元素$x\in\mathbf{C}[\Gamma]$ 进行证明，其中这些元素是 随机游走的对称生成元 在 Γ上，也就是说，在展开式 $x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma\gamma$中，系数 α_γ 均为非负数，其和为 1，并且$\alpha_{\gamma^{-1}}=\alpha_\gamma$。下面给出这一精确断言，文献中称之为 正化技巧 （另见 [vH25，第 2 节。6]）。

引理 6.1 ([MdlS24], 命题 6.3)。 设 Γ 是具有快速衰减性质的有限生成群。设 u: $\mathbf{C}[\Gamma]\to\mathbf{C}$ 是一个函数，在 Γ上的对称随机游走的每个生成元处都温和。那么 u 在 $\mathbf{C}[\Gamma]$的每个自伴元处都温和。

6.2. **群元素的首项系数**。为了应用正化技巧，我们需要更好地理解群元素$\gamma \in \Gamma$ 的首项系数 $u_k(\gamma)$。

引理 6.2。设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$满足 $\mu = \mu(\Gamma)$ 和 $M = M(\Gamma)$ 如式（14）所示。设 $\gamma \in \Gamma$ 为任意元素，并设 $u_k(\gamma)$ 满足要求 A。

1. *If* $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{tors}}$, *then* $u_k(\gamma) \leq O_{\mu,M}(1)$.
2. *If* $\gamma \in \Gamma^{\infty}$, *then* $u_k(\gamma) = 0$ *for* $0 \leq k < \mu$, *and* $u_\mu(\gamma) = \left|\mathcal{H}_\gamma\right| - 1$.

证明。设 $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{tors}}$。则 γ 与有限自由因子 G_i 中的某个元素共轭，其中 Γ。由于 u_k 在共轭下不变，因此不妨设 γ 属于一个阶至多为 M 的有限群。对于 γ 有 O_M种这样的选择，而满足 u_k的值 γ（$1 \leq k \leq \mu$）至多有 μ 个。这就证明了该陈述的第一部分。同时，第二部分 $\gamma \in \Gamma^{\infty}$包含在定理 5.7证明的最后部分中。□

由于 Γ^{∞}具有刚性结构，我们还可以完整描述 $\left|\mathcal{H}_\gamma\right|$。

引理 6.3. 设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$。对任意 $\gamma \in \Gamma^{\infty}$，存在唯一的 $\delta \in \Gamma$和 $d \geq 1$，使得 $\gamma = \delta^d$，且 δ 不是 Γ中的真幂。此外，

$$\left|\mathcal{H}_\gamma\right| = \omega(d) + \begin{cases} \sigma(d) & \text{if } \gamma \text{ is contained in a subgroup isomorphic to } C_2 * C_2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $\omega(d)$ 是 d的正因数个数，而 $\sigma(d)$是这些正因数之和。

证明。根据 [MKS76，第 28 题，第 196] 页，Γ中无限阶元素的中心化子是循环中心化子。设 $\gamma \in \Gamma^{\infty}$，并令 δ 为 $C_\Gamma(\gamma)$ 的生成元。于是，对某个$d \geq 1$，有 $\gamma = \delta^d$，且 δ 不是一个真幂。在 $\langle\delta\rangle \cong \mathbf{Z}$ 中，恰有 $\omega(d)$ 个包含 γ的子群。现在假设 γ 也包含于一个同构于$C_2 * C_2$的子群中，该子群由一个对合 τ 和一个无限阶元素 σ 生成。于是$\gamma \in \langle\sigma\rangle$，因此 $\sigma \in C_\Gamma(\gamma) = \langle\delta\rangle$。所以，对某个整除 d 的 $k \in \mathbf{Z}$，有 $\sigma = \delta^k$。换言之，任何包含 γ 的 $C_2 * C_2$ 都具有如下形式：$\langle\tau, \delta^k\rangle$，其中$\tau$是一个满足 $\tau\gamma\tau = \gamma^{-1}$ 的对合，且有某个 $k \mid d$。假设这样的对合 τ 确实存在。$\langle\tau, \delta\rangle$ 中的对合恰好具有如下形式：对于某个 i，有 $\tau\delta^i$。这意味着，所有包含 γ 的 $C_2 * C_2$ 子群都是 $H_{i,k} = \langle\tau\delta^i, \delta^k\rangle$，其中 $0 \leq i < k$ 且$k \mid d$。此外，这些子群两两不同。因此，如果至少存在一个包含 γ的$C_2 * C_2$ 子群，那么这类子群的数量恰好为$\sum_{k|d} k = \sigma(d)$。□

因此，我们可以将 Γ^{∞} 分成三个互不相交的子集：

- $\Gamma^{\infty}_{\text{幂}}$：元素 $\gamma \in \Gamma^{\infty}$ 满足 $\gamma = \delta^d$，其中 $\delta \in \Gamma$ 不是某个真幂，且 $d \geq 2$是一个整数。在这种情况下，$\left|\mathcal{H}_\gamma\right| \leq \omega(d) + \sigma(d)$。
- $\Gamma^{\infty}_{C_2 * C_2}$：元素 $\gamma \in \Gamma^{\infty}$ 不是真幂，且包含在一个与 $C_2 * C_2$同构的 Γ 子群中。在这种情况下，$\left|\mathcal{H}_\gamma\right| = 2$。
- Γ^{∞}_{∞}：元素 $\gamma \in \Gamma^{\infty}$ 既不是真幂，也不包含在与 $C_2 * C_2$同构的子群中。在这种情况下，$\left|\mathcal{H}_\gamma\right| = 1$。

6.3. **随机游走的命中概率**。令 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ 为 Γ 上对称随机游走的一个生成元。令 X 为由 x 驱动的 Γ 上的随机游走，即 X 是一个服从$\mathbf{P}[X = \gamma] = \alpha_\gamma$分布的随机变量。对于每个 $p \geq 1$,

令 $X_1, X_2, \ldots, X_p$ 为 X 的独立同分布副本。因此$X_1X_2\cdots X_p$是随机游走经过 p 步后的位置。注意

$$x^p = \mathbf{E}\left[X_1X_2\cdots X_p\right] = \sum_{\gamma\in\Gamma}\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p=\gamma)\gamma. \tag{19}$$

我们需要对特定子集的命中概率给出上界 Γ，这些子集由元素 γ 组成，对于这些元素，我们对 $u_k(\gamma)$有一致控制。在此过程中，我们将用左正则表示改写等式（19）。注意，对任意 γ，$\alpha\in\Gamma$，我们都可以写成 $\mathbf{1}_{\gamma=\alpha}=\langle\delta_\gamma,\ \lambda(\alpha)\delta_1\rangle$。将此式用于 $\alpha=X_1X_2\cdots X_p$并取期望，由等式（19）可得

$$\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p=\gamma) = \langle\delta_\gamma, \lambda(x)^p\delta_1\rangle. \tag{20}$$

引理 6.4。设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 满足 $M = M(\Gamma)$，如等式(14)所示。则

$$\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p\in\Gamma^{\mathrm{tors}}) \le (p+1)^2 M\cdot\left\|\lambda(x)\right\|^p.$$

证明。任意扭元 $\gamma\in\Gamma^{\mathrm{tors}}$ 都与有限自由因子 G_i 中的某个元素共轭，该因子是 Γ的有限自由因子。因此，存在 α，$\beta\in\Gamma$ 使得 $\gamma=\alpha^{-1}\beta\alpha$，且 β 属于一个有限自由因子。因此

$$\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p\in\Gamma^{\mathrm{tors}}) \le \sum_{\beta\in G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_k}\ \sum_{\alpha\in\Gamma}\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p=\alpha^{-1}\beta\alpha). \tag{21}$$

可能的 β的个数以$|G_i|$之和为上界，亦即以 M为上界。接下来我们来估计对 α的内层求和。由于群 Γ 的元素具有正规形式，事件 $X_1X_2\cdots X_p=\alpha^{-1}\beta\alpha$ 意味着存在 $1\le t_1\le t_2\le p+1$ 使得

$$X_1X_2\cdots X_{t_1-1}=\alpha^{-1},\quad X_{t_1}X_{t_1+1}\cdots X_{t_2-1}=\beta,\quad X_{t_2}X_{t_2+1}\cdots X_p=\alpha.$$

关于 X_i的独立性，连同式（20），意味着概率$\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p=\alpha^{-1}\beta\alpha)$因此以如下量为上界

$$\sum_{1\le t_1\le t_2\le p+1}\langle\delta_{\alpha^{-1}},\lambda(x)^{t_1-1}\delta_1\rangle\langle\delta_\beta,\lambda(x)^{t_2-t_1}\delta_1\rangle\langle\delta_\alpha,\lambda(x)^{p+1-t_2}\delta_1\rangle.$$

中间因子至多为 $\left\|\lambda(x)\right\|^{t_2-t_1}$。因此，对 $\alpha\in\Gamma$ 在式（21）中的内层求和以如下量为上界

$$\left\|\lambda(x)\right\|^{t_2-t_1}\sum_{1\le t_1\le t_2\le p+1}\ \sum_{\alpha\in\Gamma}\langle\delta_{\alpha^{-1}},\lambda(x)^{t_1-1}\delta_1\rangle\langle\delta_\alpha,\lambda(x)^{p+1-t_2}\delta_1\rangle.$$

注意，对任意 $t\ge1$，我们有

$$\sum_{\alpha\in\Gamma}\langle\delta_\alpha,\lambda\left(x\right)^t\delta_1\rangle^2 = \left\|\lambda(x)^t\delta_1\right\|^2_{\ell^2(\Gamma)} \le \left\|\lambda(x)\right\|^{2t}.$$

由此，利用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\sum_{\alpha\in\Gamma}\langle\delta_{\alpha^{-1}},\lambda(x)^{t_1-1}\delta_1\rangle\langle\delta_\alpha,\lambda(x)^{p+1-t_2}\delta_1\rangle \le \left\|\lambda(x)\right\|^{p+t_1-t_2}.$$

将上述上界代入式（21），所述结论便立即成立；同时考虑到至多有 $(p+1)^2$ 种选择对应于二元组 (t_1,t_2)。□

引理 6.5. 设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 满足 $M = M(\Gamma)$ 如式 (14)。则

$$\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p\in\Gamma^\infty_{C_2*C_2}) \le (p+1)^5M^2\cdot\left\|\lambda(x)\right\|^p.$$

证明。 任意元素 $\gamma \in \Gamma^{\infty}_{C_2*C_2}$ 均可写成两个对合的乘积，且每一个都共轭于 Γ 的某个有限自由因子中的一个对合。因此，存在α， α'， β， $\beta' \in \Gamma$ 使得

$$\gamma = \alpha^{-1}\alpha'\alpha\beta^{-1}\beta'\beta,$$

其中 α', β' 属于有限自由因子。现在我们可以重复前一个引理中的论证，根据 $1 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_5 \le p+1$将乘积 $X_1X_2\cdots X_p$ 分成六部分，用 $\|\lambda(x)\|$的幂来界定对应于 α', β' 的项，并使用柯西-施瓦茨不等式处理关于 α, β的求和。 α'，β' 的选择数至多为 M^2，而 t_i 的选择数至多为 $(p+1)^5$,，从而得到所需的界。□

引理 6.6。 设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$。对于任意整数 $d \ge 2$，定义 $\Gamma^{\infty}_{\mathrm{pow},d}$ 为 Γ^{∞} 中满足以下条件的元素集合：它们是非真幂元素的 d 次幂。于是

$$\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p \in \Gamma^{\infty}_{\mathrm{pow},d}) \le (p+1)^4 \cdot \|\lambda(x)\|^p .$$

此外，只有当 $d \le p|x|$ 时，概率才非零。

证明。 我们先证明最后一个结论。注意，若 Γ^{np} 表示非真幂群元素的集合，

$$\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p \in \Gamma^{\infty}_{\mathrm{pow},d}) = \sum_{\delta \in \Gamma^{\mathrm{np}}} \mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p = \delta^d).$$

因此，我们只需考虑某个 $\delta \in \Gamma^{\mathrm{np}}$ 的 $\gamma = \delta^d$。事件 $X_1X_2\cdots X_p = \gamma$ 意味着 $d \le |\delta^d| \le |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_p| \le p|x|$，所以只有当 $d \le p|x|$ 时，概率才非零。从这里开始，我们沿用 [vH25，引理 3 的证明。10] 以及 [MPvH25，定理 1 的证明。8]。由于 Γ 具有正规形式，我们可以将其写为 $\delta = \alpha^{-1}\beta\alpha$ ，其中 $\beta \in \Gamma$ 是某个循环约化字， $\alpha \in \Gamma$ 是某个 $\alpha \in \Gamma$。因此 $\gamma = \alpha^{-1}\beta^d\alpha$。对每个固定的 d，我们重复前面引理中的论证：根据 $1 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le p+1$ 将乘积$X_1X_2\cdots X_p$ 拆成四部分，用 $\|\lambda(x)\|^{t_2-t_1}$界定对应于 β^d 的项，并使用柯西-施瓦茨不等式处理关于 α 的求和。 t_i 的选择数至多为 $(p+1)^4$。□

6.4. **首项系数的温和性**。 最后，我们给出自由积B有限群的证明。

定理 6.7. 设 $\Gamma = G_1 * G_2 * \cdots * G_m$ 满足 $\mu = \mu(\Gamma)$，如式 (14)所示。那么，对于所有正整数 $k \le \mu$，泛函 u_k 在 $\mathbf{C}[\Gamma]$的每个自伴元处都是温和的。

证明。 根据定理6.1，只需证明该命题对 Γ上的对称随机游走生成元成立。设 $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ 是这样的一个生成元。按式（19）展开此式。将该和拆分为两部分，

$$u_k(x^p) = \sum_{\gamma \in \Gamma^{\mathrm{tors}}} \mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p = \gamma)u_k(\gamma) + \sum_{\gamma \in \Gamma^{\infty}} \mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p = \gamma)u_k(\gamma).$$

根据引理 6.2 和6.4，第一部分的贡献为

$$O_{\mu,M}(1) \cdot \mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p \in \Gamma^{\mathrm{tors}}) \le O_{\mu,M}(p^{O(1)}) \cdot \|\lambda(x)\|^p .$$

再次利用引理6.2，第二部分仅在 $k = \mu$时才有贡献，并且可根据 Γ^{∞} 划分为 $\Gamma^{\infty}_{\mathrm{pow}}$、$\Gamma^{\infty}_{C_2*C_2}$和 Γ^{∞}_{∞}的方式，进一步拆分为三部分。根据引理6.3，对于 $\gamma \in \Gamma^{\infty}_{\infty}$，有$u_\mu(\gamma) = 0$，因此这一部分没有贡献。此外，对于 $\gamma \in \Gamma^{\infty}_{C_2*C_2}$，有 $u_\mu(\gamma) = 1$，而对于

$\gamma \in \Gamma^{\infty}_{\mathrm{pow}}$ 当 $\gamma = \delta^d$时，有$u_\mu(\gamma) \le \omega(d) + \sigma(d) \le O(d^2)$。根据引理6.6，后面的各项仅在 $d \le p|x|$时才有贡献。因此，第二部分的贡献至多为

$$\mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p \in \Gamma^{\infty}_{C_2 * C_2}) + \sum_{2\le d\le p|x|} O(d^2)\cdot \mathbf{P}(X_1X_2\cdots X_p \in \Gamma^{\infty}_{\mathrm{pow},d}),$$

这再次由引理6.5 和6.6可得，其上界为

$$O_M(p^{O(1)})\cdot \big\|\lambda(x)\big\|^p + O((p|x|)^{O(1)})\cdot \big\|\lambda(x)\big\|^p .$$

取 p-次方根，并令 $p\to\infty$ 趋于极限，即可得到所需的温和性。 □

References

[AK88] K. Aomoto 和 Y. Kato。循环群自由积上的格林函数与谱。 *Ann. Inst. Fourier* 38 1 59 85, 1988 1 3，(): –。。Bar Ya M Barzdin。三维空间中网络[93] 的实现。载于*Works of AN Kolmogorov* 194 202 1993 1 1 *Selected*，第–页。

Springer，。。[BC19] Charles Bordenave 和 Benoˆıt Collins。随机提升的特征值与随机置换矩阵的多项式。 *Ann. Math. (2)* 190 3 811 875, 2019 1 2, 1 3，(): –。。。[08] BG Jean Bourgain 和 Alex Gamburd。SL $_2$ $_p$ *Ann. Math. (2)* 167 2 625 642, 2008 1 1 (F) 的[15] 凯莱图的一致扩张界。，(): –。。BGGT Emmanuel Breuillard、Ben Green、Robert Guralnick 和陶哲轩。李型有限单群中的扩张。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 17 6 1367 1434, ，(): –。。[2015 1 1] BKKO17] Emmanuel Breuillard、Mehrdad Kalantar、Matthew Kennedy 和 Narutaka Ozawa。离散群的C^*-单性与唯一迹性质。 *Publ. Math., Inst.Hautes Étud. Sci.*，126：35–71，2017。1.4[Cas25] Ewan Cassidy。作用于 k元组的随机置换具有近乎最优的 $k=$ n 2412 13941 [ ] 2025 2025 1 2[24] poly( )谱隙。预印本，arXiv:。math.RT ( )，。。CGVTvH Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas、Joel A. Tropp 和 Ramon van Handel。强收敛的一种新方法。预印本，arXiv:2405.16026 [math.PR] (2024)，2024。1.2，1.2，1.2，1.4，2[CGVvH24] Chi-Fang Chen、Jorge Garza-Vargas 和 Ramon van Handel。强收敛的一种新方法 II：经典系综。预印本，arXiv:2412.00593 [math.PR] (2024 2024 1 2)，。。CS Donald I. Cartwright 和 P. M. Soardi。自由积、商群与融合积上的随机游走。[86] *Nagoya Math. J.* 102 163 180, 1986 1 3，：–。。Fri Joel Friedman。[08] *A proof of Alon's second eigenvalue conjecture and related problems*， *Mem. Am. Math. Soc.* 第910卷。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会 (AMS)， 2008 1 1。。Haa Uffe Haagerup。一个具有度量逼近性质的非核 C*-代数的例子。 *Invent. Math.*，50：279–293，1979。6.1[Hat02] Allen Hatcher。 *Algebraic topology*。剑桥大学出版社，剑桥，2002。 1 4, 5 1, 5 2, 5 4。。。。HLW Shlomo[06] Hoory、Nathan Linial 和 Avi Wigderson。扩展图及其应用。 *Bull. Am. Math. Soc. New Ser.* 43 4 439 561, 2006 1 1，，(): –。。HMT Will[25] Hide、Davide Macera 和 Joe Thomas。Weil-Petersson随机曲面的多项式速率谱隙。预印本，arXiv:2508.14874 [math.SP] (2025)，2025。1.2[HS68] B. Harris 和 L. Schoenfeld。解析函数系数的渐近展开。 *Ill. J. Math.* 12 264 277, 1968 1 4, 3 1, 3 1, 3 1, 3 1，：–。。。。。。。JLR Svante[00] Janson、Tomasz Luczak 和 Andrzej Rucinski。 *Random graphs*。Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim. 纽约：Wiley， 2000 1 1。。Jol Paul[90] Jolissaint。群的约化-代数中的速降函数。 *Trans. Am. Math. Soc.* 317 1 167 196, 1990 6 1 C^*，(): –。[59] *Symmetric random walks on groups*。Kes Harry Kesten。，第 92 卷。美国数学会， 1959 1 2。。Kow Emmanuel[19] Kowalski。 *An introduction to expander graphs* 26 *Cours Spéc.*，卷数，。巴黎：法国数学会 (SMF)，。。[88] *(Paris)* 2019 1 1 LPS A.

Lubotzky、R. Phillips 和 P. Sarnak。Ramanujan图。 *Combinatorica*，8(3)：261–277，1988。1.1

[LS96] Martin W. Liebeck 和 Aner Shalev。经典群、概率方法与(2, 3 144 1 77 125, 1996 2)-生成问题。 *Ann. Math. (2)*, [04] ( ): –。LS Martin W. Liebeck 和 Aner Shalev。福克斯群、黎曼曲面的覆盖、子群增长、随机商群与随机游走。 *J. Algebra*, 276 601, 2004 2 552 1 3 ( ): –。。[Lub95] Alexander Lubotzky。凯莱图：特征值、扩张图与随机游走。载于 *Surveys in combinatorics 1995. Proceedings of the 15th British combinatorial conference held in July 1995 at the University of Stirling UK* , 第–页。剑桥：剑桥大学出版社, 155 189 1995 1 1。。Mar G. A. Margulis。集中器的显式构造。 *Probl. Peredachi Inf.*, 9 4 71 80, 1973 1 ( ): –。。[73] 1 Mar GA Margulis。组合方案的显式群论构造及其在扩张图和集中器构造中的应用。 *Problemy Peredachi Informatsii* 24 1 5160, 1988 1 1 , ( ): 。。MdlS Michael Magee 和 Mikael de la Salle。[88] 24] 准指数维表示中 Haar酉元的强渐近自由性。预印本，arXiv:2409.03626 [math.PR] (2024 2024 1 2, 1 4, 1 4, 2 1, 6 1, 6 1), 。。。。。。。MKS Wilhelm Magnus、Abraham [76] Karrass 和 Donald Solitar。*Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations. 2nd rev. ed* 。Dover Books Adv. Math. 多佛出版社，纽约州米尼奥拉，1976。6.2[MPvH25] Michael Magee、Doron Puder 和 Ramon van Handel。曲面群的一致随机置换表示的强收敛。预印本，arXiv: 2504 08988 [ ] 2025 2025 1 2, 1 4, 1 4, 1 4, 1 4, 2, 2, 6 3 。math.GT ( ), 。。。。。。[¨ 97] ¨ $e^{P(z)}$ 。Mul Thomas Muller。有限群作用与的渐近展开。 *Combinatorica* 17 4 523 554, 1997 1, 1 4, 3, 3 2, 3 1, 3 1, 3 4, 3 2, 3 2 1, 3 6, 3 2 3, 3 3, 3 , ( ): –.3, 3 3, 43, 3 12, 3 3。。。[MW55] Leo Moser 和 Max Wyman。对称群中 $x^d = 1$ *Canadian* 的解。 , ( ): –。。*Journal of Mathematics* 7 2 159 170, 1955 1 4 [73] Pin Mark Pinsker。关于集中器的复杂度。载于 *7th International Teletraffic Conference June 1973* 1973 1 , ,。。1 [24] PZ Doron Puder 和 Tomer Zimhoni。自由积中随机置换的局部统计。 *Int. Math. Res. Not.*, 2024 1, 5 5 4242 4300, 2024 1 4, 1 4, 4 9, 5, 5 2, 4, 52, 5 3, 5 2, 5 3, 5 4, 5 4 ( ): –. [SW25] Yang Shen 和 Yunhui Wu。随机贝利曲面的近乎最优谱隙。预印本，arXiv: 2511 02517 [ ] 2025 2025 1 2, 1 3 。math.SP ( ), 。。。vH Ramon van [25] Handel。强收敛现象。预印本，arXiv: 2507 00346 。math.PR ( ), 。。。。。。[ ] 2025 2025 1 2, 1 4, 1 4, 2, 2, 6 1, 6 3 [99] Wor N. C. Wormald。随机正则图模型。载于 *Surveys in combinatorics1999 (Canterbury)* 267 , *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*卷，239–298页。剑桥大学出版社，剑桥，1999。1.1

Marco Barbieri, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, Jad-ranska 19, 1000 Ljubljana, Slovenia*Email address*: marco.barbieri@fmf.uni-lj.si

Urban Jezernik, Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, Slovenia / Institute of Mathematics, Physics, and Mechanics, Jadranska 19, 1000 Ljubljana, Slovenia*Email address*: urban.jezernik@fmf.uni-lj.si