arXiv:2602.12191v1 [math.GR] 12 Feb 2026

映射类群无穷远处的高连通性

Michael Mihalik

2026年2月13日

摘要

带边界分支和 punctures 的曲面映射类群的无穷远处高连通性，除了亏格为 3 和 4 的闭曲面的映射类群外，均已得到理解。本文证明了一个适用于有限表示群的关于无穷远处单连通性的一般结果，由此可推出所有亏格为 ≥ 3 的闭曲面的映射类群在无穷远处均为单连通。由于这些群是对偶群，Proper Hurewicz定理意味着它们在无穷远处是 $(n-2)$-连通的，其中 n 是群的维数。结合这一结果与此前的研究，我们给出了所有映射类群及其无穷远处连通性的完整列表。

1 引言

无穷远处单连通性或许是有限表示群和开流形最重要的渐近不变量。对于群而言，它是准等距不变量 [Bri93]。对于维数为 ≥ 3 的流形，这一不变量完全决定可缩开流形是否与欧几里得空间同胚；结合 Proper Hurewicz定理，还可用于确定某些群的无穷远处高连通性。维数为 ≥ 3 的开可缩（拓扑、可微或 PL）流形与欧几里得空间同胚，当且仅当它在无穷远处单连通。这一结果汇集了多位作者的工作。J. Stallings 首先证明了这一结果 [Sta62] ，针对

维数为 ≥ 5的 PL流形。E. Luft [Luf67] 和 L. Sibenmann [Sie68]给出了Stallings定理的拓扑版本。随着三维和四维的庞加莱猜想得到证明，这些结果被推广至三维（见 [HP70]和 [HP71]）以及四维（见 M. Freedmann 的推论 1.2 [Fre82]）。M. Davis [Dav83]利用直角考克斯特群构造了基本群无限的闭流形，其维数为$n \geq 4$，这些流形的万有覆盖可缩，但与$\mathbb{R}^n$不同胚。Davis 通过证明这些基本群在无穷远处不单连通实现了这一点。

下面是我们的主定理：

定理 1.1 假设群 G 有有限表示 $\langle S : R\rangle$ 并且G 包含一个秩为 ≥ 3 的自由阿贝尔子群 A，其自由生成集为 T，且满足 *(1)* 和 *(2)*。那么 G 在无穷远处单连通。

(1) 对于 $r \in R$，存在 $t_r \in T$，使得 t_r 与 r的每个字母都交换。*(2)* 如果 $r \in R$ 的字母是 $s \in S$，那么存在某个 $z \in T - \{t_r\}$ 与 s交换。

首先注意，如果 $\langle S : R\rangle$ 是群的一个有限表示，并且 $s \in S$ 没有出现在 R的任何关系中，那么 G分解为自由积 $\mathbb{Z}_s * \langle S - \{s\}\rangle$，并且 G 在无穷远处单连通，当且仅当 $\langle S - \{s\}\rangle$ 在无穷远处单连通。另一方面，如果 $\langle S : R\rangle$ 满足定理 1.1 的假设，并且对每个 $s \in S$，都存在 $r_s \in R$，使得 s 是 r_s的一个字母，那么 G是单端的（见 §5）。

该定理的主要应用对象是映射类群。设$F = F_{gr}^s$ 是一个亏格为 g、带有 s 个punctures和 r 个边界分支的可定向曲面。映射类群 Γ_{gr}^s 是 F 上保定向微分同胚的同伦类所成的群；这些微分同胚逐个保持 F 中的punctures不变，并且在 ∂F上限制为恒等映射。这里的同伦逐点固定 ∂F。由20世纪60年代的几何学结果（W. Baily [Bai60]和 Deligne-Mumford [DM69]）可知，Γ_g^0,0是有限生成表示的。（参见 [FM12], P128）。另请参见 [McC75] 以及 N. Ivanov 手稿《映射类群》（1998年12月21日）中的定理 4.3.D: https://s3.amazonaws.com/nikolaivivanov/Ivanov1999MappingClassGroups.pdf

定理1.1的一个直接推论是：

推论 1.2 亏格为$g \geq 3$ 的闭曲面的映射类群在无穷远处单连通。

这些群是维数为 $4g-5$ 的对偶群。结合推论1.2 和 Proper Hurewicz定理（[定理 17.1。6, [Geo08]]）可知，它们在无穷远处是 $4g-7$ 连通的。对于 $g \geq 5$，已知闭曲面的映射类群满足比无穷远处单连通性更强的条件（见定理 3。3, [ABD+12]]）。证明该结果所采用的方法与我们主定理的证明有相似之处。

除 Γ^0_3,0 和 Γ^0_4,0 之外的映射类群的无穷远处连通性已由 [定理 2.4.55, [Mih]] 建立。对于 $2g+s+t>2$，定义$d(g,0,0) = 4g-5$；当 $g>0$ 且 $r+s>0$时，$d(g, r, s) = 4g+2r+s-4$；以及$d(0,r,s) = 2r+s-3$。结合我们的结果可得：

定理 1.3 令 $\Gamma^s_{g,r}$ 为亏格为 g、具有 s 个 *punctures* 和 r 个边界分支的曲面的映射类群。

1) $\Gamma^s_{g,r}$ 有限，当且仅当 $g=0, r=0$ 和 $s\leq 3$，或 $g=0, r=1$和 $s=0$。

2) $\Gamma^s_{g,r}$ 是无限群，几乎自由（因而无穷远处单连通），当且仅当 $(g,r,s) \in \{$ (0、0、4)、(0、1、1)、(0、1、2)、(0、2、0)、(1、0、0)、(1、0、1)$\}$。

3) $\Gamma^s_{g,\ r}$ 是两个非平凡有限生成自由群的虚延拓，当且仅当 $(g,r,s) \in \{$ $(0,\ 0,\ 5)$，$(0,\ 1,\ 3)$，$(0,\ 2,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 2)\}$。在这种情况下，$\Gamma^s_{g,\ r}$ 是单端且无穷远处半稳定，但不是无穷远处单连通。

4) 否则，$\Gamma^s_{g,\ r}$ 是 $d(g,r,s)-2$ 在无穷远处连通的。特别地，其余所有映射类群都是单端且无穷远处单连通。

我们先引入一些记号，并在§2中给出有限表示群的无穷远处单连通性和范坎彭图的基本定义。在§3中，我们建立了四个主要的代数引理。在§4中，我们概述论证过程。从我们群的 Cayley 2-复形中一条简单闭曲线的范坎彭图 V出发，我们运用§3 中的引理，向 Cayley 2-复形附加 3-胞腔，并 V。完成后 V及其 3-胞腔将构成一个三维球 B^3，我们再将这个三维球映射到我们的 Cayley 三维复形中，使得在 $\partial B^3 - int(V)$ 上，所有胞腔都映射到空间中“很远”的地方。由此便证明了我们的空间和群在无穷远处单连通。我们在§5中证明主定理。在 ≥ 3中给出了亏格为 [Ger01]的闭曲面的映射类群的有用表示，详见§6。我们指出这些表示如何满足主定理的假设，从而证明这些群在无穷远处单连通。

致谢：我们感谢 Dan Margalit 和 Denis Osin 提供的帮助。

2 无穷远处的单连通性与范·坎彭图

若对每个紧集 $C \subset X$，都存在一个紧集 $D \subset X$，使得 $X - D$ 中的环路在 $X - C$ 中同伦平凡，则称拓扑空间 X 无穷远处单连通。设 X 是局部有限且连通的 CW复形。若 A 是 X 的子复形，则定义 $St(A)$（即 A 的星形）为 X 的（满）子复形，其顶点集由 A 的顶点集以及所有与 A 的某个顶点相连的顶点组成。若 X 的某个胞腔的所有顶点都属于 A，则该胞腔属于 $St(A)$。因此，$St(A)$ 类似于以 A 为中心、半径为 1 的球。归纳地，对所有整数 $n \geq 1$ 定义 $St^n(A) = St(St^{n-1}(A)$。若 v 和 w 是 X 的顶点，则 $v \in St^n(w)$ 当且仅当 X 中存在一条连接 v 和 w、长度为 $\leq n$ 的边路径。不难看出，X 无穷远处单连通，当且仅当对某个（任意一个）顶点 $* \in X$ 以及任意整数 $n > 0$，存在一个整数 $M(n)$，使得 $X - St^{M(n)}(*)$ 中的边路径环在 $X - St^n(*)$ 中同伦平凡。本文余下部分将以此作为无穷远处单连通的定义。若存在一个连通有限复形 Y，满足 $\pi_1(Y) = G$，则称有限表示群 G 无穷远处单连通；这里，Y 的万有覆盖无穷远处单连通。若 $\mathcal{P} = \langle S : R \rangle$ 是群 G 的一个有限表示，则令 $\Gamma(\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{P}$ 的 Cayley 2-复形。因此，$\Gamma(\mathcal{P})$ 的顶点集为 G；$\Gamma(\mathcal{P})$ 的 1-骨架是相对于 S 的 G 的凯莱图（因此每条边都有方向，并标记为 S 中的一个元素）。对每个顶点 $v \in \Gamma(\mathcal{P})$，每个 $r \in R$ 都对应一个 2-胞腔，其边界边路径标记为 r。空间 $\Gamma(\mathcal{P})$ 是单连通的，并且 G 通过覆盖变换在 $\Gamma(\mathcal{P})$ 上（从左侧）自由且余紧地作用。因此，要证明 G 无穷远处单连通，只需证明 $\Gamma(\mathcal{P})$ 无穷远处单连通。事实上，若 $*$ 是 $\Gamma(\mathcal{P})$ 的单位元顶点，则 G 无穷远处单连通，当且仅当对任意整数 n，都存在一个整数 $M(n)$，使得 $\Gamma(\mathcal{P}) - St^{M(n)}(*)$ 中任意边路径环在 $\Gamma(\mathcal{P}) - St(*)$ 中同伦平凡。

令 $F(S)$ 为由集合 S和 q生成的自由群：$F(X) \to G = \langle S : R \rangle$是商映射，对每个 $s \in S$ 都将 $s \to s$ 映射到相应元素。q 的核是 $N(R)$，即 $F(S)$ 中 R的正规闭包。$N(R)$ 中的每个元素都是 R中元素的共轭元之积，因此，如果 $a \in N(R)$ 在 $F(S)$ 中是约化字，那么就存在一个以 a 为对象的平面图 $V(a)$，称为 a的范坎彭图。如果 $a = b_1 r_1 b_1^{-1} \cdots b_n r_n b_n^{-1} \in N(R)$（其中 $r_i \in R^{\pm 1}$），只需画出显然的

平面图：对每个 $b_i r_i b_i^{-1}$ ，以基点 $*$ 为起点，按 $*$ 周围的圆周顺序排列。然后将形如 tt^{-1} 的连续字母“折叠”起来。所得平面图 $V(a)$ 的边界标记为 a 的约化字；每条边都标记为 $S^{\pm 1}$ 中的一个元素，每个 2-胞腔都标记为 R 中的一个元素。给定 $\Gamma(\mathcal{P})$ 的一个顶点 $v(\in G)$，存在一个显然的映射，将 $V(a)$ 映射到 $\Gamma(\mathcal{P})$，并将 $*$ 映射到 v。

假设 α 是 $\Gamma(\mathcal{P})-St^{M(n)}(*)$ 中的一个边路径环，并且 α 的每个简单闭子环在 $\Gamma(\mathcal{P})-St^{n}(*)$ 中都是同伦平凡的，那么 α 在 $\Gamma(\mathcal{P})-St^{n}(*)$ 中也是同伦平凡的。因此，在证明 G 的无穷远处单连通性时，我们只需考虑简单闭曲线。若 α 是 $\Gamma(\mathcal{P})-St^{M(n)}(*)$ 中的一条简单闭曲线，则令 $w(\alpha) \in N(R)$ 为其边路径标记。范坎彭图 $V=V(w(\alpha))$ 是一个二维圆盘，其边界是标记为 $w(\alpha)$ 的简单边路径环。每个二维胞腔的边界都由 R 中的一个元素标记。存在一个映射 $Q: V \to \Gamma(\mathcal{P})$，它将 V 的边界映射到 α，并将 V 的每个顶点、边和二维胞腔分别映射到 $\Gamma(\mathcal{P})$ 的一个顶点、边和二维胞腔。为方便起见，我们用它们在 Q 下的像来标记 V 的顶点、边和二维胞腔。我们只使用 $Q(v)(=v)$，以明确我们处于 $\Gamma(\mathcal{P})$ 中。

3 主要引理

本节中， G 是一个具有有限生成集 $S=\{s_1, \dots s_n\}$的群。令 Γ为相对于 S 的 G 的凯莱图，并令 $*$ 为 Γ的单位元顶点。如果$x \in \{s_1^{\pm 1}, \dots s_n^{\pm 1}\}$ 具有无限阶，则令 r_x 为 Γ中的边路径射线，它从 $*$ 出发，且每条边均标记为 x；令 l_x 为 $*$ 处的边路径直线，且每条边均标记为 x。注意，若 v（$\in G$）是 Γ的一个顶点，则 $v \cdot r_x$ 是 v 处所有边均标记为 x的边路径射线。若 v 和 w 是 Γ 的顶点（ G 的元素），则 d（v, w）定义为它们之间在 Γ中的最短路径长度。对于 $g \in G$ ，我们定义 $|g|=d$（$g, *$），其中
$*$ 是 Γ的单位元顶点。若 $A \subset S$，且 $v^{-1}w \in \langle A \rangle$ ，则 d_A（v, w）是 v 与 w之间一条最短边路径的长度，该路径的每条边都标记为 $A^{\pm 1}$的一个元素。对 $a \in A$，定义 $|a|_A = d_A$（$a, *$）。

接下来假设 $\{x, y, z\} \subset S^{\pm 1}$ 生成了 G 的一个与 $\mathbb{Z}^3$同构的子群。将半平面 $P(x^+,\ y)$（分别将 $P(x^-,\ y)$）定义为 Γ 的全子图，其顶点属于集合 $\{x^i y^j \mid i \geq 0\}$ （分别属于 $i \leq 0$）。注意，若 v 是 Γ 的一个顶点，则

$$v \cdot l_y = (v \cdot P(x^+, y)) \cap (v \cdot P(x^-, y))$$

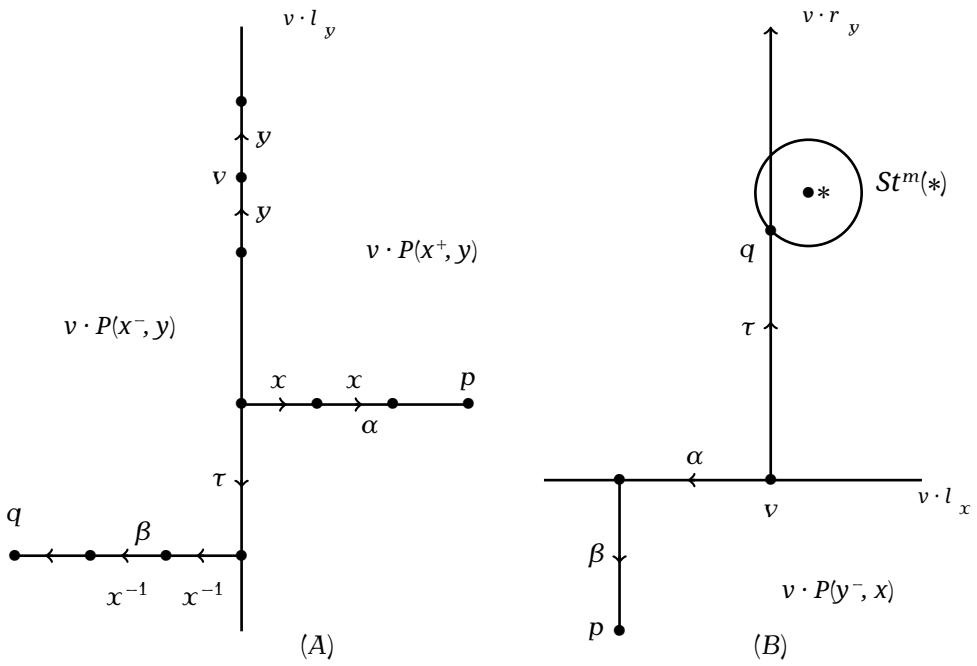


图1：半平面

对于任意 $p \in v \cdot P(x^+,\ y)$（分别对于 $q \in v \cdot P(x^-,\ y)$），都存在一条从 $v \cdot l_y$ 到 p（分别到 q）的边路径，且每条边的边标签均等于 x（分别等于x^{-1}）。将半空间 $R(x^+,\ y,\ z)$（分别将 $R(x^-,\ y,\ z)$）定义为 Γ 的全子图，其顶点属于集合 $\{x^i y^j z^k \mid i \geq 0\}$（分别属于$i \leq 0$）。

引理 3.1 给定一个整数 m，存在一个整数 $M_1(m)$，使得如果$\{x, y\} \subset S$满足 $\{x, y\}$ 生成一个与 $\mathbb{Z}^2$同构的 G 子群，并且$v \in G$ 满足 $(v \cdot l_y) \cap St^{M_1(m)}(*) = \emptyset$，那么半平面$v \cdot P(x^+, y)$ 和 $v \cdot P(x^-, y)$ 中至多一个与 $St^m(*)$相交。

证明：满足子群$\langle x, y\rangle$ 与 $\mathbb{Z}^2$同构的有序对 $x, y \in S$ 只有有限多个。因此，只需对其中一个这样的有序对证明引理即可。满足 $|a| \leq 2m$的元素 $a \in \langle x, y\rangle$ 只有有限多个。对每个这样的元素，选取 $L_1(m)$，使得 $|a|_{\{x,y\}} < L_1(m)$。定义$M_1(m) = L_1(m) + m$，并假设 $(v \cdot l_y) \cap St^{M_1(m)}(*) = \emptyset$。（见图 1(A)。）如果 $p \in (v \cdot P(x^+, y)) \cap St^m(*)$，那么在 $v \cdot P(x^+, y)$中存在一条从 $v \cdot l_y$ 到 p 的边路径 α，且每条边都标记为 x。注意，$|\alpha| \geq L_1(m)$（因为$(v \cdot l_y) \cap St^{L_1(m)}(St^m(*)) = \emptyset$，且 $p \in St^m(*)$）。如果 $q \in (v \cdot P(x^-, y)) \cap St^m(*)$，那么在 $v \cdot P(x^-, y)$中存在一条从 $v \cdot l_y$到 q的边路径 β，且每条边都标记为

x^{-1}。注意，$|\beta| \geq L_1(m)$。如果 τ 是 $v \cdot l_y$ 中从 α 的起点到 β 的起点的最短边路径，那么从 p 到 q的边路径（α^{-1}，τ，β）在字母 x，y中是测地线，其长度为 $|\alpha| + |\tau| + |\beta| > 2L_1(m) + |\tau|(>L_1(m))$。这是不可能的，因为 $d(p, q) \leq 2m$ 且 $d_{\{x,y\}}(p, q) > L_1(m)$。□

引理 3.2 假设 $\{x, y\} \subset S$ 使得 $\{x, y\}$ 生成G 的一个与 $\mathbb{Z}^2$同构的子群。若 $v \in \Gamma - St^{M_1(m)}(*)$ 且 $(v \cdot r_y) \cap St^m(*) \neq \emptyset$，则 $(v \cdot P(y^-, x)) \cap St^m(*) = \emptyset$。特别地，对于 $n \leq 0$，$(vy^n \cdot l_x) \cap St^m(*) = \emptyset$，且 $v \cdot r_{y^{-1}} \cap St^m(*) = \emptyset$。

证明：回顾一下，$M_1(m) = L_1(m) + m$，且若 $d(p, q) \leq 2m$，并且 $q \in p \cdot \langle x, y \rangle$，则 $d_{\{x,y\}}(p, q) < L_1(m)$。设 q 是 $(v \cdot r_y) \cap St^m(*)$ 的一个顶点。于是，从 v 沿着 $v \cdot r_y$ 到 q 的边路径 τ，其每条边的标签都是 y，长度为$> L_1(m)$。（见图1(B)。）设 $p \in (v \cdot P(y^-, x)) \cap St^m(*)$。从 v 到 p 的一条 (x, y)-测地线形式为 (α, β)，其中 α 的每条边都标记为 x，或者每条边都标记为 x^{-1}，且 β 的每条边都标记为 y^{-1}。边路径 $(\tau^{-1}, \alpha, \beta)$ 是一条从 q到 p的 (x, y)-测地线。但这条 (x, y)-测地线的长度为 $\geq L_1(m)$。由于 $p, q \in St^m(*)$，$d(p, q) \leq 2m$。这与 $L_1(m)$的定义矛盾。□

引理 3.3 假设 $\{x, y, z\} \subset S^{\pm 1}$ 使得 $\{x, y, z\}$ 生成一个与 $\mathbb{Z}^3$同构的 G 子群。给定一个整数 $m > 0$，存在一个整数 $M_2(m) > M_1(m)$，使得如果 $v \in \Gamma - St^{M_2(m)}(*)$ 且 $(v \cdot r_x) \cap St^m(*) \neq \emptyset$，那么

$$(v \cdot R(x^-, y, z)) \cap St^m(*) = \emptyset.$$

证明：只有有限多个三元组 $x, y, z \in S$ 使得子群 $\langle x, y, z \rangle$ 同构于 $\mathbb{Z}^3$。因此，只需对其中一个三元组证明该引理。只有有限多个元素 $a \in \langle x, y, z \rangle$ 满足 $|a| \leq 2m$。选取 $L_2(m)$，使得对于这些元素中的每一个，都有 $|a|_{\{x,y,z\}} < L_2(m)$。定义 $M_2(m) = L_2(m) + m$。若 $d(p, q) \leq 2m$ 且 $q \in p \cdot \langle x, y, z \rangle$，则 $d_{\{x,y,z\}}(p, q) < L_2(m)$。令 q 为 $(v \cdot r_x) \cap St^m(*)$ 的一个顶点。那么，从 v 到 q、沿着 $v \cdot r_x$ 的边路径 τ 的每条边都标记为 x，且其长度为 $> L_2(m)$。（参见图1(B)，其中将 $v \cdot r_y$ 替换为 $v \cdot r_x$。）设 $p \in (v \cdot R(x^-, y, z)) \cap St^m(*)$。从 v 到 p 的一条 (x, y, z)-测地线具有形式 (α, β, γ)，其中 α 的每条边都标记为 x^{-1}，而 β 的每条边都标记为 y；或者 α 的每条边都标记为 y^{-1}，而 γ 的每条边都标记为 z；或者每条边都标记为 z^{-1}。边路径 $(\tau^{-1}, \alpha, \beta, \gamma)$ 是一条从 q 到 p 的 (x, y, z)-测地线。但这条 (x, y, z)-测地线的长度为 $\geq L_2(m)$。由于 $p, q \in St^m(*)$，$d(p, q) \leq 2m$。这与 $L_2(m)$ 的定义矛盾。□

引理 3.4 若 $v \in \Gamma$ 且 $m > 0$，则存在一个整数 $T(v,m) > 0$，使得对于所有 $t \geq T(v,m)$ 以及任意一对满足条件的 $\{x,y\} \subset S^{\pm 1}$，若 $\{x,y\}$ 生成了一个同构于 $\mathbb{Z}^2$ 的 G 子群，则有：$(v \cdot r_x(t) \cdot P(x^+, y)) \cap St^m(*) = \emptyset$。（注意 $r_x(t) = x^t$。）

证明： 这样的数对只有有限多个 x，y 因此只需对其中一个数对证明引理。对于不同的正整数 a，b，直线$v \cdot r_x(a) \cdot l_y$与 $v \cdot r_x(b) \cdot l(y)$ 不相交。因此，这些直线中只有有限条会与 $St^m(*)$ 相交。选取足够大的 $T(v,\ x,\ m)$，使得对于所有$t \geq T(v,\ x,\ m)$，$(v \cdot r_x(t) \cdot l(y)) \cap St^m(*) = \emptyset$。□

4 主定理证明概要

设 $\mathcal{P}_1 = \langle S, R_1 \rangle$是 G的一个有限表示，$\langle t_1, \ldots, t_p \rangle$是 G 的子群，且同构于 $\mathbb{Z}^p$；对于每个 $r \in R_1$，都有某个 t_i 与 r的每个字母交换。不失一般性，可假设若 $r \in R_1$，则 r的任何子词（循环意义下）在 G中都不平凡。令 $T = \{t_1, \ldots, t_p\}$。令 $\mathcal{P}_2 = \langle S \cup T, R_1 \cup R_2 \rangle$为 $\mathcal{P}_1$ 的一个 Tietze 扩张（使用 Tietze 变换，将每个 t_i 添加为生成元）。还假设若两个生成元交换，则该交换关系属于 $R_1 \cup R_2$。首先描述我们所研究的空间，然后给出证明思路。令 X^2 为 $\mathcal{P}_2$的 Cayley 2-复形。因此，X^2 的 1-骨架是关于 $S \cup T$ 的 G 的凯莱图；每个 2-胞腔的边界都标记为 $R_1 \cup R_2$中的一个元素，$\pi_1(X^2) = 1$，且 G 在 X^2上自由且余紧地作用。我们将在 X^2中添加 3-胞腔。设 $r \in R_1$ 且 $t \in T$，其中 r 的每个字母都与 t交换。若 X^2 的一个 2- 胞腔 C 的边界标记为 r，则附加一个显然的 3- 胞腔，其底面标记为 C，顶面标记为 C，侧面标记为涉及 t 与 r中字母的共轭关系。若 $S \cup T$ 中有三个字母两两交换，则在 X^2的每个顶点处添加相应的 3-胞腔。将所得的 3-复形称为 X。群G 在单连通空间 X上自由且余紧地作用。注意，若 X^2 的一个 2-胞腔 C 满足 ∂C 标记为 R_1中的一个元素，且 $x \in T$与 ∂C 中的每个标记都交换，则存在一个同胚（映到其像上）

$$H_C : C \times (-\infty, \infty) \to X \text{ where}$$

1) $H_C(c,\ 0) = c$对所有 $c \in C$，2) 对于每个整数 n，$H_C(C \times [n, n+1])$是我们的三个胞腔之一；3) 对所有整数 n和 k，$x^k H_C(c,\ n) = H_C(c,\ n+k)$。

特别地，如果 n 是整数，那么 $H_C(C \times [n, n+1])$ 是对应于 C 和 x 的 3-胞腔经 x^n 平移后的结果。最后：

4) 若 v 是 C 的一个顶点，则 $H_C(\{v\} \times (-\infty, \infty))$ 是 $v \cdot l_x$。

现在我们概述证明。选取 W，使得 R_1 的每个元素的长度都是 $\leq W$。

注 4.1 我们假设常数 $M_1(m)$、$M_2(m)$、$L_1(m)$、$L_2(m)$ 以及 $T(v, m)$ 均已针对我们的表示 $\mathcal{P}_2$ 定义。我们还假设 $M_1(m) > m + W$ 以及 $M_2(m) \geq M_1(m) + W$。

任意边路径环都同伦于一个经过“微小”同伦后的边路径环，且其所有标签都属于 S。因此，只需证明，在 $X - St^{M_2(M_1(m)+W)}(*)$ 中，任意边路径环 α（其每条边的标签都属于 S）在 $X - St^m(*)$ 中同伦平凡。只需证明 α 中所有不与自身相交的子环在 $X - St^m(*)$ 中同伦平凡。因此，我们将问题归结为 α 是嵌入的，且 α 的所有字母都属于 S 的情形。设 V 是 α 的一个范坎彭图，其中每个 2-胞腔都标记为 R_1 的一个元素；设 $Q\colon V \to X$ 是将 V 的边界映到 α 的自然映射。由于 α 是嵌入的，V 同胚于一个二维圆盘。为便于绘图，我们将 V 的二维胞腔、边和顶点分别标记为它们在 Q 下的像的标签。我们将使用 V 构造一个三维球 B^3，使 V 嵌入于 S^2 中，而 S^2 是 B^3 的（2-球面）边界。我们还将构造一个映射 $\bar{Q}\colon B^3 \to X$，它是 Q 的一个延拓，使得将 $\bar{Q}$ 限制在 V 的内部之外的 S^2 上时，其像落在 $X - St^m(*)$ 中（从而 α 在 $X - St^m(*)$ 中同伦平凡——至此便完成定理的证明）。为了构造 B^3 和 $\bar{Q}$，我们必须找到一些同伦，将 V 的二维胞腔移到 $St^m(*)$ 外部。交换关系会使这类同伦易于构造；但如果两个二维胞腔在一条边上重合，我们构造的两个同伦可能会将这条边映到不同的位置。因此，我们构造三维“乘积”同伦来解决这一问题。这些同伦解决了 V 的所有边上的问题。最后，我们必须处理 V 的顶点。我们将通过折叠某些二维胞腔，以及构造更多三维“乘积”同伦，来解决这些问题。

5 主定理的证明

在开始证明主定理之前，我们先解决 G 的端数问题。正如前面所指出的，如果我们的表示中有某个 $s \in S$

$\langle S,\ R_1\rangle$ 没有出现在 R_1 的任何元素中，那么 G 会分裂为 $\mathbb{Z}_s * \langle S-\{s\}\rangle$ 和 G，且具有无限多个端。否则，我们证明 G 是单端的。

定理 5.1（定理 3, [Mih86]） 假设 G 是一个有限生成群，A 且 B 是 G的有限生成单端或双端子群，$A\cup B$生成 G 且 $A\cap B$ 是无限的。那么 G 是单端或双端的。

假设对每个 $s\in S$，存在 $r_s\in R_1$ 使得 s 是 r_s中的一个字母。将元素 $t_r\in T$ 赋给每个 $r\in R_1$，使得 t_r 与 r中的每个字母都可交换。阿贝尔群 $\langle s,\ t_{r_s}\rangle$ 是单端或双端的，而 $\langle T\rangle$ 是单端的。定理5.1推出 $\langle T\cup\{s\}\rangle$ 是单端的。归纳可得 G 是单端的。

现在我们证明定理1.1。如§4所述：

我们假设 α 是一个嵌入边路径环，其像位于 $X-St^{M_2\ (M_1\ (m)\ +W)}\ (*)$ 中，且每条边的标签都属于 S，而 V 是一个范坎彭图，其对应于 α，其中每个 2-胞腔的边界都是由一个标记为 R_1中某个元素的边路径围成的。

此外 $Q:\ V\to X$ 是在 ∂V 上与 α 一致的显然映射。我们的目标是证明，α 在 $X-St^m(*)$ 中是同伦平凡的。

(†)设 C 是 V 的一个 2-胞腔，并且已将 $x\in T$ 指派给对应于 C 的关系。若 $\partial C\cap\partial V\neq\emptyset$，取 $v(=v_C)\in\partial C\cap\partial V$。若$(Q(v)\cdot r_x)\cap St^{M_1(m)+W}(*)\neq\emptyset$，则将 x^{-1} 指派给 C。否则，将 x 指派给C。若 $\partial C\cap\partial V=\emptyset$，则将 x 指派给 C。

若 C 是 V 的一个包含顶点 v 和 w的 2-胞腔，且已将 x指派给 C，则（见注 4.1）$(Q(v)\cdot r_x)\subset St^W(Q(w)\cdot r_x)$（射线 $Q(v)\cdot r_x$ 和 $Q(w)\cdot r_x$ 平行，因为 x 与 C 的所有字母都交换。）

现在，我们通过向 V添加3-胞腔来构造 B^3，每个 V的2-胞腔对应一个3-胞腔，并将 Q 延拓到这些胞腔上。若 V的一个2-胞腔为 C，且 $x\in T$ 被赋予C。考虑 X中的 $Q(C)$。考虑“乘积”同胚（映到其像上）$H_C\colon C\times[0,\infty)\to X$，使得对所有 $c\in C$和所有整数 $i\geq 0$，$H_C(c,\ i)=x^i\cdot Q(c)$。若 V中的 C的一个顶点为 v，则 $H_C|_{\{v\}\times[0,\infty)}=Q(v)\cdot r_x(=v\cdot r_x)$。

(††)若 V 的一个2-胞腔为 C，且 x 被赋予 C，而 C的任意顶点为 v，则 $H_C(C\times[0,\infty))\subset St^W(Q(v)\cdot r_x)$。

对于 V的一个2-胞腔 C，选取一个整数 N_C，使得$H_C|_{C\times[N_C,\infty)}$避开$St^m(*)$。令 N_1 为 V的一个2-胞腔 C 所对应的诸 N_C 中最大者。对 $Q(V)$的所有顶点 v，选取大于 $T(v,m)$的 N_2（见引理 3.4）。选取$N=max\{N_1,N_2\}$。对 V的每个2-胞腔 C，通过将 $c\in C$与$(c,0)\in C\times[0,N]$等同，把乘积3-胞腔 $C\times[0,N]$附着到 V上。若 e（相应地 v）是

V的胞腔 C_1 与 C_2 的一条公共边（顶点），且指派给 C_1 与 C_2 的 $T^{\pm 1}$中的元素相同，则在我们的附着空间中，以显然的方式将 $C_1 \times [0,N]$ 中 $e \times [0,N]$的副本（相应地 $\{v\} \times [0,N]$的副本）与 $C_2 \times [0,N]$ 中 $e \times [0,N]$ 的副本（相应地 $\{v\} \times [0,N]$的副本）等同。称所得空间为 B_2。空间 B_2 将是 B^3的一个子空间。我们把 $C \times \{0,N\}$ 视为"着色的"。这两个二维圆盘都将是 B^3的边界的一部分。此外，若 e是 ∂V中的一条边，则 $e \times [0,N]$ 将是 B^3的边界的一部分。若 C 的任何顶点都不属于 ∂V，则一个已附着的$(C \times (0,N)) - (C \times \{0,N\})$的所有点都将是$B^3$的内部点。若 $p \in C_i \times [0,N]$，则通过 $Q(p) = H_{C_i}(p)$将 Q 延拓到 B_2。该映射是良定义的，至此完成了我们与 V的2-胞腔相关的 B^3 构造的这一部分。注意，若 C是 V的一个2-胞腔，则对 $p \in C - \partial C$而言， B_2 中 $\{p\} \times [0,N]$ 的每一点都满足 B_2中带边界的三维流形的条件。 V 的某些边和顶点需要更多关注。

引理 5.2 若 C 是 V 的一个 2-胞腔，且 $\partial C \cap \partial V \neq \emptyset$，则 $H_C(= H|_{C\times[0,N]})$ 的像包含于 $X - St^m(*)$中。

证明： 设 $v = v_C \in \partial C \cap \partial V$，并称 $x \in T^{\pm 1}$ 被指派给 C。假设

$$(Q(v) \cdot l_x) \cap St^{m+W}(*) = \emptyset.$$

陈述（††）意味着 $Im(H_C) \subset St^W(Q(v) \cdot l_x)$（它与 $St^m(*)$ 不相交）。接下来假设

$$(Q(v) \cdot l_x) \cap St^{m+W}(*) \neq \emptyset.$$

由于 $M_1(m) \geq m + W$，我们有 $(Q(v) \cdot l_x) \cap St^{M_1(m)})(*) \neq \emptyset$。由于 x 被指派给 C，$(Q(v) \cdot r_{x^{-1}}) \cap St^{M_1(m)}(*) \neq \emptyset$ （见 (†)）。取 $y \in T - \{x, x^{-1}\}$。由于 $Q(v) \in X - St^{M_1(m_1(m))}(*)$，引理 3.2（其中 x^+扮演 y^-的角色， y 扮演 x的角色，且 $M_1(m)$ 扮演 m的角色）蕴含

$$(Q(v) \cdot r_x) \cap St^{M_1(m)}(*) = \emptyset.$$

由于 $St^{m+W}(*) \subset St^{M_1(m)}(*)$，因此 $(Q(v) \cdot r_x) \cap St^{m+W}(*) = \emptyset$。由于$Im(H_C) \subset St^W(Q(v) \cdot r_x)$，证毕。□

设 e 是 V 中两个不同胞腔 C_1 和 C_2 的一条边。若 $T^{\pm 1}$ 的同一个元素已被赋予 C_1 和 C_2，则对于 e 内部的 p， $\{p\} \times [0,N]$ 的每一点都是 B_2 的 3-流形点。将边 e 视为一条

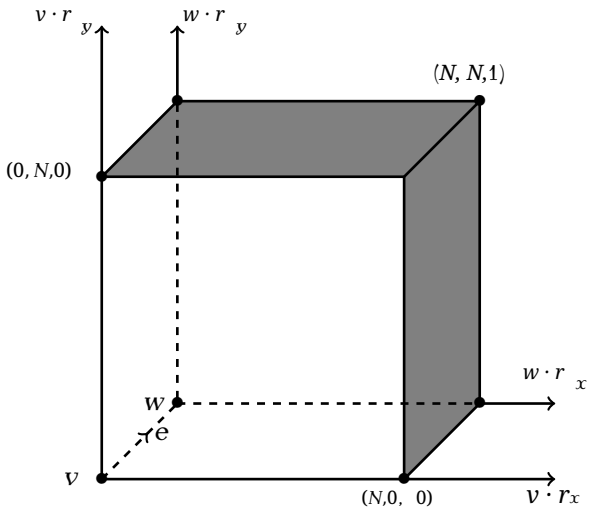


图 2：粘接与映射 $Q|_{K_e}$

映射 e： $[0,1] \to V$。设 C_1 被赋予 x，且 C_2 被赋予 y，其中 $x \neq y^{\pm 1}$。我们沿着（$[0,N] \times \{0\} \times [0,1]$） $\cup$（$\{0\} \times [0,N] \times [0,1]$）将整数格立方体复形 $K_e = [0,N] \times [0,N] \times [0,1]$ 粘接到 B_2 上（即图 2 中包含 e 的两个未着色矩形）。（注意，图 2 中的坐标不遵循“右手定则”。）我们的粘接映射对所有（t， n） $\in [0,1] \times [0,N]$ 将（n，0，t） $\in [0,N] \times \{0\} \times [0,1]$ 与（e（t） n） $\in C_1 \times [0,N]$ 进行识别，并对所有（t， n） $\in [0,1] \times [0,N]$ 将（0，n，t） $\in \{0\} \times [0,N] \times [0,1]$ 与（e（t） n） $\in C_2 \times [0,N]$ 进行识别。接下来，我们将 Q（从 $B_2 \to X$）延拓到 $K_e = [0,N] \times [0,N] \times [0,1]$（如粘接到 B_2 上）。设 e 的初始顶点为 v，终端顶点为 w。若（a， b， c）是 $[0,N] \times [0,N] \times [0,1]$ 的一个顶点，则定义 Q（a， b，0） $= Q$（v） $x^a y^b$（因此，若考虑一条从 Q（v）开始的边路径，其前 a 条边标记为 x，接下来的 b 条边标记为 y，则该路径的终点为 Q（a， b，0）。定义 Q（a， b，1） $= Q$（w） $x^a y^b$。以显然的方式将 Q 延拓到 K_e 的其余部分。下一个引理表明，图 2 着色区域上的 $Q|_{K_v}$ 避开了 St^m（$*$）。

引理5.3 假设 x 和 y 分别被分配给 V 和 $x \neq y^{\pm 1}$中的二维胞腔 C_1 和 C_2。若 $e = [v,w]$ 是 C_1 和 C_2的一条公共边，则对于

$i \in \{0,1\}$:

$$Q|_{K_e}(([0,N]\times\{N\}\times\{i\})\cup(\{N\}\times[0,N]\times\{i\}))\subset X-St^m(*).$$

证明： 注意到

$$Im[Q|_{K_v}([0,N]\times\{N\}\times\{0\}]\subset Q(v)\cdot r_y(N)\cdot l_x$$

$$Im[Q|_{K_e}([0,N]\times\{N\}\times\{1\}]\subset Q(w)\cdot r_y(N)\cdot l_x$$

$$Im[Q|_{K_e}(\{N\}\times[0,N]\times\{0\}]\subset Q(v)\cdot r_x(N)\cdot l_y \text{ and}$$

$$Im[Q|_{K_e}(\{N\}\times[0,N]\times\{1\}]\subset Q(w)\cdot r_x(N)\cdot l_y.$$

这些线段围成了图 2中的两个阴影矩形。由于$N \geq N_2 \geq max\{T(v,\ m)\ T(w,\ m)\}$，引理 3.4 蕴含这些集合均不相交 $St^m(*)$。□

在下一个引理中，我们保留引理 5.3的假设。

引理 5.4 假设 x 和 y 分别被赋予 V中的二维胞腔 C_1 和 C_2，$x \neq y^{\pm 1}$ 和 $e=[v,w]$ 是 C_1 和 C_2的一条公共边。进一步假设，$z \in T-\{x^{\pm 1},y^{\pm 1}\}$、$v \in \partial V$与三条直线中的一条 $Q(v)\cdot l_x$、$Q(v)\cdot l_y$、$Q(v)\cdot l_z$非平凡地相交于 $St^{M_1(m)}(*)$，那么

$$Im[Q|_{K_e}([0,N]\times[0,N]\times\{0\})]\subset X-St^{M_1(m)}(*)(\subset X-St^m(*)).$$

(这意味着函数 $Q|_{K_e}$ 在图 2的立方体前表面上避开了 $St^m(*)$。该面将属于 S^2，即 B^3的边界）。

证明：设 $u_i=v_{C_i}$ 对于 $i\in\{1,2\}$。假设 $(Q(v)\cdot l_x)\cap St^{M_1(m)}(*)\neq\emptyset$。则 $(Q(u_1)\cdot l_x)\cap St^{M_1(m)+W}(*)\neq\emptyset$。由于 x 被指定给 C_1，(†) 蕴含 $(Q(u_1)\cdot r_{x^{-1}})\cap St^{M_1(m)+W}(*)\neq\emptyset$。由于 $Q(v)\cdot r_{x^{-1}}$ 与 $Q(u_1)\cdot r_{x^{-1}}$ 平行：

$$(Q(v)\cdot r_{x^{-1}})\cap St^{M_1(m)+2W}(*)\neq\emptyset.$$

由于 $v\in\partial V$,

$$Q(v)\in\alpha\subset X-St^{M_2(M_1(m)+W)}(*)\subset X-St^{M_1(M_1(m)+2W)}(*).$$

引理 3.2 (其中 $(M_1(m)+2W$ 扮演 m，x 扮演y^{-1} 和 y 扮演 x) 意味着

$$Q(v)\cdot P(x^+,y)\cap St^{M_1(m)+2W}(*)=\emptyset.$$

由于 $Im[Q|_{K_e}([0,N]\times[0,N]\times\{0\})]\subset Q(v)\cdot P(x^+,\ y)$（见图 2)当 $(Q(v)\cdot l_x)\cap St^{M_1(m)}(*)\neq\emptyset$ 是完备的。

如果（Q（v）$\cdot l_y$）$\cap St^{M_1}$（m）（$*$）$\neq\emptyset$，论证相同（分别将 C_1、u_1、x 和 y 替换为 C_2、u_2、y 和 x）。

接下来，假设（Q（v）$\cdot r_z$）$\cap St^{M_1}$（m）（$*$）$\neq\emptyset$。回想一下，$v\in X-St^{M_2}$（$_{M_1}$（m））（$*$）。引理 3.3 推出（Q（v）$\cdot R$（z^-、x、y）$\cap St^{M_1}$（m）（$*$）$=\emptyset$）。由于 $Im[Q|_{K_e}$（$[0,N]\times[0,N]\times\{0\}$）] 的顶点集是 Q（v）$\cdot\langle x$ 的子集，故 $y\rangle\subset$（Q（v）$\cdot R$（z^-、x、y），这一情形得证。□

再次假设 x 和 y 分别对应于 V 的二维胞腔 C_1 和 C_2，而 $x\neq y^{\pm1}$ 和 $e=[v,w]$ 是 C_1 和 C_2 的公共边（如引理5.3中所述）；并且，如引理 5.4 中那样，假设 $z\in T-\{x^{\pm1},y^{\pm1}\}$ 和 $v\in\partial V$。设对所有 $t\in T$，均有（Q（v）$\cdot l_t$）$\cap St^{M_1}$（m）（$*$）$=\emptyset$。若 $Q|_{K_e}$（$[0,N]\times[0,N]\times\{0\}$）$\cap St^m$（$*$）$=\emptyset$，那么 K_e 的这个面将是 B^3 边界上一个“令人满意”的部分（如引理 5.4 的结论所述）。否则，我们进行调整。假设 $p\in Q|_{K_e}$（$[0,N]\times[0,N]\times\{0\}$）$\cap St^m$（$*$）。令 D（$=[0,N]\times[0,N]$）为 $Q|_{K_e}$ 的定义域：$([0,N]\times[0,N]\times\{0\})\to X$（在 B_2 中）。因此，D 是图3中的着色区域。我们将构造一个立方体 A，并沿着二维圆盘 D 将 A 附着到 B_2 上。我们将映射 Q 延拓到立方体 A，使得 A 的边界除去定义域 D 后，其像包含于 $X-St^m$（$*$）中。这样，我们用另一个映入 $X-St^m$（$*$）的圆盘替换 D。这将基本完成我们的构造，使 B^3 与 V 的边相连。

图3描绘了包含 D 的 A 的面 F。这里 $v_x=Q(v)\cdot x^N(=Q(v)\cdot r_x(N))$，且 $v_y=Q(v)\cdot y^N(=Q(v)\cdot r_y(N))$。由于 $St^m(*)\cap Q(D)\neq\emptyset$，$Q(v)P(x^+,y)\cap St^m(*)\neq\emptyset\neq Q(v)P(y^+,x)\cap St^m(*)$（见图3）。结合 $Q(v)\cdot l_x\cap St^{M_1}(m)(*)=\emptyset=Q_v\cdot l_y\cap St^{M_1}(m)(*)$ 这一事实，引理 3.1 表明，集合 $Q(v)\cdot P(x^-,y)$ 和 $Q(v)\cdot P(y^-,x)$ 均与 $St^m(*)$ 的交集平凡。

由于 $N\geq T(v,m)$，引理 3.4 表明 $v_y\cdot P(y^+,x)$ 和 $v_x\cdot P(x^+,y)$ 与 $St^m(*)$ 的交集为空。因此，图3中 $(2L_1(m)+N)$ 乘以 $(2L_1(m)+N)$ 的矩形满足：D 外部的部分（未着色）避开 $St^m(v)$。若 q 是 F 边界上的一点（见图3），那么从 $p\in St^m(*)$ 到 $q\cdot l_z$ 中一点 q' 的 (x,y,z) 测地线具有形式 (α,β,γ)，其中 α 的每条边的标签为 x（或 x^{-1}），β 的每条边的标签为 y（或 y^{-1}），而 γ 的每条边的标签为 z（或 z^{-1}）。α 或 β 的长度为 $\geq L_1(m)$。因此，根据 $L_1(m)$ 的定义，对于 F 的所有边界点 q，$(q\cdot l_z)\cap St^m(*)=\emptyset$。为完成 A 的构造，只需选取一个整数 J，使得 $Q(F)$ 的 z^J 平移避开 $St^m(*)$。将整数

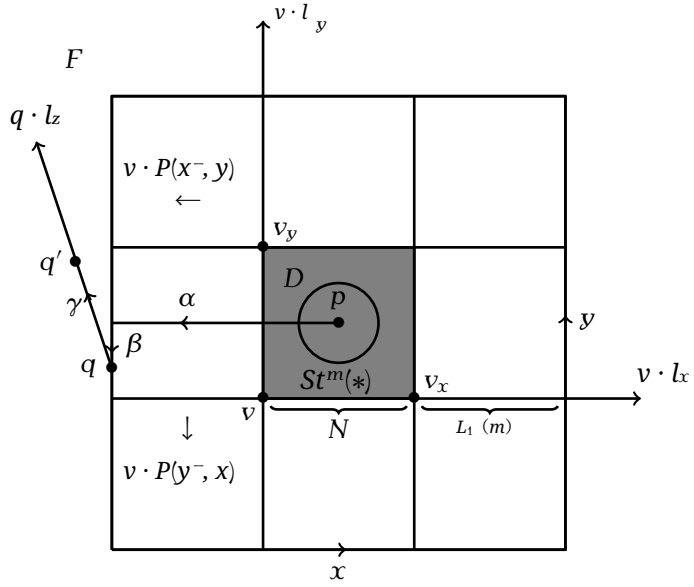


图3：调整三维胞腔的面

格点立方体 $F \times [0, J]$ 以显然的方式映射到 X。注意， $\partial(F \times [0, J]) - D$ 映射到 $X - St(*)$（该集合将成为替代 D 的 $S^3 = \partial B^3$ 部分）。

引理5.3 的假设之一是 $x \neq y^{\pm 1}$。如果 $x = x^{\pm 1}$ ，则选择 $z \in T - \{x^{\pm 1}\}$ 使得 z 与 e 的标记可交换（使用定理1.1假设的第(2)部分）。构造两个形如 $[0, N] \times [0, N] \times [0, 1]$的立方体。按图4 所示粘贴，并映射到 X 中，如同先前情形（如有必要，在前表面上附加一个额外的圆盘）。

在我们从考虑 V的边转向考虑其顶点之前，还必须处理另一个问题。 V 的胞腔 C_1 与 C_2 可能共享连续边。如果 C_1 与 C_2 共享 k-连续边，则不要粘贴 $[0, N] \times [0, N] \times [0, 1]$的一个副本，而应以显然的方式粘贴 $[0, N] \times [0, N] \times [0, k]$的一个副本。

令 B_1 为 B_2 所有与 K_e 对应的 3-胞腔的并，以及附着在 D 这类面上的 3-胞腔。注意，到目前为止我们附着的每个 3-胞腔都强变形收缩到其附着集，因此 B_1 是可缩的。将 $[0, N] \times [0, N] \times [0, 1]$ 型的 3-胞腔（见图 2）收缩到其附着集时，重要的是在 $[0, N] \times [0, N] \times [0, 1]$ 上定义一个单一的变形收缩，并用它来定义 B_1 中所有这类 3-胞腔的变形收缩。所

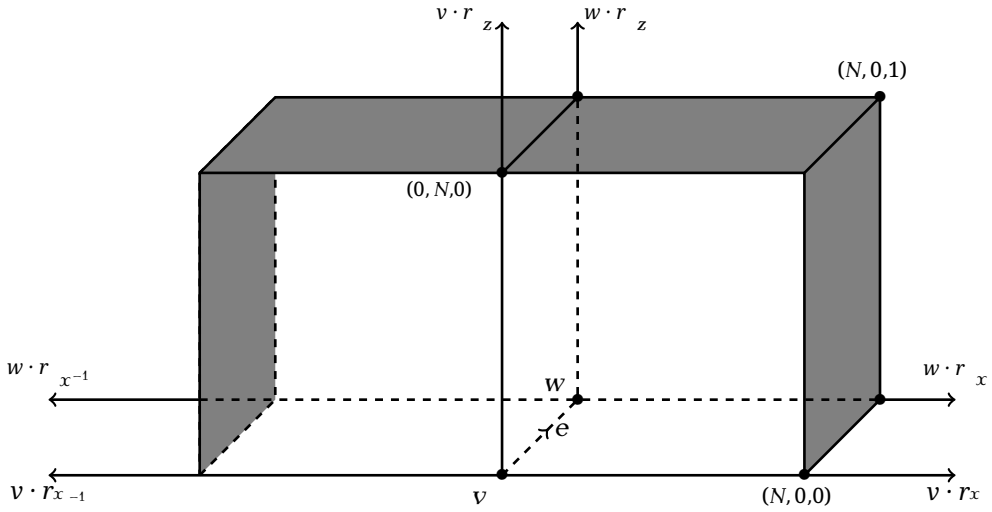


图4：双重粘贴与映射

我们选择的变形是两个强变形收缩的复合。第一个是将 $[0,N]\times[0,N]\times[0,1]$ 强变形收缩到图 2 的四个未着色面（($[0,N]\times[0,N]\times\{0,1\}$) $\cup$([$0,N]\times\{0\}\times[0,1]$) $\cup$($\{0\}\times[0,N]\times[0,1]$）。第二个强变形收缩将图 2 的前后面（($[0,N]\times[0,N]\times\{0,1\}$)）分别变形到线段（$[0,N]\times\{0\}\times\{0\}$）$\cup$($\{0\}\times[0,N]\times\{0\}$) 和（$[0,N]\times\{0\}\times\{1\}$）$\cup$($\{0\}\times[0,N]\times\{1\}$）。在下一步中，我们可以将一个 3-胞腔的自由面 $[0,N]\times[0,N]\times\{0\}$）折叠到相邻 3-胞腔的另一个自由面上。为了使这两个 3-胞腔强变形收缩到 B_2，我们将先对这两个 $[0,N]\times[0,N]\times[0,1]$副本应用第一种变形，之后再沿着现在共有的前表面和后表面应用第二种变形。图 2（或图 4）中的着色区域将成为 B^3边界的一部分。B_1中 $[0,N]\times[0,N]\times$(0, 1) 的每个点都是 B_1的一个 3-流形点。至此，我们完成了附着与 V的 1-胞腔对应的 3-胞腔。

最后，我们必须为 V 的某些顶点 v 附加形如 $[0,N]\times[0,N]\times[0,N]$ 的整数格立方体复形。附加方式应使得 (0，0，0) 将被附加到 v。如果 v 是 V 的边界顶点，则无需进行任何操作。如果 v 是 V 的内部顶点，那么令 C_1，.....，C_n 为包含 V 的 2-胞腔，使得 C_i 与 C_{i+1} 共享边 $e_i=[v,w_i]$，且 C_1与 C_n 共享边 $e_n=[v,w_n]$。称 $x_i\in T^{\pm1}$ 被分配给 C_i。如果在前一步中我们没有将 $[0,N]\times[0,N]\times[0,1]$ 的一个副本（或 $[0,N]\times[0,N]\times[0,1]$的两个副本）附加到 e_1，并且没有对 e_1采取任何操作。如果所有 x_i 都相同，那么 v 已经是一个流形点。

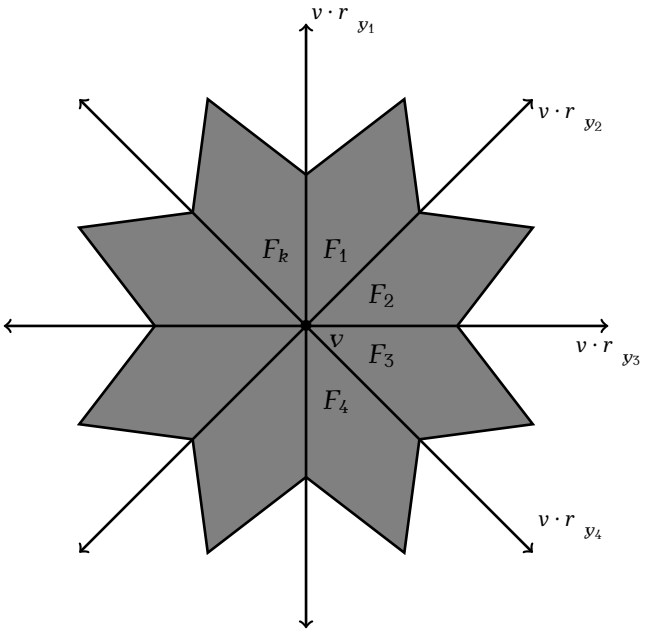


图5：调整顶点邻域

设 e_i 是满足 $x_i \neq x_{i+1}$ 的一条边。如果 $x_i \neq x_{i+1}^{\pm 1}$，则存在一个自由面 $F_i = [0,N]_i \times [0,N]_i \times \{0\} \subset B_1$，使得 $Q(0,0,0) = v$、$Q(t,0,0) = v \cdot r_{x_i}(t)$ 以及 $Q(0,t,0) = r_{x_{i+1}}(t)$，其中 $t \in [0,N]_i$。如果 $x_i = x_{i+1}^{-1}$，则在 v 处有两个自由面，另有一个 $v \cdot r_z$（见图4）需要考虑。下面，我们将把 $[0,N]^3$ 的副本附加到这些面上，或者将两个这样的相邻面“折叠”起来，以完成我们的构造。

令 $x_{j_1} = x_1$。归纳地，令 j_i 为紧接在 j_{i-1} 之后且满足 $r_{x_{j_i}} \neq r_{x_{j_{i-1}}}$ 的第一个整数。为简便起见，令 $y_i = x_{j_i}$。我们在 B_1 中的“图示”（见图5）由一组自由面 $F_i (= F_{j_i})$ 构成，满足 $Q(0,0,0) = v, Q(t,0,0) = v \cdot r_{y_i}(t)$ 且 $Q(0,t,0) = r_{y_{i+1}}(t)$，其中 $t \in [0,N]_i$。点 v 是面 F_i 在 V 中的唯一点。这里 $y_i \neq y_{i+1}$ 且 $y_i \neq y_i^{-1}$（因为我们同时考虑图4中的两个面以及 $v \cdot r_z$）。假设 $y_1 = y_3$。我们在 B_1 中将两个面 F_1 和 F_2 折叠到一起，方法是将 $(a,b,0) \in F_1$ 与 $(b,a,0) \in F_3$ 识别起来（因为 Q 在这两点处一致）。F_1（以及 F_2）的内部点变成 B^3 的内部三维流形点。如果 F_1 和 F_2 被识别，那么新的“图示”就与图5相同，只是去掉了 F_1 和 F_2。（因此，我们从面 F_3 开始，到面 F_k 结束，绕 v 循环一周。）这意味着我们可以假设不仅 $y_i \neq y_{i+1}^{\pm 1}$，而且 $y_i \neq y_{i+2}$。接下来假设 $\{y_1, y_2, y_3\}$ 生成一个 $\mathbb{Z}^3$ 的副本。然后我们将一个 $A = [0,N]^3$ 的副本附加到 $F_1 \cup F_2$ 上，使得 $(0,0,0)$ 与 v 相连，$[0,N] \times [0,N] \times \{0\}$

与 F_1相连，$[0,N]\times\{0\}\times[0,N]$与 F_2相连。以显而易见的方式将这个立方体映射到 X 中，并保持乘积结构。包含 (N,N,N) 的三个面根据 N的定义映射到 $X-St^m(*)$（并将成为 B的边界的一部分）。面 $\{0\}\times[0,N]\times[0,N]$现在将成为一个自由面，取代 F_1 和 F_2。这个面在 $v\cdot r_{y_1}$和 $v\cdot r_{y_3}$上各有一条长度为 N的边。这种约化使我们可以假设（或许重新标记后）没有三个（循环意义下）连续的 y_i 生成一个 $\mathbb{Z}^3$的副本。结合不等式 $y_i\neq y_{i+1}^{\pm 1}$ 和 $y_{i+2}\neq y_i$，可得 $y_{i+2}=y_i^{-1}$。特别地，所有剩余的 y_i 构成一个 $\mathbb{Z}^2$的副本。选取 $z\in T$，使得 z 不属于由 y_i生成的群。考虑图5中阴影部分的二维圆盘 $D=\cup_{i=1}^k F_i$。令 $E=D\times[0,N]$。通过对所有 $d\in D$，将 d 与 $(d,0)$ 识别起来，把 E 附加到 D 上。将 Q 延拓为映射，使E 映入 X，并保持乘积结构。

所得空间 B^3 是一个带边界的紧致三维流形。为证明 B^3 可缩，先通过将 E强变形收缩到 D，撤销最后一步。对于每个 $[0,N]^3$的副本，将其强变形收缩到包含 (0，0，0) 的三个面（另外三个面是 B^3的边界面）。对于形如 $[0,N]\times[0,N\times[0,1]$,的 3-胞腔，使用第一类强变形收缩（收缩到图2 或4中四个未着色面）。接着，将 $F\times[0,J]$ 的副本（见图3）强变形收缩到 D。若第一类 $[0,N]\times[0,N\times[0,1]$变形后还剩下一个二维面，则使用第二类强变形收缩来变形这些面。最后，对于 V的每个 2-胞腔 C，将 $C\times[0,N]$ 强变形收缩到 C。结果就是 V。三维流形B^3 可缩，因此是一个三维球。集合 $\partial B-int$（V）映射到 $X-St^m$（$*$）（由该构造可知）。因此，α（从 V 的边界到$X-St^{M_2(M_1(m)+W)}$（$*$）的映射）在 $X-St^m$（$*$）中是同伦平凡的，并且 X（因此 G）在无穷远处单连通。

6 映射类群的表示

为了看出我们对 $F^0_{3,0}$和 $F^0_{4,0}$的表示满足我们的定理假设，首先考虑 $F^0_{3,0}$。我们使用了$F^0_{3,0}$在[Ger01]中给出的表示。这个表示的生成集为

$$S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,b,b_1,b_2,c_{i,j}\text{ for }1\leq i,j\leq 4\quad i\neq j\}.$$

我们先列出不交换对。记号 $(x:y)$ 表示 x与 y不交换，并且我们定义 $(x:y_1,\ldots,y_n)=(x,y_1)\ldots,(x,y_n)$，使得对所有 i，x 与 y_i 都不交换。这里需要注意：我们列出了 $(b_1:a_2)$，但还有许多生成元与 b_1 不交换，它们会在列表后面出现。

$(b:a_1,a_2,a_3,a_4)$, $(b_1:a_2)$ $(b_2:a_4)$, $(c_1,2,b_1)$, $(c_1,3:a_2,c_2,4,c_2,1)$, $(c_1,4:a_2,a_3,b_2,c_2,1,c_3,1,c_3,2,c_4,2,c_4,3)$, $(c_2,1:b_1,a_3,a_4,c_3,2,c_4,2)$, $(c_2,3:b_1)$, $(c_2,4:b_1,b_2,a_3,c_3,1,c_3,2,c_4,3)$, $(c_3,1:a_4,c_4,2,c_4,3)$, $(c_3,2:a_4,a_1,b_1,c_4,3)$, $(c_3,4:b_2)$, $(c_4,1,b_2)$, $(c_4,2:b_2,a_1,b_1)$, $(c_4,3:b_2,a_1,a_2)$

关系有三种类型。如果上文没有出现（$x:y$），则会出现形式为$xy=yx$的交换关系。如果上文出现（$x:y$），则成立 Artin 关系 $xyx=yxy$。最后，对于某些“良好”的（i,j,k），还有星形关系$c_{i,j}c_{j,k}c_{k,i}=(a_ia_ja_kb)^3$。这里允许出现术语$c_1,1$，并将其定义为等于 1。令 R 为自由群 $F(S)$的子集，其中包含所有这些字。我们对星形关系的描述略显含糊，因为我们的分析并不依赖这些关系的具体形式。在 [Ger01]中定义了一个“良好”的三元组（i,j,k），并且这里只使用满足（i,j,k）为良好三元组的星形关系。该表示的一个重要特点是，$c_1,2$（分别为$c_3,4$）与除 b_1 （分别为b_2）之外的所有生成元交换，而$c_1,3$与除 a_2, $c_2,4$和$c_2,1$之外的所有生成元交换。注意，三个生成元$c_1,2$、 $c_3,4$和$c_1,3$两两交换。我们证明集合 $T=\{c_{1,2},c_{3,4},c_{1,3}\}$ 满足定理 1.1 的条件。对每个星形关系，我们指定$c_1,2$。元素$c_3,4$也与每个星形关系中的所有字母交换，因此所有星形关系都满足条件 (1) 和 (2)。其他关系只涉及 2-生成元。我们将$c_1,3$指定给 $b_1b_2=b_2b_1$ 以满足条件 (1)。若在条件 (2) 中 $s=b_1$，则令$z=c_3,4$；若 $s=b_2$，则令$z=c_1,2$。若某个剩余关系 r 不包含 b_1，则将$c_1,2$指定给该关系。若在条件 (2) 中 $s=b_2$，则令$z=c_1,3$。若 $s\neq b_2$，则令$z=c_3,4$。最后，若 b_1 是 $r(\neq b_1b_2b_1^{-1}b_2^{-1})$中的一个字母，则我们将$c_3,4$指定给 r。对于条件 (2)，若 $s=b_1$，则令$z=c_1,3$。若 $s\neq b_1$，则令$z=c_1,2$。

元素 $c_{1,2}$、 $c_{3,4}$ 和 $c_{1,3}$ 出现在 [Ger01] 表示中；每个亏格为 ≥ 3 的闭曲面的映射类群都有这一表示，它们具有相同的非对易性质，因此定理 1.1 同样适用于这些群。

参考文献

[ABD+12]Aaron Abrams、Noel Brady、Pallavi Dani、Moon Duchin 和 Robert Young, 《映射类群中无穷远处的填充环》, 《密歇根数学杂志》 61（2012）, 第 4 期, 867–874。MR 3049293[Bai60] Walter L. Baily, Jr., 《雅可比簇的模空间》, 《数学年刊》（第 2 辑）71（1960）, 303–314。MR 110715[Bri93] Stephen G. Brick, 《拟等距与群的端》, 《纯粹与应用代数杂志》86（1993）, 第 1 期, 23–33。MR 1213151[Dav83] Michael W. Davis, 《由反射生成的群及未被欧几里得空间覆盖的非球面流形》, 《数学年刊》（第 2 辑）117（1983）, 第 2 期, 293–324。MR 690848[DM69] P. Deligne 和 D. Mumford, 《给定亏格曲线空间的不可约性》, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.（1969）, 第 36 期, 75–109。MR 262240[FM12] Benson Farb 和 Dan Margalit, 《映射类群入门》, 普林斯顿数学丛书, 第 49 卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2012。[Fre82] Michael Hartley Freedman, 《四维流形的拓扑学》, 《微分几何杂志》17（1982）, 第 3 期, 357–453。MR 679066[Geo08] Ross Geoghegan, 《群论中的拓扑方法》, 数学研究生教材, 第 243 卷, 施普林格, 纽约, 2008。MR 2365352[Ger01] Sylvain Gervais, 《带 puncture 曲面映射类群的有限表示》, 《拓扑学》40（2001）, 第 4 期, 703–725。MR 1851559[HP70] L. S. Husch 和 T. M. Price, 《为三维流形寻找边界》, 《数学年刊》（第 2 辑）91（1970）, 223–235。MR 264678[HP71] , 补遗: 《为三维流形寻找边界》, 《数学年刊》（第 2 辑）93（1971）, 486–488。MR 286113

[Luf67] Erhard Luft, 《可缩开拓扑流形》, 《数学发明》4 (1967), 192–201. MR 221486[McC75] James McCool, 《自由群自同构群的某些有限呈示子群》, 《代数杂志》35(1975), 205–213. MR 396764[Mih] MichaelMihalik, 《群与空间的端、半稳定性及无穷远处简单连通性指南》, arXiv 2507.17060.[Mih86] Michael L. Mihalik, 《有限生成群及可解群的*Semistability at ∞ of finitely generatedgroups, and solvable groups*》, 《拓扑学及其应用》24 (1986), no. 1- 3, 259–269, 献给 R. H. Bing (1914–1986) 的纪念专辑。MR 872498[Sie68] L. C. Siebenmann, 《在拓扑流形中以同伦方式检测欧几里得空间》, 《数学发明》6(1968), 245–261. MR 238325[Sta62] John Stallings, 《欧几里得空间的分片线性结构》, 《剑桥哲学学会会刊》58 (1962), 481–488. MR 149457