arXiv:2602.12217v1 [math.CV] 12 Feb 2026

厄尔德什最大项问题中的 Clunie–Hayman 构造推广

何一新和唐全宇

摘要。设 $f(z)=\sum_{n\ge 0}a_nz^n$ 为一个超越整函数，并记 $M(r,f):=\max_{|z|=r}|f(z)|$ 和 $\mu(r,f):=\max_{n\ge 0}|a_n|r^n$。厄尔德什提出的问题是求

$$B:=\sup_f \liminf_{r\to\infty}\frac{\mu(r,f)}{M(r,f)}.$$

1964 年，Clunie 和 Hayman 证明了 $\frac{4}{7}<B<\frac{2}{\pi}$。本文通过一个缩放恒等式推广他们的构造，并得到如下显式下界

$$B>0.58507,$$

从而改进了经典常数 $\frac{4}{7}$。

1. 引言

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为一个整函数，并令

$$M(r,f):=\max_{|z|=r}|f(z)|,\qquad \mu(r,f):=\max_{n\ge 0}|a_n|r^n.$$

按照厄尔德什的做法，我们考察比值 $\mu(r,f)/M(r,f)$，它衡量幂级数的最大项相对于圆 $|z|=r$上的最大模可以有多大。

在 [5, 第 249] 页（另见 [8, 问题 2.14(c)]）中，厄尔德什提出了以下问题；该问题也作为第 # 513 题收录于 Bloom 的厄尔德什问题网站 [3]。

问题 1.1 ([5])。设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为一个超越整函数。确定常数

$$B:=\sup_f\ \liminf_{r\to\infty}\frac{\mu(r,f)}{M(r,f)}.$$

等价地，令

$$\beta(f):=\liminf_{r\to\infty}\frac{\mu(r,f)}{M(r,f)},$$

我们有 $B=\sup\{\beta(f):\ f$ 为超越整函数$\}$，而问题 1.1 要求确定 B 的值。厄尔德什 [5] 指出 $B\in[1/2,1)$，而 Kövári（未发表）发现实际上 $B>1/2$。1964 年，Clunie 和 Hayman [4] 率先对此进行了系统研究，并证明了

$$0.57143\approx\frac{4}{7}<B<\frac{2}{\pi}\approx 0.63662.$$

格雷和沙阿还得到了关于比值 $\mu(r,f)/M(r,f)$ 的其他结果 [7]。

Clunie 和 Hayman [4, 第 156] 页的下界构造基于一个出色的缩放恒等式。固定 $K>1$，并考虑洛朗级数

$$k(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{K^{n(n+1)/2}}z^n,$$

2020 数学主题分类。30D15, 30D20, 65G30。
关键词和短语。 Erdős问题、最大项、超越整函数、区间算术。

它在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上定义了一个全纯函数，并满足

$$k(Kz) = z\,k(-z). \tag{1.1}$$

Let

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{K^{n(n+1)/2}} z^n$$

是去掉负指标项后得到的相应整函数。由于 k 的负指标尾部在 $z\to\infty$ 时趋于 0，因此当 $z\to\infty$ 时，有 $f(z) = k(z) + o(1)$。迭代（1.1）可得 $M(K^m,\ k)$ 的显式公式，因此，只需控制单个量 $\max_{|z|=1}|k(z)|$，即可估计 $\beta(f)$。

本文发展了 Clunie–Hayman 构造的双参数扩展。我们用幺模相位 $\varepsilon^{n(n-1)/2}$ 替代“符号模式”$(-1)^{n(n-1)/2}$。更确切地说，给定满足 $|\varepsilon| = 1$ 的参数 $K > 1$ 和 $\varepsilon\in\mathbb{C}$，我们定义

$$f_{K,\varepsilon}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n(n-1)/2}}{K^{n(n+1)/2}} z^n, \qquad k_{K,\varepsilon}(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon^{n(n-1)/2}}{K^{n(n+1)/2}} z^n.$$

洛朗级数 $k_{K,\ \varepsilon}$ 满足缩放恒等式

$$k_{K,\varepsilon}(Kz) = z\,k_{K,\varepsilon}(\varepsilon z),$$

因此，迭代此恒等式可得 $M(K^m,\ k_{K,\ \varepsilon})$ 的显式缩放律。一个关键点是，对于这一族函数，可以在几何序列 $r_m = K^m$ 上精确计算最大项，并将 $\beta(f_{K,\ \varepsilon})$ 化为关于这些半径的下极限。结合这些结果以及一个近似论证（该论证比较大 m 时的 $M(K^m,\ f_{K,\ \varepsilon})$ 与 $M(K^m,\ k_{K,\ \varepsilon})$），我们得到一个精确公式，将 $\beta(f_{K,\ \varepsilon})$ 表示为单位圆上的单个量：

$$\beta(f_{K,\varepsilon}) = \frac{1}{\max_{|z|=1}|k_{K,\varepsilon}(z)|}.$$

因此，要为 B 给出良好的下界，问题就归结为寻找参数 $(K,\ \varepsilon)$，使得 $\max_{|z|=1}|k_{K,\ \varepsilon}(z)|$ 足够小。

我们的主要结果对经典下界 $4/7$ 作出了明确改进。

定理 1.2. 存在参数 $K_0 > 1$ 和 $|\varepsilon_0| = 1$，使得超越整函数$f_{K_0,\ \varepsilon_0}$ 满足

$$\beta(f_{K_0,\varepsilon_0}) > 0.58507.$$

因此，$B > 0.58507$。

唯一的计算输入是使用球算术得到的 $\max_{|z|=1}|k_{K_0,\ \varepsilon_0}(z)|$ 的严格上界。可复现性细节（包括代码和日志）见附录 A。

1.1. AI 使用声明。

附录 A 中的脚本 cert_mesh_arb.py 初稿由 AI 助手（ChatGPT，模型：GPT-5.2 Pro）在探索性头脑风暴过程中协助起草。随后，人类作者对所有数学论证和代码进行了检查和验证。

1.2. **论文结构**。 在第 2 节中，我们构造 Clunie–Hayman 构造的双参数扩展。我们建立关键的缩放恒等式及其迭代形式，推导几何半径 $r = K^m$处最大模的显式公式，确定相同半径处的最大项，并证明定义下极限的端点约化。这些步骤共同导出一个精确表达式，将下界问题归结为控制单位圆上的一个最大值。在第 3 节中，我们选定明确的参数，并使用区间（球）算术认证所需的界。附录 A 介绍认证程序，并提供代码和日志，以供独立验证。

2. $\beta(f_{K,\ \varepsilon})$ 的缩放恒等式与精确公式

固定参数

$$K > 1, \qquad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

对每个整数 $n \in \mathbb{Z}$ ，定义

$$T_n := \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}, \qquad A_n := \frac{\varepsilon^{n(n-1)/2}}{K^{T_n}}.$$

考虑整函数

$$f_{K,\varepsilon}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n,$$

以及与之相关的双边 Laurent 级数

$$k_{K,\varepsilon}(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n z^n.$$

在不会引起混淆的情况下，我们省略参数，简记为 $f = f_{K,\varepsilon}$ 和$k = k_{K,\varepsilon}$。

引理 2.1. 函数 $f_{K,\varepsilon}$ 是超越整函数，而洛朗级数$k_{K,\varepsilon}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$上定义了一个全纯函数。

证明. 由于 $|A_n| = K^{-T_n} = K^{-n(n+1)/2}$ 对于 $n \geq 0$成立，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} |A_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} K^{-(n+1)/2} = 0,$$

因此，根据柯西–阿达马定理， f 的收敛半径为无穷大，故其为整函数。由于对于所有$n \geq 0$， $A_n \neq 0$ 成立，它不是多项式，因此是超越的。

对于 k，取一个满足 $0 < \rho < R < \infty$的环域 $\rho \leq |z| \leq R$ 。当 $n \geq 0$ 时，我们有 $|A_n z^n| \leq K^{-n(n+1)/2} R^n$；而当 $n = -m \leq -1$时，利用 $T_{-m} = m(m-1)/2$,

$$|A_{-m} z^{-m}| \leq K^{-m(m-1)/2} \rho^{-m}.$$

两个主控级数均由比值判别法判定为收敛，因此根据 Weierstrass M-判别法，洛朗级数在 $\{\rho \leq |z| \leq R\}$ 上绝对且一致收敛。由于 ρ， R 是任意的， k 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯。□

选择这些系数是为了使洛朗级数 k 满足一个简单的缩放恒等式。这是 Clunie 和 Hayman [4], 论证中的关键机制，它将对 $\beta(f)$ 的估计转化为对 $\max_{|z|=1} |k(z)|$ 的界估计。

引理 2.2. 函数$k_{K,\varepsilon}$ 满足

$$k_{K,\varepsilon}(Kz) = z\, k_{K,\varepsilon}(\varepsilon z), \qquad 0 < |z| < \infty.$$

证明. 在任意环域 $0 < \rho \le |z| \le R < \infty$上，洛朗级数都绝对且一致收敛，因此我们可以逐项计算:

$$k(Kz) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n (Kz)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n K^n z^n.$$

利用 $T_n - n = n(n-1)/2$，我们有 $A_n K^n = \varepsilon^{n(n-1)/2}/K^{n(n-1)/2}$，因此

$$k(Kz) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon^{n(n-1)/2}}{K^{n(n-1)/2}}\, z^n.$$

另一方面,

$$z\,k(\varepsilon z) = z\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n(\varepsilon z)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \varepsilon^n z^{n+1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_{n-1}\varepsilon^{n-1} z^n.$$

由于 $T_{n-1} = n(n-1)/2$，我们得到 $A_{n-1}\varepsilon^{n-1} = \varepsilon^{n(n-1)/2}/K^{n(n-1)/2}$，这与 $k(Kz)$ 中的系数相符。□

定义

$$A(K,\varepsilon) := \max_{|z|=1} \bigl|k_{K,\varepsilon}(z)\bigr|.$$

反复应用引理 2.2 可得 $k_{K,\varepsilon}$ 在圆 $|z| = K^m$ 上的最大模的显式公式。

引理 2.3。 对于每个整数 $m \ge 1$，都有恒等式

$$M(K^m, k_{K,\varepsilon}) = K^{m(m-1)/2}\, A(K,\varepsilon).$$

证明。 我们对 m 进行归纳，证明更强的恒等式

$$k_{K,\varepsilon}(K^m z) = K^{m(m-1)/2}\,\varepsilon^{m(m-1)/2}\, z^m\, k_{K,\varepsilon}(\varepsilon^m z), \qquad z \ne 0. \tag{2.1}$$

当 $m = 1$ 时，(2.1) 正是引理 2.2。假设 (2.1) 对某个 $m \ge 1$ 成立。利用引理 2.2 作用于 $K^m z$，以及标量乘法的交换性，得到

$$k_{K,\varepsilon}(K^{m+1} z) = k_{K,\varepsilon}(K(K^m z)) = K^m z\, k_{K,\varepsilon}(\varepsilon K^m z) = K^m z\, k_{K,\varepsilon}(K^m(\varepsilon z)).$$

将归纳假设应用于 εz，得到

$$k_{K,\varepsilon}(K^m(\varepsilon z)) = K^{m(m-1)/2}\,\varepsilon^{m(m-1)/2}\,(\varepsilon z)^m\, k_{K,\varepsilon}(\varepsilon^{m+1} z).$$

结合上述最后两个等式，即得 (2.1) 对 $m+1$ 成立。

对 (2.1) 两边取模，并利用 $|\varepsilon| = 1$，得到

$$|k_{K,\varepsilon}(K^m z)| = K^{m(m-1)/2}\,|z|^m\,|k_{K,\varepsilon}(\varepsilon^m z)|.$$

现在令 $|z| = 1$，并对 $|z| = 1$ 取最大值，得到 $M(K^m, k_{K,\varepsilon}) = K^{m(m-1)/2} A(K,\varepsilon)$。 □

要将引理 2.3 中 $M(K^m, k_{K,\varepsilon})$ 的显式公式转化为关于 $\beta(f_{K,\varepsilon})$ 的信息，我们还需要两个条件：(i) 对相同半径 $r = K^m$ 处的最大项 $\mu(r, f_{K,\varepsilon})$ 作出精确描述；(ii) 证明定义 $\beta(f_{K,\varepsilon})$ 的下极限可以沿 $r_m = K^m$ 取值的端点约化。

引理 2.4。 设 $r_m := K^m$ 对于 $m \ge 0$。那么

$$\mu(r_m, f_{K,\varepsilon}) = K^{m(m-1)/2} \qquad (m \ge 0).$$

此外，当 $K^m < r < K^{m+1}$ 时，最大项唯一地在指标 m 处取得；而在端点 $r = K^m$（当 $m \ge 1$ 时），指标 $m-1$ 和 m 处的项并列为最大项。

证明。由于 $|A_n|r^n = K^{-n(n+1)/2}\, r^n$，相邻两项之比为

$$\frac{|A_{n+1}|r^{n+1}}{|A_n|r^n} = \frac{r}{K^{n+1}}.$$

若 $K^m < r < K^{m+1}$，则该比值在 $n \le m-1$ 时为 >1，在 $n \ge m$时为 <1，因此各项递增至 $n=m$，之后递减，从而有唯一的最大项 $n=m$。若 $r = K^m$，则该比值恰在 $n=m-1$处等于 1，且最大值恰在 $n=m-1$和 $n=m$处取得。特别地，

$$\mu(r_m, f_{K,\varepsilon}) = |A_m|K^{m^2} = K^{-m(m+1)/2}K^{m^2} = K^{m(m-1)/2}. \qquad \square$$

命题 2.5. 对于 $f_{K,\ \varepsilon}$，在定义 $\beta(f_{K,\varepsilon})$时，可以取 $r_m = K^m$。特别地，

$$\beta(f_{K,\varepsilon}) = \liminf_{m\to\infty} \frac{\mu(K^m, f_{K,\varepsilon})}{M(K^m, f_{K,\varepsilon})}.$$

证明。固定 $m \ge 0$，并考察 $r \in (K^m, K^{m+1})$。由引理 2.4，最大项在指标 m处唯一取得，因此 $\mu(r,f) = |A_m|r^m$，所以函数 $t = \log r \mapsto \log \mu(e^t, f) = \log |A_m| + mt$ 在 $(\log K^m, \log K^{m+1})$ 上是仿射函数。由 Hadamard 三圆定理，$t \mapsto \log M(e^t, f)$ 是凸函数。因此，$t \mapsto \log \big(\mu(e^t,f)/M(e^t,f)\big)$ 在 $(\log K^m, \log K^{m+1})$ 上是凹函数，所以 $\mu(r,f)/M(r,f)$ 在 $[K^m, K^{m+1}]$ 上于端点处取得最小值。于是，对每个 N，

$$\inf_{r\ge r_N} \frac{\mu(r,f)}{M(r,f)} = \inf_{m\ge N} \inf_{r\in[r_m, r_{m+1}]} \frac{\mu(r,f)}{M(r,f)} = \inf_{m\ge N} \min\left\{ \frac{\mu(K^m,f)}{M(K^m,f)}, \frac{\mu(K^{m+1},f)}{M(K^{m+1},f)} \right\}.$$

取 $N \to \infty$并利用 $\beta(f) = \lim_{N\to\infty} \inf_{r\ge r_N} \mu(r,f)/M(r,f)$，得到

$$\beta(f) = \lim_{N\to\infty} \inf_{m\ge N} \min\left\{ \frac{\mu(K^m,f)}{M(K^m,f)}, \frac{\mu(K^{m+1},f)}{M(K^{m+1},f)} \right\} = \liminf_{m\to\infty} \frac{\mu(K^m,f)}{M(K^m,f)}. \qquad \square$$

最后，f 可由 k 去掉负指标尾部得到。接下来的两个引理说明，在大圆上这个尾部可以忽略不计。

引理 2.6。 设 F和 G 在圆 $\{|z| = r\}$上连续。那么

$$\big|M(r,F) - M(r,G)\big| \le M(r, F-G).$$

证明。</style>对于，三角不等式给出 $M(r,F) \le M(r,G) + M(r,F-G)$。交换 F和 G可得反向不等式，从而结论成立。□

引理 2.7。 当 $|z| \to \infty$,

$$k_{K,\varepsilon}(z) - f_{K,\varepsilon}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

证明。我们有

$$k(z) - f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n z^n = A_{-1}z^{-1} + \sum_{m=2}^{\infty} A_{-m} z^{-m}.$$

由于 $T_{-1} = 0$，我们有 $A_{-1} = \varepsilon$，因此首项为 εz^{-1}。此外，对于 $m \ge 2$，$T_{-m} = m(m-1)/2$，所以级数 $\sum_{m\ge2} |A_{-m}| = \sum_{m\ge2} K^{-m(m-1)/2}$ 收敛。对于 $|z| \ge 1$，这给出

$$\left| \sum_{m=2}^{\infty} A_{-m} z^{-m} \right| \le |z|^{-2} \sum_{m=2}^{\infty} |A_{-m}| = O(|z|^{-2}),$$

因此，$k(z) - f(z) = \varepsilon z^{-1} + O(|z|^{-2}) = O(1/|z|)$，当 $|z| \to \infty$时。 $\square$

定理 2.8。我们有

$$\beta(f_{K,\varepsilon}) = \frac{1}{A(K,\varepsilon)}.$$

因此，对于任意选取的(K,ε)，我们都有下界 $B \geq 1/A(K,\varepsilon)$。

证明。令 $r_m = K^m$。由于 $k_{K,\varepsilon}$ 不恒为零，$A(K,\varepsilon) > 0$。由引理 2.3 可得$M(r_m,k) = K^{m(m-1)/2}\,A(K,\varepsilon)$，而由引理 2.4 可得 $\mu(r_m,f) = K^{m(m-1)/2}$。根据引理 2.6 和引理 2.7，

$$\big|M(r_m,f) - M(r_m,k)\big| \leq M(r_m,f-k) = O(K^{-m}) = o\big(\mu(r_m,f)\big).$$

因此 $M(r_m,f) = K^{m(m-1)/2}A(K,\varepsilon) + o(K^{m(m-1)/2})$，从而

$$\frac{\mu(r_m,f)}{M(r_m,f)} = \frac{K^{m(m-1)/2}}{K^{m(m-1)/2}A(K,\varepsilon) + o(K^{m(m-1)/2})} = \frac{1}{A(K,\varepsilon)} + o(1).$$

利用命题 2.5 得到 $\beta(f_{K,\varepsilon}) = 1/A(K,\varepsilon)$。最后，引理 2.1 表明 $f_{K,\varepsilon}$ 是超越整函数，因此 $B \geq 1/A(K,\varepsilon)$。□

2.1. θ 函数视角。本小节的内容在论文其他部分并未用到。这里只是为了将 $k_{K,\varepsilon}$ 识别为一个经典特殊函数，这一视角有助于整理并加快后续的参数搜索。我们遵循拉马努金广义 θ 函数的标准记号（例如参见 [6, §1.6]）。令 $q := K^{-1} \in (0,1)$，并定义拉马努金 θ 函数[1]

$$\Phi(a,b) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2}\,b^{n(n-1)/2}, \qquad |ab| < 1.$$

命题 2.9。我们有如下精确恒等式

$$k_{K,\varepsilon}(z) = \Phi(qz, \varepsilon z^{-1}), \qquad 0 < |z| < \infty.$$

证明。直接计算：

$$\Phi(qz,\varepsilon z^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (qz)^{n(n+1)/2}(\varepsilon z^{-1})^{n(n-1)/2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon^{n(n-1)/2}}{K^{T_n}} z^n = k_{K,\varepsilon}(z),$$

因为 $T_n - n(n-1)/2 = n$ 且 $q^{T_n} = K^{-T_n}$。 □

定义在这一缩放恒等式族中可得的最优常数：

$$\beta_{\mathrm{SI}} := \sup_{K>1,\ |\varepsilon|=1} \beta(f_{K,\varepsilon}).$$

推论 2.10。我们有

$$\beta_{\mathrm{SI}} = \frac{1}{\inf\limits_{0<q<1,\ |\varepsilon|=1} \max\limits_{|z|=1} \big|\Phi(qz,\varepsilon z^{-1})\big|}.$$

特别是，$B \geq \beta_{\mathrm{SI}}$。

证明。这是利用命题 2.9 和恒等式 $\sup(1/X) = 1/\inf(X)$（对正的 X）对定理 2.8 进行的直接改写。□

[1]如需快速了解，请参阅维基百科上的拉马努金θ函数。

3. 显式数值下界

根据定理 2.8，要为 B 得到一个显式下界，只需对.....进行界定

$$A(K,\varepsilon)=\max_{|z|=1}\bigl|k_{K,\varepsilon}(z)\bigr|$$

对于参数 (K,ε) 的一种适当选取。本节中，我们固定由数值优化所建议的显式参数 (K_0,ε_0)，并使用球算术计算 $A(K_0,\varepsilon_0)$ 的一个完全可审计上界。

引理 3.1. 对于每个 $\theta\in\mathbb{R}$，都有

$$e^{i\theta}k_{K,\varepsilon}(\varepsilon e^{2i\theta})=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^{T_n}}{K^{T_n}}\cos\bigl((2n+1)\theta\bigr).$$

因此，

$$\max_{|z|=1}|k_{K,\varepsilon}(z)|=\max_{\theta\in[0,2\pi)}\left|2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^{T_n}}{K^{T_n}}\cos\bigl((2n+1)\theta\bigr)\right|.$$

证明. 设 $z=\varepsilon e^{2i\theta}$。由引理 2.1，定义 $k_{K,\varepsilon}$ 的洛朗级数在 $|z|=1$ 上绝对收敛，因此其各项可以任意重新排列（见 [2, 定理 3.55]）。特别地，将指标为 n 和 $-n-1$ 的项配对，可得

$$k(z)=\sum_{n\ge0}\Bigl(A_nz^n+A_{-n-1}z^{-n-1}\Bigr).$$

利用 $T_{-n-1}=T_n$，可验证

$$A_nz^n=\frac{\varepsilon^{T_n}}{K^{T_n}}e^{2in\theta},\qquad A_{-n-1}z^{-n-1}=\frac{\varepsilon^{T_n}}{K^{T_n}}e^{-2i(n+1)\theta}.$$

因此

$$e^{i\theta}\Bigl(A_nz^n+A_{-n-1}z^{-n-1}\Bigr)=\frac{\varepsilon^{T_n}}{K^{T_n}}\Bigl(e^{i(2n+1)\theta}+e^{-i(2n+1)\theta}\Bigr)=2\frac{\varepsilon^{T_n}}{K^{T_n}}\cos((2n+1)\theta),$$

并对 $n\ge0$ 求和，得到第一个恒等式。

最后，映射 $\theta\mapsto\varepsilon e^{2i\theta}$ 是单位圆的一个参数化，且 $|e^{i\theta}|=1$。对 $\theta\in[0,2\pi)$ 取绝对值并求最大值，得到第二个恒等式。□

现在我们固定定理 1.2 中使用的显式参数。

固定这些精确有理数

$$K_0:=\frac{7137}{2000}=3.56850,\qquad \alpha_0:=\frac{198074929}{50000000}=3.96149858,$$

并定义 $\varepsilon_0:=e^{i\alpha_0}$。令 $f_0:=f_{K_0,\ \varepsilon_0}$ 且 $k_0:=k_{K_0,\ \varepsilon_0}$，并设

$$A_0:=\max_{|z|=1}|k_0(z)|.$$

由定理 2.8，$\beta(f_0)=1/A_0$，因此只需证明 $A_0<1.70919$。

定义截断三角多项式

$$P(\theta):=2\sum_{n=0}^{5}\frac{\varepsilon_0^{T_n}}{K_0^{T_n}}\cos\bigl((2n+1)\theta\bigr),$$

并令

$$R(\theta):=2\sum_{n=6}^{\infty}\frac{\varepsilon_0^{T_n}}{K_0^{T_n}}\cos\bigl((2n+1)\theta\bigr)$$

为尾部，因此由引理 3.1 可得

$$A_0 = \max_{\theta\in[0,2\pi)} |P(\theta) + R(\theta)|.$$

引理 3.2。对所有 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|R(\theta)| \le \frac{2K_0^{-21}}{1 - K_0^{-7}}.$$

证明。 利用 $|\varepsilon_0^{T_n}| = 1$ 和 |余弦 $| \le 1$,

$$|R(\theta)| \le 2\sum_{n=6}^{\infty} K_0^{-T_n}.$$

由于 $T_6 = 21$ 和 $T_{n+1} - T_n = n + 1 \ge 7$ 对 $n \ge 6$成立，我们有 $T_n \ge 21 + 7(n - 6)$ 对 $n \ge 6$成立，因此

$$\sum_{n=6}^{\infty} K_0^{-T_n} \le K_0^{-21} \sum_{m=0}^{\infty} K_0^{-7m} = \frac{K_0^{-21}}{1 - K_0^{-7}}.$$ □

引理 3.3。 函数 P 在 $\mathbb{R}$上是 4-*Lipschitz*，即

$$|P(\theta) - P(\varphi)| \le 4|\theta - \varphi| \qquad (\theta, \varphi \in \mathbb{R}).$$

证明。 逐项求导并利用 |正弦$| \le 1$ 和 $|\varepsilon_0^{T_n}| = 1$:

$$|P'(\theta)| \le 2\sum_{n=0}^{5} (2n + 1)\, K_0^{-T_n}.$$

要看出这是 < 4，注意到 T_0，T_1，…，$T_5 = 0$，1，3，6，10，15 和 $K_0 > 3.5$，因此

$$2\sum_{n=0}^{5} (2n + 1)K_0^{-T_n} < 2\left(1 + \frac{3}{3.5} + \frac{5}{3.5^3} + \frac{7}{3.5^6} + \frac{9}{3.5^{10}} + \frac{11}{3.5^{15}}\right) < 4.$$

Lipschitz 上界由此得到。 □

引理 3.4。令 $M := 2{,}000{,}000$ 以及 $\theta_j := 2\pi j/M$，其中 $j = 0,1,\ldots,M - 1$。那么该有限最大值满足经认证的不等式

$$\max_{0\le j<M} |P(\theta_j)| \le 1.709176398.$$

证明。这是使用 Arb 球算术（通过 python-flint）完成的有限计算机辅助验证。对于每个网格点 θ_j，我们用严格的复球算术计算 $P(\theta_j)$，从而得到精确复数值的一个包络，其形式为 acb 球。根据该包络，我们提取模的经认证的上界，代码中记作

$$U_j := \texttt{abs_upper}\big(P(\theta_j)\big),$$

它保证满足 $U_j \ge |P(\theta_j)|$。对 $j = 0$、1、…、$M - 1$ 取最大值，得到

$$\max_{0\le j<M} |P(\theta_j)| \le \max_{0\le j<M} U_j \le 1.709176398,$$

正如所声称的。完整的可复现性细节（代码、参数和输出日志）见附录 A。□

命题 3.5. 有 $A_0 < 1.70919$。

证明。 设 M 和 θ_j 如引理 3.4 所述。我们分别对截断部分和尾部进行估计：

$$A_0 = \max_{\theta\in[0,2\pi)} |P(\theta)+R(\theta)| \le \max_{\theta\in[0,2\pi)} |P(\theta)| + \sup_{\theta\in[0,2\pi)} |R(\theta)|.$$

截断部分。 固定 $\theta \in [0,2\pi)$。由于网格点 $\theta_j = 2\pi j/M$ 的间距为 $2\pi/M$，存在 $j \in \{0,1,\dots,M-1\}$ 使得圆周距离满足

$$d(\theta,\theta_j) := \min\bigl(|\theta-\theta_j|,\ 2\pi - |\theta-\theta_j|\bigr) \le \frac{\pi}{M}.$$

由于 P 是 2π-周期的，如有必要，我们可以将 θ 替换为 $\theta \pm 2\pi$，使得 $|\theta-\theta_j| = d(\theta,\ \theta_j)$。于是由引理 3.3 得到

$$|P(\theta)| \le |P(\theta_j)| + 4\,d(\theta,\theta_j) \le |P(\theta_j)| + 4\frac{\pi}{M}.$$

对 $\theta \in [0,2\pi)$ 取最大值并应用引理 3.4，可得

$$\max_{\theta\in[0,2\pi)} |P(\theta)| \le \max_{0\le j<M} |P(\theta_j)| + 4\frac{\pi}{M} \le 1.709176398 + 4\frac{\pi}{2{,}000{,}000} < 1.709183.$$

尾部。 由引理 3.2,

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi)} |R(\theta)| \le \frac{2K_0^{-21}}{1-K_0^{-7}} < 5.1\times 10^{-12}.$$

因此,

$$A_0 < 1.709183 + 5.1\times 10^{-12} < 1.70919,$$

正如所声称的。 □

现在我们可以给出以下结果。

定理 *1.2* 的证明。 由定理 2.8 可得 $\beta(f_0) = 1/A_0$。命题 3.5 给出 $A_0 < 170919/100000$，因此

$$\beta(f_0) = \frac{1}{A_0} > \frac{100000}{170919} > \frac{58507}{100000}.$$

因此 $\beta(f_0) > 0.58507$。由于 f_0 是超越整函数，我们有 $B = \sup_f \beta(f) \ge \beta(f_0) > 0.58507$。 □

References

[1] ep513-arb-certification. https://github.com/QuanyuTang/ep513-arb-certification [2] W. Rudin,《数学分析原理》，第 3 版，麦格劳-希尔，纽约，1976。[3] T. F. Bloom，Erdős 问题 #513，https://www.erdosproblems.com/513，访问日期：2026-02-09。[4] J. Clunie，W. K. Hayman，幂级数的最大项。*J. Analyse Math.* **12(1)**（1964），143–186。[5] P. Erdős，若干未解决的问题。*Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **6**（1961），221–254。[6] G. Gasper，M. Rahman，《基本超几何级数》，第 2 版，数学及其应用百科全书，第 96 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004。[7] A. Gray，S. M. Shah，关于整函数与 Erdős 猜想的一则注记。*Bull. Amer. Math. Soc.* **69(4)**（1963），573–577。[8] W. K. Hayman，E. F. Lingham，《函数论研究问题：五十周年纪念版》，数学问题丛书，施普林格，Cham，2019。[9] F. Johansson，Arb：高效的任意精度中点半径区间算术，*IEEE* 计算机汇刊，**66(8)**（2017），1281–1292。[10] F. Johansson，python-flint 文档：`acb`（复数球）：`abs_`上界。https://python-flint.readthedocs.io/en/latest/acb.html，访问日期：2026-02-11。[11] F. Johansson，python-flint 文档：`fmpq`（多精度有理数）。https://python-flint.readthedocs.io/en/latest/fmpq.html，访问日期：2026-02-11。[12] F. Johansson，python-flint 文档：一般用法与非精确数（球算术）。https://python-flint.readthedocs.io/en/latest/general.html，访问日期：2026-02-11。

A附录 A. 使用球算术进行可审计的认证计算

本附录记录了引理 3.4 背后的有限、可审计计算。需要认证的陈述纯属离散问题：我们在包含 $M = 2{,}000{,}000$ 个点的均匀网格 $\{\theta_j\}_{j=0}^{M-1}$上计算固定的三角多项式 P，并得到 $\max_{0\le j<M} |P(\theta_j)|$的严格上界。

A.1. **设置：待计算的精确对象**。我们固定精确参数

$$K_0 = \frac{7137}{2000}, \qquad \alpha_0 = \frac{198074929}{50000000}, \qquad \varepsilon_0 = e^{i\alpha_0},$$

并对 $n = 0$，1，.....，5 定义

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad c_n = \frac{\varepsilon_0^{T_n}}{K_0^{T_n}} = \frac{e^{i\alpha_0 T_n}}{K_0^{T_n}}.$$

接着，我们考虑三角多项式

$$P(\theta) = 2\sum_{n=0}^{5} c_n \cos\big((2n+1)\theta\big).$$

最后，设

$$M = 2{,}000{,}000, \qquad \theta_j = \frac{2\pi j}{M} \qquad (j = 0, 1, \ldots, M-1).$$

引理 3.4 声称以下经认证的不等式

$$\max_{0\le j<M} |P(\theta_j)| \le 1.709176398.$$

A.2. **球算术：保证了什么**。 Arb 式球算术用中点-半径区间表示实数

$$[m \pm r] = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - m| \le r\},$$

并类似地用复球表示复数。其关键保证是向外舍入原理：

向外舍入原理。 每个初等运算（加法、乘法、余弦、指数函数等）都会返回一个球，并且可以证明该球包含与输入球中所含精确值对应的精确结果；参见 [9]。

特别是，若已知复球 Z 包含精确值 $P(\theta_j)$，那么 $\sup\{|z| : z \in Z\}$ 的任何经认证的上界都会自动成为 $|P(\theta_j)|$的严格上界。

A.3. **引理 3.4 的认证：有限过程**。 该认证是一项确定性的有限计算。概念上，它由以下步骤组成。

(1) **精确输入（不使用浮点数）**。将 K_0 和 α_0 表示为精确的多精度有理数（类型为 fmpq），然后再通过 arb(fmpq(...)) 将它们转换为 Arb 实数球。这可以避免浮点数解析带来的任何歧义；参见 [11, 12]。

(2) **严格 π 和严格网格点**。 将 π 作为一个实数球，确保其包含 π 的真实值。将每个 $\theta_j = (2\pi/M)\ j$ 计算为 π球与精确有理数 $2j/M$ 的乘积。所得实数球保证包含精确实数 θ_j。

(3) 严格系数。 对于每个 $n = 0,\ 1、\ldots\ldots、5$，计算

$$c_n = \frac{e^{i\alpha_0 T_n}}{K_0^{T_n}}$$

使用严格的复数乘方和除法，生成一个包含精确值 c_n 的复球。

(4) **对 $P(\theta_j)$ 进行严格求值。**对于每个 $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ M-1$，求值

$$P(\theta_j) = 2\sum_{n=0}^{5} c_n \cos\big((2n+1)\theta_j\big)$$

使用严格的余弦计算和球运算。输出是一个包含精确值 $P(\theta_j)$ 的复球。

(5)严格的模长界与离散最大值。从包围复球 $Z_j \ni P(\theta_j)$ 中提取经认证的上界

$$u_j \geq |P(\theta_j)|.$$

在我们的实现中，这是通过 abs_upper 完成的：保证 abs_upper(Z_j) 的值不小于 $\geq \sup\{|z| : z \in Z_j\}$，因此 $\geq |P(\theta_j)|$；见 [10]。最后设

$$U := \max_{0\leq j<M} u_j.$$

那么， U 是 $\max_{0\leq j<M} |P(\theta_j)|$ 的严格上界。

(6) **与目标界的比较。** 设

$$C_{\text{mesh}} := 1.709176398 = \frac{1709176398}{10^9}.$$

我们使用球比较例程认证 $U \leq C_{\text{mesh}}$。在 python-flint 中，比较是保守的：只有当底层包络所表示的不等式确定成立时，谓词 $U \leq C_{\text{mesh}}$ 才会返回 True；参见 [12]。因此，如果程序输出 True，引理 3.4 就得到了认证。

A.4. 可复现性与记录的输出。 上述过程由辅助Python脚本 cert_mesh_arb.py 实现。源代码可在第二作者的公开代码库 [1] 中获取。该脚本通过 python-flint 提供的 arb/acb类型使用 Arb 球算术，并将网格大小 M、工作精度（十进制位数）以及工作进程数作为输入。

软件版本。 此处报告的所有认证均在一台 64 位 Windows 机器上运行，使用 Python 3.12.3 和 python-flint 0.8.0（FLINT/Arb球算术）。

运行脚本

$$(M, \text{dps}, \text{workers}) = (2000000, 90, 1)$$

将生成以下输出：

```
=== Arb 经认证的网格界 ===
M = 2000000，dps = 90，工作进程 = 1
网格_最大值_上界 = 1.709176397414741464507875（在 j = 1794536 处取得）
目标界 = 1.709176398000000000000000
已认证 mesh_max_upper <=界：True
```

最后一行 True 证明，计算值 mesh_max_upper 以上述目标界为上界，从而确立引理 3.4。

复旦大学数学科学学院，中华人民共和国上海 200433电子邮箱: hyx717math@163.com

西安交通大学数学与统计学院，西安 710049，P . R.
中国电子邮箱: tang_quanyu@163.com