arXiv:2602.12131v1 [math.LO] 12 Feb 2026

希尔伯特纲领与无穷

Richard Zach[0000−0003−1633−8324]

摘要希尔伯特证明论的首要目标，是仅使用有穷主义方法来确立经典数学的一致性。为此，希尔伯特采用的策略是通过所谓的 ε-替换法，从形式化证明中消除无穷（以无界量词的形式出现）。由此得到的形式证明既不提及、也不诉诸无限对象或“概念形成”。然而，正如后来的发展所表明的，一致性证明本身却从后门——可以这么说——让无穷重新进入了证明论。本文以 ε-替换法为例，概述证明论构造如何从形式证明中“消除无穷”，以及它们如何旨在确立保守性与一致性。该证明还需要论证这一证明论构造始终有效。然而，这第二个论证需要在元层次上运用可能属于无穷推理的推理方式，即对序数记号进行归纳。

1 引言

希尔伯特纲领的目标之一，是将无限从数学基础中排除。重要的是，希尔伯特并不打算将无限从数学本身中排除，也就是说，他并不打算在数学实践中排除对无限的使用。事实上，纲领的全部宗旨，正是通过表明在基础层面完全可以避免无限，来证明在数学实践中使用无限是合理的。其策略分为两步：首先，数学将被形式化，也就是说，将数学语言规范为一种人工语言，例如谓词逻辑或类型论的语言。弗雷格、怀特海和罗素、外尔等人的工作表明，至少原则上，这可以应用于希尔伯特所处时代所用数学的大部分领域。这种形式化

Richard Zach 卡尔加里大学，哲学系，University Drive NW 2500号，卡尔加里，阿尔伯塔省 T2N1N4，加拿大，电子邮箱：rzach@ucalgary.ca

产生了数学实践的形式化映像：数学陈述变成规范化语言中的公式，而数学证明则变成从一组（数量不多的）同样用该语言表述的公理推导出来的推导。第二步是运用同样避免无限的方法，证明这些形式推导绝不会导致矛盾，例如不会导出形如 $\varphi \wedge \neg\varphi$ 的定理，也不会导出某个定理，同时又能从公理推出其否定，例如 $\neg 0 = 0$。[1]

这一策略的细节要求发展一种形式系统，以便将数学形式化，并发展出可接受的方法来确立该系统的一致性。自希尔伯特时代以来，证明论学家针对这两方面提出了许多方法，但回顾希尔伯特本人的方案颇有启发。这样既能让我们着重说明该方案原本应如何运作，也能指出它在哪些地方遇到了困难。从很高的层面来看，这种方法可以描述如下：形式系统包含一些词汇，其直接解释似乎需要无穷；例如，它可能包含表示（无限）集合或函数的符号，并允许对无限域进行不受限制的量化。这些是理论中的“理想”元素，一致性证明旨在将其消除。我们可以识别出一个不含此类“理想”元素的子系统：一个由词汇和公理构成的“有穷主义”核心，无需诉诸无穷即可直接解释。基本无量词算术就是这样一种有穷子系统。它仅包含表示（有限）自然数的符号，不含不受限制的量化。该子系统的一致性可以在有穷主义基础上直接确立。完整系统的一致性证明，则是这样一种方法：将安全子系统语言中的任意公式的推导，转化为完全处于该子系统之内的推导；同时证明这种转化总会终止，并能得出正确的推导。

经该方法转换后的推导，其末公式可以是实际定理，例如 $(7 + 5) = 12$，但其适用范围也包括表面上任何可能的末公式，例如矛盾式 $\neg 0 = 0$。由此便确立了整个系统的一致性。因为假设它能够推导出诸如 $\neg 0 = 0$ 这样的矛盾。整个系统中的推导可能依赖无穷词汇或无穷公理，但通过一致性证明中包含的方法，它会被转换为有穷子系统中的推导。（一致性证明本身已经通过有穷主义方法保证，该方法始终有效。）但有穷子系统本身显然是一致的，因此不可能证明诸如 $\neg 0 = 0$ 这样的错误命题。

接下来，我们将探讨希尔伯特本人偏好的具体实现方案。该方案以 ε 演算为基础系统，并采用 ε 替换法，将完整系统中的推导转化为有穷子系统中的推导。这将有助于我们了解希尔伯特本人设想如何推行他的一致性纲领。第2节将介绍希尔伯特使用的系统：以 ε 演算表述的一阶算术，作为完整的无穷系统；以及 ε 自由片段，作为有穷的安全子系统。第3节将讨论用于将推导

[1] 关于希尔伯特证明论纲领的一般性综述，参见 Kreisel（1958）；Detlefsen（1986）；Zach（2007, 2023）。

从完整系统转化为有穷子系统中推导的 {v5} 替换法。第4节将考察各种归纳法，这些方法对于证明该方法有效是必不可少的。

2 将 ε项视为理想元素

一阶算术的词汇包含表示自然数的项以及纯粹的逻辑词汇。为明确起见，我们考虑这样一种语言：其中有表示 0 的符号、表示后继函数的符号 ′，以及表示加法 + 和乘法 ×的符号。项按通常方式归纳定义：0 是一个项；如果 t 是一个项，那么 t'也是一个项；如果 t_1 和 t_2是项，那么$(t_1 + t_2)$和$(t_1 \times t_2)$也是项。因此，以下都是项：

$$0 \quad 0''' \quad (0'' + 0''') \quad (0'' \times (0'' + 0''')) \quad \ldots$$

不含 + 和 × 的项很特别：它们的形式为 $0'^{\cdots\prime}$，也就是说，0 后面跟着若干个后继函数符号。我们将 0 后面跟着 n 个这样的 ′ 符号简写为 $\overline{n}$，并称其为 n的标准数码。（如果 $n = 0$，那么$\overline{n}$，也就是说，0 本身就是符号 0。）标准数码是在我们的系统中表示所有自然数的最简单方式。

同一性符号 = 与小于号 < 使我们能够构成最简单的公式（我们称之为原子公式）。若 t_1 与 t_2 为项，则 $t_1 = t_2$ 与$t_1 < t_2$ 为原子公式。若 t_1 与 t_2 为数词，则我们可立即判定此类原子公式在直观上是否为真： $0'^{\cdots\prime} = 0'^{\cdots\prime}$ 为真，当且仅当左右两边的撇号数目相同；而 $0'^{\cdots\prime} < 0'^{\cdots\prime}$ 为真，当且仅当左边的撇号少于右边。

借助标准逻辑算子 ¬（非）、∨（或）、∧（与）以及 →（如果—那么），我们可以构成更复杂的公式：若 A 是公式，则 $\neg A$也是；若 A_1 与 A_2 是公式，则（$A_1 \vee A_2$）、（$A_1 \wedge A_2$）与（$A_1 \rightarrow A_2$）也是。如果我们仅从不含 + 或 ×的原子公式出发，那么利用通常的真值表，我们也可以直接判定此类公式是否为真。例如，（$0' = 0' \rightarrow \neg$（$0''' = 0'' \vee 0' < 0$））为真，因为 $0''' = 0''$ 与 $0' < 0$ 为假，这使得（$0''' = 0'' \vee 0' < 0$）为假，进而使 ¬（$0''' = 0'' \vee 0' < 0$）为真，而一个后件为真的条件句为真。

加法和乘法函数稍微增加了一些复杂性。不过，我们知道如何做加法和乘法（这是我们在小学学过的），因此像 $(5 + 7) = (2 \times 6)$ 这样的公式都可以判定为真或假。只涉及 0、′、 $+, \times$，且仅使用 $=, <, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ 构成的公式，都可以直接判定为真或假；这可以通过基本算术运算和联结词的真值表来完成。它们是有限的、“实在的”陈述。

一阶算术的理想元素是量词。希尔伯特提出了一种不同的系统，用特殊的项取代量词。除了常量符号 0，我们还允许项中包含变量（x、 y、.....）。如果 $A(x)$ 是一个包含自由变元 x 的公式，那么 $\varepsilon_x A(x)$ 就是一个ε项。直观地说，$\varepsilon_x A(x)$ 表示一个满足 $A(x)$ 的任意对象，只要这样的对象存在；

如果不存在这样的对象，那么 $\varepsilon_x A(x)$ 可以表示任意对象。例如，$\varepsilon_x x < 3$ 可以是 0、1 或 2；$\varepsilon_x x < x$ 可以是任意数（因为没有数小于自身）。

ε项如何取代量词？按规定，$\varepsilon_x A(x)$ 是 $A(x)$ 的见证（如果存在）。因此，显然，$\exists x A(x)$ 为真，当且仅当 $A(\varepsilon_x A(x))$ 为真。此外，如果存在，$\varepsilon_x \neg A(x)$ 是 $A(x)$ 的反例。在这种情况下，也就是说，如果 $\forall x A(x)$ 为假，那么 $A(\varepsilon_x \neg A(x))$ 也为假。如果不存在反例，那么 $\varepsilon_x \neg A(x)$ 必定是 $A(x)$ 的见证，因为对于所有 x，$A(x)$ 都为真。因此，$\forall x A(x)$ 为真，当且仅当 $A(\varepsilon_x \neg A(x))$ 为真。

带量词的一阶逻辑公理系统需要为 $\forall$ 和 $\exists$ 配备公理和／或特殊推理规则。在*ε*演算中，只需要一个公理模式来处理 ε 项：

$$A(t) \to A(\varepsilon_x A(x))$$

这种形式的公理称为临界公式。其他唯一的公理是命题联结词的常用公理、针对 $=$ 的模式，以及推理规则肯定前件式：A，$A \to B \vdash B$。[2]

要为算术提供一个公理系统，我们只需要一些关于数的公理，例如以下这些（为简单起见，我们忽略 $<$）：

$$\neg 0 = t' \tag{1}$$
$$t_1' = t_2' \to t_1 = t_2 \tag{2}$$
$$(t + 0) = t \tag{3}$$
$$(t_1 + t_2') = (t_1 + t_2)' \tag{4}$$
$$(t \times 0) = 0 \tag{5}$$
$$(t_1 \times t_2') = (t_1 + (t_1 \times t_2)) \tag{6}$$

这些模式都可以写成不含量词或 ε项的形式，不过t、t_1和 t_2 可能含有 ε项。但如果它们不含 ε项，那么我们可以看出，每个实例都必定为真。例如，无论不含 ε项的项 t 是什么，其值都是某个自然数 n，因此 t' 的值必定是 $n+1$，也就是说，它必定大于 0。因此，$0 = t'$ 必定为假，从而 $\neg 0 = t'$ 为真。

通常的一阶算术公理模式中，唯一包含有问题的量词的是归纳法：

$$[A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(x'))] \to \forall x\, A(x).$$

归纳法等价于最小数原理：

$$\exists x\, A(x) \to \exists x(A(x) \wedge \forall y < x \neg A(y)).$$

在以 ε演算表述的算术中，我们可以添加一条公理，要求$\varepsilon_x A(x)$是最小的见证（如果存在）：

[2] 关于 ε-演算的综述，请参见 Avigad 和 Zach（2024）。

$$A(t) \rightarrow \varepsilon_x A(x) < t'.$$

添加所有这类公式，就完成了希尔伯特算术的无穷系统。他称它们为“第二类临界公式”。该系统唯一的推理规则是肯定前件式。只有第一类和第二类临界公式会提及 ε项，也就是说，只有它们是提及“理想元素”的公理。其他公理，至少在不含 ε项时，直观上都可以看作是真的。因此，有穷的“实数”子系统排除了临界公式，并且只允许其余公理模式中不含ε的实例。

3 使用 ε-替换法的一致性证明

这个实在子系统的一致性很容易得到证明。证明只需要对项的复杂度和推导长度进行归纳。我们将不含变量或 ε 的项 t 的值 简单定义为它所表示的数。这是通过归纳定义的。项 0 的值为零。 t' 的值是将 t的值加 1 的结果。($t_1 + t_2$) 的值是 t_1 与 t_2的值之和，而 ($t_1 \times t_2$) 的值则是它们的值之积。接下来，我们可以为只含这类项的原子公式定义真值。形如 $t_1 = t_2$ 的句子在 t_1 和 t_2 的值相同时为真，否则为假。形如 $t_1 < t_2$ 的句子在 t_1 的值小于 t_2时为真。含有 ¬、 ∨、 ∧和 → 的复杂公式也通过归纳法，按照通常的真值表赋予真值。由于实公式不涉及量词、变量或 ε，这就为所有实公式提供了一种有限主义的真理概念。要判定一个公式为真还是为假，我们只需能够计数、对自然数进行加减运算，并应用 ¬、 ∨、 ∧和 →的有限真值表。实公式的真与假可以在有限步内机械判定。

为了确立一致性，我们要证明，在这种解释下，实在子系统中每个可推导的公式都为真。我们对推导的长度使用归纳证明。实在子系统中的每个推导都是一个公式序列，其中每个公式要么是公理，要么是通过唯一的推理规则——肯定前件式——从序列中先前的公式推出的。为了证明一致性，我们要确立这种推导的每个末公式都为真。为此，我们要证明所有公理都为真，并且肯定前件式能从真公式推出真公式。由于我们假设推导不涉及临界公式，因此只需注意到，每个命题公理都是重言式（因而无论其所由构成的公式取何真值，它都为真）。例如，假设有一个形如 $(A \wedge B) \rightarrow A$ 的公理。 A 要么为真，要么为假。如果它为真，该公理就是一个后件为真的条件句；如果它为假，$(A \wedge B)$ 就为假，因此该公理是一个前件为假的条件句。无论哪种情况，该公理都为真。如果公理是某条算术公理的一个实例，我们同样可以通过关于项 t_1 和 t_2 的值的有穷推理，证明每个等式左右两边的值必定相同。

这种方法无法直接推广到涉及 ε项的项、公式和推导，因为无法以有穷方式为 ε项赋值。希尔伯特提出了如下处理这一问题的方法。我们可以把证明完整的理想系统一致性的问题，归结为证明例如 $\neg 0 = 0$ 不可推导的问题。实在系统已经证明了 $0 = 0$（它是同一公理的一个实例），因此，如果它也证明了 $\neg 0 = 0$，它就会是不一致的。而任何不一致系统都能证明任意公式，包括 $\neg 0 = 0$。希尔伯特的想法是证明：如果理想系统证明了 $\neg 0 = 0$，那么实在系统也能证明它。但是 $\neg 0 = 0$ 是一个假的实公式，因此，根据实在子系统的一致性证明，它不可能有纯粹由实在公式构成的证明。

在只有一个 ε 项（例如 $\varepsilon_x A(x)$）的情况下，希尔伯特方法很容易理解：假设我们的 $\neg 0 = 0$ 理想推导包含该项。[3] 那么，所有并非实在子系统公理的公理，都只是涉及 $\varepsilon_x A(x)$ 的临界公式，即具有以下两种形式之一：

$$A(t_1) \to A(\varepsilon_x A(x)) \qquad \text{or} \qquad A(s_1) \to \varepsilon_x A(x) < s_1'.$$

取 $\neg 0 = 0$ 的假定推导，并将其中 $\varepsilon_x A(x)$ 的每次出现都替换为 0。这种统一替换会将每个命题公理、同一性公理和算术公理都变成同一公理的另一个实例；因此，根据不涉及 ε 的项和公式的有穷解释，这些公式都成为真公式。临界公式则变成以下两种形式之一：

$$A(t_2) \to A(0) \qquad \text{or} \qquad A(s_2) \to 0 < s_2'.$$

（请注意，替换之后，项 t_1 和 s_1 可能会变成不同的项 t_2、s_2，因为 $\varepsilon_x A(x)$ 可能出现在 t_1 或 s_1 中，并被替换为 0。）

右边的公式显然全都为真，因为 s_2' 的值总是大于 0。要确定左边的公式是否为真，我们应用对实公式的有穷解释。如果它们全都为真，那么我们就处于与实推导的一致性证明相同的情形。我们从实在子系统的真公理以及其他公式（将 $\varepsilon_x A(x)$ 替换到所有临界公式中所得的结果）推导出了 $\neg 0 = 0$ 这个假公式，而这些其他公式也全都为真。这是不可能的，因此，形如 $A(t_2) \to A(0)$ 的公式至少有一个为假。由于条件句只有在前件为真而后件为假时才为假，我们可以断定 $A(t_2)$ 为真（而 $A(0)$ 为假）。令 k 为项 t_2 的值。通过计算 $A(1)$、$A(2)$、……、$A(k)$，找出使 $A(n)$ 为真的最小 n。取包含 $\varepsilon_x A(x)$ 的原始理想推导，现在将所有出现的 $\varepsilon_x A(x)$ 都替换为 n。这样又得到一个推导，其依据是实在子系统的（真）公理以及形如……的公式

[3] 希尔伯特最早在《希尔伯特》（1923年）中阐述了这一方法。此后，这项工作主要由他的学生阿克曼（1925年、1940年）完成。希尔伯特与伯奈斯（1970年）在教科书中介绍了阿克曼的证明。莫泽（2006年）对阿克曼的证明作了现代阐述与分析。Tait（1965年）提出了另一种 ε-代入法。Zach（2003年、2004年）探讨了20世纪20年代使用 ε-演算进行一致性证明的历史。

$$A(t_3) \to A(\overline{n}) \qquad \text{or} \qquad A(s_3) \to \overline{n} < s_3'.$$

根据我们找到 n 的方式，我们知道 $A(n)$ 为真，因此第一类公式中的任何一个都为真。由于 n 是使 $A(x)$ 为真的数中最小的数，无论 s_3 的值 l 是什么，只要 $A(l)$ 为真，就有 $n < l + 1$，因此第二类公式也都为真。

在继续讨论一般情形之前，先作几点观察。首先，这个证明和前面对实在子系统一致性的证明都是构造性的。它们从假设我们有一个矛盾的推导（例如 $\neg 0 = 0$）出发，因此带有一丝“间接性”，这掩盖了这一点。但我们要证明的是一个否定命题：不可能存在 $\neg 0 = 0$ 的推导。否定命题的构造性证明正是采用这种形式：假设存在这样的推导，再将这一假设化归为矛盾。肯定命题及其证明都很容易改写为以一致性为推论的形式。对于实在子系统，肯定命题是：实在子系统中的每个推导都只包含真公式（“真”按我们所给出的有限主义含义来理解）。这意味着一致性，因为它表明 $\neg 0 = 0$ 不可能是实在推导的末公式。对于只包含单个 ε-项的理想推导，肯定命题是：对于每个仅使用属于单个 ε-项的临界公式来推导实公式的推导，都存在一个推导同一公式的实在推导。要证明这一结果，同样的论证也适用。从一个实公式 F 的推导开始，其中只包含属于 $\varepsilon_x A(x)$ 的临界公式。将所有 $\varepsilon_x A(x)$ 替换为 0，并检查所有临界公式是否都已被真公式替换。如果是，我们便得到了一个由真实公式推导出 F 的推导。如果不是，那么 $A(0)$ 为假，但至少有一个 $A(t_2)$ 为真：找出使 $A(n)$ 为真的最小 n，并将 $\varepsilon_x A(x)$ 改为 n。这样得到的也是一个由真实公式推导出 F 的推导。

现在唯一缺少的一步，是证明真公式 $A(t_2) \to A(0)$（或 $A(t_3) \to A(n)$）本身具有实推导。这并不难做到。关键的一步是通过对项的复杂度 t进行归纳，证明实在子系统的算术公理能够给出$t = k$的推导,–其中 k 是 t的值。综上，我们证明了一个比一致性更强的结论：理想系统对于其实在子系统是保守的，也就是说，如果 F 是一个实公式，并且在理想系统中有推导（只涉及一个 ε-项），那么 F 在实在子系统中已经有推导。一致性由此得证，因为实在子系统只能推出真公式，而 $\neg 0 = 0$ 并非真公式。

到目前为止，我们只是概述了如何证明：对于只涉及一个 ε项的推导，理想系统相对于实数是保守的。当然，理想推导可以包含任意多个 ε项。重要的是，这些 ε项本身还可以包含其他 ε项，而且它们彼此嵌套的方式可以任意复杂。举例来说，我们来考虑将一个包含两个存在量词的简单公式翻译成 ε-演算。回想一下，$\exists x\, A(x)$ 的翻译是 $A(\varepsilon_x\, A(x))$。我们依次应用这种翻译，得到 $\exists x \exists y\, A(x,\ y)$ 的翻译。首先，我们聚焦于$\exists x$ 量词：

$$\boxed{\exists x}\,\exists y\, A(\boxed{x}, y)$$

并将其替换为一个 ε-项。我们得到

$$\exists y\, A(\boxed{\varepsilon_x\, \exists z\, A(x,z)}, y).$$

请注意，我们已将 ε-项中的 $\exists y$ 替换为 $\exists z$，以避免与外部剩余的$\exists y$ 混淆。在第二步中，我们替换新的量词 $\exists z$：

$$\exists y\, A(\varepsilon_x \boxed{\exists z}\, A(x, \boxed{z}), y)$$

于是变为

$$\exists y\, A(\varepsilon_x\, A(x, \boxed{\varepsilon_z\, A(x,z)}), y).$$

最后，我们将 $\exists y$ 替换为

$$\boxed{\exists y}\, A(\varepsilon_x\, A(x, \varepsilon_z\, A(x,z)), \boxed{y})$$

相应的 ε-项，从而得到结果：

$$A(\varepsilon_x\, A(x, \varepsilon_z\, A(x,z)), \boxed{\varepsilon_y\, A(\varepsilon_x\, A(x, \varepsilon_z\, A(x,z)), y)}).$$

如你所想，在包含语言中等价物的理想系统中进行的推导可能包含非常复杂的 ε-项。例如，$\exists x \exists z\, x < y$ 的等价物将写成：

$$\varepsilon_x\ [x < \varepsilon_z\ (x < z)] < \varepsilon_y\ [\varepsilon_x\ (x < \varepsilon_z\ (x < z)) < y]\,.$$

更重要的是，就我们的目的而言，希尔伯特方法在证明保守性时会变得复杂得多。这不仅是因为在一般情况下，临界公式中的 ε-项的数量可能任意多，而且这些 ε-项还可能以复杂的方式彼此包含，而这些包含关系会影响我们必须如何为 ε-项寻找数词替代项，使所有临界公式都成为真公式，也就是实公式。希尔伯特方法的做法是，先为推导中出现的每个 ε-项猜测一个数值；如果猜测不奏效，也就是说，无法使每个临界公式都成为真公式（而这些公式随后也能在实在子系统中推导出来），就更改这个猜测。如果只出现一个 ε-项，初始猜测为 0；如果 $A(0)$ 为假，就可能将其改为使 $A(n)$ 为真的最小 n。

如果出现多个 ε 项，就会遇到第一个复杂情况。假设有两个 ε 项，$\varepsilon_x\, A(x)$ 和 $\varepsilon_y B(y)$，且每个都只有一个临界公式：

$$A(t_1) \to A(\varepsilon_x\, A(x)) \qquad \text{and} \qquad B(s_1) \to B(\varepsilon_y B(y)).$$

假设像之前一样将两者都替换为 0，得到

$$A(t_2) \to A(0) \qquad \text{and} \qquad B(s_2) \to B(0).$$

还假设 $A(t_2)$ 为真，而 $A(0)$、$B(s_2)$ 和 $B(0)$ 为假，因此第一个临界公式为假，第二个为真。沿用之前的策略，我们会将对 $\varepsilon_x A(x)$ 的猜测“修正”为使 $A(n)$ 为真的最小 n，然后重新进行替换。这将得到

$$A(t_3) \to A(\overline{n}) \qquad \text{and} \qquad B(s_3) \to B(0)$$

（我们仍将 $\varepsilon_y B(y)$ 替换为 0，因为第二个临界公式原本就为真）。现在第一个临界公式为真。注意，t_1 和 s_1 可能同时包含 $\varepsilon_x A(x)$ 和 $\varepsilon_y B(y)$。因此，在 s_1 中替换这两个 ε 项后，得到的项 s_2 和 s_3 可能不同。一种情况下，我们将 $\varepsilon_x A(x)$ 替换为 0，另一种情况下则替换为 n。因此，即使 $B(s_2)$ 为假，$B(s_3)$ 也未必为假。所以，我们改进后的猜测使第一个临界公式为真，但第二个临界公式或许为假。在这个简单的例子中，我们现在只需找出使 $B(m)$ 为真的最小 m，便可得到两个真公式

$$A(t_4) \to A(\overline{n}) \qquad B(s_4) \to B(\overline{m}).$$

即便是这个简单的例子也表明，要找到一个将数词代入 ε-项的“求解代换”，可能需要经过许多步骤。

但这并非唯一的困难，甚至也不是最重要的困难。回想一下，该系统不仅包含针对命题联结词的公理模式，也包含针对同一性的公理模式。其中一个公理模式是 $t_1 = t_2 \to s(t_1) = s(t_2)$，也就是说，值相等的项可以在项 s 中互相替换，同时保持其值不变。现在再回想一下，ε-项可能彼此包含为子项。例如，在上面的例子中（$\exists x \exists y\, A(x, y)$ 的翻译），最终我们得到一个公式，其中包含两个ε-项

$$\varepsilon_x A(x, \varepsilon_z A(x, z)) \text{ and}$$
$$\varepsilon_y A(\boxed{\varepsilon_x A(x, \varepsilon_z A(x, z))}, y),$$

其中第一个包含在第二个之中。很快就会清楚，如果不考虑哪些 ε-项包含在其他哪些项中，而是让我们的猜测直接作用于完整的 ε-项，可能会造成混乱，因此我们必须更加谨慎。例如，为简单起见，假设我们有三个 ε-项

$$\varepsilon_x A(x), \qquad \varepsilon_y B(y, \overline{n}), \qquad \text{and} \qquad \varepsilon_y B(y, \varepsilon_x A(x)),$$

而我们就简单地把 0 猜作这三者的值。接着，假设我们的推导中包含一个等号公理的实例，例如，

$$\overline{n} = \varepsilon_x A(x) \to \varepsilon_y B(y, \overline{n}) = \varepsilon_y B(y, \varepsilon_x A(x)).$$

将 ε 项替换为我们的猜测后，它就变成了 $n = 0 \to 0 = 0$。¯它的前件为假，所以我们不必担心这一点。不过，假设我们对 $\varepsilon_x A(x)$ 猜测为 0 是错的，并且我们确定 n 恰好是使 $A(n)$ 成立的最小值。新的替换会将同一公理变成 $\overline{n} = \overline{n} \to 0 = 0$。这仍然为真。再假设在下一步中，我们确定 $\varepsilon_y B(y, n)$ 的替换值不能是 $\overline{0}$，而必须是 $m > \underline{0}$。这样我们就会得到假的 $n = n \to m = 0$。这说明，我们不能把对 $\underline{\varepsilon_x} A(x)$、$\varepsilon_y B(y, n)$ 和 $\varepsilon_y B(y, \varepsilon_x A(x))$ 的猜测简单地视为彼此独立。相反，如果我们把 $\varepsilon_x A(x)$ 替换为 n，就必须始终将 $\varepsilon_y B(y, n)$ 和 $\varepsilon_y B(y, \varepsilon_x A(x))$ 替换为同一个数词。显而易见的做法是，不要为证明中出现的整个 ε 项猜测数词，而是为将嵌套项替换为数词后可能产生的任何项猜测数词。在我们的例子中，我们不应把 $\varepsilon_y B(y, \varepsilon_x A(x))$ 整体作为一个值来猜测；如果我们对 $\varepsilon_x A(x)$ 的猜测是 0，就应为 $\varepsilon_y B(y, 0)$ 猜测一个值；如果该猜测是 n，就应为 $\varepsilon_y B(y, n)$ 猜测一个值。当然，我们需要猜测的值不一定只有一个。除了 $\varepsilon_y B(y, \varepsilon_x A(x))$，我们的推导中还可能包含 $\varepsilon_y B(y, \varepsilon_z C(\overline{z}))$；如果我们对 $\varepsilon_z C(z)$ 的猜测是 m，那么我们还需要为 $\varepsilon_y B(y, m)$ 猜测一个值。

—

要详细说明阿克曼的ε-替换法如何在技术上处理所有这些问题，会让我们离题太远。只需指出，这是一个复杂的程序，它不仅需要记录推导中实际出现的 ε-项的替换，还需要记录由这些项通过对嵌套的 ε-项代入数词而产生的新项的替换。从非常宽泛的角度来说，该程序实际上处理的是所谓的 ε-类型。一个 ε-类型是一个 ε-项，它除自由变元外不含嵌套子项，并且其中没有任何自由变元出现超过一次。一个 ε-替换为每个 ε-类型指派一个数值函数，该函数具有如下性质：仅对有限多个（元组形式的）自变量取非零值。一方面，将一个 ε-类型解释为这样一个函数，使我们能够为推导中的每一个 ε-项确定一个数值；另一方面，这也解决了上面指出的困难。该程序首先从一个 ε-替换开始，该替换为所有适用的 ε-类型指派对每一个可能自变量都取值为0的函数，并在每一步中通过为其中某些函数添加新的非零值来改进它，但有时也会对某些 ε-类型重新从默认的取值为0的函数开始。请注意，至关重要的是，如此定义的 ε-替换是有限的：它由有限多个ε-类型组成，每个类型带有有限多个自变量元组及其非零值。对于所有其他（无限多个）自变量，该函数取值为零；这些不必加以记录。

在找到求解代换之前，该过程必须运行的步数远远超过推导中实际出现的 ε-项的数量，因为每一步都可能生成一个新的参数元组，并确定其非零值。由于有些这样的新猜测要求放弃先前的猜测，该过程会频繁回溯，因此必须小心避免陷入循环。重要的是，这件事是可以做到的。存在一种确定性过程，总能在有限步数后生成求解代换，并将任何涉及 ε-项的实公式的推导转换为一个不涉及此类项的推导，即实推导。此外，该过程只操作有限对象，也就是说，

符号的有限序列（例如，推导，以及从有限多个 ε-类型到有限多个自变量—值对的映射）。

4 一致性证明、归纳法与无穷

我们现在对有限主义一致性证明如何运作已有了相当清晰的认识。典型情况下，这类证明包含一个程序：将待证明一致的系统（理想系统，例如包含 ε-项和临界公式的形式算术）中的推导，转换为“安全”系统（例如不含 ε-项或量词的算术实在子系统）中具有相同末公式的推导。当然，末公式必须是安全子系统允许的公式，例如仅涉及算术运算、等号和真值函项算子的实公式。这类公式具有有限主义意义，可以通过有限主义方法判定其为真或假；而且我们可以用有限主义方法证明，安全子系统只会产生这类真公式。特别是，它无法证明 $\neg 0 = 0$，因此是一致的。通过从推导中去掉 ε-项，这类程序消除了语言中那些只有无穷主义意义的表达式，也就是涉及无限搜索或量化的表达式。从这个意义上说，一致性证明是一种从理想系统的推导中消除无穷的程序。

然而，无限性还是会在一个地方重新出现，那就是验证该过程始终有效时。我们不仅希望有一个碰巧在每种情况下都有效的过程（而且该过程本身是有限的，作用于有限表达式等），还希望验证 它确实有效。这样的验证必须使用元理论推理原则，例如归纳法。假设 P 是关于自然数的某个性质 P。对自然数进行常规归纳法，可以表述为以下形式的推理：如果对于所有自然数 n，只要对所有 $k < n$ 都有 $P(k)$，就有 $P(n)$ 成立，那么对所有 n 都有 $P(n)$ 成立。为了证明对所有 n 都有 $P(n)$ 成立，我们要证明，对于任意的 n，在假设对所有 $k < n$ 都成立的前提下，$()$ 成立。由于一致性证明并不直接针对数，而是针对项或推导之类的其他对象，因此，要使用这一原则，我们必须为正在证明其性质的表达式关联上作为“度量”或“权重”的数。

我们来看一个简单的例子。证明实在子系统一致性的部分工作，要求该系统能够证明每一个为真的实公式。为了给出这样的证明，我们必须验证许多事情都成立，例如：如果 n 是 t 的值，那么公式 $t = n$ 有一个推导；或者，如果 $n \neq m$，那么公式 $\neg n = m$ 有一个推导。我们来看看如何对后一项断言进行归纳证明。为了让事情稍微简单些，假设 $n < m$。那么我们可以写成 $m = n + l + 1$，其中 $l \geq 0$。我们来证明，对于所有 n，$\neg n = n + l + 1$ 都有一个推导。这里我们为断言“$\neg n = n + l + 1$ 有一个推导”指定的“度量”就是 n（因此它与 l 无关）。要用归纳法证明它，我们假设该断言对所有 $k < n$ 都成立，然后在证明它对 n 也成立时使用这个假设（即“归纳假设”）。

那么，令 n 为任意一个自然数。分两种情况：数 n可能为 0，也可能大于 0。在第一种情况，即 $n = 0$ 时，项$n + l + 1$ 就是$l + 1$。根据定义，$l + 1$ 与项 l'相同。因此，公式$\neg n = n + l + 1$ 与公式 $\neg 0 = l'$相同，而后者是公理模式之一，所以它有一个推导。

现在考虑第二种情况：$n > 0$。那么 $n = k + 1$，其中 $k = n - 1$。显然，$k < n$。归纳假设表明，$\neg k = k + l + 1$ 有一个推导。以下是公理：

$$\overline{k}' = \overline{k + \ell + 1}' \rightarrow \overline{k} = \overline{k + \ell + 1}$$
$$(\overline{k}' = \overline{k + \ell + 1}' \rightarrow \overline{k} = \overline{k + \ell + 1}) \rightarrow (\neg \overline{k} = \overline{k + \ell + 1} \rightarrow \neg \overline{k}' = \overline{k + \ell + 1}')$$

（第二个是逆否命题的一个实例，即 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$，这是一个重言式。）应用两次肯定前件式，我们得到 $\neg k' = k + l + 1'$ 的一个推导，它与 $\neg n = n + l + 1$ 完全相同。

为什么归纳法有效？它旨在证明对于任意 n，$P(n)$ 成立。其做法是证明：如果对于某个 $n_1 < n$，$P(n_1)$ 成立，那么 $P(n)$ 也成立；而前者又可由假设 $P(n_2)$ 对某个 $n_2 < n_1$ 成立推出，依此类推。（在这个例子中，$n_1 = n - 1$、$n_2 = n - 2$，等等。）最终，这一系列度量不断减小的断言必定会结束，因为自然数的递减序列不可能永远递减。（在我们的例子中，当到达 $P(0)$ 时就结束了；无需使用归纳假设即可证明这一点，而是因为 $\neg 0 = t'$ 是一个公理。）

自然数，如我们所说，是良序的：不存在无限递减的自然数序列。对自然数的归纳法之所以成立，是因为自然数（按其自然序 $<$）是良序的。我们之所以能断定自然数是良序的，是因为我们知道小于 n的自然数只有 n 个，因此从 n 开始的自然数递减序列在必须到达0之前至多包含 $n + 1$ 个元素（即每一步的递减都最小时：n、$n - 1$、$n - 2$、$n - 3$.....0）。对自然数的归纳法显然具有有穷的正当性，因为自然数的良序是直接显然的：自然数恰恰就是那些从0出发、经过有限次应用“+1”后继运算所能达到的数。

在我们继续考察更复杂、或许不再能有穷地得到辩护的归纳原理与良序之前，让我们先停下来，比较一下我们关于$\neg n = m$ 具有实推导的显式归纳证明，与 ε代入法中的变换过程。毕竟，后者并不是作为归纳证明来表述的，而是被勾勒为一个把推导相继变换为其他推导的过程。即便假定它如所宣称的那样有效，它与归纳法又有什么关系呢？

让我们再次考虑这个简单的例子，不过将它重新表述为一个变换过程。这个变换过程作用于 $\neg n = n + l + 1$ 的部分推导。之所以称其为部分推导，是因为其中并非每个公式都必须是公理：其中可以有一个公式属于这种形式，而它本身并非由前面的公式通过肯定前件式得到证明。事实上，公式 $\neg n = n + l + 1$ 本身就是这样一个部分推导，也是我们将要开始使用的部分推导。

它本身就是这样一个部分推导，也是我们将要开始使用的部分推导。变换过程如下。假设你有一个上述形式的部分推导，并设其中 $\neg n = n + l + 1$ 是唯一一个未通过肯定前件式得到证明的公式。如果这个公式满足 $n = 0$，那么我们已经有了其末公式的完整推导，因为此时所讨论的公式实际上是 $\neg 0 = l'$，也就是一个公理。否则，$n = k + 1$。通过在原有部分推导的开头添加以下四个公式，写出一个新的部分推导：

$$\neg \overline{k} = \overline{k + \ell + 1} \tag{1}$$

$$\overline{k}' = \overline{k + \ell + 1}' \rightarrow \overline{k} = \overline{k + \ell + 1} \tag{2}$$

$$(\overline{k}' = \overline{k + \ell + 1}' \rightarrow \overline{k} = \overline{k + \ell + 1}) \rightarrow (\neg \overline{k} = \overline{k + \ell + 1} \rightarrow \neg \overline{k}' = \overline{k + \ell + 1}') \tag{3}$$

$$\neg \overline{k} = \overline{k + \ell + 1} \rightarrow \neg \overline{k}' = \overline{k + \ell + 1}' \tag{4}$$

其中 $k = n - 1$ 如前所述。公式 2 和 3 是公理。公式 4 由 2 和 3 通过肯定前件式得到证明，而先前尚未得到证明的 $\neg n = n + l + 1$，即 $\neg k' = k + l + 1'$，则由 1 和 4 通过肯定前件式得到证明。新的部分推导中只有一个尚未得到证明的公式，即公式 1。

我们描述了一种程序，它将一个部分推导转换为一个新的部分推导，其中有一个新的、唯一尚未得到证明的公式。唯一不会产生新的部分推导的情况，是尚未得到证明的公式形如 $\neg 0 = l'$，而它是一个公理：因此，当程序停止时，我们就得到一个完整推导，其中每个公式要么是公理，要么由肯定前件式得到证明。如果我们知道这个程序总会终止，那么我们就会知道，从目标公式 $\neg n = n + l + 1$ 本身开始，它会导出一个完整且正确的推导。我们如何知道它总会终止？根据规定并检查该程序可知，所有涉及的部分推导都只包含一行形如 $\neg n = n + l + 1$、且尚未得到证明的公式。我们称这个 n 为这类部分推导的“权重”。程序将权重为 n 的部分推导替换为权重为 $k = n - 1$ 的部分推导，也就是说，权重更小的部分推导。程序所产生的部分推导序列，与其权重的递减序列相对应。由于这些权重是自然数，而自然数是良序的，因此不可能存在无限递减的权重序列，相应地，也不可能存在与之对应的无限部分推导序列。因此，程序必定会最终停止，并得到一个完整推导。

ε-代换方法带来的教训是，仅仅说明该过程本身，还不足以构成一致性（更准确地说，是保守性）证明。还需要证明该过程总能终止。如果我们能够为所产生的推导赋予权重，使每一步都产生一个权重更小的新推导，就可以给出这样的证明。只有当证明中的所有 ε-项和临界公式都被移除并替换为数词时，该过程才会停止；也就是说，我们已经得到一个具有相同末公式的实推导。遗憾的是，所需的“权重”远比单个数字复杂。例如，

我们不能简单地将 ε-项的数量或临界公式的数量指定为权重，因为在求解 ε-代换的过程中，这些数量很可能增加。

我们甚至可以考虑哪种度量作为合适的权重？一种仍相对简单的度量，是由自然数构成的数对 n_1, n_2，并采用以下次序：$n_1, n_2 < k_1, k_2$，当且仅当以下任一条件成立：

1. $n_1 = k_1$ 但 $n_2 < k_2$，或
2. $n_1 < k_1$

例如，按照此顺序，$1, 2 < 1, 6$，依据的是（1）；而 $1, 6 < 2, 1$，依据的是（2）。不难看出，自然数对在此顺序下是良序的。假设一个递减序列以 n_1, n_2 开始。利用条件（1），我们可以通过减小第二个分量而保持第一个分量不变，转到一个更小的数对，即转到 n_1, k_2，其中 $k_2 < n_2$。但这样的数只有有限多个。最终我们必须使用条件（2）来减小第一个分量，即转到 k_1, k_2，其中 $k_1 < n_1$。重要的是，发生这种情况时，k_2 不受限制；它可以是任意自然数，不必是 $< n_2$。无论 k_2 是什么，小于它的数都只有有限多个，因此最终我们必须再次使用条件（2）来减小第一个分量。不过，n_1 也是一个自然数，因此第一个分量也只能减小有限次。

例如，如果我们想证明，只要 t 是一个包含 $+$（但不包含 $\times$）的项，而 l 是 t 的值，那么 $t = l$ 就有一个实推导，就会采用这种对序对的排序。我们的证明将像之前一样进行。我们从一个部分推导开始，例如 $t = l$ 本身。逐步在这个部分推导的开头添加公式，直到得到一个完整推导，其中每个公式要么是公理，要么由肯定前件式得到证明。每个部分推导都只包含一行未获证明的公式，其形式为 $t = l$（项 t 会变化，但值 l 保持不变）。可以为每个这样的推导赋予一个形如 n_1, n_2 的权重。不详述具体细节，我们可以将 n_1 取为 t 中 $+$ 出现的次数，将 n_2 取为所有作为 $+$ 右参数出现的数词 k 的值之和。例如，$(\overline{3} + (\overline{10} + \overline{1})) = \overline{14}$ 的权重将是 2，1。每一步都会产生一个新的推导，其中第一分量保持不变而第二分量减小（例如，未获证明的公式此时可能变为 $(3 + (10 + 0)') = 14$，其权重为 2，0），或者第一分量减小（下一步我们将得到 $(3 + 11) = 14$，其权重为 1，11）。

带有相应序作为权重的数对集合，比带有自然序的自然数更复杂。对象本身仍然是有限的（只是数对）。序本身也是有限的（即，无须进行任何无界搜索或不受限制的量化，就能判定 $n_1, n_2 < k_1, k_2$ 是否成立）。可以看出，这种序是良序（第一分量只能有限次地递减，而每次递减时，第二分量也只能有限次地递减）。综合这些理由，可以将数对上的归纳视为有限的；此外，所描述的将 $t = l$ 转化为其一个实推导的过程，也可以视为一种有限过程，而且可以看出它总会终止，

并且可以通过有限方法看出它总会终止。但数对上的归纳还不足以证明 ε-替换过程总会终止。

为了了解证明 ε- 替换终止所需的良序有多复杂，可以考虑一种衡量良序复杂程度的标准方法。集合论中的序数概念就提供了这样一种方法。序数是集合论中无穷数的两种表现形式之一，另一种是基数。基数度量集合（包括无限集合）的大小，而序数度量良序的长度。集合论学家定义了序数上的算术运算。其中包括后继函数（“+1”）、加法、乘法和幂运算。任何良序都可用一个序数来度量。最简单的良序是只含一个元素的集合。这样的良序的序数都是 1。如果某个良序的序数是 α，那么在其“末尾”添加一个元素后，所得良序的序数就是 $\alpha + 1$。例如，含有 1、2、3.....个元素的良序，例如，

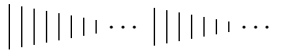
$$a_1 \qquad a_1 < a_2 \qquad a_1 < a_2 < a_3 \qquad \ldots$$

序数为 1、2、3，.....

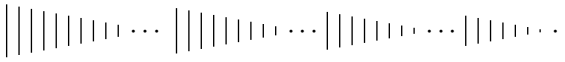
最小的无限良序是自然数的良序，其序数为 ω。我们可以用图形表示这样的良序：



越靠左的“火柴棒”表示良序中小于右侧元素的元素，尽管随着元素在序中的位置递增，火柴棒的长度却在缩短。序数的加法对应于将良序串接在一起，例如，$\omega + \omega$ 可以表示为



序数的乘法，例如 $\alpha \cdot \beta$，对应于用一个完整的、对应于 α的良序，替换由 β 度量的良序中的每个元素。例如，要得到 $\omega \cdot 2$，取两个元素，比如 $0 < 1$，并将每个元素替换为一份自然数的副本。我们会得到与上面所示相同的良序——这并不意外，因为我们预期 $\omega + \omega$ 和 $\omega \cdot 2$相同。[4] 序数为 $\omega \cdot \omega$（或ω^2）的良序则可表示为



我们现在已经能够理解，上文定义的数对良序所对应的序数是 ω^2。每个数对 n_1, n_2 在我们的火柴棍图示中都有其位置：第一分量 n_1 告诉你这个数对属于哪个

[4] 注意，序数的加法和乘法不满足交换律。例如，$2 \cdot \omega$ 对应于这样一种良序：将每个自然数（ω）替换为两个副本，其中第一个小于第二个。但良序
$0_1 < 0_2 < 1_1 < 1_2 < 2_1 < 2_2 < \ldots$ 与自然数本身并无实质区别，其序数也为 ω。

ω-块，第二分量则告诉你它位于该 ω-块中的什么位置。

从集合论的角度看，序数是某些类型的无限集合。假设集合论成立，我们也可以用类似方式为上述过程辩护：把序数本身赋作权重，即给此前已赋予数对 n_1，n_2 的每个部分推导赋予序数 $\omega \cdot n_1 + n_2$。这些序数都小于 ω^2。由于 ω^2 和任何序数一样，本身也是一个良序集（事实上，从集合论角度说，它就是所有小于它的序数构成的集合），因此我们也可以由此得出结论：我们的过程总会终止。这并非一种有限主义论证，因为它用到了无限对象（集合论序数）以及一条由无限主义集合论确立的事实（所有序数都是良序的）。要以有限主义方式证明我们的过程会终止，我们必须像上文那样给出有限主义论证。为方便记述，证明论学家常常说得仿佛自己正在这样做，也就是把序数用作权重，并通过归纳法“直到 α”。但他们真正的意思（或者至少应该表达的意思）是，他们谈论的是序数的记号，例如 3，5 这样的数对，或“$\omega \cdot 3 + 5$”这样的符号串（以及定义在这些记号上的、有限主义可接受的序关系，例如我们上文针对数对描述的那种序关系）。

我们上面的过程省略了项 $\underline{t}$ 中的乘法符号 $\times$。当然，即使 t 同时包含 $+$ 和 $\times$，只要1是 t的值，$t = 1$也有实推导。证明这一点，也就是找到相应过程并最终产生这种推导，会更加复杂。我们需要使用更复杂的度量来证明该过程会终止。我们可以使用数的三元组n_1, n_2, n_3，并按如下方式排序：$n_1, n_2, n_3 < k_1, k_2, k_3$，当且仅当 $n_1 < k_1$（按通常意义理解 $<$），或者 $n_1 = k_1$ 且$n_2, n_3 < k_2, k_3$（按我们赋予数对 $<$的意义理解）。这仍然是有限主义的。我们可以这样确信这一点：如果一个递减三元组序列以n_1, n_2, n_3开头，那么第一分量只能递减有限次（因为n_1 是有限的）。每次发生这种情况时，第二和第三分量都可能变得任意大。但正如我们所知，数对是良序的，因此在第一分量递减的有限多次情形中，每次由第二和第三分量组成的数对也只能递减有限次。

与数字三元组对应的序数是 ω^3。我们可以用这种方式继续构造更复杂的序，例如，数字四元组对应ω^4，以此类推。正如处理三元组时那样，我们可以沿着这一层级逐步“搭建”，构造出越来越复杂的良序，并给出有限论证，证明这些度量是良序的。但我们无法用同样的方法“搭建”到下一个复杂度层级，即 ω^ω。我们仍然可以构造有限对象，并在其上定义一个有限序，使之对应序数 ω^ω。（在这种情况下，度量可以是长度任意但有限的自然数序列。）

即使这种复杂的度量，也不足以证明 ε-代换方法会终止。要做到这一点，需要一组度量，或者如证明论学家所称的“序数记号”，它们对应于序数 ε_0。回想一下，ε-代换方法通过不断改进某些函数的“猜测”来进行，这些函数适用于与推导相关的所有 ε-“类型”。每个这样的猜测都由一个有限的 ε-类型序列，以及每个类型对应的有限个自变量—值对组成

。正是这些整体性的猜测各自被赋予一个序数记号。证明该方法会终止，就是要证明程序中的每一步都会产生一个新的 ε-代换，其序数记号小于前一个。如果我们知道这些序数记号是良序的，就知道该程序不可能永远运行下去。

序数 ε_0 是所有 ω、 ω^ω、 ω^{ω^ω}、.....中最大的序数。再次强调，描述一些有限对象，并为它们定义一个可判定的序，使其具有这一序数，并不太困难。困难之处，或许也是不可能之处，在于论证这一序是良序，且经得起有穷主义的审视。哪些序数记号可以通过有穷主义方法加以论证，一直是文献中争论的话题。例如，Tait（1981）提出了一个颇具影响力的论证，认为有穷推理的极限由 ω^ω 刻画。另一方面，Takeuti （ 1975，§11 ）尝试为一直到 ε_0 的归纳法提供有限主义论证。[5]

5 结论

关于理想的无限数学形式系统一致性的证明论结果，通常通过将这类系统中的推导转换为其他问题较少的形式系统中的推导来获得。“问题较少”意味着，可以独立地看出目标系统是一致的。这类转换通常确立的不仅仅是一致性：它们还确立了实在系统中公式的保守性。例如，它们会将实公式的理想推导转换为同一公式的实推导。此外，还可以通过有穷主义方法证明，实在系统只能推出为真的实公式，也就是说，该系统是可靠的。由于矛盾并非真命题，实在系统的可靠性便蕴涵其一致性。如果还能看出这种转换总是会产生一个实推导，也就是说，总会终止，那么这就确立了理想系统的一致性。

这一证明论论证所涉及的变换，会从证明中去除在有限主义上有问题的元素。在 ε-代换法的情形下，这一点尤其明显，因为唯一可疑的元素是 ε-项。代换法会用数词替换这些项。对于其他系统和证明变换，情况就不那么明晰了。例如，在标准皮亚诺算术 **PA** 中，Gentzen 开创的常规证明会从实公式的推导中去除归纳规则的应用以及量词。[6]

所有这类变换都非常复杂，而证明它们会终止则需要“权重”，也就是对应于相当大序数的序数记号。对于一阶算术系统，这个序数是 ε_0。这并非偶然，也不是因为缺乏更好的证明思路。Gentzen（1943）展示了如何在算术中将序数记号本身形式化，也就是说，存在一个句子 $I(\varepsilon_0)$

[5] 参见 Zach（2003），了解序数记号在早期使用中如何超出 ω^ω；另见阿克曼（1925）。关于有限良序和不超过 ε_0 的序数记号的深入讨论，见 Mancosu 等人（2021）第 8 章。Darnell 和 Thomas-Bolduc（2022）讨论了 Takeuti 对 ε_0 的论证。[6] Gentzen 方法的详细证明见 Mancosu 等人（2021）。

一阶算术的句子，它“断言”直到 ε_0 的序数记号是良序的。[7]他还证明，皮亚诺算术可以推出命题 $I(\varepsilon_0) \to \mathrm{Con}(\mathbf{PA})$，也就是说，“直到 ε_0 的归纳法”蕴含 **PA** 的一致性。根据哥德尔第二不完备定理，**PA** 不能证明自身的一致性，因此它无法证明 $I(\varepsilon_0)$。与此同时，对于 $\alpha < \varepsilon_0$，**PA** 确实能证明 $I(\alpha)$（只要 α 的序数记号以同样直接的方式表示）。同样，根据第二不完备定理，没有更小的 α 足以证明**PA** 的一致性。否则，预期这样的论证也能在 **PA** 中形式化，于是 **PA** 就会同时推出$I(\alpha)$ 和 $I(\alpha) \to \mathrm{Con}(\mathbf{PA})$，这与第二不完备定理矛盾。

证明论方法以及为此使用的序数记号系统，都是数学智慧的真正杰作。然而，这些方法在多大程度上能够支持有关理想数学可靠性的哲学结论，仍是一个有待讨论的问题。我们已经看到，它们如何从理想推导中去除“理想”对象，即无限对象（的表达式）。不过，它们并未消除无穷的所有痕迹，也未消除无穷推理。无穷推理确实仍发挥作用之处，在于沿所用序数记号进行归纳法的论证，也就是说，证明赋予推导的权重是良序的。问题并不在于这些权重本身或其排序在有限意义上值得怀疑；它们并非如此。值得质疑的是，仅凭有限方法是否足以确立它们是良序的。

致谢。感谢 Paolo Mancosu 和 Koray Akc¸ag¨uner 对本文草稿提出意见。本文相关内容曾在巴黎第一大学的“Infini math´ematique”研讨会、维也纳大学的 Logic Caf´e、图宾根大学的*G¨odelandKant onMathematics and Physics*研讨会，以及里耶卡大学的*Logic in Philosophy:Incompleteness and Intuition* 研讨会上报告。感谢各位组织者和听众提出的问题和意见。

参考文献

阿克曼 W（1925年）借助希尔伯特的无矛盾性理论为“排中律”辩护。《数学年刊》93(1):1–36，数字对象唯一标识符 10.1007/BF01449946 阿克曼 W（1940年）论数论的无矛盾性。《数学年刊》117(1):162–194，数字对象唯一标识符 10.1007/BF01450016 Avigad J、ZachR（2024）ε演算。载于：Zalta EN（编）《斯坦福哲学百科全书》，2024年秋季版，形而上学研究实验室，斯坦福大学，网址 https://plato.stanford.edu/entries/epsilon-calculus,

[7] 序数记号的形式化问题颇为微妙；正如 Kreisel（1976）所强调的，这里提到的结果确实取决于算术中记号的定义，而不只是序数本身。这里提到的结果可见于教科书，例如 Takeuti（1975）。

Darnell E、Thomas-Bolduc A（2022）竹内的良序证明：一种易于理解的重构。《澳大利亚逻辑学杂志》19(1)，数字对象唯一标识符 10.26686/ajl.v19i1.5911 Detlefsen M（1986）《希尔伯特纲领：数学工具主义论述》。Reidel，多德雷赫特 Ewald WB（编）（1996）《从康德到希尔伯特：数学基础原始文献选编》第2卷。牛津大学出版社，牛津 Gentzen G（1943）纯粹数论中超限归纳起始实例的可证明性与不可证明性。《数学年刊》119(1):140–161，数字对象唯一标识符 10.1007/BF01564760，英文译本见（Gentzen，1969，第287–308页），Gentzen G（1969）《格哈德·根岑论文集》。North-Holland，阿姆斯特丹 Hilbert D （1923 年）数学的逻辑基础。《数学年刊》 88(1–2):151–165，数字对象唯一标识符 10.1007/BF01448445，译文见（Ewald，1996，第1134–1148页）Hilbert D、Bernays P（1970年）《数学基础》第2卷，第2版。施普林格，柏林，数字对象唯一标识符 10.1007/978-3-642-86896-2 Kreisel G（1958）希尔伯特纲领。《辩证法》12(3-4):346–372，数字对象唯一标识符 10.1111/j.1746-8361.1958.tb01469.x Kreisel G（1976）证明论如何获得并继续获得其序数。《德国数学家协会年报》78:177–223 Mancosu P、Galvan S、Zach R（2021）《证明论导论：规范化、切消去与一致性证明》。牛津大学出版社，牛津，数字对象唯一标识符 10.1093/oso/9780192895936.001.0001 Moser G（2006）阿克曼代换法（改编版）。《纯粹与应用逻辑年刊》142(1–3):1–18，数字对象唯一标识符 10.1016/j.apal.2005.09.016 Tait WW（1965）代换法。《符号逻辑杂志》30(02):175–192，数字对象唯一标识符 10.2307/2270133 Tait WW（1981）有限主义。《哲学杂志》78(9):524–546，数字对象唯一标识符 10.2307/2026089 Takeuti G（1975）《证明论》，第1版。《逻辑研究》81，North-Holland，阿姆斯特丹 Zach R（2003）有限主义的实践：希尔伯特纲领中的ε演算与一致性证明。《综合》137(1/2):211–259，数字对象唯一标识符10.1023/A:1026247421383，Zach R（2004）希尔伯特的“失败的¨证明”、第一ε定理与一致性证明。《逻辑史与逻辑哲学》25(2):79–94，数字对象唯一标识符 10.1080/01445340310001606930，Zach R（2007）希尔伯特纲领的过去与现在。载于：Jacquette D（编）逻辑哲学，《科学哲学手册》第5卷，North-Holland，阿姆斯特丹，第411–447页，数字对象唯一标识符 10.1016/B978-044451541-4/50014-2，Zach R（2023）希尔伯特纲领。载于：Zalta EN、Nodelman U（编）《斯坦福哲学百科全书》，2023年冬季版，网址 https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program