arXiv:2602.12239v1 [math.CT] 12 Feb 2026

小性与指数对象的右伴随

ENRIQUE RUIZ HERN´ANDEZ† AND PEDRO SOL´ORZANO⋆

Abstract. 对象 T 的指数函子（–）^{T} 若容许右伴随（–）$_T$，便以不同的名称而为人所知。它们确实存在，然而在集合范畴中满足这一性质的唯一集合是单元素集；这一事实使 Lawvere 认为它们应当“惊人地微小”，因此便有了 Lawvere 的首字母缩写“A.T.O.M.”。

本报告探讨任何此类对象在直观上究竟有多么微小。当环境范畴为拓扑斯时，通过考察其范畴论行为（子对象、商对象、收缩等），可以得出既支持又相反的证据。

T 与（–）$_T$ 两者的拓扑行为（连通性、可缩性、连通分支等）在那些相对于其可判定对象满足某些预黏聚条件的拓扑斯中得到进一步分析；在此，这种微小性被拿来对照 Lawvere 关于合成微分几何的基础性提案的若干部分加以检验。

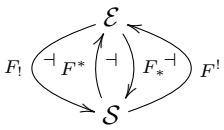
Motivation

在合成微分几何的传统模型中，切结构不仅可以表示（–）^{T}，还被进一步发现具有惊人的右伴随（–）$_T$。满足这一条件的对象 T 有时称为无穷小对象、微小对象，或原子对象（例如 Lawvere [9]）。本报告中将始终使用最后一个名称。拥有某些原子对象，可以让我们方便地描述若干经典对象（参见 Kock [6], Kock、Reyes [7], Moerdijk 和 Reyes [18],Madanshekaf、 [12],Madanshekaf 和 Tavakoli [11], 等人的研究）。

在 Lawvere（2011）及更早的研究中，有人提出，对于适当子范畴“离散空间”中的对象 A，A^T 应与A 同构；也就是说，这些空间是非生成空间。通过逆向工程，Yetter [21]对此作了精彩的形式化处理。

作为作者先前工作的自然延续 [19], ，本项目旨在理解原子 T 以及（–）$_T$的黏聚性质。早在 [7] ，研究者就发现， T 的点决定了某些富化。在合成微分几何中研究的原子对象都具有单点这一附加性质，但也存在具有多个点的原子对象。

拓扑斯 $\mathcal{E}$ 在拓扑斯 $\mathcal{S}$ 上是预凝聚的，当且仅当存在一串伴随函子



Date: 2026年2月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：18B25；次要分类：03G30、03B38。*Key words and phrases.* 微小性、惊人的右伴随、预凝聚。

(⋆) SECIHTI-UNAM 研究员。

其中 F^* 是全忠实的， $F^* \dashv F_*$ 的余单位是单态射，并且 $F_!$ 保有限积。

在本报告中，*McLarty* 拓扑斯 将指一种二值拓扑斯，其中支撑可分裂，并且它在一个布尔基底上是预凝聚的（参见 McLarty [13, 14]）。例子包括 ETCS 的任何模型（带或不带选择公理），以及任何在集合范畴上预凝聚的拓扑斯（另见 Ruiz-Hern´andez 和 Sol´orzano[20]）。它们自然构成合成微分几何（SDG，见 [14]）模型的环境范畴。在这种情况下，该预凝聚语境记为

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \Pi \dashv & \mathcal{I} & \dashv \Gamma \dashv \Lambda \\ & \mathrm{Dec}(\mathcal{E}) & \end{array} \tag{1}$$

其中， Π 表示连通分支（例如，如果一个对象的像是终对象，则该对象是连通的），$\mathcal{I}$ 是从 $\mathcal{E}$ 的可判定对象到 $\mathcal{E}$中的包含， Γ 是点的集合 （即 X 的每个全局元素都经由 $\mathcal{I}\Gamma(X)$分解），而 Λ 等价于 $\neg\neg$-层的包含（更多详情见 [14] 和 [19, 20] ）。

Main results

在笛卡尔闭范畴中，原子对象的有限积是原子的，而始对象不是原子的，除非该范畴是平凡的。对于笛卡尔闭范畴中任意一个原子对象之间的箭头$f : S \to S'$，可以相应地构造一个自然变换

$$(-)_f : (-)_S \to (-)_{S'}, \tag{2}$$

其构造方式与 $(\text{–})^f$ 相同。类似地，给定对象 Y，可以得到一个函子 $Y_{(-)}$，将原子对象的全子范畴映回环境范畴。因此，对于任意带有一个点的原子对象 T，任意对象 Y 都是 Y_T 的收缩——分别令 S 和 S' 等于 T 和 $\mathbf{1}$，由此可知 $(\text{–})_T$ 是忠实的。

定理 A. 设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，具有一个至少有一个点p 的原子对象 T： $1 \to T$，并设 ε 是$(-)^T \dashv (-)_T$的余单位。对于任意对象 X，箭头$j_{p,\,X}$： $X_T \to (\Omega_T)^X$，用内语言表示如下

$$(\xi \mapsto (x \mapsto X_p(x) =_T \xi)), \tag{3}$$

是使下列图表可交换的单态射:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\{-\}_X} & \Omega^X \\ {\scriptstyle X_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\Omega_p)^X} \\ X_T & \xrightarrow[j_{p,X}]{} & (\Omega_T)^X \end{array} \tag{4}$$

$$\begin{array}{ccc} (X_T)^T & \xrightarrow{(j_{p,X})^T} & ((\Omega_T)^X)^T \cong ((\Omega_T)^T)^X \\ {\scriptstyle \varepsilon_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\varepsilon_\Omega)^X} \\ X & \xrightarrow[\{-\}_X]{} & \Omega^X \end{array} \tag{5}$$

其中，对于任意点 $p:\ 1 \to T$，ε_X 通过 $j_{p,\ X}$ 进行分解。此外，如果 S 是另一个原子对象，且 $f:\ T \to S$，则下列图表可交换。

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{X_f} & X_S \\ {\scriptstyle j_{p,X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_{f\circ p,X}} \\ (\Omega_T)^X & \xrightarrow[(\Omega_f)^X]{} & (\Omega_S)^X \end{array}. \tag{6}$$

特别地，对于 $T = 1$ 和 $f = 1$，可得 $j_{1,\ X} = \{-\}_X$。因此，$j_{p,\ X}$ 可视为广义单点。

自然变换 (2) 的存在还带来了以下推论。Yetter 指出，在预层范畴中，每个可表对象都是原子对象，前提是底层范畴具有二元积 [21]。Madan-shekaf 进一步证明，若底层范畴具有有限积，则每个原子对象都是某个可表函子的收缩 [12]。

定理 B。 在任何拓扑斯中，原子对象的回缩都是原子对象。此外，还给出了原子对象的非原子子对象和商对象的例子。

此处给出的定理 B 证明明确构造了惊人的右伴随。这个结果可与 Kelly [5]（参见其中的命题 5.25）关于小投射对象的讨论相比较；在那里，指数函子对余极限的保持性被认为可由收缩继承。

在预凝聚的语境中，两个拓扑斯中的原子对象之间的关系得到了分析。在下面的结果中，第一部分可以对指数理想作更一般的表述，但第二部分所给出的证明确实需要局部性。

定理 C。 设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{S}$ 为拓扑斯。设 $F:\ \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ 是预凝聚的，则

(1) 函子 F^* 反映原子对象；以及 *(2)* 函子 $F_!$

保持原子对象。

此外，还给出了例子，表明 $F_!$ 不必反映原子对象，而 F_* 可能既不保持原子性，也不反映原子性。

在 McLarty 拓扑斯中，根据下面的定理 D，F^* 和 $F^!$ 都会保持原子对象，原因相当简单。一般而言，正如 Lawvere [8, 命题3], 所暗示的，不应期待 $F^!$ 反映原子对象；然而，目前在预凝聚的语境中还无法给出一个明确的构造。

即使在 McLarty 拓扑斯中，$\Gamma(X^T)$ 和 $\Pi(X^T)$ 也可能与 $\Gamma(X)$ 或 $\Pi(X)$ 大不相同。下面的结果确立了这个令人惊叹的右伴随的一种更为严格的行为，使其变得更加惊叹。

定理 D。 布尔 *McLarty* 拓扑斯中的原子对象是终对象，因此，在任意 *McLarty* 拓扑斯中，原子对象都是连通的。

在任意 *McLarty* 拓扑斯中，对于任意原子 T 和任意对象 Y，

$$\Gamma(Y_T) \cong \Gamma(Y) \qquad and \qquad \Pi(Y_T) \cong \Pi(Y). \tag{7}$$

在 Lawvere 提出的、旨在为合成微分几何建立彻底综合基础的方案中，提出了一个具有唯一点 0：$1 \to T$ 的对象 [8], T。论证指出，求值映射 $\mathrm{ev}_T^0:\ T^T \to T$（即 $\Pi(R) = 1$）沿 0 的拉回 R 的连通性等价于

$$\Pi(X^T) \cong \Pi(X) \tag{8}$$

对于任意对象 X，在假设 R 是 T^T 的一个收缩的条件下（另见 Menni [17]）。Ruiz-Hern´andez 和 Sol´orzano [19] 指出，在 McLarty 拓扑斯中，对于给定的 T（不一定是原子对象，也不一定具有唯一点），式（8）成立，当且仅当 T 可缩——也就是说，对于任意对象 X，T^X 都是连通的。如下述结果所示，要求原子性是合理的。

定理 E. 在任何其典范几何态射在 **集合** 上为预凝聚的格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$ 中，每个原子对象都是可缩的。

在一般的 *McLarty* 拓扑斯中，一个原子 T 是可缩的，当且仅当 $2_!: \ 2_T \to 2$是同构。

截至撰写本文时，作者尚未发现任何预凝聚背景下存在不可缩的原子对象。

问题。 *McLarty* 拓扑斯中是否存在不可缩的原子对象？

在较弱的假设下，即笛卡尔闭范畴中存在连通性结构（见 [19]），反例理应有更多出现的空间，但这超出了本文的讨论范围。

本文所呈现的结果表明，指数函子存在右伴随这一事实与“微小”的直观概念有多么不同。就可补子对象的数目而言，存在一些不连通对象，其指数函子具有右伴随（例如**集合** $\times$**集合**中的终对象），而且并非每一个不可分——即连通——对象都使其指数函子具有右伴随。那些由合成微分几何的公理体系产生、且其指数函子具有右伴随的对象被标记为无穷小，因为它们的定义在形式上符合莱布尼茨的直觉，然而它们并不是先验 通过几何极限得到的（ [18]的附录 4 说明，其中所考虑的某些无穷小在某种后验 意义上小于其唯一点的每一个开邻域）。因此，原子、微小和无穷小都不是这类对象完全恰当的名称。要提出更好的名称，还需要进一步了解它们的行为。

本报告的结构如下。第 1 节分析笛卡儿闭范畴中原子对象的全子范畴。第 2 节研究原子对象的收缩的原子性。第 3 节开始研究拓扑斯中的原子对象；第 4 节和第 5 节则聚焦于预凝聚语境，先作一般讨论，再讨论 McLarty 拓扑斯。第 6 节分析预层拓扑斯和格罗滕迪克拓扑斯这一特殊情形。最后，第 7 节说明先前承诺的例子和反例。

致谢 作者谨此感谢 Sebasti´an Mart´ınez Ruiz 和 Omar Antol´ın 提出的建议。

1. The full subcategory of atomic objects

笛卡尔闭范畴中的原子对象是一个满足以下条件的对象：指数函子 $(–)^T$ hasa rightadjoint

$$(-)^T \dashv (-)_T. \tag{9}$$

将 η_T 和 ε_T 分别记为此伴随的单位和余单位。若不会引起混淆，可以省略对 T 的提及。终对象是原子的，但始对象不可能是原子的。原子对象的有限积也是

原子的。一般而言，原子对象的极限并非原子对象。第 6 节将给出明确的反例。

如同伴随 $(-)\times T\dashv(-)^T$ 的情形，给定箭头 $f\colon S\to T$ 时，会提供自然变换 $(-)^f$ ；对于原子对象 T 和 S 以及箭头 $f\colon S\to T$，自然变换 $(-)^f$ 由下图确定：

$$\begin{array}{ccc} (X_S)^T & \xrightarrow{(X_S)^f} & (X_S)^S \\ {\scriptstyle (X_f)^T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{S,X}} \\ (X_T)^T & \xrightarrow[\varepsilon_{T,X}]{} & X. \end{array} \tag{10}$$

对于固定的 X， $T\mapsto X_T$ 和 $f\mapsto X_f$ 是从原子对象的子范畴到环境范畴的协变函子。

1.1.**引理**。设 $\mathcal{E}$ 是一个笛卡尔闭范畴。若 T 是 $\mathcal{E}$ 的一个原子对象，且 T 有一个点 $0\colon 1\to T$，那么 $(-)^T$ 和 $(-)_T$ 是忠实的。

证明。由 (10)，下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} (X_T)^1 & \xrightarrow{(X_T)^!} & (X_T)^T \\ {\scriptstyle (X_!)^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{T,X}} \\ (X_1)^1 & \xrightarrow[\varepsilon_{1,X}]{} & X. \end{array}$$

另一方面，由于 $1 \overset{0}{\rightarrowtail} T \overset{!}{\twoheadrightarrow} 1 = 1_1$，

$$X_! X_0 = 1,$$

相应地， $X_!$ 是满态射。因此，由于 $\varepsilon_{1,\,X}$ 是同构，$\varepsilon_{T,\,X}$ 是满态射，这意味着 $(-)_T$ 是忠实的。

最后，出于类似原因，$(-)^T$ 是忠实的：由于 $X^0\circ X^! = 1$， X^0 是满态射，而 $(-)^0$ 的定义图表使得 $(-)\times T\dashv(-)^T$ 的余单位也成为满态射。□

图表 (10) 可以如下推广到自然变换。

1.2. **定理**。设 $\mathcal{E}$ 是一个具有原子对象 S,T 的笛卡尔闭范畴。如果 $\varphi\colon(-)_T\Rightarrow(-)_S$ 是一个自然变换，则它按如下方式确定一个自然变换 $\psi\colon(-)^S\Rightarrow(-)^T$：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_{T,X}} & (X^T)_T \\ {\scriptstyle \eta_{S,X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{X^T}} \\ (X^S)_S & \xrightarrow[(\psi_X)_S]{} & (X^T)_S \end{array} \tag{11}$$

反过来，一个自然变换 $\psi : (-)^S \Rightarrow (-)^T$ 按如下方式确定一个自然变换 $\varphi\colon (-)_T \Rightarrow (-)_S$：

$$\begin{array}{ccc} (X_T)^S & \xrightarrow{(\varphi_X)^S} & (X_S)^S \\ {\scriptstyle \psi_{X_T}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{S,X}} \\ (X_T)^T & \xrightarrow[\varepsilon_{T,X}]{} & X \end{array} \tag{12}$$

这是一个双射对应。

证明。设 $\varphi\colon (-)_T \Rightarrow (-)_S$ 是一个自然变换。设 $\psi_X\colon X^S \to X^T$ 是 $\varphi_{X^T} \circ \eta_{T,X}$ 在 $(-)^S \dashv (-)_S$ 下的转置，如 (11) 所示。因此

$$\psi_X = \varepsilon_{S,X^T} \circ (\varphi_{X^T} \circ \eta_{T,X})^S.$$

因此，ψ 关于 X 是自然的。这使得 (12) 可交换：事实上，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccccccc} (X_T)^S & \xrightarrow{(\eta_{T,X_T})^S} & (((X_T)^T)_T)^S & \xrightarrow{(\varphi_{(X_T)^T})^S} & (((X_T)^T)_S)^S & \xrightarrow{\varepsilon_{S,(X_T)^T}} & (X_T)^T \\ & \searrow^{1} & \downarrow{\scriptstyle ((\varepsilon_{T,X})_T)^S} & & \downarrow{\scriptstyle ((\varepsilon_{T,X})_S)^S} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{T,X}} \\ & & (X_T)^S & \xrightarrow[(\varphi_X)^S]{} & (X_S)^S & \xrightarrow[\varepsilon_{S,X}]{} & X \end{array}$$

反过来，设 $\varphi_X\colon X_T \to X_S$ 是 $\varepsilon_{T,X} \circ \psi_X$ 在 $(-)^S \dashv (-)_S$下的转置，如 (12) 所示。因此

$$\varphi_X = (\varepsilon_{T,X} \circ \psi_{X_T})_S \circ \eta_{S,X_T}.$$

因此，φ 关于 X 是自然的。这使得 (11) 可交换：事实上，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\eta_{S,X}} & (X^S)_S & \xrightarrow{(\psi_X)_S} & (X^T)_S & & \\ {\scriptstyle \eta_{T,X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ((\eta_{T,X})^S)_S} & & \downarrow{\scriptstyle ((\eta_{T,X})^T)_S} & \searrow^{1} & \\ (X^T)_T & \xrightarrow[\eta_{S,(X^T)_T}]{} & (((X^T)_T)^S)_S & \xrightarrow[(\psi_{(X^T)_T})_S]{} & (((X^T)_T)^T)_S & \xrightarrow[(\varepsilon_{T,X^T})_S]{} & (X^T)_S \end{array}$$

因此，自然变换 $\varphi\colon (-)_T \Rightarrow (-)_S$ 与自然变换 $\psi : (-)^S \Rightarrow (-)^T$之间存在双射对应。□

事实上，对于任意给定的自函子之间的伴随，这一点也成立。特别地，有如下结果。

1.3. **定理**。设 $\mathcal{E}$是一个具有对象 S、T的笛卡尔闭范畴。自然变换 $\varphi : (-)^S \Rightarrow (-)^T$ 与自然变换 $\psi : (-) \times T \Rightarrow (-) \times S$之间存在双射对应。

证明。与前一定理的证明类似。 □

1.4. **命题.** 设 $\mathcal{E}$ 为笛卡尔闭范畴，φ 为自然变换$(-)^A \Rightarrow (-)^B$。设 $\psi : (-) \times B \Rightarrow (-) \times A$ 为自然变换

由 φ诱导。若对 φ_X ，该图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma_X^A} & X^A \\ & \searrow^{\sigma_X^B} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_X} \\ & & X^B, \end{array} \tag{13}$$

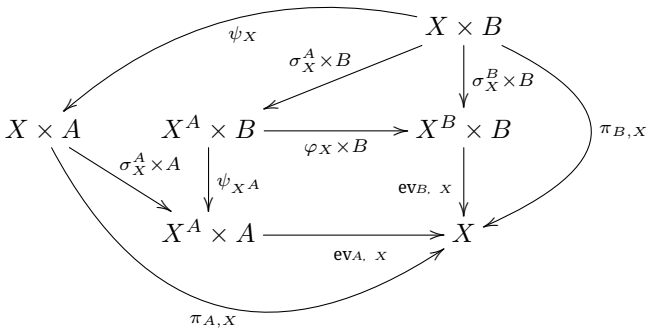
其中 σ_X^A 是在伴随函子 $(-) \times A \dashv (-)^A$ 下投影的转置，则下图也成立：

$$\begin{array}{ccc} X \times B & & \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_X} & \searrow^{\pi_{B,X}} & \\ X \times A & \xrightarrow[\pi_{A,X}]{} & X. \end{array}$$

证明。 该等价由以下交换图给出：

$$\begin{array}{ccc} X^A \times B & \xrightarrow{\varphi_X \times B} & X^B \times B \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{X^A}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{B,X}} \\ X^A \times A & \xrightarrow[\mathrm{ev}_{A,X}]{} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_{A,X}} & (X \times A)^A \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_{B,X}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{X \times A}} \\ (X \times B)^B & \xrightarrow[(\psi_X)^B]{} & (X \times A)^B \end{array} \tag{14}$$

现在，根据 ψ 的自然性以及（14），下图可交换：

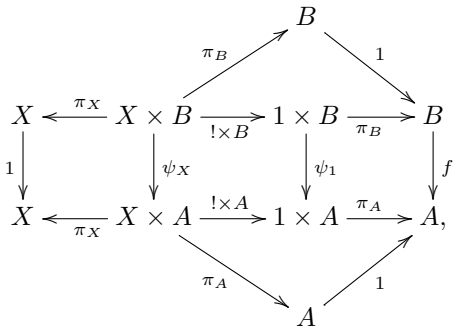


□

1.5. **定理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个具有有限积的范畴， A、 $B \in \mathcal{E}$ 和 $\psi : (-) \times B \Rightarrow (-) \times A$ 是一个自然变换。那么，对于某个箭头 $f : B \to A$ ， $\psi = (-) \times f$ 当且仅当下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} X \times B & & \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_X} & \searrow^{\pi_{B,X}} & \\ X \times A & \xrightarrow[\pi_{A,X}]{} & X \end{array}$$

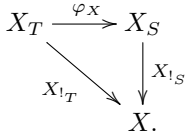
证明。 设 $f := \pi_A \circ \psi_1 \circ \pi_B^{-1}$。由于下图可交换：



我们有 $\psi_X = X \times f$。 □

由于 π 同构于 $(-)\times !$，且 σ 同构于 $(-)^!$，因此可得到与 $(-)^!$ 可交换和与 $(-)_!$ 可交换之间的类似关系，概述如下。

1.6. **推论**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个笛卡尔闭范畴，其原子对象为 S、T。设 $\varphi : (-)_T \Rightarrow (-)_S$ 是一个自然变换。那么，对于某个 $f\colon T \to S$，有 $\varphi = (-)f$ 当且仅当以下图表可交换：



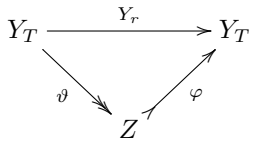
证明。 显然。 □

2. Retracts of atomic objects

本节的目的是证明定理 B 的第一个陈述。也就是说，

2.1. **定理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个正则笛卡尔闭范畴。原子对象 $\mathcal{E}$ 的任意收缩都是原子对象。

证明。 设 T 是 $\mathcal{E}$ 中的一个原子对象。设 Q 是 T 的一个收缩；也就是说，存在态射 $q\colon T \twoheadrightarrow Q$ 和 $i\colon Q \rightarrowtail T$，使得 $q \circ i = 1_Q$。令 $r := i \circ q\colon T \to T$。对于每个 $Y \in \mathcal{E}$，令



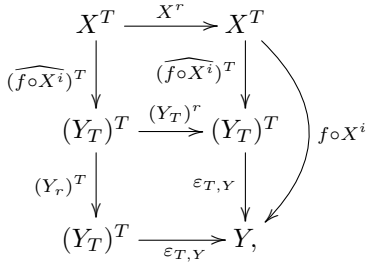
是 Y_r 的一个选定的满单态射分解。因此定义

$$\Psi f := \vartheta \circ \widehat{f \circ X^i}.$$

对于 $f\colon X^Q \to Y$ 属于 $\mathcal{E}$，以及

$$\Psi^{-1} g := \widehat{\varphi \circ g} \circ X^q$$

对于 $g\colon\ X \to Z$ 属于 $\mathcal{E}$，其中 (–) 是伴随 $(\text{–})^T \dashv (\text{–})_T$ 下的转置。赋值 Ψ 和 Ψ^{-1} 互为逆映射。事实上，由于下图可交换：



$Y_r \circ f \circ X^i$ 的转置是$f \circ X^i \circ X^r$，它是 $f \circ X^i$。因此

$$\Psi^{-1}\Psi(f) = f \circ X^i \circ X^q = f.$$

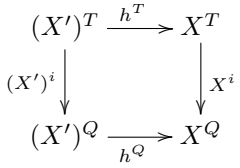
反过来，有 $\widehat{\varphi \circ g} \circ X^q \circ X^i = \widehat{\varphi \circ g} \circ X^r$。类似于前一个的交换图表表明，$\widehat{\varphi \circ g} \circ X^r$ 的转置是 $Y^r \circ \varphi \circ g$，它是

$$\varphi \circ \vartheta \circ \varphi \circ g = \varphi \circ g,$$

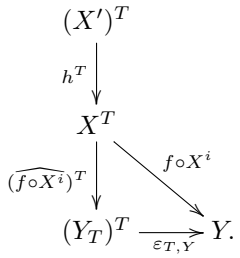
因为 Y_r 是幂等的，并且 ϑ和 φ 分别是满态射和单态射。因此

$$\Psi\Psi^{-1}(g) = \vartheta \circ \varphi \circ g = g.$$

为了证明 Ψ 关于 X 和 Y都是自然的，设 $h\colon\ X' \to X$ 是 $\mathcal{E}$中的一个箭头。下列图表可交换:



and



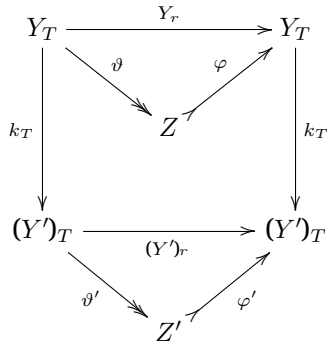
因此

$$\begin{aligned} f\widehat{h^Q(X')}^i &= \widehat{fX^ih^T} \\ &= \widehat{fX^i}h. \end{aligned}$$

因此， Ψ 在 X中是自然的；即，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(X^Q, Y) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{E}(X, Z) \\ {\scriptstyle \mathcal{E}(h^Q, Y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}(h, Z)} \\ \mathcal{E}((X')^Q, Y) & \xrightarrow[\Psi]{} & \mathcal{E}(X', Z). \end{array}$$

现在，设 $k : Y \to Y'$ 是 $\mathcal{E}$中的一个箭头。考虑以下交换图：



箭头 $\vartheta' \circ k_T \circ \varphi : Z \to Z'$ 使上面的图表可交换。因此，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(X^Q, Y) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{E}(X, Z) \\ {\scriptstyle \mathcal{E}(X^Q, k)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}(X, \vartheta' \circ k_T \circ \varphi)} \\ \mathcal{E}(X^Q, Y') & \xrightarrow[\Psi]{} & \mathcal{E}(X, Z'), \end{array}$$

因为

$$\begin{aligned} \vartheta' \circ k_T \circ \varphi \circ \vartheta \circ \widehat{f \circ X^i} &= \vartheta' \circ k_T \circ Y_r \circ \widehat{f \circ X^i} \\ &= \vartheta' \circ (Y')_r \circ k_T \circ \widehat{f \circ X^i} \\ &= \vartheta' \circ \widehat{kfX^i}. \end{aligned}$$

由此， Ψ 在 Y 中是自然的。因此，$(\text{–})^Q$ 有一个右伴随函子。 □

3. A generalized singleton in elementary toposes

本节的目的是证明定理 A。这将分几个部分完成。

3.1. **定理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯， T 是一个带有点 $p : 1 \to T$ 的原子对象，其中 T。那么，对于每个 $Y \in \mathcal{E}$， $j_{p,\ Y}$ 关于 $(\delta_Y)_T \circ 1 \times Y_p$ 的转置都是单态射。

3.2.**定理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，且 $T \in \mathcal{E}$ 是一个带有点$p : 1 \to T$的原子对象。以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\{-\}_Y} & \Omega^Y \\ {\scriptstyle Y_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\Omega_p)^Y} \\ Y_T & \xrightarrow[j_{p,Y}]{} & (\Omega_T)^Y \end{array}$$

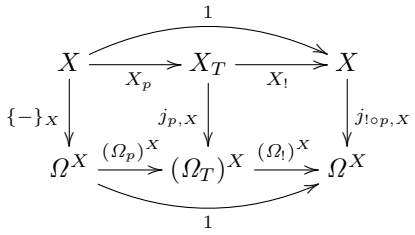
3.3.**定理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯， T 是 $\mathcal{E}$ 的一个带有点p： $1 \to T$的原子对象。若 S 是 $\mathcal{E}$ 的另一个原子对象，且 f： $T \to S$ 是 $\mathcal{E}$中的一个箭头，则以下图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} X_T & \xrightarrow{X_f} & X_S \\ {\scriptstyle j_{p,X}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_{f\circ p,X}} \\ (\Omega_T)^X & \xrightarrow[(\Omega_f)^X]{} & (\Omega_S)^X. \end{array} \tag{15}$$

（为使记号更加精确，在需要时，将与 j_X 相关的点作为下标添加依赖关系。）

3.4.**推论**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯， T 是 $\mathcal{E}$ 的一个原子对象，并带有一个点p: $1 \to T$。则 $j_{!\circ p,\ X} = \{-\}_X$。

证明。 由 3.2 和 3.3，以下图表可交换:



□

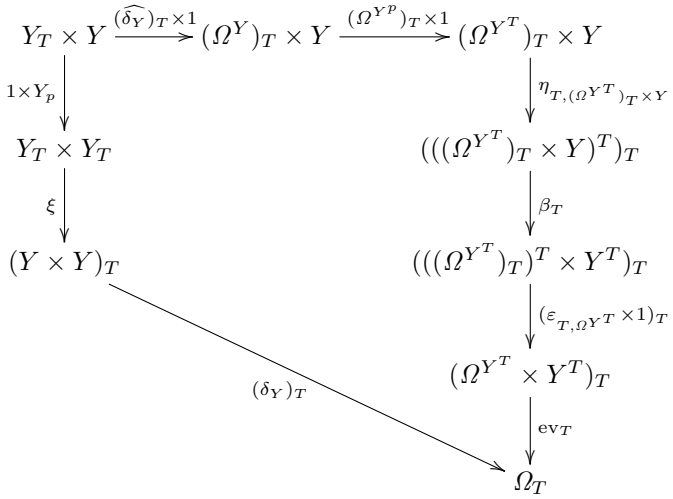
3.5. **定理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯， $T \in \mathcal{E}$ 是一个带有点 p： $1 \to T$ 的原子对象。以下图表可交换:

$$\begin{array}{ccccc} (X_T)^T & \xrightarrow{(j_{p,X})^T} & ((\Omega_T)^X)^T & \xrightarrow{\alpha_{\Omega_T}} & ((\Omega_T)^T)^X \\ {\scriptstyle \epsilon_X}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle (\epsilon_\Omega)^X} \\ X & & \xrightarrow[\{-\}_X]{} & & \Omega^X, \end{array}$$

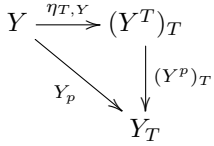
其中 α： $((-)^T)^X \Rightarrow ((-)^X)^T$ 是指数交换自然变换。

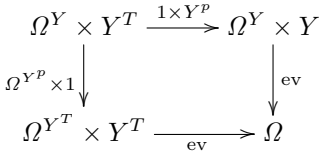
证明 $j_{p,X}$ 的单态性需要以下引理。

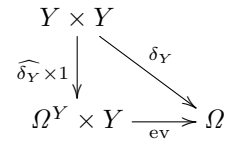
3.6. **引理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯， T 是一个带有点 $p\colon\ 1 \to T$ 的原子对象。以下图表可交换:



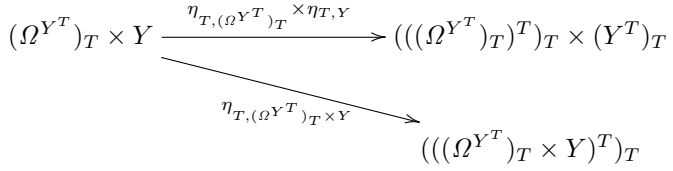
证明。 以下图表可交换:



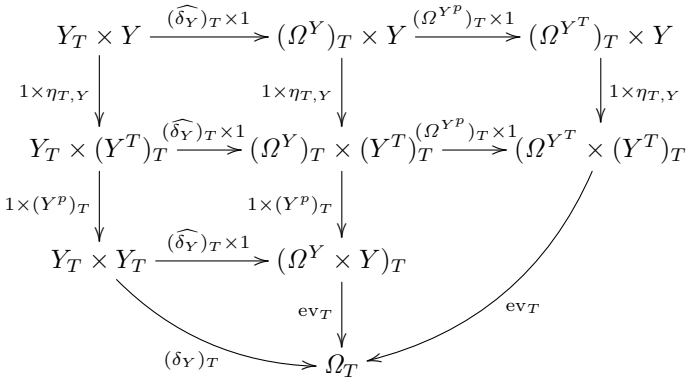




由于 $\eta_T\colon 1 \Rightarrow ((\text{–})^T)_T$ 是自然变换，且 $((\text{–})^T)_T$ 保持积，下面的图表可交换:



因此，根据前面图表的可交换性，下面的图表可交换：



□

3.1 的证明。令 ϑ表示复合

$$Y_T \xrightarrow{(\widehat{\delta_Y})_T} (\Omega^Y)_T \xrightarrow{(\Omega^{Y^p})_T} (\Omega^{Y^T})_T.$$

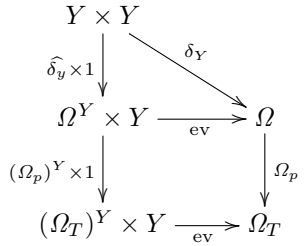
现在，考虑以下关于 X 自然的双射序列：

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{X \to (\Omega^{Y^T})_T}{X^T \to \Omega^{Y^T}}}{X^T \times Y^T \to \Omega}}{(X \times Y)^T \to \Omega}}{X \times Y \to \Omega_T}}{X \to (\Omega_T)^Y.}$$

因此 $(\Omega^{Y^T})_T \cong (\Omega_T)^Y$。令 φ 表示该同构。根据上述自然双射序列，可以计算 φ 的转置 $\hat{}\varphi\colon (\Omega^{Y^T})_T \times Y \to \Omega_T$：它恰好是图表 3.6 中从 $(\Omega^{Y^T})_T \times Y$ 到 Ω_T 的复合箭头。

由于 $Y^p Y_! = 1$，Y^p 是满态射。因此 Ω^{Y^p} 是单态射。显然，$\widehat{\delta_Y}$ 是单态射，因为它是$\{-\}$。现在，由于$(-)_T$ 是右伴随，它保持单态射。因此 $\varphi\vartheta$ 是单态射，其转置是$\hat{}\varphi \circ \vartheta \times 1 = (\delta_Y)_T \circ 1 \times Y_p$，由3.6可知。□

3.2 的证明。如果图表中不同路径的转置可交换，则该图表可交换。下面的交换图表给出了相应的转置：



and

$$\begin{array}{ccc} Y\times Y & & \\ \downarrow{\scriptstyle Y_p\times 1} & & \\ Y_T\times Y & \xrightarrow{(\delta_Y)_T\circ 1\times Y_p} & \\ \downarrow{\scriptstyle j_{p,Y}\times 1} & & \\ (\Omega_T)^Y\times Y & \xrightarrow[\mathrm{ev}]{} & \Omega_T. \end{array}$$

也就是说，下面的图表应当可交换:

$$\begin{array}{ccccc} Y\times Y & & \xrightarrow{\qquad\qquad\delta_Y\qquad\qquad} & & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle Y_p\times 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_p} \\ Y_T\times Y & \xrightarrow[1\times Y_p]{} & Y_T\times Y_T & \xrightarrow[(\delta_Y)_T]{} & \Omega_T \end{array}$$

但由于该图表

$$\begin{array}{ccc} Y\times Y & \xrightarrow{\delta_Y} & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle (Y\times Y)_p} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_p} \\ (Y\times Y)_T & \xrightarrow[(\delta_Y)_T]{} & \Omega_T \end{array}$$

可交换。 □

3.3 的证明。 由于 $\Omega_f\circ(\{-\}_X)_T=(\{-\}_X)_S\circ X_f$，在内语言中，图表 (15) 可交换:

$$\begin{array}{ccc} \xi & \longmapsto & X_f(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x\mapsto \xi=_T X_p(x)) & \longmapsto & \begin{array}{c}(x\mapsto X_f(\xi)=_S X_{f\circ p}(x))\\ (x\mapsto \Omega_f(\xi=_T X_p(x))\end{array} \end{array}$$

□

3.7. **引理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯。若 X、T、A、$B\in\mathcal{E}$ 和 α 是诱导的自然同构 $((-)^X)^T\Rightarrow((-)^T)^X$，且 $\beta_{A,\,B}$ 是诱导的自然同构$(A\times B)^X\cong A^X\times B^X$，对于任意 A、$B\in\mathcal{E}$，则下图可交换:

$$\begin{array}{ccccc} ((A\times B)^X)^T & \xrightarrow{\beta^T} & (A^X\times B^X)^T & \xrightarrow{\beta} & (A^X)^T\times(B^X)^T \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{A\times B}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_A\times\alpha_B} \\ ((A\times B)^T)^X & \xrightarrow[\beta^X]{} & (A^T\times B^T)^X & \xrightarrow[\beta]{} & (A^T)^X\times(B^T)^X, \end{array}$$

证明。 利用 $\mathcal{E}$ 的内语言，如果 $u\in((A\times B)^X)^T$，则有

$$u=(t\mapsto(x\mapsto\langle u_1(t)(x),u_2(t)(x)\rangle)).$$

因此，如果将 β^T 应用于它，就会得到

$$(t\mapsto\langle(x\mapsto u_1(t)(x)),(x\mapsto u_2(t)(x))\rangle).$$

依次应用 β，就会得到

$$\langle (t \mapsto (x \mapsto u_1(t)(x))), (t \mapsto (x \mapsto u_2(t)(x))) \rangle.$$

最后交换指数，由此可得

$$\langle (x \mapsto (t \mapsto u_1(t)(x))), (x \mapsto (t \mapsto u_2(t)(x))) \rangle.$$

另一方面，将 $\alpha_{A\times B}$ 应用于 u，可得

$$(x \mapsto (t \mapsto \langle u_1(t)(x), u_2(t)(x) \rangle)).$$

显然，若继续沿图表中另一条路径所确立的过程进行，便会得到相同的结果。□

3.8. **引理.** 设 $\mathcal{E}$ 为一个拓扑斯。如果 A、X、$T \in \mathcal{E}$ 与 $\alpha : ((-)^X)^T \Rightarrow ((-)^T)^X$ 是指数交换自然变换，则

$$\alpha_A \circ (\sigma_A^X)^T = \sigma_{A^T}^X \qquad and \qquad \alpha_X \circ (\ulcorner 1_X \urcorner)^T = \ulcorner \sigma_X^T \urcorner.$$

证明。 使用内语言可得

$$(\sigma_A^X)^T = (u \mapsto \sigma_A^X \circ u) \quad \text{and} \quad \sigma_{A^T}^X = (u \mapsto (x \mapsto u)).$$

另一方面，

$$\sigma_A^X \circ u = (a \mapsto (x \mapsto a)) \circ (t \mapsto u(t)) = (t \mapsto (x \mapsto u(t)).$$

因此，通过交换指数可得

$$(x \mapsto (t \mapsto u(t)) = (x \mapsto u).$$

因此 $\alpha_A \circ (\sigma_A^X)^T = \sigma_{A^T}^X$。

现在，在内语言中，

$$(\ulcorner 1_X \urcorner)^T = (v \mapsto \ulcorner 1_X \urcorner \circ v).$$

因此

$$(v \mapsto \ulcorner 1_X \urcorner \circ v) = (* \mapsto (x \mapsto x)) \circ (t \mapsto *) = (t \mapsto (x \mapsto x)).$$

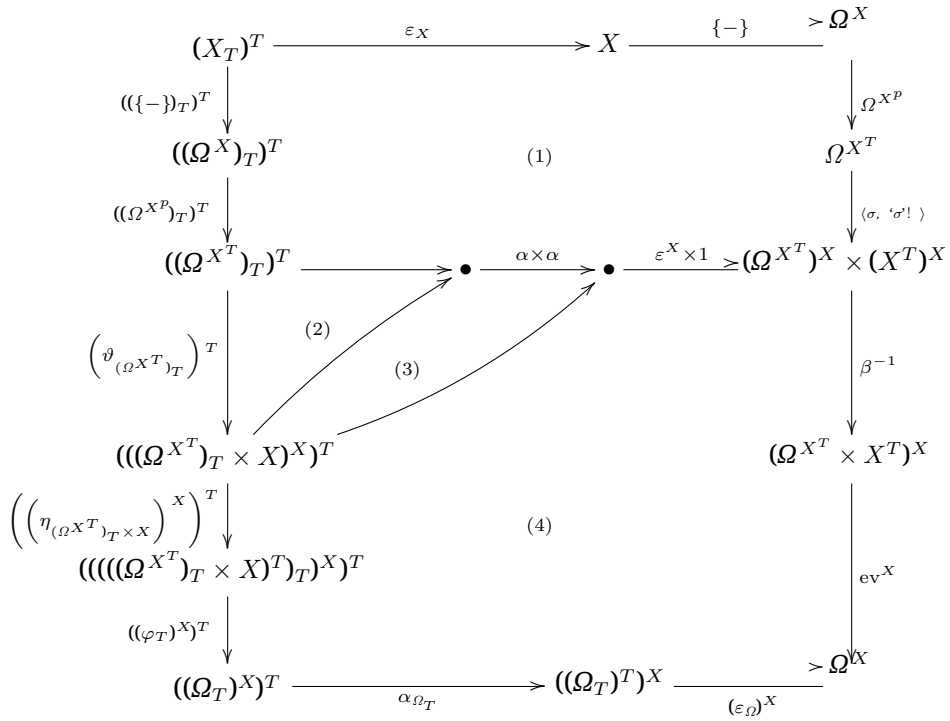
交换指数后，可得

$$(x \mapsto (t \mapsto x)).$$

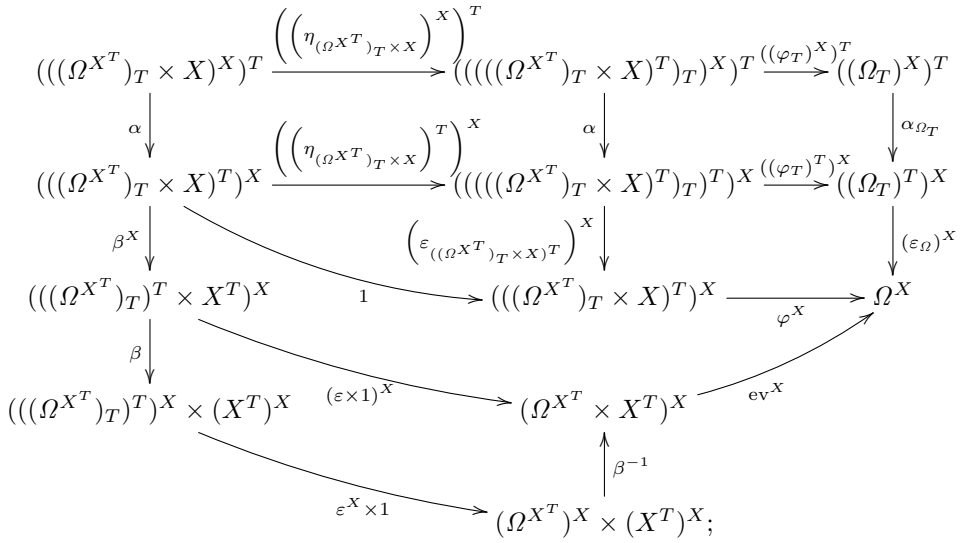
也就是说，可得 $(v \mapsto \sigma_X^T) : 1^T \to (X^T)^X$，即“$\sigma_X^T$”。 □

命题 *3.5* 的证明。 分别令 η 和 ε 为伴随 $(-)^T \dashv (-)_T$ 的单位和余单位。令 ϑ 和 ev 为伴随 $(-) \times T \dashv (-)^T$ 的单位和余单位。令 α 为由 $X \in \mathcal{E}$ 诱导的自然同构 $((-)^X)^T \Rightarrow ((-)^T)^X$，并令 $\beta_{A,\,B}$ 为任意 A，$B \in \mathcal{E}$ 所诱导的自然同构 $(A \times B)^X \cong A^X \times B^X$。（在不会造成混淆时，我们省略下标。）将 $\mathrm{ev} \circ \varepsilon \times 1 \circ \beta$ 的复合记为

$\varphi_\circ$ 以下外层图表可交换：



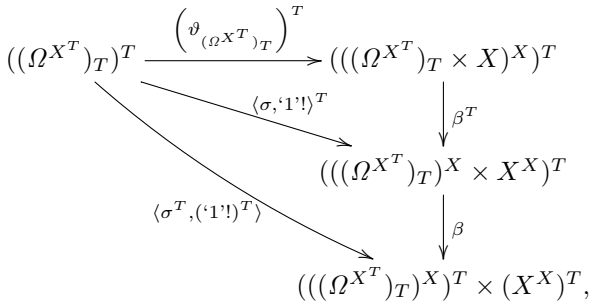
事实上，图表 (4) 可交换：



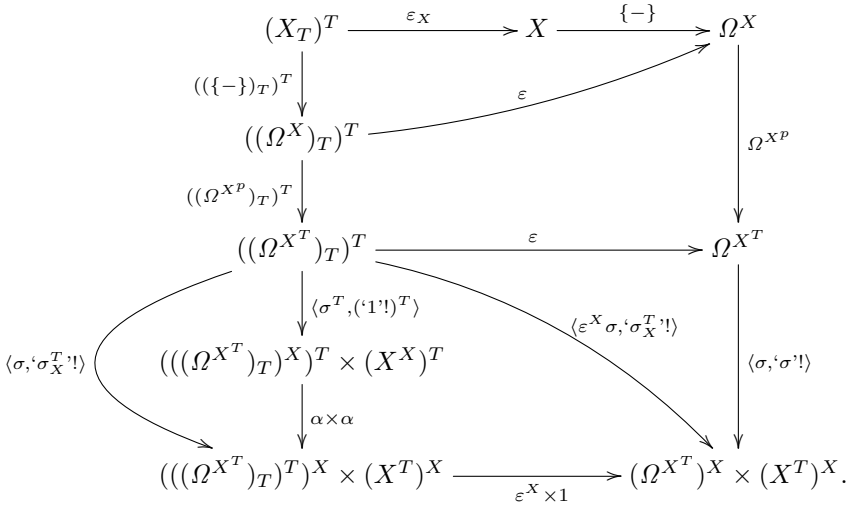
根据 3.7，图表 (3) 可交换：

$$\begin{array}{ccccc}
(((\Omega^{X^T})_T \times X)^X)^T & \xrightarrow{\beta^T} & (((\Omega^{X^T})_T)^X \times X^X)^T & \xrightarrow{\beta} & (((\Omega^{X^T})_T)^X)^T \times (X^X)^T \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\times\alpha} \\
(((\Omega^{X^T})_T \times X)^T)^X & \xrightarrow[\beta^X]{} & (((\Omega^{X^T})_T)^T \times X^T)^X & \xrightarrow[\beta]{} & (((\Omega^{X^T})_T)^T)^X \times (X^T)^X;
\end{array}$$

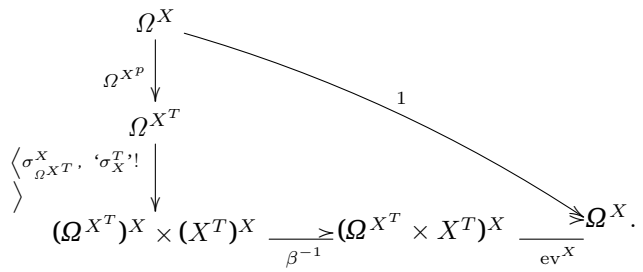
图表 (2) 可交换：



并且根据 3.8 以及 σ 的自然性，图表 (1) 可交换：



下图可交换：



事实上，利用拓扑斯的内语言，可以如下描述图表中沿上下左右路径的每个箭头：

$$\begin{aligned}
&u \mapsto (k \mapsto u(k(p)))\\
&v \mapsto \langle x \mapsto v, x \mapsto (t \mapsto x)\rangle\\
&\langle x \mapsto w(x), x \mapsto z(x)\rangle \mapsto (x \mapsto \langle w(x), z(x)\rangle)\\
&f \mapsto (x \mapsto f_1(x)(f_2(x))).
\end{aligned}$$

因此，将它们复合可得

$$\begin{array}{c}
u\\
\downarrow\\
k \mapsto u(k(p))\\
\downarrow\\
\langle x \mapsto (k \mapsto u(k(p))), x \mapsto (t \mapsto x)\rangle\\
\downarrow\\
x \mapsto \langle k \mapsto u(k(p)), t \mapsto x\rangle\\
\downarrow\\
x \mapsto u(x)
\end{array}$$

因为 $t \mapsto x$ 被代入 k。也就是说，上图可交换。

最后，$j_{p,\ X}$ 是 $(\delta_X)_T \circ 1 \times X_p$ 在伴随 $(\text{–}) \times X \dashv (\text{–})^X$下的转置；或者，也可以说，它是 3.6 的图表中另一个复合的转置。令 g 为该复合的以下子复合：从 η 到 ev^T，并将 X代入 Y。也就是说，$g\colon (\Omega^{X^T})_T \times X \to \Omega_T$。因此，另一个子复合为 $(\Omega^{X^p})_T \times 1 \circ (\{-\})_T \times 1$。于是，根据 ϑ的自然性，

$$\begin{aligned}
j_{p,X} &= g^X \circ ((\Omega^{X^p})_T \times 1 \circ (\{-\})_T \times 1)^X \circ \vartheta_{X_T}\\
&= g^X \circ \vartheta_{(\Omega^{X^T})_T} \circ \Omega^{X^p} \circ (\{-\})_T.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

4. General axiomatic cohesion

本节旨在证明定理 C。证明分为两个定理。

4.1.**定理**。设 $\mathcal{E}$ 是一个笛卡尔闭范畴，$\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个具有反射函子 L 和余反射函子 R（作用于 $\mathcal{E}$）的反射且余反射子范畴。若 $\mathcal{S}$ 是一个指数理想，则包含函子 $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ 反映原子对象。

证明。令 A，B，$C \in \mathcal{S}$并假设 B是 $\mathcal{E}$中的原子对象。考虑以下关于 A 和 C的自然双射：

$$\frac{\dfrac{A^B \to C}{A \to C_B}}{A \to R(C_B)}$$

□

4.2.**定理**。 设 $F:\ \mathcal{E}\to\mathcal{S}$ 是一个预凝聚几何态射。那么 $F_!$保持原子对象。

4.3.**引理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个笛卡尔闭范畴， $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个反射子范畴和余反射子范畴，其反射函子为 L ， 余反射函子为 R ， 定义在 $\mathcal{E}$上。若 $\mathcal{S}$ 是一个指数理想，则复合

$$A^{LX}\xrightarrow{\eta_{A^{LX}}}R(A^{LX})\xrightarrow{R(A^{\alpha X})}R(A^X)$$

对每个 $X\in\mathcal{E}$，都是关于 $A\in\mathcal{S}$ 的自然同构。

证明。 设 $\alpha:1_{\mathcal{E}}\Rightarrow L$ 是反射的单位， $\eta:\ 1_{\mathcal{S}}\Rightarrow R$ 是余反射的单位。设 $A\in\mathcal{S}$ 和 $X\in\mathcal{E}$。根据 Johnstone 中的命题 A4.3.1 [4],

$$A^{\alpha_X}:A^{LX}\cong A^X.$$

另一方面，由于包含函子 $\mathcal{S}\hookrightarrow\mathcal{E}$ 是全忠实的， η 是一个同构；因此

$$\eta_{A^{LX}}:A^{LX}\cong R(A^{LX}).$$

因此 $R(A^X)\cong R(A^{LX})\cong A^{LX}$。自然性是显然的。 □

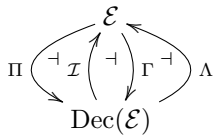
4.2 的证明。 不失一般性，可以将 F^* 视为包含函子$\mathcal{S}\hookrightarrow\mathcal{E}$。设 $T\in\mathcal{E}$ 是一个原子对象。设 A， $B\in\mathcal{S}$。因此，根据前面的引理，存在一个同构 $F_*(A^T)\cong A^{f_!T}$，它关于 A自然。于是，以下双射关于 A 和 B是自然的:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{A^{F_!T}\to B}{F_*(A^T)\to B}}{A^T\to F^!B}}{A\to(F^!B)_T}}{A\to f_*((F^!B)_T).}$$

因此 $F_!T$ 在 $\mathcal{S}$中是原子的。 □

5. Atomic objects in McLarty toposes

本节的主要目的是证明定理 D 的第一部分。回想一下，*McLarty* 拓扑斯 是一个二值拓扑斯，其中支撑可分裂，并且它在布尔基底上是预黏着的（见 McLarty [13, 14]）。这意味着存在一串伴随关系



(16)

其中 Π 是全忠实的， $\mathcal{I}\dashv\Gamma$ 的余单位是单态射，并且 Π 保持有限积。

支撑可分裂的二值拓扑斯满足以下零点定理：“每个对象要么是始对象，要么具有全局元素”。根据 Bell 的定理4.32 [2], ，这等价于与 $\mathcal{E}$ 有强见证相关联的局部集合论 Th($\mathcal{E}$)。

Menni [16, 推论 4.2]证明，对于一般的预凝聚语境，一旦基 $\mathcal{S}$ 是布尔的，它便等价于 Dec($\mathcal{E}$)。为了使 $\mathcal{E}$ 满足

上述零点定理，基拓扑斯 $\mathcal{S}$ 满足它便已足够（参见 [20] 的动机部分）。因此，任何其典范几何态射为预凝聚的格罗滕迪克拓扑斯都是 McLarty。

零点定理直接推出了关于微小性的一个推论。回想一下，Kelly [5] 将对象 T 定义为微小的——或称小投射——如果 $\mathcal{E}(X, –)$ 保持余极限。对于预层拓扑斯，原子性等价于小投射性（见 [12]第 1.4 节）。下面的结果表明，在更一般的拓扑斯中，终对象也具有这一性质；下一节将用它来证明定理 E。

5.1. **命题**。 若 $\mathcal{E}$ 是满足零点定理的拓扑斯，则 $\mathcal{E}(1, –)$ 保持余极限。

证明。 零点定理对应于与 $\mathcal{E}$ 是强见证相关联的局部集合论 Th($\mathcal{E}$)；根据 Bell 中的定理 4.31， [2], 它也有见证。因此，根据 Bell 中的定理4.32 [2]， $\mathcal{E}(1, –)$ 保持商对象。

现在，众所周知，在广延范畴中，恰有两个补子对象等价于要求其可表函子保持余积。满足零点定理的拓扑斯中的终对象便是如此（见 [20]）。□

现在，在 McLarty 拓扑斯中，很容易看出，对于原子 $T \in \mathcal{E}$，

$$\Gamma(2_T) \cong 2.$$

事实上，考虑态射上的双射

$$\frac{X^T \to Y}{X \to Y_T}$$

因此，如果 $X = 1$ 和 $Y = 2$，那么 $2 \rightarrowtail \Gamma(2_T)$。由此可得

$$\Gamma(2_T) \cong 2. \tag{17}$$

定理 D 将此结果推广了，并且以下结果的证明会用到它。

5.2.**定理**。 *McLarty* 拓扑斯中的每个原子可判定对象都是终对象。

5.3.**推论**。 *McLarty* 拓扑斯中的每个原子对象都是连通的。

证明。 这由 4.2 和 5.2 得出。 □

5.2 的证明。 设 $\mathcal{E}$ 是 McLarty，且 $A \in$Dec($\mathcal{E}$) 在 $\mathcal{E}$ 中是原子的。因此，由 4.1 可知，A 在 Dec($\mathcal{E}$) 中是原子的。于是，Dec($\mathcal{E}$) 中的态射之间存在如下双射：

$$\frac{\dfrac{\dfrac{2^A \to 2}{2 \to 2_A}}{2 \to \Gamma(2_A)}}{2 \to 2}$$

因为 $\Gamma(2_A) \cong 2$ ，由 (17) 可知。因此， 2^A 在 Dec($\mathcal{E}$) 中恰有四个子对象，因为$2 = 1 + 1$; 也就是说，每个箭头 $2 \to 2$ 都由 2 的点确定。

现在，由于 Dec($\mathcal{E}$) 满足零点定理，且 A 是原子（$A \neq 0$），因此存在一个点a 使得 $a \in A$。现在，由于

$$A = \{a\} \quad \text{and} \quad \neg(A = \{a\}).$$

都是闭公式，它们对应于Ω中的点，而Ω是二值的。因此，其中恰有一个为真。若 $A = \{a\}$，证明到此结束。于是，假设$\neg$（$A = \{a\}$）。因此存在一个点 b 使得

$$b \in A \setminus \{a\}.$$

也就是说，

$$2 \cong \{a, b\} \subseteq A.$$

但这样一来 $2^2 \subseteq 2^A$。然而，由于 2^2 有四个不同的点，因此 2^2 在 $\mathbf{Dec}(\mathcal{E})$ 中至少有 16 个子对象，这就产生了矛盾。因此，不可能得出结论说 $\neg(A = \{a\})$。也就是说， $A = 1$。□

5.4.**定理**。设 $\mathcal{E}$ 是一个 *McLarty* 拓扑斯。若 T 是 $\mathcal{E}$ 中的一个原子对象，则对每个 $X \in \mathcal{E}$，都有 $\Gamma X \cong \Gamma(X_T)$ 。

5.5.**引理**。设 $\mathcal{E}$ 是一个 *McLarty* 拓扑斯。若 T 是一个带有点$0 : 1 \to T$ 的连通对象，且 A 是可判定的，那么

$$\mathrm{ev}_A^0 : A^T \to A$$

是一个同构。

证明。显然，存在自然同构

$$\mathcal{E} \underset{-\times 1}{\overset{1}{\Downarrow \varphi}} \mathcal{E}$$

and

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{E} & & \\ & \overset{\times}{\nearrow} & & \overset{\Pi_0}{\searrow} & \\ \mathcal{E} \times \mathcal{E} & & \Downarrow \psi & & \mathcal{E}. \\ & \underset{\Pi_0 \times \Pi_0}{\searrow} & & \underset{\times}{\nearrow} & \\ & & \mathcal{E} \times \mathcal{E} & & \end{array}$$

因此，以下水平复合是自然同构：

$$\mathcal{E}^{op} \xrightarrow{\Pi_0} \mathcal{E}^{op} \underset{1}{\overset{-\times 1}{\Downarrow \varphi}} \mathcal{E}^{op} \xrightarrow{\mathcal{E}(-,A)} \mathbf{Set} \tag{18}$$

and

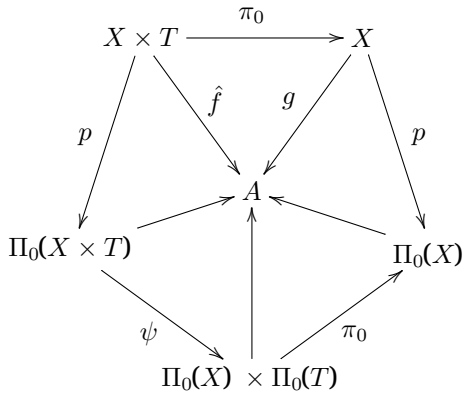
$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{E}^{op} \times \mathcal{E}^{op} & & \\ & \overset{\Pi_0 \times \Pi_0}{\nearrow} & & \overset{\times}{\searrow} & \\ \mathcal{E}^{op} \times \mathcal{E}^{op} & & \Downarrow \psi & & \mathcal{E}^{op} \xrightarrow{\mathcal{E}(-,A)} \mathbf{Set}. \\ & \underset{\times}{\searrow} & & \underset{\Pi_0}{\nearrow} & \\ & & \mathcal{E}^{op} & & \end{array} \tag{19}$$

现在，设 $A \in \mathbf{Dec}(\mathcal{E})$，且 X 是 $\mathcal{E}$ 的任意对象。以下是自然双射:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X, A^T) &\cong \mathcal{E}(X \times T, A) \\
\mathcal{E}(X \times T, A) &\cong \mathrm{Dec}(\mathcal{E})(\Pi(X \times T), A). \\
\mathrm{Dec}(\mathcal{E})(\Pi(X \times T), A) &\cong \mathcal{E}(\Pi_0(X \times T), A) \\
\mathcal{E}(\Pi_0(X \times T), A) &\cong \mathcal{E}(\Pi_0 X \times \Pi_0 T, A) && \text{by (19)} \\
\mathcal{E}(\Pi_0 X \times \Pi_0 T, A) &\cong \mathcal{E}(\Pi_0 X, A) && \text{by (18)} \\
\mathcal{E}(\Pi_0 X, A) &\cong \mathrm{Dec}(\mathcal{E})(\Pi X, A) \\
\mathrm{Dec}(\mathcal{E})(\Pi X, A) &\cong \mathcal{E}(X, A).
\end{aligned}$$

因此存在一个自然同构 $\mathcal{E}(-, A^T) \cong \mathcal{E}(-, A)$。所以，由米田引理，$A^T \cong A$。

更明确地说，考虑由这条同构链关联的箭头 $f : X \to A^T$ 和 $g : X \to A$，它们属于 $\mathcal{E}$。链中依次对应的箭头由从下图中的 f 出发、沿逆时针方向延伸的径向箭头表示:



由于外部五边形可交换，整个图表与

$$\hat{f} = g \circ \pi_0, \tag{20}$$

根据唯一性，这必然始终成立。因此，要完成证明，还需验证

$$\mathrm{ev}_A^T = \widehat{1_{A^T}} = \mathrm{ev}_A^0 \circ \pi_0. \tag{21}$$

为此，请回想 $\mathbf{ev}_A^0 = \mathbf{ev}_A^T \circ \langle 1,\ \mathbf{0!} \rangle$，因此

$$\mathrm{ev}_A^0 \circ \pi_0 = \mathrm{ev}_A^T \circ \langle \pi_0, 0! \rangle. \tag{22}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\Pi_0(\langle \pi_0, 0! \rangle) &= \psi^{-1} \circ \langle \Pi_0(\pi_0), \Pi_0(0!) \rangle \\
&= \psi^{-1} \circ \langle \Pi_0(\pi_0), ! \rangle \\
&= \psi^{-1} \circ \langle \Pi_0(\pi_0), \Pi_0(\pi_1) \rangle \\
&= \psi^{-1} \circ \langle \pi_0 \circ \psi, \pi_1 \circ \psi \rangle \\
&= \psi^{-1} \circ \langle \pi_0, \pi_1 \rangle \circ \psi \\
&= 1.
\end{aligned}$$

这意味着 $\Pi_0(\mathrm{ev}_A^T) = \Pi_0(\mathrm{ev}_A^0 \circ \pi_0)$，并且——由于 p_A 是一个同构——(21) 也成立，由此完成证明。□

5.6. **命题**。设 $\mathcal{E}$ 是一个 *McLarty* 拓扑斯，且 $T \in \mathcal{E}$ 是一个不等于 *0* 的对象。如果对每个 $A \in \mathrm{Dec}(\mathcal{E})$ 都有ev_0^A： $A^T \cong A$，那么 T 是连通的。

证明。由于 ev_0^A 在 A 中是自然的，以下双射在 A 中是自然的：

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Pi X \times \Pi T \to A}{X \times T \to A}}{X \to A^T}}{X \to A}}{\Pi X \to A.}$$

因此，由米田引理，对每个 $X \in \mathcal{E}$ 都有 $\Pi X \times \Pi T \cong \Pi X$；特别地，对于 $X = 1$,

$$\Pi T \cong 1 \times \Pi T \cong 1.$$

□

5.4 的证明。根据前面的结果，对每个 $A \in \mathrm{Dec}(\mathcal{E})$,

$$\mathrm{ev}_A^0 : A^T \cong A.$$

因此，以下双射在 A 中是自然的：

$$\frac{\frac{\frac{\frac{A \to \Gamma Y}{\mathcal{I}A \to Y}}{\mathcal{I}A^T \to Y}}{\mathcal{I}A \to Y_T}}{A \to \Gamma(Y_T)}$$

因此，由米田引理，$\Gamma Y \cong \Gamma(Y_T)$。 □

5.7.**定理**。设 $\mathcal{E}$ 是一个 *McLarty* 拓扑斯。若 T 是 $\mathcal{E}$ 的一个原子对象，则

$$\Pi(X_!) : \Pi(X_T) \to \Pi(X)$$

对每个 $X \in \mathcal{E}$都是一个同构。

证明。设 T 是 $\mathcal{E}$的一个原子对象。由 5.3，T 是连通的；因此 T 有一个点 $0 : 1 \to T$。所以，存在态射

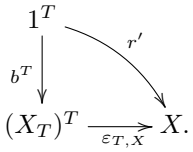
$$X \xrightarrow{X_0} X_T \xrightarrow{X_!} X \quad = \quad X \xrightarrow{1} X.$$

由此 $\Pi(X_0) : \Pi X \to \Pi(X_T)$ 是一个分裂单态射。也就是说，ΠX 是 $\mathrm{Dec}(\mathcal{E})$ 中 $\Pi(X_T)$ 的一个子对象。因此，由于 $\mathrm{Dec}(\mathcal{E})$ 是一个拓扑斯（见 [20]中的定理 C），ΠX 有一个补对象 B。因此，由于 $\mathcal{E}$ 是广延的，有如下拉回图：

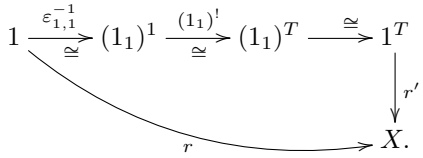
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & A + B & \xleftarrow{i_B} & B \\ {\scriptstyle (p_{X_T})^{-1}(\Pi X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{X_T}} & & \downarrow{\scriptstyle (p_{X_T})^{-1}(\overline{B})} \\ \Pi X & \xrightarrow[\Pi(X_0)]{} & \Pi(X_T) & \xleftarrow[i_{\overline{B}}]{} & \overline{B} \end{array}$$

与 $X_T = A + B$。

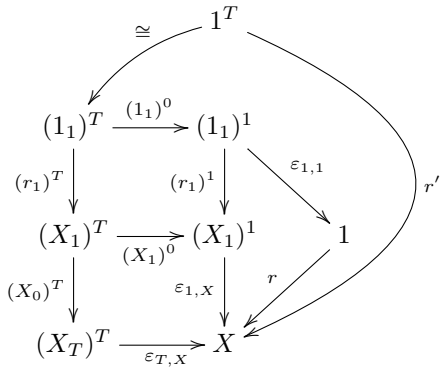
假设 $B \neq 0$；于是令 $b'\colon 1 \rightarrowtail B$为一个点，并令 $b := i_B \circ b'$。令 $r'\colon 1^T \to X$为 b 的转置；也就是说，以下图表可交换：



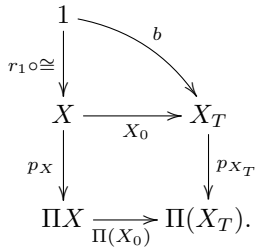
设 r 为以下复合箭头：



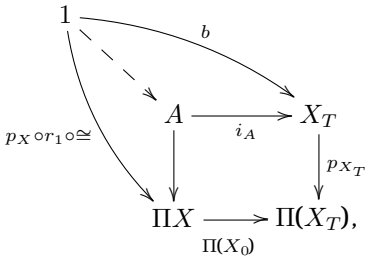
以下图表可交换：



因此 $b = X_0 \circ r_1 \circ \cong_\circ$ 由此，以下图表可交换：



因此，存在唯一的箭头 $1 \to A$ 使得下图可交换：



这就产生了矛盾。由于 Th($\mathcal{E}$) 完备且一致， $B = 0$。因此， $\Pi(X_0)$ 是满态射，由此即可得出结论。□

容易验证，对于任意 X，箭头 X_0 是相对于伴随 $(-)^T \dashv (-)_T$ 的 ev^0_X 的转置，也就是说。

$$X_0 = (\mathrm{ev}^0_X)_T \circ \eta_X.$$

and

$$\mathrm{ev}^0_X = \varepsilon_X \circ (X_0)^T.$$

5.8.**定理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个 *McLarty* 拓扑斯。设 T 是 $\mathcal{E}$的一个原子对象。那么T 可缩，当且仅当对于每个 $A \in \mathrm{Dec}(\mathcal{E})$， $A_0 : A \to A_T$ 是一个同构。

证明。 由 5.3， T 是连通的。因此

$$\mathrm{ev}^0_A : A^T \cong A$$

由 5.5。

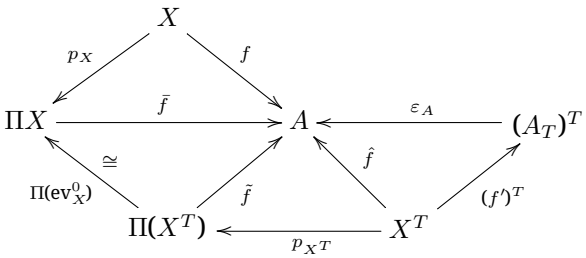
假设 T 是可缩的；也就是说，根据 [19],中的定理 1.4

$$\Pi(\mathrm{ev}^0_X) : \Pi(X^T) \to \Pi X$$

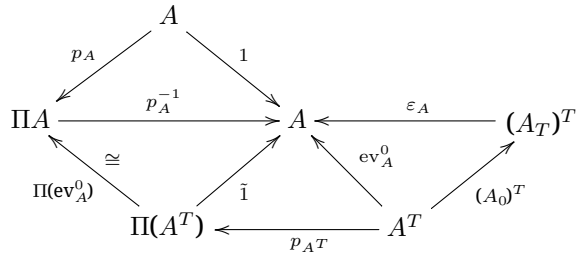
对每个 $X \in \mathcal{E}$ 都是一个同构（ σ_X 的逆为 ev^0_X）。因此有如下自然同构:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{X \to \mathcal{I}A}{\Pi X \to A}}{\Pi(X^T) \to A}}{X^T \to \mathcal{I}A}}{X \to (\mathcal{I}A)_T}$$

由此得到如下对应态射的交换图:



因此，如果 $f = 1_A$ 对于 $A \in \mathrm{Dec}(\mathcal{E})$，那么图表

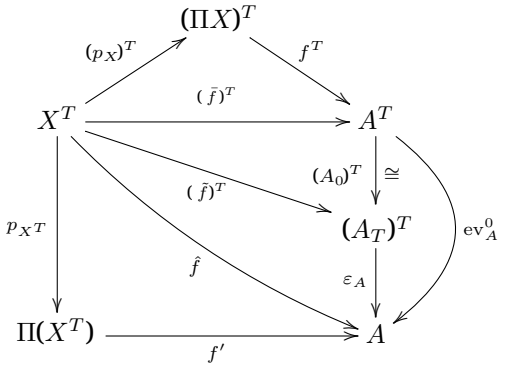


可交换，并且根据米田引理， A_0 是一个同构。

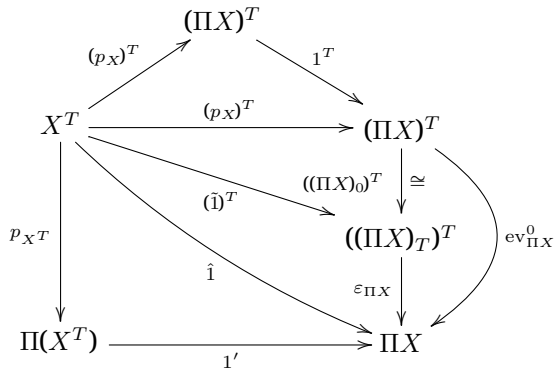
反过来，假设对于每个 $A \in \mathbf{Dec}(\mathcal{E})$， $A_0 : A \to A_T$ 都是一个同构。因此有如下自然同构：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi X \to A}{X \to \mathcal{I}A}}{X \to (\mathcal{I}A)_T}}{X^T \to \mathcal{I}A}}{\Pi(X^T) \to A}$$

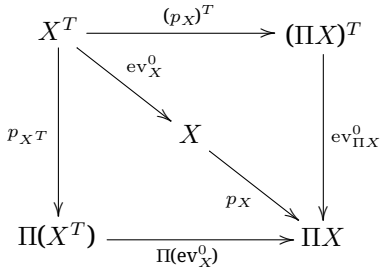
由此得到如下对应箭头的交换图：



因此，如果 $f = 1_{\Pi X}$，那么该图表



可交换。另一方面，以下图表可交换：



因此 $1' = \Pi(\mathrm{ev}^0_X)$，因为 p_{XT}是满态射。现在，由米田， $\Pi(\mathrm{ev}^0_X)$ 是一个同构；因此 $\Pi(\sigma_X)$ 也是。换言之， T 是可缩的。□

下面的结果是对此的加强，并且是定理 E 的第二部分。

5.9. **定理**。 设 $\mathcal{E}$ 是一个具有原子对象 T的 *McLarty* 拓扑斯。那么 T 可缩，当且仅当 $2_0\colon\ 2 \to 2_T$ 是一个同构。

证明。 假设 T 可缩。由 5.8 可知，对于每个$A \in$Dec($\mathcal{E}$)， $A_0\colon A \to A_T$ 都是一个同构；特别地，对于 2 也是如此，因为 2 是可判定的。

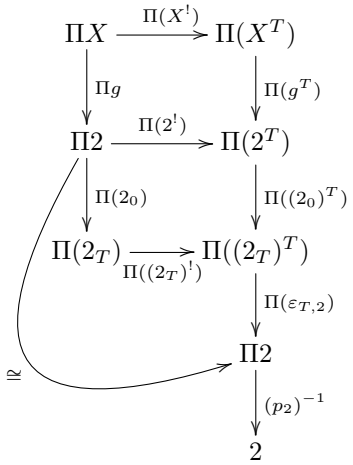
反过来，假设 2_0 是一个同构。由 1.1 的证明可知，对于每个 $X \in \mathcal{E}$

$$\varepsilon_{T,X} \circ (X_T)^! \cong X_!$$

因此，对于每个 $X \in \mathcal{E}$

$$\varepsilon_{T,X} \circ (X_T)^! X_0 \cong 1. \tag{23}$$

根据 (23) 以及 $(-)^!$ 的自然性，下面的图表可交换:



根据 p: $X \to \Pi X$ 的泛性质，每个 $h\colon \Pi X \to 2$ 都是复合 $(p_2)^{-1}\circ \cong \circ \Pi g$，对应于 $\mathcal{E}$ 中唯一的箭头 $g\colon X \to 2$。因此，前面的图表表明，每个$h\colon \Pi X \to 2$ 都如图所示经由 $\Pi(X^!)$ 分解，因而也经由 $\Pi(\sigma_X^T)$ 分解。

也就是说，每个 $h\colon \Pi X \to 2$ 都可以延拓为 $\Pi(X^T)$。由于 $\Pi(\sigma_X^T)$ 是单态射，该延拓是唯一的。反过来，每个箭头 $f\colon \Pi(X^T) \to 2$ 都可以经由 $\Pi(\sigma_X^T)$ 限制到 ΠX。因此，用 $\theta(h)$ 表示 h 的该延拓，用 $\phi(f)$ 表示 f 的该限制。显然， $\phi\theta = 1$。

为验证 $\theta\phi = 1$，给定 $f\colon \Pi(X^T) \to 2$，可通过自然双射（关于 X自然）得到一个箭头 $g\colon X \to 2$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{X \underset{g}{\longrightarrow} 2}{X \underset{2_0\circ g}{\longrightarrow} 2_T}}{X^T \underset{\varepsilon_2\circ(2_0)^T\circ g^T}{\longrightarrow} 2}}{\Pi(X^T) \underset{p^{-1}\circ\Pi(\varepsilon_2\circ(2_0)^T\circ g^T)}{\longrightarrow} 2}$$

向上进行。因此，向下进行便得到 f ，也就是末端的复合。因此 $\theta\phi(f) = f$。所以对于 $f_i\colon\ \Pi(X^T) \to 2$，若$f_0\Pi(\sigma_X^T) = f_1\Pi(\sigma_X^T)$，则

$$f_0 = f_1. \tag{24}$$

现在，为了证明 $\Pi(\sigma_X^T)$ 是满态射，假设它不是。于是，由于 $\mathbf{Dec}(\mathcal{E})$ 是布尔拓扑斯，$\mathbf{Dec}(\mathcal{E})$ 中的每个子对象都有补对象。由于 $\Pi(\sigma_X^T)$ 是单态射， ΠX 是 $\Pi(X^T)$ 的一个有补子对象，

$$\Pi(X^T) = \Pi X + (\Pi X)^c.$$

因此， $\Pi(\sigma_X^T)$ 是满态射，当且仅当 $(\Pi X)^c$ 是始对象。如果 $\Pi X)^c$ 不是始对象，则至少存在两个不同的态射 $(\Pi X)^c \to 2$: 一个 q_0 将所有对象映射到 $\bot$ ，另一个 q_1 将所有对象映射到 $\top$。因此，给定一个箭头 $h\colon \Pi X \to 2$，它至少有两个不同的延拓到 $\Pi(X^T)$，即余配对 $f_i := \{h, q_i\}$。但是

$$\{h, q_0\} \circ \Pi(\sigma_X^T) = h = \{h, q_1\} \circ \Pi(\sigma_X^T).$$

因此，由 (24) 可得 $\{h, q_0\} = \{h, q_1\}$，这与假设矛盾。 □

6. In presheaf toposes

这里给出了关于预层拓扑斯中原子对象的一些观察，并对指数范畴施加了一些条件。

6.1.**定理**。 如果 C 是一个具有有限积的小范畴，且典范几何态射 g : $[C^{op}, \mathbf{集合}] \to \mathbf{集合}$ 是预凝聚的，即如果 $[C^{op}, \mathbf{集合}]$ 是 *McLarty* 拓扑斯，那么 $[C^{op}, \mathbf{集合}]$ 的每个原子对象都是可缩的。

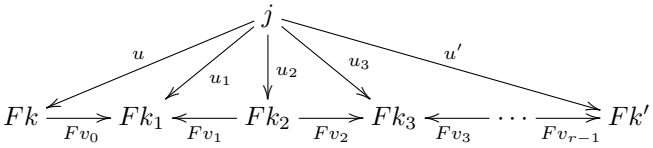
6.2. 注记。 给定小范畴 J, J' 以及函子 $F\colon J' \to J$,

$$\operatorname{Colim} J(j, F-) = \mathscr{C}(j \downarrow F),$$

其中 $\mathscr{C}(j \downarrow F)$ 是逗号范畴 $(j \downarrow F)$ 的连通分支集合，而 $J(j, -)\colon J \to \mathbf{集合}$ 是 j 的可表函子。事实上，$(u, k) \sim (u', k')$ 当且仅当存在一串态射之字形

$$k_0 \xrightarrow{v_0} k_1 \xleftarrow{v_1} k_2 \xrightarrow{v_2} k_3 \xleftarrow{v_3} \cdots \xrightarrow{v_{r-1}} k_r$$

在 J' 中，其中 $k_0 = k$ 和 $k_r = k'$，并且对于 $i = 1, \ldots, r-1$，有 $(u_i, k_i) \in (j \downarrow F)$，使得图表



可交换，其中 $\sim$ 是前一条注记中的等价关系 $R(S)$。也就是说，

$$\begin{aligned} J(j, Fv_0)(u) &= u_1, \\ J(j, Fv_1)(u_2) &= u_1, \\ J(j, Fv_2)(u_2) &= u_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

6.3.**引理**。 如果 C 是具有有限积的小范畴，那么对每个对象 $t \in C$

$$\operatorname{Colim}(C(-, t)^{C(-,t)}) = 1.$$

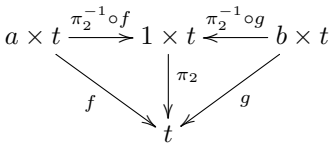
证明。 设 $a \in C$。因此，由米田引理可得，

$$\begin{aligned} C(-,t)^{C(-,t)}(a) &\cong [C^{op}, \mathbf{Set}](C(-,a) \times C(-,t), C(-,t)) \\ &\cong [C^{op}, \mathbf{Set}](C(-, a \times t), C(-,t)) \\ &\cong C(a \times t, t). \end{aligned}$$

也就是说， $C(-,\ t)^{C(-,t)} = C(- \times t,\ t)$。因此，由 6.2,

$$\operatorname{Colim} C(- \times t, t) = \mathscr{C}(- \times t \downarrow t).$$

设 $f\colon a \times t \to t$ 和 $g\colon b \times t \to t$ 是 C中的态射。下列三角图可交换:



因此 $\operatorname{Colim} C(- \times t,\ t) = 1$。 □

6.4.**引理**。 设 $\mathcal{E}$ 是带有连通性结构p： $1 \Rightarrow \Pi_0$的笛卡尔闭范畴。 $\mathcal{E}$ 中的任何 p-可缩对象的收缩都是 p-可缩的。

证明。 设 T 是 $\mathcal{E}$ 的一个 p-可缩的对象。因此 T 有一个点 $t\colon\ 1 \to T$，使得$1_T \sim t!$（见 Ruiz-Hern´andez 与 Sol´orzano [19] 中的定义 6.2）。现在，设 S 是 T 的一个收缩；也就是说，设 $i\colon\ S \to T$、 $r\colon\ T \to S$ 是 $\mathcal{E}$ 中的态射，使下列图表可交换:

$$S \xrightarrow{i} T \xrightarrow[1]{r} S.$$

由于 p-同伦性相对于复合表现良好（见 Ruiz- Hern´andez 与 Sol´orzano [19] 中的定义 3.7），容易看出它是 p-可缩的:

$$1_S = r \circ i \sim r \circ t! \circ i = rt!.$$ □

6.1 的证明。 若 $X \in [C^{op}$,**集合**$]$ 是原子的，则 $(-)^X$ 保持余极限。因此，由 [12] 中的定理 1.4.4， X 是某个$t \in C$的可表函子 $C(-,t)$ 的一个收缩。另一方面，由 6.3 以及 Ruiz-Hern´andez 与 Sol´orzano [19] 中的定理 1.4(4)， $C(-,t)$ 是可缩的。现在，由 6.4 以及 Ruiz- Hern´andez 与 Sol´orzano [19] 中的定理 1.4， X 是可缩的。 □

6.5.**定理**。 若 $\mathcal{E}$ 是一个格罗滕迪克拓扑斯，其典范几何态射g： $\mathcal{E} \to$ **集合** 是预凝聚的，且 $\mathcal{E}(1, -)$ 保余极限，则 $\mathcal{E}$ 的每个原子对象都是可缩的。

证明。 不妨设 $\mathcal{E}$ 是层拓扑斯 $\mathrm{Sh}(C, J)$，且 J是子典范的：(C, J)可以是标准的（参见 [4]中的定理 C2.2.8）。并设 $g : \mathrm{Sh}(C, J) \to$ **集合** 是典范几何态射。

现在，考虑 $\mathrm{Sh}(C, J)$ 上的典范覆盖。因此，由 [4], 中的命题 C2.2.7 可知，$\mathrm{Sh}(\mathrm{Sh}(C, J)$ $J_{can})$ 的每个对象都同构于某个可表函子 $\mathrm{Sh}(C, J)(-, X)$，其中 $X \in \mathrm{Sh}(C, J)$，并且

$$\mathrm{Sh}(C, J) \simeq \mathrm{Sh}(\mathrm{Sh}(C, J), J_{can}).$$

更准确地说，Yoneda嵌入 $X \mapsto \mathrm{Sh}(C, J)(-, X)$ 是一个等价，其拟逆是如下函子：它将一个层 $F : \mathrm{Sh}(C, J)^{op} \to$ **集合** 映射为它的

沿 Yoneda嵌入 $C \to \mathsf{Sh}(C,J)$ 的限制；也就是说，将 F 限制到 C 的可表对象上。由于 J 是子典范的，这些对象属于 $\mathsf{Sh}(C,J)$。

设 $h : \mathsf{Sh}(\mathsf{Sh}(C,J)\ J_{can}) \to$ **集合** 为典范几何态射。下图在同构意义下可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Sh}(C,J) & \xrightarrow{\quad Y \quad} & \mathsf{Sh}(\mathsf{Sh}(C,J)\ J_{can}) \\ & {\scriptstyle g_*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h_*} & \\ & \mathbf{Set}. & \end{array}$$

假设 g 是预凝聚的。根据 [16], 中的定理3.3，$\mathsf{Sh}(C,J)$ 在 **集合** 上是分子型的。根据 [1], 中的定理14，$\mathsf{Sh}(C,J)$ 的每个对象都是分子对象之和。在 [1] 第5节开头指出，在 **集合** 的情形下，分子对象是只有两个可补子对象的对象：0 和它自身。由于 $\mathsf{Sh}(C,J)$ 在 **集合** 上是预凝聚的，而集合是布尔的，根据 [20],中的命题 1.1

$$g_!(\text{molecule}) = 1.$$

但是，根据引理7.5，每个可表对象都是分子对象。

现在，根据 [1], $\mathsf{Sh}(C,J)$ 中的定理16，它等价于某个位点上的层范畴，且该位点上的常值预层都是层。更准确地说，在该定理的证明中，定义位点是按如下方式显式构造的：先考虑一个生成元集合。每个生成元都是若干分子对象之和。随后，在该证明中，他们取 $\mathcal{M}$ 为由这些分子对象确定的全子范畴，并考虑 $\mathsf{Sh}(\mathcal{M}, J_{can}|_{\mathcal{M}})$，其中 J_{can} 是拓扑斯在 $\mathcal{M}$ 上限制所得的典范拓扑。在这种情况下，每个可表函子都是一个分子对象；又由于 J 是子典范的，$\mathsf{Sh}(C,J)$ 的生成元集合由表示对象构成。也就是说，在这种情况下， $\mathcal{M}$ 是可表函子的全子范畴。根据比较引理（ [4] 中的 C2.2.3），

$$\mathrm{Sh}(\mathrm{Sh}(C,J), J_{can}) \simeq \mathrm{Sh}(\mathcal{M}, J_{can}|_{\mathcal{M}}),$$

并且如果 $k : \mathsf{Sh}(\mathcal{M}, J_{can}|_{\mathcal{M}}) \to$ **集合** 是典范几何态射，则下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Sh}(C,J) & \xrightarrow{\quad Y \quad} & \mathsf{Sh}(\mathcal{M}, J_{can}|_{\mathcal{M}}) \\ & {\scriptstyle g_*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle k_*} & \\ & \mathbf{Set}. & \end{array}$$

ˆ 因此， k^* 是将集合 I 映到常值函子 I的函子。故$k_!$ 是余极限函子（参见 [3] 中命题 1.3 的证明里关于 (iii)⇒(i) 的论证）。

注意，根据 [4], 中的 C2.2.7，$\mathsf{Sh}(\mathcal{M}, J_{can}|_{\mathcal{M}})$ 中的每个层都具有形式 $\mathsf{Sh}(C,J)(-,X)$，其中某个 $X \in \mathsf{Sh}(C,J)$ 限制到 $\mathcal{M}$。因此由米田，

$$\mathrm{Sh}(C,J)(C(-,c),X) \cong Xc,$$

即，可以把 $\mathcal{M}$ 中的层视为 $\mathsf{Sh}(C,J)$ 中的层。

现在，设 F 是 $\mathsf{Sh}(C,J)$ 中的一个原子层。因此 $(-)^F$ 保持余极限。另一方面，

$$F = \mathrm{Colim}_{(a,x)\in \int F} C(-,a),$$

其中 $\int F$ 是 F 的元素范畴（即 $x \in Fa$）。

由于 Sh(C, J) 是一个 McLarty 拓扑斯，因此满足 5.1 所要求的零点定理，

$$\begin{aligned}\mathrm{Sh}(C,J)(F,F) &\cong \mathrm{Sh}(C,J)(1,F^F)\\ &\cong \mathrm{Sh}(C,J)(1,(\mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F} C(-,a))^F)\\ &\cong \mathrm{Sh}(C,J)(1,\mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F} C(-,a)^F)\\ &\cong \mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F}\mathrm{Sh}(C,J)(1,C(-,a)^F)\\ &\cong \mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F}\mathrm{Sh}(C,J)(F,C(-,a)).\end{aligned}$$

由此

$$\mathrm{Sh}(C,J)(F,\mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F} C(-,a)) \cong \mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F}\mathrm{Sh}(C,J)(F,C(-,a)).$$

现在，令 $\mu_{(a,x)}\colon C(-,a) \to \mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F} C(-,a)$ 表示余极限余锥 $\mu\colon C(-,a) \Rightarrow \mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F} C(-,a)$ 在 (a,x) 中的分量。令 $\mu'_{(a,x)}$ 表示以下复合：

$$\begin{array}{c}\mathrm{Sh}(C,J)(F,C(-,a))\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sh}(C,J)(F,\mu_{(a,x)})}\\ \mathrm{Sh}(C,J)(F,F)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \cong}\\ \mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F}\mathrm{Sh}(C,J)(F,C(-,a))\end{array}$$

这是 **集合**中的一个余极限。因此，该复合是 **集合** 中一个极限余锥在 (a,x) 中的分量，其余极限对象是以下余积的一个商

$$\coprod_{(a,x)\in\int F}\mathrm{Sh}(C,J)(F,C(-,a)).$$

因此，对于 1_F，存在某个对 (a,x)，使得存在一个自然变换$\xi \in \mathrm{Sh}(C,J)(F,C(-,a))$，满足 $\mu'_{(a,x)}(\xi) = 1_F$；等价地，对于某个 (a,x)，存在 $\zeta \in \mathrm{Sh}(C,J)(F,C(-,a))$，使得 $\mu_{(a,x)} \circ \zeta = 1_F$。因此， F 是 $C(-,a)$ 的一个收缩。由此，根据引理 6.3、6.4，并且由于 $k_!$ 是余极限函子，F 是可缩的。□

6.6. **注记**。 在格罗滕迪克拓扑斯 $\mathcal{E}$ 中，若其典范几何态射$g : \mathcal{E} \to$**集合** 是预凝聚的，则层 $F \in \mathcal{E}$ 连通当且仅当 $\int F$ 连通：

$$\begin{aligned}\mathrm{Colim}_{c\in C} Fc &= \mathrm{Colim}_{c\in C}\mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F} C(c,a)\\ &= \mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F}\mathrm{Colim}_{c\in C} C(c,a)\\ &= \mathrm{Colim}_{(a,x)\in\int F} 1\\ &= \coprod_{\mathscr{C}(\int F)} 1,\end{aligned}$$

其中 $\mathscr{C}(\int F)$ 是 $\int F$ 的连通分支集合。

7. Examples

本节考察三个例子。首先，一个没有非平凡原子对象的质量类型例子。接着，一个必然具有足够凝聚性的拓扑斯例子，其中有一个原子对象，包含可数无限多个点。此例还用于构造一个反例，说明原子对象的商不一定是原子对象。最后，一个拓扑斯（不一定具有凝聚性）的例子，其中有原子对象 T where 2_T is 同构于 2。

7.1.**定理**。设 E 是一个带单位且只有一个幂等元的幺半群。拓扑斯**集合**^{E} 除了 *1* 之外没有原子对象。

7.2.**定理**。存在一个 *McLarty* 拓扑斯 $\mathcal{E}$，其中有一个原子对象 A，它有可数无限多个点。

7.3. **定理**。设 C 是一个小笛卡尔闭范畴。那么对于每个 $t \in C$，可表函子 $C(-, t)$ 都是 $[C^{op}, \textbf{集合}]$，和 $2_{C(-,t)} \cong 2$ 的原子对象，其中 $2 = 1 + 1$ 属于 $[C^{op}, \textbf{集合}]$。

7.3 的证明。根据命题 1.1，在 [21], 中，由于 C^{op} 有余积，$C(-, t)$ 是原子对象。我们有

$$\begin{aligned} C(-,a)^{C(-,t)}(b) &= [C^{op}, \mathbf{Set}](C(-,b) \times C(-,t), C(-,a)) \\ &\cong [C^{op}, \mathbf{Set}](C(-, b \times t), C(-,a)) \\ &\cong C(b \times t, a) \\ &\cong C(b, a^t). \end{aligned}$$

因此，根据 [12],中引理1.4.3的证明

$$\begin{aligned} 2_{C(-,t)}(a) &= [C^{op}, \mathbf{Set}](C(-,a)^{C(-,t)}, 2) \\ &\cong [C^{op}, \mathbf{Set}](C(-,a^t), 2) \\ &\cong 2(a^t) \\ &= 2. \end{aligned}$$

□

7.4. 引理。指数对象$(\beta, B)^{(\alpha,A)}$ 在集合^E 中是二元组(β^α, B^α)，其中$B^\alpha :=$集合$^E((0 \times \alpha, Z_2 \times A), (\beta, B))$且 $\beta^\alpha := (f \mapsto f \circ 0 \times 1_A)$，并且求值态射为$ev : (\beta^\alpha, B^\alpha) \times (\alpha, A) \to (\beta, B)$，定义为

$$\mathrm{ev}(f, a) := f(1, a).$$

证明。设 P, Q 为函子 $E \to$ **集合**。若 Q^P 存在，则由于它是函子 $E \to$ **集合**，根据米田，

$$\begin{aligned} Q^P(\bullet) &\cong \mathrm{Nat}(E(\bullet, -), Q^P) \\ &= \mathbf{Set}^E(E(\bullet, -), Q^P) \\ &\cong \mathbf{Set}^E(E(\bullet, -) \times P, Q) \\ &= \mathrm{Nat}(E(\bullet, -) \times P, Q). \end{aligned}$$

因此，如果 $Q = (\beta, B)$ 和 $P = (\alpha, A)$，那么 $Q^P(\bullet)$ 必须是 $0 \times \alpha \to \beta$ 中态射的集合 **集合**^{E}，也就是说，是使下列图表可交换的函数 f **集合**

可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 \times A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle 0\times\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathbb{Z}_2 \times A & \xrightarrow[f]{} & B, \end{array}$$

其中 0 是常值 0。

现在，对于 $e \in E$，必有 $Q^P(e)$ 等于

$$\mathrm{Nat}(E(\bullet,-)\times P, Q) \xrightarrow{\mathrm{Nat}(E(e,-)\times P, Q)} \mathrm{Nat}(E(\bullet,-)\times P, Q).$$

因此 $Q^P(e)$ 必须是 $f \mapsto f \circ 0 \times 1_A$。

为了看清求值态射是什么，定义 ev：$B^\alpha \times A \to B$ 为

$$\mathrm{ev}(f,a) := f(1,a).$$

那么，ev 是一个态射 $(\beta^\alpha, B^\alpha) \to (\beta, B)$。事实上，

$$\begin{array}{ccc} B^\alpha \times A & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & B \\ {\scriptstyle \beta^\alpha\times\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ B^\alpha \times A & \xrightarrow[\mathrm{ev}]{} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (f,a) & \longmapsto & f(1,a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f\circ 0\times 1_A, \alpha a) & \longmapsto & f(0,\alpha a) \end{array}$$

可交换，因为

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 \times A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle 0\times\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathbb{Z}_2 \times A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

可交换，因此 $\beta f(1,a) = f(0,\alpha a)$。

现在，设 $g\colon (\varsigma, C)\times(\alpha, A) \to (\beta, B)$ 是 **集合**^{E} 中的一个态射，并定义 $\hat{}g\colon C \to B^\alpha$ 为

$$\hat{g}c(n,a) := g(\varsigma^{1-n}c, a).$$

那么，$\hat{}g$ 是一个态射 $(\varsigma, C) \to (\beta^\alpha, B^\alpha)$，使得它是唯一一个令下图可交换的函数：

$$\begin{array}{ccc} C \times A & & \\ {\scriptstyle \hat{g}\times 1}\downarrow & \searrow^{g} & \\ B^\alpha \times A & \xrightarrow[\mathrm{ev}]{} & B. \end{array}$$

□

7.1 的证明。令 (X,x)、(Y,y)、$(T,t) \in$ 集合^E。假设 X、Y、$T \neq \emptyset$ 都是有限的，并且 $\Gamma(X,x) = 1 = \Gamma(Y,y)$。假设 (T,t) 是 Set^E 中不同于 1 的原子对象。因此，由 5.3 可知，$\Pi(T,t) = 1$；又因为 Set^E 是质量类型，所以 $\Gamma(T,t) = 1$；也就是说，t只有一个不动点。因此，由 7.4，

$$|X^t| = |X|^{2|T|-1}.$$

现在， h 的不动点与下列态射之间存在双射对应： x^t 和 $k\colon (T,t) \to (X,x)$。所以

$$|\operatorname{Fix}(x^t)| = |X|^{|T|-1},$$

其中 Fix 将幂等函数映射到其不动点。因此

$$\begin{aligned}|\mathbf{Set}^E((X,x)^{(T,t)},(Y,y))| &= |Y|^{|X^t|-|\operatorname{Fix}(x^t)|}\\ &= |Y|^{|X|^{|T|-1}\left(|X|^{|T|}-1\right)}.\end{aligned}$$

设 $(Y,\ y)^{(T,t)} = (Y_t,\ y_t)$。因此，由 5.4， $\Gamma(Y,\ y) \cong \Gamma(Y_t,\ y_t)$；也就是说， y_t 有一个不动点。因此

$$|\mathbf{Set}^E((X,x),(Y_t,y_t))| = |Y_t|^{|X|-1}.$$

总而言之：

$$\begin{aligned}|X^t| &= |X|^{2|T|-1},\\ |\mathbf{Set}^E((X,x)^{(T,t)},(Y,y))| &= |Y|^{|X|^{|T|-1}\left(|X|^{|T|}-1\right)},\\ |\mathbf{Set}^E((X,x),(Y_t,y_t))| &= |Y_t|^{|X|-1}.\end{aligned}$$

由此

$$|Y_t| = |Y|^{|X|^{|T|-1}\left(|X|^{|T|-1}+|X|^{|T|-2}+\cdots+1\right)}.$$

也就是说， Y_t 的基数也会取决于 X的基数，这与事实矛盾：它应该只取决于 Y 和 T。因此，**集合**^{E} 没有底集为有限集的原子对象。

现在假设 (T,t) 是 $\mathbf{Set}^E$ 中底集无限的原子对象。考虑 $T \setminus \{p\}$ 的特征函数 χ，其中 p 是 t 的不动点。于是 $\chi\colon (T,t) \to (\mathbf{Z}_2,0)$。定义 $\iota\colon \mathbf{Z}_2 \hookrightarrow T$ 如下： $\iota(0) := p$ 且 $\iota(1) := q$，其中 q 是 T 中不同于 p 的任意另一点。于是 $\iota \circ \chi = 1$ 和 $\iota\colon (\mathbf{Z}_2,0) \to (T,t)$ 在 $\mathbf{Set}^E$ 中。因此 $(\mathbf{Z}_2,0)$ 是 (T,t) 的收缩。由此，根据 2.1， $(\mathbf{Z}_2,0)$ 是原子对象，这就产生了矛盾，因为 $(\mathbf{Z}_2,0)$ 的底集是有限的。□

7.5.**引理**。设 C 是一个小范畴。对每个 $c \in C$，可表函子$C(c,-)\colon C \to \mathbf{Set}$ 都是不可分解的。也就是说，它的可补子对象只有空函子和它本身。

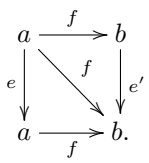
证明。令 Q 为 $C(c,\ -)$ 的一个子函子，使得 $Q \neq \emptyset$ 且 $Q \neq C(c,\ -)$。于是，对于某个 $d \in C$，存在一个 $f \in Qd$，因为 $Q \neq \emptyset$；并且 $1_c \notin Qc$，因为 $Q \neq C(c,\ -)$。

现在，记住

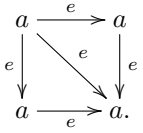
$$(\neg Q)d = \{g \in C(c,d) \mid \text{ for all } f : d \to e,\ f \circ g \notin Qe\};$$

因此 $1_c \notin (\neg Q)c$，因为 $f \circ 1_c = f \in Qd$。由此可知， Q 不是可补的。因此， $C(c,\ -)$ 的唯一可补子函子是 $\emptyset$ 和 $C(c,\ -)$。□

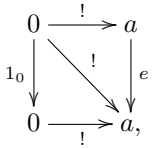
7.6.**注记**。回想一下，给定一个范畴 C，其 Karoubi 包络 $K(C)$ 的构造如下： $K(C)$ 的对象是 C 中所有的幂等箭头，而 $K(C)$ 中的一个箭头 $f\colon e \to e'$ 是 C 中的一个交换方块



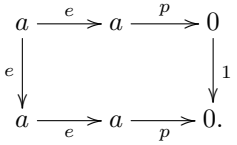
因此， $K(C)$ 中的恒等态射就是这些箭头



若 C 有一个始对象 0，则 $K(C)$ 以 1_0 为始对象。事实上，设$e:\ a \to a$ 是 $K(C)$ 中的任意对象。那么下图可交换:



并且 ! 是使该图表可交换的唯一箭头。此外，若C 的每个对象都有一个余点，则 $K(C)$ 中的每个对象都有一个余点。事实上，设 $(a,\ e) \in K(C)$，并设 $p\colon\ a \to 0$ 是 a的一个余点；因此下图可交换:

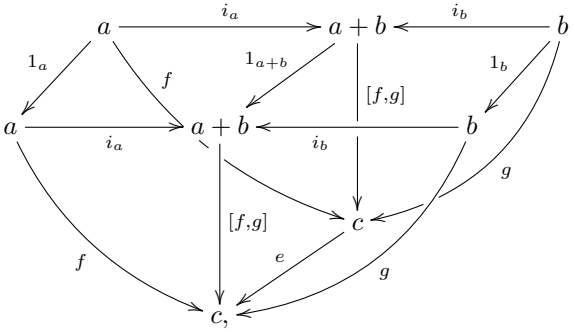


也就是说，$(a,\ e)$ 有余点 $pf\colon (a,\ e)\ \to (0, 1_0)$。

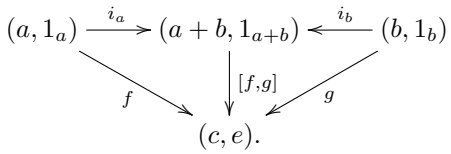
若 C有余积 $a+b$，则 $K(C)$ 有余积 1_{a+b}，其注入态射为

$$1_a \xrightarrow{\ i_a\ } 1_{a+b} \xleftarrow{\ i_b\ } 1_b.$$

事实上，设 $f\colon (a, 1_a)\ \to (c, e)$ 和 $g\colon (b, 1_b)\ \to (c, e)$ 是 $K(C)$ 中的态射。因此，下图可交换:



且 $[f, g]:\ a+b \to c$ 是 C 中使上面的图表可交换的唯一箭头。因此，$[f, g]\colon (a+b,\ 1_{a+b})\ \to (c,\ e)$ 是使下图可交换的唯一箭头:



若 $e\colon a \to a$ 是 C 中的可分裂幂等箭头，其分裂为

$$a \xrightarrow{r} b \xrightarrow{s} a \quad = \quad a \xrightarrow{e} a$$

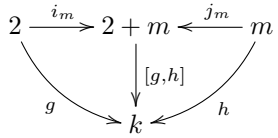
$$b \xrightarrow{s} a \xrightarrow{r} b \quad = \quad b \xrightarrow{1_b} b,$$

那么， $e\colon (a,\ 1_a) \to (a,\ 1_a)$ 是 $K(C)$ 中的幂等箭头，其分裂为 $r\colon (a,\ 1_a) \to (b,\ 1_b)$， $s\colon (b,\ 1_b) \to (a,\ 1_a)$。

7.2 的证明。考虑 **FinOrd** 的底层图，即由所有有限序数组成的小范畴。移除其终对象，以及所有定义域或陪域为 1 的箭头。也就是说，考虑 **FinOrd**-1 **FinOrd** 的删点子图（我们用同一名称指代 **FinOrd** 的底层图）。

将以下箭头（路径）及相应关系添入 **FinOrd** -1。一个箭头 $p\colon\ 2 \to 0$，满足 $p! = 1_0$。现在，令 $m \geq 2$，并令 i_m 表示包含函数 $2 \hookrightarrow 2+m$，令 j_m 表示将 m 嵌入 $2+m$ 的函数，定义如下：0 映射到 2，1 映射到 3，.....，m 映射到 $m+1$。

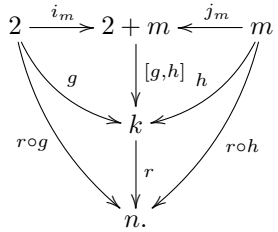
因此，对于 $g\colon\ 2 \to k$ 和 $h\colon\ m \to k$ 已添加的箭头，若尚未添加 $[g,h]$，则按照下图添加相应的箭头（例如，若 $g,\ h$ 属于**FinOrd** -1，则已经添加了 $[g,h]$，因为它属于**FinOrd** -1）：



并附上使三角形可交换的显然关系，以及关系

$$[g,h]! =!,$$

并且，对于每个已添加的箭头 $r\colon\ k \to n$，添加与下图相对应的关系 $r \circ [g,h] = [rg, rh]$:



例如，若 $f_1,\ f_2\colon\ 2 \to 2$ 是**FinOrd**中的态射，则得到箭头$[pf_1, pf_2]\colon\ 4 \to 0$和 $[pf_2, pf_1]\colon\ 4 \to 0$，以及关系 $[pf_1, pf_2]! = 1_0 =[pf_2, pf_1]!$ $p \circ [f_1, f_2] = [pf_1, pf_2]$。

设 G 为将上述态射添加到 **FinOrd** -1 而得到的图， S 为上述关系的集合， T 为范畴 **FinOrd** -1 中已有关系的集合，以及 $R := S \cup T$。设 D 为由 G 生成的自由范畴。因此，以 G 为生成元、以 R 为关系的范畴 $C := D/R$（见 Mac Lane [10] 的第 II.7 节和第 II.8 节）具有一个始对象，并且它的所有对象都有一个余点。此外，除 **FinOrd** 中的常值函数外，它的所有幂等元都分裂。然而，根据 7.6， $K(C)$ 具有一个始对象，$(2, 1_2)$ 是可加的，并且它的所有

对象都有一个余点。现在，**集合**$^C \simeq$**集合**$^{K(C)}$。因此，根据 Menni [15]，中的命题 4.1，典范的 $f\colon$ **集合**$^C \to$**集合** 是预凝聚的。根据 Menni [15] 中的命题 4.5，$f\colon$ **集合**$^C \to$ **集合** 是充分凝聚的。

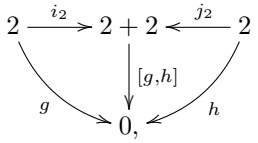
注意，C 很小，因为 C 中的箭头集合的基数是 N 的基数（见下文 7.7）。

存在一个函子 $(-)+2\colon C \to C$，它为C中的所有对象提供与 2 的余积。因此，根据 Yetter [21] 中的命题 1.1，$C(2,\ -)\colon C \to$ **集合**是**集合**^{C}中的一个原子对象。此外，C 中的余点 $2 \to n \to 0$ 产生了可数无穷多个 $C(2,\ -)$的点 $C(0,\ -) \to C(2,\ -)$，因为 $C(0,\ -)$是**集合**^{C}中的终对象。

最后，由于 f :**集合**$^C \to$ **集合**是预凝聚的，f 满足 NS（见 Ruiz-Hern´ández 和 Sol´órzano [19] 的《动机》）。因此，根据 Ruiz-Hern´ández 和 Sol´órzano [20], 中的命题 1.1 和定理 C，以及 7.5，$C(2,\ -)$ 是连通的。□

7.7. **注记**。令 C 为在 7.2 中构造的范畴。以下是其证明中的归纳过程所构造的一些态射示例。

唯一没有不可分解箭头 $n \to 0$ 的对象 $n \in C$ 是 3，因为 1 不在C中。只有一个不可分解箭头 $n \to 0$ 的对象 $n \in C$ 只有 2，即 p。第一个拥有大量不可分解箭头 $n \to 0$ 的对象 $n \in C$ 是 4。箭头 $2 \to 2 \to 0$ 的数量是 2^2。因此，若考虑下图，其中 g 和 h是这些箭头之一：



我们得到 $2^2 \cdot 2^2$ 个新 $4 \to 0$ 箭头。利用这些新箭头，如果箭头 $2 \to 4$ 属于 **FinOrd**，就会得到 $4^2 \cdot 2^4$ 个新$2 \to 4 \to 0$ 箭头。因此，若考虑前面的图，其中 g 和 h 是这些新 $2 \to 4 \to 0$ 箭头之一，那么就会得到$4^2 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 4^2$ 个新 $4 \to 0$ 箭头，如此等等。

我们可以用 5、6、7 等等来做。显然，每种情况下都会得到可数无穷多个态射。

存在态射 $n \to m$，满足 $m \neq 0$ 不属于 **FinOrd** 且不经过 0。这在 $n \geq 4$时会发生。例如，设 $f\colon 2 \to m$ 是 **FinOrd** 中的一个态射，且满足$m \neq 0$。那么 $[!p,\ f]\colon 4 \to m$ 不经过 0，且不属于 **FinOrd**。$[f, [!p,\ f]]\colon 6 \to m$和 $[!p,\ [!p,\ f]]\colon 6 \to m$也都不属于。

7.8.**定理**。设 C 为 *7.2* 中的范畴。设 $Q\colon C \to$ **集合** 定义如下：$Qn := 2$ 对每个 $n \in C$ 以及

$$Qh := \begin{cases} \bar{0} & \textit{if } h \textit{ is an arrow } n \to 0 \to m \textit{ with } n \to 0 \textit{ not in } \mathbf{FinOrd}, \\ 1_2 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

（这里 $\bar{0}$ 是常值函数 *0*）。那么，函子 Q 是 $C(2、\ -)$的一个商，它在 **集合**^{C}中不是原子的。

7.9. **引理**。令 C 为 *7.2* 中的范畴。令 $Q\colon\ C \to$**集合** 如 *7.8* 中所述。那么，存在一个满态射 $\alpha\colon\ C(2,-) \Rightarrow Q$，属于**集合**^{C}。

证明。令 $\alpha\colon C(2,-) \Rightarrow Q$ 按如下方式定义：给定 $n \in C$

$$\alpha_n(g) := \begin{cases} 0 & \text{if } g \text{ is an arrow } 2 \to 0 \to n, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

令 $h\colon n \to m$ 为 C中的一个箭头。显然，下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} C(2,n) & \xrightarrow{\alpha_n} & Qn \\ {\scriptstyle C(2,h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Qh} \\ C(2,m) & \xrightarrow[\alpha_m]{} & Qm, \end{array}$$

且 α 是满态射。 □

7.10. **引理**。 考虑 *7.9* 中的函子 Q。则 $C(2、\ -)^Q \cong C(2、\ -)$，且自然同构 $\Phi\colon (2、\ -)^Q \to C(2、\ -)$ 的分量为

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(C(n,-)\times Q, C(2,-)) &\xrightarrow{\Phi_n} C(2,n) \\ \gamma \quad &\mapsto \quad \gamma_n(1_n,1). \end{aligned}$$

证明。设 $\gamma \in \mathsf{Nat}(C(n,\ -)\times Q,\ C(2,\ -))$，并设 h是 C中的一个箭头，形如 $n \to 0 \to m$，其中 $n \to 0$ 不在 **FinOrd** 中。因此，根据 γ的自然性，

$$\begin{aligned} \gamma_m(h,0) &= h\circ\gamma_n(1_n,1) \\ &= h\circ\gamma_n(1_n,0), \end{aligned}$$

其中 $\gamma_n(1_n,\ 1)\ \gamma_n(1_n,\ 0) \in C(2,\ n)$。如果 $\gamma_n(1_n,\ 1) \neq \gamma_n(1_n,\ 0)$，且 h任意，则等式

$$h\circ\gamma_n(1_n,1) = h\circ\gamma_n(1_n,0)$$

对于任意不可分解箭头 h都应成立: $n \to 0$ （而箭头 $0 \to m$ 将会是 1_0）。因此，对于 $n = 2$或 $n \geq 4$，有不可分解箭头 $n \to 0$。由于不存在关系使 $hr = hs$ 相等，对于 h 不可分解且 $r,\ s$ 不同的γ_n，$(1_n,\ 1) = \gamma_n(1_n,\ 0)$，对于 $n = 2$ 或 $n \geq 4$。

若 $n = 3$，由于不存在不可分解箭头 $3 \to 0$，只有形如 $3 \to j \to 0$ 且 $3 \to j$ 属于 **FinOrd** 的箭头，那么就有可能选取一个 **FinOrd** 中的箭头 $3 \to j$ 来使其相等化

$$2 \underset{s}{\overset{r}{\rightrightarrows}} 3$$

其中 $r,\ s$ 属于 **FinOrd**；否则 $3 \to j$ 就无法使它们相等化。但可以改为选取一个单射箭头 $3 \to j'$。因此 $\gamma_3(1_3,1) = \gamma_3(1_3,0)$。

现在，设 $h'\colon\ m \to k$ 是 C 中的另一个箭头，其形式为 $m \to 0 \to k$，且 $m \to 0$ 不属于 **FinOrd**。因此，根据 γ 的自然性，

$$h'h\circ\gamma_n(1_n,0) = \gamma_k(h'h,0) = h'\circ\gamma_m(h,1).$$

因此，运用与前一个论证类似的推理，可以得出

$$h\circ\gamma_n(1_n,0) = \gamma_m(h,1).$$

现在，假设 h 不具有 $n \to 0 \to m$ 且 $n \to 0$ 不属于**FinOrd** 的形式。那么，根据 γ 的自然性，

$$\begin{aligned} \gamma_m(h,1) &= h\circ\gamma_n(1_n,1) \\ \gamma_m(h,0) &= h\circ\gamma_n(1_n,0). \end{aligned}$$

因此，每个自然变换 $C(n,\ -)\times Q \Rightarrow C(2,\ -)$ 都由$\gamma_n(1_n,\ 1) = \gamma_n(1_n,\ 0) \in C(2,\ n)$ 决定。也就是说，$C(2,\ -)^Q(n) \cong C(2,\ n)$，而该双射就是函数 $(\gamma \mapsto \gamma_n(1_n,\ 1))$。

这个双射关于 n 是自然的。事实上，设 $h: n \to m$ 是 C中的一个箭头；下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Nat}(C(n,-)\times Q, C(2,-)) & \xrightarrow{\Phi_n} & C(2,n) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Nat}(C(h,-)\times Q, C(2,-))} & & \downarrow{\scriptstyle C(2,h)} \\ \mathrm{Nat}(C(m,-)\times Q, C(2,-)) & \xrightarrow[\Phi_m]{} & C(2,m), \end{array}$$

因为

$$\mathrm{Nat}(C(h,-)\times Q, C(2,-))(\gamma) = \gamma \cdot C(h,-)\times 1_Q$$

and

$$(\gamma \cdot C(h,-)\times 1_Q)_m(1_m, 1) = \gamma_m(h,1).$$

□

7.11. 注记。 考虑 7.9 中的函子 Q 。若在前一个引理中将 2 替换为 k ，并取 $k \geq 3$，那么所有论证对新情形 k 也同样成立，甚至对病态情形 $k = 3$ 也成立。因此，对于 $k \geq 3$ 中的 C， $C(k, -)^Q \cong C(k, -)$。

7.12.**引理**。 考虑 *7.9* 中的函子 Q 。对于每个 $n \in C$， $Q^Q(n)$ 的基数为 $2^{\mathbb{N}}$ 。

证明。 令 $\gamma \in Q^Q(n)$，其中 $n \in C$；也就是说，

$$\gamma \in \mathrm{Nat}(C(n,-)\times Q, Q).$$

设 h 是 C 中的一个箭头。那么，由于 γ 是自然的，以下图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} C(n,n)\times Qn & \xrightarrow{\gamma_n} & Qn \\ \downarrow{\scriptstyle C(n,h)\times Qh} & & \downarrow{\scriptstyle Qh} \\ C(n,m)\times Qm & \xrightarrow[\gamma_m]{} & Qm. \end{array} \tag{25}$$

因此，对于形式为 $n \to 0 \to m$ 且 $n \to 0$ 不属于 **FinOrd** 的 h ，

$$\gamma_m(h, 0) = 0.$$

由 (25) 的可交换性，对于不具有该形式的 h

$$\gamma_m(h,1) = \gamma_n(1_n, 1) \qquad \text{and} \qquad \gamma_m(h,0) = \gamma_n(1_n, 0).$$

剩下的情况是 $\gamma_m(h, 1)$，其中 h 的形式为 $n \to 0 \to m$ ，且 $n \to 0$ 不属于 **FinOrd**。令 h' 为 C 中的一个箭头 $m \to k$ 。因此，下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} C(n,m)\times Qm & \xrightarrow{\gamma_m} & Qm \\ \downarrow{\scriptstyle C(h,h')\times Qh'} & & \downarrow{\scriptstyle Qh'} \\ C(n,k)\times Qk & \xrightarrow[\gamma_k]{} & Qk. \end{array} \tag{26}$$

因此，若 h' 不具有形式为 $m \to 0 \to k$ 且 $m \to 0$ 不属于 **FinOrd** 的形式，则由 (26) 的可交换性，

$$\gamma_k(h'h, 1) = \gamma_m(h, 1), \tag{27}$$

而如果 h' 是这种形式，就属于前面讨论过的情形： $\gamma_k(h'h, 0) = 0$。因此，根据 (27)，态射 $h: n \to 0$ 确定了态射的 $\gamma_m(n \to 0 \to m, 1)$ 值

$n \to 0 \to m$。例如，对于 $p\colon 2 \to 0$ 以及每个 $m \in C$对应的态射 $!_m : 0 \to m$ ，有

$$\gamma_m(!_m p, 1) = \gamma_0(p, 1).$$

现在，箭头 $n \to 0$有可数无穷多个。因此，对于 h ， $\gamma_0(h,1)$ 有 $2^{\mathbb{N}}$种可能： $n \to 0$。因此

$$|Q^Q(n)| = 2^{\mathbb{N}}$$

对于每个 $n \in C$。

请注意，如果可以绝对自由地选择 γ 的分量，就意味着

$$|Q^Q(n)| = \mathbb{N} \times 2^{\mathbb{N}},$$

但 $\mathbb{N} \times 2^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}}$。 □

7.8 的证明。 根据 Mac Lane 中的定理 III.7.1 [10]， Q 是可表示函子 $C(n, –)$ 关于对象 $n \in C$的余极限。如果 Q 是原子的，那么 $(–)^Q$ 保留余极限。因此，由 7.10 和 7.11 可知

$$Q^Q \cong Q.$$

然而，根据 7.12， $Q^Q(n)$ 的基数为 $2^{\mathbb{N}}$，但 Qn的基数为 2，这就产生了矛盾。因此， Q 不是原子的。□

References

[1] Michael Barr 和 Robert Par´e. 分子拓扑斯. 《纯粹与应用代数杂志》, 17(2):127–152, 1980. ISSN 0022-4049,1873-1376. doi: 10.1016/0022-4049(80) 90080-8. URL https://doi.org/10.1016/0022-4049(80)90080-8.[2] J. L. Bell. 拓扑斯与局部集合论, 牛津逻辑指南第14卷. 克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1988年. ISBN 0-19- 853274-1. 导论，牛津科学出版物.[3] Peter Johnstone. 关于点式局部连通性的注记. 《范畴论及其应用》, 25:第3期, 51–63, 2011. ISSN 1201-561X.[4] Peter T. Johnstone. 《大象素描：拓扑斯理论纲要》第*1*卷, 牛津逻辑指南第43卷.克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，2002. ISBN 0-19-853425-6.[5] G. M. Kelly. 富范畴论基本概念. 范畴表示论及其应用, (10):vi +137, 2005. 1982年原版重印 [剑桥大学出版社，剑桥；MR0651714].[6] Anders Kock. 合成微分几何, 伦敦数学学会讲义丛书第333卷.剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2006. ISBN 978-0-521-68738-6; 0-521-68738-1. doi: 10.1017/CBO9780511550812. URL https://doi.org/10.1017/CBO9780511550812.[7] Anders Kock 和 Gonzalo E. Reyes. 分数指数函子的若干方面.《范畴论及其应用》, 5: 第 10 期 , 251–265, 1999 年 . ISSN 1201-561X.[8] F. William Lawvere. 欧拉连续统在函子意义上的确立. 载于《逻辑、数学、哲学：复古热忱》, 西方安大略哲学科学丛书第75卷.第249–254页. 施普林格，多德雷赫特，2011年. ISBN 978-94-007-0213- 4; 978-94-007-0214-1. doi: 10.1007/978-94-007-0214-1\ 13. URL https://doi.org/10.1007/978-94-007-0214-1_13.[9] F.W̃. Lawvere. 运动定律的拓扑斯. 视频文字稿，1997年9月。

[10] Saunders Mac Lane. 《工作数学家的范畴论》. Springer-Verlag，纽约-柏林，1971. 数学研究生教材，第5卷.[11] A. Madanshekaf 和 J. Tavakoli. M-集合范畴中的微小对象. 意大利纯粹与应用数学杂志, (10):153–162, 2001. ISSN 1126-8042,2239-0227.[12] Ali Madanshekaf. 分数指数. 博士论文, Tarbiat Modaress Uni- versity，1999年.[13] Colin McLarty. 拓扑斯典范点的初等公理. 《符号逻辑杂志》, 52(1):202–204, 1987年. ISSN 0022-4812,1943-5886. doi: 10.2307/2273873. URL https://doi.org/10.2307/2273873.[14] Colin McLarty. 将集合定义为空间点的集合. 《哲学逻辑杂志》, 17 (1):75–90, 1988 年 . ISSN 0022-3611. doi: 10.1007/BF00249676. URL https: // doi.org/10.1007/BF00249676.[15] M. Menni. 集合上的连续凝聚. 《范畴论及其应用》, 29:第20期, 542–568, 2014年. ISSN 1201-561X.[16]M. Menni. 可判定对象与分子拓扑斯. Rev. Un. Mat. Argentina, 67(2):397–415, 2024年. ISSN 1669-9637. doi: 10.33044/revuma.3427. URL https://doi.org/10.33044/revuma.3427.[17] Mat´ıas Menni. “彻底合成”微分几何的双向模型. 《范畴论及其应用》, 40:论文第15号, 413–429, 2024年. ISSN 1201-561X.[18] Ieke Moerdijk 和 Gonzalo E. Reyes. 光滑无穷小分析模型. Springer-Verlag，纽约，1991年. ISBN 0-387-97489-X. doi: 10.1007/ 978-1-4757-4143-8. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4143-8.[19] Enrique Ruiz-Hern´andez 和 Pedro Sol´orzano. 笛卡儿闭范畴中的朴素同伦论. 《范畴论及其应用》, 44:论文第19号, 565–587, 2025年. ISSN 1201-561X.[20] Enrique Ruiz-Hern´andez 和 Pedro Sol´orzano. 通过可判定商对象实现连通性. Cah. Topol. G´eom. Diff´er. Cat´eg., 66(3):65–78, 2025年. ISSN 1245-530X,2681-2363.[21] David Yetter. 指数函子的右伴随. 《纯粹与应用代数杂志》, 45(3):287–304, 1987年. ISSN 0022-4049,1873-1376. doi: 10.1016/0022-4049(87) 90077-6. URL https://doi.org/10.1016/0022-4049(87)90077-6. (†)

Centro de Investigación en Teoría de Categorías y sus Aplicaciones, A.C. México.

Email address: e.ruiz-hernandez@cinvcat.org.mx(

⋆ Instituto de Matemáticas Universidad Nacional Autónoma de México Oaxaca) de Juárez México.

, , ,*Email address*: pedro.solorzano@matem.unam.mx