arXiv:2602.12211v1 [math.AG] 12 Feb 2026

关于余维数 -1的圆折叠映射的实代数实现

北泽直树

Abstract. 单位球面的典范投影被推广为*special generic* 映射和 *round fold* 映射，例如。从可微映射奇点理论的观点来看，它们是一种推广，并且这些映射限制了流形的拓扑和可微结构。

我们关注圆折叠映射，其定义为局部可表示为莫尔斯函数与光滑流形上恒等映射之乘积映射的光滑映射，以及奇异值集为同心球面的映射。与微分拓扑略有不同，我们关注这些映射的实代数几何方面。我们讨论余维数 -1 的圆折叠映射的实代数实现，以此作为我们的新工作。这些映射的实代数实现属于实代数几何中基础而重要的研究，也是近期主要由作者推动而发展起来的一项新研究。

1. Introduction.

设 $\mathbb{R}^k$ 表示 k维欧几里得空间（实仿射空间），其中 $\mathbb{R}:=\mathbb{R}^1$。设$\pi_{k_1+k_2,k_2}$：$\mathbb{R}^{k_1+k_2} \to \mathbb{R}^{k_2}$ 表示典范投影，将$x:=(x_1,\cdots x_{k_1},\cdots x_{k_1+k_2})$映到$(x_1,\cdots x_{k_2})$，其中 k_1与 k_2为正整数。典范投影 m维单位球面 $S^m:=\{(x_1,\cdots x_{m+1}) \mid \Sigma_{j=1}^{m+1}{x_j}^2=1\}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 是闭流形（实代数紧流形）上最基本的光滑（实代数）映射之一，定义为$\pi_{m+1,n}$的限制。

1.1. 单位球面的典范投影与折叠（特殊广义）映射。令 $c|_Z$ 表示映射 c：$X \to Y$ 在子集 $Z \subset X$ 上的限制。下文还需要可微映射的基础奇点理论，相关内容见 [9] 。

典范投影 $\pi_{m+1,\ n}|_{S^m}$ 是 S^m 特殊广义映射和圆形折叠映射的最简单示例。这两类光滑映射都是所谓折叠映射的子类。它们在整体奇点理论以及流形的代数拓扑、微分拓扑和几何拓扑应用中具有重要意义。这是莫尔斯函数理论的高维推广的一项应用。下面我们来说明这些映射。光滑流形之间的光滑映射 f 的奇异点，是定义域流形上微分的秩小于定义域流形与目标流形维数中较小者的点。光滑映射的奇异集 $S(f)$是该映射所有奇异点构成的集合，其像称为该映射的奇异值集。当 f 为实值函数时，我们也用“临界”代替“奇异”。

Key words and phrases.（非奇异）实代数流形与实代数映射。光滑映射。折叠映射。圆折叠映射。特殊广义映射。图。有向图。Reeb（有向）图。庞加莱–里布图。

2020 *Mathematics Subject Classification*: 05C10, 14P05, 14P25, 57R45, 58C05, 58C06。

微分同胚是既为同胚又没有奇异点的光滑映射。若流形 X_1 与 X_2 之间存在微分同胚，则称这两个流形微分同胚，或者等价地，称一个流形微分同胚于另一个流形。

折叠映射是无边界、维数为 $m \geq n$ 的流形上的光滑映射 $f\colon M \to \mathbb{R}^n$，其临界点对于某些局部坐标以及整数 $0 \leq i(p) \leq \frac{m-n+1}{2}$ 总具有形式 $f(x_1, \cdots x_m) = (x_1, \cdots x_{n-1}, \Sigma_{j=1}^{m-n-i(p)+1} x_{n-1+j}{}^2 - \Sigma_{j=1}^{i(p)} x_{m-i(p)+j}{}^2)$。证明 $i(p)$可被唯一选取（$i(p)$是 p 对于f的指标），属于光滑映射奇点理论中的一类练习。奇异集 $S(f)$以及 f 的所有指标为 i的奇异点所成的集合 $F_i(f)$是维数为 $n-1$ 的无边界光滑子流形，并且f 在 $S(f)$上的限制是光滑浸入。无边界光滑流形上的莫尔斯函数是折叠映射；对于情形 $n = 1$，在本文中我们还考虑边界非空的光滑流形上的莫尔斯函数，它们在边界上没有临界点，并且在边界的各连通分支上为常数。众所周知，对于光滑流形上的莫尔斯函数，整数 $i(p)$可以选取为唯一的整数 $0 \leq i(p) \leq m$，并遵从 $\mathbb{R}$ 上的自然序。关于莫尔斯函数，参见 [24]。论文 [33, 35] 是关于折叠映射以及更一般的映入 $\mathbb{R}^2$ 的一般光滑映射的相关开创性研究，而 [4, 5] 则借助微分方程与同伦方法研究折叠映射的存在性理论。论文 [27] 是与流形的微分拓扑相关的折叠映射开创性研究。

特殊广义映射是折叠映射，并且它的每个奇异点都满足 $i(p) = 0$ p 。$\pi_{m+1,\ n}|_{S^m}$ 是一个特殊广义映射。闭流形上恰有两个临界点的莫尔斯函数是特殊广义映射。这被称为 Reeb 球面定理中的光滑函数。我们有一个自然的特殊广义映射 $f\colon M \to \mathbb{R}^n$，定义在流形 M 上；该流形表示为连通和 $\sharp_{j=1}^{l}(S^{k_j} \times S^{m-k_j})$，其中 $l > 0$、$m \geq n \geq 2$ 和 $1 \leq k_j \leq n-1$ 嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中，且其像微分同胚于边界连通和 $\natural_{j=1}^{l}(S^{k_j} \times D^{n-k_j})$：下文中，除非另有说明，我们均在光滑范畴内讨论连通和与边界连通和，并采用此类记号。研究还表明，这些映射限制了流形的拓扑和可微结构。诸如 [1, 7, 28] 的论文是具有重要开创意义的研究，[30, 31] 也同样重要。

此外，[16] 首先指出，某一类闭连通流形上的特殊广义映射 $f\colon M \to \mathbb{R}^n$（包括$\pi_{m+1,\ n}|S^m$）可明确表示为$\pi_{m+1,\ n}$ 在一个实代数流形上的限制。这一点在 [18] 中再次被提及，并在某种广义情形下进行了讨论。这一方法十分重要，并在定理5中以自成一体的方式进行了回顾。

1.2. 圆折叠映射与我们的主要结果。 下面陈述我们的主要定理。在此之前，我们回顾或引入若干概念。

若两个光滑映射 $f_i\colon M_i \to N_i$ 满足 $i = 1, 2$，则称它们 C^∞ 等价 o r $\mathcal{A}$-等价，当且仅当存在一对映射（$\phi_M\colon M_1 \to M_2$，$\phi_N\colon N_1 \to N_2$），满足关系 $\phi_N \circ f_1 = f_2 \circ \phi_M$。如果可以选取 ϕ_N 为恒等映射 o n $N := N_1 = N_2$，那么它们也称为 $\mathcal{R}$-等价。这些当然是 e 光滑映射类上的等价关系。我们还使用“$\mathcal{E}$-等价”和“在 $\mathcal{E}$-等价意义下”等说法，例如（对于 $\mathcal{E} = \mathcal{A}, \mathcal{R}$）。

一个圆形折叠映射 $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ 定义在一个 m维闭连通流形 M 上，并满足 $m \geq n \geq 2$，是指与一个折叠映射 $\mathcal{A}$-等价的折叠映射

$f_0: M_0 \to \mathbb{R}^n$，其中 $f_0|_{S(f_0)}$ 是一个嵌入，且 $f_0(S(f_0)) = \bigcup_{i=1}^{l}\{x \in \mathbb{R}^n \mid \Sigma_{j=1}^{n} x_j{}^2 = i^2\}$，其中 $l > 0$为一个整数。对于一条射线 $\{(tx_0,1,\cdots tx_{0,n}) \mid t \geq \frac{1}{2}\}$，满足$x_0 = (x_0,1,\cdots x_{0,n}) \in S^{n-1}$，我们可以定义一个莫尔斯函数，将每个点映射到 $t \geq \frac{1}{2}$；该函数是限制在这条射线的原像上的函数，并且是映射 f的一个页函数$f_{\mathrm{P},x_0} \circ \pi_{m+1,n}|_{S^m}$ 是一个圆形折叠映射。本文将重点研究这些映射。圆形折叠映射最早由 [12, 13, 14] 引入，并在 [15] 以及后来例如 [19], 中得到研究。

对于一个表示为连通和 $\sharp_{j=1}^{l}(S^n \times S^{m-n})$、且具有 $l > 0$ 和 $m > n \geq 2$ 的流形 M，存在一个圆形折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^n$。我们可以将 M 的连通和项推广为 S^n 上的任意光滑纤维丛，其纤维为 S^{m-n}：光滑纤维丛是指纤维为光滑流形、结构群由纤维上的微分同胚组成，并赋予所谓的 $Whitney\ C^\infty$ 拓扑的纤维丛。通过将一个圆形折叠映射与 $\pi_{n,\ n'}$复合，我们还可以得到一个映入 $\mathbb{R}^{n'}$ 且具有 $n > n' \geq 2$ 的圆形折叠映射。

对于一个拓扑空间 X 和一个（连续）映射 $c: X \to Y$，我们可以如下考虑其商空间。若且唯若点 $x_1 \in X$ 和 $x_2 \in X$ 位于同一个原像 $c^{-1}(y)$ 的同一个连通分支中，则称它们等价，即 $x_1 \sim_c x_2$。我们可以定义商映射 $q_c: X \to R_c$ 到商空间 $R_c := X/\sim c$，并定义唯一的连续映射 $\bar{c}$ 使得 $c = \bar{c} \circ q_c$。在 $Y := \mathbb{R}$ 的情形下，每个原像 $c^{-1}(y)$ 都是 c 的水平集，其连通分支是 c 的等值线。若 $c: X \to \mathbb{R}$ 是可微函数，则含有（不含）临界点的等值线称为临界（分别为正则）等值线。我们仍使用记号 $f: M \to \mathbb{R}$。在若干情形下，通过适当地定义顶点，商空间 $R_f := M/\sim f$ 可具有图的结构。例如，考虑紧流形 M 上的莫尔斯（博特）函数 f：它在边界上没有临界点，在边界的每个连通分支上为常数，且临界值集有限。在这些情形下，该商空间可视为一个图，其顶点 v 定义为满足 $q_f{}^{-1}(v)$ 的点，其中 v 是 f 的临界等值线，或是流形 M 的边界 ∂M 的一个连通分支。图 R_f 是 f 的里布图。这类对象由来已久，是借助莫尔斯函数（[26]）等良好的函数理解流形的有力工具。对于闭流形上的莫尔斯函数，文献 [10] 已明确证明，按照这条规则，R_f 是一个图。在 [28]（[28, 定理3.1]）中，对于紧流形上的光滑函数 f，当其临界值集有限时，已按照这条规则证明空间 R_f 是一个图。

主定理 0。设 $m > 3$ 为一个整数。对于闭连通流形 M 上的圆形折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^{m-1}$，其中 m为维数，若其页函数$\tilde{f_{\mathrm{P},\ x_0}}$对应的函数 $\tilde{f_{\mathrm{P},\ x_0}}$ 是某个嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 中的映射与$\pi_{2,\ 1}$ 的复合，且满足以下条件之一，则该映射在 $\mathcal{A}$-等价意义下，可表示为$\pi_{m+1,\ m-1}$在某个适当实多项式函数的零点集上的限制。

(1) 对于闭连通可定向曲面 S，$M = S^{m-2} \times S$。此外，$m > 4$非空，或者 $m = 4$ 与 $S(f) - F_0(f)$ 非空。(2) M可定向，且 $f(M)$与 D^{m-1}微分同胚。

下一节将介绍预备知识，并更精确地阐释一些术语和概念。第三节将以更完善的方式再次介绍主定理 0，即主定理 1 和 2。我们也将证明这些定理。

2. Preliminaries.

我们回顾一些重要的概念和论证。

2.1. 莫尔斯函数的里布（有向）图。 下文中，图指一个一维有限连通 CW 复形，其 1-胞腔的闭包总是同胚于 D^1。图的顶点（边）指图的 0-胞腔（分别为 1-胞腔）。图中一个顶点的度 指与该顶点关联的边的数量。有向图 (G, c_G)指配备了一个连续函数 $c_G : G \to \mathbb{R}$，且该函数在每条边上都是单射的图。在这种情况下，G 的每条边都按以下规则定向：若 G 的一条边e_{v_1,v_2}与图中两个不同的顶点 v_1 和v_2 关联，则当且仅当 $c_G(v_1) < c_G(v_2)$时，该边从 v_1 定向至 v_2 。有向图的源点（汇点）指所有边均从其出发（分别指所有边均指向它）的顶点。里布图 R_f视为有向图(R_f, f)。对于两个有向图，同构的概念通过如下方式定义：将同构 定义为保持定向以及顶点处数值顺序的（底层）图同构。

2.2. M 有向图。 Morse 有向图或 *M* 有向图 是指汇点和边的度均为 1 的有向图。我们定义一类特殊的 M 有向图，其第三集合由图中有限多个顶点组成。这里的第三集合可能为空。

定义 1。 简单 *Morse* 有向图或*SM* 有向图 (G, c_G, G_{m})是一个三元组，其中 (G, c_G)是一个 M-图，G_{m} 是一个由有限多个源点组成的集合（可能为空），并且 G 中顶点的度均为 1、2 或 3；图中位于 G_{m}之外的不同顶点处，c_G 的取值互不相同；当 G_{m} 非空时，还满足以下条件。

- G_{m} 之外的 c_G 的取值始终大于 c_G的最小值m_{c_G}
- 水平集 ${c_G}^{-1}(m_{c_G})$ 是 G_{m}。

一个简单的莫尔斯函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 是一个在边界上没有临界点，且任意两个不同临界点处的函数值总是不同的莫尔斯函数。此外，在边界 ∂M 非空的情况下，对于定义，我们规定：对于最小值 m_f，水平集 $f^{-1}(m_f)$与 M的边界 ∂M 重合。

关于这些莫尔斯函数和图的相关理论，请参阅 [8, 23]等近期研究，也请参阅 [17]。请注意，据作者所知，SM 有向图的概念是在本文中首次提出的。我们还定义了三元组的同构，即将一个三元组的第三集合映射到另一个三元组的第三集合上的有向图同构。

定理1被视为一个重要事实，它总结了关于紧曲面以及维数至少为3的紧流形上的（简单）莫尔斯函数结构的若干结果。相关内容也可参见 [21, 22] ，例如。

定理1。 (1) 对于紧致且维数至少为2的连通流形上的简单莫尔斯函数 $f : M \to \mathbb{R}$，*Reeb* 有向图(R_f, f) 可按以下规则视为 *SM* 图$(R_f, f, {}^{R_{f_{\mathrm{m}}}})$。

- 如果 M 是闭的，则第三集合 ${}^{R_{f_{\mathrm{m}}}}$ 为空。
- 第三集合 ${}^{R_{f_{\mathrm{m}}}}$是当边界 ∂M 非空时，M 上最小值 m_f的水平集 $\bar{f}^{-1}(m_f)$。

(2) 对于紧致、连通且¯可定向曲面 M上的简单莫尔斯函数 $f: M \to \mathbb{R}$，按照上述规则，*Reeb* 有向图 (R_f, f) 可视为一个 *SM* 图¯$(R_f, f, {}^{R_{f_{\mathrm{m}}}})$，其中图的顶点度为 1 或 3。(3) 对于一个 *SM* 有向图 (G, c_G, G_{m})，若图的顶点度为1或3，则按照上述规则，对于 $R_{f_{\mathrm{m}}}$，存在紧致、连通的可定向曲面 M 及其上的简单莫尔斯函数 $f: M \to \mathbb{R}$，并且具有 $f = c_G$ 和 $R_{f_{\mathrm{m}}} = G_{\mathrm{m}}$；上述结论在 $\mathcal{R}$- 等价及三元组的同构意义下成立。

以下是一个重要的 SM 有向图。

定义 2. 设 (G, c_G, G_{m}) 是一个 SM 有向图，其中 G_{m} 非空，且 m_{c_G} 是 c_G 中的最小值。我们可以得到一个 M 有向图 $(G^*, c_G{}^*)$，它具有一个同构 ϕ_G，将图 G 映到 G^*，并满足关系 $m_{c_G} - c_G{}^*(\phi_G(p)) = c_G(p) - m_{c_G}$，对每个点 $p \in G$ 均成立：注意，定向是反转的。通过同构 ϕ_G 将 G_{m} 与 $\phi_G(G_{\mathrm{m}})$ 识别，我们得到一个顶点集为 $(G \sqcup G^*) - (G_{\mathrm{m}} \bigcup \phi_G(G_{\mathrm{m}}))$ 的 SM 有向图。此外，将图上的函数设为由 c_G 和 $c_G{}^*$ 规范定义的连续函数，并将第三集合设为空集。这就是 (G, c_G, G_{m}) 的双重。

2.3. **Saeki与作者对圆形折叠映射的分类**。我们通过定理2、3和4，总结 [19], 中的重要事实和论证。

定理2 ([19])**.** 当维数为 $m \geq 5$时，m维闭连通可定向流形上的圆形折叠映射，由其页函数的 $\mathcal{R}$-等价类唯一确定，且仅在 $\mathcal{A}$-等价意义下唯一。另一方面，对于紧致连通可定向曲面上的莫尔斯函数，存在一个圆形折叠映射，其页函数与该莫尔斯函数 $\mathcal{R}$-等价，且仅在$\mathcal{A}$-等价意义下唯一。

定理3 ([19])**.** 设 $m \geq 4$ 为一个整数。对于 m维闭连通可定向流形 M，以下结论成立。

(1) 设 $l \geq 0$ 为整数。m 维流形 M 存在圆形折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^{m-1}$，使得 $f(M)$ 同胚于 D^{m-1}，且其页函数的里布图的第一 *Betti* 数为 l，当且仅当 M 微分同胚于连通和 $\sharp_{j=1}^{l}(S^1 \times S^{m-1})$。*(2)* 设 $m > 4$，在此情形下，m 维流形 M 存在圆形折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^{m-1}$，使得 $f(M)$ 同胚于 $S^{m-2} \times D^1$，且其页函数的里布图的第一 *Betti* 数为 l，当且仅当 M 微分同胚于 $S^{m-1} \times S$，其中 S 是亏格为 l 的闭连通可定向曲面。*(3)* 设 $m = 4$，在此情形下，对于 m 维流形，M 存在圆形折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^{m-1}$，使得 $f(M)$ 同胚于 $S^{m-2} \times D^1$，且其页函数的里布图的第一 *Betti* 数为l 并且至少有 *2* 条边，当且仅当 M 微分同胚于 $S^{m-1} \times S$，其中 S 是亏格为 l的闭连通可定向曲面。*(4)* 设 $m = 4$，在此情形下，对于 m 维流形，M 存在圆形折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^{m-1}$，使得 $f(M)$ 同胚于 $S^{m-2} \times D^1$，且其页函数的里布图恰有一条边，当且仅当 M 微分同胚于 $S^2 \times S^2$，或微分同胚于底空间为 S^2 的非平凡光滑纤维丛，其纤维微分同胚于 S^2。

定理2中的圆形折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^{m-1}$ 表示如下。在 $f(M)$ 同胚于 $S^{m-2} \times D^1$ 的情况下，这个~圆形折叠映射在 $\mathcal{A}$-等价意义下，是页函数 $f_{P,\ x_0}$ 与 S^{m-2} 上的恒等映射的乘积映射。在 $f(M)$ 同胚于 D^{m-1} 的情况下，该圆形折叠映射在 $\mathcal{A}$-等价意义下，是通过沿边界粘合页函数$\tilde{f_{P,\ x_0}}$ 与 S^{m-2} 上的恒等映射的乘积映射，以及乘积丛 $D^{m-1} \times C$ 所得到的光滑映射，其中 C 非空且为若干个 S^1 的不交并；粘合所用的映射是底空间 S^{m-2} 上的恒等映射与纤维C上的恒等映射的乘积映射，并且对于这些底空间和纤维的流形，采用自然的识别方式。

当然，这种构造可用于构造任意维欧几里得空间中的圆形折叠映射，并将其视为最简单的一类 $n \geq 2$ 。该映射的页函数是在一个无边界的$(m-n)$维紧流形上，或是在其边界为最小值的原像时，具有预先指定的莫尔斯函数，且其临界值集经过适当缩放。当然，所得圆形折叠映射在 $\mathcal{A}$等价意义下是唯一的。这种构造称为平凡旋转构造。我们沿用这一名称，遵循 [19]与 [13], ，例如。以这种方式构造的圆形折叠映射称为平凡旋转构造的映射，或TSC映射。我们可以改进上述若干定理。

定理4。 在定理*2*和定理*3*(*1*、*2*、*3*)中，每个圆形折叠映射都是 *TSC* 映射。在定理*3*(*4*)中，*TSC* 映射的定义域流形与 $S^2 \times S^2$微分同胚。结合定理*1*(*2*)，在当前情形下，这些 *TSC* 映射与 *SM* 有向图$(G,\ c_G,\ G_{\mathrm{m}})$ 一一对应，其中图的顶点的度始终为1 或3 ；这里$(G,\ c_G,\ G_{\mathrm{m}})$ 对应于 *TSC* 映射的页函数。

请注意，对于具有 $m \geq 4$的 m维闭连通（可能不可定向）流形上的圆折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^{m-1}$ ，类似的定理已在 [19]中得到证明。为求简洁，我们省略相关论述。

2.4. 实代数范畴中的特殊广义映射。 我们以自成一体的方式回顾 [16] 的一个主要要点。关于本文中的实代数论证，请参见 [20]，另可参见教科书 [2]。

定理*5*. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空开集，且对于此处所考虑的闭包$\overline{D}$， $\overline{D-D}$ 是实多项式函数f_D的零点集，S，其微分f_D的秩在S 处始终为*1*，并且 $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_D,\ S(x) > 0\}$。在这种情况下，零点集$M_{D,\ S} := \{(x, (y_j)_{j=1}^{m-n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n+1} \mid f_D,\ S(x) - \Sigma_{j=1}^{m-n+1} {y_j}^2 = 0\}$ ，其中 m 是满足 $m \geq n$ 的整数，是 $\mathbb{R}^{m+1}$的一个无边界 m维光滑子流形。此外，π_{m+1}在n 上的限制是一个映到 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的特殊广义映射，其奇异集为 $\{(x, 0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n+1}) \bigcap M_{D,\ S}\}$。

证明。根据隐函数定理，我们证明零点集$M_{D,S}$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$的光滑子流形。在 $\{(x_0, y_0) \in (D \times \mathbb{R}^{m-n+1}) \bigcap M_{D,S}\}$ 的情况下，函数 $f_{D,S}(x) - \Sigma_{j=1}^{m-n+1} {y_j}^2$ 关于某个变量 y_j 的偏导数在点(x_0, y_0)处不为 0。在 $\{(x_0, y_0) \in ((D-\overline{D}) \times \mathbb{R}^{m-n+1}) \bigcap M_{D,S}\}$的情况下，函数$f_{D,S}(x) - \Sigma_{j=1}^{m-n+1} {y_j}^2$ 关于坐标 $x = (x_1, \cdots x_n)$中的某个变量x_i 的偏导数在点$(x_0, y_0) = (x_0, 0)$处不为 0。由此

我们可以应用隐函数定理证明，$M_{D,\ S}$ 是 $\mathbb{R}^{m+1}$的一个无边界 m维光滑子流形。

根据关于实多项式映射零点集以及 $\{(x,\ 0)\ \in(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n+1}) \bigcap M_{D,\ S}\}$ 周围局部坐标的基本一般性论证，可以证明其限制 $\pi_{m+1,\ n}$ 是一个特殊广义映射，其奇异集为 $\{(x,\ 0)\ \in(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n+1}) \bigcap M_{D,\ S}\}$。关于此处流形和映射的局部结构的论证，请记住隐函数定理。相关内容也可参见 [20,Discussion 14, Claim 14.2],。至此证明完成。 □

2.5.**用实多项式函数和映射逼近光滑函数和映射**。 在奇点理论中，两个光滑流形之间所有光滑映射构成的空间上的 C^k 拓扑 是一种重要拓扑，其中 k 是非负整数或 ∞ ，表示流形之间映射的光滑度类别。我们省略与这种拓扑相关的严格定义和论证。相关内容请再参阅 [9]。粗略地说，这种拓扑可以自然地定义如下：如果两个光滑映射在每个紧集上的每一点处的取值，以及它们在该紧集每一点处的 j 阶导数，对于 $1 \leq j \leq k$ 都彼此接近，那么这两个映射就是接近的。 C^∞ 拓扑是对所有 $k \geq 0$ 的 C^k 拓扑（即所有开集）的并集。此前已简要介绍过带有 $k = \infty$ 的 Whitney C^k 拓扑 ，它是微分同胚群上的一种拓扑。这是一种更强的变体，其中“每个紧集”被定义域流形取代：当定义域流形紧致时，该拓扑与 C^k 拓扑相同。

在我们的论文中，重要的一点是，正如 [11, 命题1.3.7], 一篇关于实代数几何历史与深入研究的文章所综述的那样，例如，欧几里得空间之间的光滑映射在紧集上可由实多项式映射（实代数映射）于 C^k 拓扑中逼近，且对任意给定的非负整数 k 均成立。

2.6.**代数区域及其Poicar´e-Reeb图，以及由Bodin、Popescu-Pampu和Sorea建立的相关理论**。我们回顾 [3]并附以作者补充的原创阐述。

一个代数域 D 在 $\mathbb{R}^2$ 中是一个有界的非空开集，其周围由彼此不相交的实代数曲线围成。这里，一条实代数曲线 C 是指实多项式函数 f_C 的零点集的一个连通分支，且 f_C 在 C 上的微分的秩恒为1：简言之， C 是非奇异的。我们可以考虑 D 在 $\mathbb{R}^2$ 中的闭包$\overline{D}$ ，以及$\pi_{2,\ 1}$ 在该处的限制。我们可以像里布图那样，为限制$\pi_{2,\ 1}|_D$ 定义商空间。我们可以按如下方式赋予该商空间一个图的结构。

- 商空间中的每个元素都表示$\pi_{2,\ 1}|_D$的一条等值线。
- 当且仅当商空间中的某个元素表示包含限制映射 $\pi_{2,\ 1}|_{D-D}$的临界点的等值线时，该元素才是其顶点；其中 $D-D$是有限个副本的不交并，这些副本作为实代数曲线彼此不相交地光滑嵌入于$\mathbb{R}^2$ 中。

定义 3。 上述图称为 D 的庞加莱´-里布图 ，我们也可以自然地将其视为有向图（ D 的庞加莱´-里布有向图 ）。

定理 6 ([3])**.** 考虑一个 *SM* 有向图(G, c_G, G_{m}) ，其中 G_{m} 为空，且每个顶点的度为1或3 ，它可表示为以下对象的复合

一个嵌入 $\tilde{c_G}: G \to \mathbb{R}^2$，其中 $\pi_{2,1}$。那么我们可以选取一个代数域$D_{G,c_G} \subset \mathbb{R}^2$，其 ***Poincar´e-Reeb*** 有向图与(G, c_G)同构。

我们回顾原始论文第三节中给出的原始证明。某些论证可能与原始论证有所不同，但本质上几乎相同。简言之，$D_{G,\ c_G}{}' \subset \mathbb{R}^2$ 被选作图 $\tilde{c_G}(G)$ 的一个小型连通开邻域，该图被有限条连通光滑曲线 $C_j{}'$ 的不交并所围绕。我们将每条连通曲线视为光滑函数 $f_{C_j{}'}$ 的零点集的一个连通分支；该函数的微分在 $C_j{}'$上的秩始终为 1，在连通开区域 $D_j{}'$ 中的集合$D_j{}' - C_j{}'$ 上取非零值，其中 $D_j{}'$ 位于 $\mathbb{R}^2$ 中，包含$D_{G,\ c_G}{}'$在 $\mathbb{R}^2$ 中的闭包，并且该函数在 $\mathbb{R}^2 - D_j{}'$ 上始终取值为 0。通过应用前述逼近技术，$C_j{}'$ 和 $f_{C_j{}'}$ 被分别替换为实代数曲线 C_j 和实多项式函数 f_{C_j}。

原文并未明确解释以下内容。作者的预印本 [18] 中也简要介绍了类似内容；不过，本文不要求读者了解该预印本。

曲线 $C_j{}'$ 的选取方式使得 $\pi_{2,1}$ 在它们的并集上的限制是一个简单莫尔斯函数。如 [3, 引理 3.6] 及其证明所述，C_j 和 f_{C_j}通过在 C^2 拓扑中的逼近技巧得到。在那里，Bodin、Popescu-Pampu 和 Sorea 讨论了我们应当逼近一阶和二阶导数中的哪些部分，并对适当的导数进行了逼近。以下内容则更多地依据可微映射的奇点理论进行阐述。根据奇点理论中的基本论证，例如 C^k 拓扑、Whitney C^k 拓扑以及光滑映射的局部稳定性，C_j 和 f_{C_j} 通过在 C^2 拓扑中的逼近技巧得到，其选取方式使得 $\pi_{2,1}$ 在曲线并集 C_j 上的限制是一个简单莫尔斯函数。我们可以省略关于导数选取与逼近的具体论证。另一方面，原文的论述当然是正确的，我们也可以遵循其论述，而无需掌握可微映射奇点理论的基础知识。此外，如 [20, 特殊情形 5], 附近所述，通过适当地加上非正或非负多项式函数，C_j 可视为 f_{C_j}的零点集。综上，我们得到以下结论。

定理7。 在定理 *6* 中，我们可以得到所需情形如下。

(1) 所有围绕 $D_{G,c_G} \subset \mathbb{R}^2$ 的实代数曲线 C_j，每一条都是某个相应实多项式函数 f_{C_j} 的零点集。(2) 限制函数$\pi_{2,1}|_{\sqcup_j C_j}$ 是简单莫尔斯函数。

3. Main Theorem 0 revisited.

我们更精确地再次陈述主定理 0。主定理 1 对应主定理 0 的 (1)。

主定理 1。 在主定理 *0*(*1*)中，零点集 M 具有如下形式

$$\{x := (x_1, \cdots x_{m-1}, x_m, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \prod\nolimits_{i\in I} h_i(\Sigma_{j=1}^{m-1} {x_j}^2, x_m) - {x_{m+1}}^2 = 0\}$$

由某个有限个实多项式函数组成的族 $\{h_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$，其由 $i \in I$ 索引，其中 I 是某个有限集。

证明。对于给定的圆形折叠映射，我们考虑其页函数f_{P,x_0}，其中f函数f_{P,x_0}是嵌入到$\mathbb{R}^2$再与$\pi_{2,1}$复合所得。函数f_{P,x_0}可视为定义在一个与S微分同胚的闭连通可定向曲面上的简单莫尔斯函数，并映入$\{t \geq \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}$。由定理 6 和定理 7 可知，存在代数域$D_{R_{f_{P,x_0}}, f_{P,x_0}}$，其庞加莱–Reeb 有向图同构于

同构于$(R_{f_{P,x_0}}, f_{P,x_0})$，并针对当前情形构造定理7（“$f_{C_i}$，其中$j$替换为$i$”）中的每个实多项式函数，记作$h_i$。利用$h_i(\Sigma_{j=1}^{m-1} x_j{}^2, x_m)$，并应用定理5，适当选择每个$h_j$的符号以及$f_{D,S}(x) = \prod_{i\in I} h_i(\Sigma_{j=1}^{m-1} x_j{}^2, x_m)$中的$n = m$（采用定理5中的记号），可得到一个从零点集$M$映入$\mathbb{R}^m$的特殊广义映射，其形式为$\pi_{m+1,m}|_M$。关于奇点的基本观察也表明，$\pi_{m+1,m-1}$在$M$上的限制是一个圆形折叠映射；这与命题6.1及推论6.2相符。关于这些折叠映射的奇点，也可参见例如[6]。根据定理3（2、3）和定理4，该圆形折叠映射是所需的圆形折叠映射（在$\mathcal{A}$-等价意义下）。

证明至此完成。 □

主定理 2 对应主定理 0（2）。

主定理 2。在主定理 *0(2)*中，零点集M具有如下形式

$$\{x := (x_1, \cdots x_{m-1}, x_m, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \prod\nolimits_{i\in I}(h_i(\Sigma_{j=1}^{m-1} x_j{}^2, x_m)) \times H_S((x_j)_{j=1}^m) - x_{m+1}{}^2 = 0\}$$

其中有有限族$\{h_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$适当的实多项式函数，以及一个实多项式函数$H_S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，它表示为有限个实多项式$h_{S,i'}$的乘积；这些多项式的零点集$\{x : = (x_1, \cdots x_m) \in \mathbb{R}^m \mid h_{S,i'}(x) = 0\}$是与$S^{m-1}$微分同胚的子流形。

证明。证明的思路基本上与主定理 1 相同，不过对于定理 6 和 7，关于带曲线的代数域的论证略有不同。

对于给定的圆形折叠映射，我们考虑其页函数f_{P,x_0}，其中f函数f_{P,x_0}是嵌入到$\mathbb{R}^2$后与$\pi_{2,1}$复合所得。函数f_{P,x_0}可视为一个定义在紧致、连通、可定向且与S微分同胚的曲面上的简单莫尔斯函数，该曲面的边界∂S非空，且映入$\{t \geq -\frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}$。我们将$f_{P,x_0}$的极小值替换为 0，并得到一个与原 SM 有向图同构的 SM 有向图$(R_{f_{P,x_0}}, 0, f_{P,x_0}, 0, R_{f_{P,x_0}}, m)$。我们考虑其双重$(D(R_{f_{P,x_0}}, 0)\ D(f_{P,x_0}, 0))$。

我们将定理 6 和定理 7 中的构造应用于$(D(R_{f_{P,x_0}}, 0)$嵌入到$\mathbb{R}^2$中，并以轴$\{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$为参照，使得其与$\pi_{2,1}$的复合为$D(f_{P,x_0}, 0)$，并得到一个域$D_{D(R_{f_{P,x_0}}, 0)\ D(f_{P,x_0}, 0)}$，它“几乎”是一个代数域，其中某些曲线$C_j$被选为光滑曲线。该方法的理念与主定理 1 证明中类似步骤的理念相似。得益于定理 6 和定理 7 附近的论证，我们可以做到这一点，并满足以下性质。我们沿用定理 6 和定理 7 及其相关讨论中的记号。

- 每条曲线 $C_j := C_{j_1}$ 在 $\{s > 0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ 中都是实代数曲线。
- 每条曲线 $C_j := C_{j_2}$ 中的 $\{s < 0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$，都是沿着轴$\{(0,\ t)\ |\ t \in \mathbb{R}\}$，将上方唯一选定的曲线 C_{j_1} 反射后得到的曲线。

- 每条曲线 $C_j := C_{j_3}$ 与轴 $\{(0,\ t)\ |\ t \in \mathbb{R}\}$ 的交集非空时，沿轴 $\{(0,\ t)\ |\ t \in \mathbb{R}\}$ 反射后，都会映到自身。

简言之，域 $D_{D(R_f \ \bar{}_{\mathrm{P}^{x_0,\ 0)}}\ D(\ f_{\mathrm{P}}\ \bar{}^{,\ x_0,\ 0)}}$ 以及曲线均相对于轴 $\{(0,\ t)\ |\ t \in \mathbb{R}\}$对称分布。

对于上述 C_{j_1} 和 C_{j_2}，我们可以如主定理 1 中那样定义并考察 $h_i(\Sigma_{j=1}^{m-1} {x_j}^2,\ x_m)$。对于上述 C_{j_3}，我们定义光滑函数 $h_{\mathrm{S}',\ i'} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，继而得到实多项式函数 $h_{\mathrm{S},\ i'}$，其零点集是与 S^{m-1}微分同胚的子流形。正如稍后给出的注 1 的最后一部分所述，根据光滑映射奇点理论中关于逼近的基本论证，我们可以用实多项式函数 $h_{\mathrm{S},\ i'}$ 逼近 $h_{\mathrm{S}',\ i'} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 。再由定理5、主定理 1 证明末尾关于特殊广义映射和折叠映射奇点的论证，以及定理3 (1) 与定理4，我们便得到所需的圆形折叠映射（模 $\mathcal{A}$-等价）。

证明至此完成。 □

我们以一些评述作为本文的结尾，从一般观点以及我们自身的实代数实现出发，讨论光滑映射的实代数实现。

注 1。 根据微分拓扑的基本论证，无边界的 m维流形 M 上的光滑映射 $f : M \to \mathbb{R}^n$ 可表示为一个复合：先将其嵌入维数足够高的欧几里得空间 $\mathbb{R}^{m+m'}$ $m + m'$ （其中 $m' > 0$ 为整数），再与$\pi_{m+m',n}$复合。设 M 为闭流形。在这种情况下，我们可以在 C^k 拓扑（Whitney C^k 拓扑）下逼近该嵌入，并可将流形 $M \subset \mathbb{R}^{m+m'}$ 视为一个无边界的光滑紧子流形，同时也是某个实多项式映射 $e_{m+m',m'} : \mathbb{R}^{m+m'} \to \mathbb{R}^{m'}$的零点集。关于这一点，请再次参阅 [11], 和 [20], 。这也与 Nash 和 Tognoli 关于如何将光滑闭流形实现为实多项式映射零点集的理论 [25, 34] 有关；这种实现方式使得该实多项式映射$e_{m+m',m'}$ 的限制映射的微分处处满秩。关于实代数几何，另请参阅教科书 [2], ，例如。

在 f 是闭流形上的所谓一般光滑映射的情形，例如折叠映射，我们可以对一个与原映射充分接近、且从奇点的角度来看与原映射相似的一般光滑映射，给出其实代数实现。更进一步，若一般光滑映射是所谓的稳定映射，则可以在 $\mathcal{A}$-等价意义下给出原映射的实代数实现。圆折叠映射是稳定映射，主定理 2 的证明中用到了相关论证。

注 2。 与注 1 的情形相比，我们的实现更加明确。

最后，我们在一个特定情形下改进主定理 2。

主定理 3. 在主定理 *0* 中，令 $F_0(f)$ 为连通的。于是我们得到主定理 *2* 的一种情形，其中 $h_{\mathrm{S},i'}(x)$ 具有 $\pm(\Sigma_{j=1}^{m} {x_j}^2) - r_{i'})$ 的形式，且$r_{i'} > 0$。

_证明。 函数 $f_{\tilde{\mathrm{P}},x_0}$ 是嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 后与 $\pi_{2,1}$复合所得。在主定理 2 的证明中，将图嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 时，自然可以选择满足关于 $\{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$对称性的嵌入。我们考虑嵌入图像在 $\mathbb{R}^2$中的补集。显然，这是有限个连通开集的不交并。与 $\{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 相交的连通开集满足以下条件。

- 恰有一个集合 R_0 是无界的，而集合 $R_0 - R_0$ 是两条曲线$C_{R_0,1}$ 与$C_{R_0,2}$的不交并，其中集合 R_0 是 R_0 在 $\mathbb{R}^2$中的闭包。$\pi_{2,1}$ 在这两条曲线上的限制映射均为单射，并且$C_{R_0,1} \bigcap C_{R_0,2}$同胚于两个 D^1副本的不交并。
- 其余集合 R_a （$a \neq 0$）均为有界集。每个集合 $R_a - R_a$ （$\overline{a \neq} 0$）都是两条曲线$C_{R_a,1}$ 与$C_{R_a,2}$的不交并，其中集合 R_a 是 R_a 在 $\mathbb{R}^2$中的闭包。$\pi_{2,1}$ 在这两条曲线上的限制映射均为单射，并且$C_{R_a,1} \bigcap C_{R_a,2}$ 是一个离散二点集，由该图中两个度为 3 的顶点构成。

了解这一点时，务必记住该图是连通的，并且图中度为 1 的顶点数恰好为 2。后一个事实源于 $F_0(f)$ 连通这一假设。此外，我们可以适当地将嵌入图沿垂直方向形变，从而得到如下结论。对于第二种情况 $R_a(a \neq 0)$，$C_{R_a,\ 1}$ 位于集合 $C_{R_a,1} \bigcap C_{R_a,2}$的下方， $C_{R_a,2}$ 位于集合 $C_{R_a,1} \bigcap C_{R_a,2}$的上方，并且对于每条曲线 $C_{j_3} = \{(x_1, x_{m+1})$，我们都可以在主定理 2 的证明中选取适当的 $r_{j_3} > 0$ 来实现这一点。由此，我们得到所需的实多项式函数 $h_{\mathrm{S},i'}(x)$。证明完成。□

References

[1] O. Burlet与G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close a 3 dimensions dans le plan* 20 1974 275 292 , 《数学教学》（ ）。–。[2] J. Bochnak、M. Coste与M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*，数学及其边界领域成果（3） [数学及相关领域成果（3）], 第36卷，施普林格出版社，柏林，1998年。译自1987年法文原著；由作者修订。[3] A. Bodin、P. Popescu-Pampu与M. S. Sorea, *Poincaré-Reeb graphs of real algebraic domains* 10 1007 13163 , 《马德里康普顿斯数学杂志》，https://link.springer.com/article/ . /s - 023-00469-y，2023年，arXiv:2207.06871v2。[4] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, 《苏联数学文集》4（1970），1119–1134。[5] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, 《苏联数学文集》6（1972），1302–1326。[6] T. Fukuda, *Topology of folds, cusps and Morin singularities*，载于《拓扑学盛会》（Y. Matsumoto、T. Mizutani与S. Morita编），学术出版社，1987年，第331–353页。[7] Y. K. S. Furuya与P. Porto, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, 《拓扑学及其应用》35（1990），41–52。[8] I. Gelbukh, *Realization of a digraph as the Reeb graph of a Morse-Bott function on a given surface* 2024 , 《拓扑学及其应用》，。[9] M. Golubitsky与V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*，数学研究生教材（14），施普林格出版社（1974）。[10] Izar. S. A, *Funções de Morse e Topologia das Superfícies I: O grafo de Reeb de $f : M \to \mathbb{R}$*, M´etrica第31号，载于Estudo e Pesquisas em Matem´atica，巴西：IBILCE，1988年，https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/metrica-31.pdf。[11] Camillo De Lellis, *The Masterpieces of John Forbes Nash Jr.*, 《阿贝尔奖2013—2017年》（Helge Holden与Ragni Piene编），施普林格国际出版公司，查姆，2019年，391–499，https://www.math.ias.edu/delellis/sites/math.ias.edu.delellis/files/Nash Abel 75.pdf，arXiv:1606.02551。

[12] 北泽直树, *On round fold maps* （日文）, RIMS讲究录别册B38（2013）, 45–59。[13] 北泽直树, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, 博士学位论文, 东京工业大学（2014）。[14] 北泽直树, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, 《北海道数学杂志》第43卷第3期（2014）, 327–359。[15] 北泽直树, *Constructions of round fold maps on smooth bundles*, 《东京数学杂志》第37卷第2期, 385–403, arXiv:1305.1708。[16] 北泽直树, *Real algebraic functions on closed manifolds whose Reeb graphs are given graphs* 28 4 2022 302 308, , 《泛函分析与拓扑方法》卷 期（ ）, – arXiv:2302.02339, 2023年。[17] 北泽直树, *Constructing Morse functions with given Reeb graphs and level sets*, 已被《非线性分析中的拓扑方法》接受发表, arXiv:2108.06913（其中标题已相对于该处原标题作了更改）, 2025年。[18] 北泽直树, *Some remark on real algebraic maps which are topologically special generic maps and generalize the canonical projections of the unit spheres* 2312 10646 , arXiv: . .

[19] 北泽直树与大江佐伯, *Round fold maps of n–dimensional manifolds into R^{n-1}*, 《奇点杂志》第26卷（2023年）, 1–12, http://www.journalofsing.org/volume26/article1.html, DOI: 10.5427/jsing.2023.26a, arXiv:2111.15103。[20] J. Koll´ar, *Nash's work in algebraic geometry*, 《美国数学会通报》（新辑）（2）54, 2017, 307–324。[21] E. V. Kulinich, *On topologically equivalent Morse functions on surfaces*, 《泛函分析与拓扑方法》4（1998）第1期, 59–64。[22] J. Martinez-Alfaro、I. S. Meza-Sarmiento与R. Oliveira, *Topological classification of simple Morse Bott functions on surfaces* 675 2016 165 179 , 《当代数学》（ ）, –。[23] L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*。《非线性分析中的拓扑方法》52（2）（2018）, 749–762, arXiv:1805.06727。[24] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, 《数学札记》, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1965年。[25] J. Nash, *Real algebraic manifolds*, 《数学年刊》（2）56（1952）, 405–421。[26] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´unefonction numérique*, 《法国科学院每周会议报告》（Comptes Rendus Hebdomadaires des S´eances de I´Acad´emie des Sciences）222（1946）, 847–849。[27] 大江佐伯, *Notes on the topology of folds*, 《日本数学会杂志》第44卷第3期（1992）, 551–566。[28] 大江佐伯, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, 《拓扑学及其应用》49（1993）, 265–293。[29] 大江佐伯, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, 《国际数学研究通讯》, maa301, 2022年第11期, 2022年6月, 3740–3768, https://doi.org/10.1093/imrn/maa301, arXiv:2006.01689。[30] 大江佐伯与K. Sakuma, *On special generic maps into $\mathbb{R}^3$*, 《太平洋数学杂志》184（1998）, 175–193。[31] 大江佐伯与K. Sakuma, *Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces* , 《数学年刊》313, 617–633, 1999。[32] 大江佐伯与K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers* 《日本数学会杂志》第57卷第3期（2005）, 881–902。[33] R. Thom, *Les singularites des applications differentiables*, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）6（1955-56）, 43–87。[34] A. Tognoli, *Su una congettura di Nash*, 《比萨高等师范学校年刊》（3）27（1973）, 167–185。[35] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces: I mappings of the plane into the plane* , , 《数学年刊》（ ）, –。 62 1955 374 410

Osaka Central Advanced Mathematical Institute (OCAMI), 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku Osaka 558-8585 TEL: +81-6-6605-3103*Email address*: naokikitazawa.formath@gmail.com
Webpage: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html