arXiv:2602.11922v1 [math.OA] 12 Feb 2026

迹算术–κ_p 不等式

TENG ZHANG

摘要。设 $\mathcal{A}$ 是一个带有忠实迹正线性泛函 τ 的含幺 C^*-代数。记其正锥为 $\mathcal{A}_+$。对于 $p>0$ 和 $A,\ B\in\mathcal{A}_+$，我们考虑以下运算

$$A\,\kappa_p\,B:=\left(A^{p/4}B^{p/2}A^{p/4}\right)^{1/p},\qquad A\,\nabla\,B:=\frac{A+B}{2}.$$

我们证明，对于所有 $p>0$ 以及所有 $A,\ B\in\mathcal{A}_+$，

$$\tau(A\,\kappa_p\,B)\le\sqrt{\tau(A)\tau(B)}\le\tau(A\,\nabla\,B),$$

从而对 Á. Komálovics 和 L. Molnár 提出的 [6, 问题 1]，作出了肯定回答。我们还记录了矩阵情形下关键估计的一个酉不变范数类比，并给出了明确的 2×2 反例，表明当 $0<p<1$ 时，d_p 的三角不等式可能不成立（即使对于 $p=\frac{1}{2}$ 也如此），从而对 [6, 问题 2] 作出了部分回答。

1. 引言

设 $\mathcal{A}$ 是含幺 C^*-代数，并以 $\mathcal{A}_+$ 表示其正锥。对于 $p>0$ 和 $A,\ B\in\mathcal{A}_+$，定义

$$A\,\kappa_p\,B:=\left(A^{p/4}B^{p/2}A^{p/4}\right)^{1/p},\tag{1.1}$$

以及算术平均

$$A\,\nabla\,B:=\frac{A+B}{2}.$$

根据$[0,\infty$上的连续函数演算，当 $A,\ B\in\mathcal{A}_+$ 时，这两个表达式都有定义。在矩阵情形中，令 $\mathbb{M}_n$(ℂ)表示所有 $n\times n$ 复矩阵构成的代数，并令 $\mathbb{M}_n$(ℂ)+ 表示其半正定矩阵锥。对于 $A\in\mathbb{M}_n$(ℂ)，我们用 Tr(A)表示 A的迹。

现在假设 τ 是 $\mathcal{A}$上的忠实迹正线性泛函。按照 Komálovics 和 Molnár [6], , 对于 $p>0$, 我们定义

$$d_p^\tau(A,B):=\left(\tau(A\,\nabla\,B-A\,\kappa_p\,B)\right)^{1/2},\qquad A,B\in\mathcal{A}_+.\tag{1.2}$$

在矩阵情形中，当 $\mathcal{A}=\mathbb{M}_n$(ℂ)且 $\tau=$ 为 Tr 时，量 $\sqrt{2}\,d_1^{\mathrm{Tr}}$和 $\sqrt{2}\,d_2^{\mathrm{Tr}}$分别对应量子 Hellinger距离和 Bures（或 Bures–Wasserstein）距离；例如参见 [5, 8]。

Komálovics 和 Molnár [6] 证明，对于任意具有忠实迹的 C^*-代数，当 $0<p\le2$ 时，d_p^τ($A,\ B$)有良好定义且非负；他们使用了 Araki–Lieb–Thirring不等式（例如参见 [2]）。在有限维情形 $\mathcal{A}=\mathbb{M}_n$(ℂ) 中，他们进一步通过结合 p 中的单调性论证与对极限 $p\to\infty$ 的有限维分析，证明了 $p>2$ 的非负性（见 [1]）。他们指出，对于一般的 C^*-代数，$p>2$ 情形之所以更加微妙，恰恰是因为无法使用这类有限维工具，并提出了以下问题。

2020 数学主题分类。 15A60, 46L52,47A63.关键词和短语。 酉不变范数，非交换 Hölder 不等式，忠实迹，C^*-代数，Bures–Hellinger型距离。

问题 1.1 ([6, 问题 1])。 对于每个具有忠实迹正线性泛函 τ 的 C^*-代数 $\mathcal{A}$，

$$\tau(A \nabla B - A \kappa_p B) \geq 0$$

对所有 A、$B \in \mathcal{A}_+$ 以及所有实数 $p > 2$，是否成立？

他们还询问了 (1.2) 的度量性质：

问题 1.2 ([6, 问题 2]). 设 $n \geq 2$。对于每个 $1 < p < 2$，d_p^{Tr} 在 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})+$ 上是否为度量？而对于每个 $0 < p < 1$，它是否不是度量？更一般地，若 $\mathcal{A}$ 是一个带有忠实迹 τ 的 C^*-代数，那么 d_p^τ 是否是 $1 < p < 2$ 的度量？

在本文中，我们对问题 1.1 给出了肯定的回答。事实上，我们证明了对所有 $p > 0$，所需的迹不等式均成立。证明依赖于非交换 Hölder 不等式和一个标准的嵌入引理。此外，在矩阵情形下，我们建立了一个酉不变范数不等式，并由此将迹估计作为一个特例推出。我们还给出了明确的 2×2 矩阵，证明三角不等式对 $p = \frac{1}{2}$ 不成立，从而为问题 1.2 中 $0 < p < 1$ 的范围提供了一个具体的反例。

2. 矩阵情形与酉不变范数不等式

对于 $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$，令 $|X| = (X^*X)^{1/2}$。如果一个范数 $|||\cdot|||$ 在 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上满足：对于所有酉矩阵 U，V，则称其为 酉不变的。

我们的出发点是下面关于酉不变范数的 Hölder 型不等式。

引理 2.1 ([3, 练习 IV.2。7])。 设 α、β、$\gamma > 0$ 满足 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma}$。则对于 $\mathbb{M}_n$ 上的每个酉不变范数 $|||\cdot|||(\mathbb{C})$，

$$|||\,|AB|^\gamma\,|||^{1/\gamma} \leq |||\,|A|^\alpha\,|||^{1/\alpha} \left|\left|\left||B|^\beta\right|\right|\right|^{1/\beta}, \qquad A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

接下来，我们将引理 2.1 应用于算子平均 $A \kappa_p B$，得到一个范数不等式；作为特殊情形，该不等式稍后将给出矩阵情形下所需的迹估计。

定理 2.2。 设 $p > 0$ 以及 A、$B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})+$。则

$$|||A \kappa_p B||| \leq |||A|||^{1/2}\, |||B|||^{1/2} \leq \frac{|||A||| + |||B|||}{2}. \tag{2.1}$$

证明。 令 $X := A^{p/4}B^{p/4}$。于是 $XX^* = A^{p/4}B^{p/2}A^{p/4}$，因此

$$A \kappa_p B = (XX^*)^{1/p}.$$

设 $X = U|X|$ 为极分解。则 $XX^* = U|X|^2U^*$，而函数演算给出 $(XX^*)^{1/p} = U|X|^{2/p}U^*$。由酉不变性，

$$|||A \kappa_p B||| = \left|\left|\left||X|^{2/p}\right|\right|\right| = \left|\left|\left||A^{p/4}B^{p/4}|^{2/p}\right|\right|\right|. \tag{2.2}$$

将引理 2.1 应用于 $A^{p/4}$ 和 $B^{p/4}$，其中取 $\gamma = 2/p$ 和 $\alpha = \beta = 4/p$。我们得到

$$\left|\left|\left||A^{p/4}B^{p/4}|^{2/p}\right|\right|\right|^{p/2} \leq \left|\left|\left||A^{p/4}|^{4/p}\right|\right|\right|^{p/4} \left|\left|\left||B^{p/4}|^{4/p}\right|\right|\right|^{p/4} = |||A|||^{p/4}\, |||B|||^{p/4}.$$

将两边提升到 $2/p$ 次幂，并利用 (2.2)，得到 (2.1) 中的第一个不等式。第二个不等式由标量算术—几何平均不等式 $\sqrt{uv} \leq (u+v)/2$ （对 u，$v \geq 0$成立）推出，并将其应用于 $u = |||A|||$ 和 $v = |||B|||$。□

因此，取迹范数即可得到相应的迹不等式。

推论 2.3. 设 $p>0$ 且 $A,\ B\in\mathbb{M}_n\ (\mathbb{C})_+$。则

$$\mathrm{Tr}(A\,\kappa_p\,B)\le\sqrt{\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)}\le\mathrm{Tr}(A\,\nabla\,B). \tag{2.3}$$

特别地，对于所有 $p>0$，$\mathrm{Tr}(A\,\nabla\,B-A\,\kappa_p\,B)\ge 0$。

证明。对迹范数 $\|X\|_1=\mathrm{Tr}\,|X|$ 应用定理 2.2。由于 $A\,\kappa_p\,B\ge 0$，我们有$\|A\,\kappa_p\,B\|_1=\mathrm{Tr}(A\,\kappa_p\,B)$，类似地，$\|A\|_1=\mathrm{Tr}(A)$ 和 $\|B\|_1=\mathrm{Tr}(B)$。因此，(2.1) 化简为 (2.3)。□

3. 带忠实迹的 C^*-代数：问题 1.1 的解答

现在我们从矩阵转向一般的 C^*-代数。论证分两步进行：首先，将 $(\mathcal{A},\tau)$ 嵌入一个有限冯·诺伊曼代数中，并保持迹不变；其次，在相应的非交换 L^p-空间中应用 Hölder 不等式。

引理 3.1 ([6, 引理 3])**.** 设 $\mathcal{A}$ 是一个配备忠实迹正线性泛函 τ的 C^*-代数。则存在一个冯·诺伊曼代数 M，其上配备忠实正规迹正线性泛函 ν，以及一个等距的 *-同构 φ，将 $\mathcal{A}$ 映到 M 的一个超弱（等价地，σ-弱）稠密的 C^*-子代数，使得对所有 $X\in\mathcal{A}$，$\nu(\varphi(X))=\tau(X)$。特别地，将 ν 归一化为迹态后，M 按通常意义是一个有限冯·诺伊曼代数。

引理 3.2 ([7, p. 1464])**.** 设 (M,ν) 是一个有限冯·诺伊曼代数，配备忠实正规有限迹 ν（不一定归一化）。对于 $0<s<\infty$ 和 $X\in L_s(M,\nu)$，令 $\|X\|_s=(\nu(|X|^s))^{1/s}$。若 $0<p$、q、$r<\infty$ 满足 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$，则

$$\|XY\|_r\le\|X\|_p\,\|Y\|_q,\qquad X\in L_p(M,\nu),\ Y\in L_q(M,\nu).$$

当 $s<1$，$\|\cdot\|_s$ 仅为拟范数时；尽管如此，上述 *Hölder* 不等式仍然成立。

结合这两个要素，即可在最一般的情形下得到所需的迹不等式。

定理 3.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个带有忠实迹正线性泛函τ的含幺 C^*-代数。那么，对于任意 $p>0$ 以及所有 $A,B\in\mathcal{A}_+$，

$$\tau(A\,\kappa_p\,B)\le\sqrt{\tau(A)\tau(B)}\le\tau(A\,\nabla\,B). \tag{3.1}$$

特别地，$\tau(A\,\nabla\,B-A\,\kappa_p\,B)\ge 0$ 对所有 $p>0$ 均成立。

证明。由引理 3.1，可（通过 φ）将 $\mathcal{A}$ 视为有限冯·诺伊曼代数 (M,ν) 的一个超弱稠密 C^*-子代数，并使得 $\tau=\nu|_{\mathcal{A}}$。由于 φ 保持连续函数演算，只需在 (M,ν) 中证明 (3.1)。

固定 $p>0$ a 并令 $A,B\in M_+$，并设 $X:=A^{p/4}B^{p/4}$。于是 $XX^*=A^{p/4}B^{p/2}A^{p/4}$，因此 e

$$A\,\kappa_p\,B=(XX^*)^{1/p}.$$

设 $X=u|X|$ 是 M 中的极分解，其中 u 是部分等距算子。于是 $XX^*=u|X|^2u^*$，因此 $(XX^*)^{1/p}=u|X|^{2/p}u^*$。利用迹性质以及 u^*u 是 $|X|$ 的支撑投影这一事实（故 $|X|^{2/p}=|X|^{2/p}u^*u$），我们得到

$$\nu(A\,\kappa_p\,B)=\nu\big((XX^*)^{1/p}\big)=\nu\big(u|X|^{2/p}u^*\big)=\nu\big(|X|^{2/p}u^*u\big)=\nu\big(|X|^{2/p}\big)=\|X\|_{2/p}^{2/p}.$$

现在对指数 $2/p$ 和 $4/p$ 应用引理 3.2：

$$\|A^{p/4}B^{p/4}\|_{2/p}\le\|A^{p/4}\|_{4/p}\,\|B^{p/4}\|_{4/p}.$$

由于 $A^{p/4} \geq 0$，我们有 $\|A^{p/4}\|_{4/p} = (\nu(A))^{p/4}$，同理可得 $\|B^{p/4}\|_{4/p} = (\nu(B))^{p/4}$。两边同时提升到 $2/p$ 次幂，得到

$$\nu(A \,\kappa_p\, B) = \|X\|_{2/p}^{2/p} \leq \sqrt{\nu(A)\nu(B)}.$$

最后，由标量算术—几何平均不等式可得 $\sqrt{\nu(A)\nu(B)} \leq \nu(A)+\nu(B)\,2 = \nu(A \,\nabla\, B)$，证毕。□

4. 关于问题 1.2：$p = \frac{1}{2}$ 的一个显式反例

根据定理 3.3，对于所有 $p > 0$，量 $d_p^\tau(A, B)$ 都定义良好且非负。问题 1.2 询问在某些参数范围内，d_p^{Tr}（分别地，d_p^τ）是否为一种度量。本节给出显式的 2×2 矩阵，表明三角不等式对 $p = \frac{1}{2}$ 就可能不成立。本节中，我们始终在 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})_{++}$（正定矩阵锥）中进行讨论，并沿用 (1.1) 和 (1.2) 中的记号。也就是说，对于 $p > 0$ 和 $X, Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})_{++}$，我们定义

$$X \,\kappa_p\, Y := \big(X^{p/4} Y^{p/2} X^{p/4}\big)^{1/p}, \qquad d_p(X, Y) := \Big(\mathrm{Tr}\Big(\frac{X+Y}{2} - X \,\kappa_p\, Y\Big)\Big)^{1/2}.$$

为简化 2×2 情形下的计算，我们首先记录主平方根的一个简便闭式表达式。

引理 4.1。设 $M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})_{++}$。则其主平方根为

$$M^{1/2} = \frac{M + \sqrt{\det M}\, I}{\sqrt{\mathrm{Tr}\, M + 2\sqrt{\det M}}}. \tag{4.1}$$

证明。令 $\delta := \sqrt{\text{行列式}}\ M > 0$ 并定义 $A := \delta^{-1} M$。则 $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})_{++}$ 且行列式 $A = 1$。令 $B := I$，于是行列式 $B = 1$ 也成立。根据 [4, 命题 4.1.12], 对于 2×2 行列式为 1 的正矩阵，我们有

$$A \# B = \frac{A + B}{\sqrt{\det(A + B)}}.$$

取 $B = I$ 并使用 $A \# I = A^{1/2}$ 可得

$$A^{1/2} = \frac{A + I}{\sqrt{\det(A + I)}}.$$

代入 $A = \delta^{-1} M$ 得到

$$\frac{M^{1/2}}{\sqrt{\delta}} = \frac{\delta^{-1}(M + \delta I)}{\sqrt{\det\big(\delta^{-1}(M + \delta I)\big)}} = \frac{M + \delta I}{\sqrt{\det(M + \delta I)}}.$$

因此

$$M^{1/2} = \sqrt{\delta}\, \frac{M + \delta I}{\sqrt{\det(M + \delta I)}}. \tag{4.2}$$

还需计算 $M + \delta I$ 的行列式。对于任意 2×2 矩阵 M 和任意标量 t，有

$$\det(M + tI) = t^2 + t\ \mathrm{Tr}\, M + \det M,$$

例如，由 M 的特征多项式可得。结合 $t = \delta$ 和行列式 $M = \delta^2$，我们得到

$$\det(M + \delta I) = \delta^2 + \delta\ \mathrm{Tr}\, M + \delta^2 = \delta\big(\mathrm{Tr}\, M + 2\delta\big).$$

因此 $\sqrt{\text{行列式}(M + \delta I)} = \sqrt{\delta}\,\sqrt{\mathrm{Tr}\, M + 2\delta}$，且 (4.2) 变为

$$M^{1/2} = \sqrt{\delta}\, \frac{M + \delta I}{\sqrt{\delta}\,\sqrt{\mathrm{Tr}\, M + 2\delta}} = \frac{M + \delta I}{\sqrt{\mathrm{Tr}\, M + 2\delta}},$$

这正是 (4.1)。 □

有了引理 4.1，我们现在可以构造一个具体的三元组，使三角不等式失效。

命题 4.2。 存在 $A, B, C \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})_{++}$ 使得

$$d_{1/2}(A,B) > d_{1/2}(A,C) + d_{1/2}(C,B).$$

证明。令

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{25}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{13}{8} \end{pmatrix}.$$

这三个矩阵都是实对称正定矩阵：

$$\det A = 4, \qquad \det B = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4, \qquad \det C = \frac{25}{8}\cdot\frac{13}{8} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{289}{64} > 0.$$

固定 $p = \frac{1}{2}$。那么

$$A \,\kappa_{1/2}\, B = \left(A^{1/8} B^{1/4} A^{1/8}\right)^2$$

因此

$$d_{1/2}(A,B)^2 = \mathrm{Tr}\Big(\frac{A+B}{2}\Big) - \mathrm{Tr}\Big(\left(A^{1/8}B^{1/4}A^{1/8}\right)^2\Big).$$

步骤 *1*：精确计算 $d_{1/2}(A,B)^2$。由于 $A = \mathrm{diag}(4,1)$,

$$A^{1/8} = \mathrm{diag}(4^{1/8}, 1) = \mathrm{diag}(2^{1/4}, 1).$$

令 $s := 2^{1/4}$，使得 $s^2 = \sqrt{2}$。令

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

则 U 是正交的，并且容易验证

$$B = U \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^{\mathsf{T}}, \qquad B^{1/4} = U \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}.$$

定义 $P := A^{1/8} B^{1/4} A^{1/8}$。则

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s^2(\sqrt{2}+1) & s(\sqrt{2}-1) \\ s(\sqrt{2}-1) & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & s(\sqrt{2}-1) \\ s(\sqrt{2}-1) & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

由于 P 是对称的，

$$\mathrm{Tr}(P^2) = P_{11}^2 + 2P_{12}^2 + P_{22}^2 = \frac{1}{4} + 3\sqrt{2}.$$

此外，

$$\mathrm{Tr}\Big(\frac{A+B}{2}\Big) = \frac{\mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B}{2} = \frac{5+5}{2} = 5.$$

因此

$$d_{1/2}(A,B)^2 = 5 - \mathrm{Tr}(P^2) = 5 - \Big(\frac{1}{4} + 3\sqrt{2}\Big) = \frac{19}{4} - 3\sqrt{2}.$$

步骤 *2*：精确计算 $d_{1/2}(A,C)^2$ 和 $d_{1/2}(B,C)^2$。首先注意到

$$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{B} = U\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}U^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

定义

$$M_0 := \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

直接相乘可得

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} \frac{25}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{13}{8} \end{pmatrix} = C,$$

因此 $C = M_0^2$，从而 $C^{1/4} = M_0^{1/2}$。

将引理 4.1 应用于 M_0，可得

$$C^{1/4} = M_0^{1/2} = \frac{M_0 + \sqrt{\det M_0}\, I}{\sqrt{\operatorname{Tr} M_0 + 2\sqrt{\det M_0}}}.$$

这里 $\operatorname{Tr} M_0 = 3$，且行列式$M_0 = \frac{17}{8}$，因此

$$C^{1/4} = \frac{M_0 + \sqrt{17/8}\, I}{\sqrt{3 + 2\sqrt{17/8}}}.$$

现在令 $Q := A^{1/8} C^{1/4} A^{1/8}$。则 $A \,\kappa_{1/2}\, C = Q^2$，并且

$$d_{1/2}(A, C)^2 = \operatorname{Tr}\Big(\frac{A + C}{2}\Big) - \operatorname{Tr}(Q^2).$$

直接代入可得

$$\operatorname{Tr}(Q^2) = \frac{29}{8} - \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{34}}{16}, \qquad \operatorname{Tr}\Big(\frac{A + C}{2}\Big) = \frac{\operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} C}{2} = \frac{5 + 19/4}{2} = \frac{39}{8}.$$

因此

$$d_{1/2}(A, C)^2 = \frac{39}{8} - \operatorname{Tr}(Q^2) = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{34}}{16}.$$

由于 $B = UAU^{\mathsf{T}}$ 且（可直接验证） $C = UCU^{\mathsf{T}}$，迹的酉不变性与函数演算共同推出 $d_{1/2}(B, C) = d_{1/2}(A, C)$。

步骤 *3*：三角不等式严格失效。由于 $d_{1/2}(B, C) = d_{1/2}(A, C)$，三角不等式

$$d_{1/2}(A, B) \le d_{1/2}(A, C) + d_{1/2}(C, B)$$

等价于 $d_{1/2}(A, B) \le 2 d_{1/2}(A, C)$。两边平方（两边均非负）可得

$$d_{1/2}(A, B)^2 \le 4 d_{1/2}(A, C)^2.$$

利用上述显式公式，我们计算得

$$d_{1/2}(A, B)^2 - 4 d_{1/2}(A, C)^2 = \frac{3\sqrt{34}}{4} - \sqrt{17} - \frac{1}{4}.$$

剩下需要证明这个量为正。事实上，

$$\frac{3\sqrt{34}}{4} - \sqrt{17} - \frac{1}{4} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3\sqrt{34} > 4\sqrt{17} + 1.$$

两边平方（两边均为正）得

$$306 > (4\sqrt{17} + 1)^2 = 273 + 8\sqrt{17} \quad \Longleftrightarrow \quad 33 > 8\sqrt{17}.$$

再次平方得到 $33^2 > 64 \cdot 17$，即 $1089 > 1088$，这成立。因此

$$d_{1/2}(A, B) > 2 d_{1/2}(A, C) = d_{1/2}(A, C) + d_{1/2}(C, B),$$

所以三角不等式不成立。 □

注释 4.3. 命题 4.2 表明， d_p 不一定是 $0 < p < 1$ 的度量。这并未涉及 $1 < p < 2$ 的情形，该情形一般而言仍未解决。

利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

致谢

作者感谢导师 L. Molnár 提出这一问题。本研究得到中国国家留学基金管理委员会、博士生青年精英科学家资助计划（中国科学技术协会）以及西安交通大学中央高校基本科研业务费（项目编号：xzy022024045）的资助。

参考文献

[1] K. M. R. Audenaert 和 F. Hiai，《反 Lie–Trotter 公式》，预印本，arXiv:1412.7905，2014。[2] H. Araki，关于 Lieb 和 Thirring 的一个不等式，《数学物理通讯》**19** (1990)，167–170。doi: 10 1007 01045887 。/BF R. Bhatia，《矩阵分析》，数学研究生教材，第 169 卷，施普林格出版社，纽约，1997。[3] doi: 10 1007 978 1 4612 0653 8 。/ - - - - R. Bhatia，《正定矩阵》，普林斯顿应用数学丛书，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2007 10 1515 9781400827787 。[4] doi: 。/ R. Bhatia、S. Gaubert 和 T. Jain，海林格距离的矩阵版本，《数学物理通讯》**109** (2019 8, 1777 1804 10 1007 11005 019 01156 0)，第 – 期。[5] doi: 。/s - - - Á. Komálovics 和 L. Molnár，关于一个包含海林格距离和布雷斯距离的参数距离度量族，《数学分析及其应用》**529** (2024)，第 2 期，文章编号 127226。[6] doi: 10 1016 2023 127226 。/j.jmaa. 。G. Pisier 和 Q. Xu，非交换 L^p 空间，载于《巴拿赫空间几何手册》第 2 卷，[7] W. B. Johnson 和 J. Lindenstrauss（编），爱思唯尔／北荷兰出版社，阿姆斯特丹，2003 年，第 1459–1517 页。doi: 10 1016 1874 5849 03 80041 4 。/S - ( ) - D. Spehner、F. Illuminati、M. Orszag 和 W. Roga，Bures距离和海林格距离下量子关联的几何度量，载于《一般量子关联及其应用讲义》，F. Fanchini、D. Soares Pinto 和 G. Adesso（编），施普林格，查姆，2017 年，第 105–157 页。[8] doi:10.1007/978-3-319-53412-1 6_

中华人民共和国西安710049西安交通大学数学与统计学院电子邮箱地址：teng.zhang@stu.xjtu.edu.cn