arXiv:2602.11930v1 [math.DG] 12 Feb 2026

黎曼流形中图的修正平均曲率流

Jocel F. N. de Oliveira、Jorge H. S. de Lira*和 Matheus N. Soares†

摘要

我们为赋有 Killing 向量场的黎曼流形上的修正平均曲率流，得到高度、梯度和曲率的先验估计。由此，我们证明了该外在流存在光滑、整体且长期的解，初始数据为光滑初始数据。

1 引言

平均曲率流（平均曲率流）是几何分析中的经典课题，其模型是一类受到广泛研究的几何演化方程（[2], [6], [14],[18]），可从变分角度将其理解为对面积泛函的一种 L^2-梯度下降。

本文的目标是证明，在赋有 Killing 向量场的黎曼完备非紧流形 M 中，沿修正的 平均曲率流演化的整体光滑图形的长时间存在性。

我们假设 M 中的 Killing 向量 X 处处不为零，且由 X 确定的正交分布是可积的。设 M 为该分布的一个给定完备积分叶，并设 $\Phi\colon\ M\times\mathbb{R}\to M$ 为由 X 生成、初始值位于 M中的流。容易验证， Φ 是 M 与赋有静态扭曲度量的扭曲积 $M\times_\varrho\mathbb{R}$ 之间的全局等距映射

$$\varrho^2(x)\,\mathrm{d}s^2+g,$$

其中， s 是 $\mathbb{R}$ 中的自然坐标， g 是$M\subset M$中的诱导黎曼度量。系数 $\varrho\in C^\infty$(M)是 X 的范数，并且沿其

*本研究部分得到 CNPq 的资助。
†本研究部分得到 CNPq 和 FACEPE 的资助。

流线保持不变。在这些坐标下，我们有 $X = \partial_s$，并且叶状子流形 $M_s := \Phi_s(M)$是 M中的全测地超曲面，其中 $\Phi_s(\cdot) = \Phi(\cdot, s)$。

我们假设积分叶 M 是一个带极点流形 o。在这种情况下，我们用 r 表示由从 o出发在 M 中测得的测地距离给出的径向坐标。基于这一条件，我们假设 M 的径向截面曲率满足

$$K(\partial_r \wedge \mathsf{v}) \geq -\frac{\xi''(r)}{\xi(r)} \tag{1}$$

对于所有 $r > 0$，以及与以 o为中心、半径为 r 的 M 的测地球面相切的向量 v。在 (1) 中，函数 $\xi \in C^\infty([0,\infty))$ 对于 $r > 0$ 为正，并满足以下条件

$$\xi'(0) = 1,\ \xi^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{for } k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

这是广义海森比较定理 [15]成立的一个充分条件。最后，我们假设

$$\left|\frac{\partial_r \varrho}{\varrho}\right| \leq \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}. \tag{3}$$

稍后，我们将根据 M 中由 X 的流线在 M的测地球面上生成的圆柱面的主曲率来解释条件 3。我们将这些圆柱面称为*Killing* 圆柱。

我们还假设存在一个常数 $L > 0$，使得里奇曲率张量 Ric 满足

$$\overline{\mathrm{Ric}} \geq -L. \tag{4}$$

本文所考察的几何背景包括以下特殊例子：欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$、双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{H}^n \times_\varrho \mathbb{R}$，其中 $\varrho(r) = \cosh r$，以及黎曼乘积 $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$，其中 $\varrho = 1$。

现在，我们在这一几何背景下定义一个合适的图形概念。光滑函数 $u_0 : M \to \mathbb{R}$ 的*Killing*图形，按定义是在 M中的超曲面 Σ_0，其由下式给出

$$\Sigma_0 = \{\Phi(x, u_0(x)) : x \in M\}.$$

光滑映射 $\Psi\colon M \times [0,T) \to M, T > 0$，定义了一个修正平均曲率流，其初始条件为 Σ_0，当每个映射 $\Psi_t := \Psi(\cdot, t) : M \to M, t \in [0,T)$ 定义一个等距浸入，且满足 $\Psi_0(M) = \Sigma_0$ 并且

$$(\partial_t \widetilde{\Psi})^\perp = n(H - \sigma)N, \tag{5}$$

~其中 σ 是一个常数， H 是相对于单位法向量场 N 的 $\Sigma_t = \Psi_t(M)$ 的平均曲率函数，而 $\perp$ 表示到 Σ_t 的法丛上的正交投影。

修正平均曲率流刻画了约束面积泛函的梯度下降过程，其驻浸入具有常平均曲率 σ。关于方程 5 的变分含义，更多细节请参阅第 2 节。

¯在确定了 M 和 M中关于曲率的几何条件后，我们得以陈述修正平均曲率流 (5) 的主要存在性结果。

定理1。 设 M 为一个 n维完备、非紧致的定向黎曼¯流形，带有极点 o ，并设 M 为扭曲积 $M \times_\varrho \mathbb{R}$ ，其中正函数 $\varrho \in C^\infty(M)$ 。假设曲率条件 （1）、（3） 和（4） 成立。给定一个位于 M 上的局部*Lipschitz*整个*Killing*图 Σ_0 ，则存在一个光滑的修正平均曲率流（5），其初始条件为 Σ_0 ，对所有 $t > 0$ 以及满足下列条件的所有 σ 均有定义

$$\sigma < \frac{1}{n} \inf \left(\frac{|\bar{\nabla} \varrho|}{\varrho} + (n-1) \frac{\xi'(r)}{\xi(r)} \right).$$

我们的定理1证明依赖于 K. Ecker 和 G. Huisken 在 [4] 和 [5]中对欧几里得空间中平均曲率流 ($\sigma = 1$) 的几何分析所作的奠基性贡献。在这些工作中，作者证明了具有局部Lipschitz初始数据的图的平均曲率流存在长期存在性，并给出了渐近行为结果。

定理1还推广了P. Untenberger在 [16] 和 [17] 中关于双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中平均曲率流这一特殊情形的先前结果，其中该双曲空间建模为扭曲积流形 $\mathbb{H}^n \times_\varrho \mathbb{R}$ ，且 $\varrho = \cosh r$。

在 [1], 中，Patrick Allmann、Longzin Lin和Jingyong Zhu针对具有给定渐近边界的 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的星形超曲面（实际上是Killing图）引入了修正平均曲率流的概念。 [1]中的主要结果涉及修正平均曲率流的长期存在性和渐近行为，特别是在双曲空间这一情形下。

在 [3], 中，A. Borisenko和V. Miquel在扭曲积流形的一般情形下，针对具有局部Lipschitz初始条件的平均曲率流，获得了长期存在性结果。

本文的主要贡献是将 [1] 和 [3] 中的结果推广到 $M \times_\varrho \mathbb{R}$ 形式的扭曲积流形上的图形修正平均曲率流的统一框架中。

本文结构如下：第 2 节将 Killing图的修正平均曲率流表述为一个拟线性抛物方程，该方程刻画约束面积泛函的临界浸入。第 3 节从海森矩阵比较原理的一个适当版本推导出若干基本的微分不等式；该原理在 M 中的有效性由条件 1 保证。这些不等式对于先验估计的证明至关重要。第 4 节利用一类预定平均曲率球冠作为障碍函数，建立高度界。第 5 节沿用 [4] 和 [5] 中的方法，得到内部梯度估计。本节还给出了边界梯度估计。第 6 节得出曲率界和高阶导数界。最后，第 7 节利用前几节得到的先验估计，讨论存在性定理1的证明。

2 V变分与非参数化表述 S

本节将验证，修正平均曲率方程 5 可写成关于 M 的拟线性抛物型偏微分方程。这样，在获得演化图的高度、梯度和曲率的先验 估计后，我们便可以利用参考文献 [12], [13]和 [10]中建立的分析框架，证明 M 中光滑紧区域的长期存在性结果。

为了得到方程 5 的非参数描述，可以假设存在一族单参数微分同胚 $\psi\colon M\times[0,T')\to M$，以及一族单参数函数 $u\colon M\times[0,T')\to\mathbb{R}$，其中 $T'\le T$，使得

$$\widetilde{\Psi}(\psi(x,t),t)=\Phi(x,u(x,t))=:\Psi(x,t), \tag{6}$$

对于 $(x,\ t)\in M\times[0,T')$。适当选取 ψ 可得

$$\partial_t\Psi=n(H-\sigma)N, \tag{7}$$

一种修正平均曲率流，其演化超曲面 Σ_t 为 Killing图

$$\Sigma_t=\Psi_t(M)=\{\Phi(x,u(x,t)):x\in M\},\quad t\in[0,T'). \tag{8}$$

在此描述中，我们有

$$N=N|_{\Psi(\cdot,t)}=\frac{1}{W}(\varrho^{-2}X-\Phi_*\nabla^M u)$$

with

$$W=(\varrho^{-2}+|\nabla^M u|^2)^{\frac{1}{2}},$$

其中， ∇^M 表示（M， g）中的黎曼联络。

考虑（8）中修正平均曲率流的非参数化表述，容易验证 Σ_t、 $t \in [0, T')$中的诱导度量与体积元分别由下式给出

$$g + \varrho^2 \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u$$

and

$$\mathrm{d}\Sigma_t = \varrho \sqrt{\varrho^{-2} + |\nabla^M u|^2}\, \mathrm{d}M.$$

给定域$\Omega \subset M$ 以及常数 σ ，我们定义约束面积泛函

$$\mathcal{A}_\sigma [u] = \int_\Omega \varrho \sqrt{\varrho^{-2} + |\nabla^M u|^2}\, \mathrm{d}M + n\sigma \mathcal{V}[u],$$

其中体积泛函 $\mathcal{V}$定义为

$$\mathcal{V}[u] = \int_\Omega \int_0^{u(x)\varrho(x)} \mathrm{d}M = \int_\Omega \varrho u\, \mathrm{d}M.$$

对于任意紧支函数 $v \in C_0^\infty(\Omega)$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathcal{A}_\sigma [u + tv] = -\int_\Omega \left(\mathrm{div}_M \left(\frac{\nabla^M u}{W} \right) + \left\langle \nabla^M \log \varrho, \frac{\nabla^M u}{W} \right\rangle - n\sigma \right) v\varrho\, \mathrm{d}M,$$

其中微分算子 ∇^M 和div_M 是关于 M中的度量g 取的。于是泛函 $\mathcal{A}_\sigma$ 的欧拉-拉格朗日方程为

$$n(H - \sigma) = \mathrm{div}_M \left(\frac{\nabla^M u}{W} \right) + \left\langle \nabla^M \log \varrho, \frac{\nabla^M u}{W} \right\rangle - n\sigma = 0, \tag{9}$$

其中 H 是 u的Killing图的平均曲率。然而，将（6）的右端关于 t 求导可得

$$\partial_t \Psi = \partial_t u\, X.$$

因此，(9) 等价于

$$\partial_t u\, X = \left(\mathrm{div}_M \left(\frac{\nabla^M u}{W} \right) + \left\langle \nabla^M \log \varrho, \frac{\nabla^M u}{W} \right\rangle - n\sigma \right) N.$$

取等式两边法向投影的系数，得到

$$\partial_t u \langle X, N \rangle = \mathrm{div}_M \left(\frac{\nabla^M u}{W} \right) + \left\langle \nabla^M \log \varrho, \frac{\nabla^M u}{W} \right\rangle - n\sigma.$$

由于 $\langle X, N\rangle = 1/W$我们得出，式 (6) 中的映射 Ψ 定义修正平均曲率流，当且仅当 $u(\cdot, t)$ 满足抛物型方程

$$\partial_t u = \mathcal{Q}[u], \tag{10}$$

其中

$$\mathcal{Q}[u] = W\left(\mathrm{div}_M\left(\frac{\nabla^M u}{W}\right) + \left\langle \nabla^M \log\varrho, \frac{\nabla^M u}{W}\right\rangle - n\sigma\right). \tag{11}$$

一般而言，这种非参数化表述与演化图 $\Sigma_t, t \in [0, T')$ 的修正平均曲率流（5）等价，至多相差切向微分同胚。此处的等价性源于我们假设规范固定，即采用（6）中固定的坐标。

3 海森矩阵比较原理与基本不等式

我们关于从极点 o 出发的径向测地线上 M 径向截面曲率的假设（1），意味着以下版本的海森矩阵比较定理成立

$$\nabla^M\nabla^M r \leq \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\left(g - \mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r\right). \tag{12}$$

关于这一事实的证明，请参阅 [15]。

现在，我们从（12）推出一些微分不等式，这些不等式将有助于在后续章节中证明先验 估计。其中一个相关函数为

$$\bar{\zeta}(r) = \int_0^r \xi(\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma.$$

在下文中，该函数起着[4]和 [5]中二次函数 $x \mapsto r^2 = |x|^2$ 的作用。

命题 2. 假设(5) 成立。函数 r 和 s 在超曲面 $\Sigma_t = \Psi_t(M)$、 $t \in [0, T)$上的限制满足

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)r \geq\ & -\frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\left(n - |\nabla r|^2\right) - \varrho^2|\nabla s|^2\left(\langle\bar{\nabla}\log\varrho, \nabla r\rangle - \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\right)\\ & - n\sigma\langle\bar{\nabla} r, N\rangle\end{aligned}$$

and

$$(\partial_t - \Delta)s = -(2\langle \bar{\nabla} \log \varrho, N\rangle + n\sigma)\langle \bar{\nabla} s, N\rangle. \tag{13}$$

在这两个表达式中， ∇和 Δ 分别是 Σ_t中的内蕴黎曼联络和拉普拉斯算子 $\bar{}$ $\bar{}$，而 ∇ 表示 M中的黎曼联络。此外，给定函数

$$\zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)) = \int_0^{r(\widetilde{\Psi}(t,x))} \xi(\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma, \tag{14}$$

$\bar{}$ $\tilde{}$也就是说， $\zeta = \zeta(r \circ \Psi)$，我们有

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)\zeta \geq\ & -n\xi'(r) - \varrho^2|\nabla s|^2\xi(r)\left(\langle \bar{\nabla}\log\varrho, \nabla r\rangle - \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\right) \\ & - n\sigma\xi(r)\langle \bar{\nabla} r, N\rangle.\end{aligned} \tag{15}$$

证明。注意到 $\bar{\nabla} s = \varrho^{-2}X$ 和 $\nabla s = \varrho^{-2}X^\top$，其中 $\top$ 表示到 $T\Sigma_t$上的切向投影。给定 Σ_t中的局部正交切标架 $\{\mathsf{e}_i\}_{i=1}^n$，有

$$\Delta s = 2\langle \bar{\nabla}\log\varrho, N\rangle\langle \bar{\nabla} s, N\rangle + nH\langle \bar{\nabla} s, N\rangle.$$

我们还计算得到

$$\partial_t s = \langle \bar{\nabla} s, \partial_t \widetilde{\Psi}\rangle = n(H - \sigma)\langle \bar{\nabla} s, N\rangle.$$

径向坐标的海森矩阵满足

$$\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} r, X\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{\nabla} r} X, X\rangle = \frac{1}{2}\partial_r |X|^2 = \frac{1}{2}\partial_r \varrho^2 = \varrho\langle \bar{\nabla}\varrho, \bar{\nabla} r\rangle.$$

固定 Σ_t中的局部正交切标架 $\{\mathsf{e}_i\}_{i=1}^n$，我们有

$$\Delta r = \sum_i \langle \nabla_{\mathsf{e}_i}\nabla r, \mathsf{e}_i\rangle = \sum_i \langle \nabla^M_{\pi_*\mathsf{e}_i}\nabla^M r, \pi_*\mathsf{e}_i\rangle + |\nabla s|^2\langle \varrho\bar{\nabla}\varrho, \nabla r\rangle + nH\langle \bar{\nabla} r, N\rangle$$

$\bar{}$其中 $\pi\colon\ M = M \times \mathbb{R} \to M$是到第一个因子的投影，也就是说，对于所有 $(s, x) \in M \times \mathbb{R}$，有 $\pi(s, x) = x$。海森比较定理（12）蕴含

$$\Delta r \leq \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\left(n - \varrho^2|\nabla s|^2 - |\nabla r|^2\right) + \varrho^2|\nabla s|^2\langle \bar{\nabla}\log\varrho, \nabla r\rangle + nH\langle \bar{\nabla} r, N\rangle.$$

因此，

$$\Delta r \leq \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\left(n - |\nabla r|^2\right) + \varrho^2|\nabla s|^2\left(\langle \bar{\nabla}\log\varrho, \nabla r\rangle - \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\right) + nH\langle \bar{\nabla} r, N\rangle.$$

我们还有 $\nabla\zeta = \xi(r)\nabla r$ 以及

$$\Delta\zeta = \xi(r)\Delta r + \xi'(r)|\nabla r|^2.$$

因此

$$\Delta\zeta \le n\xi'(r) + \varrho^2|\nabla s|^2\xi(r)\left(\langle\bar{\nabla}\log\varrho, \nabla r\rangle - \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\right) + nH\xi(r)\langle\bar{\nabla}r, N\rangle.$$

另一方面,

$$\partial_t r = \left\langle\bar{\nabla}r, \partial_t\widetilde{\Psi}\right\rangle = n(H-\sigma)\langle\bar{\nabla}r, N\rangle$$

and

$$\partial_t\zeta = n(H-\sigma)\xi(r)\langle\bar{\nabla}r, N\rangle.$$

我们得出

$$(\partial_t - \Delta)r \ge -\frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\left(n - |\nabla r|^2\right) - \varrho^2|\nabla s|^2\left(\langle\bar{\nabla}\log\varrho, \nabla r\rangle - \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\right) - n\sigma\langle\bar{\nabla}r, N\rangle$$

and

$$(\partial_t - \Delta)\zeta \ge -n\xi'(r) - \varrho^2|\nabla s|^2\xi(r)\left(\langle\bar{\nabla}\log\varrho, \nabla r\rangle - \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\right) - n\sigma\xi(r)\langle\bar{\nabla}r, N\rangle.$$

命题的证明至此完成。 □

接下来的两个海森比较定理应用为 (5) 提供 C^1 界。

这些命题本身也具有独立意义，因为它们为将 [11], [4] 和 [5] 中的一些梯度估计恰当地推广到黎曼翘曲积中修正平均曲率流这一更一般的情形提供了依据。

命题 3. 若超曲面 Σ_t, $t \in [0,T)$按修正平均曲率流(5)演化，则

$$(\partial_t - \Delta)W = -W(|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N)) - 2W^{-1}|\nabla W|^2, \tag{16}$$

其中 $W = \langle X, N\rangle^{-1}$（注意，当 Σ_t 是 *Killing*图）时， $W = (\varrho^{-2} + |\nabla^M u)|^2)^{1/2}$），且 A 是 Σ_t 的魏因加滕映射。若环境里奇张量满足 $\mathrm{Ric} \ge -L$，其中 L 为某个非负常数，则

$$(\partial_t - \Delta)(e^{-Lt}W) \le 0.$$

特别地，在这种情况下，抛物型最大值原理意味着

$$\sup_{B_R(o)\times[0,T]} W(x,t) \le e^{LT}\left(\sup_{B_R(o)} W(\cdot,0) + \sup_{\partial B_R(o)\times(0,T]} W\right). \tag{17}$$

证明。 注意

$$\nabla\langle X,N\rangle = \langle X,N\rangle(\bar{\nabla}\log\varrho)^{\top} - \langle\bar{\nabla}\log\varrho,N\rangle X^{\top} - AX^{\top}.$$

因此,

$$\langle X,N\rangle(\bar{\nabla}\log\varrho)^{\top} - \langle\bar{\nabla}\log\varrho,N\rangle X^{\top} = \langle X,N\rangle\bar{\nabla}\log\varrho - \langle\bar{\nabla}\log\varrho,N\rangle X.$$

由泛函 $\mathcal{A}_0$ 的二次变分公式可得

$$\Delta\langle X,N\rangle + |A|^2\langle X,N\rangle + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\langle X,N\rangle = -n\langle\nabla H, X^{\top}\rangle,$$

其中 $\top$ 表示到 $T\Sigma_t$ 上的切投影。另一方面，利用 X 是一个 Killing 向量场，可得

$$\partial_t\langle X,N\rangle = n(H-\sigma)\langle\bar{\nabla}_N X,N\rangle - n\langle X,\nabla(H-\sigma)\rangle = -n\langle X^{\top},\nabla H\rangle,$$

其中 ∇ 表示 M 中的黎曼联络，因此

$$(\partial_t - \Delta)\langle X,N\rangle = |A|^2\langle X,N\rangle + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\langle X,N\rangle.$$

因此，利用 $\langle X,\ N\rangle = 1/W$，可得

$$\partial_t W = -W^2\partial_t W^{-1} = -W^2\partial_t\langle X,N\rangle$$

and

$$\Delta W - \frac{2}{W}|\nabla W|^2 = -W^2\Delta W^{-1} = -W^2\Delta\langle X,N\rangle.$$

因此，可以得出

$$\partial_t W - \Delta W + \frac{2}{W}|\nabla W|^2 = -W^2(\partial_t-\Delta)\langle X,N\rangle = -W(|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N))$$

直接应用抛物型最大值原理 [14] 即可完成该命题的证明。

□

下面的命题类似于 [4] 中的定理 2.1，并给出了式 (17) 中梯度估计的局部版本。

命题 4. 假设环境空间的里奇张量满足 $\mathrm{Ric} \geq -L$ ，其中 L 是某个非负常数。给定 $R > 0$，记

$$C_R = \sup_{B_R(o)} \left(n\xi'(r) + \partial_r \log \varrho + n\sigma\xi(r) \right).$$

若超曲面 Σ_t, $t \in [0, T)$ 按修正平均曲率流 (5) 演化，则函数 $W = \langle X, N \rangle^{-1}$ 满足

$$e^{-Lt}(\bar{\zeta}(R) - \zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)) - C_R t)W(x,t) \leq \bar{\zeta}(R) \sup_M W(\cdot, 0)$$

只要

$$\zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)) \leq \bar{\zeta}(R) - C_R T.$$

证明。给定 $R > 0$，令

$$\phi(\varsigma) = (\bar{\zeta}(R) - \varsigma)^2, \quad \text{for } \varsigma \leq \bar{\zeta}(R)$$

and

$$\bar{\eta}(\bar{\zeta}, t) = e^{-2Lt}\phi(\bar{\zeta} + C_R t).$$

记

$$\eta = \bar{\eta}(\zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)), t),$$

并利用 (15)，由 $\phi' < 0$ 可得

$$(\partial_t - \Delta)\eta \leq -2L\eta - e^{2Lt}\frac{\phi''}{\phi'^2}|\nabla\eta|^2.$$

因此，由 (16) 可知

$$(\partial_t - \Delta)(\eta W^2) \leq -6\eta|\nabla W|^2 - 2\langle \nabla\eta, \nabla W^2 \rangle - \frac{\phi\phi''}{\phi'^2}\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}W^2.$$

沿用 [4], 的记号，我们写作

$$-2\langle \nabla\eta, \nabla W^2 \rangle = -6W\langle \nabla\eta, \nabla W \rangle + \left\langle \frac{\nabla\eta}{\eta}, \nabla(\eta W^2) \right\rangle \frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}W^2.$$

将此式代入上式，可得

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)(\eta W^2) - \left\langle \frac{\nabla\eta}{\eta}, \nabla(\eta W^2) \right\rangle \leq & -6\eta|\nabla W|^2 - 6W\langle \nabla\eta, \nabla W \rangle \\ & - \left(1 + \frac{\phi\phi''}{\phi'^2}\right)\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}W^2.\end{aligned}$$

如 [4] 中那样应用杨氏不等式，我们可以写出

$$-6W\langle\nabla\eta,\nabla W\rangle\leq 6\eta|\nabla W|^2+\frac{3}{2}\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}W^2$$

由 ϕ 的选取可得

$$(\partial_t-\Delta)(\eta W^2)-\left\langle\frac{\nabla\eta}{\eta},\nabla(\eta W^2)\right\rangle\leq 0$$

a而结论可由抛物型最大值原理直接推出。 □

4 高度估计

修正平均曲率流 5 的先验 C^0 界依赖于几何障碍，它们模拟了欧几里得空间中球冠所起的作用。接下来，我们将构造一个这样的障碍函数示例。

4.1 旋转对称度量中的修正平均曲率流示例

设 M_+ 是一个相对于固定极点 $o_+\in M_+$ 的完备非紧 n维模型流形，其意义是，M_+ 中的黎曼度量可在以 o_+ 为中心的高斯坐标$(r,\ \vartheta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}$ 下表示为

$$g_+=\mathrm{d}r^2+\xi_+^2(r)\,\mathrm{d}\vartheta^2 \tag{18}$$

其中，$\mathrm{d}\vartheta^2$ 表示 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中的圆度量，且 $\xi_+\in C^\infty([0,\infty))$满足条件（2）。我们还考虑一个光滑径向函数 $\varrho_+\in C^\infty([0,\infty))$，满足

$$\begin{aligned}&\varrho_+(r)>0,\quad \text{for}\quad r>0,\\&\varrho_+(0)=1,\\&\varrho_+^{(2k+1)}=0,\quad \text{for}\quad k\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

并定义 $M_+\times\mathbb{R}$中的扭曲度量

$$\varrho_+^2(r)\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}r^2+\xi_+^2(r)\,\mathrm{d}\vartheta^2. \tag{19}$$

我们记

$$A(r)=\varrho_+(\varsigma)\xi_+^{n-1}(\varsigma)$$

and

$$V(r)=\int_0^r \varrho_+(\varsigma)\xi_+^{n-1}(\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma.$$

我们还定义

$$H(r)=-\frac{1}{n}\frac{A(r)}{V(r)}. \tag{20}$$

给定 $x\in M_+$，记 $r(x)$ 为 $=\mathsf{dist}(o_+,\ x)$。令 $B_R(o_+)$ 为以 o_+ 为中心、半径为 $R\in$ （$0,\ \infty$）的闭测地球。因此，当且仅当 $r(x)\le R$ 时，$x\in B_R(o_+)$。测地球面 $\partial B_r(o_+)$ 上方 Killing 圆柱的平均曲率为

$$H_{\mathrm{cyl}}(r)=\frac{1}{n}\left((n-1)\frac{\xi_+'(r)}{\xi_+(r)}+\frac{\varrho_+'(r)}{\varrho_+(r)}\right).$$

固定这一记号后，我们可以陈述如下结果。

命题 5. 对每个 $R\in(0,\ \infty)$，函数的图形

$$v_R(x)=\int_R^{r(x)}\frac{nH(R)V(\varsigma)}{\varrho(\varsigma)(A^2(\varsigma)-n^2H^2(R)V^2(\varsigma))^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\varsigma$$

定义在 $B_R(o_+)$ 上，具有常平均曲率 $H(R)$，且其边界是模型流形 $M_+\times_{\varrho_+}\mathbb{R}$ 中的测地球面 $\partial B_R(o_+)$。

证明。固定 $R\in(0,\ \infty)$，令 v_R 为以下常平均曲率方程 $M_+\times_{\varrho_+}\mathbb{R}$ 狄利克雷问题的（径向）解，即

$$\begin{cases}\mathrm{div}_+\left(\frac{\nabla^+v_R}{W_+}\right)+g_+\left(\nabla\log\varrho_+,\frac{\nabla^+v_R}{W_+}\right)=nH(R)\ \ \text{in}\ \ B_R(o_+),\\ v_R|_{\partial B_R(o_+)}=0,\end{cases} \tag{21}$$

其中，微分算子 div_+ 和 ∇^+ 是相对于 M_+ 中的度量 (18) 定义的，并且

$$W_+=(\varrho_+^{-2}(r)+v_R'^2(r))^{\frac{1}{2}},$$

其中 $'$ 表示关于 r的导数。注意，(21) 可写成加权散度的形式：

$$\mathrm{div}_{-\log\varrho_+}\left(\frac{\nabla^+v_R}{W_+}\right)=\frac{1}{\varrho_+}\mathrm{div}_+\left(\varrho_+\frac{\nabla^+v_R}{W_+}\right)=nH(R).$$

因此，由散度定理可得:

$$\begin{aligned}\int_{B_r(o)} \varrho_+ nH(R)\,\mathrm{d}M_+ &= \int_{B_r(o)} \mathrm{div}_+\left(\varrho_+ \frac{\nabla^+ v_R}{W}\right)\mathrm{d}M_+ \\ &= \int_{\partial B_r(o)} g_+\left(\frac{\nabla^+ v_R}{W_+}, \partial_r\right)\varrho_+\,\mathrm{d}\partial B(r),\end{aligned} \tag{22}$$

对于 $r \le R_\circ$ 由于 v_R 是径向的，(21) 变为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{v_R'(r)}{(\varrho_+^{-2}(r)+v_R'^2(r))^{1/2}}\right)' + \frac{v_R'(r)}{(\varrho_+^{-2}(r)+v_R'^2(r))^{1/2}}\left(\frac{\varrho_+'(r)}{\varrho_+(r)} + (n-1)\frac{\xi_+'(r)}{\xi_+(r)}\right) \\ &= nH(R).\end{aligned} \tag{23}$$

由 (22) 可知， v_R 是以下一阶方程的解

$$\frac{v_R'(r)}{(\varrho_+^{-2}(r)+v_R'^2(r))^{1/2}}\,\varrho_+(r)\xi_+^{n-1}(r) = \int_0^r nH(R)\varrho_+(\varsigma)\xi_+^{n-1}(\varsigma)\,\mathrm{d}\varsigma. \tag{24}$$

初始条件为 $v_R|_{r=R} = 0_\circ$ 将此表达式对 v_R' 求解，可得

$$v_R'(r) = \frac{nH(R)V(r)}{\varrho_+(r)(A^2(r) - n^2H^2(R)V^2(r))^{1/2}}.$$

图形 Σ_R （v_R）是一个旋转不变超曲面，可用坐标 $(s,\ r,\ \vartheta)$ 参数化为 $\varsigma \mapsto (s(\varsigma)\ \vartheta,\ r(\varsigma))$，其中 ς 可取为弧长参数。记 ϕ 为坐标向量场 ∂_r 与给定轮廓曲线 $\vartheta =$ 之间的夹角，该轮廓曲线在 Σ_R 中为常数，则有

$$\dot r = \cos\phi, \quad \varrho\dot s = \sin\phi.$$

因此，(23) 变为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\varsigma} + \sin\phi\left(\frac{\varrho'(r)}{\varrho(r)} + (n-1)\frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\right) = -nH(R).$$

因此， Σ_R 的轮廓曲线由一阶系统的解给出

$$\begin{aligned}&\dot r = \cos\phi,\\ &\varrho\dot s = \sin\phi,\\ &\dot\phi = -nH(R) - nH_{\mathrm{cyl}}(r)\sin\phi,\end{aligned}$$

其初始条件为 $r(0) = R,\ \ s(0) = 0,\ \ \phi(0) = \frac{\pi}{2}$。在这种情况下，(24) 可改写为

$$\varrho(r)A(r)\dot{s} = -nH(R)V(r)$$

其中，$\cdot$ 表示关于参数 ς的导数。因此，显然，当坐标 r 取得其最大值时，即当 $r = R$时，我们有 $\dot{r} = 0$和 $\dot{s} = 1$。这与在（20）中对 $H(R)$的选择一致。我们还注意到，当 $r \to 0^+$时，$\dot{s} \to 0$ 和 $\dot{r} \to 1$ 。

□

对于 $R \geq r_0$，注意到变量 $\mu = R - r_0$ 可以被视为测地球面 $\partial B_{r_0}(o) = \partial\Sigma_{r_0}$ 与 $\partial B_R(o) = \partial\Sigma_R$之间的测地距离。因此，$\nabla\mu|_{\partial B_R(o)} = \partial_r|_{r=R}$。于是，我们令时间参数 $t \in [0, \infty)$为

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = -n(H(R) - \sigma) = -n(H(\mu + r_0) - \sigma), \\ &\mu(0) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

因此，$\mu = \mu(t)$由下式隐式定义

$$\int_{r_0}^{\mu(t)+r_0} \frac{V(\varsigma)}{A(\varsigma)}\,\mathrm{d}\varsigma = t$$

记 $R(t) = \mu(t) + r_0$。我们断言，常平均曲率图形的单参数族 $\{\Sigma_{R(t)}\}_{t\geq 0}$ 按照（负）平均曲率流演化

$$\partial_t\Psi^+ = -n(H(R(t)) - \sigma)N_t, \tag{26}$$

其中

$$N_t = \frac{1}{W}(\varrho^{-2}(r)X - v_R'(r)\partial_r) = -\frac{\dot{r}}{\varrho}X + \varrho\dot{s}\,\partial_r.$$

这意味着 $\Sigma_{R(t)} = \Psi_t^+(\Sigma_{r_0})$。特别地，我们必须有

$$\partial B_{R(t)} = \partial\Sigma_{R(t)} = \Psi_t^+(\partial\Sigma_{r_0}) = \Psi_t^+(\partial B_{r_0}).$$

换言之，必须以这样的方式选取时间参数 t，使得测地球面按 $\partial B_{R(t)} = \Psi_t^+(\partial B_{r_0})$ 演化，其中 Ψ^+ 是 (7) 的定义中所述的 M_+ 的等距浸入。由于在 $r = R(t)$ 处 $\dot{r} = 0$ 且 $\varrho\dot{s} = 1$，由 (26) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} &= \langle\partial_t\Psi^+, \nabla\mu\rangle = \langle\partial_t\Psi^+, \partial_r|_{r=R(t)}\rangle = -n(H(R(t)) - \sigma)\langle N_t, \partial_r\rangle|_{r=R(t)} \\ &= -n(H(R(t)) - \sigma) = -n(H(r_0 + \mu(t)) - \sigma) \end{aligned}$$

这意味着 t 与 (25) 中定义的参数一致，因而满足条件 $\partial B_{R(t)} = \Psi_t^+(\partial B_{r_0})$。注意，对于 $t \geq 0$, $R(t) \geq r_0$。由此可知，定义在公共域 $B_{r_0}(o)$ 上的函数单参数族 $u_+(x,\ t) = v_{R(t)}(r(x))$ 给出了几何流 (26) 的一个解。因此，令

$$\Psi^+(x,t) = (x, u_+(x,t)), \quad x \in B_{r_0}(o).$$

由此可知，u_+ 满足抛物型方程

$$\partial_t u_+ X = \partial_t \Psi^+ = -\Bigg(\partial_r \left(\frac{\partial_r u_+}{(\varrho_+^{-2}(r) + |\partial_r u_+|^2)^{1/2}} \right) + \frac{\partial_r u_+}{(\varrho_+^{-2}(r) + |\partial_r u_+|^2)^{1/2}} \left(\frac{\varrho_+'(r)}{\varrho_+(r)} + (n-1)\frac{\xi_+'(r)}{\xi_+(r)} \right) - n\sigma \Bigg) N(t),$$

即

$$\partial_t u_+ = -(\varrho_+^{-2}(r) + |\partial_r u_+|^2)^{1/2} \Bigg(\partial_r \left(\frac{\partial_r u_+}{(\varrho_+^{-2}(r) + |\partial_r u_+|^2)^{1/2}} \right) + \frac{\partial_r u_+}{(\varrho_+^{-2}(r) + |\partial_r u_+|^2)^{1/2}} \left(\frac{\varrho_+'(r)}{\varrho_+(r)} + (n-1)\frac{\xi_+'(r)}{\xi_+(r)} \right) - n\sigma \Bigg).$$

4.2 修正平均曲率流的障碍函数与高度估计

在上一节中，我们利用模型流形中的常平均曲率球冠构造了修正平均曲率流，该流形的黎曼度量由 (18)–(19) 定义。

除了提供一个相关实例外，该流还可用作度量不一定在旋转下保持不变的流形上修正平均曲率流的上解。以下命题阐述了这一内容。

命题 6. 假设 (3) 在 $\xi(r) = \xi_+(r)$ 成立，且 $\varrho(x) = \varrho_+(r(x))$成立。那么，函数的单参数族

$$u_+(x,t) = v_{R(t)}(r(x)), \quad x \in B_{r_0}(o), \quad t \in [0,\infty)$$

对所有 $T > 0$，满足 $\partial_t u_+ + \Omega[u_+] \geq 0$ 在 $B_{r_0}(o) \times [0,T)$。

证明。 记

$$W = (\varrho^{-2} + |\nabla^M u_+|^2)^{1/2} = (\varrho_+^{-2} + u_+'^2(r))^{1/2}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}[u_+] + \partial_t u_+ &= W\left(\mathrm{div}_M\left(\frac{\nabla^M u_+}{W}\right) + \left\langle \nabla^M \log\varrho, \frac{\nabla^M u_+}{W}\right\rangle - n\sigma\right) + \partial_t u_+ \\
&= (\varrho^{-2} + u_+'^2(r))^{1/2}\Bigg(\partial_r\left(\frac{u_+'(r)}{(\varrho_+^{-2} + u_+'^2(r))^{1/2}}\right) \\
&\quad + \frac{u_+'(r)}{(\varrho_+^{-2} + u_+'^2(r))^{1/2}}\big(\Delta_M r + \langle \nabla^M \log\varrho, \nabla^M r\rangle\big) - n\sigma\Bigg) + \partial_t u_+.
\end{aligned}$$

然而

$$\langle \nabla \log\varrho, \nabla r\rangle = \frac{\partial_r \varrho}{\varrho} = \frac{\varrho_+'(r)}{\varrho_+(r)}. \tag{27}$$

此外, （12）意味着

$$\Delta_M r \le (n-1)\frac{\xi_+'(r)}{\xi_+(r)}. \tag{28}$$

由于 $u_+' = v_R' \le 0$, 我们得出

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}[u_+] + \partial_t u_+ &\ge (\varrho_+^{-2} + u_+'^2(r))^{1/2}\Bigg(\partial_r\left(\frac{u_+'(r)}{(\varrho_+^{-2} + u_+'^2(r))^{1/2}}\right) \\
&\quad + \frac{u_+'(r)}{(\varrho_+^{-2} + u_+'^2(r))^{1/2}}\left(\frac{\varrho_+'(r)}{\varrho_+(r)} + (n-1)\frac{\xi_+'(r)}{\xi_+(r)}\right) - n\sigma\Bigg) + \partial_t u_+ = 0.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

命题 *7.* 假设 *(3)* 满足 $\xi(r) = \xi_+(r)$, 且 $\varrho(x) = \varrho_+(r(x))$。令 u 为 $B_R(o) \times [0,T]$ 中满足狄利克雷边界条件 $u(x,t) = u(x,0)$（对于任意 $(x,t) \in \partial B_{r_0}(o) \times [0,T]$） 的 *(10)-(11)* 的一个解。则有如下高度估计

$$|u(x,t)| \le \sup_{B_{r_0}(o)}|u| + v_{R(T)}(o) - v_{r_0}(r(x)),$$

即，

$$|u(x,t)| \le \sup_{B_{r_0}(o)}|u(\cdot,0)| + \int_{R(T)}^{0} \frac{nH(R(T))V(\varsigma)}{\varrho(\varsigma)(A^2(\varsigma) - n^2H^2(R(T))V^2(\varsigma))^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\varsigma$$
$$- \int_{r_0}^{r(x)} \frac{nH(r_0)V(\varsigma)}{\varrho(\varsigma)(A^2(\varsigma) - n^2H^2(r_0)V^2(\varsigma))^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\varsigma.$$

对于 $(x,t) \in B_{r_0}(o) \times [0,T]$。

证明。 根据构造， Σ_{r_0} 在测地球$B_{r_0}(o)$内定义为 $u_+(\cdot,0)$的图形 $= v_{r_0}$。 给定 $T > 0$，我们有 $\Psi_T^+(\Sigma_{r_0})$是 $u_+(\cdot,T)$的图形 $\Sigma_{R(T)} = v_{R_T}|_{B_{r_0}(o)}$， 其中

$$\int_{r_0}^{R(T)} \frac{V(\varsigma)}{A(\varsigma)}\,\mathrm{d}\varsigma = T.$$

给定 $\varepsilon > 0$ ， 我们有

$$-u_+(x,T) + u_+(o,T) + \sup_{B_{r_0}(o)} u + \varepsilon > u(x,0)$$

对所有$x \in B_{r_0}(o)$。我们还有

$$v_\varepsilon(x,t) := -u_+(x,T-t) + u_+(o,T) + \sup_{B_{r_0}(o)} u + \varepsilon > u(x,t)$$

对所有$(x,t) \in \partial B_{r_0}(o) \times [0,T]$。 命题 6 推出

$$\partial_t v_\varepsilon - \mathcal{Q}[v_\varepsilon] = \partial_t u_+ + \mathcal{Q}[u_+] \ge 0$$

在抛物柱 $B_{r_0}(o) \times (0,T)$内。于是， 抛物型最大值原理推出

$$u(x,t) \le v(x,t) \le v(x,T)$$

在 $B_{r_0}(o) \times [0,T]$ 中， 其中

$$v(x,t) = -u_+(x,T-t) + u_+(o,T) + \sup_{B_{r_0}(o)} u.$$

因此，

$$u(x,t) \le v(x,T) = u_+(o,T) - u_+(x,0) + \sup_{B_{r_0}(o)} u.$$

因此

$$u(x,t) \le \sup_{B_{r_0}(o)} u + v_{R(T)}(o) - v_{r_0}(r(x))$$

对于 $(x,t) \in B_{r_0}(o) \times [0,T]$， 我们用类似的方法证明

$$u(x,t) \ge w(x,t) \ge w(x,T)$$

在 $B_{r_0}(o) \times [0,T]$ 中，其中

$$w(x,t) = u_+(x, T-t) - u_+(o,T) + \inf_{B_{r_0}(o)} u.$$

因此

$$u(x,t) \geq \inf_{B_{r_0}(o)} u - v_{R(T)}(o) + v_{r_0}(r(x))$$

在 $B_{r_0}(o) \times [0,T]$ 中。证明至此完成。 □

5 梯度界

在本节中，我们将 [4] 和 [5] 中的技巧推广到黎曼翘曲积的一般情形，从而为修正平均曲率流获得先验 C^1 界。命题 2 中的几何函数和微分不等式在这些梯度估计的证明中起着核心作用。

命题 8. 设 $o \in M$。给定 $R > 0$ 和 $T' > 0$，假设

$$|\partial_r \log \varrho| \leq \frac{\xi'(r)}{\xi(r)} \tag{29}$$

在 $B_R(o) \subset M$，并且对某个常数 $L \geq 0$ 有 $\mathrm{Ric} \geq -L$，其中

$$\mathcal{S}_{R.T'} = \bigcup_{t\in[0,T']} \{\widetilde{\Psi}(x,t) : \zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)) < \bar{\zeta}(R)\}$$

如果 $R' < R$，则对任意 $\Psi(x,t) \in \mathcal{S}_{R,T'}$ 我们有

$$W(x,t) \leq \Lambda(L,T',R)\, \max\left\{ \sup_{\widetilde{\Psi}_0(B_R(o))} W(\cdot,0), \frac{\beta C_R}{2\sup_{B_R(o)}\xi} \frac{\sup_{B_R(o)}\varrho}{\inf_{B_R(o)}\varrho} \right\}.$$

其中 $\Lambda(L,T',R) = \exp(LT')\exp(\lambda\zeta(R))\,(\exp(\lambda(\zeta(R)-\zeta(R'))-1)\cdot$特别地，

$$W(o,t) \leq \frac{\exp(\lambda\zeta(R))}{\exp(\lambda\zeta(R)/2)-1}\, \max\left\{ \sup_{\widetilde{\Psi}_0(B_R(o))} W(\cdot,0), \frac{\beta C_R}{2\sup_{B_R(o)}\xi} \frac{\sup_{B_R(o)}\varrho}{\inf_{B_R(o)}\varrho} \right\}$$

对于 $0 \leq t \leq T'$，其中

$$C_R = n \sup_{B_R(o)} (\xi' + |\sigma|\xi). \tag{30}$$

and

$$\lambda = 8\beta^2 C_R \sup^2_{B_R(o)} \varrho$$

with

$$\beta := \frac{1}{\bar{\zeta}(R)} \left(\sup_{\mathcal{S}_{R,T'}} |s| - \sup_{[0,T']} (s \circ \widetilde{\Psi})(o,t) \right).$$

且 $\alpha = \sup_{B_R(o)} \left(2|\bar{\nabla} \log \varrho| + n|\sigma|\right)$ 且 $\widetilde{\delta} = 2\sup_{B_R(o)}(2|\bar{\nabla} \log \varrho| + 2\xi + n|\sigma|)$。

证明。记

$$\alpha = \sup_{B_R(o)} \left(2|\bar{\nabla} \log \varrho| + n|\sigma|\right).$$

按照 [11] 和 [5]，定义

$$\phi(\tau) = e^{\lambda \tau} - 1, \quad \tau \geq 0.$$

给定式 (14) 中定义的函数 ζ，令

$$\eta(\widetilde{\Psi}(x,t)) = e^{-Lt} \phi \left(\left(\bar{\zeta}(R) - \zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)) + \chi(s(\widetilde{\Psi}(x,t))) \right)_+ \right), \tag{31}$$

~ ¯对于 $(x,t) \in M \times [0,T']$，满足 $\zeta(\Psi(x,t)) < \zeta(R)$。式 (31) 中的函数 χ定义为

$$\chi(s) = \frac{1}{2\beta} \left(s - \sup_{\mathcal{S}_{R,T'}} |s \circ \widetilde{\Psi}| \right).$$

其中

$$\mathcal{S}_{R,T'} = \bigcup\nolimits_{t \in [0,T']} S_{R,t}, \quad \text{with} \quad S_{R,t} = \{\widetilde{\Psi}(x,t) : \zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)) < \bar{\zeta}(R)\}. \tag{32}$$

~利用式 (16)，并将 $\phi \circ \Psi$ 简记为 ϕ，可得

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta)(\eta W) &= W(\partial_t - \Delta)\eta + \eta(\partial_t - \Delta)W - 2\langle \nabla W, \nabla \eta \rangle \\
&= W(\partial_t - \Delta)\eta - (|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N))\eta W \\
&\leq e^{-Lt} W(\partial_t - \Delta)\phi.
\end{aligned}$$

然而

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta)\phi = &\left((\partial_t - \Delta)\zeta + \dot{\chi}(s)(\partial_t - \Delta)s - \ddot{\chi}(s)|\nabla s|^2 \right) \phi' \\
&- \left(|\nabla \zeta|^2 + \dot{\chi}^2(s)|\nabla s|^2 - 2\xi(r)\dot{\chi}(s)\langle \nabla r, \nabla s \rangle \right) \phi''
\end{aligned}$$

由于 $\ddot{\chi}=0$、 $\phi'>0$，并利用（13）、（15）和（29），可得

$$(\partial_t-\Delta)\phi\le\phi'\big(n\xi'(r)+n\sigma\xi(r)\langle\bar{\nabla}r,N\rangle-\dot{\chi}(s)(2\langle\bar{\nabla}\log\varrho,N\rangle+n\sigma)\langle\bar{\nabla}s,N\rangle\big)$$
$$-\phi''\left(|\nabla\zeta|^2+\dot{\chi}^2(s)|\nabla s|^2+2\xi(r)\dot{\chi}(s)\langle\bar{\nabla}r,N\rangle\langle\bar{\nabla}s,N\rangle\right)$$

这里用到了这一事实：$\langle\nabla r,\ \nabla s\rangle=-\langle\nabla r,\ N\rangle\langle\nabla s,\ N\rangle$。注意

$$n\xi'(r)+n\sigma\xi(r)\langle\bar{\nabla}r,N\rangle\le C_R=:\delta.$$

由于 $\phi''\ge0$，整理各项并舍去一个非负项后可得

$$(\partial_t-\Delta)\phi\le\delta\phi'+\left(\alpha\phi'-2\xi(r)\langle\bar{\nabla}r,N\rangle\phi''\right)\dot{\chi}(s)\langle\bar{\nabla}s,N\rangle-\dot{\chi}^2(s)\phi''|\nabla s|^2$$

注意

$$\langle\bar{\nabla}s,N\rangle=\frac{1}{\varrho^2}\langle X,N\rangle=\frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{W}$$

and

$$|\nabla s|^2=|\bar{\nabla}s|^2-\langle\bar{\nabla}s,N\rangle^2=\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\varrho^4}\langle X,N\rangle^2=\frac{1}{\varrho^2}\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{W^2}\right).$$

因此

$$(\partial_t-\Delta)\phi\le\delta\phi'+\left(\alpha\phi'+2\xi(r)\phi''\right)\frac{\dot{\chi}}{\varrho}\frac{1}{\varrho W}-\frac{\dot{\chi}^2}{\varrho^2}\phi''\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{W^2}\right).$$

整理各项可得

$$(\partial_t-\Delta)\,\phi\le\phi'\left(\delta+\alpha\frac{\dot{\chi}}{\varrho}\frac{1}{\varrho W}\right)+\phi''\left(2\xi\frac{\dot{\chi}}{\varrho}\frac{1}{\varrho W}-\frac{\dot{\chi}^2}{\varrho^2}\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{W^2}\right)\right).$$

由于 $\phi'=\lambda(\phi+1)$、 $\phi''=\lambda^2(\phi+1)$且 $\dot{\chi}=1/2\beta$，由 (32) 可知，在 ηW 的（内部最大值点）处有

$$\lambda\left(\frac{1}{4\beta^2}\frac{1}{\varrho^2}\left(1-\frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{W^2}\right)-2\xi\frac{1}{2\beta}\frac{1}{\varrho}\frac{1}{\varrho W}\right)\le C_R+\alpha\frac{1}{2\beta}\frac{1}{\varrho}\frac{1}{\varrho W}.$$

将 λ 固定为式 (30) 中的取值，可得

$$C_R\varrho^2W^2-\left(4\beta\sup\nolimits_{B_R(o)}\xi\frac{\sup^2_{B_R(o)}\varrho}{\inf_{B_R(o)}\varrho}+\frac{\alpha}{2\beta\inf_{B_R(o)}\varrho}\right)\varrho W-2C_R\le0$$

因此，解这个二次不等式可得

$$W(x_0,t_0) \le \frac{2\beta}{C_R}\sup_{B_R(o)}\xi\frac{\sup^2_{B_R(o)}\varrho}{\inf^2_{B_R(o)}\varrho} + \frac{\alpha}{4\beta C_R \inf^2_{B_R(o)}\varrho}$$
$$+\left(2+\left(\frac{2\beta}{C_R}\sup_{B_R(o)}\xi\frac{\sup^2_{B_R(o)}\varrho}{\inf^2_{B_R(o)}\varrho}+\frac{\alpha}{4\beta C_R\inf^2_{B_R(o)}\varrho}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} =: \mathcal{C}_0(R).$$

在这个最大值点处。因此

$$\sup_{\widetilde{\Psi}_{t_0}(M)}\eta W \le \eta(\widetilde{\Psi}(x_0,t_0))W(x_0,t_0) \le e^{-Lt_0}e^{\lambda\bar{\zeta}(R)}W(x_0,t_0)$$
$$\le e^{-Lt_0}e^{\lambda\bar{\zeta}(R)}\mathcal{C}_0(R).$$

由于仅有两种可能：最大值要么在 $\widetilde{\quad}$ $t=0$ 处取得，要么在某个叶 $\Psi_{t_0}(M)$ 中取得，其中 $t_0>0$ （由于函数在抛物边界上为零，且 $\eta=0$ 在任意 $\zeta(\Psi(x,t))=\zeta(R)$ 对于 $t\in[0,T']$），我们得出

$$\sup_{\mathcal{S}_{R,T'}}\eta W \le \sup_{\widetilde{\Psi}(B_R(o),0)}\eta W(\cdot,0) + e^{-Lt_0}e^{\lambda\bar{\zeta}(R)}\mathcal{C}_0(R).$$

此外，由于 ξ 为正，我们有ζ 是递增的。因此，如果 $\overline{\mathbf{y}}\in\mathcal{S}_{R',T'}$ 那么 $\widetilde{\quad}$存在一个序列 $\Psi(x_n,t_n)\in\mathcal{S}_{R',T'}$ 使得 $\mathbf{y}=\lim_{n\to\infty}\Psi(x_n,t_n)$，并且

$$\zeta(\mathbf{y}) = \lim_{n\to\infty}\zeta(\widetilde{\Psi}(x_n,t_n)) \le \overline{\zeta}(R') < \overline{\zeta}(R).$$

因此，$\mathcal{S}_{\overline{R',T'}}\subset\mathcal{S}_{R,T'}$ 以及 $\sup^{\mathcal{S}_{\overline{R',T'}}}\eta W \le \sup^{\mathcal{S}_{R,T'}}\eta W$。我们得出

$$\sup_{\overline{\mathcal{S}_{R',T'}}}\eta\cdot\sup_{\overline{\mathcal{S}_{R',T'}}}W \le \sup_{\widetilde{\Psi}(B_R(o),0)}\eta W(\cdot,0)+e^{-Lt_0}e^{\lambda\bar{\zeta}(R)}\mathcal{C}_0(R).$$

特别是

$$\eta(o,t)W(o,t) \le e^{\lambda\bar{\zeta}(R)}\big(\sup_{\widetilde{\Psi}(B_R(o),0)}W(\cdot,0)+e^{-Lt_0}\mathcal{C}_0(R)\big).$$

我们得出结论

$$W(o,t) \le \frac{e^{\lambda\bar{\zeta}(R)}}{e^{\lambda\bar{\zeta}(R)/2}-1}e^{LT}\left(\sup_{\widetilde{\Psi}(B_R(o),0)}W(\cdot,0)+e^{-Lt_0}\mathcal{C}_0(R)\right)$$

证明至此完成。 □

下面的命题建立了修正平均曲率流 (7) 的边界梯度估计。结合高度估计和内部梯度估计，这一结果使我们能够证明 (7) 在以 o 为中心的 M 中的测地球上长期存在。

命题 9. 设 u 是(10)-(11) 在 $B_R(o) \times [0,T)$ 上的一个解，其中 $R > 0$ 且$T > 0$满足狄利克雷边界条件 $u(x,t) = u_0(x)$，对于$(x,t) \in \partial B_R(o) \times [0,T)$。则存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\sup_{\partial B_R(o)\times[0,T]} |\nabla u| \leq C.$$

证明。为了估计 $u(\cdot,t)$ 沿边界 $\partial B_R(o)$ 的梯度，我们考虑如下形式的函数

$$v(x) = \widetilde{u}_0(x) + h(d(x))$$

其中，对于 $x \in B_R(o)$，$d(x) = R - r(x)$，而 $\widetilde{u}_0$ 是 u_0 的一个局部延拓，定义在某个 $d < \varepsilon$ 上，其中 $\varepsilon > 0$ 满足 $\partial B_R(o)$ 在$R - \varepsilon < r < R + \varepsilon$处没有焦点。下文中，我们选择函数 h，使得 v 是定义在 $\partial B_R(o)$邻域内的式 (10) 的上解；该邻域由到 $\partial B_R(o)$ 的测地距离小于 ε 的点构成。以下计算均在该邻域内进行。记

$$W = \sqrt{\varrho^{-2} + |\nabla^M v|^2} = \sqrt{\varrho^{-2} + h'^2(d) + 2h'(d)\langle \nabla^M d, \nabla^M \widetilde{u}_0\rangle + |\nabla^M \widetilde{u}_0|^2}$$

计算可得

$$\begin{aligned}\partial_t v - \mathcal{Q}[v] = \partial_t v - \Delta_M v + \frac{1}{W^2}\langle \nabla^M_{\nabla^M v}\nabla^M v, \nabla^M v\rangle \\ - \left(1 + \frac{1}{\varrho^2 W^2}\right)\langle \nabla^M \log\varrho, \nabla^M v\rangle + n\sigma W.\end{aligned}$$

利用 $|\nabla^M d| = 1$ 以及 v的定义，我们有

$$\begin{aligned}W^2(\partial_t v - \mathcal{Q}[v]) = &-\varrho^{-2}h''(d) - \left(\varrho^{-2} + (h'(d))^2\right)h'(d)\Delta_M d \\ &- \left(W^2 + \varrho^{-2}\right)\langle \nabla^M \log\varrho, \nabla^M \widetilde{u}_0 + h'(d)\nabla^M d\rangle \\ &- (h'(d))^2\left(\Delta_M \widetilde{u}_0 + 2|\nabla^M \widetilde{u}_0||\Delta_M d| + |\nabla^M\nabla^M \widetilde{u}_0|\right) \\ &- h'(d)\left(|\nabla^M \widetilde{u}_0|^2|\Delta_M d| + |\nabla^M\nabla^M d||\nabla^M \widetilde{u}_0|^2\right) \\ &- h'(d)\left(2|\nabla^M \widetilde{u}_0||\Delta_M \widetilde{u}_0| + 2|\nabla^M\nabla^M \widetilde{u}_0||\nabla^M \widetilde{u}_0|\right) \\ &- \left(\varrho^{-2} + |\nabla^M \widetilde{u}_0|^2\right)\Delta_M \widetilde{u}_0 - |\nabla^M \widetilde{u}_0|^2|\nabla^M\nabla^M \widetilde{u}_0| + n\sigma W^3.\end{aligned}$$

注意到 $|\Delta_M \widetilde{u}_0| \le \sqrt{n}|\nabla^M \nabla^M \widetilde{u}_0|$. 因此,

$$\begin{aligned} W^2(\partial_t v - \mathcal{Q}[v]) \ge & -\varrho^{-2} h''(d) - \left(\varrho^{-2} + (h'(d))^2\right) h'(d) \Delta_M d \\ & - \left(W^2 + \varrho^{-2}\right) \langle \nabla^M \log \varrho, \nabla^M \widetilde{u}_0 + h'(d) \nabla^M d \rangle \\ & - C(h'(d))^2 \left(|\nabla^M \widetilde{u}_0 + |\nabla^M \nabla^M \widetilde{u}_0| \right) \\ & - C h'(d) \left(|\nabla^M \widetilde{u}_0|^2 + |\nabla^M \nabla^M \widetilde{u}_0| |\nabla^M \widetilde{u}_0| \right) \\ & - C \left(\varrho^{-2} + |\nabla^M \widetilde{u}_0|^2 \right) |\nabla^M \nabla^M \widetilde{u}_0| + n\sigma W^3. \end{aligned}$$

其中 $C = 2\max(\sqrt{n} + 1, \sqrt{n}|\nabla^M \nabla^M d|)$。 此外，由方程（27）和（28）以及函数 d 的定义可得

$$-\left(\Delta_M d + \langle \nabla^M \log \varrho, \nabla^M d \rangle\right) = \Delta_M r + \langle \nabla^M \log \varrho, \nabla^M r \rangle \ge -nB$$

其中 $B = \sup_{(R-\varepsilon, R+\varepsilon)} \frac{\xi'(r)}{\xi(r)}$。 因此，如有必要，将常数 C 调整为包含负项，我们有

$$\begin{aligned} W^2(\partial_t v - \mathcal{Q}[v]) \ge & -\varrho^{-2} h''(d) - h'(d) |\nabla^M \log \varrho| \varrho^{-2} - nB(h'(d))^3 \\ & - C(h'(d))^2 \left(|\nabla^M \log \varrho| |\nabla^M \widetilde{u}_0| + |\nabla^M \widetilde{u}_0| + |\nabla^M \nabla^M \widetilde{u}_0| \right) \\ & - C h'(d) \left(nB\varrho^{-2} + |\nabla^M \log \varrho| |\nabla^M \widetilde{u}_0|^2 + |\nabla^M \widetilde{u}_0|^2 + |\nabla^M \nabla^M \widetilde{u}_0| |\nabla^M \widetilde{u}_0| \right) \\ & - C \left(\varrho^{-2} + |\nabla^M \widetilde{u}_0|^2 \right) \left(|\nabla^M \log \varrho| |\nabla^M \widetilde{u}_0| + |\nabla^M \nabla^M \widetilde{u}_0| \right) + n\sigma W^3. \end{aligned}$$

对于 $L > 0$, 固定 $d_0 < L^{-1}$ 和 $A = L(1 - Ld_0)^{-1}$。若取 $h(d) = L^{-1}\log(1 + Ad)$, 则

$$h'(d) = \frac{1}{L}\left(\frac{A}{1 + Ad}\right), \quad h''(d) = -L(h'(d))^2$$

因此，对所有 $d < d_0$,

$$\begin{aligned} W^2 \left(\partial_t v - \mathcal{Q}[v]\right) \ge \frac{1}{L} \frac{A}{1 + Ad} \Bigg[& -nB \frac{1}{L^2} \left(\frac{A^2}{(1 + Ad)^2} \right) + \left(\varrho^{-2} - \frac{\overline{C}}{L} \right) \frac{A}{1 + Ad} \\ & - \left(|\nabla^M \log \varrho| \varrho^{-2} + \overline{C} + \overline{C} L \left(\frac{1 + Ad}{A} \right) \right) \Bigg] \end{aligned}$$

其中 $C \equiv C\left(\underline{n},\ B,\ \varrho,\ |\nabla^M \log\ \varrho|,\ |\nabla^M \widetilde{u}_0|,\ |\nabla^M \nabla^M \widetilde{u}_0|\right)$. 由于

$$-\left(\frac{1 + Ad}{A} L\overline{C} \right) \ge -\overline{C},$$

我们有如下不等式

$$W^2 \left(\partial_t v - \mathcal{Q}[v]\right) \ge \frac{\overline{C}}{L} \frac{A}{1 + Ad} \left[\left(\frac{L}{\varrho^2 \overline{C}} - 1 \right) \frac{1}{L} \left(\frac{A}{1 + Ad} \right) - \frac{1}{L^2} \left(\frac{A^2}{(1 + Ad)^2} \right) - 3 \right].$$

注意

$$\left(\frac{L}{\varrho^2\overline{C}}-1\right)^2-12>0$$

对于选定的 $L>5\overline{C}\sup_{B_R(o)}\varrho^{-2}$。注意，多项式的根

$$\mathfrak{p}(x)=-x^2+4Lx^2-3L^2$$

为 L 和 $3L$。此外，对于 $x\in[L,3L]$，$\mathfrak{p}(x)\geq 0$。如果 $x=A(1+Ad)^{-1}$，那么 $x\geq L$。如果我们选择 $d_0\geq 1-3L$，那么 $x\leq 3L$。由此可得

$$\partial_t v-\mathfrak{Q}[v]\geq 0.$$

证明至此完成。 □

由于 (37) 可在局部坐标中写成一个抛物型方程，命题 7、8 和 9 中的先验C^0 和 C^1 界给出了以下局部存在性结果。

定理 *10.* 设 M 是一个 n维的完备、非紧致定向黎曼-*nian* 带极点流形 o，并设 M 是扭曲积 $M\times_\varrho\mathbb{R}$，其中 $\varrho\in C^\infty(M)$ 为某个正函数。假设 *(1)* 和 *(3)* 成立。给定任意 $R>0$，存在一个光滑解 $u\colon B_R(o)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$，满足方程 *(10)-(11)*、狄利克雷边界条件 $u(x,0)=u_0(x)$（对 $x\in\partial B_R(o)$）以及初始条件 $u(\cdot,0)=u_0$，其中任意 σ满足

$$\sigma<\frac{1}{n}\inf\left(\frac{|\bar\nabla\varrho|}{\varrho}+(n-1)\frac{\xi'(r)}{\xi(r)}\right).$$

6 曲率估计

为了获得二阶界，我们需要推导第二基本形式及其平方范数的演化方程，这是经典 Simons 公式的抛物型对应式。

引理 11. $|A|^2$ 的平方范数（其中 Σ_t, $t\in[0,T]$ 是第二基本形式）演化为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial_t-\Delta)|A|^2+|\nabla A|^2&=-n\sigma a_i^s a_{sj}a^{ij}+|A|^4+n(H-\sigma)a^{ij}\bar R_{i00j}\\&\quad+g^{k\ell}\left(\nabla_i L_{kj\ell}+\nabla_k L_{\ell ij}\right)a^{ij}+g^{k\ell}(a_{is}\bar R^s_{kj\ell}+a_{sk}\bar R^s_{\ell ij})a^{ij}\end{aligned}\tag{33}$$

其中 L 是 Σ_t 中由 $L_{ijk}=\langle R(\partial_i,\partial_j)N,\partial_k\rangle$ 定义的 (0,3) 阶张量。该表达式可改写为环境曲率张量的形式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial_t-\Delta)|A|^2+|\nabla A|^2&=-n\sigma(a_i^s a_{sj}+\bar R_{i00j})a^{ij}+|A|^4+|A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\\&\quad+g^{k\ell}(\bar\nabla_i\bar R_{kj0\ell}+\bar\nabla_k\bar R_{\ell i0j})a^{ij}+2g^{k\ell}(a_{is}\bar R^s_{kj\ell}+a_{sk}\bar R^s_{\ell ij})a^{ij}.\end{aligned}\tag{34}$$

证明。我们有

$$\partial_t a_{ij} = n\nabla_i\nabla_j H - n(H-\sigma)a_{is}a^s_j + n(H-\sigma)\bar{R}_{i00j}$$

由于

$$\partial_t g^{ij} = 2n(H-\sigma)a^{ij}$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t|A|^2 &= g^{j\ell}a_{ij}a_{k\ell}\partial_t g^{ik} + g^{ik}g^{j\ell}a_{k\ell}\partial_t a_{ij} = 2n(H-\sigma)a^{ik}a^\ell_i a_{k\ell}\\ &+ a^{ij}(n\nabla_i\nabla_j H - n(H-\sigma)a_{i\ell}a^\ell_j + n(H-\sigma)\bar{R}_{i00j}).\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\partial_t|A|^2 = n(H-\sigma)a^{ik}a^\ell_i a_{k\ell} + na^{ij}\nabla_i\nabla_j H + n(H-\sigma)a^{ij}\bar{R}_{i00j}.$$

另一方面

$$\begin{aligned}\Delta a_{ij} &= n\nabla_i\nabla_j H + nHa^s_i a_{sj} - a_{ij}|A|^2 - g^{k\ell}\left(\nabla_i L_{kj\ell} + \nabla_k L_{\ell ij}\right)\\ &\quad + g^{k\ell}(\bar{R}^s_{ik\ell}a_{sj} + \bar{R}^s_{ikj}a_{\ell s})\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|A|^2 - |\nabla A|^2 &= a^{ij}\Delta a_{ij} = na^{ij}\nabla_i\nabla_j H + nHa^s_i a_{sj}a^{ij} - |A|^4\\ &- g^{k\ell}\left(\nabla_i L_{kj\ell} + \nabla_k L_{\ell ij}\right)a^{ij} + g^{k\ell}(\bar{R}^s_{ik\ell}a_{sj} + \bar{R}^s_{ikj}a_{\ell s})a^{ij}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial_t - \Delta)|A|^2 + |\nabla A|^2 &= -n\sigma a^s_i a_{sj}a^{ij} + |A|^4 + n(H-\sigma)a^{ij}\bar{R}_{i00j}\\ &+ g^{k\ell}\left(\nabla_i L_{kj\ell} + \nabla_k L_{\ell ij}\right)a^{ij} - g^{k\ell}(\bar{R}^s_{ik\ell}a_{sj} + \bar{R}^s_{ikj}a_{\ell s})a^{ij}.\end{aligned}$$

值得指出的是

$$\begin{aligned}\nabla_i L_{kj\ell} + \nabla_k L_{\ell ij} &= \bar{\nabla}_i\bar{R}_{kj0\ell} + \bar{\nabla}_k\bar{R}_{\ell i0j} + a_{ik}\bar{R}_{0j0\ell} + a_{ij}\bar{R}_{k00\ell} + a_{is}\bar{R}^s_{kj\ell}\\ &+ a_{k\ell}\bar{R}_{0i0j} + a_{ki}\bar{R}_{\ell 00j} + a_{ks}\bar{R}^s_{\ell ij}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&g^{k\ell}(\nabla_i L_{kj\ell} + \nabla_k L_{\ell ij})a^{ij} =\\ &g^{k\ell}(\bar{\nabla}_i\bar{R}_{kj0\ell} + \bar{\nabla}_k\bar{R}_{\ell i0j})a^{ij} - a^\ell_i a^{ij}\bar{R}_{j00\ell} + |A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\\ &\quad + a_{is}a^{ij}g^{k\ell}\bar{R}^s_{kj\ell} - nHa^{ij}\bar{R}_{i00j} + a^\ell_i a^{ij}\bar{R}_{\ell 00j} + g^{k\ell}a^{ij}a_{sk}\bar{R}^s_{\ell ij}.\end{aligned}$$

消去并合并若干项后，得到

$$g^{k\ell}(\nabla_i L_{kj\ell}+\nabla_k L_{\ell ij})a^{ij}=g^{k\ell}(\bar{\nabla}_i \bar{R}_{kj0\ell}+\bar{\nabla}_k \bar{R}_{\ell i0j})a^{ij}+|A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)$$
$$+a_{is}a^{ij}g^{k\ell}\bar{R}^s_{kj\ell}-nHa^{ij}\bar{R}_{i00j}+g^{k\ell}a^{ij}a_{sk}\bar{R}^s_{\ell ij}.$$

由于

$$-g^{k\ell}(\bar{R}^s_{ik\ell}a_{sj}+\bar{R}^s_{ikj}a_{\ell s})a^{ij}=a^{ij}g^{k\ell}(a_{is}\bar{R}^s_{kj\ell}+a_{sk}\bar{R}^s_{\ell ij})$$

我们得出

$$\frac{1}{2}(\partial_t-\Delta)|A|^2+|\nabla A|^2=-n\sigma(a^s_i a_{sj}+\bar{R}_{i00j})a^{ij}+|A|^4+|A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)$$
$$+g^{k\ell}(\bar{\nabla}_i \bar{R}_{kj0\ell}+\bar{\nabla}_k \bar{R}_{\ell i0j})a^{ij}+2g^{k\ell}(a_{is}\bar{R}^s_{kj\ell}+a_{sk}\bar{R}^s_{\ell ij})a^{ij}.$$

证明至此完成。 □

给定 $R>0$和 $T'\in(0,\ T)$，我们将估计集合中的 $|A|$

$$\mathcal{U}_{R,T'}=\bigcup\nolimits_{t\in[0,T']}U_{R,t}$$

with

$$U_{R,t}=\big\{y=\widetilde{\Psi}(x,t):\zeta(\widetilde{\Psi}(x,t))+C_R t\le\zeta(R)\big\},\quad t\in[0,T'].$$

为此，我们假设 $W>0$ 属于$U_{R,\ t}$，并将按照研究函数 [3]演化的方式进行

$$f=\psi(W)|A|^2,$$

其中

$$\psi(W)=\frac{W^2}{\gamma-\delta W^2} \tag{35}$$

with

$$\gamma=\frac{1}{\sup_{B_R(o)}\varrho^2}$$

and

$$\delta=\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\sup_{B_{R'(o)}\times[0,T]}W^2}$$

对于 $R'\in(0,R)$，满足

$$\zeta(r)+C_R T'\le\zeta(R)/2 \tag{36}$$

对于 $r < R'$。因此

$$\delta\psi(W) \leq \frac{\gamma/2}{\gamma - \gamma/2} = 1.$$

由于 $\delta\psi$ 是非递减的，且 $W^2 \geq \varrho^{-2}$，我们有

$$\delta\psi(W) = \frac{\delta W^2}{\gamma - \delta W^2} \geq \frac{\delta/\varrho^2}{\gamma - \delta/\varrho^2} \geq \frac{\delta}{\gamma \sup_{\mathcal{C}_R} \varrho^2 - \delta} = \frac{\delta}{1-\delta} =: \widetilde{\delta}.$$

我们还有

$$-\frac{2}{W}\frac{1}{\psi'(W)} - \frac{\psi''(W)}{\psi'^2(W)} + \frac{3}{2}\frac{1}{\psi(W)} < 0.$$

事实上，有

$$\begin{aligned}
&-\frac{2}{W}\frac{1}{\psi'(W)} - \frac{\psi''(W)}{\psi'^2(W)} = -\frac{(\gamma - \delta W^2)^2}{\gamma W^2} - \frac{(2\gamma^2 + 6\gamma\delta W^2)}{(\gamma - \delta W^2)^3}\frac{(\gamma - \delta W^2)^4}{4\gamma^2 W^2} \\
&= -\frac{\gamma - \delta W^2}{\gamma W^2}\left(\gamma - \delta W^2 + \frac{2\gamma^2 + 6\gamma\delta W^2}{4\gamma}\right) = -\frac{\gamma - \delta W^2}{\gamma W^2}\left(\frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta W^2\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&-\frac{2}{W}\frac{1}{\psi'(W)} - \frac{\psi''(W)}{\psi'^2(W)} + \frac{3}{2}\frac{1}{\psi(W)} = -\frac{\gamma - \delta W^2}{W^2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}\delta W^2\right) + \frac{3}{2}\frac{\gamma - \delta W^2}{W^2} \\
&= -\frac{\delta}{2\gamma}(\gamma - \delta W^2) \leq 0.
\end{aligned}$$

引理 12. 我们有，在 $\mathcal{U}_{R,T'}$ 中

$$(\partial_t - \Delta) f \leq -\frac{1}{\psi}\langle \nabla f, \nabla\psi\rangle - af^2 + bf + 2(C + n\sigma|\bar{R}(\cdot, N, N, \cdot)|)\sqrt{\psi}\sqrt{f}$$

$\widetilde{a}$ $\widetilde{b}$ 其中 $a = 2\delta - \sigma\varepsilon(1-\delta) > 0$ 且 $b = 2(C + \delta L) + \frac{\sigma}{\varepsilon}$。这里，$C$ 和 C 是依赖于 ϱ 及其导数的非负常数。

证明。仿照 [3], 中的引理 8，我们将 f 的演化用式 (16) 和式 (33) 表示如下

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta) f = {} & |A|^2\psi'(W)(\partial_t - \Delta) W - |A|^2\psi''(W)|\nabla W|^2 \\
& + \psi(W)(\partial_t - \Delta)|A|^2 - 2\langle \nabla\psi, \nabla|A|^2\rangle.
\end{aligned}$$

然而

$$2\langle\nabla\psi,\nabla|A|^2\rangle=\frac{1}{\psi}\langle\nabla\psi,\nabla f\rangle-\frac{1}{\psi}|\nabla\psi|^2|A|^2+\langle\nabla\psi,\nabla|A|^2\rangle$$
$$\geq\frac{1}{\psi}\langle\nabla\psi,\nabla f\rangle-\frac{1}{\psi}|\nabla\psi|^2|A|^2-\frac{1}{2\psi}|A|^2|\nabla\psi|^2-2\psi|\nabla|A||^2.$$

利用 Kato不等式 $|\nabla|A||^2\leq|\nabla A|^2$ ，我们得到

$$-2\langle\nabla\psi,\nabla|A|^2\rangle\leq-\frac{1}{\psi}\langle\nabla f,\nabla\psi\rangle+2\psi|\nabla A|^2+\frac{3}{2}\frac{1}{\psi}|A|^2|\nabla\psi|^2.$$

因此，由表达式 (16) 和 (34) 可得

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)f\leq&-|A|^2\psi'(W)\left(W(|A|^2+\overline{\mathrm{Ric}}(N,N))+2W^{-1}|\nabla W|^2\right)\\&+2\psi(W)\big(-|\nabla A|^2-n\sigma(a_i^sa_{sj}+\bar R_{i00j})a^{ij}+|A|^4+|A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\\&+g^{k\ell}(\bar\nabla_i\bar R_{kj0\ell}+\bar\nabla_k\bar R_{\ell i0j})a^{ij}+2g^{k\ell}(a_{is}\bar R^s_{kj\ell}+a_{sk}\bar R^s_{\ell ij})a^{ij}\big)\\&-|A|^2\psi''(W)|\nabla W|^2-\frac{1}{\psi}\langle\nabla f,\nabla\psi\rangle+2\psi(W)|\nabla A|^2+\frac{3}{2}\frac{1}{\psi}|A|^2|\nabla\psi|^2\end{aligned}$$

其中 $'$ 表示关于 W的导数。合并同类项，可得

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)f\leq&(|A|^4+|A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N))(2\psi(W)-\psi'(W)W)\\&+2\psi(W)\big(-n\sigma(a_i^sa_{sj}+\bar R_{i00j})a^{ij}+g^{k\ell}(\bar\nabla_i\bar R_{kj0\ell}+\bar\nabla_k\bar R_{\ell i0j})a^{ij}\\&+2g^{k\ell}(a_{is}\bar R^s_{kj\ell}+a_{sk}\bar R^s_{\ell ij})a^{ij}\big)-\frac{1}{\psi}\langle\nabla f,\nabla\psi\rangle\\&-2|A|^2\frac{\psi'(W)}{W}|\nabla W|^2-|A|^2\psi''(W)|\nabla W|^2+\frac{3}{2}\frac{\psi'^2(W)}{\psi(W)}|A|^2|\nabla W|^2.\end{aligned}$$

经过直接但冗长的计算，我们可以验证

$$g^{k\ell}(\bar\nabla_i\bar R_{kj0\ell}+\bar\nabla_k\bar R_{\ell i0j})a^{ij}+2g^{k\ell}(a_{is}\bar R^s_{kj\ell}+a_{sk}\bar R^s_{\ell ij})a^{ij}\leq C|A|+\widetilde{C}|A|^2$$

~其中，常数 C 和 C 取决于 ϱ 及其导数，以及 M的曲率。更明确地说，我们有

$$C=C\left(\frac{|\bar\nabla\varrho|}{\varrho},\frac{|\bar\nabla^2\varrho|}{\varrho},\frac{|\bar\nabla^3\varrho|}{\varrho},|\nabla^MR^M|\right)$$

and

$$\widetilde{C}=\widetilde{C}\left(\frac{|\bar\nabla\varrho|}{\varrho},\frac{|\bar\nabla^2\varrho|}{\varrho},\frac{|\bar\nabla^3\varrho|}{\varrho},|R^M|\right),$$

其中， R^M 是（M， g）中的黎曼曲率张量。注意到

$$\begin{aligned}&-2|A|^2\frac{\psi'(W)}{W}|\nabla W|^2-|A|^2\psi''(W)|\nabla W|^2+\frac{3}{2}\frac{\psi'^2(W)}{\psi}|A|^2|\nabla W|^2\\&=-\left(2\frac{\psi'(W)}{W}+\psi''(W)-\frac{3}{2}\frac{\psi'^2(W)}{\psi(W)}\right)|A|^2|\nabla W|^2\leq 0\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&(\partial_t-\Delta)f\leq(|A|^4+|A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N))(2\psi(W)-\psi'(W)W)\\&+2\psi(W)(C|A|+\widetilde{C}|A|^2)-2n\sigma\psi(W)\left(a^{ij}a_i^sa_{sj}+a^{ij}\bar{R}_{i00j}\right)-\frac{1}{\psi}\langle\nabla f,\nabla\psi\rangle.\end{aligned}$$

取一个稍后确定的常数 $\varepsilon>0$，则有

$$2a^{ij}a_i^sa_{sj}\leq 2|A|^3\leq\varepsilon|A|^4+\frac{1}{\varepsilon}|A|^2.$$

因此

$$\begin{aligned}&(\partial_t-\Delta)f\leq|A|^4((2+\sigma\varepsilon)\psi(W)-\psi'(W)W)+|A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)(2\psi(W)\\&-\psi'(W)W)+2\psi(W)(C|A|+\widetilde{C}|A|^2)+\frac{1}{\varepsilon}\sigma\psi(W)|A|^2-2n\sigma\psi(W)a^{ij}\bar{R}_{i00j}\\&-\frac{1}{\psi}\langle\nabla f,\nabla\psi\rangle.\end{aligned}$$

注意到，(35) 意味着

$$\begin{aligned}&((2+\sigma\varepsilon)\psi(W)-W\psi'(W))\,|A|^4=\left(\frac{2+\sigma\varepsilon}{\psi(W)}-W\frac{\psi'(W)}{\psi^2(W)}\right)\psi^2|A|^4\\&\left(\sigma\varepsilon\left(\frac{\gamma}{W^2}-\delta\right)-2\delta\right)f^2\leq(\sigma\varepsilon(\gamma\varrho^2-\delta)-2\delta)f^2\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&(2\psi(W)-W\psi'(W))\,|A|^2\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)=\left(\frac{2}{\psi(W)}-W\frac{\psi'(W)}{\psi^2(W)}\right)\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\,\psi^2|A|^2\\&=-2\delta\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\psi f.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&(\partial_t-\Delta)f\leq(\sigma\varepsilon(\gamma\varrho^2-\delta)-2\delta)f^2-2\delta\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\psi f+2C\psi|A|+2\widetilde{C}f\\&+\frac{\sigma}{\varepsilon}f+2n\sigma|\bar{R}(\cdot,N,N,\cdot)||A|\psi-\frac{1}{\psi}\langle\nabla f,\nabla\psi\rangle.\end{aligned}$$

~~由于~~Ric $\geq -L$ 对于某个 $L \geq 0$，且 $\delta\psi \geq \delta$，我们得到

$$2\widetilde{C} - 2\delta\psi\,\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + \frac{\sigma}{\varepsilon} \leq 2(\widetilde{C} + \widetilde{\delta}L) + \frac{\sigma}{\varepsilon} = b.$$

由于 $\gamma\varrho^2 \leq 1$ 表示 $a = 2\delta - \sigma\varepsilon(1-\delta)$，有

$$(\partial_t - \Delta)\, f \leq -\frac{1}{\psi}\langle \nabla f, \nabla\psi\rangle - af^2 + bf + 2(C + n\sigma|\bar{R}(\cdot,N,N,\cdot)|)\sqrt{\psi}\sqrt{f}$$

由此完成证明。 □

命题 13. 固定 $R' \in (0,R)$ 使得(36) 成立。魏因加滕映射 A 及其协变导数的范数在 $B_{R'}(o) \times [0,T]$上有界，其界由$\sup_{B_R(o)} W^2(\cdot,0)$ 以及几何数据$\sup_{B_R(o)}\varrho, \sim\xi(R)$, $\zeta(R)$, C, C 和 L决定。

证明。 现在，我们考虑函数

$$\phi(\widetilde{\Psi}(x,t)) = (\zeta(R) - \zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)) - C_R t)^2$$

定义在集合

$$\mathcal{U}_{R,T'} = \bigcup\nolimits_{t\in[0,T']} \big\{ y = \widetilde{\Psi}(x,t) : \zeta(\widetilde{\Psi}(x,t)) + C_R t \leq \zeta(R) \big\}.$$

利用 (15) 和 (29)，可得

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)\,\phi &\leq -2(\zeta(R) - \zeta - C_R t)(\partial_t\zeta - \Delta\zeta + C_R) - 2|\nabla\zeta|^2 \\ &\leq 2(\zeta(R) - \zeta - C_R t)(n\xi'(r) + n\sigma\xi(r)\langle\bar{\nabla} r, N\rangle - C_R) - 2|\nabla\zeta|^2.\end{aligned}$$

由于

$$C_R = \sup\nolimits_{B_R(o)}(\xi' + \sigma\xi)$$

我们有

$$(\partial_t - \Delta)\,\phi \leq -2|\nabla\zeta|^2.$$

因此，我们计算

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)\,(\phi f) &= f\,(\partial_t - \Delta)\,\phi + \phi\,(\partial_t - \Delta)\,f - 2\langle\nabla\phi, \nabla f\rangle \\ &\leq -2f|\nabla\zeta|^2 - \Big\langle \nabla(\phi f) - f\nabla\phi, \frac{\nabla\psi}{\psi}\Big\rangle - a\phi f^2 + b\phi f \\ &\quad + 2\phi(C + |\bar{R}(\cdot,N,N,\cdot)|)\sqrt{\psi}\sqrt{f} - 2\Big\langle\frac{\nabla\phi}{\phi}, \nabla(\phi f) - f\nabla\phi\Big\rangle.\end{aligned}$$

然而，我们有

$$-2|\nabla\zeta|^2+2\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi}=-2|\nabla\zeta|^2+8\frac{(\zeta(R)-\zeta(r)-C_Rt)^2}{(\zeta(R)-\zeta(r)-C_Rt)^2}|\nabla\zeta|^2=6|\nabla\zeta|^2.$$

因此，

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)(\phi f)\leq 6|\nabla\zeta|^2 f-\left\langle\nabla(\phi f),\frac{\nabla\psi}{\psi}+2\frac{\nabla\phi}{\phi}\right\rangle+\left\langle f\nabla\phi,\frac{\nabla\psi}{\psi}\right\rangle\\ -a\phi f^2+b\phi f+2\phi(C+\sigma|\bar{R}(\cdot,N,N,\cdot)|)\sqrt{\psi}\sqrt{f}.\end{aligned}$$

由于 $\nabla\psi=\psi'(W)\nabla W$ 且

$$\nabla W^{-1}=\nabla\langle X,N\rangle=\langle X,N\rangle(\bar{\nabla}\log\varrho)^\top-\langle\bar{\nabla}\log\varrho,N\rangle X^\top-AX^\top$$

我们有

$$\frac{\nabla\psi}{\psi}=-\frac{2\gamma}{\gamma-\delta W^2}W\left(\langle X,N\rangle\bar{\nabla}\log\varrho-\langle\bar{\nabla}\log\varrho,N\rangle X-AX^\top\right).$$

因此，

$$\left|\frac{\nabla\psi}{\psi}\right|\leq 4\frac{\gamma}{\delta}|\bar{\nabla}\varrho|+2\gamma\varrho\frac{\sqrt{\psi(W)}}{W}\sqrt{f}\leq 4\delta^{-1}\sup_{\mathcal{C}_R}|\bar{\nabla}\log\varrho|+4\sqrt{\psi}\sqrt{f}.$$

其中我们用到了 $\psi(W)\leq\delta^{-1}$。记 $c=4\delta^{-1}\sup_{B_R(o)}|\bar{\nabla}\log\varrho|$，我们有

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)(\phi f)\leq 6|\nabla\zeta|^2 f-\left\langle\nabla(\phi f),\frac{\nabla\psi}{\psi}+2\frac{\nabla\phi}{\phi}\right\rangle+|\nabla\phi|\big(c+4\sqrt{\psi}\sqrt{f}\big)f\\ -a\phi f^2+b\phi f+2\phi(C+|\bar{R}(\cdot,N,N,\cdot)|)\sqrt{\psi}\sqrt{f}.\end{aligned}$$

我们得出结论：在 $\mathcal{U}_{R',T_R}\subset\mathcal{U}_{R,T'}$ 中 ϕf 取得最大值的点处，（若 $t\neq 0$）有

$$\begin{aligned}a\phi f^2\leq 4|\nabla\phi|\sqrt{\psi}\sqrt{f}f+\big(6|\nabla\zeta|^2+b\phi+c|\nabla\phi|\big)f\\ +2(C+|\bar{R}(\cdot,N,N,\cdot)|)\sqrt{\phi\psi}\sqrt{\phi f}\end{aligned}$$

因此乘以 $\sqrt{\phi}/\sqrt{f}$ 并将各项分组

$$\begin{aligned}a(\sqrt{\phi f})^3\leq 4|\nabla\phi|\sqrt{\psi}\sqrt{\phi}f+\big(6|\nabla\zeta|^2+b\phi+c|\nabla\phi|\big)\sqrt{\phi f}\\ +2(C+|\bar{R}(\cdot,N,N,\cdot)|)\phi\sqrt{\psi}\sqrt{\phi}.\end{aligned}$$

考虑到

$$\nabla\phi = -2\sqrt{\phi}\,\nabla\zeta = -2\sqrt{\phi}\,\xi(r)\nabla r \quad \text{and} \quad \phi \le \zeta^2(R) \quad \text{and} \quad \sqrt{\psi} \le \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

并利用 $|\nabla r| \le 1$，可得

$$a(\sqrt{\phi f})^3 \le \frac{8}{\sqrt{\delta}}\xi(r)(\sqrt{\phi f})^2 + \left(6\xi^2(r) + 2c\xi(r)\zeta(R) + b\zeta^2(R)\right)(\sqrt{\phi f}) + \frac{2}{\sqrt{\delta}}(C + |\bar{R}(\cdot, N, N, \cdot)|)\zeta^3(R).$$

因此

$$a\left(\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)}\right)^3 - \frac{8}{\sqrt{\delta}}\frac{\xi(R)}{\zeta(R)}\left(\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)}\right)^2 - \left(6\frac{\xi^2(R)}{\zeta^2(R)} + 2c\frac{\xi(R)}{\zeta(R)} + b\right)\left(\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)}\right) - \frac{2}{\sqrt{\delta}}C \le 0.$$

在这种情况下，要么

$$a\left(\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)}\right)^3 - \frac{2}{\sqrt{\delta}}C \le \delta\left(\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)}\right)^3$$

or

$$\delta\left(\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)}\right)^3 - \frac{8}{\sqrt{\delta}}\frac{\xi(R)}{\zeta(R)}\left(\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)}\right)^2 - \left(6\frac{\xi^2(R)}{\zeta^2(R)} + 2c\frac{\xi(R)}{\zeta(R)} + b\right)\left(\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)}\right) \le 0.$$

我们得出

$$\frac{\sqrt{\phi f}}{\zeta(R)} \le C_1 := \max\left\{\frac{(2C)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\delta}}, \frac{4}{\delta^{\frac{3}{2}}}\frac{\xi(R)}{\zeta(R)} + \left(\frac{16}{\delta^3}\frac{\xi^2(R)}{\zeta^2(R)} + \frac{1}{\delta}\left(6\frac{\xi^2(R)}{\zeta^2(R)} + 2c\frac{\xi(R)}{\zeta(R)} + b\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

因此

$$\inf_{B_{R'}(o)\times[0,T]}\left(1 - \frac{\zeta(r)}{\zeta(R)} - \frac{C_R}{\zeta(R)}t\right)\sqrt{f} \le C_1.$$

由于 $f = \psi(W)|A|^2$，式（36）中 $R' \in (0, R)$ 的取值意味着

$$\inf_{B_{R'}(o)\times[0,T]}\left(1 - \frac{\zeta(r)}{\zeta(R)} - \frac{C_R}{\zeta(R)}t\right) \ge \frac{1}{2}$$

我们有

$$\sup_{B_{R'}(o)\times[0,T]}|A| \le 2\sqrt{1-\delta}\,C_1 \le 2C_1.$$

这表明， $|A|$ 在 $B_{R'}(o)$ 中有界，其界由某个常数给出，该常数取决于 $\sup_{B_R(o)} W^2$ $(\cdot, 0)$ 的上确界以及几何数据 $\sup_{B_R(o)} \varrho$、 $\xi(R)$、 $\zeta(R)$、 C、 C 和 L。由于

$$\widetilde{\delta} = \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{\gamma}{2\sup_{B_{R'}(o)\times[0,T]} W^2 - \gamma} \leq \frac{\gamma}{2\inf_{B_{R'}(o)} \varrho^{-2} - \gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} = 1,$$

~ ~ ~我们有 $b = 2(C + \delta L) \leq 2(C + L)$。我们还回顾一下

$$c = \frac{4}{\delta} \sup_{B_R(o)} \frac{|\bar{\nabla}\varrho|}{\varrho}.$$

因此我们得出，存在正的常数 C， C' 它们依赖于上述几何数据，使得

$$|A|(o,t) \leq \big(C \sup_{B_R(o)\times[0,T]} W + C' \sup_{B_R(o)\times[0,T]} W^3\big) \frac{\xi(R)}{\zeta(R)}$$

对于 $t \in [0,T]$。这就完成了所需曲率估计的证明。

根据这个估计，我们可以得出 A 的协变导数也有界。事实上，按照 [5]和 [3] 中的方法归纳推导，假设对于每个$k = 0$， 1， ....., $\ell - 1$，都存在一个常数 $C_k = C_k(R, T)$，使得

$$|\nabla^k A| \leq C_k \quad \text{for} \quad k = 0, 1, \cdots, \ell - 1$$

¯ ¯其中 C_k 依赖于 $|\nabla^m A|$ 的界以及张量 $\nabla^m R$ （ $0 \leq m \leq k-1$属于 $B_R(o)$ $\times [0,T]$ ），还依赖于与上述相同类型的几何数据。

与 [5] 和 [3] 中一样，我们将使用 Simons 不等式的变体来处理 A 的高阶协变导数，其形式为

$$\frac{1}{2}(\partial_t - \Delta)|\nabla^\ell A|^2 + |\nabla^{\ell+1} A|^2 \leq D_\ell(|\nabla^\ell A|^2 + 1)$$

其中，常数 D_ℓ 取决于 $|\nabla^k A|$ 的界以及张量 $\bar{\nabla}^k \bar{R}$ ，其中 $0 \leq k \leq \ell - 1$ 属于 B_R （o） $\times [0,T]$。现在，我们定义

$$h = |\nabla^\ell A|^2 + \lambda |\nabla^{\ell-1} A|^2$$

其中 λ 是一个待定常数。令 $\lambda \geq 2D_\ell$ ，可得

$$\frac{1}{2}\partial_t h \leq \frac{1}{2}\Delta h - \frac{\lambda}{2} h + \frac{\lambda^2}{2}|\nabla^{\ell-1} A|^2 + D_{\ell-1}|\nabla^{\ell-1} A|^2 + D_\ell + \lambda D_{\ell-1}.$$

取 $\lambda^2 \geq 2D_{\ell-1}$，我们得出

$$(\partial_t - \Delta)h \leq -\lambda h + \lambda^2 \widetilde{C}_\ell + \widetilde{D}_\ell,$$

其中 $\widetilde{D}_\ell = 2D_\ell + 2\lambda D_{\ell-1}$ 和 $\widetilde{C}_\ell = 2|\nabla^{\ell-1}A|^2$。仿照上文的推导可得

$$(\partial_t - \Delta)(\phi h) \leq -2h|\nabla\zeta|^2 + (-\lambda h + \lambda^2\widetilde{C}_\ell + \widetilde{D}_\ell)\phi - 2\left\langle \phi^{-1}\nabla\phi, \nabla(\phi h) - h\nabla\phi \right\rangle.$$

因此

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)(\phi h) + 2\left\langle \phi^{-1}\nabla\phi, \nabla(\phi h)\right\rangle &\leq -2h|\nabla\zeta|^2 + 2\phi^{-1}|\nabla\phi|^2 h \\ &+ (-\lambda h + \lambda^2\widetilde{C}_\ell + \widetilde{D}_\ell)\phi.\end{aligned}$$

再次利用

$$-2|\nabla\zeta|^2 + 2\phi^{-1}|\nabla\phi|^2 = 6|\nabla\zeta|^2$$

由此可得

$$(\partial_t - \Delta)(\phi h) + 2\left\langle \phi^{-1}\nabla\phi, \nabla(\phi h)\right\rangle \leq 6|\nabla\zeta|^2 h - \lambda\phi h + (\lambda^2\widetilde{C}_\ell + \widetilde{D}_\ell)\phi.$$

在 ϕh 的最大值点处，我们有

$$(\lambda\phi - 6\xi^2(r))h \leq (\lambda^2\widetilde{C}_\ell + \widetilde{D}_\ell)\zeta^2(R).$$

由于 $\phi \geq \zeta^2(R)/4$ 在 $B_R(o) \times [0,T]$ 中，我们有

$$\left(\frac{\lambda}{4} - 6\frac{\xi^2(R)}{\zeta^2(R)}\right)h \leq \lambda^2\widetilde{C}_\ell + \widetilde{D}_\ell.$$

设定

$$\lambda \geq \max\left\{2D_\ell, (2D_{\ell-1})^{1/2}, 48\frac{\xi^2(R)}{\zeta^2(R)}\right\}$$

可得到

$$h \leq \frac{1}{6}\frac{\zeta^2(R)}{\xi^2(R)}\big(\lambda^2\widetilde{C}_\ell + \widetilde{D}_\ell\big).$$

我们得出结论

$$|\nabla^\ell A|^2 \leq \frac{1}{6}\frac{\zeta^2(R)}{\xi^2(R)}\big(2\lambda^2|\nabla^{\ell-1}A|^2 + \widetilde{D}_\ell\big) - \lambda|\nabla^{\ell-1}A|^2.$$

只要适当选取足够大的 λ，便可得到所需的估计。证明至此完成。

□

7 主要存在性结果的证明

本节将汇总前面得到的结果，以保证修正平均曲率流解的存在性。

定理*1*的证明。 我们考虑用中心位于极点 $o \in M$ 的测地球对 M 作穷竭 $\{B_{R_k}(o)\}_{k\in\mathbb{N}}$，其半径构成一个递增序列，且当 $k \to \infty$时有 $R_k \to\infty$ 。命题3、8和9中的梯度先验估计表明，对任意固定的 $T > 0$，该方程在 $B_{R'_k}(o) \times [0, T]$ 中是一致抛物型的。因此，定理 10保证存在定义于$B_{R'_k}(o) \times [0, \infty)$上的唯一解 u_k，满足如下方程

$$\partial_t u = W\left(\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{W}\right) + \left\langle \nabla \log \varrho, \frac{\nabla u}{W} \right\rangle - n\sigma \right) \tag{37}$$

使得

$$\begin{cases} u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{in} \quad B_{R'_k}(o) \times \{0\} \\ u(x, t) = u_0(x) & \text{on} \quad \partial B_{R'_k}(o) \times [0, \infty). \end{cases}$$

现在我们必须得到局部解 u_k的高阶导数的一致先验估计。为此，固定 $T > 0$。给定 $k \in \mathbb{N}$，令 $R'_k \in (0, R_k)$使得

$$\zeta(r) + C_{R_k} T \le \frac{1}{2}\zeta(R_k)$$

对 $r < R'_k$成立。由于 ζ 和 R_k递增，对任意 T 都保证存在这样的序列。命题3、8和9保证，(37)在时间区间 $[0, T]$ 上的任一解都必须满足

$$\sup_{\overline{B}_{R'_k}(o)\times[0,T]} |\nabla u_k| \le C_0$$

对于某个常数 C_0。因此，对于一对 $(x, u_k(x, t)) \in \mathcal{U}_{R'_k,T}$，我们使用 $W, |A|$ 和 $|\nabla^\ell A|$ 的估计（见命题 13），得到对任意整数 $l \ge 0$，存在一个常数C_ℓ，使得

$$\sup_{\overline{B}_{R'_k}(o)\times[0,T]} |\nabla^\ell u_k| \le C_\ell$$

对于某个依赖于 C_0 的常数 C_ℓ 。由此，我们保证对每个 $B_{R'_k} \times [0, T]$， u_k 的所有导数都满足一致的先验估计。特别地，对于任意 k，序列 $\{u_\ell\}_{\ell\ge k}$ 存在一个子序列，它在 $B_{R'_k}$ 的紧子集上局部一致收敛到方程 (37) 在 $B_{R'_k} \times [0, \infty)$ 上的一个光滑解 u，且 $u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$。通过通常的对角线过程可得到方程 (37) 在 $M \times [0, \infty)$ 上的一个解 u。

Lipschitz初始数据的一般情形，可以通过与 [5], [17] 和 [3] 中类似的逼近论证来处理。 □

致谢

J.H.S. de Lira 部分获得 CNPq 项目 PQ-306626/2022-5 的资助。M.N. Soares 部分获得 FACEPE 项目 BFP-0015-1.01/25 以及 CNPq 项目 SWP- 317751/2023-9 的资助。

参考文献

[1] P. Allmann、Lin, L. 和 Zhu, J.双曲空间中整体局部*Lipschitz*径向图的修正平均曲率流。《数学新闻》**293**，(2020)，861-878。[2] B. Andrews、B. Chow、C. Guenther 和 M. Langford，《外蕴几何流》。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2020。[3] A. Borisenko 和 V. Miquel，扭曲积的平均曲率流。《美国数学会汇刊》**364** (2012)，4551-4587。[4] K. Ecker 和 G. Huisken，整体图的平均曲率演化。《数学年刊》。**130**，(1989)，453-471。[5] K. Ecker 和 G. Huisken，平均曲率流动超曲面的内点估计。《数学新进展》。**105** (1991)，547-569。[6] K. Ecker。几何演化方程讲义。《澳大利亚国立大学数学应用中心论文集》**34** (1996)，79-107。[7] E. Giusti。《极小曲面与有界变差函数》。Birkhauser，波士顿，1984。[8] G.Huisken，带边界条件的非参数平均曲率演化。《微分方程杂志》。**77**(1989)，369–378。[9] G. Huisken。《黎曼流形中超曲面按其曲率演化》。载于《国际数学家大会论文集》，比勒费尔德，1998

[10] G Huisken 和 A. Polden。《超曲面的几何演化方程》。变分法与几何演化问题。施普林格，柏林，1999。[11] N. Korevaar，预设平均曲率方程解的内部梯度界的简易证明。《纯数学研讨会论文集》45(1986)，81-89。[12] O. A. Ladyzhenskaya、V. A. Solonnikov、N. Ural'ceva。《抛物型线性与拟线性方程》。美国数学会，普罗维登斯，1968。[13] G.M. Lieberman。《二阶抛物型微分方程》。世界科学出版社，新加坡，1996。[14] C. Mantegazza。《平均曲率流讲义》。施普林格科学与商业媒体，巴塞尔，2011。[15] S. Pigola、M. Rigoli 和 A. Setti，黎曼流形上的极大值原理及其应用。《美国数学会回忆录》174(2005)，1-99。[16] P. Unterberger。《双曲空间中的平均曲率演化》。博士论文，墨尔本大学，澳大利亚，1998。[17] P. Unterberger。双曲空间中径向图按其平均曲率演化。《分析与几何通讯》。11 (2003)，675-695[18] X.-P.Zhu。《平均曲率流讲义》。美国数学会，普罗维登斯，2002