arXiv:2602.12208v1 [math.RT] 12 Feb 2026

张量积分量的生成元

MICHAEL J. J. BARRY

Abstract. 设 p 是一个素数， F 是特征为 p的域， G 是阶为 $q = p^a$ 的循环群，其中 a为某个正整数。在这些条件下，每个不可分解的 FG-模都是循环的。对于不可分解的FG-模 U 和 W，我们提出一种新的递归方法，根据 $U \otimes W$的某个特定 F-基，确定 $U \otimes W$ 的每个不可分解分量的生成元。

1. Introduction

设 p 是一个素数， F 是特征为 p的域， G 是阶为$q = p^a$的循环群。按同构分类，存在唯一一个维数为 q [1, 的不可分解 FG-模 V_q ， 见第24–25]页。设 g 是 G的一个生成元。那么存在 V_q的一个有序F-基$(v_1, \ v_2, \ \ldots, \ v_q)$，使得 $gv_1 = v_1$，并且当 $i > 1$时 $gv_i = v_{i-1} + v_i$；也就是说，关于这个基， g 的矩阵是特征值为1的满若尔当块。对于整数 $i \in [1, q]$，定义 V_i上的 F向量空间为 $V_i = \langle v_1, \ \ldots, \ v_i\rangle$。那么 V_i是一个不可分解的 FG-模，而 $\{V_1, \ldots, V_q\}$是 FG-模 [1, 的一个完备集，见第24–25]页。

许多作者研究了 $V_r \otimes V_s$where $1 \leq r, \ s \leq q$ 的不可分解分量分解——例如，按发表先后顺序参见 [11, 23, 20, 21, 14,18, 12, 19, 13]。根据这些作者的研究，我们知道

$$V_r \otimes V_s \cong V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_{\min(r,s)}}$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{\min(r,s)} > 0$ but 维数 λ_ℓ取决于特征 p。显然 $\{v_i \otimes v_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$是 $V_r \otimes V_s$的一个 F-基。然而，$\mathcal{B} = \{v_{i,j} = v_i \otimes g^{n-i}v_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ 也是 $V_r \otimes V_s$ 的一个基，而且使用起来更方便，因为 $(g-1)(v_{i,\ j}) = v_{i-1,\ j} + v_{i.j-1}$ [17, 引理 4] 或 [5,引理 1]。

对于满足 $1 \leq d \leq r + s - 1$的整数 d，定义$V_r \otimes V_s$ 的向量子空间 D_d 如下：

$$D_d = \langle v_{i,j} \mid i + j = d + 1\rangle.$$

我们对 D_d偏好的基是 $\mathcal{B}_d = \{v_{i,j} \mid i + j = d + 1\}$。当 $1 \leq \ell \leq \min(r, \ s)$，$\mathcal{B}_{r+s-\ell} = (v_{r+1-\ell,\ s}, \ v_{r+2-\ell,\ s-1}, \ \ldots\ldots, \ v_{r,\ s+1-\ell})$ 和 $\mathcal{B}_\ell = (v_{1,\ \ell}, \ v_{2,\ \ell-1}, \ \ldots\ldots, \ v_{\ell,\ 1})$。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20C20.*Key words and phrases.* 循环群、不可分解模、模生成元、张量积。

当 $1 \leq \ell \leq \min(r,\ s)$ 时，已知（参见 [19, 引理 4] 或 [13, 定理 2.2。2],），存在 $y_\ell \in D_{r+s-\ell}$ 使得 $FGy_\ell \cong V_{\lambda_\ell}$ 并且

$$V_r \otimes V_s = FGy_1 \oplus FGy_2 \oplus \cdots \oplus FGy_{\min(r,s)}.$$

在本文中，我们将给出一个递归算法，用以根据$\mathcal{B}_{r+s-\ell}$确定 y_ℓ 。因此$(g-1)^{\lambda_\ell}(y_\ell) = 0$，但$(g-1)^{\lambda_\ell-1}(y_\ell) \neq 0$。此外，我们希望$(g-1)^{\lambda_\ell-1}(y_\ell)$是 $D_{r+s+1-\ell-\lambda_\ell}$的一个特定元素。对于 $1 \leq \ell \leq \min(r,s)$，由 $x_\ell = \sum_{m=1}^{\ell}(-1)^{m-1}v_{m,\ell+1-m}$定义 $x_\ell \in D_\ell$ 。注意，$\{v \in D_\ell \mid (g-1)(v) = 0\} = Fx_\ell$ [19, 引理 3]。我们将要求$(g-1)^{\lambda_\ell-1}(y_\ell) = x_{r+s+1-\ell-\lambda_\ell}$。

现在我们说明递归是如何产生的。设 n为满足 $p^n \leq \max(r,s) < p^{n+1}$ 的唯一非负整数——$\max(r,s) = p^n = p^a$ 是一种可能情形，记$r = r_n p^n + R_{n-1}$ 和 $s = s_n p^n + S_{n-1}$，其中 r_n、s_n、R_{n-1}和 S_{n-1} 是满足 $0 \leq r_n$、$s_n < p$和 $0 \leq R_{n-1}$、$S_{n-1} < p^n$的整数。令 $m_{n-1} = \min(R_{n-1}, S_{n-1})$，$M_{n-1} = \max(R_{n-1}, S_{n-1})$。递归的基础步骤是 $m_{n-1} = 0$，其中包括 $r = r_0p^0 + 0$ 和 $s = s_0p^0 + 0$这一显然情形，也包括当 $n \geq 1$时的情形：$(r,s) = (r_np^n, s_np^n)$、$(r,s) = (r_np^n + R_{n-1}, s_np^n)$（其中 $R_{n-1} > 0$），以及$(r,s) = (r_np^n, s_np^n + S_{n-1})$（其中 $S_{n-1} > 0$）。现在假设 $\ell > \max(r+s-p^{n+1}, 0)$，并记 $\ell = tp^n + k$，其中 t 和 k 是满足 $t \geq 0$ 和 $1 \leq k \leq p^n$的整数。结果表明 $\lambda_\ell = cp^n + C$，其中 $1 \leq C \leq p^n$，且 c 是$(r_n + s_n - 2t)$、$(r_n + s_n - 2t - 1)$或$(r_n + s_n - 2t - 2)$之一。我们将确定 $z_\ell \in D_{r+s-\ell-cp^n}$，使得$(g-1)^{C-1}(z_\ell) = x_{r+s+1-\ell-\lambda_\ell}$。这一点我们认为是新的，也是大部分工作所在之处。为此，在 $m_{n-1} > 0$的情形下，我们将使用关于(R_{n-1}, S_{n-1})和$(p^n - R_{n-1}, p^n - S_{n-1})$在$\max(1, R_{n-1} + S_{n-1} - p^n) \leq C \leq m_{n-1}$时的结果，以及关于$(R_{n-1}, p^n - S_{n-1})$和$(p^n - R_{n-1}, S_{n-1})$在 $M_{n-1} + 1 \leq C \leq \min(p^n, m_{n-1} + M_{n-1})$时的结果。对于 C的其他取值，确定 z_ℓ 并不需要递归。然后，我们将以直接的机械方式把 z_ℓ 提升为 $y_\ell \in D_{r+s-\ell}$，使得$(g-1)^{cp^n}(y_\ell) = z_\ell$。这一提升将涉及一个元素为二项式的矩阵的逆。当然，这样的矩阵的逆可以用行列式和伴随矩阵来表示，但Nordenstam和Young [16], 专门针对这一情形的近期工作，为我们给出了该逆矩阵的(i,j)元素的一个新公式。

该领域的先前研究包括 Norman 在矩阵框架下提出的一种递归算法 [19]，以及 Iima 和 Iwamatsu 在两个变量的多项式环框架下所做的工作 [13]。与这两项研究相比，我们给出了更为明确的分量生成元表达式。我们认为，这项工作在一定程度上简化并澄清了 Norman 的思路，包括准确指出递归在哪些地方是必要的。此外，我们的方法以对 Renaud 结果的更精确重述为指导 [21]，并纳入了关于二项式作为矩阵元素时矩阵求逆的近期研究 [16]。一项早期的解法 [7], 起初未能承认它与 [13], 如出一辙，而它与当前的工作截然不同。此前已有研究处理了若干沿着 [7] 思路的特殊情形 [3] [5]。

我们以概述本文内容作为本节的结尾。在第 2 节中，我们定义 $r \times s$ 矩阵 $J(r,\ s)$，并在第 3 节中运用 Renaud 的研究来识别 λ_ℓ。接下来，我们在第 4 节中记录一些计算，第 5 节中则应用 Nordenstam 和 Young 的研究。然后，我们在第 6 节中讨论 $1 \leq \ell \leq \max(r+s-p^n,\ 0)$ 的情形。在第 7 节中，我们证明一些递归定义的函数

在 F 中取交替值，我们随后在第8节中利用这一点，在 $m_{n-1} > 0$ 时识别z_ℓ 和 y_ℓ。最后，第9节讨论 $m_{n-1} = 0$ 的情形。

2. $J(r, s)$

大致沿用 Norman 的记号 [19], 设 $J(r, s)$ 是一个定义在 F 上的 $r \times s$ 矩阵，使得当 $1 \le \ell \le \min(r, s)$ 时，

$$(g-1)^{\lambda_\ell - 1}\left(\sum_{j=1}^{\ell} J(r,s)_{\ell+1-j,j} v_{r-\ell+j,s+1-j}\right) = x_{r+s+1-\ell-\lambda_\ell},$$

也就是说，$\sum_{j=1}^{\ell} J(r, s)_{\ell+1-j,j} v_{r-\ell+j,s+1-j}$ 是 y_ℓ 的一个候选。因此，确定每个 y_ℓ 等价于指定 $J(r, s, p)$ 的前 $\min(r, s)$ 条反对角线。其余反对角线将全由 0 构成。对于某些 ℓ，y_ℓ 可能有多个候选，因此我们必须系统地说明如何选择 y_ℓ。接下来的两个引理将解决这一问题。

记号：设 $1 \le \ell \le \min(r, s)$，定义 $\ell_0 = \min\{i \mid \lambda_i = \lambda_\ell\}$ 和 $\ell_\infty = \max\{i \mid \lambda_i = \lambda_\ell\}$。

引理 1. 存在唯一的元素 $y_{\ell_0} \in D_{r+s-\ell_0}$，使得 $(g-1)^{\lambda_{\ell_0}-1}(y_{\ell_0}) = x_{r+s+1-\ell_0-\lambda_{\ell_0}}$。

证明。由 [19, 引理 4] 或 [13, 定理 2.2.2] 可知，$(g-1)^{\lambda_{\ell_0}-1}(y) = x_{r+s+1-\ell_0-\lambda_{\ell_0}}$ 对 $y \in D_{r+s-\ell_0}$有解。只需证明 $(g-1)^{\lambda_{\ell_0}-1}$ 在 $D_{r+s-\ell_0}$上是单射。由 [4, 命题 2] 或 [10, 定理 5],

$$\begin{aligned}\lambda_{\ell_0} &= r + s - 2(\ell_0 - 1) - (\ell_\infty - (\ell_0 - 1)) \\ &= r + s - \ell_0 - \ell_\infty + 1.\end{aligned}$$

现在，$(g-1)^{\lambda_{\ell_0}-1}$（它将 $D_{r+s-\ell_0}$ 映射到 D_{ℓ_∞}）等于 $S_{\ell_\infty} \circ T$，其中 $T = (g-1)^{\ell_\infty - \ell_0}$ 将 $D_{r+s-\ell_0}$ 映射到 $D_{r+s-\ell_\infty}$，而 $S_{\ell_\infty} = (g-1)^{r+s-2\ell_\infty}$ 将 $D_{r+s-\ell_\infty}$映射到D_{ℓ_∞}。根据 [13]前文及定理 2.2.9 中的结果，S_{ℓ_∞} 可逆。由于 T 根据 [13, 引理 2.2.5], 是单射，$(g-1)^{\lambda_{\ell_0}-1}$也是单射，结论得证。□

元素 y_{ℓ_0} 在 Iima 和 Iwamatsu 的记号中对应于某个 i 的 $\kappa_{(i)}$。

引理 2. 假设 $\ell > \ell_0$ 且

$$y_{\ell_0} = \sum_{j=1}^{\ell_0} J(r,s)_{\ell_0+1-j,j} v_{r-\ell_0+j,s+1-j}.$$

定义 $y_\ell \in D_{r+s-\ell}$ 为

$$y_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} J(r,s)_{\ell+1-j,j} v_{r-\ell+j,s+1-j}$$

其中，当 $1 \le j \le \ell_0$ 时，$J(r, s)_{\ell+1-j,j} = (-1)^{\ell-\ell_0} J(r, s)_{\ell_0+1-j,j}$；当 $\ell_0 + 1 \le j \le \ell$ 时为 0。因此 $(g-1)^{\lambda_\ell - 1}(y_\ell) = x_{r+s+1-\ell-\lambda_\ell}$。

证明。令 λ 为 $\lambda_{\ell_0} = \lambda_\ell$。由于 $(g-1)^{\lambda-1}(y_{\ell_0}) = x_{r+s+1-\ell_0-\lambda}$，$(g-1)^{\lambda-1}(y_{\ell_0})$ 中 $v_{z,\ r+s+2-\ell_0-\lambda-z}$ 的系数（其中 $1 \le z \le r+s+1-\ell_0-\lambda$）为

$$\sum_{j=1}^{\ell_0} J(r,s)_{\ell_0+1-j,j} \binom{\lambda-1}{r-\ell_0+j-z} = (-1)^{z-1}.$$

另一方面，在 $(g-1)^{\lambda-1}(y_\ell)$ 中，$1 \le z \le r+s+1-\ell-\lambda$ 对应于 $v_{z,\ r+s+2-\ell-\lambda-z}$ 的系数为

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\ell} J(r,s)_{\ell+1-j,j} \binom{\lambda-1}{r-\ell+j-z} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{\ell_0} (-1)^{\ell-\ell_0} J(r,s)_{\ell_0+1-j,j} \binom{\lambda-1}{r-\ell_0+j-(z+\ell-\ell_0)} \\
&\quad = (-1)^{\ell-\ell_0}(-1)^{z+\ell-\ell_0-1} \\
&\quad = (-1)^{z-1},
\end{aligned}$$

由此证明 $(g-1)^{\lambda-1}(y_\ell) = x_{r+s+1-\ell-\lambda}$。 □

如果 y_{ℓ_0} 在 Iima 和 Iwamatsu 的记号中对应于 $\kappa_{(i)}$，那么 y_ℓ 对应于 $\kappa_{(i)}x^{\ell-\ell_0}$。

3. Identifying λ_ℓ

现在我们改写 Renaud [21] 的工作，以满足我们的需要。

定理 1. 设 p为素数，r 且 s为正整数，令

$$V_r \otimes V_s \cong V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_{\min(r,s)}}$$

其中 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_{\min(r,s)} > 0$。

取 n 为满足 $p^n \le \max(r,s) < p^{n+1}$的唯一非负整数，记$r = r_n p^n + R_{n-1}$ 和 $s = s_n p^n + S_{n-1}$，其中 r_n、s_n、R_{n-1}和 S_{n-1} 均为满足 $0 \le r_n, s_n < p$及 $0 \le R_{n-1}, S_{n-1} < p^n$的整数。

令 $m_{n-1} = \min(R_{n-1}, S_{n-1})$ 且 $M_{n-1} = \max(R_{n-1}, S_{n-1})$。我们定义一个 p^n元组$W = (w_1, w_2, \ldots, w_{p^n})$，它取决于 m_{n-1}和 M_{n-1}的值。若 $m_{n-1} = 0$，$W = M_{n-1} \cdot (0) \oplus (p^n - M_{n-1}) \cdot (-p^n)$。现在假设 $m_{n-1} > 0$，并令

$$V_{R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}} \cong V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_{m_{n-1}}}$$

其中 $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \mu_{m_{n-1}} > 0$。如果 $m_{n-1} + M_{n-1} \le p^n$，

$$\begin{aligned}
W = &(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m_{n-1}}) \oplus (M_{n-1} - m_{n-1}) \cdot (0) \\
&\oplus (-\mu_{m_{n-1}}, -\mu_{m_{n-1}-1}, \ldots, -\mu_1) \oplus (p^n - m_{n-1} - M_{n-1}) \cdot (-p^n).
\end{aligned}$$

若 $m_{n-1} + M_{n-1} > p^n$，

$$\begin{aligned}
W = &(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m_{n-1}}) \oplus (M_{n-1} - m_{n-1}) \cdot (0) \\
&\oplus (-\mu_{m_{n-1}}, -\mu_{m_{n-1}-1}, \ldots, -\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}-p^n+1}).
\end{aligned}$$

若 $r+s>p^{n+1}$且 $1\le \ell \le r+s-p^{n+1}$， $\lambda_\ell = p^{n+1}$。若 $\max(r+s-p^{n+1},\ 0)+1\le \ell \le \min(r,\ s)$，则写作 $\ell = tp^n+k$，其中 t和 k为非负整数，且 $1\le k\le p^n$。那么 $\lambda_\ell = (r_n+s_n-2t)p^n+w_k$。

证明。由 Renaud [21, 定理 1 和 2]可知。下面通过讨论我们工作中 $r_n+s_n\ge p$ 的情形来说明，这对应于 Norman 中的 $r_0+s_0\ge p$ 情形。其他情形也可以用类似的方法处理。为应用 Renaud的定理2，我们需要忽略重数，并假设 $V_{r_1}\otimes V_{s_1} = \sum_{j=1}^{m_{n-1}} V_{b_j}$，其中 $b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_{m_{n-1}}>0$。Renaud 中的项 $(r+s-pq)V_{pq}$ 对应于我们工作中的 $\lambda_\ell = p^{n+1}$，当 $1\le \ell\le r+s-p^{n+1}$且 $r_n+s_n\ge p$ 时。显然，从 Renaud 的工作可以看出，所谓的“半周期性” $\lambda_{\ell+p^n} = \lambda_\ell - 2p^n$ 会在初始的 $r+s-pq$ 个维数为 pq 的模之后，从维数最大的模开始显现，并持续到$\ell = \min(r,s)-p^n$。因此，在我们的工作中，它从 $\ell = \max(r+s-p^{n+1},0)+1 = r+s-p^{n+1}+1$开始。例如，当 Norman 中 $r_0+s_0\ge p$ 且 $r_1+s_1<q$ 时，初始的 $r+s-pq$ 个维数为pq 的模之后，模的最大维数为 $(s_0-r_0+2d_2-1)q = (s_0-r_0+2(p-s_0)-1)q = (2p-r_0-s_0-1)q$。但在我们的工作中，由于 $r+s-p^{n+1}+1 = (r_n+s_n-p)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1$，$(t,k) = (r_n+s_n-p,\ R_{n-1}+S_{n-1}+1)$，且 $\lambda_{r+s-p^{n+1}+1} = (r_n+s_n-2(r_n+s_n-p))p^n+w_{R_{n-1}+S_{n-1}+1} = (2p-r_n-s_n)p^n-p^n$。同样，在 Norman 中，当 $r_0+s_0\ge p$且 $r_1+s_1\ge q$时，初始的 $r+s-pq$ 个维数为 pq的模之后，模的最大维数为 $(s_0-r_0+2(p-s_0-1))q+b_1 = (2p-r_0-s_0-2)q+b_{r_1+s_1-q+1}$。这是因为 $(q-r_1-s_1)V_{(s_0-r_0+2d_2-1)q} = (q-r_1-s_1)V_{(s_0-r_0+2(p-s_0)-1)q}$ 和$\sum_{j=1}^{r_1+s_1-q} V_{(s_0-r_0+2d_1)q+b_j} = \sum_{j=1}^{r_1+s_1-q} V_{(s_0-r_0+2(p-s_0-1))q+b_j}$ 相互抵消。但在我们的工作中，由于 $r+s-p^{n+1}+1 = (r_n+s_n-p)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1$，$(t,k) = (r_n+s_n-p+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-p^n+1$，$\lambda_{r+s-p^{n+1}+1} = (r_n+s_n-2(r_n+s_n-p+1))p^n+w_{R_{n-1}+S_{n-1}-p^n+1} = (2p-r_n-s_n-2)p^n+\mu_{R_{n-1}+S_{n-1}-p^n+1}$。□

推论 1. 在此我们只考虑 $m_{n-1}>0$ 的情形，

$$V_{R_{n-1}}\otimes V_{S_{n-1}}\cong V_{\mu_1}\oplus V_{\mu_2}\oplus\cdots\oplus V_{\mu_{m_{n-1}}}$$

其中 $\mu_1\ge\mu_2\ge\cdots\ge\mu_{m_{n-1}}>0$、$\max(r+s-p^{n+1},0)+1\le\ell\le\min(r,s)$，且$\ell = tp^n+k$ 其中 t 和 k 是满足 $1\le k\le p^n$ 的非负整数。于是对于$e_n = m_{n-1}+M_{n-1}-p^n$，

$$\lambda_\ell = \begin{cases} (r_n+s_n-2t)p^n+p^n, & 1\le k\le \max(e_n,0),\\ (r_n+s_n-2t)p^n+\mu_k, & \max(e_n,0)+1\le k\le m_{n-1},\\ (r_n+s_n-2t)p^n, & m_{n-1}+1\le k\le M_{n-1},\\ (r_n+s_n-2t)p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}, & M_{n-1}+1\le k\le p^n-\max(-e_n,0),\\ (r_n+s_n-2t-1)p^n, & p^n-\max(-e_n,0)+1\le k\le p^n. \end{cases}$$

注意，第一种情况为空；第四种情况为 $M_{n-1}+1\le k\le M_{n-1}+m_{n-1}$当 $e_n\le 0$时，而第五种情况在 $e_n\ge 0$时为空。

4. How to Calculate

以下结果可能广为人知，但为了方便起见，我们在此汇总。回想一下，我们的二项式系数计算是在一个F 特征为 p的域中进行的。

引理 3. 设 n 为正整数，且 $v_{a,b} \in \mathcal{B}_{a+b-1}$。则 $(g-1)^n(v_{a,b}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} v_{a-n+i,b-i}$ 其中 $v_{a-n+i,b-i} = 0$ 若 $a-n+i \leq 0$ 或 $b-i \leq 0$。

证明。对 n 使用归纳法，从 $(g-1)(v_{a,b}) = v_{a-1,b} + v_{a,b-1}$开始。 □

引理 4. 对于正整数 n，$\binom{p^n-1}{i} = (-1)^i$ 对每个整数 $i \in [0, p^n-1]$都成立。

证明。先假设 $n = 1$ 且 $\binom{p-1}{i} = (-1)^i$。我们将证明 $\binom{p-1}{i+1} = (-1)^{i+1}$。

$$\binom{p-1}{i+1} = \frac{(p-1)!}{(i+1)!(p-i-2)!} = \frac{(p-i-1)}{i+1}\binom{p-1}{i} = (-1)(-1)^i = (-1)^{i+1}.$$

现在假设 $n \geq 2$。$p^n - 1$ 的 p 进制展开为 $(p-1)p^{n-1} + (p-1)p^{n-2} + \cdots + (p-1)$ $p + p - 1$。假设 i 的 p 进制展开为 $i_{n-1}p^{n-1} + i_{n-2}p^{n-1} + \cdots + i_1 p + i_0$。那么根据卢卡斯定理，在 F 中，[8]

$$\begin{aligned}\binom{p^n-1}{i} &= \binom{p-1}{i_{n-1}}\binom{p-1}{i_{n-2}}\cdots\binom{p-1}{i_1}\binom{p-1}{i_0} \\ &= (-1)^{i_{n-1}+i_{n-2}+\cdots+i_1+i_0}.\end{aligned}$$

如果 p 是奇素数，

$$(-1)^{i_{n-1}+i_{n-2}+\cdots+i_1+i_0} = (-1)^{i_{n-1}p^{n-1}+i_{n-2}p^{n-2}+\cdots+i_1p+i_0} = (-1)^i.$$

另一方面，$\binom{2^n-1}{i} = 1 = (-1)^i$。 □

引理 5. 对于满足 $c < p$ 的正整数 n 和 c，除非 $i = jp^n$ 且 $0 \leq j \leq c$，否则 $\binom{cp^n}{i} = 0$。

证明。我们可以假设 $0 \leq i \leq cp^n$，并将 i 的 p 进制展开写为 $i_n p^n + \cdots + i_1 p + i_0$。那么根据卢卡斯定理，[8]

$$\binom{cp^n}{i} = \binom{c}{i_n}\binom{0}{i_{n-1}}\cdots\binom{0}{i_1}\binom{0}{i_0}.$$

因此，除非 $i_{n-1} = i_{n-2} = \cdots = i_1 = i_0 = 0$ 且 $i_n \leq c$，否则 $\binom{cp^n}{i} = 0$。 □

推论 2. 对于满足 $c < p$ 的正整数 n 和 c，

$$(g-1)^{cp^n}(v_{a,b}) = \sum_{i=0}^{c}\binom{cp^n}{cp^n - ip^n} v_{a-cp^n+ip^n,b-ip^n} = \sum_{i=0}^{c}\binom{c}{i} v_{a-cp^n+ip^n,b-ip^n}$$

其中 $v_{a-cp^n+ip^n,\ b-ip^n} = 0$ 若 $a - cp^n + ip^n \leq 0$ 或 $b - ip^n \leq 0$。

5. Matrices with binomial entries

我们将使用具有二项式系数项的可逆矩阵，将 z_ℓ 提升到 y_ℓ。

命题 1. 设 a 和 b 为非负整数，令 M 为其 (i,j) 项为 $\binom{a}{b+j-i} \in F$ 的 $k \times k$ 矩阵，并假设 M 可逆。令 $d_k = \prod_{i=0}^{k-1} \binom{a+i}{b} / \binom{b+i}{b} \in \mathbb{Q}$，对每个满足 $1 \le i,j \le k$ 的 (i,j)，定义

$$z_{i,j} = \frac{d_k}{\binom{a+k-1}{b+i-1}} \sum_{\ell=1}^{j} (-1)^{\ell+j} \binom{a+k-1}{\ell-1} \binom{a+j-\ell-1}{j-\ell} \prod_{r=1, r\neq i}^{k} \frac{\ell-b-r}{i-r} \in \mathbb{Q}.$$

那么，对每个 (i,j)，都有 $d_k \in \mathbb{Z}$ 和 $z_{i,j} \in \mathbb{Z}$。令 ϕ 为将 $\mathbb{Z}$ 映入 F 的自然环同态。由于 M 可逆，$\det M = \phi(d_k) \neq 0 \in F$。定义 $k \times k$ 矩阵 N，其 (i,j) 项为 $\phi(d_k)^{-1}\phi(z_{i,j})$。那么 $M^{-1} = N$。

证明。设 $M_{\mathbb{Q}}$ 为 $k \times k$ 矩阵，其（i，j）项为 $\binom{a}{b+j-i} \in \mathbb{Q}$。那么 $\det M_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}$，实际上根据 Roberts [22], 与 $adj(M_{\mathbb{Q}})$ 的一个结果，它等于 d_k； $M_{\mathbb{Q}}$ 的伴随矩阵是一个整数矩阵，并满足 $M_{\mathbb{Q}} adj(M_{\mathbb{Q}}) = d_k I_k = adj(M_{\mathbb{Q}}) M_{\mathbb{Q}}$。在 [16, 定理 1], 中用（$a$，$b+j$，$k$）替换（$A$，$B_j$，$n$），可得 $z_{i,j}$ 是 $adj(M_{\mathbb{Q}})$ 的（i，j）项。现在应用 ϕ，得出 $M adj(M) = \phi(d_k) I_k =$（$\det M$）$I_k = adj(M) M$，且 $M^{-1} =$（$\det M$）$^{-1} adj(M) = N$。□

引理6。设 a 和 b 为非负整数，且 M 为 $k \times k$ 矩阵，其（i，j）项为 $\binom{a}{b+j-i} \in F$。若 $b \le a$ 和 $a+k-1 < p$ 成立，则 M 可逆。

证明。令 $M_{\mathbb{Z}}$ 为矩阵，其 (i,j) 项为 $\binom{a}{b+j-i} \in \mathbb{Z}$。于是由 [22], $\det M_{\mathbb{Z}} = \prod_{z=0}^{k-1} \binom{a+z}{b} / \binom{b+z}{b}$。结论得证。□

6. First Case

引理7。假设 $r+s > p^{n+1}$ 和 $1 \le \ell \le r+s-p^{n+1}$，因此由定理 1 得 $\lambda_\ell = p^{n+1}$。令 $y_\ell = (-1)^{r-\ell} v_{r+1-\ell,s}$。则 $(g-1)^{p^{n+1}-1}(y_\ell) = x_{r+s+1-\ell-p^{n+1}}$。

证明。请注意，我们为 $\ell > 1$ 选择 y_ℓ 与第 2 节中讨论的过程一致。现在 $(g-1)^{p^{n+1}-1}$ 将 $D_{r+s-\ell}$ 映射到 $D_{r+s+1-\ell-p^{n+1}}$，其基为

$$\{v_{z,r+s+2-\ell-p^{n+1}-z} \mid 1 \le z \le r+s+1-\ell-p^{n+1}\}.$$

$v_{z,\ r+s+2-\ell-p^{n+1}-z}$ 在 $x_{r+s+1-\ell-p^{n+1}}$ 中的系数为

$$(-1)^{r-\ell} \binom{p^{n+1}-1}{r+1-\ell-z} = (-1)^{r-\ell}(-1)^{r+1-\ell-z} = (-1)^{z-1},$$

证明了（$g-1$）$^{p^{n+1}-1}$（y_ℓ）$= x_{r+s+1-\ell-p^{n+1}}$。 □

本文其余部分假设 $\max(r+s-p^{n+1},0) + 1 \le \ell \le \min(r,s)$。

7. Alternating F-valued Functions

在本节中 $m_{n-1} > 0$ 以及

$$V_{R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}} \cong V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_{m_{n-1}}}$$

其中 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{m_{n-1}} > 0$。

引理 8. 设 $e_n = m_{n-1} + M_{n-1} - p^n$ 且 $f_n = S_{n-1} - R_{n-1}$。则

(1) $V_{R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}} \cong \max(e_n, 0) \cdot V_{p^n} \oplus V_{\mu_{\max(e_n,0)+1}} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_{m_{n-1}}}$ with $\mu_{\max(e_n,0)+1} < p^n$,
(2) $V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{p^n - S_{n-1}} \cong \max(-e_n, 0) \cdot V_{p^n} \oplus V_{\mu_{\max(e_n,0)+1}} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_{m_{n-1}}}$,
(3) $V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}} \cong \max(f_n, 0) \cdot V_{p^n} \oplus V_{p^n - \mu_{m_{n-1}}} \oplus \cdots \oplus V_{p^n - \mu_{\max(e_n,0)+1}}$, and
(4) $V_{R_{n-1}} \otimes V_{p^n - S_{n-1}} \cong \max(-f_n, 0) \cdot V_{p^n} \oplus V_{p^n - \mu_{m_{n-1}}} \oplus \cdots \oplus V_{p^n - \mu_{\max(e_n,0)+1}}$.

证明。由 [2, 推论 1 第 (1) 部分] 可知，若 $e_n > 0$，则

$$V_{R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}} \cong (e_n) \cdot V_{p^n} \oplus V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{p^n - S_{n-1}}$$

且 $\mu_{e_n+1} \leq p^n - R_{n-1} + p^n - S_{n-1} - 1 < p^n$；而若 $e_n \leq 0$,

$$V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{p^n - S_{n-1}} \cong (-e_n) \cdot V_{p^n} \oplus V_{R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}}$$

以及 $\mu_1 \leq R_{n-1} + S_{n-1} - 1 < p^n$。我们已经证明了 (1) 和 (2)。

关于 $V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}}$ 的结果由 [11, (2.5a)] 得出；更严谨地说，是由证明 (3) 的 [10,命题 1] 得出。最后，由于 $V_{R_{n-1}} \otimes V_{p^n - S_{n-1}}$ 与 $V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}}$ 的关系如同 $V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{p^n - S_{n-1}}$ 与 $V_{R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}}$ 的关系，因此 (4) 可由 (1) 得出。□

记号： 取 $1 \leq k \leq m_{n-1}$，令 $k_0 = \min\{i \mid \mu_i = \mu_k\}$, $k_\infty = \max\{i \mid \mu_i = \mu_k\}$，以及 $k' = k_0 + k_\infty - k$。注意到 $k_0 \leq k' \leq k_\infty$。

引理 9。 设 $1 \leq k \leq m_{n-1}$。则 $\mu_k = R_{n-1} + S_{n-1} - k_0 - k_\infty + 1$。

证明。根据 [4,命题 2] 或 [10, 定理 5],

$$\begin{aligned} \mu_k &= R_{n-1} + S_{n-1} - 2(k_0 - 1) - (k_\infty - (k_0 - 1)) \\ &= R_{n-1} + S_{n-1} - k_0 - k_\infty + 1. \end{aligned}$$

□

引理 10. $\max(f_n, 0) + m_{n-1} = S_{n-1}$.

证明。若 $R_{n-1} \leq S_{n-1}$，则 $\max(f_n, 0) + m_{n-1} = (S_{n-1} - R_{n-1}) + R_{n-1} = S_{n-1}$；而若 $R_{n-1} > S_{n-1}$，则 $\max(f_n, 0) + m_{n-1} = 0 + S_{n-1} = S_{n-1}$。□

引理 11. 当 $\max(e_n, 0) + 1 \leq k \leq m_{n-1}$ 且

$$V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}} \cong \bigoplus_{i=1}^{\min(p^n - R_{n-1}, S_{n-1})} V_{\nu_i}$$

其中 $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_{\min(p^n - R_{n-1}, S_{n-1})} > 0$，则 $\nu_{S_{n-1}+1-k} = p^n - \mu_k$。

证明。由引理 8，$p^n-\mu_k=\nu_{\max(f_n,0)+m_{n-1}+1-k}$。由于 $\max(f_n,0)+m_{n-1}=S_{n-1}$，根据引理 10，结论得证。□

定理 2。假设 $\max(e_n,0)+1\le k\le m_{n-1}$，且已知 $A=J(R_{n-1},S_{n-1})$ 和 $D=J(p^n-R_{n-1},p^n-S_{n-1})$。对于非负整数 i 和正整数 z，定义

$$A_i(z)=\sum_{j=1}^{k}a_{k+1-j,j}\binom{\mu_k-1}{ip^n+R_{n-1}-k+j-z},$$

and

$$D_i(z)=\sum_{j=1}^{k-e_n}d_{k-e_n+1-j,j}\binom{\mu_k-1}{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k-z}.$$

对于非负整数 t，定义

$$f_t(z)=\sum_{i=0}^{t}(-1)^iA_i(z)+(-1)^{R_{n-1}}\sum_{i=0}^{t}(-1)^iD_i(z).$$

当 $1\le z\le tp^n+p^n-S_{n-1}+k'$ 时，$f_t(z)=(-1)^{z-1}$。

显然，A_i、D_i 和 f_t 取决于 p^n、R_{n-1}、S_{n-1} 和 k，但我们希望保持记号简洁。我们将通过一系列引理证明定理 2。

引理 12。当 $ip^n+1\le z\le(i+1)p^n$ 时，只有 $A_i(z)$、$D_i(z)$ 和 $A_{i+1}(z)$ 对 $f_t(z)$ 有贡献。具体而言，我们将证明

$$f_t(z)=\begin{cases}(-1)^iA_i(z), & ip^n+1\le z\le ip^n+k',\\ (-1)^i\left(A_i(z)+(-1)^{R_{n-1}}D_i(z)\right), & ip^n+k'+1\le z\le ip^n+R_{n-1},\\ (-1)^i(-1)^{R_{n-1}}D_i(z), & ip^n+R_{n-1}+1\le z\le ip^n+a_1,\\ (-1)^i\left((-1)^{R_{n-1}}D_i(z)-A_{i+1}(z)\right), & ip^n+a_1+1\le z\le(i+1)p^n\end{cases}$$

其中 $a_1=p^n-S_{n-1}+k'$。

证明。首先，我们证明 $A_{i+1}(z)=0$ 当 $z\le ip^n+p^n-S_{n-1}+k'$ 时，$D_i(z)=0$ 当$z\le ip^n+k'$ 或 $z>(i+1)p^n$ 时，以及 $A_i(z)=0$ 当 $z>ip^n+R_{n-1}$ 时。

假设 $z\le ip^n+p^n-S_{n-1}+k'$。则

$$\begin{aligned}&(i+1)p^n+R_{n-1}-k+j-z\\ &\quad\ge(i+1)p^n+R_{n-1}-k+j-(ip^n+p^n-S_{n-1}+k')\\ &\quad=R_{n-1}+S_{n-1}-k_0-k_\infty+j\\ &\quad=\mu_k+j-1\\ &\quad>\mu_k-1.\end{aligned}$$

因此 $A_{i+1}(z)=0$。显然，若 $\ell>i+1$，则 $A_\ell(z)=0$。

假设 $z\le ip^n+k'$。那么

$$\begin{aligned}ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k-z&\ge ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k-(ip^n+k')\\ &=\mu_k+j-1\\ &>\mu_k-1.\end{aligned}$$

因此 $D_i(z) = 0$。显然，若 $\ell > i$，则 $D_\ell(z) = 0$。

假设 $z > (i+1)p^n$。那么，由于 $j \leq k + p^n - R_{n-1} - S_{n-1}$

$$\begin{aligned} ip^n + R_{n-1} + S_{n-1} + j - k - z & \\ &\leq ip^n + R_{n-1} + S_{n-1} + (p^n + k - R_{n-1} - S_{n-1}) - k - z \\ &= (i+1)p^n - z \\ &< 0. \end{aligned}$$

因此 $D_i(z) = 0$。显然，若 $\ell < i$，则 $D_\ell(z) = 0$。

假设 $z > ip^n + R_{n-1}$。那么，由于 $j \leq k$

$$\begin{aligned} ip^n + R_{n-1} + j - k - z & \\ &= (ip^n + R_{n-1} - z) + (j - k) \\ &\leq ip^n + R_{n-1} - z \\ &< 0. \end{aligned}$$

因此 $A_i(z) = 0$。显然，若 $\ell < i$，则 $A_\ell(z) = 0$。

当 $ip^n + 1 \leq z \leq (i+1)p^n$ 时， f_t 的详细行为如下。 □

推论3。当 $1 \leq z \leq tp^n - S_{n-1} + k'$， $f_t(z + p^n) = -f_t(z)$。

证明。这是因为 $A_{i+1}(z + p^n) = A_i(z)$ 且 $D_{i+1}(z + p^n) = D_i(z)$。例如

$$\begin{aligned} A_{i+1}(z + p^n) &= \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} \binom{\mu_k - 1}{(i+1)p^n + R_{n-1} - k + j - (z + p^n)} \\ &= \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} \binom{\mu_k - 1}{ip^n + R_{n-1} - k + j - z} \\ &= A_i(z). \end{aligned}$$

□

接下来的两个引理将完成定理 2 的证明。

引理 13。当 $ip^n + 1 \leq z \leq (i+1)p^n + R_{n-1}$ 时，$(-1)^i(A_i(z) + (-1)^{R_{n-1}} D_i(z)) = (-1)^{z-1}$。由于根据引理 12， $D_i(z) = 0$ 在 $z \leq ip^n + k'$ 时成立，这意味着当 $ip^n + 1 \leq z \leq ip^n + k'$ 时，$(-1)^i A_i(z) = (-1)^{z-1}$。

证明。由推论3，只需证明

$$A_0(z) + (-1)^{R_{n-1}} D_0(z) = (-1)^{z-1} \qquad \text{when } 1 \leq z \leq R_{n-1} \tag{1}$$

因为如果 $f(z) = (-1)^{z-1}$，那么 $f(z + ip^n) = (-1)^i f(z) = (-1)^{ip^n}(-1)^{z-1} = (-1)^{z+ip^n-1}$。

步骤 1： $V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}}$。根据引理 8，

$$V_{p^n - R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}} \cong \max(f_n, 0) \cdot V_{p^n} \oplus V_{p^n - \mu_{m_{n-1}}} \oplus \cdots \oplus V_{p^n - \mu_{\max(e_n, 0)+1}}.$$

这里我们调整了 Norman [19, 定理 3]中的一个论证。根据 [19, 引理 4] 或 [13,定理 2.2.2], , 存在 $w_\ell \in D_{p^n - R_{n-1} + S_{n-1} - \ell}$ 使得 $FGw_\ell \cong V_{p^n}$ 如果 $1 \leq$

$\ell \le \max(f_n,\ 0),\ \ FGw_\ell \cong V_{p^n-\mu_{m_{n-1}+1-(\ell-\max(f_n,0))}}$ 如果 $\max(f_n,\ 0)+1 \le \ell \le \min(p^n-R_{n-1},\ S_{n-1})$，并且

$$V_{p^n-R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}} = \bigoplus_{\ell=1}^{\min(p^n-R_{n-1},S_{n-1})} FGw_\ell.$$

那么 $((g-1)^{\ell-1}(w_1),\ (g-1)^{\ell-2}(w_2)\ldots\ldots,\ (g-1)(w_{\ell-1})\ w_\ell)$ 是 $D_{p^n-R_{n-1}+S_{n-1}-\ell}$ 的一组基。特别地，$w_\ell \notin (g-1)(D_{p^n-R_{n-1}+S_{n-1}-\ell+1})$。

Let

$$w_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_{\ell+1-j,j} v_{p^n-R_{n-1}-\ell+j,S_{n-1}+1-j} \in D_{p^n-R_{n-1}+S_{n-1}-\ell}.$$

根据引理 11，当 $\max(e_n,\ 0)\ +1 \le k \le m_{n-1}$ 时，按维数非递增顺序排列的 $V_{p^n-R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}}$ 的第 $(S_{n-1}+1-k)$ 个加项为 $V_{p^n-\mu_k}$。

Now

$$\begin{aligned} w_{S_{n-1}+1-k'} &= \sum_{j=1}^{S_{n-1}+1-k'} \beta_{S_{n-1}+2-k'-j,j} v_{p^n-R_{n-1}-(S_{n-1}+1-k')+j,S_{n-1}+1-j} \\ &= \sum_{j=1}^{S_{n-1}+1-k'} \beta_{S_{n-1}+2-k'-j,j} v_{p^n+k'-R_{n-1}-S_{n-1}+j-1,S_{n-1}+1-j} \\ &\in D_{p^n+k'-R_{n-1}-1} \subset V_{p^n-R_{n-1}} \otimes V_{S_{n-1}}. \end{aligned}$$

由于 $(g-1)^{p^n-\mu}(w_{S_{n-1}+1-k'}) = 0 \in D_{k'+\mu-R_{n-1}-1} = D_{S_{n-1}-k}$，当 $1 \le z \le S_{n-1}-k$ 时，$v_{z,\ S_{n-1}-k+1-z}$ 在 $(g-1)^{p^n-\mu}(w_{S_{n-1}+1-k'})$ 中的系数为

$$\sum_{j=1}^{S_{n-1}+1-k'} \beta_{S_{n-1}+2-k'-j,j} \binom{p^n-\mu}{p^n+k'-R_{n-1}-S_{n-1}+j-1-z} = 0.$$

步骤 2：$V_{p^n} \otimes V_{p^n}$。根据 [19, 引理 4] 或 [13, 定理 2.2。2],当 $1 \le \ell \le p^n$时，存在 $u_\ell \in D_{2p^n-\ell}$ 使得 $FGu_\ell \cong V_{p^n}$ 并且

$$V_{p^n} \otimes V_{p^n} = \bigoplus_{\ell=1}^{p^n} FGu_\ell.$$

因此，对于每个 $u \in V_{p^n} \otimes V_{p^n}$，$(g-1)^{p^n}(u) = 0$。

当 $1 \le \ell \le \min(p^n-R_{n-1},\ S_{n-1})$ 时，令

$$y_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_{\ell+1-j,j} v_{p^n-\ell+j,p^n+1-j} \in D_{2p^n-\ell}.$$

我们断言 $(g-1)^{p^n-1}(y_\ell) \ne 0$。

断言证明。首先，$((g-1)^{\ell-1}(u_1),\ (g-1)^{\ell-2}(u_2)\ldots\ldots,\ (g-1)(u_{\ell-1})\ u_\ell)$ 是 $D_{2p^n-\ell}$的一组基。写出

$$y_\ell = \epsilon_1(g-1)^{\ell-1}(u_1) + \epsilon_2(g-1)^{\ell-2}(u_2) + \cdots + \epsilon_{\ell-1}(g-1)(u_{\ell-1}) + \epsilon_\ell u_\ell.$$

我们用矛盾法论证。若 $(g-1)^{p^n-1}(y_\ell) = 0$，则

$$0 = (g-1)^{p^n-1}(y_\ell) = 0 + \epsilon_\ell (g-1)^{p^n-1}(u_\ell)$$

迫使 $\epsilon_\ell = 0$ 和 $y_\ell = (g-1)(u)$，其中

$$u = \epsilon_1 (g-1)^{\ell-2}(u_1) + \epsilon_2 (g-1)^{\ell-3}(u_2) + \cdots + \epsilon_{\ell-1} u_{\ell-1} \in D_{2p^n+1-\ell}.$$

但如果 $y_\ell \in (g-1)(D_{2p^n+1-\ell})$，那么 $w_\ell \in (g-1)(D_{p^n-R_{n-1}+S_{n-1}-\ell+1})$ — 矛盾！ □

于是 $(g-1)^{p^n-1}(y_\ell) = b_\ell x_{p^n+1-\ell}$，因为 $b_\ell \in F \setminus \{0\}$，且 $(g-1)^{p^n-1}(y_\ell) \in \{v \in D_{p^n+1-\ell} \mid g(v) = v\} = \{\alpha x_{p^n+1-\ell} \mid \alpha \in F\}$ [19, 引理 3]。对 y_ℓ 进行缩放，使得 $(g-1)^{p^n-1}(y_\ell) = x_{p^n+1-\ell}$。

在 $V_{p^n} \otimes V_{p^n}$ 中，

$$y_{S_{n-1}+1-k'} = \sum_{j=1}^{S_{n-1}+1-k'} \beta_{S_{n-1}+2-k'-j,j} v_{p^n+k'-S_{n-1}-1+j,p^n+1-j} \in D_{2p^n+k'-S_{n-1}-1}.$$

于是 $(g-1)^{p^n-\mu}(y_{S_{n-1}+1-k'}) \in D_{p^n+k'+\mu-S_{n-1}-1} = D_{p^n+R_{n-1}-k}$。$D_{p^n+R_{n-1}-k}$ 的通常基为

$$\mathcal{B}_{p^n+R_{n-1}-k} = (v_{R_{n-1}-k+1,p^n}, \ldots, v_{p^n,R_{n-1}-k+1}),$$

因此，$\dim D_{p^n+R_{n-1}-k} = p^n + k - R_{n-1}$。

因此，当 $1 \le z \le S_{n-1}-k$ 时，$(g-1)^{p^n-\mu}(y_{S_{n-1}+1-k'})$ 中 $v_{R_{n-1}+z,\ p^n-k+1-z}$ 的系数为

$$\sum_{j=1}^{S_{n-1}+1-k'} \beta_{S_{n-1}+2-k'-j,j} \binom{p^n-\mu}{p^n+k'-S_{n-1}-1+j-R_{n-1}-z},$$

根据上文，这等于 0。

我们刚刚看到，元素

$$v_{R_{n-1}+1,p^n-k}, v_{R_{n-1}+2,p^n-k-1}, \ldots, v_{R_{n-1}+S_{n-1}-k,p^n+1-S_{n-1}}$$

$\mathcal{B}_{p^n+R_{n-1}-k}$ 中的元素在 $(g-1)^{p^n-\mu}(y_{S_{n-1}+1-k'})$ 中出现时，其系数为 0。$\mathcal{B}_{p^n+R_{n-1}-k}$ 的其他元素分为两组：$v_{R_{n-1}-k+1,\ p^n}, \ldots, v_{R_{n-1},\ p^n-k+1}$ 中带有 k 个向量，以及 $v_{R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,\ p^n-S_{n-1}}, \ldots, v_{p^n,\ R_{n-1}-k+1}$ 中带有 $p^n+k-R_{n-1}-S_{n-1}$ 个向量。

将 $(g-1)^{p^n-\mu}(y_{S_{n-1}+1-k'}) \in D_{p^n+R_{n-1}-k}$ 写作

$$z_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha'_j v_{R_{n-1}-k+j,p^n+1-j} + \sum_{j=1}^{k-e_n} \delta'_j v_{R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,p^n-S_{n-1}+1-j}.$$

因此 $(g-1)^{\mu-1}(z_k) = x_{p^n+R_{n-1}+1-k-\mu} = x_{p^n-S_{n-1}+k'}$。

步骤3：当 $k = k_0$ 时，识别 α'_j 和 δ'_j。当 $z < k'+1$ 时，$v_{z,p^n-S_{n-1}+k+1-z}$ 中的系数

$$(g-1)^{\mu-1}\Big(\sum_{j=1}^{k-e_n} \delta'_j v_{R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,p^n-S_{n-1}+1-j}\Big)$$

为 0，因为根据引理 9，$R_{n-1}+S_{n-1}+j-k-(\mu-1)=j+k'>k'$。

因此，当 $1\le z\le k'$ 时，$v_{z,\ p^n-S_{n-1}+k+1-z}$ 在 $(g-1)^{\mu-1}(z_k)$ 中的系数为

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha'_j\binom{\mu-1}{R_{n-1}-k+j-z}=(-1)^{z-1}.$$

在 $V_{R_{n-1}}\times V_{S_{N-1}}$ 中，当 $\max(e_n,\ 0)+1\le k\le m_{n-1}$ 时，

$$(g-1)^{\mu-1}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{k+1-j,j}v_{R_{n-1}-k+j,S_{n-1}+1-j}\right)=x_{k_0+k_\infty-k}.$$

因此，$v_{z,\ k'+1-z}$ 在 $(g-1)^{\mu-1}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{k+1-j,j}v_{R_{n-1}-k+j,S_{n-1}+1-j}\right)$中的系数为

$$\sum_{j=1}^{k}a_{k+1-j,j}\binom{\mu-1}{R_{n-1}-k+j-z}=(-1)^{z-1}.$$

若 $k=k_0$，则由引理 1，存在唯一的 $y\in D_{R_{n-1}+S_{n-1}-k_0}$，使得 $(g-1)^{\mu-1}(y)=x_{k_0+k_\infty-k}$。由此可得，当 $1\le j\le k$ 时，$\alpha'_j=a_{k+1-j,\ j}$。

当 $z>R_{n-1}$ 时，$v_{z,p^n-S_{n-1}+1+k'-z}$ 在 $(g-1)^{\mu-1}(\sum_{j=1}^{k}\alpha'_j v_{R_{n-1}-k+j,\ p^n+1-j})$ 中的系数为 0，因为 $R_{n-1}-k+j\le R_{n-1}$。

因此，当 $1\le z\le p^n-R_{n-1}-S_{n-1}+k'$ 时，$v_{R_{n-1}+z,p^n-R_{n-1}-S_{n-1}+k'+1-(R_{n-1}+z)}$ 在 $(g-1)^{\mu-1}(z_k)$ 中的系数为

$$\sum_{j=1}^{k-e_n}\delta'_j\binom{\mu-1}{R_{n-1}+S_{n-1}+j-k-(R_{n-1}+z)}=(-1)^{R_{n-1}+z-1},$$

or

$$\sum_{j=1}^{k-e_n}\delta'_j\binom{\mu-1}{S_{n-1}+j-k-z}=(-1)^{R_{n-1}+z-1}.$$

在 $V_{p^n-R_{n-1}}\otimes V_{p^n-S_{n-1}}$ 中，当 $\max(e_n,0)+1\le k\le m_{n-1}$ 时，

$$(g-1)^{\mu-1}\left(\sum_{j=1}^{k-e_n}d_{k+p^n+1-R_{n-1}-S_{n-1}-j,j}v_{S_{n-1}-k+j,p^n-S_{n-1}+1-j}\right)=x_{p^n-R_{n-1}-S_{n-1}+k'}.$$

因此，$v_{z,\ p^n-R_{n-1}-S_{n-1}+k'+1-z}$ 中的系数

$$(g-1)^{\mu-1}\left(\sum_{j=1}^{k-e_n}d_{k+p^n+1-R_{n-1}-S_{n-1}-j,j}v_{S_{n-1}-k+j,p^n-S_{n-1}+1-j}\right)$$

is

$$\sum_{j=1}^{k-e_n}d_{k+p^n+1-R_{n-1}-S_{n-1}-j,j}\binom{\mu-1}{S_{n-1}-k+j-z}=(-1)^{z-1}.$$

若 $k = k_0$，则存在唯一的 $y \in D_{p^n - R_{n-1} + p^n - S_{n-1} - k_0}$，使得 $(g-1)^{\mu-1}(y) = x_{p^n - R_{n-1} - S_{n-1} + k'}$，由引理 1 可知。因此，$\delta'_j = (-1)^{R_{n-1}} d_{k+p^n+1-R_{n-1}-S_{n-1}-j,\ j}$，当 $1 \le j \le k - e_n$ 时。故

$$\begin{aligned} z_{k_0} &= \sum_{j=1}^{k_0} a_{k_0+1-j,j} v_{R_{n-1}-k_0+j,p^n+1-j} \\ &\quad + (-1)^{R_{n-1}} \sum_{j=1}^{k_0-e_n} d_{k_0-e_n+1-j,j} v_{R_{n-1}+S_{n-1}+j-k_0,p^n-S_{n-1}+1-j}. \end{aligned}$$

由于 $(g-1)^{\mu-1}(z_{k_0}) = x_{p^n - S_{n-1} + k_\infty}\, v_{z,\ p^n - S_{n-1} + k_\infty + 1 - z}$ 在 $(g-1)^{\mu-1}(z_{k_0})$ 中的系数是

$$\begin{aligned} (-1)^{z-1} &= \sum_{j=1}^{k_0} a_{k_0+1-j,j} \binom{\mu-1}{R_{n-1} - k_0 + j - z} \\ &\quad + (-1)^{R_{n-1}} \sum_{j=1}^{k_0-e_n} d_{k_0+p^n+1-R_{n-1}-S_{n-1}-j,j} \binom{\mu-1}{R_{n-1} + S_{n-1} + j - k_0 - z} \\ &= A_0(z) + (-1)^{R_{n-1}} D_0(z). \end{aligned}$$

我们已在情形 $k = k_0$ 下证明了方程 1。

步骤 4：现在我们必须证明当 $k > k_0$ 时的方程 1。

Define $z_k \in D_{p^n + R_{n-1} - k}$ by

$$\begin{aligned} z_k &= \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} v_{R_{n-1}-k+j,p^n+1-j} \\ &\quad + (-1)^{R_{n-1}} \sum_{j=1}^{k-e_n} d_{k-e_n+1-j,j} v_{R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,p^n-S_{n-1}+1-j}, \\ &= \sum_{j=1}^{k_0} (-1)^{k-k_0} a_{k_0+1-j,j} v_{R_{n-1}-k+j,p^n+1-j} \\ &\quad + (-1)^{R_{n-1}} \sum_{j=1}^{k_0-e_n} (-1)^{k-k_0} d_{k_0-e_n+1-j,j} v_{R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,p^n-S_{n-1}+1-j} \end{aligned}$$

应用第 2 节中$a_{k+1-j,\ j}$ 与$a_{k_0+1-j,\ j}$ 以及$d_{k-e_n+1-j,\ j}$ 与$d_{k_0-e_n+1-j,\ j}$ 之间的关系。

我们断言 $(g-1)^{\mu-1}(z_k) = x_{p^n - S_{n-1} + k'}$。接下来的内容与第 2 节的证明几乎完全重复。$v_{z,p^n - S_{n-1} + k' + 1 - z}$ 在 $(g-$ 中的系数

1)$^{\mu-1}(z_k)$ 为

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{k-k_0}\sum_{j=1}^{k_0} a_{k_0+1-j,j}\binom{\mu-1}{R_{n-1}-k+j-z}\\
&\quad+(-1)^{k-k_0}(-1)^{R_{n-1}}\sum_{j=1}^{k_0-e_n} d_{k_0-e_n+1-j,j}\binom{\mu-1}{R_{n-1}+S_{n-1}+j-k-z}\\
&=(-1)^{k-k_0}\sum_{j=1}^{k_0} a_{k_0+1-j,j}\binom{\mu-1}{R_{n-1}-k_0+j-(z+k-k_0)}\\
&\quad+(-1)^{k-k_0}(-1)^{R_{n-1}}\sum_{j=1}^{k_0-e_n} d_{k_0-e_n+1-j,j}\binom{\mu-1}{R_{n-1}+S_{n-1}+j-k_0-(z+k-k_0)}\\
&=(-1)^{k-k_0}\left(A_0(z+k-k_0)+(-1)^{R_{n-1}}D_0(z+k-k_0)\right)\\
&=(-1)^{k-k_0}(-1)^{z+k-k_0-1}\\
&=(-1)^{z-1}.
\end{aligned}
$$

我们已经证明了方程 1。 □

引理 14. 当 $ip^n+R_{n-1}+1\le z\le(i+1)p^n$ 时，$(-1)^i((-1)^{R_{n-1}}D_i(z)-A_{i+1}(z))=(-1)^{z-1}$。由于根据引理 12，$A_{i+1}(z)=0$ 当 $z\le ip^n+p^n-S_{n-1}+k'$ 时，这意味着当 $ip^n+R_{n-1}+1\le z\le ip^n+p^n-S_{n-1}+k'$ 时，$(-1)^i(-1)^{R_{n-1}}D_i(z)=(-1)^{z-1}$。

证明。 按照引理 13 证明开头所述的类似论证，只需证明

$$(2)\qquad (-1)^{R_{n-1}}D_0(z)-A_1(z)=(-1)^{z-1}\qquad \text{when } R_{n-1}+1\le z\le p^n.$$

正如我们所指出的，$A_{0,\ p^n,\ R_{n-1},\ S_{n-1},\ k}$ 和$D_{0,\ p^n,\ R_{n-1},\ S_{n-1},\ k}$ 本来是 A_0 和 D_0更好的记号。现在将$A_{0,\ p^n,\ p^n-R_{n-1},\ p^n-S_{n-1},\ k-e_n}$ 记作 A'_0，并将$D_{0,\ p^n,\ p^n-R_{n-1},\ p^n-S_{n-1},\ k-e_n}$ 记作 D'_0。

交换角色，将 R_{n-1} 替换为 p^n-R_{n-1}，将 S_{n-1} 替换为 p^n-S_{n-1}，并将 k 替换为 $k+p^n-R_{n-1}-S_{n-1}$。然后 $R_{n-1}-k$ 变为 $p^n-R_{n-1}-(k+p^n-R_{n-1}-S_{n-1})=S_{n-1}-k$，而 $R_{n-1}+S_{n-1}-k$ 变为 $(p^n-R_{n-1})+(p^n-S_{n-1})-(k+p^n-R_{n-1}-S_{n-1})=p^n-k$。最后 $k-e_n+p^n-(p^n-R_{n-1})-(p^n-S_{n-1})=k$。然后

$$A'_0(a)=\sum_{j=1}^{k-e_n}\delta_{k-e_n+1-j,j}\binom{\mu_k-1}{S_{n-1}-k+j-a}$$

and

$$D'_0(a)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{k+1-j,j}\binom{\mu_k-1}{p^n-k+j-a},$$

并根据引理 13,

$$A'_0(a)+(-1)^{p^n-R_{n-1}}D'_0(a)=(-1)^{a-1}$$

当 $1 \le a \le p^n - R_{n-1}$ 时。回想一下

$$D_0(a) = \sum_{j=1}^{k-e_n} \delta_{k-e_n+1-j,j} \binom{\mu_k - 1}{R_{n-1} + S_{n-1} - k + j - a}$$

and

$$A_1(a) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k+1-j,j} \binom{\mu_k - 1}{p^n + R_{n-1} - k + j - a}.$$

因此 $D_0(a) = A_0'(a - R_{n-1})$ 和 $A_1 = D_0'(a - R_{n-1})$。

若 $R_{n-1} + 1 \le a \le p^n$，则 $1 \le a - R_{n-1} \le p^n - R_{n-1}$ 和 $A_0'(a - R_{n-1}) + (-1)^{p^n - R_{n-1}} D_0'(a - R_{n-1}) = (-1)^{a - R_{n-1} - 1}$。接着

$$\begin{aligned}(-1)^{R_{n-1}} D_0(a) + (-1)^{p^n} A_1(a) &= (-1)^{R_{n-1}} \left(A_0'(a - R_{n-1}) + (-1)^{p^n - R_{n-1}} D_0'(a - R_{n-1}) \right) \\ &= (-1)^{R_{n-1}} (-1)^{a - R_{n-1} - 1} \\ &= (-1)^{a-1}.\end{aligned}$$

我们已经证明了方程2。 □

8. z_ℓ AND y_ℓ WHEN $m_{n-1} > 0$

回想一下，我们假设 $\max(r + s - p^{n+1}, 0) + 1 \le \ell \le \min(r, s)$。将 ℓ 写成 $tp^n + k$，其中 t 和 k 是整数，且 $t \ge 0$ 和 $1 \le k \le p^n$。接着

$$\max(r + s - p^{n+1}, 0) + 1 \le tp^n + k \le \min(r_n p^n + R_{n-1}, s_n p^n + S_{n-1}).$$

在引理15至20中，我们将关注某些大小为 $(t+1) \times (t+1)$ 或 $t \times t$ 的矩阵的可逆性，这些矩阵的元素是二项式系数，其中 k 被限制在 $[1, p^n]$的某些子区间内。

我们将在命题2至7中逐一处理推论 1 的五种情形时使用这些矩阵，其中第三种情形涵盖命题4和5。请注意，只有第二种和第四种情形需要借助递归。

此外，$e_n = m_{n-1} + M_{n-1} - p^n$ 和 X 将是定义在 F 上的 $(t+1) \times 1$ 矩阵，其 $(i, 1)$ 项为 $(-1)^{i-1}$。

引理 15. 设 $M(1)$ 是一个 $(t+1) \times (t+1)$，其 (i, j) 项为 $\binom{r_n + s_n - 2t}{r_n - t + j - i}$。令 $1 \le k \le m_{n-1}$。则 $M(1)$ 可逆，且 $r_n + s_n - 2t < p$。

证明. 根据引理6，只需证明 $r_n - t \le r_n + s_n - 2t$ 和 $(r_n + s_n - 2t) + t = r_n + s_n - t < p$。

由于 $tp^n + k \le \min(r_n p^n + R_{n-1}, s_n p^n + S_{n-1})$，$t \le \min(r_n, s_n)$。因此 $r_n - t \le r_n - t + s_n - t = r_n + s_n - 2t$。

由于 $\ell = tp^n + k > r + s - p^{n+1} = (r_n + s_n - p)p^n + m_{n-1} + M_{n-1}$ 且 $k \le m_{n-1} + M_{n-1}$，$t > r_n + s_n - p$。因此 $p > r_n + s_n - t$。于是 $r_n + s_n - 2t \le r_n + s_n - t < p$。 □

命题 2. 假设 $t \le \min(r_n, s_n)$ 且 $1 \le k \le \max(e_n,0)$。则根据推论 1，$\lambda_\ell = (r_n+s_n-2t)p^n+p^n$。因此，$D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$通过 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}$ 映射到 $D_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$。

(1) 定义 $z_\ell \in D_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 如下:

$$z_\ell = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i(-1)^{R_{n-1}-k}v_{ip^n+R_{n-1}+1-k,(t-i)p^n+S_{n-1}}.$$

那么 $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell) = x_{(t-1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$。

(2) 给定 $\zeta = M(1)^{-1}X$，定义 $y_\ell \in D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 如下:

$$y_\ell = \sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}(-1)^{R_{n-1}-k}v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}}.$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y_\ell) = z_\ell$.

注意,

$$z_\ell = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i\sum_{j=1}^{k}a_{k+1-j,j}v_{ip^n+R_{n-1}+j-k,(t-i)p^n+S_{n-1}+1-j}$$

由于 $A = J(R_{n-1}, S_{n-1})$ 的第 k 条反对角线为 $((-1)^{R_{n-1}-k}, 0, \ldots, 0)$，因此 y_ℓ 有相应的表达式；但这里不需要进行该递归调用。

证明。(1) 回想一下，$\mathcal{B}_{(t-1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$ 是

$$\{v_{a,(t-1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+2-k-a} \mid 1 \le a \le (t-1)p^n + R_{n-1} + S_{n-1} + 1 - k\}.$$

现在，$v_{a,\ (t-1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+2-k-a}$ 在$(g-1)^{p^n-1}(z_\ell)$中的系数 α_a 为

$$\alpha_a = \sum_{i=0}^{t}(-1)^{i+R_{n-1}-k}\binom{p^n-1}{ip^n+R_{n-1}+1-k-a}.$$

对于 $1 \le j \le t$，定义区间 $I_j = [(j-1)p^n + R_{n-1} + 2 - k,\ \ jp^n + R_{n-1} + 1 - k]$并定义 $I_0 = [1, R_{n-1}+1-k]$。由于 $1 \le a \le (t-1)p^n + m_{n-1} + M_{n-1} + 1 - k$，可知 a 恰好落在区间 I_j（其中 $0 \le j \le t$）之一中。假设$a \in I_i$。那么 $0 \le ip^n+R_{n-1}+1-k-a \le p^n-1$，并且$(-1)^{i+R_{n-1}-k}\binom{p^n-1}{ip^n+R_{n-1}+1-k-a}$是 α_a中唯一的非零项。因此

$$\begin{aligned}\alpha_a &= (-1)^{i+R_{n-1}-k}\binom{p^n-1}{ip^n+R_{n-1}+1-k-a}\\ &= (-1)^{i+R_{n-1}-k+ip^n+R_{n-1}+1-k-a}\\ &= (-1)^{i+ip^n+1-a}.\end{aligned}$$

如果 $p = 2$，那么 $(-1)^{i+ip^n+1-a} = 1 = (-1)^{a-1}$。如果 p 是奇数，那么 $i + ip^n$ 是偶数，且 $(-1)^{i+ip^n+1-a} = (-1)^{a-1}$。我们已经证明了 $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell) = x_{(t-1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$。

(2) 当 $1 \leq i \leq t+1$ the $(i,1)$ entry of $M(1)\zeta$ 是

$$(-1)^{i-1} = \sum_{j=1}^{t+1} \binom{r_n + s_n - 2t}{r_n - t + j - i} \zeta_{j,1} = \sum_{j=0}^{t} \binom{r_n + s_n - 2t}{r_n - t + j + 1 - i} \zeta_{j+1,1}.$$

根据推论 2，由于在 $\mathcal{B}_{tp^n + R_{n-1} + S_{n-1} - k}$ 中，在 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y_\ell)$ 中系数可能非零的唯一向量是 $v_{ap^n + R_{n-1} + 1 - k,\ (t-a)p^n + S_{n-1}}$，其中 $0 \leq a \leq t$,

$$\begin{aligned}(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}&(v_{(r_n-t+i)p^n + R_{n-1} + 1 - k, (s_n - i)p^n + S_{n-1}}) \\ &= \sum_{a=0}^{t} \binom{r_n + s_n - 2t}{r_n - t + i - a} v_{ap^n + R_{n-1} + 1 - k, (t-a)p^n + S_{n-1}},\end{aligned}$$

利用 $r_n + s_n - 2t < p$ 这一事实，该事实来自引理 15。

因此

$$\begin{aligned}&(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y_\ell) \\ &\quad = \sum_{i=0}^{t} \zeta_{i+1,1} (-1)^{R_{n-1}-k} \left(\sum_{a=0}^{t} \binom{r_n + s_n - 2t}{r_n - t + i - a} v_{ap^n + R_{n-1} + 1 - k, (t-a)p^n + S_{n-1}} \right) \\ &\quad = (-1)^{R_{n-1}-k} \sum_{a=0}^{t} \left(\sum_{i=0}^{t} \binom{r_n + s_n - 2t}{r_n - t + i - a} \zeta_{i+1,1} \right) v_{ap^n + R_{n-1} + 1 - k, (t-a)p^n + S_{n-1}} \\ &\quad = (-1)^{R_{n-1}-k} \sum_{a=0}^{t} (-1)^a v_{ap^n + R_{n-1} + 1 - k, (t-a)p^n + S_{n-1}} \\ &\quad = z_\ell.\end{aligned}$$

□

引理 16。 假设 $M(2)$ 是一个具有 $(i,\ j)$ 项 $\binom{r_n+s_n-2t}{r_n-t+j-i}$ 且 $1 \leq k \leq m_{n-1}$ 的 $t \times t$。那么 $M(2)$ 可逆，且 $r_n + s_n - 2t < p$。

证明。与引理 15 的证明类似，只是我们需要证明 $r_n + s_n - 2t + t - 1 = r_n + s_n - t - 1 < p$。由于 $tp^n + k > (r_n + s_n - p)p^n + m_{n-1} + M_{n-1}$ 且 $k \leq m_{n-1} + M_{n-1}$, $t > r_n + s_n - p$，因此 $p > r_n + s_n - t$。同样，$r_n + s_n - 2t \leq r_n + s - n - t < p$。□

令 Y 为 $t \times 1$ 矩阵，其第 $(i,1)$ 个元素为 $(-1)^{i-1}$；而 X 为 $(t+1) \times 1$ 矩阵，其第 $(i,1)$ 个元素为 $(-1)^{i-1}$。

命题 3. 假设 $t \leq \min(r_n,\ s_n)$ 且 $\max(e_n,\ 0) + 1 \leq k \leq m_{n-1}$。那么根据推论 1，$\lambda_\ell = (r_n + s_n - 2t)p^n + \mu_k$。因此，$(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}$ 将 $D_{(r_n+s_n-t)p^n + R_{n-1} + S_{n-1} - k}$ 映射到 $D_{tp^n + R_{n-1} + S_{n-1} - k}$。假设已知 $A = J(R_{n-1},\ S_{n-1})$ 和 $D = J(p^n - R_{n-1},\ p^n - S_{n-1})$。

(1) 定义 $z_\ell \in D_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 为

$$z_\ell = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} v_{ip^n+R_{n-1}-k+j,(t-i)p^n+S_{n-1}+1-j} + (-1)^{R_{n-1}} \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i \sum_{j=1}^{k-e_n} d_{k-e_n+1-j,j} v_{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(t-i)p^n+1-j}.$$

则 $(g-1)^{\mu_k-1}(z_\ell) = x_{tp^n+k'}$。

(2) 由 $\zeta = M(1)^{-1}X$ 与 $\eta = M(2)^{-1}Y$，定义 $y_\ell \in D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 为

$$y_\ell = \sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1} \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+j-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}+1-j} + (-1)^{R_{n-1}} \sum_{i=0}^{t-1}\eta_{i+1,1} \sum_{j=1}^{k-e_n} d_{k-e_n+1-j,j} v_{(r_n-t+i)p^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(s_n-i)p^n+1-j}$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y_\ell) = z_\ell$.

证明。 (1) $v_{z,\ (t-1)p^n+k'+1-z}$ 在 $(g-1)^{\mu_k-1}(z_\ell)$ 中的系数为

$$\sum_{i=0}^{t}(-1)^i \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} \binom{\mu_k-1}{ip^n+R_{n-1}-k+j-z} + (-1)^{R_{n-1}} \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i \sum_{j=1}^{k-e_n} d_{k-e_n+1-j,j} \binom{\mu_k-1}{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k-z}.$$

但当 $1 \le z \le tp^n + k'$ 时，由定理 2，这等于 $f_t(z) = (-1)^{z-1}$。我们已经证明 $(g-1)^{\mu_k-1}(z_\ell) = x_{tp^n+k'}$。

(2) 设

$$z'_\ell = \sum_{i=0}^{t}(-1)^i \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} v_{ip^n+R_{n-1}-k+j,(t-i)p^n+S_{n-1}+1-j},$$

$$z''_\ell = \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i \sum_{j=1}^{k-e_n} d_{k-e_n+1-j,j} v_{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(t-i)p^n+1-j},$$

$$y'_\ell = \sum_{i=0}^{t}\zeta_{i,0} \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+j-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}+1-j},$$

and

$$y''_\ell = \sum_{i=0}^{t-1}\eta_{i,0} \sum_{j=1}^{k-e_n} d_{k-e_n+1-j,j} v_{(r_n-t+i)p^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(s_n-i)p^n+1-j},$$

因此 $z_\ell = z'_\ell + (-1)^{R_{n-1}} z''_\ell$ 和 $y_\ell = y'_\ell + (-1)^{R_{n-1}} y''_\ell$。我们将通过证明 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y'_\ell) = z'_\ell$ 和 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y''_\ell) = z''_\ell$ 来证明我们的结果。

根据推论 2，由于在 $\mathcal{B}_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 中，在 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+j-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}+1-j})$ 中可能具有非零系数的向量只有 $v_{ap^n+R_{n-1}-k+j,(t-a)p^n+S_{n-1}+1-j}$，且 $0 \le a \le t$,

$$(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}\left(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+j-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}+1-j}\right) = \sum_{a=0}^{t} \binom{r_n-s_n-2t}{r-t+i-a} v_{ap^n+R_{n-1}-k+j,(t-a)p^n+S_{n-1}+1-j},$$

利用引理 15 得知 $r_n - s_n - 2t < p$。当 $1 \le i \le t+1$ 的（i，1）项 $M(1)\zeta$ 为

$$(-1)^{i-1} = \sum_{j=1}^{t+1} \binom{r_n+s_n-2t}{r_n-t+j-i} \zeta_{j,1} = \sum_{j=0}^{t} \binom{r_n+s_n-2t}{r_n-t+j+1-i} \zeta_{j+1,1}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y'_\ell) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{t} \zeta_{i+1,1} \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} \sum_{a=0}^{t} \binom{r_n-s_n-2t}{r-t+i-a} v_{ap^n+R_{n-1}-k+j,(t-a)p^n+S_{n-1}+1-j} \\
&\quad = \sum_{a=0}^{t} \left(\sum_{i=0}^{t} \binom{r_n-s_n-2t}{r-t+i-a} \zeta_{i+1,1} \right) \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} v_{ap^n+R_{n-1}-k+j,(t-a)p^n+S_{n-1}+1-j} \\
&\quad = \sum_{a=0}^{t} (-1)^a \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j,j} v_{ap^n+R_{n-1}-k+j,(t-a)p^n+S_{n-1}+1-j} \\
&\quad = z'_\ell.
\end{aligned}$$

再次由推论 2 可知，由于在 $g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(s_n-i)p^n+1-j})$ 中可能具有非零系数的唯一向量是 $\mathcal{B}_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ $v_{ap^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(t-a)p^n+1-j}$，其中 $0 \le a \le t-1$,

$$(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}\left(v_{(r_n-t+i)p^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(s_n-i)p^n+1-j}\right) = \sum_{a=0}^{t-1} \binom{r_n+s_n-2t}{r_n-t+i-a} v_{ap^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(t-a)p^n+1-j},$$

利用引理 16 得知 $r_n + s_n - 2t < p$。

当 $1 \le i \le t$ $M(2)\eta$的$(i,\ 1)$元为

$$(-1)^{i-1} = \sum_{j=1}^{t} \binom{r_n+s_n-2t}{r_n-t+j-i} \eta_{j,1} = \sum_{j=0}^{t-1} \binom{r_n+s_n-2t}{r_n-t+j+1-i} \eta_{j+1,1}.$$

因此

$$
\begin{aligned}
&(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y''_\ell)\\
&\quad=\sum_{i=0}^{t-1}\eta_{i+1,1}\sum_{j=1}^{k-e_n}d_{k-e_n+1-j,j}\sum_{a=0}^{t-1}\binom{r_n+s_n-2t}{r_n-t+i-a}v_{ap^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(t-a)p^n+1-j}\\
&\quad=\sum_{a=0}^{t-1}\left(\sum_{i=0}^{t-1}\binom{r_n+s_n-2t}{r_n-t+i-a}\eta_{i+1,1}\right)\sum_{j=1}^{k-e_n}d_{k-e_n+1-j,j}v_{ap^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(t-a)p^n+1-j}\\
&\quad=\sum_{a=0}^{t-1}(-1)^a\sum_{j=1}^{k-e_n}d_{k-e_n+1-j,j}v_{ap^n+m_{n-1}+M_{n-1}+j-k,(t-a)p^n+1-j}\\
&\quad=z''_\ell.
\end{aligned}
$$

我们已证明 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t)p^n}(y_\ell)=z_\ell$。 □

引理17。 假设 $M(3)$ 是 $(t+1)\times(t+1)$，其 (i,j) 项为 $\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j-i-1}$，并且 $m_{n-1}+1\le k\le M_{n-1}$ 或 $M_{n-1}+1\le k\le p^n-e_2$。那么 $M(3)$ 可逆，且 $r_n+s_n-2t-1<p$。

证明。 根据引理6，只需证明 $r_n-t-1\le r_n+s_n-2t-1$ 和 $(r_n+s_n-2t-1)+t=r_n+s_n-t-1<p$。

由于 $tp^n+k\le\min(r_np^n+R_{n-1},s_np^n+S_{n-1})$，$t\le\min(r_n,s_n)$。因此 $r_n-t-1\le(r_n-t-1)+(s_n-t)=r_n+s_n-2t-1$。

假设 $m_{n-1}+1\le k\le M_{n-1}$。由于 $tp^n+k>(r_n+s_n-p)p^n+m_{n-1}+M_{n-1}$且 $k\le m_{n-1}+M_{n-1}$, $t>r_n+s_n-p$，由此可得 $p>r_n+s_n-t>r_n+s_n-t-1$。因此 $r_n+s_n-2t-1<p$。

假设 $M_{n-1}+1\le k\le p^n-e_2$。那么 p^n-e_2 等于 $m_{n-1}+M_{n-1}$，如果 $m_{n-1}+M_{n-1}\le p^n$；或者等于 p^n，如果 $m_{n-1}+M_{n-1}>p^n$。两种情况下都有 $k\le m_{n-1}+M_{n-1}$，因此上一段的论证仍然成立。同样可得 $r_n+s_n-2t-1<p$。□

现在我们来看 $m_{n-1}+1\le k\le M_{n-1}$ 的情形。由于当 $m_{n-1}=M_{n-1}$ 时它为空，我们假设 $m_{n-1}<M_{n-1}$。这分为两种情况：$R_{n-1}<S_{n-1}$ 和 $R_{n-1}>S_{n-1}$。

命题4. 假设 $R_{n-1}<S_{n-1}$, $t\le\min(r_n-1,\ s_n)$，且 $R_{n-1}+1\le k\le S_{n-1}$。则根据推论 1，$\lambda_\ell=(r_n+s_n-2t)p^n$。因此，$(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}$将 $D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 映射到 $D_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$。

(1) 定义 $z_\ell\in D_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 为

$$z_\ell=(-1)^{R_{n-1}}\sum_{i=0}^{t}(-1)^{i+k-1}v_{(i+1)p^n+R_{n-1}+1-k,(t-i)p^n+S_{n-1}}$$

那么 $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell)=x_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$。

(2) Let $\zeta = M(3)^{-1}X$. Define $y_\ell \in D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ by

$$y_\ell = (-1)^{R_{n-1}+k-1}\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}}.$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y_\ell) = z_\ell$.

注意,

$$z_\ell = (-1)^{R_{n-1}}\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\sum_{j=1}^{k-R_{n-1}}b_{k-R_{n-1}+1-j,j}v_{(i+1)p^n+R_{n-1}+j-k,(t-i)p^n+S_{n-1}+1-j}$$

对于 y_ℓ，有相应的表达式，因为 $B = J(p^n - R_{n-1},\ S_{n-1})$ 的第 k' 个反对角线（其中 $1 \le k' \le S_{n-1}-R_{n-1}$）为 $((-1)^{R_{n-1}+k'-1},\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$，所以 $b_{k-R_{n-1},\ 1} = (-1)^{k-1}$，但这里我们不需要进行那次递归调用。

证明。(1) 回顾一下，$\mathcal{B}_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$ 由 $v_{a,\ tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k-a}$组成，其中 $1 \le a \le tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k$。$(g-1)^{p^n-1}(z_\ell)$ 中 $v_{a,\ tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+2-k-a}$的系数 α_a 为

$$(-1)^{R_{n-1}}\sum_{i=0}^{t}(-1)^{i+k-1}\binom{p^n-1}{(i+1)p^n+R_{n-1}+1-k-a}.$$

通过一个如今已熟悉的论证，满足$\binom{\ }{i+1\qquad\qquad()p^n+R_{n-1}+1-k-a} \ne 0$的 i 只有一个。因此

$$\begin{aligned}\alpha_a &= (-1)^{R_{n-1}+i+k-1}\binom{p^n-1}{(i+1)p^n+R_{n-1}+1-k-a}\\ &= (-1)^{R_{n-1}+i+k-1}(-1)^{(i+1)p^n+R_{n-1}+1-k-a}\\ &= (-1)^{p^n-a}\\ &= (-1)^{a-1}.\end{aligned}$$

这就证明了 $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell) = x_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$。

(2) 当 $1 \le i \le t+1$ $M(3)\zeta$的 $(i,1)$ 项为

$$(-1)^{i-1} = \sum_{j=1}^{t+1}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j-i-1}\zeta_{j,1} = \sum_{j=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j-i}\zeta_{j+1,1}.$$

由推论 2 可知，因为 $\mathcal{B}_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 中在 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}})$ 中可能具有非零系数的向量只有$v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+1-k,(t-a)p^n+S_{n-1}}$，且 $0 \le a \le t$,

$$\begin{aligned}&(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}}\\ &\qquad = \sum_{a=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+i-a-1}v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+1-k,(t-a)p^n+S_{n-1}},\end{aligned}$$

利用这一事实：$r_n+s_n-2t-1 < p$ 根据引理17。

因此

$$
\begin{aligned}
&(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y_\ell)\\
&\quad=(-1)^{R_{n-1}+k-1}\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}\left(\sum_{a=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+i-a-1}v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+1-k,(t-a)p^n+S_{n-1}}\right)\\
&\quad=(-1)^{R_{n-1}+k-1}\sum_{a=0}^{t}\left(\sum_{i=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+i-a-1}\zeta_{i+1,1}\right)v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+1-k,(t-a)p^n+S_{n-1}}\\
&\quad=(-1)^{R_{n-1}+k-1}\sum_{a=0}^{t}(-1)^a v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+1-k,(t-a)p^n+S_{n-1}}\\
&\quad=z_\ell.
\end{aligned}
$$

□

引理 18. 假设 $M(4)$ 是 $(t+1)\times(t+1)$，其 (i,j) 项为 $\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j-i}$，并且 $S_{n-1}+1\le k\le R_{n-1}$ 或 $M_{n-1}+1\le k\le p^n-e_2$。那么 $M(4)$ 可逆，且 $r_n+s_n-2t-1<p$。

证明. 根据引理6，只需证明 $r_n-t\le r_n+s_n-2t-1$ 和 $(r_n+s_n-2t-1)+t=r_n+s_n-t-1<p$。

由于在两种情况下 $tp^n+k\le s_np^n+S_{n-1}$ 和 $k>S_{n-1}$，因此 $t\le s_n-1$。

于是 $r_n-t\le(r_n-t)+(s_n-t-1)=r_n+s_n-2t-1$。

在这两种情况下 $k\le m_{n-1}+M_{n-1}$。由于 $tp^n+k>(r_n+s_n-p)p^n+m_{n-1}+M_{n-1}$，$t>r_n+s_n-p$。因此 $p>r_n+s_n-t>r_n+s_n-t-1$。由此可得 $r_n+s_n-2t-1<p$。□

命题 5. 假设 $R_{n-1}>S_{n-1}$，$S_{n-1}+1\le k\le R_{n-1}$，且 $t\le\min(r_n,s_n-1)$。那么根据推论 1，$\lambda_\ell=(r_n+s_n-2t)p^n$。因此 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}$将$D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 映射到 $D_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$。

(1) Define $z_\ell\in D_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ by

$$z_\ell=(-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k}\sum_{i=0}^{t}(-1)^i v_{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-i+1)p^n}$$

The $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell)=x_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$.

(2) Let $\zeta=M(4)^{-1}X$. Define $y_\ell\in D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ by

$$y_\ell=(-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k}\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(s_n-t)p^n}.$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y_\ell)=z_\ell$.

注意

$$z_\ell=\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\sum_{j=1}^{k-S_{n-1}}c_{k-S_{n-1}+1-j,j}v_{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(t-i+1)p^n+1-j}$$

对于 y_ℓ，有相应的表达式，因为 $C = J(R_{n-1},\ p^n\text{–}S_{n-1})$ 的第 k' 条反对角线（其中 $1 \le k' \le R_{n-1} - S_{n-1}$）为 $((-1)^{R_{n-1}-k'},\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$，因此 $c_{k-S_{n-1},\ 1} = (-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k}$，但这里无需进行该递归调用。

证明。(1) 这里 $\lambda_\ell = (r_n + s_n - 2t)p^n$。回想一下，$\mathcal{B}_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$ 由 $v_{a,\ tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+2-k-a}$ 组成，其中 $1 \le a \le tp^n + R_{n-1} + S_{n-1} + 1 - k$。$v_{a,\ tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+2-k-a}$ 在 $(g-1)^{(p^n-1)}(z_\ell)$ 中的系数是

$$(-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k}\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{p^n-1}{ip^n + R_{n-1} + S_{n-1} + 1 - k - a}.$$

根据一个如今已熟悉的论证，只有一个 i 满足 $\binom{p^n-1}{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k-a} \neq 0$。因此

$$\begin{aligned}\alpha_a &= (-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k+i}\binom{p^n-1}{ip^n + R_{n-1} + S_{n-1} + 1 - k - a}\\ &= (-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k+i}(-1)^{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k-a}\\ &= (-1)^{a-1}.\end{aligned}$$

我们已证明 $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell) = x_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$。

(2) 根据推论 2，由于在 $\mathcal{B}_{tp^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$ 中，$(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(s_n-t)p^n})$ 中具有非零系数的向量只有 $v_{ap^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n}$，且满足 $0 \le a \le t$，

$$\begin{aligned}&(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}\left(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(s_n-t)p^n}\right)\\ &\qquad = \sum_{a=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+i-a}v_{ap^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n},\end{aligned}$$

利用引理 18 得出的事实 $r_n + s_n - 2t - 1 < p$。

当 $1 \le i \le t+1$ 时，$M(4)\zeta$ 的 $(i,1)$ 项为

$$(-1)^{i-1} = \sum_{j=1}^{t+1}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j-i}\zeta_{j,1} = \sum_{j=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j+1-i}\zeta_{j+1,1}.$$

Then

$$\begin{aligned}&(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y_\ell)\\ &\quad= (-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k}\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}\left(\sum_{a=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+i-a}v_{ap^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n}\right)\\ &\quad= (-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k}\sum_{a=0}^{t}\left(\sum_{i=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+i-a}\zeta_{i+1,1}\right)v_{ap^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n}\\ &\quad= (-1)^{R_{n-1}+S_{n-1}-k}\sum_{a=0}^{t}(-1)^a v_{ap^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n}\\ &\quad= z_\ell.\end{aligned}$$

我们已经证明了 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y_\ell) = z_\ell$。 □

在接下来的两个命题中， $p^n-\max(-e_n,0) = m_{n-1}+M_{n-1}$ 若 $m_{n-1}+M_{n-1} \le p^n$则等于 p^n ，否则为其他值。首先，我们整理一些用于命题 6 的结果。

引理 19. 当 $M_{n-1}+1 \le k \le p^n - \max(-e_n,0)$ 时，

(1) $\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k} = k_0+k_\infty-1-m_{n-1}-M_{n-1}$, (2)
$p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}-1 = p^n+m_{n-1}+M_{n-1}-k_0-k_\infty$, (3)
$R_{n-1}+S_{n-1}+1-k+\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k} = k'$。

证明。现在

$$\begin{aligned}\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k} &= m_{n-1}+M_{n-1}+1-(m_{n-1}+M_{n-1}+1-k)_0\\ &\quad -(m_{n-1}+M_{n-1}+1-k)_\infty\\ &= k_0+k_\infty-1-m_{n-1}-M_{n-1},\end{aligned}$$

$$p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}-1 = p^n+m_{n-1}+M_{n-1}-k_0-k_\infty,$$

and

$$\begin{aligned}R_{n-1}+S_{n-1}+1-k+\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k} &= R_{n-1}+S_{n-1}+1-k\\ &\quad +k_0+k_\infty-1-m_{n-1}-M_{n-1}\\ &= k'.\end{aligned}$$

□

命题 6. 假设 $t \le \min(r_n-1, s_n-1)$ 和 $M_{n-1}+1 \le k \le p^n-\max(-e_n,0)$。那么 $\lambda_\ell = (r_n+s_n-2t)p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}$, $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}$将$D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 映射到 $D_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$，而 $D_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$通过 $(g-1)^{p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}-1} = (g-1)^{p^n+m_{n-1}+M_{n-1}-k_0-k_\infty}$映射到 $D_{tp^n+k'}$。假设已知 $C = J(R_{n-1}, p^n-S_{n-1})$ 和 $B = J(p^n-R_{n-1}, S_{n-1})$。

(1) Define $z_\ell \in D_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ by

$$\begin{aligned}z_\ell &= \sum_{i=0}^{t}(-1)^i \sum_{j=1}^{k-S_{n-1}} c_{k-S_{n-1}+1-j,j}v_{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(t+1-i)p^n+1-j}\\ &\quad +(-1)^{R_{n-1}}\sum_{i=0}^{t}(-1)^i \sum_{j=1}^{k-R_{n-1}} b_{k-R_{n-1}+1-j,j}v_{(i+1)p^n+R_{n-1}+j-k,(t-i)p^n+S_{n-1}+1-j}\end{aligned}$$

Then $(g-1)^{p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}-1}(z_\ell) = x_{tp^n+k'}$.

(2) Let $\zeta = M(4)^{-1}X$ and $\eta = M(3)^{-1}X$, define $y_\ell \in D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ by

$$\begin{aligned}y_\ell &= \sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1} \sum_{j=1}^{k-S_{n-1}} c_{k-S_{n-1}+1-j,j}v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(s_n-t)p^n+1-j}\\ &\quad +(-1)^{R_{n-1}}\sum_{i=0}^{t}\eta_{i+1,1} \sum_{j=1}^{k-R_{n-1}} b_{k-R_{n-1}+1-j,j}v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+j-k,(s_n-t)p^n+S_{n-1}+1-j}\end{aligned}$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y_\ell) = z_\ell$.

证明. (1) $(g-1)^{p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}-1}(z_\ell)$ 中 $v_{a,tp^n+k'+1-a}$ 的系数 α_a 为

$$\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\sum_{j=1}^{k-S_{n-1}}c_{k-S_{n-1}+1-j,j}\binom{p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}-1}{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k-a}$$
$$+(-1)^{R_{n-1}}\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\sum_{j=1}^{k-R_{n-1}}b_{k-R_{n-1}+1-j,j}\binom{p^n-\mu_{m_{n-1}+M_{n-1}+1-k}-1}{(i+1)p^n+R_{n-1}+j-k-a}.$$

回顾

$$V_{R_{n-1}}\otimes V_{p^n-S_{n-1}}\cong\max(f_n,0)\cdot V_{p^n}\oplus V_{p^n-\mu_{m_{n-1}}}\oplus\cdots\oplus V_{p^n-\mu_{\max(e_n,0)+1}}.$$

当 $R_{n-1}\le S_{n-1}$ 时，因此 $\max(f_n,\ 0)\ =0$, $V_{p^n-\mu_{m_{n-1}+1-(k-M_{n-1})}}$ 是 $k-M_{n-1}=k-S_{n-1}$ 的求和项，属于 $V_{R_{n-1}}\otimes V_{p^n-S_{n-1}}$。

当 $R_{n-1}>S_{n-1}$ 时，因此 $\max(f_n,\ 0)\ =R_{n-1}-S_{n-1}$,$V_{p^n-\mu_{m_{n-1}+1-(k-M_{n-1})}}$ 是 $R_{n-1}-S_{n-1}+(k-M_{n-1})\ =k-S_{n-1}$ 的求和项，属于 $V_{R_{n-1}}\otimes V_{p^n-S_{n-1}}$。

在定理 2 中，将 S_{n-1} 替换为 p^n-S_{n-1}，将 $(k,\ k')$ 替换为 $(k-S_{n-1},\ k'-S_{n-1})$，将 $k-e_n$ 替换为 $k-S_{n-1}-(R_{n-1}-S_{n-1})\ =k-R_{n-1}$，将 $(A,\ D)$ 替换为 $(C,\ B)$，将 $tp^n+p^n-S_{n-1}+k'$ 替换为 $tp^n+p^n-(p^n-S_{n-1})+k'-S_{n-1}=tp^n+k'$，并将 μ_k 替换为 $p^n-\mu_{m_{n-1}+1-(k-M_{n-1})}$，由此可得，当 $1\le a\le tp^n+k'$ 时，$\alpha_a=f_t(a)\ =(-1)^{a-1}$。我们已经证明了所要的结果。

（2）设

$$z'_\ell=\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\sum_{j=1}^{k-S_{n-1}}c_{k-S_{n-1}+1-j,j}v_{ip^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(t+1-i)p^n+1-j},$$

$$z''_\ell=\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\sum_{j=1}^{k-R_{n-1}}b_{k-R_{n-1}+1-j,j}v_{(i+1)p^n+R_{n-1}+j-k,(t-i)p^n+S_{n-1}+1-j},$$

$$y'_\ell=\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}\sum_{j=1}^{k-S_{n-1}}c_{k-S_{n-1}+1-j,j}v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(s_n-t)p^n+1-j},$$

and

$$y''_\ell=\sum_{i=0}^{t}\eta_{i+1,1}\sum_{j=1}^{k-R_{n-1}}b_{k-R_{n-1}+1-j,j}v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+j-k,(s_n-t)p^n+S_{n-1}+1-j},$$

因此 $z_\ell\ =\ z'_\ell+(-1)^{R_{n-1}}z''_\ell$ 以及 $y_\ell\ =\ y'_\ell+(-1)^{R_{n-1}}y''_\ell$。我们将证明 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y'_\ell)\ =z'_\ell$ 以及 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y''_\ell)\ =z''_\ell$。

当 $1\le i\le t+1$ 式 (i,j) 中 $M(4)\zeta$ 项为

$$(-1)^{i-1}=\sum_{j=1}^{t+1}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j-i}\zeta_{j,1}=\sum_{j=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j+1-i}\zeta_{j+1,1}.$$

由推论 2 可知，由于 $\mathcal{B}_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 中在 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(s_n-t)p^n+1-j})$ 中具有非零系数的向量是

$v_{ap^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(t+1-a)p^n+1-j}$ 满足 $0 \le a \le t$,

$$(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(s_n-t)p^n+1-j}) = \sum_{a=0}^{t} \binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+i-a} v_{ap^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(t+1-a)p^n+1-j},$$

利用引理17得知 $r_n+s_n-2t-1<p$。最后两步计算按通常方式合并，可得 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y'_\ell) = z'_\ell$。

当 $1 \le i \le t+1$ 的 $(i,\ j)$ 项为

$$(-1)^{i-1} = \sum_{j=1}^{t+1} \binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j-i-1} \eta_{j,1} = \sum_{j=0}^{t} \binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+j-i} \eta_{j+1,1}.$$

根据推论 2，由于在 $\mathcal{B}_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 中，$(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+j-k,\ (s_n-t)p^n+S_{n-1}+1-j})$ 中系数非零的向量只有 $v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+j-k,\ (t-a)p^n+S_{n-1}+1-j}$，且 $0 \le a \le t$,

$$(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+j-k,(s_n-t)p^n+S_{n-1}+1-j}) = \sum_{a=0}^{t} \binom{r_n+s_n-2t-1}{r_n-t+i-a-1} v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+j-k,(t-a)p^n+S_{n-1}+1-j},$$

利用引理 18 得到的事实 $r_n+s_n-2t-1<p$。按通常方式合并最后两项计算，可得 $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y''_\ell) = z''_\ell$。□

引理 20。假设 $M(5)$ 是 $(t+1)\times(t+1)$，其中 $(i,\ j)$ 项为 $\binom{r_n+s_n-2t-2}{r_n-t+j-i-1}$，且 $m_{n-1}+M_{n-1}+1 \le k \le p^n$。那么 $M(5)$ 可逆，且 $r_n+s_n-2t-2<p$。

证明。根据引理6，只需证明 $r_n-t-1 \le r_n+s_n-2t-2$ 和 $(r_n+s_n-2t-2)+t = r_n+s_n-t-2<p$。

由于 $tp^n+k \le r_np^n+R_{n-1}$ 且 $tp^n+k \le s_np^n+S_{n-1}$ 且 $k > \max(R_{n-1},S_{n-1})$，$t \le \min(r_n-1,s_n-1)$。因此 $r_n+s_n-2t-2 = (r_n-t-1)+(s_n-t-1) \ge r_n-t-1$。

由于 $tp^n+k > (r_n+s_n-p)p^n+m_{n-1}+M_{n-1}$ 且 $k > m_{n-1}+M_{n-1}$，$t \ge r_n+s_n-p$，因为如果 $t \le r_n+s_n-p-1$，那么 $tp^n+k \le (r_n+s_n-p)p^n$。由此可得 $p \ge r_n+s_n-t > r_n+s_n-t-2$。因此 $r_n+s_n-2t-2<p$。□

现在我们来看 $m_{n-1}+M_{n-1}+1 \le k \le p^n$ 的情形，这种情形只会在 $m_{n-1}+M_{n-1}<p^n$时出现。

命题 7. 假设 $m_{n-1}+M_{n-1}+1 \le k \le p^n$ 和 $t \le \min(r_n-1,s_n-1)$。那么根据推论 1，$\lambda_\ell = (r_n+s_n-2t-1)p^n$。因此，$(g-1)^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}$ 将 $D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ 映射到 $D_{(t+2)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$。

(1) Define $z_\ell \in D_{(t+2)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ by

$$z_\ell = (-1)^{R_{n-1}} \sum_{i=0}^{t} (-1)^i (-1)^{k-S_{n-1}-1} v_{(i+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-i+1)p^n}$$

Then $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell) = x_{(t+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k}$.

(2) Let $\zeta = M(5)^{-1}X$. Define $y_\ell \in D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ by

$$y_\ell = (-1)^{k+R_{n-1}-S_{n-1}-1}\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n}.$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}(y_\ell) = z_\ell$.

注意,

$$z_\ell = (-1)^{R_{n-1}}\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\sum_{j=1}^{k-m_{n-1}-M_{n-1}} d_{k-m_{n-1}-M_{n-1}+1-j,j}v_{(i+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+j-k,(t-i+1)p^n+1-j}$$

对应于 y_ℓ 的表达式为：由于 $D = J(p^n - R_{n-1},\ p^n - S_{n-1})$ 的第 k' 条反对角线为 $((-1)^{R_{n-1}+k'-1},\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$，其中 $1 \le k' \le p^n - m_{n-1} - M_{n-1}$，因此 $d_{k-m_{n-1}-M_{n-1},\ 1} = (-1)^{k-S_{n-1}-1}$，但此处无需进行该递归调用。

证明。(1) $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell)$ 中 $v_{a,\ (t+2)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+2-k-a}$ 的系数 α_a 为

$$\sum_{i=0}^{t}(-1)^{i+k+R_{n-1}-S_{n-1}-1}\binom{p^n-1}{(i+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k-a}.$$

这些项中恰有一项非零。因此

$$\begin{aligned}\alpha_a &= (-1)^{i+k+R_{n-1}-S_{n-1}-1}\binom{p^n-1}{(i+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k-a}\\ &= (-1)^{i+k+R_{n-1}-S_{n-1}-1}(-1)^{(i+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k-a}\\ &= (-1)^{1-a}\\ &= (-1)^{a-1}.\end{aligned}$$

这里用到了这样一个事实：如果 p 是奇数，那么 $i+(i+1)p^n$ 也是奇数。

(2) 当 $M(5)\zeta$ 的第 $(i,\ 1)$ 个元素为

$$(-1)^{i-1} = \sum_{j=1}^{t+1}\binom{r_n+s_n-2t-2}{r_n-t+j-i-1}\zeta_{j,1} = \sum_{j=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-2}{r_n-t+j-i}\zeta_{j+1,1}.$$

根据推论 2，由于在 $\mathcal{B}_{(t+2)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}-k}$ $(g-1^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}(v_{(r_n-t+i)}$ $_{p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n})$ 中，只有$v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n}$ 的系数非零，且 $0 \le a \le t$,

$$\begin{aligned}&(g-1)^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}(v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n})\\ &\qquad = \sum_{a=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-2}{r_n-t+i-a-1}v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n},\end{aligned}$$

利用引理 20 中的事实 $r_n+s_n-2t-2 < p$。

令 $z'_\ell = (-1)^{k+R_{n-1}-S_{n-1}-1}z_\ell$ 和 $y'_\ell = (-1)^{k+R_{n-1}-S_{n-1}-1}y_\ell$，我们将证明

$$(g-1)^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}(y'_\ell) = (-1)^{(-1)^{k+R_{n-1}-S_{n-1}-1}}z'_\ell.$$

Then

$$\begin{aligned}
&(g-1)^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}(y'_\ell)\\
&\quad=\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}\left(\sum_{a=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-2}{r_n-t+i-a-1}v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n}\right)\\
&\quad=\sum_{a=0}^{t}\left(\sum_{i=0}^{t}\binom{r_n+s_n-2t-2}{r_n-t+i-a-1}\zeta_{i+1,1}\right)v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n}\\
&\quad=\sum_{a=0}^{t}(-1)^a v_{(a+1)p^n+R_{n-1}+S_{n-1}+1-k,(t-a+1)p^n}\\
&\quad=z'_\ell.
\end{aligned}$$

□

仔细考察本节中的结果可以看出，当 $|\{i \mid \lambda_i=\lambda_\ell\}|>1$ 时，我们对 y_ℓ（以及 z_ℓ）的选择与第 2 节中的引理 2一致。例如，在命题 2 中，项 $(-1)^{R_{n-1}-k}$ 的存在确保了这一点。而在命题 3 中，$a_{k+1-j,\ j}$ 来自 $J(R_{n-1},\ S_{n-1})$，且 $d_{k-e_n+1-j,\ j}$ 来自$J(p^n-R_{n-1},\ p^n-S_{n-1})$，它们满足对 μ_k 的要求，这意味着 y_ℓ 也满足该要求。

9. z_ℓ AND y_ℓ WHEN $m_{n-1}=0$

我们仍假设 $\max(r+s-p^{n+1},\ 0)+1\le\ell=tp^n+k\le\min(r,\ s)$，其中$t$和 k是满足 $1\le k\le p^n$的非负整数。矩阵 $M(3)$、$M(4)$ 和$M(5)$ 均在第 8 节中定义，而 X 将是一个定义在 F 上的 $(t+1)\times 1$ 矩阵，其 $(i,\ 1)$ 项为 $(-1)^{i-1}$。

引理 21。假设 $M_{n-1}=0$。在这种情况下，$r=r_np^n$ 和 $s=s_np^n$。假设 t 和 k 是满足 $0\le t\le\min(r_n-1,\ s_n-1)$ 和 $1\le k\le p^n$的整数。那么，根据定理 1，$\lambda_\ell=(r_n+s_n-2t-1)p^n$。

(1) Define $z_\ell\in D_{(t+2)p^n-k}$ by

$$z_\ell=\sum_{i=0}^{t}(-1)^i(-1)^{k-1}v_{(i+1)p^n+1-k,(t-i+1)p^n}.$$

Then $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell)=x_{(t+1)p^n+1-k}$.

(2) Let $\zeta=M(5)^{-1}X$. Define $y_\ell\in D_{(r_n+s_n-t)p^n-k}$ by

$$y_\ell=\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}(-1)^{k-1}v_{(r_n-t+i)p^n+1-k,(s_n-i)p^n}.$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}(y_\ell)=z_\ell$.

这一结果是命题 7 的特例。

引理 22. 假设 $m_{n-1}=0$，且 $M_{n-1}=R_{n-1}>0$。在此情形下，$r=r_np^n+R_{n-1}$ 且 $s=s_np^n$。假设 t 和 k 是满足$0\le t\le\min(r_n,s_n-1)$ 且 $1\le k\le R_{n-1}$的整数。那么，由定理 1 可得 $\lambda_\ell=(r_n+s_n-2t)p^n$。

(1) 定义 $z_\ell \in D_{(t+1)p^n+R_{n-1}-k}$ 如下

$$z_\ell = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i (-1)^{R_{n-1}-k} v_{ip^n+R_{n-1}+1-k,(t-i+1)p^n}.$$

那么 $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell) = x_{tp^n+R_{n-1}+1-k}$。

(2) 设 $\zeta = M(4)^{-1}X$。定义 $y_\ell \in D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}-k}$ 如下:

$$y_\ell = \sum_{i=0}^{t} \zeta_{i+1,1} (-1)^{R_{n-1}-k} v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n}$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y_\ell) = z_\ell$.

这一结果是命题 5 的一个特例。

引理23。假设 $m_{n-1} = 0$, 且 $M_{n-1} = R_{n-1} > 0$。在这种情况下 $r = r_n p^n + R_{n-1}$ 且 $s = s_n p^n$。假设 t 和 k 是满足$0 \le t \le \min(r_n, s_n - 1)$ 和 $R_{n-1} + 1 \le k \le p^n$ 的整数。那么根据定理 1, $\lambda_\ell = (r_n + s_n - 2t - 1)p^n$。

(1) Define $z_\ell \in D_{(t+2)p^n+R_{n-1}-k}$ by

$$z_\ell = (-1)^{R_{n-1}} \sum_{i=0}^{t} (-1)^{i+k-1} v_{(i+1)p^n+R_{n-1}+1-k,(t-i+1)p^n}.$$

Then $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell) = x_{(t+1)p^n+R_{n-1}+1-k}$.

(2) Let $\zeta = M(5)^{-1}X$. Define $y_\ell \in D_{(r_n+s_n-t)p^n+R_{n-1}-k}$ by

$$y_\ell = \sum_{i=0}^{t} \zeta_{i+1,1} (-1)^{R_{n-1}+k-1} v_{(r_n-t+i)p^n+R_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n}.$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}(y_\ell) = z_\ell$.

这一结果是命题 7 的一个特例。

引理24。假设 $m_{n-1} = 0$ 和 $M_{n-1} = S_{n-1} > 0$。在这种情况下, $r = r_n p^n$和 $s = s_n p^n + S_{n-1}$。假设 t 和 k 是满足 $0 \le t \le \min(r_n - 1, s_n)$ 和 $1 \le k \le S_{n-1}$的整数。那么根据定理 1, $\lambda_\ell = (r_n + s_n - 2t)p^n$。

(1) Define $z_\ell \in D_{(t+1)p^n+S_{n-1}-k}$ by

$$z_\ell = \sum_{i=0}^{t} (-1)^{i+k-1} v_{(i+1)p^n+1-k,(t-i)p^n+S_{n-1}}.$$

Then $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell) = x_{tp^n+S_{n-1}+1-k}$.

(2) Let $\zeta = M(3)^{-1}X$. Define $y_\ell \in D_{(r_n+s_n-t)p^n+S_{n-1}-k}$ by

$$y_\ell = (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{t} \zeta_{i+1,1} v_{(r_n-t+i)p^n+1-k,(s_n-i)p^n+S_{n-1}}.$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-1)p^n}(y_\ell) = z_\ell$.

这一结果是命题4的一个特例。

引理 25. 假设 $m_{n-1}=0$ 和 $M_{n-1}=S_{n-1}>0$。在这种情况下，$r=r_np^n$和 $s=s_np^n+S_{n-1}$。假设 t 和 k 是满足 $0\le t\le \min(r_n-1,s_n)$ 和 $S_{n-1}+1\le k\le p^n$ 的整数。那么，根据定理 1，$\lambda_\ell=(r_n+s_n-2t-1)p^n$。

(1) 定义 $z_\ell\in D_{(t+2)p^n+S_{n-1}-k}$ 如下：则 $(g-1)^{p^n-1}(z_\ell)=x_{(t+1)p^n+S_{n-1}+1-k}$。

$$z_\ell=\sum_{i=0}(-1)^{i+k-S_{n-1}-1}v_{(i+1)p^n+S_{n-1}+1-k,(t-i+1)p^n}.$$

(2) 设 $\zeta=M(5)^{-1}X$。定义 $y_\ell\in D_{(r_n+s_n-t)p^n+S_{n-1}-k}$ 如下：

$$y_\ell=(-1)^{k-S_{n-1}-1}\sum_{i=0}^{t}\zeta_{i+1,1}v_{(r_n-t+i)p^n+S_{n-1}+1-k,(s_n-i)p^n}.$$

Then $(g-1)^{(r_n+s_n-2t-2)p^n}(y_\ell)=z_\ell$.

这是命题 7 的一个特例。

References

[1] J. L. Alperin, 《局部表示论》，剑桥高级数学研究丛书第 11 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1986。[2] M. J. J. Barry, *Decomposing Tensor Products and Exterior and Symmetric Squares*, 《群论杂志》14（2011），59–82。[3] M. J. J. Barry, *Generators for decompositions of tensor products of modules*, 《数学档案》97（2011），503–512。[4] M. J. J. Barry, *On a Question of Glasby, Praeger, and Xia*, 《代数通讯》43（2015），4231–4246。[5] M. J. J. Barry, *Generators for decompositions of tensor products of modules associated with standard Jordan partitions* **45** 2017 4, 1819 1824 , 《代数通讯》（），第 – 页。[6] M. J. J. Barry, *A New Algorithm for Decomposing Modular Tensor Products*, 《澳大利亚数学会公报》104（2021），第 1 期，94–107。[7] M. J. J. Barry, *Generators for Decompositions of Tensor Products of Indecomposable Modules* 2201 03475 , arXiv：。。[8] N. J. Fine, *Binomial Coefficients Modulo a Prime*, 《美国数学月刊》54（1947），589-592。[9] S. P. Glasby、C. E. Praeger 和 Binzhou Xia, *Decomposing modular tensor products and periodicity of 'Jordan partitions'* **450** 2016 570 587 , , 《代数杂志》（），–。[10] S. P. Glasby、C. E. Praeger 和 Binzhou Xia, *Decomposing modular tensor products: 'Jordan partitions' their parts and p-parts* **209** 2015 1, 215 233 , 《以色列数学杂志》（），第 – 期。[11] J. A. Green, *The modular representation algebra of a finite group*, 《伊利诺伊数学杂志》6（1962），607–619。[12] X.-D. Hou, *Elementary divisors of tensors products and p-ranks of binomial matrices*, 《线性代数及其应用》374（2003），255–274。[13] K-i. Iima 和 R. Iwamatsu, *On the Jordan decomposition of tensored matrices of Jordan canonical forms* **51** 2009 133 148 , 《冈山大学数学杂志》（），–。[14] J. D. McFaul, *How to compute the elementary divisors of the tensor product of two matrices*, 《线性与多重线性代数》7（1979），193–201。[15] J. D. McFaul, *On the elementary divisors of the tensor product of two matrices*, 《线性代数及其应用》33（1980），67–86。[16] E. Nordenstam 和 B. Young, *Correlations for the Novak process*, 第 24 届形式幂级数与代数组合国际会议（FPSAC 2012），643–653，离散数学、理论计算机科学会议录，AR，离散数学与理论计算机科学协会，南锡，2012。

[17] C. W. Norman, *On Jordan Bases for Two Related Linear Mappings*, 《数学分析与应用杂志》**175**（1993），第 1 期，96–104。[18] C. W. Norman, *On the Jordan form of the tensor product over fields of prime characteristic*, 《线性与多重线性代数》**38**（1995），351–371。[19] C. W. Norman, *On Jordan bases for the tensor product and Kronecker sum and their elementary divisors over fields of prime characteristic*, 《线性与多重线性代数》**56**（2008），第 4 期，415–451。[20] T. Ralley, *Decomposition of products of modular representations*, 《伦敦数学会杂志》**44**（1969），480–484。[21] J.-C. Renaud, *The decomposition of products in the modular representation ring of a cyclic group of prime power order* **58** 1979 1 11 , 《代数杂志》（），–。[22] P. C. Roberts, *A Computation of Local Cohomology*, 《当代数学》159（1994），351–356。[23] B. Srinivasan, *The modular representation ring of a cyclic p-group*, 《伦敦数学会会刊》（3）**4**（1964），677–688。

Department of Mathematics, Allegheny College, Meadville, PA 163 35
Current address: 河街15号205单元，波士顿，MA 02108*Email address*:
mbarry@allegheny.edu