arXiv:2602.12333v1 [math.RT] 12 Feb 2026

驯 ramified p-adic 群的$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-块的参数化与归约到零深度

Jean-Fran.cois Dat 和 Jessica Fintzen

摘要

设 $\mathbf{G}$ 是剩余特征为 p的非阿基米德局部域 F 上的一个约化群。我们考虑由一对元素 (ϕ, I) 构成的对象，其中一个是“野惯性”朗兰兹参数 $\hat{\phi}: P_F \longrightarrow \mathbf{G}$，其中心化子 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$是 $\mathbf{G}$ 的一个 Levi 子群；另一个是上同调不变量 I，其定义受到端oscopy理论的启发。假设 p 是奇数，且既不是 $\mathbf{G}$ 也不是$\mathbf{G}$的挠素数，我们便为每一对这样的对象 (ϕ, I) 关联一个Serre 子范畴 $\mathrm{Rep}^{\phi,I}(\mathbf{G}(F))$，它属于$\mathbf{G}(F)$的光滑$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-表示范畴。随后，我们构造该Serre 子范畴与$\mathbf{G}$的一个扭曲 Levi 子群$\mathbf{G}_{\phi,I}$的零深度$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-表示范畴之间的等价；该子群与 $C_{\mathbf{G}}(\phi)$ 对偶。这种归约到零深度的模式与猜想中的（范畴化）局部朗兰兹对应十分契合。

当 $\mathbf{G}$ 是温和分歧的，且 p 不整除其外尔群的阶时，上述 Serre 子范畴给出了所有光滑$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-表示的 $\mathbf{G}(F)$ 范畴的块分解。因此，在这种情况下，我们得到一个针对取值于任意特征不等于 p 的代数闭域的 $\mathbf{G}(F)$ 的光滑表示的归约至零深度过程。当该域的特征为 0 时，这恢复了 Adler–Fintzen–Mishra–Ohara 的一些近期结果。当该域为 $\mathbb{F}_\ell$ 时，我们结合 Zhu的幺正规范范畴对应，构造出一个全忠实嵌入，将 $D\mathrm{Rep}^{\mathbb{F}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$嵌入到 Weil群的 n维 $\mathbb{F}_\ell$表示的模空间上的某个适当的相干层范畴中。

MSC2020：22E50,11F70, 11S37 关键词： p-进群，表示论，局部朗兹纲领 第一作者感谢 ANR 通过“PPAL”项目（ANR-25-CE40-4664）提供的支持。第二作者获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟 Horizon 2020 研究与创新计划（资助协议编号 950326）提供的部分资助。

目录

1 引言 21.1 记号.9

2 从参数到子范畴 10

2.1 Levi 中心嵌入与对偶性.10 2.2 参数的 Levi 分解.16 2.3 分歧群与扭曲 Levi 序列.24 2.4 特征与幂等元.26 2.5 交织.31 2.6 幂等元系.38

2 7 $\overset{\phi}{R}{}^{I}\ G$ 42 。

2 8 $\overset{\phi}{\ }\ G$ 45

范畴 Rep,( ).Rep,$_R{}^I$ ( ) 的一些性质.

3 范畴等价与归约到零深度 55

3.1 主要结果.56 3.2 建筑上的局部化.56 3.3 海森堡–韦伊系数系统.60 3.4 等价的构造. 62 3.5 海森堡表示.73 3.6 一族海森堡–韦伊表示.78 3.7 海森堡–韦伊系数系统的构造.86

4 示例应用 95

4.1 类型的赫克代数归约到零深度.95 4.2 投射生成元及与 Chinello 一项结果的联系.96 4.3 归约到零深度与局部朗兰兹对应.97

部分记号 101

部分术语 101

1 引言

设 **G** 是定义在非阿基米德局部域 F 上的连通约化群，并令$G := \mathbf{G}(F)$。对于任意交换环 R, 我们用 Rep$_R(G)$ 表示 G 的光滑R表示范畴。下面概述本文所做工作的表示论意义。

主要结果。 (取 1) — 假设 **G** 是温和分歧的，且 p 不整除**G**的绝对 *Weyl* 群的阶。我们构造表示$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}](G)$的块分解，并证明每个块都等价于一个显式关联的温和分歧约化群的深度-0 块（该群实际上是**G**的一个扭曲*Levi*子群）。此外，每个块都定义在 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$ 上，且这些等价可以定义在 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$上。

请注意，这意味着对于任意 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数 R上的块，都可以将其约化至深度 0；特别地，对于任意特征不同于 p的代数闭域上的块也是如此。

我们想提醒主要熟悉 p-进群的复表示论的读者：一般而言，只要 G 的 pro-阶含有一个在 R中不可逆的因子，就不存在 Bernstein 分解，也不存在对 $\mathrm{Rep}_R(G)$ 中各块的类型论构造。即便存在这样的分解，例如在 [HKSS24], [Lan23], [MS14],[Vig98], 的情形下，一般也不存在块与某个良好的 Hecke 代数上的模范畴之间的等价。因此，我们所用的技术与[AFMO24b], 中的技术截然不同；后者通过比较适当的 Hecke 代数，为复表示证明了类似的“约化至深度零”结果。[1]

为了让读者了解我们采用的技术，我们先描述如下深度零子范畴（后者所用的记号将在下文解释）

$$\mathrm{Rep}_R^1(G) = \left\{ V \in \mathrm{Rep}_R(G),\, V = \sum_{x \in \mathcal{B}} e_{G_{x,0+}} V \right\}$$

其中 $\mathcal{B}$ 表示G的 Bruhat–Tits 建筑，群 $G_{x,0+}$ 是与 x关联的抛物型子群的 pro-p-根基，而 $e_{G_{x,0+}}$ 则是沿该 pro-p-群的平均幂等元。它是环 $\mathcal{H}_R(G)$ 的一个元素；该环由 G上所有紧支撑、局部常值的R值分布构成，因此它作用于 V（作为投影算子投影到不动向量 $V^{G_{x,0+}}$上）。

我们的块在第 2 节中以类似方式构造：通过以建筑中的点为指标的幂等元族。这些族具有良好的一致性性质，使我们能够应用 [MS10] 和 [Lan21], 的结果；这些结果表明，我们的块等价于建筑上的某些系数系统范畴。这正是此情形下缺失的 Hecke 代数桥梁的替代方案。随后，我们在第 3 节中通过构造这些系数系统范畴之间的等价，得到块之间的等价；整体策略遵循 [Dat18]提出的方法。

这些幂等元族的定义最终依赖于 Yu 的一般特征概念；该概念是 [Yu01] 和 [KY17]中类型构造的一部分。主要结果初步表述中关于p 的假设，借助 [Fin21]的穷尽性结果，确保我们得到整个范畴。构造这些等价时，仅有一般特征还不够；我们还需要一致的扭曲 Heisenberg–Weil 表示族，并以 [FKS23]引入的扭曲为基础。

我们注意到，在 [HKSS24], 中，当G 是经典群时，借助 Bushnell–Kutzko 和 Stevens 提出的半单特征概念，$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}](G)$ 的表示范畴的块分解是在最小假设（$p \neq 2$）下完成的。若能在该情形下实现我们将问题约化到深度零的策略，将会很有意思。

本文本可以完全用表示论术语来撰写：用适当的等价类标记我们的块，这些等价类由 G 的开 pro-p 子群及其特征构成，并出现在 [KY17] 的类型构造中。然而，这并非我们采取的路径。

相反，我们将从朗兰兹对应的谱侧出发，而我们的块将由“扩展的”野惯性参数来标记，具体定义见下文。一个

[1]不过请注意，我们在下文陈述的主要结果使我们能够重新证明 [AFMO24b] 中相关的赫克代数是同构的，尽管证明方式不那么显式，见推论 4.1.2。

实际原因是，此时出现在等价的目标中的约化群，可以清晰地解释为该参数的中心化子的对偶的适当内形式。更深层的原因是，从这一观点出发所呈现的约化至深度 0 的模式（见 [Dat25, §4.5] ，且在 [Dat17] 中已有预示）应当适用于更一般的情形；正如下文将解释的那样，范畴化局部朗兰兹纲领有力地支持了这一设想。为更详细地陈述我们的主要结果，我们首先需要引入一些额外的记号。

参数。我们将 ${}^L\mathbf{G} = \hat{\mathbf{G}} \rtimes W_F$ 称为 L-群 $\mathbf{G}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的韦伊形式，并令 $\Phi(\mathbf{G}) \subset H^1(W_F', \hat{\mathbf{G}})$ 表示 $\mathbf{G}$ 的相关朗兰兹参数集合，其中 W_F 表示 F 的 Weil 群，而 $W_F' = W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$。

令 P_F 为 W_F 的野惯性子群，并令 $\Phi(P_F, \mathbf{G})$ 表示 $\Phi(\mathbf{G})$ 在限制映射 $H^1(W_F', \hat{\mathbf{G}}) \longrightarrow H^1(P_F, \hat{\mathbf{G}})$ 下的像。我们称 $\Phi(P_F, \mathbf{G})$ 的元素为 $\mathbf{G}$ 的“野惯性参数”。因此，元素 $\phi \in \Phi(P_F, \mathbf{G})$ 是 L-同态 $P_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$（仍记作 ϕ）的一个 $\mathbf{G}$-共轭类，并且该同态可延拓为某个 $\varphi: W_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$（它是某个相关朗兰兹参数的限制）。在此情形下，$\varphi(W_F)$ 会正规化 $\mathbf{G}$ 中 ϕ 的中心化子 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$。由共轭诱导的 W_F 在中心 $Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))$ 和余中心 $(C^\wedge\mathbf{G}(\phi))_{\mathrm{ab}}$ 上的作用，以及诱导出的外作用 $W_F \longrightarrow \mathrm{Out}(C^\wedge\mathbf{G}(\phi))$，都是温和分歧的，且不依赖于 φ 的选取。

当约化群 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 连通时（例如，当 $\hat{\mathbf{G}}$ 是经典群时就是如此），我们记：

- $\mathbf{G}_\phi$ 为准分裂约化 F-群，它在可分闭包 F^{sep}/F 上与对偶群 $C^\wedge_{\mathbf{G}}(\phi)$ 对偶，其 F-有理结构由上述外作用给出。

- X_ϕ 特征群取挠子群后，由包含映射 $Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F} \subset Z(C^\wedge\mathbf{G}(\phi))^{\varphi(W_F)}$ 诱导的映射 $X^*(Z(C^\wedge\mathbf{G}(\phi))^{\varphi(W_F)})_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{h_\phi} X^*(Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F})_{\mathrm{tors}}$ 的核。对于 $\mathbf{G}'_\phi$ 的任意内形式 $\mathbf{G}_\phi$，与 Kottwitz 同构复合后，上述映射变为映射 $H^1(F, \mathbf{G}'_\phi) \xrightarrow{h_\phi} H^1(F, \mathbf{G})$，从而可将 X_ϕ 视为 $H^1(F, \mathbf{G}'_\phi)$ 的子集。

- 当 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 还是 $\mathbf{G}$ 的 Levi 子群时，例如在 p 不整除 $\mathbf{G}$ 的外尔群的阶的情况下，我们记作：

  - $\mathbf{S}_\phi$ 为与 $C^\wedge_{\mathbf{G}}(\phi)$ 的余中心对偶的 F-环面，其上带有上述的 W_F 作用。在 2.2.3 节中，我们将说明 $\mathbf{S}_\phi$ 如何带有一个 $\mathbf{G}(F)$-共轭类的“Levi 中心嵌入” $\iota: (\mathbf{S}_\phi)_F \hookrightarrow \mathbf{G}_F$，即像为其中心化子的连通中心的嵌入。对于每个这样的 ι，中心化子 $C_{\mathbf{G}_F}(\iota((\mathbf{S}_\phi)_F))$ 是 $\mathbf{G}_F$ 的 Levi 子群，且与 $(\mathbf{G}_\phi)_F$ 同构。

  - $\mathcal{I}_\phi$ 上述 $\mathbf{G}(F)$-共轭类中 G-共轭类的 F-有理 Levi 中心嵌入 $\iota: \mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$。对于每个这样的 ι，中心化子 $\mathbf{G}_\iota := C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_\phi))$ 是 $\mathbf{G}$ 的扭曲 Levi 子群，也是 $\mathbf{G}_\phi$ 的一个内形式。群 X_ϕ 在 $\mathcal{I}_\phi$ 上简单传递地作用，但一般而言不存在自然的基点。

  - $\mathbf{G}_{\phi,I}$，对于 $I \in \mathcal{I}_\phi$，一个处于所有中心化子同构类中的约化 F-群 $\mathbf{G}_\iota$，对应于 $\iota \in I$。对于任意 $\alpha \in X_\phi$，群 $\mathbf{G}_{\phi,\alpha.I}$ 是与 $\alpha \in X_\phi \subset H^1(F, \mathbf{G}_{\phi,I})$ 相关联的 $\mathbf{G}_{\phi,I}$ 的纯内形式。

关于这些对象的更多细节，请参阅第 2.1 节和第 2.2 节。下面更准确地说明本文所做的工作。

主要结果。 （第二稿） — 假设 $\mathbf{G}$ 是温和分歧的，并且 p 为奇数，且既不是 $\mathbf{G}$ 的挠素数，也不是 $\hat{\mathbf{G}}$ 的挠素数。设 R 为一个交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$-代数。

i) 对任意 $\phi \in \Phi(P_F, \mathbf{G})$，若 $C\hat{}_{\mathbf{G}}(\phi)$ 是 $\mathbf{G}$ 的 *Levi* 子群，则我们将其关联到 表示$_R(G)$ 的一个非零 *Serre* 子范畴 表示$^{\phi}_R(G)$，以及一个具有非零因子的分解

$$\mathrm{Rep}^{\phi}_R(G) = \prod_{I \in \mathcal{I}_\phi} \mathrm{Rep}^{\phi,I}_R(G).$$

此外，当 $\phi \neq \phi'$ 时，表示$^{\phi}_R(G)$ 与 表示$^{\phi'}_R(G)$ 正交，并且与平凡参数相关联的范畴 表示$^1_R(G)$是深度-0范畴（注意 $\mathcal{I}_1$ 是单点集）。

ii) 若 R 是一个 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数，我们构造范畴等价

$$\mathcal{I}_{\phi,I} : \mathrm{Rep}^1_R(G_{\phi,I}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^{\phi,I}_R(G).$$

当 $R \supseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 时，由 *[DL25，定理 1.0.5]* 可知，每个表示$^{\phi\ I}_R(G)$ 是一个块。此外，存在扩张*Bruhat–Tits*厦之嵌入的一个 G-共轭类$i : \mathcal{B}_{\phi,I} \hookrightarrow \mathcal{B}$，这些嵌入把建筑 $\mathcal{B}_{\phi,I}$（$G_{\phi,I}$ 的建筑）嵌入 G 的建筑 $\mathcal{B}$，使得对任意 $x \in \mathcal{B}_{\phi,I}$，以及对稳定子 $(G_{\phi,I})_x$（即 x 在 $G_{\phi,I}$ 中的稳定子）的任意在 $(G_{\phi,I})_{x,0+}$ 上平凡的 R-表示 ρ，我们有

$$\mathcal{I}_{\phi,I}\left(\mathrm{ind}^{G_{\phi,I}}_{(G_{\phi,I})_x}(\rho)\right) \simeq \mathrm{ind}^{G}_{K_{\phi,I,i(x)}}\left(\kappa_{\phi,I,i(x)} \otimes_R \rho\right).$$

这里ind 表示紧诱导，$K_{\phi,I,i(x)}$ 是 $G_{i(x)}$ 的一个显式开子群，它满射到$(G_{\phi,I})_x/(G_{\phi,I})_{x,0+}$，而$\kappa_{\phi,I,i(x)}$是一个显式表示，称为扭曲*Heisenberg–Weil*表示，定义见*3.6*。

iii) 如果 p不整除$\mathbf{G}$的绝对 *Weyl* 群的阶，则

$$\mathrm{Rep}_R(G) = \prod_{\phi \in \Phi(P_F, \mathbf{G})} \mathrm{Rep}^{\phi}_R(G).$$

iv) 设$\mathbf{P}$ 是$\mathbf{G}$ 的一个抛物 F-子群，其 *Levi* 子群为$\mathbf{M}$，并记 i_P 为相应的抛物诱导函子，r_P 为相应的 *Jacquet* 函子。

(a) 如果 ϕ是 $\phi_M \in \Phi(P_F, \mathbf{M})$在自然映射 $\Phi(P_F, \mathbf{M}) \longrightarrow \Phi(P_F, \mathbf{G})$下的像，而 I 是 $I_M \in \mathcal{I}_{\phi_M}$ 在自然映射 $\mathcal{I}_{\phi_M} \longrightarrow \mathcal{I}_\phi$下的像，则有

$$i_P\left(\mathrm{Rep}^{\phi_M, I_M}_R(M)\right) \subseteq \mathrm{Rep}^{\phi,I}_R(G).$$

(b) 假设 p 不整除 $\mathbf{G}$ 的绝对 *Weyl* 群的阶，则有

$$r_P(\mathrm{Rep}^{\phi,I}_R(G)) \subseteq \prod_{(\phi_M, I_M) \mapsto (\phi, I)} \mathrm{Rep}^{\phi_M, I_M}_R(M).$$

(c) 进一步假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi) \subseteq \hat{\mathbf{M}}$，则 i_P 诱导出范畴等价

$$\mathrm{Rep}_R^{\phi_M, I_M}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_R^{\phi, I}(G)$$

其拟逆为 r_P 与投影到 (ϕ_M, I_M)-因子的复合。

下面说明这些假设、构造，以及在文中何处可以找到相关证明。

• 我们回顾一下，$\mathbf{G}$ 的一个挠素数，是指对$\mathbf{G}$的根系而言为坏素数，或者整除 $\pi_1(\mathbf{G}_{\mathrm{der}})$ 阶数的素数。关于我们在结果中对素数 p 施加的各种假设所产生的影响，参见第 2.2.9 节。我们还指出，假设$\mathbf{G}$ 温和分歧，实际上可由存在一个中心化子为 Levi 子群的 ϕ 推出。

• 下面概述 $\mathrm{Rep}_R^{\phi, I}(G)$ 的构造，该构造在第 2 节中完成。满子范畴 $\mathrm{Rep}_R^{\phi, I}(G)$ 由幂等元系 $(e_{\phi,I,x})_{x\in\mathcal{B}}$ 定义：令 $\mathrm{Rep}_R^{\phi, I}(G)$ 的对象为 $\left\{V \in \mathrm{Rep}_R(G) \mid V = \sum_{x\in\mathcal{B}} e_{\phi,I,x} V\right\}$。对于 $x \in \mathcal{B}$，每个幂等元$e_{\phi,I,x}$ 都是幂等元 $e_{\phi,\iota,x}$ 之和；这些幂等元与嵌入 $\iota \in I$ 相关，并满足 x 属于 $\mathbf{G}$ 的建筑 $\mathcal{B}_\iota \subset \mathcal{B}$。进而，$e_{\phi,\iota,x}$ 是沿某个特征 $\check{\phi}_{\iota,x}^{+}$ 取平均所得的平均幂等元，该特征定义在$G_{x,0+}$的某个开 pro-p子群上。该特征由 Yu 的构造得到 [Yu01]，其输入为 $\mathbf{G}$ 的扭曲 Levi 子群的一列特征。在此情形下，这列扭曲 Levi 子群中最小的一个是 $\mathbf{G}_\iota$，而所需特征的乘积 $\check{\varphi}: G_\iota \longrightarrow \mu_{p^\infty} \longrightarrow R^\times$，限制到$G_\iota$ 后，是通过对一个 1-余循环 $\varphi: W_F \longrightarrow \hat{Z}(\mathbf{G}_\iota) = \hat{Z}(\mathbf{G}_\phi)$ 应用 Borel–Langlands 互反律得到的。该 1- 余循环具有 p- 幂阶，并延拓了 ϕ（其存在性在引理 2.2.5 中得到证明）。中间的扭曲 Levi 子群及其特征（以及特征的乘积）则以类似方式得到：按照 Kaletha 在 [Kal19] 中采用的策略，将 ϕ替换为其在 P_F的适当高阶分歧子群上的限制即可。第 2.3 节对此作了说明。Yu 的构造在第 2.4 节中回顾。得益于 Yu 的特征具有很强的交织性质（第 2.5 节），对于两个 ι, ι'，幂等元$e_{\phi,\iota,x}$ 与 $e_{\phi,\iota',x}$ 对 $x \in \mathcal{B}_\iota \cap \mathcal{B}_{\iota'}$而言要么相等，要么正交。将所有互不相等的这类幂等元相加，我们便得到任意 $x \in \mathcal{B}$所对应的所需幂等元 $e_{\phi,I,x}$（它可以为零）。第 2.6 节研究了当 x 变化时它们的行为；第 2.7 节则将这些结果用于证明 $\mathrm{Rep}_R^{\phi, I}(G)$ 确实是一个 Serre 子范畴（定理 2.7.1）。

• 表示$\mathrm{Rep}_R^{\phi, I}(G)$ 的主要性质已在第2.8节中证明。与抛物诱导的相容性，即 iv)，是定理 2.8.7；iii) 的分解则是定理 2.8.4。

• 第 3 节讨论范畴等价的构造，即 ii) 中范畴等价的构造。具体策略如下。在第3.2节中，我们说明范畴 $\mathrm{Rep}_R^{\phi, I}(G)$ 和 $\mathrm{Rep}_R^{1}(G_{\phi,I})$ 分别与 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}_{\phi,I}$ 的 Bruhat–Tits 建筑上的某些等变系数系统范畴等价。然后在第 3.3 节中，我们引入 $\mathbf{G}_{\phi,I}$ 的 Bruhat–Tits 建筑上的“海森堡–韦伊”系数系统这一概念，并陈述一个存在性主张，即定理 3.3.7。这些构造将作为连接两个建筑上的系数系统的桥梁，很像双模被用来产生 Morita等价。关于这一类比的更多细节，请参阅 [Dat18] 的附录，

即 Morita等价。在本文中，我们的方法将更类似于层论中熟悉的“带核的拉回–推进”函子，具体解释见 3.4.1。通过第 3.4 节并借助定理 3.3.7，我们构造了这些“Morita 型”或“拉回–推进”等价。该定理的证明，即海森堡–韦伊系数系统的构造，在第 3.7 节中给出；此前我们在第 3.5 节对海森堡表示进行了预备性研究，并在第 3.6 节研究了韦伊表示，在那里我们将经典及较新的结果从 coefficients $\mathbb{C}$ 推广到我们的系数环 R，这本身可能也具有独立的研究价值。

现在我们来谈谈本文与现有关于约化至深度零的文献之间的联系。由于我们的函子 $\mathcal{I}_{\phi,I}$ 是等价，它在一个对象的自同态代数与其像的自同态代数之间诱导出同构。因此，上文 ii) 中对 $\mathcal{I}_{\phi,I}$ 在某些紧诱导表示上的取值所作的明确描述，蕴含了某些赫克代数之间存在同构，其中一些同构是此前深度零约化结果的关键。

- 在 $R=\mathbb{C}$ 的情形下（或更一般地，当 R 是代数闭域时），我们在 4.1.2 中重新得到一个同构的存在性：它连接 Kim和Yu 构造的类型所附带的赫克代数与其“扭曲深度零分支”的赫克代数。该结果最初由 [AFMO24b] 证明。请注意，我们并未明确比较这两种构造。特别是，我们在此并未验证我们的同构是否“保支撑”。

- 在 $R=\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 且 $\overline{G}$ 为 GL_n 的一个内形式的情形下，我们在 4.2.2 中重新得到两个相关 Hecke 代数之间存在同构。这两个代数源自 Bushnell–Kutzko 的类型理论，Chinello 此前已在 [Chi18] 中通过显式计算生成元与关系证明它们同构。我们同样不比较这两个同构。不过请注意，Chinello 的结果不需要任何驯顺性假设。

与局部朗兰兹对应、其几何化及其范畴化之间的联系，以及预期的联系。

- 当 $\mathbf{G}$ 的局部朗兰兹对应 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \longrightarrow \Phi(W_F')$ $\pi \mapsto \varphi_\pi$ 可用时，我们猜想，对于 G 的一个不可约复表示 π，有 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi}_{\mathbb{C}}(G) \Leftrightarrow (\varphi_\pi)|_{P_F} \sim \phi$。按设计，当 π 是一个正则超尖表示，且 φ_π 是 [Kal19] 中定义的参数时，这至少成立。

  进一步假设$\mathbf{G}$ 是准分裂的，并且对$\mathbf{G}$可用扩展局部Langlands对应 $\pi \mapsto (\varphi_\pi, \varepsilon_\pi)$，其中 ε_π 是 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\varphi_\pi)$的有限阶特征标。于是我们猜想，对于基点 $I \in \mathcal{I}_\phi$的一个良好选取，对 G 的任意不可约复表示 π，我们有：

$$\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi,\alpha\cdot I}_{\mathbb{C}}(G) \Leftrightarrow \left[(\varphi_\pi)|_{P_F} \sim \phi \text{ and } (\varepsilon_\pi)|_{Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))^{\varphi_\pi(W_F)}} = \alpha\right],$$

  其中限制是沿着包含 $Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))^{\varphi_\pi(W_F)} \subset C_{\hat{\mathbf{G}}}(\varphi_\pi)$进行的。

- 无需对$\mathbf{G}$或 ϕ作任何假设，即可从 Fargues–Scholze 的动机版本构造一个直因子表示$R^{\phi}_{}(G)$，并得到如 iii) 所示的分解

谱作用 [Sch25]。事实上，这种谱作用的一个推论是存在一个环同态 $\mathrm{FS}_{\mathrm{mot}}$

$$\mathcal{O}(Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}}))^{\hat{\mathbf{G}}} \xleftarrow{\approx} \mathcal{E}\mathrm{xc}(W_F^0,\hat{\mathbf{G}}) \xrightarrow{\mathrm{FS}_{\mathrm{mot}}} \mathfrak{Z}_{\overline{\mathbb{Z}}[\frac{1}{p}]}(G),$$

其中，$Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})$ 是 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上的参数空间，由 [DHKM25] 引入（因此这里 $\hat{\mathbf{G}}$ 表示 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上的对偶群，而 W_F^0 是 W_F 的子群，定义见 [DHKM25, §1.2]），$\mathcal{E}\mathrm{xc}$ 表示“游历代数”，而 $\approx$ 符号表示一种环映射，它在谱上诱导一个泛同胚；$\mathfrak{Z}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$ 表示 $\mathrm{Rep}^{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$ 的中心。根据 [DHKM25]，栈 $Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})/\hat{\mathbf{G}}$ 是所有 $\overline{\phi}\in\Phi(P_F,\mathbf{G})$ 上开闭子栈 $Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})_\phi/C\hat{\mathbf{G}}(\phi)$ 的不交并，其中已选取一个代表 $\phi\colon P_F\longrightarrow{}^L\mathbf{G}$，而 $Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})_\phi$ 是 ϕ 到 W_F^0 的扩张空间。因此，每个 ϕ 都给出 $\mathcal{O}(Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}}))$ $\hat{\mathbf{G}}$ 中的一个幂等元 e_ϕ^{spec}，进而给出 $\mathfrak{Z}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G)$ 中的一个幂等元 e_ϕ^{geom}，于是得到分解 $\mathrm{Rep}_R(G)=\prod_\phi e_\phi^{\mathrm{geom}}\mathrm{Rep}_R(G)$。一般而言，人们对这一分解所知甚少，但我们猜想在适用的情况下，它与我们的分解一致。证明这一点等价于证明，对于 G 的 Levi 子群中所谓的“正则尖点”表示，Fargues–Scholze 半单对应与 Kaletha 在 [Kal19] 中的对应的半化相一致。

• 在我们的语境中，更一般地说，只要 $C\hat{\mathbf{G}}(\phi)$ 连通，概形 $Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})_\phi$ 就连通，因此幂等元 $e^{\mathrm{spec}}\phi$ 是本原的。所以，我们对 $\mathrm{Rep}_R^\phi(G)$ 的分解似乎无法用谱作用来解释。不过，范畴局部 Langlands 对应（下文简称 CLLC）的一种动机形式可以解释这一点。为说明这一点，回顾一下，CLLC 预言，某个变体 $\mathrm{IndCohnilp}(Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})/\hat{\mathbf{G}})$——即 $Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})/\hat{\mathbf{G}}$ 上相干层范畴的一个变体——与某个层范畴 Shv_G 等价；后者定义在 v-栈 Bun_G 上（其对象为 [FS24]），或定义在完美栈 Isoc_G 上（其对象为 [Zhu25]）。在两种情形下，$\mathrm{Rep}(G)$ 都可识别为由支撑在某个分层“$b=1$”上的层构成的子范畴，该分层同构于 G 的分类空间。这两个栈的连通分支都由 $X^*(Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F})$ 标记；由此得到的 Shv_G 分解，在参数一侧对应于这样一种分次：该分次来自 $Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F}$ 在 $Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})$ 上的作用平凡。“$b=1$”分层位于与 $Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F}$ 的平凡特征 1 相对应的连通分支中。再回顾一下，谱作用定义在 Shv_G 上，从而给出一个直和项 $e^{\mathrm{geom}}\phi\,\mathrm{Shv}_G$；因此，CLLC 应限制为 $\mathrm{IndCohnilp}(Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})_\phi/C\hat{\mathbf{G}}(\phi))$ 与 $e^{\mathrm{geom}}\phi\,\mathrm{Shv}_G$ 之间的范畴等价。由于 $Z(C\hat{\mathbf{G}}(\phi))^\varphi(W_F)$ 在 $Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})_\phi$ 上的作用平凡，范畴 $\mathrm{IndCohnilp}(Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})_\phi/C\hat{\mathbf{G}}(\phi))$ 按 $X^*(Z(C\hat{\mathbf{G}}(\phi))^\varphi(W_F))$ 分次。由此可推得 $e^{\mathrm{geom}}\phi\,\mathrm{Shv}_G$ 按 $X^*(Z(C\hat{\mathbf{G}}(\phi))^\varphi(W_F))$ 的指标分裂；这一分裂细化了按 $X^*(Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F})$ 的指标分裂。限制到分层 $b=1$ 时，只有由 X_ϕ 标记的直和项可能有贡献，因此得到 $e^{\mathrm{geom}}\phi\,\mathrm{Rep}(G)$ 按 X_ϕ 指标的分解，正如我们上述结果所示。

• 我们的等价也符合 CLLC 的框架。具体而言，在我们的设定中，存在$\varphi\in Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})_\phi(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$，使得 $\varphi(\overline{W_F})$ 正规化 $C^\cdot\mathbf{G}(\phi)$ 的一个钉扎。与 φ 做乘法随后诱导出一个同构 $Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}}\phi)_1/\hat{\mathbf{G}}_\phi\xrightarrow{\sim}Z^1(W_F^0,\hat{\mathbf{G}})_\phi/C^\cdot\mathbf{G}(\phi)$。应用

对 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{G}^\phi$ 都使用 CLLC，我们将得到一个等价 $e_1^{\mathrm{geom}}\ \mathrm{Shv}_{G_\phi} \xrightarrow{\sim} e_\phi^{\mathrm{geom}}\ \mathrm{Shv}_G$。当然，还需要进一步研究，以确定该等价是否能良好地限制到$b = 1$ 层上，并且对于标准的 t-结构，在那里是 t-正合的。我们的结果表明，事实上确实如此。

• 范畴朗兹对应的一些重要特例最近已由朱欣在 Isoc_G 上证明。这些特例涉及系数为 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-的驯性部分，以及系数为 $\mathbb{F}_\ell$- 的幺正部分。特别地，[Zhu25，定理 5.4] 构造了一个全忠实嵌入 $D\mathrm{Rep}^{\mathbb{F}_\ell}(G)^{\text{幺正}} \hookrightarrow \mathrm{IndCoh}(Z^1(W_F^0, \hat{\mathbf{G}}_{\mathbb{F}_\ell})^{\text{幺正}}/\hat{\mathbf{G}}_{\mathbb{F}_\ell})$，其中 $\mathbf{G}$ 为非分歧群；这里 $\mathbf{G}_{\mathbb{F}_\ell}$ 表示定义在 $\mathbb{F}_\ell$ 上的朗兹对偶群，$D\mathrm{Rep}^{\mathbb{F}_\ell}(G)$ 表示 $\mathrm{Rep}^{\mathbb{F}_\ell}(G)$ 的导出 (∞)-范畴；下标 unip 在左侧表示幺正直和项，在右侧则表示幺正连通分支（即包含平凡参数的那个分支）。

在 $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ 的情形下，可以将我们在此得到的“约化至深度 0”结果与 [Dat18] 的“约化至幺正部分”结果结合起来。回顾一下，在此情形中，Vign´eras 将 $\mathrm{Rep}^{\mathbb{F}_\ell}(G)$ 分解为 [Vig98]，中由半单表示 $W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)$ 按惯性等价分类的块的乘积；而根据 [DHKM25，推论 4.21]，同一个指标集也刻画了 $Z^1(W_F^0, \hat{\mathbf{G}}_{\mathbb{F}_\ell})$ 的连通分支。

推论。— 设 $G = GL_n$，且 p 和 ℓ 均大于 n。那么存在一个全忠实嵌入 $DRep^{\mathbb{F}_l}(G) \hookrightarrow IndCoh(Z^1(W_F^0, \hat{G}_{\mathbb{F}_\ell})/\hat{G}_{\mathbb{F}_\ell})$，它将每个半单表示$W_F \longrightarrow GL_n(\mathbb{F}_\ell)$的惯性类 $[\varphi]$ 所对应的 $DRep^{\mathbb{F}_l}(G)_{[\varphi]}$映入 $IndCoh(Z^1(W_F^0, \hat{G}_{\mathbb{F}_\ell})_{[\varphi]}/\hat{G}_{\mathbb{F}_\ell})$。

实际上，我们构造了整个一类如该推论所述的嵌入，但并未明确指定“正确”的那个，也就是与 Vigneras 对应相容的那个。关于这个问题的讨论，请参阅 4.3.3。找出正确嵌入所需的要素包括：我们的等价与抛物诱导的相容性，以及与 Whittaker/Gelfand–Graev 表示的相容性。我们计划在未来的工作中探讨这些问题。

1.1 记号

• F 表示一个非阿基米德局部域，其剩余域的特征记为p。我们固定 F 的一个可分闭包 F，并将 F/F的伽罗瓦群记为 Γ_F。在Γ_F中有通常的子群 $W_F \supset I_F \supset P_F$，它们分别是 Weil 群、其惯性子群和野惯性子群。

• 粗体字母$\mathbf{G}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{T}$等表示 F上的代数群，除非另有说明；我们用相应的普通字母表示其 F-有理点群，例如$G = \mathbf{G}(F)$。

• 对于域上的连通约化群$\mathbf{G}$，我们用$\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ 表示$\mathbf{G}$的伴随商群，用$\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}$ 表示$\mathbf{G}$的导出子群的单连通覆盖。

• R 表示所用的交换系数环。我们始终假设$p \in R^\times$，并且通常还假设 R是一个$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}, \mu_{p^\infty}]$-代数。

- 对于局部 pro-p 群 H,

  – Rep$_R(H)$ 表示 H 的光滑 R表示范畴。– $R[H]$表示 H 的群代数。– RH 表示 H 上取值于 R 的紧支撑 R 分布构成的代数。它包含由狄拉克分布张成的 $R[H]$，以及任意闭的 pro-p 子群 $K \subseteq H$ 所对应的平均幂等元 e_K。$R[H]$ 在 $V \in$ Rep$_R(H)$ 上的作用以典范方式延拓到 RH，从而将 Rep$_R(H)$ 等同于光滑 RH-模范畴。– $\mathcal{H}_R(H)$ 表示 RH 中由局部常值分布构成的 R子代数。这个非幺环包含所有开 pro-p 子群 $K \subseteq H$ 对应的平均幂等元 e_K。将 RH 的作用限制后，Rep$_R(H)$ 等同于非退化 $\mathcal{H}_R(H)$-模范畴。

- 对于 F 上的连通约化群 $\mathbf{G}$，

  – $\hat{}\mathbf{G}$ 表示 $\mathbf{G}$ 的复[2] 对偶约化群，它带有一个钉扎 $(\hat{}\mathbf{B}, \hat{}\mathbf{T}, \hat{}X)$ 以及一个保持钉扎的 Γ_F 作用。我们用 ${}^L\mathbf{G} := \mathbf{G} \rtimes W_F$ 表示朗兹对偶群的韦伊形式。– ϕ 表示 $\mathbf{G}$ 的一个野惯性参数，即一个连续的 L同态 $P_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$，它可以扩张为一个相关朗兹参数 $\varphi : W'_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$，其中 W'_F 表示 F 的韦伊–德利涅群的任意形式。$\hat{}$– $\Phi(P_F, \mathbf{G})$ 表示 $\mathbf{G}$ 的野惯性参数在 $\mathbf{G}$-共轭下的共轭类集合。

致谢

作者感谢法兰西公学院和波恩的豪斯多夫数学研究所给予的款待，并为第二作者赴巴黎访问、讲授佩科课程期间的停留，以及第一作者在豪斯多夫季度项目“朗兹纲领的算术”期间在波恩的停留提供支持。第二作者还感谢 Ana Caraiani 就本文相关问题所进行的讨论。

2 从参数到子范畴

在全文中，$\mathbf{G}$ 表示定义在 F 上的连通约化群。

2.1 Levi 中心嵌入与对偶性

$\hat{}$ 由对偶群$\mathbf{G}$ 的构造可知，$\mathbf{G}(F)$-共轭类与极大 F-环面嵌入$\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$之间存在双射，而 $\mathbf{G}$-共轭类与极大环面嵌入 $\hat{}\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$之间也存在双射。我们希望将此结果推广到作为 Levi 子群连通中心的环面嵌入。

[2]出于多种考虑，包括与局部朗兰兹对应的几何化和范畴化之间的关系，更自然的做法是考虑系数环 R 上的对偶群。不过，本文采用复数情形已足够，也能避免额外的技术困难。

2.1.1 引理。— 设$\mathbf{S}$是一个包含于$\mathbf{G}_F$中的 F-环面。以下条件等价

i) $\mathbf{S}$ 是$\mathbf{G}_F$的某个 *Levi* 子群的连通中心，

ii) $\mathbf{S} = C_{\mathbf{G}_{\overline{F}}}(C_{\mathbf{G}_{\overline{F}}}(\mathbf{S}))^\circ$,

iii) 存在$\mathbf{G}_F$ 的一个极大 $\overline{F}$-环面$\mathbf{T}$ ，其中包含$\mathbf{S}$ ，以及相对于$\mathbf{T}$ 的$\mathbf{G}_F$的根系中的一个 *Levi*子根系 $\Sigma' \subseteq \Sigma(\mathbf{T}, \mathbf{G}_F)$，使得$\mathbf{S} \equiv \left(\bigcap_{\alpha\in\Phi'} \ker(\alpha)\right)^\circ$。

证明。 这是标准结果，参见例如 [Bor91, 14.18]。 □

2.1.2 定义。– $\mathbf{G}_F$中的一个*Levi*中心嵌入 是一个对 $(\mathbf{S}, \iota)$，其中$\mathbf{S}$是一个 F-环面，且$\iota : \mathbf{G}_F$是一个嵌入，满足 $\iota(\mathbf{S})$ 具有引理 2.1.1 的性质。

2.1.3 对偶性。— 设$\mathbf{S}$ 是一个复代数环面。代数群$\mathbf{G}$ 通过共轭作用于 Levi-center-embeddings $\hat{\iota} : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$。我们的目标是为这类嵌入的一个共轭类 $\{\hat{\iota}\}$ ，赋予F-代数群$\mathbf{G}_F$中 Levi 中心嵌入的一个“对偶”共轭类 $\{\iota\}$。

稳定自身上的$\hat{\mathbf{G}}$-共轭作用给诱导代数群的子群 $\mathbf{S}$ 的中心化子 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{\iota}(\mathbf{S}))$，它是 $\mathbf{G}$ 的一个 Levi 子群。其余中心 $\mathbf{G}_{\hat{\iota},\mathrm{ab}}$ 是一个环面，它仅取决于 $\hat{\iota}$ 的共轭类 $\{\hat{\iota}\}$；具体而言，对于 $\hat{\iota}' \in \{\hat{\iota}\}$ ，存在一个同构 $\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota},\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_{\hat{\iota}',\mathrm{ab}}$，该同构由任意将 $\hat{\iota}$ 共轭到 $\hat{\iota}'$ 的 $\hat{g} \in \mathbf{G}$ 所诱导的共轭给出。我们将这个公共环面记为 $\mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}} := \lim_{\hat{\iota}'\in\{\hat{\iota}\}} \mathbf{G}_{\hat{\iota}',\mathrm{ab}}$。由于 $\hat{\iota}(\mathbf{S})$ 是 $\mathbf{G}_{\hat{\iota}}$ 的连通中心，嵌入 $\hat{\iota}$ 诱导出一个同种 $\mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{G}_{\hat{\iota},\mathrm{ab}}$ ，它通过同构 $\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota},\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota}',\mathrm{ab}}$，与相应的同种 $\hat{\mathbf{S}} \longrightarrow \hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota}',\mathrm{ab}}$ 相容，其中 $\hat{\iota}' \in \{\hat{\iota}\}$ 任取。因此，这定义了一个仅取决于 $\{\hat{\iota}\}$ 的同种 $\mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}}$ 。具体而言，有限核 $\hat{H}_{\{\hat{\iota}\}} := \ker(\mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{G}_{\hat{\iota},\mathrm{ab}})$ 与 $\hat{\iota}$ 在 $\{\hat{\iota}\}$ 中的取值无关，并且有 $\mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}} = \mathbf{S}/H_{\{\hat{\iota}\}}$。

现在让我们在 $\hat{\mathbf{T}}$ 中选取一个极大环面 $\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota}}$。同种 $\hat{\mathbf{S}} \longrightarrow \hat{\mathbf{S}}_{\{\hat{\iota}\}}$ 分解为 $\hat{\mathbf{S}} \xrightarrow{\hat{\iota}} \hat{\mathbf{T}} \xrightarrow{\hat{\pi}} \hat{\mathbf{S}}_{\{\hat{\iota}\}}$ ，并将

$$\hat{\iota} : \hat{\mathbf{S}} \xrightarrow{\sim} \left(\bigcap_{\alpha\in\Sigma_{\hat{\iota}}} \ker(\alpha)\right)^\circ \subset \hat{\mathbf{T}} \text{ and } \hat{\pi} : \hat{\mathbf{T}}/\left(\sum_{\alpha\in\Sigma_{\hat{\iota}}} \mathrm{im}(\alpha^\vee)\right) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbf{S}}_{\{\hat{\iota}\}},$$

，其中 $\Sigma_{\hat{\iota}}$ 是根系 $\Sigma(\mathbf{T}, \mathbf{G}_{\hat{\iota}})$。因此，环面在 F 上的对偶同源 $\mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}} \longrightarrow \mathbf{S}$ 经由对偶 F-环面 $\mathbf{T}$ 分解，该环面对应于 $\mathbf{T}$ ，从而给出同构

$$\pi : \mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}} \xrightarrow{\sim} \left(\bigcap_{\alpha\in\Sigma_{\hat{\iota}}} \ker(\alpha^\vee)\right)^\circ \subset \mathbf{T} \text{ and } \hat{\iota} : \mathbf{T}/\left(\sum_{\alpha\in\Sigma_{\hat{\iota}}} \mathrm{im}(\alpha)\right) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S},$$

其中 $\alpha^\vee$分别被视为$\mathbf{T}$的特征和余特征。现在回想一下，嵌入 $\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 给出了一个典范的 $\mathbf{G}(F)$-嵌入共轭类$\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{G}_F$。选择这样一个“对偶嵌入” j。根据构造，它将 $\Sigma(\mathbf{T}, \mathbf{G})$ 与 $\Sigma(\mathbf{T}, \mathbf{G}_F)^\vee$ 等同起来。特别地，由引理 2.1.1 的 iii) 可知，复合 $\iota : \mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{G}_F$ 是一个 Levi 中心嵌入；根据构造，Levi 子群$\mathbf{G}_\iota = C_{\mathbf{G}_F}(\iota(\mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}}))$与$\mathbf{G}_{\hat{\iota}}$对偶。

ˆ引理。——$\mathbf{G}(\overline{F})$-共轭类 $\{\iota\}$ *of* ι 仅取决于 $\mathbf{G}$-共轭类 $\{\hat{\iota}\}$。

ˆˆ证明。 设$\hat{\iota}'$ 与$\hat{\iota}$共轭，设$\mathbf{T}'$ 是$\mathbf{G}_{\hat{\iota}'}$ 中的一个极大环面，并设 $j' : \mathbf{T}' \hookrightarrow \mathbf{G}_F$ 是一个对偶嵌入的选取。由于$\mathbf{G}_{\hat{\iota}}$ 的所有极大环面都共轭，存在一个元素 ˆˆˆ$g \in \mathbf{G}$ ，它将$\hat{\iota}$ 共轭到$\hat{\iota}'$ ，并将 $\mathbf{T}$ 映到$\mathbf{T}'$。于是得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{S}} & \xrightarrow{\hat{\iota}} & \hat{\mathbf{T}} \\ {\scriptstyle \hat{\iota}'}\downarrow & \overset{\mathrm{Ad}_{\hat{\mathbf{g}}}}{\swarrow}\sim & \downarrow{\scriptstyle \hat{\pi}} \\ \hat{\mathbf{T}}' & \xrightarrow[\hat{\pi}']{} & \hat{\mathbf{S}}_{\{\hat{\iota}\}} \end{array} .$$

ˆˆ 因此，在对偶侧我们得到 $\pi = \mathrm{Ad}_{\hat{g}} \circ \pi'$，其中 $\mathrm{Ad}_{\hat{g}}$ 是 $\mathrm{Ad}_{\hat{g}}$ 的对偶同构 $\mathbf{T}' \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}$ˆ。另一方面， $j \circ \mathrm{Ad}_{\hat{g}}$ 是从 $\mathbf{T}'$ 到 $\mathbf{G}_F$的一个对偶嵌入，因此存在 ˆ$g \in \mathbf{G}(F)$，使得 Ad $_g \circ j' = \overline{j} \circ \mathrm{Ad}_{\hat{g}}$。由此可知， g 将嵌入 $\iota' = j' \circ \pi'$共轭到嵌入 $\iota = j \circ \pi$。

□

我们将 $\{\iota\}$ 称为与 $\{\hat{\iota}\}$ 对偶的 $\mathbf{G}(F)$-共轭类 Levi中心嵌入。尽管本文不会用到这一点，但请注意，我们也可以反向进行这一过程，并得到以下结果。

命题。— 上述构造建立了$\mathbf{G}(F)$-共轭类ˆ ˆ与$\mathbf{G}_F$ 中的 *Levi* 中心嵌入的$\overline{\mathbf{G}}$-共轭类之间的双射。

ˆ2.1.4 有理性。— 现在假设复环面$\mathbf{S}$ 带有 W_F 的有限作用，因而对应于环面$\mathbf{S}$上的 F-有理结构。于是 W_F按公式 $\gamma\hat{\iota} := \gamma_{\hat{\mathbf{G}}} \circ \hat{\iota} \circ \gamma^{-1}{}_{\hat{\mathbf{S}}}$ 作用于 Levi 中心嵌入的集合$\hat{\iota}$: ˆ$\mathbf{S}$ $\longrightarrow$ ˆ $\mathbf{G}$。我们进一步假设共轭类 $\{\hat{\iota}\}$ 是 W_F-稳定的。

ˆˆˆ 在这种情况下，$\mathbf{S}$ 的有限子群 $H_{\{\hat{\iota}\}}$ 是 W_F-稳定的，因此其商环面 $\mathbf{S}^{\{\hat{\iota}\}}$ 也带有 W_F 的有限作用，从而可以在对偶环面 $\mathbf{S}^{\{\hat{\iota}\}}$ 上定义 F- 结构。我们还按如下方式定义一个准分裂 F-群 $\mathbf{G}^{\{\hat{\iota}\}}$。首先注意到， L-群 ${}^L\mathbf{G} = \hat{\mathbf{G}} \rtimes W_F$ 在 ˆ$\mathbf{G}$ 中的 Levi 中心嵌入上有如下作用: $(\hat{g},\gamma)\hat{\iota} := \mathrm{Ad}_{\hat{g}} \circ \gamma\hat{\iota}$; 并且，ˆ$\mathbf{G}$-共轭类 $\{\hat{\iota}\}$ 是 W_F-稳定的，当且仅当稳定子 $({}^L\mathbf{G})_{\hat{\iota}}$ 经投影 ${}^L\mathbf{G}$ $\longrightarrow W_F$ 满射到 W_F。由于我们假设 ˆ$\mathbf{G}$-共轭类 $\{\hat{\iota}\}$ 是 W_F-稳定的，因此得到短正合列 ˆ$\mathbf{G}$ $_{\hat{\iota}} \hookrightarrow ({}^L\mathbf{G})_{\hat{\iota}} \twoheadrightarrow W_F$。由此可知，共轭作用 $({}^L\mathbf{G})_{\hat{\iota}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota}})$ 诱导出一个外作用

$$W_F \longrightarrow \mathrm{Out}(\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota}}) = \mathrm{Aut}(\psi_0(\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota}})),$$

其中， ψ_0 表示与约化群相关联的基点根数据。对于任意共轭的$\hat{\iota}'$， ˆˆ 此外作用与由对任意满足 ˆg 使得$\hat{\iota}' = \mathrm{Ad}_{\hat{g}} \circ \hat{\iota}$的元素进行共轭所诱导的典范同构 $\psi_0(\mathbf{G}_{\hat{\iota}}) \xrightarrow{\sim} \psi_0(\mathbf{G}_{\hat{\iota}'})$ 相容。此外，此外作用是有限的，因为 ˆˆ 它在$\mathbf{G}_{\hat{\iota}}$的连通中心$\mathbf{S}$ 上诱导了给定的作用。因此，存在一个准分裂F-群$\mathbf{G}^{\{\hat{\iota}\}}$，并赋予一个 W_F-等变同构 α: $\psi_0(\mathbf{G}^{\{\hat{\iota}\}}) \xrightarrow{\sim} \psi_0(\hat{\mathbf{G}}_{\hat{\iota}})^\vee$。该对在同构意义下唯一，且其自同构群为$\mathbf{G}_{\{\hat{\iota}\},\mathrm{ad}}(F)$。借助 α，我们得到 F-有理同构

$$\mathbf{G}_{\{\hat{\iota}\},\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S} \quad \text{and} \quad \mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}} \xrightarrow{\sim} Z(\mathbf{G}_{\{\hat{\iota}\}})^\circ.$$

此外，再次借助 α，我们还有一个映射

$$H^1(F, \mathbf{G}_{\{i\}}) \longrightarrow H^1(F, \mathbf{G}),$$

通过“Kottwitz 对偶” [Kot84, 命题 6.4] 定义为包含 $Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F} \subset Z(\hat{\mathbf{G}}_i)^{W_F}$，其中 W_F 对 $Z(\hat{\mathbf{G}}_i)$ 的作用由 $({}^L\mathbf{G})_i$ 的共轭作用诱导。[3]

2.1.5 命题。——假设 G 在 F 上准分裂。那么，*Levi*中心嵌入 $\{S_{\{i\}} \overset{\iota}{\hookrightarrow} G_F\}$（与 $\{i\}$ 对偶）的 $G(F)$-共轭类包含一个 F-有理嵌入 ι，其稳定子 $G_\iota := C_{\mathbf{G}}(\iota(S_{\{i\}}))$ 自然同构于 $G_{\{i\}}$。此外，由包含 $G_\iota \subseteq G$ 诱导的映射 $H^1(F, G_\iota) \longrightarrow H^1(F, G)$ 与上文定义的映射一致。

这里，“自然同构”是指存在一个唯一到内自同构为止的同构；等价地说，相关的带基根数据之间存在一个 W_F-等变同构。

证明。取一个极大环面 $\mathbf{T} \subset \mathbf{G}_i$，以及 $\mathbf{G}_i$ 的一个包含 $\hat{\mathbf{T}}$ 的 Borel 子群。令 $\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{B}}}$ 为 $({}^L\mathbf{G})_i$ 中 Borel 对 $(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}})$ 的正规化子。由于 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 在其 Borel 对的集合上递 transitively 作用，我们可知映射 $\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{B}}} \longrightarrow W_F$ 是满射，并且有 $\hat{\mathbf{T}} \hookrightarrow \mathcal{T}\hat{\mathbf{B}} \twoheadrightarrow W_F$。特别地，$\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{B}}}$ 对 $\hat{\mathbf{T}}$ 的共轭作用可通过 W_F 对 $\mathbf{T}$ 的作用分解。根据构造，此作用保持 $\hat{\mathbf{G}}_i$ 与 Borel 对 $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ 相关联的基点根数据 $\psi_{(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}})} = (X^*(\hat{\mathbf{T}}), \Sigma(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{G}}_i), \Delta(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}}), X_*(\hat{\mathbf{T}}), \Sigma(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{G}}_i)^\vee, \Delta(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}})^\vee)$，而诱导的作用 $W_F \longrightarrow \mathrm{Aut}(\psi_{(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}})})$ 经由典范同构 $\hat{\psi}_{(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}})} = \psi_0(\mathbf{G}_i)$，与命题之前定义的外作用 $\hat{} : W_F \longrightarrow \mathrm{Aut}(\psi_0(\mathbf{G}_i))$ 一致。

特别地，W_F 在 $\mathbf{T}$ 上的作用是有限的，并且诱导出 W_F 在 $\mathbf{S}$ 上给定的作用，因此整个分解 $\hat{\mathbf{S}} \overset{\iota}{\longrightarrow} \hat{\mathbf{T}} \overset{\pi}{\longrightarrow} \hat{\mathbf{S}}_{\{i\}}$ 是 W_F-等变的。因此，赋予对偶 F-环面 $\mathbf{T}$ 与此 W_F-作用相联系的 F-结构后，对偶态射 $\mathbf{S}_{\{i\}} \overset{\pi}{\longrightarrow} \mathbf{T}$ 就定义在 F 上。但由于 $\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{B}}}$ 满射到 W_F，W_F-共轭的嵌入 $\mathbf{T} \subset \mathbf{G}$ 也与其 $\mathbf{G}$-共轭。换言之，这个嵌入的 $\mathbf{G}$-共轭类是 W_F-稳定的。因此，嵌入 $\mathbf{T}_F \hookrightarrow \mathbf{G}_F$ 的对偶 $\mathbf{G}(F)$-共轭类也是伽罗瓦稳定的。由于 $\mathbf{G}$ 是准分裂的，根据 [Rag04]，存在一个定义在 F 上的对偶嵌入 $j : \mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{G}$。于是，复合映射 $\iota = j \circ \pi$ 也定义在 F 上。

现在，稳定子 $\mathbf{G}_\iota = C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\{i\}}))$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 F-子群，其中 $j(\mathbf{T})$ 是一个极大 F-环面。根据构造，W_F 在 $\mathbf{T}$ 上的作用保持根系 $\Sigma(\mathbf{T}, \mathbf{G}_i)$ 的基 $\Delta(\mathbf{T}, \mathbf{B})$，因此 W_F 在 $\mathbf{T}_F$ 上的作用保持绝对根系 $\Sigma(j(\mathbf{T}), \mathbf{G}_\iota)$ 的一个基，由此确定了 $\mathbf{G}_\iota$ 的一个定义在 F 上且包含 $j(\mathbf{T})$ 的 Borel 子群 $\mathbf{B}$。于是，$\mathbf{G}_\iota$ 的相关基点根数据 $\psi_{(j(\mathbf{T}), \mathbf{B})}$ 与 $\psi_{(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{B}})}$ W_F-等变对偶，这便给出了一个 W_F-等变同构 $\psi_0(\mathbf{G}_\iota) \xrightarrow{\sim} \psi_0(\hat{\mathbf{G}}_i)$，从而得到一整个模去内自同构的 F-有理同构类 $\mathbf{G}_\iota \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_{\{i\}}$。

仍需检查，由包含 $\mathbf{G}_\iota \subseteq \mathbf{G}$ 所诱导的映射 $H^1(F, \mathbf{G}_\iota) \longrightarrow H^1(F, \mathbf{G})$ 与命题前通过任意此类同构定义的映射 $H^1(F, \mathbf{G}_{\{i\}}) \longrightarrow H^1(F, \mathbf{G})$ 一致。我们有 Kottwitz 同构 $\xi_{\mathbf{G}} : H^1(F, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F})^*$ 和 $\xi_{\mathbf{G}_\iota}$：

[3] 我们也可以用 $Z({}^L\mathbf{G})$ 表示 $Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F}$，用 $Z(({}^L\mathbf{G})_i)$ 表示 $Z(\hat{\mathbf{G}}_i)^{W_F}$，因为 W_F 的中心是平凡的。

$H^1(F,\mathbf{G}_\iota) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}_\iota})^{W_F})^*$ 以及一个典范的 W_F-等变同构 $Z(\widehat{\mathbf{G}_\iota}) = Z(\hat{\mathbf{G}}_i)$，因此，问题在于 Kottwitz 同构与一侧的包含映射 $\hat{}\,\hat{}\,\mathbf{G}_\iota \subseteq \mathbf{G}$ 以及另一侧的 $Z(\mathbf{G}) \subseteq Z(\mathbf{G}_i)$ 的相容性。这种相容性可由 Kottwitz 在 [Kot84, 命题 6.4] 中的论证直接得到。事实上，先假设 $\mathbf{G}_{\mathrm{der}}$ 是单连通的，因此$\mathbf{G}_{\iota,\mathrm{der}}$ 也单连通。于是 $\xi_{\mathbf{G}}$ 和 $\xi_{\mathbf{G}_\iota}$ 可分解如下

$$\begin{array}{ccccc} \xi_{\mathbf{G}_\iota}: & H^1(F,\mathbf{G}_\iota) & \xrightarrow{\sim} & H^1(F,\mathbf{G}_{\iota,\mathrm{ab}}) & \xrightarrow{\sim} \pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}_\iota})^{W_F})^* \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \xi_{\mathbf{G}}: & H^1(F,\mathbf{G}) & \xrightarrow{\sim} & H^1(F,\mathbf{G}_{\mathrm{ab}}) & \xrightarrow{\sim} \pi_0(Z(\hat{\mathbf{G}})^{W_F})^* \end{array}$$

其中第一个方块显然是交换的（因为它是将 $H^1(F,\ -)$ 应用于代数 F-群的交换图得到的），第二个方块也交换，因为它可以归结为环面局部对偶，而后者具有函子性。现在，为了处理一般情形，Kottwitz 考虑了一个由各向异性环面 $\mathbf{Z}$ 扩张 $\mathbf{G}$ 所得的中心扩张 $\mathbf{H}$，使得 $\mathbf{H}_{\mathrm{der}}$ 是单连通的。于是，纤维积 $\mathbf{H}_\iota = \mathbf{G}_\iota \times_{\mathbf{H}} \mathbf{G}$ 是由 $\mathbf{Z}_\iota$ 扩张 $\mathbf{G}$所得的中心扩张，其导出子群是单连通的。我们刚刚已经看到，该图

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,\mathbf{H}_\iota) & \xrightarrow[\xi_{\mathbf{H}_\iota}]{\sim} & \pi_0(Z(\widehat{\mathbf{H}_\iota})^{W_F})^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(F,\mathbf{H}) & \xrightarrow[\xi_{\mathbf{H}}]{\sim} & \pi_0(Z(\hat{\mathbf{H}})^{W_F})^* \end{array}$$

是交换的。此外，对于 $H^1(F,\ \mathbf{Z})$ 的作用，该图也是等变的：该作用按通常方式作用于第一列，并通过 $\pi_0(\hat{}\,\mathbf{Z}^{W_F})^*$ 作用于右列。不过，Kottwitz 证明了我们所关注的图（其中使用 $\mathbf{G}$ 而非 $\mathbf{H}$）是通过对该作用取商从这个图得到的。因此，这个图也是交换的。 □

当$\mathbf{G}$ 不是准分裂时，可能不存在 F-有理的 Levi中心嵌入 $\iota:\ \mathbf{S}_{\{i\}} \hookrightarrow \mathbf{G}$，使其与 $\{i\}$ 对偶。若存在这样的 F-有理嵌入 ι，我们就称 $\{i\}$ *relevant to* $\mathbf{G}$ 。我们将其与 [Bor79, 3] 的相关性概念联系起来。为此，考虑$\mathbf{G}$ 中环面 $Z((^L\mathbf{G})_i)^\circ$ 的中心化子 $\mathcal{M}_i$ 。它包含 $(^L\mathbf{G})_i$，因此映 onto W_F；根据 [Bor79，引理 3.5], ，它是$\mathbf{G}$ 的一个 Levi 子群（按*loc. cit* 中的意义）。

2.1.6 命题— 共轭类 $\{i\}$ 与$\mathbf{G}$ 相关，当且仅当 $\mathcal{M}_i$ 按 *[Bor79, 3.4]* 中的意义与$\mathbf{G}$ 相关。此外，在此情形下，任意与 $\{i\}$ 对偶的 F-有理 *Levi*中心嵌入 $\iota\colon \mathbf{S}_{\{i\}} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 的中心化子$\mathbf{G}_\iota$ 都是$\mathbf{G}\{i\}$的内形式。

证明。首先假设 $\{i\}$ 相关，并令 $\iota : \mathbf{S}_{\{i\}} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 为一个 F-有理对偶嵌入。$\hat{}\,\hat{}$ 取 $\mathbf{G}_\iota$ 的一个极大 F-环面 $\mathbf{T}$，以及一个对偶嵌入 $\hat{}\jmath : \mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{G}$，它扩张了 $\hat{\iota}$。其稳定子 $(^L\mathbf{G})_j$ 在 $^L\mathbf{G}$ 中包含于 $(^L\mathbf{G})_i$，因此 $Z((^L\mathbf{G})_j)^\circ$ 包含 $Z((^L\mathbf{G})_i)^\circ$，从而 $^L\mathbf{G}$ 的 Levi 子群 $\mathcal{M}_j := C_L\mathbf{G}(Z((^L\mathbf{G})_j)^\circ)$ 包含于 $\mathcal{M}_i$。由于任何包含相关 Levi 子群的 $^L\mathbf{G}$ 的 Levi 子群都是相关的，只需证明 $\mathcal{M}_j$ 相关。现在注意，根据定义，$(^L\mathbf{G})_j$ 是 W_F 与 $\hat{}\,\mathbf{T}$ 的一个扩张，其中 W_F 的作用

$\hat{}$ 在 $\mathbf{T}$ 上由共轭诱导，且继承自 $\mathbf{T}$ 上的 F-结构。特别地，我们有 $Z((^L\mathbf{G})_{\hat{\jmath}})^\circ = \hat{}\jmath(\hat{}\mathbf{T}^{W_F,\circ})$，并且可见

$$\Sigma(\hat{\mathbf{T}}, \mathcal{M}_{\hat{\jmath}}^\circ) = \left\{\alpha^\vee \in \Sigma(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{G}}), \langle \alpha^\vee, X_*(\hat{\mathbf{T}})^{W_F}\rangle = 0\right\}.$$

我们断言，对于 $\alpha \in \Sigma(\mathbf{T}, \mathbf{G})$，有 $\langle \alpha^\vee, X_*(\hat{}\mathbf{T})^{W_F}\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \alpha, X_*(\mathbf{T})^{W_F}\rangle = 0$。事实上，令 $\hat{}W_{F,\alpha}$ 为 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(X_*(\mathbf{T})_{\mathbb{Q}})$ 中由 W_F 的像和反射 s_α 生成的有限子群。于是 $\langle \alpha^\vee, X_*(\hat{}\mathbf{T})^{W_F}\rangle = 0 \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{Q}}(X_*(\hat{}\mathbf{T})^{W_F}_{\mathbb{Q}}) = \dim_{\mathbb{Q}}(X_*(\hat{}\mathbf{T})^{W_F,\circ}_{\mathbb{Q}})$，根据对偶性，这等价于 $\dim_{\mathbb{Q}}(X_*(\mathbf{T})^{W_F}_{\mathbb{Q}}) = \dim_{\mathbb{Q}}(X_*(\mathbf{T})^{W_F,\circ}_{\mathbb{Q}})$，进而等价于 $\langle \alpha, X_*(\mathbf{T})^{W_F}\rangle = 0$。现在，记 $\mathbf{T}^{\mathrm{split}}$ 为 $\mathbf{T}$ 的最大分裂子环面，可得 $\Sigma(\hat{}\mathbf{T}, \mathcal{M}_{\hat{\jmath}}^\circ) = \{\alpha \in \Sigma(\mathbf{T}, \mathbf{G}) \mid \alpha|_{\mathbf{T}^{\mathrm{split}}} \equiv 1\}^\vee$。由此可知，$\mathcal{M}_{\hat{\jmath}}$ 与 $\mathbf{G}$ 的 F-Levi 子群 $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}^{\mathrm{split}})$ 对偶，因此是相关的。

反过来，现在假设 $\mathcal{M}_{\hat{\imath}}$ 是相关的。将$\hat{\imath}$ 替换为一个共轭元后，我们可以假设 $\mathcal{M}_{\hat{\imath}}$ 是 $^L\mathbf{G}$ 的标准 Levi 子群，特别地，它具有某个 W_F-稳定的$\mathbf{G}$的 Levi 子群$\mathbf{M}_{\hat{\imath}}$ 所对应的形式$\hat{}\mathbf{M}_{\hat{\imath}} \rtimes W_F\hat{}\hat{}\hat{}$。由于 $\mathcal{M}_{\hat{\imath}}$ 与$\mathbf{G}$相关，$\mathbf{M}_{\hat{\imath}} \rtimes W_F$ 是$\mathbf{G}$的某个 F-Levi 子群$\mathbf{M}_{\hat{\imath}}$ 的$\hat{}L$-群。另一方面，$\hat{\imath}$ 经由$\mathbf{M}_{\hat{\imath}}$ 分解，并为该群提供一个Levi中心嵌入。由于$(^L\mathbf{G})_{\hat{\imath}}$ 包含于 $\mathcal{M}_{\hat{\imath}}$中，稳定子$(^L\mathbf{M}_{\hat{\imath}})_{\hat{\imath}} = (^L\mathbf{G})_{\hat{\imath}}$ 满射到 W_F，因此$\hat{}\mathbf{M}_{\hat{\imath}}$中$\hat{\imath}$ 的共轭类是 W_F-稳定的。现在只需证明$\hat{\imath}$ 对于$\mathbf{M}_{\hat{\imath}}$是相关的。等价地，我们可以并且将只考虑 $\mathcal{M}_{\hat{\imath}} = {}^L\mathbf{G}$的情形，即 $Z((^L\mathbf{G})_{\hat{\imath}})^\circ = Z(^L\mathbf{G})^\circ$。

现在我们将进一步化归到 $\mathbf{G}$ 为伴随群的情形。为此，记 $\widehat{\hat{}\hat{}\pi} : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ 为伴随商映射（定义在 F 上），并记 $\hat{}\pi : \mathbf{G}_{\mathrm{ad}} = \mathbf{G}_{\mathrm{sc}} \longrightarrow \mathbf{G}$ 为其对偶的 $\hat{}\widehat{\hat{}\hat{}}$（$W_F$-等变）映射。考虑连通纤维积 $\mathbf{S}_{\mathrm{ad}} := (\mathbf{S} \times_{\hat{}\mathbf{G}} \mathbf{G}_{\mathrm{ad}})^\circ$。这是一个带有有限 W_F-作用的环面 $\hat{}\widehat{\hat{}}$，第二个投影 $\hat{\iota}_{\mathrm{ad}} : \mathbf{S}_{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ 是一个 Levi中心嵌入，其稳定子 $(\widehat{\hat{}\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}})_{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}}$ 是 $\hat{}\pi^{-1}(\hat{}\mathbf{G}_{\hat{\imath}})$ 的原像，即$\hat{\imath}$的稳定子。此外，若按照分解 $\mathbf{G} = Z(\mathbf{G})\hat{}\pi(\mathbf{G}_{\mathrm{sc}})$，将一个元素 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}g \in \mathbf{G}$ 写成 $\hat{}g = \hat{}z\hat{}\pi(h)$ 的形式，则可见 $(\hat{g}\hat{\imath})_{\mathrm{ad}} = \hat{h}(\hat{\iota}_{\mathrm{ad}})$。由此可知，$\{\hat{\iota}\}$ 确定一个 $\widehat{\hat{}\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}}$-共轭类 $\{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\}$。由于 $\hat{}\pi$ 是 W_F-等变的，$\{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\}$ 是 W_F-稳定的，且其稳定子 $(^L\mathbf{G}_{\mathrm{ad}})_{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}}$ 是沿着 $\hat{}\pi \rtimes \mathrm{Id}_{W_F}$ 的 $(^L\mathbf{G})_{\hat{\imath}}\hat{}\hat{}$ 的原像。此外，$\hat{}\pi$ 诱导一个 W_F-等变态射 $\mathbf{S}_{\{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\}} \longrightarrow \mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}}$，其对偶则诱导一个 F-态射 $\mathbf{S}_{\{\hat{\iota}\}} \longrightarrow \mathbf{S}_{\{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\}}$。现在我们断言

$$\{\hat{\iota}\} \textit{ is relevant to } \mathbf{G} \textit{ if and only if } \{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\} \textit{ is relevant to } \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}.$$

事实上，假设存在一个 F-有理 Levi中心嵌入 $\iota_{\mathrm{ad}} : \mathbf{S}_{\{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\}} \hookrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ in $\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$，它与 $\{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\}$ 对偶。于是考虑环面 $\mathbf{S} := (\mathbf{S}_{\{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\}} \times_{\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}} \mathbf{G})^\circ$。第二个投影给出一个 F-有理 Levi 中心嵌入 $\iota : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$，我们需要证明它与 $\{\hat{\iota}\}$ 对偶。这是关于 F的一个问题，我们需要进行 2.1.3 中的对偶过程。因此，取 $\hat{}\mathbf{G}_{\hat{\imath}}$中的一个极大环面 $\hat{}\mathbf{T}$，其在 $\bar{F}$上的对偶为 $\mathbf{T}$。它给出$\widehat{(\mathbf{G}_{\mathrm{ad}})_{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}}}$ 中的一个极大环面 $\widehat{\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}} = \hat{}\pi^{-1}(\hat{}\mathbf{T})$，我们将其在 F 上的对偶记为 $\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$。此外，$\hat{}\pi$ 给出一个对偶态射 $\mathbf{T} \xrightarrow{\pi} \mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$。$\hat{}\hat{}$ 现在取一个嵌入 $j : \mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{G}_F$，它与 $\mathbf{T} \subset \mathbf{G}$ 对偶且经由 $(\mathbf{G}_\iota)_F$分解。于是$\widehat{\hat{}\hat{}}\pi \circ j$ 经由一个嵌入 $j_{\mathrm{ad}} : \mathbf{T}_{\mathrm{ad}} \hookrightarrow (\mathbf{G}_{\mathrm{ad}})_F$ 分解，该嵌入与 $\mathbf{T}_{\mathrm{ad}} \subset \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ 对偶，且经由 $((\mathbf{G}_{\mathrm{ad}})_{\iota_{\mathrm{ad}}})_F$分解。与 2.1.3 中一样，嵌入 ι_{ad} 将 $(\mathbf{S}_{\{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}\}})_F$ 识别为 $\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}$ 中由子根系 $\Sigma_{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}}$ 确定的子环面$\left(\bigcap_{\alpha\in\Sigma_{\hat{\iota}_{\mathrm{ad}}}} \ker(\alpha^\vee)\right)^\circ$，其中该子根系属于 $\Sigma(\widehat{\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}}, \widehat{\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}})$。这个子根$\widehat{\hat{}\hat{}}$ $\widehat{\hat{}\hat{}}$ $\hat{}\hat{}$ 系在典范识别 $\Sigma(\mathbf{T}_{\mathrm{ad}}, \mathbf{G}_{\mathrm{ad}}) = \Sigma(\mathbf{T}, \mathbf{G})$ 下与 $\Sigma_{\hat{\iota}}$ 一致。现在，根据我们对 $\mathbf{S}$ 和 ι 的定义，ι 将 $\mathbf{S}_F$ 识别为 $\mathbf{T}$ 的子环面 $\left(\bigcap_{\alpha\in\Sigma_{\hat{\iota}}} \ker(\alpha^\vee)\right)^\circ$，因此

ι 按要求与 $\{\mathfrak{i}\}$对偶。另一个方向的推论可用类似方法证明，但由于此处用不到，我们省略证明。

因此，我们现在只需证明：若 G 是一个伴随群且 $Z((^L\mathrm{G})_{\mathfrak{i}})^\circ = \{1\}$，则$\{\mathfrak{i}\}$是相关的。由于 G 是伴随群，存在 $\eta \in H^1(\Gamma_F, \mathrm{G})$，使得相应的纯内形式 G^η在 F上准分裂。于是 $\eta^{-1} \in H^1(\Gamma_F, \mathrm{G}^\eta)$，并且我们有 $(\mathrm{G}^\eta)^{\eta^{-1}} = \mathrm{G}$。通过 Kottwitz 对偶，我们可以将 η^{-1} 视为有限群 $Z(^L\mathrm{G})$ 的一个特征。由于$Z((^L\mathrm{G})_{\mathfrak{i}})^\circ = \{1\}$，我们可以将 η^{-1} 扩张为有限群 $Z((^L\mathrm{G})_{\mathfrak{i}})$ 的一个特征，记作 ζ^{-1}。再次运用 Kottwitz 对偶，我们得到一个上同调类 $\zeta^{-1} \in H^1(F, \mathrm{G}^{\{\mathfrak{i}\}})$。现在由命题 2.1.5，存在一个 F-有理的 Levi中心嵌入 $\iota : \mathrm{S}_{\{\mathfrak{i}\}} \hookrightarrow \mathrm{G}^\eta$，以及一个自然的 F-有理同构 $\mathrm{G}^{\eta,\iota} \simeq \mathrm{G}^{\{\mathfrak{i}\}}$。取一个 1-余循环 $\zeta^{-1} : \Gamma_F \longrightarrow \mathrm{G}^{\eta,\iota}$，使其代表上同调类 ζ^{-1}。那么，对于由 ζ^{-1}扭曲的 G^η的 F-结构，ι 仍然是 F-有理的；也就是说，ι 是一个 F-有理的 Levi中心嵌入 $\mathrm{S}_{\{\mathfrak{i}\}} \hookrightarrow (\mathrm{G}^\eta)^{\zeta^{-1}}$。然而，由命题 2.1.5 可知，映射 $H^1(F, \mathrm{G}^{\eta,\iota}) \longrightarrow H^1(F, \mathrm{G}^\eta)$ 是通过 Kottwitz 对偶由包含$Z(^L\mathrm{G}) \subset Z((^L\mathrm{G})_{\mathfrak{i}})$ 所诱导的。因此，我们有 $\zeta^{-1} = \eta^{-1}$ 属于 $H^1(F, \mathrm{G}^\eta)$，从而 $(\mathrm{G}^\eta)_{\zeta^{-1}} \simeq \mathrm{G}$，而 ι 最终给出了所需的嵌入 G 中的 F-有理 Levi中心嵌入。

我们现在转向该命题的第二个断言。我们的论证给出了一个ι，其中心化子为$\mathbf{G}_\iota$，它是$\mathbf{G}^{\{\mathfrak{i}\}}$的一个内形式。这一性质对所有与 $\{\mathfrak{i}\}$ 对偶的F-有理嵌入仍然成立，这一点可由下文引理 2.1.7 之前的讨论得出。 □

既然我们已经研究了 F-有理对偶 Levi 中心嵌入的存在性，我们可以尝试对它们全部进行分类。显然，$\mathbf{G}(F)$通过共轭作用在这些 F-有理嵌入上。因此，我们固定其中之一 ι，并设 ι' 为另一个。然后选取某个 $g \in \mathbf{G}(F)$，使得$\iota' = \mathrm{Ad}_g \circ \iota$。于是对任意 $\gamma \in \Gamma_F$，我们也有 $\iota' = {}^\gamma\iota' = \mathrm{Ad}_{\gamma(g)} \circ {}^\gamma\iota = \mathrm{Ad}^{\gamma(g)} \circ \iota$，从而$g^{-1}\gamma(g) \in \mathbf{G}_\iota(F)$。于是我们看到

- $(\gamma \mapsto g^{-1}\gamma(g)) \in Z^1(F, \mathbf{G}_\iota)$ 及其像 $\eta_{\iota,\,\iota'}$ 在 $H^1(F, \mathbf{G}_\iota)$ 中与 g 的选择无关。

- Ad^g 是一个内扭曲 $(\mathbf{G}_\iota)_F \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G}_{\iota'})_F$，其关联的内上循环为 $\gamma \mapsto g^{-1}\gamma(g)$。

2.1.7 引理。 — 映射 $\iota' \mapsto \eta_{\iota,\,\iota'}$ 在 $\{\iota\}$ 中的 F-有理嵌入的 $\mathbf{G}(F)$-共轭类集合与 $\ker(H^1(F, \mathbf{G}_\iota) \longrightarrow H^1(F, \mathbf{G}))$ 之间诱导出一个双射。

证明。事实上，很容易看出，$\eta_{\iota,\,\iota'}$ 仅取决于 ι' 的 $\mathbf{G}(F)$-共轭类，并且根据构造，它属于上述核。反过来，设 η 属于这个核。那么它可由某个形如 $\gamma \mapsto g^{-1}\gamma(g)$ 的 1-余循环表示，其中 $g \in \mathbf{G}(F)$，因此嵌入$\iota' = \mathrm{Ad}_g \circ \iota$ 是 F-有理的。这个元素 g 并不唯一，但任何其他此类元素都具有形式hgk，其中 $h \in \mathbf{G}(F)$ 且 $k \in \mathbf{G}_\iota(F)$，因而导出一个 $\mathbf{G}(F)$-共轭的有理嵌入。由此我们构造出了逆映射。 □

2.2 参数的 Levi 分解

我们从一个连续的 L-同态 $\phi : P_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ 开始，该同态可扩张到 W_F。

ˆ 2.2.1 群 L^{ϕ}. — 连通中心$Z(C^{\wedge}\mathrm{G}(\phi))^{\circ}$在$C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$中的中心化子 $\mathrm{L}^{\phi}:=C^{\wedge}\mathrm{G}(Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))^{\circ})$是 ˆ G 的一个 Levi 子群，且包含 $C^{\wedge}\mathrm{G}(\phi)$。若 $\varphi\colon W_F\longrightarrow {}^{L}\mathrm{G}$ 可扩张ϕ，则 W_F 在 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 上的共轭作用 Ad_{φ} 保持其连通中心不变，因而也保持 $^{\wedge}\mathrm{L}^{\phi}$不变。由于对于任意其他扩张 φ'，比值 $\varphi^{-1}\varphi'$ 的取值都在 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)\rtimes\{1\}$ 中，外作用 $W_F\xrightarrow{\mathrm{Ad}}\mathrm{Out}(^{\wedge}\mathrm{L}^{\phi})$ 与 φ 的选取无关。根据 [Dat17, 引理 2.1.1]，我们知道该作用是有限的。因此，我们可以将一个赋有 W_F-等变同构 $\psi_0(\mathrm{L}^{\phi})\xrightarrow{\sim}\psi_0(\mathrm{L}^{\phi})^{\vee}$ 的准分裂群记作 L^{ϕ}。注意，$\psi_0(\mathrm{L}^{\phi})$ 只取决于 ϕ 的 G-共轭类：若 ϕ' 与 ϕ 共轭，则任意将 ϕ 共轭到 ϕ' 的 $^{\wedge}g$ 都给出一个典范同构 $\psi_0(\mathrm{L}^{\phi})\xrightarrow{\sim}\psi_0(\mathrm{L}^{\phi'})$。还要注意，包含 $Z(^{\wedge}\mathrm{L}^{\phi})^{W_F}\subset Z(^{\wedge}\mathrm{G})^{W_F}$ 通过 Kottwitz 对偶诱导出一个映射 $H^1(F,\mathrm{L}^{\phi})\longrightarrow H^1(F,\mathrm{G})$。我们令

$$H^1(F,\mathbf{L}_{\phi},\mathbf{G}):=\ker(H^1(F,\mathbf{L}_{\phi})\longrightarrow H^1(F,\mathbf{G})).$$

ˆ2.2.2 群 $\mathcal{L}_{\phi}$ 和 L-群 $\mathbf{L}^{\phi}$。——考虑子群 $\mathcal{L}_{\phi}:=\mathbf{L}_{\phi}\cdot\varphi(W_F)\subset {}^{L}\mathbf{G}$。正如记号所示，它与参数 φ 无关，只要该参数扩张了 ϕ。ˆ 它处于一个分裂正合列中 $\mathbf{L}_{\phi}\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi}\twoheadrightarrow W_F$，我们可以问它是否与${}^{L}\mathbf{L}^{\phi}$同构。为此，固定 $^{\wedge}\mathbf{L}^{\phi}$ 的一个钉扎 ε_{ϕ}，并考虑 $\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_{\phi}}$ 在 ε_{ϕ} 中的稳定子 $\mathcal{L}_{\phi}$。它处于一个正合列中 ˆ $Z(\mathbf{L}^{\phi})\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_{\phi}}\twoheadrightarrow W_F$。

ˆ引理。——扩张 $Z(\mathbf{L}^{\phi})\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_{\phi}}\twoheadrightarrow W_F$ 连续分裂，其分裂的集合 $W_F\longrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_{\phi}}$ 在 $Z^1(W_F,Z(^{\wedge}\mathbf{L}^{\phi}))$ 下是主齐性的。

证明。只需证明分裂的存在性，第二个断言则显然。首先回顾，根据 [Dat17，引理 2.1.1],，所考虑的扩张来自 W_F 的一个有限商。根据 [Lan79], 中的 Langland 引理 4，$H^2_{cts}(\Gamma_F,\ Z(^{\wedge}\mathbf{L}^{\phi})^{\circ})\longrightarrow H^2(W_F,\ Z(^{\wedge}\mathbf{L}^{\phi})^{\circ})$ 的像是 $\{1\}$。于是问题归结为证明该扩张

$$\pi_0(Z(\hat{\mathbf{L}}_{\phi}))\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_{\phi}}/Z(\hat{\mathbf{L}}_{\phi})^{\circ}\twoheadrightarrow W_F$$

分裂。这又可由 [Kal19] 中 Kaletha 引理 5.2.6 的论证推出。为解释这一点，注意该引理中的短正合列是以下短正合列的拉回

$$Z(\hat{\mathbf{L}}_{\phi})\hookrightarrow\mathcal{N}_{{}^{L}\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{L}}_{\phi})_{\varepsilon_{\phi}}\twoheadrightarrow\mathcal{N}_{{}^{L}\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{L}}_{\phi})_{\varepsilon_{\phi}}/Z(\hat{\mathbf{L}}_{\phi}),$$

其中，指标 ε_{ϕ} 表示钉扎的稳定子 ε_{ϕ}。为了更明确地说明后者，我们可以假设钉扎 $\varepsilon_{\phi}=(\mathrm{T},\mathrm{B}^{\phi},\{X_{\hat{\alpha}}\}_{\hat{\alpha}\in\Delta(\hat{\mathbf{T}},{}^{\wedge}\mathrm{B}^{\phi})})$ 是一个 W_F-稳定钉扎 $\varepsilon=(\mathrm{T},\mathrm{B}\,\{X_{\hat{\alpha}}\}_{\hat{\alpha}\in\Delta(\hat{\mathbf{T}},{}^{\wedge}\mathrm{B})})$ 在 G 中的限制（经过适当的共轭，将 $(\phi,\varepsilon_{\phi})$ 变为 $^{\wedge}g\in\mathrm{G}$）。然后，包含 $\mathcal{N}_{{}^{L}\mathrm{G}}(\mathrm{L}^{\phi})_{\varepsilon_{\phi}}\subset\mathcal{N}_{{}^{L}\mathrm{G}}(\mathrm{L}_{\phi},\mathrm{T},\mathrm{B}^{\phi})$ 诱导出一个同构

$$\mathcal{N}_{{}^{L}\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{L}}_{\phi})_{\varepsilon_{\phi}}/Z(\hat{\mathbf{L}}_{\phi})\xrightarrow{\sim}\mathcal{N}_{{}^{L}\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{L}}_{\phi},\hat{\mathbf{T}},\hat{\mathbf{B}}_{\phi})/\hat{\mathbf{T}}=(\Omega(\hat{\mathbf{T}},\hat{\mathbf{G}})\rtimes W_F)_{\Delta(\hat{\mathbf{T}},\hat{\mathbf{B}}_{\phi})}$$

ˆ ˆ ˆ 其中，$\Delta(\mathbf{T},\mathbf{B}^{\phi})$ 表示该特征标集在$\mathbf{T}$中的稳定子。现在，考虑由相对于钉扎 ε 的 Tit 提升给出的集合论截面 $\Omega(^{\wedge}\mathbf{T},{}^{\wedge}\mathbf{G})\rtimes W_F\longrightarrow\mathcal{N}_{{}^{L}\mathbf{G}}(^{\wedge}\mathbf{T})$。根据 [Spr98, 命题 9.3.5],，它限制为一个映射 $(\Omega(^{\wedge}\mathbf{T},{}^{\wedge}\mathbf{G})\rtimes W_F)_{\Delta(^{\wedge}\mathbf{T},{}^{\wedge}\mathbf{B}^{\phi})}\longrightarrow\mathcal{N}_{{}^{L}\mathbf{G}}(^{\wedge}\mathbf{L}^{\phi})_{\varepsilon_{\phi}}$。

后者未必是群的同态，但 Kaletha 在证明 [Kal19, 引理 5.2.6] 中对 Tits 提升的研究表明，复合映射

$$(\Omega(\hat{\mathbf{T}},\hat{\mathbf{G}})\rtimes W_F)_{\Delta(\hat{\mathbf{T}},\hat{\mathbf{B}}_\phi)}\longrightarrow \mathcal{N}_{{}^L\mathbf{G}}(\hat{\mathbf{L}}_\phi)_{\varepsilon_\phi}/Z(\hat{\mathbf{L}}_\phi)^\circ$$

是一个同态。这为本证明中显示的第一个正合列提供了一个分裂，正如所需。

□

设 $\psi: W_F\longrightarrow \mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}$ 是引理中的连续分裂。我们得到扩张的一个同构 $\mathrm{Id}\times\psi$: ${}^L\mathbf{L}_\phi \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_\phi$，其中 L-群是通过使用与 ε_ϕ 相关联的截面 $\mathrm{Out}(\hat{}\mathbf{L}\phi)\hookrightarrow\mathrm{Aut}(\hat{}\mathbf{L}\phi)$ 构造的。于是 $\varphi_L:=(\mathrm{Id}\times\psi)^{-1}\circ\varphi$ 是 $\mathbf{L}\phi$ 的一个朗兰兹参数，其在 P_F 上的限制记为 $\phi_L\in\Phi(P_F,\mathbf{L}\phi)$。因此我们得到 ϕ 的一个分解

$$\phi: P_F\xrightarrow{\phi_L}{}^L\mathbf{L}_\phi\xrightarrow{\xi_\psi}{}^L\mathbf{G}$$

其中 ξ_ψ 是 $\mathrm{Id}\times\psi$ 与包含 $\mathcal{L}_\phi\subset{}^L\mathrm{G}$ 的复合。由此可见，ξ_ψ 诱导出一个同构 $C_{\hat{\mathbf{L}}_\phi}(\phi_L)\xrightarrow{\sim}C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$，因此它属于 Dat17 的框架，即预期 1.3。[2], 该预期预测（至少当 G 准分裂时）存在一个范畴等价$\prod_{\eta\in H^1(F,\mathrm{L}\phi,\mathrm{G})}\mathrm{Rep}^{\phi_L}(L_{\phi,\eta})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Rep}^{\phi}(G)$，其中 $\mathrm{L}_{\phi,\eta}$ 是与η相关联的 $\mathrm{L}\phi$ 的纯内形式。有趣的是，当我们尝试从 $\mathrm{L}\phi$ 转向 G 的扭曲 Levi 子群时，这个集合 $H^1(F,\mathrm{L}\phi,\mathrm{G})$ 及其相关联的 $\hat{}\mathrm{L}\phi$ 的纯内形式也会出现。

2.2.3 *G* 的扭曲 *Levi* 子群$\mathbf{G}$。——除外作用映射外，作用映射$W_F\xrightarrow{\varsigma_{\mathrm{Ad}}}\mathrm{Aut}(Z(\hat{}\mathbf{L}\phi)^\circ)$ 和 $W_F\xrightarrow{\varsigma_{\mathrm{Ad}}}\mathrm{Aut}(\hat{}\mathbf{L}_{\phi,\mathrm{ab}})$ 也都与 φ 的选择无关。此外，$\hat{}\hat{}\hat{}$ φ 的存在告诉我们，嵌入 $Z(\mathbf{L}\phi)^\circ\subset\mathbf{G}$ 的 $\mathbf{G}$-共轭类是 W_F-稳定的。

$\hat{}$记号。– 我们用 $\mathbf{S}\phi$ 表示与复环面 $\mathbf{L}_{\phi,\mathrm{ab}}$ 对偶且带有其 W_F-作用的 F-环面；用 I_ϕ 表示 Levi 中心嵌入 $(\mathbf{S}\phi)_F\hookrightarrow\mathbf{G}_F$ 的 $\mathbf{G}(F)$-共轭类。按照 2.1.3 的意义，它与$Z(\mathbf{L}\phi)^\circ\subseteq\mathbf{G}$ 这一 Levi 中心嵌入对偶。

回顾 1.1，如果 ϕ 存在一个扩张φ': $W_F'\longrightarrow{}^L\mathbf{G}$，且该扩张与 $\mathbf{G}$ 相关，那么我们称 ϕ 是 $\mathbf{G}$ 的野惯性参数。

命题。——采用上述记号:

i) 若 ϕ 是$\mathbf{G}$的野惯性参数，则 I_ϕ 包含一个 F-有理嵌入 ι。此外，以下结论成立:

> ***(a)*** ι 的中心化子 G_ι 是 $L\phi$ 的一个内形式；若 G 是准分裂的，则可选取 ι，使得 G_ι 与 $L\phi$ 同构。***(b)*** 对任意 F-有理的 $\iota'\in I_\phi$，存在 $\eta_{\iota,\iota'}\in H^1(F,G_\iota)$，使得 $G_{\iota'}$ 与纯内形式 $G_{\iota,\eta_{\iota,\iota'}}$ 同构。***(c)*** 映射 $\iota'\mapsto\eta_{\iota,\iota'}$ 在 I_ϕ 中 F-有理嵌入的 G-共轭类集合与集合 $H^1(F,G_\iota,G)$ 之间诱导一个双射。

ii) 假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是连通的，并且存在一个扩张 φ（ϕ 的），它保持 $C_{\hat{}\mathbf{G}}(\phi)$ 的一个钉扎。若 I_ϕ 包含一个 F-有理嵌入 ι，则 ϕ 是 $\mathbf{G}$ 的野惯性参数。

ˆ ˆ证明。 用 $\hat{\iota}$ 表示 Levi中心嵌入 $\hat{\iota}$: $Z(\mathbf{L}^\phi)^\circ \subseteq \mathbf{G}$，并回顾命题2.1.6中的记号 $\mathcal{M}_{\hat{\iota}} = {}^{C_{^L\mathbf{G}}(Z((^L\mathbf{G})_{\hat{\iota}})^\circ)}$。根据 W_F 在 $Z(\hat{}\mathbf{L}^\phi)$ 上的作用的定义，我们有 $(^L\mathbf{G})_{\hat{\iota}} = \mathcal{L}_\phi$，因此 $\mathcal{M}_{\hat{\iota}} = \mathcal{M}_\phi := C_{^L\mathbf{G}}(Z(\mathcal{L}_\phi)^\circ)$。于是命题2.1.6表明， I_ϕ 包含一个 F-有理嵌入当且仅当 *Levi* 子群 $\mathcal{M}_\phi$ （ $^L\mathbf{G}$ 的）与$\mathbf{G}$相关。

i) 固定一个延拓了 ϕ的相关朗兰兹参数 $\varphi' : W_F' \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ 。我们断言$\varphi'(W_F') \subset \mathcal{L}_\phi$。事实上，包含关系 $\varphi'(W_F) \subset \mathcal{L}_\phi$由定义成立，而包含关系$\varphi'(\mathrm{SL}_2) \subset \mathcal{L}_\phi$也成立，因为 $\varphi'(\mathrm{SL}_2)$包含于 $C_{\hat{}\mathbf{G}}(\phi)$中，因此与 $Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))^\circ$ˆ交换，从而包含于$\mathbf{L}^\phi$中。由于 $\mathcal{M}_\phi$ 包含 $\mathcal{L}_\phi$，可知 φ' 经由 $\mathcal{M}_\phi$分解；又因为 φ' 相关， $\mathcal{M}_\phi$ 与$\mathbf{G}$相关。i)和i)(a)的前两项断言现在由命题2.1.6推出，i)的其余断言则由命题2.1.5和引理 2.1.7推出。

ii) 固定 ϕ 的一个扩张 φ： $W_F \longrightarrow {}^L\mathrm{G}$，该扩张将$C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$的一个钉扎正规化，并定义 $\varphi' = \varphi \times \alpha$： $W_F \times \mathrm{SL}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_\phi$，使得 α 在 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ$中的一个主$\mathrm{SL}_2$ 上是同构。于是我们有 $C\hat{}\mathrm{G}(\varphi')^\circ = C_{C_{\hat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ(\alpha)^\circ} = Z(C\hat{}\mathrm{G}(\varphi)^\circ)^\circ$。记 $C\hat{}\mathrm{G}(\varphi)^\circ = (C\hat{}\mathrm{G}(\phi)^\circ)^{\varphi(W_F)}{}_\circ$，由下一个引理可得 $Z(C\hat{}\mathrm{G}(\varphi)^\circ)^\circ = Z(C\hat{}\mathrm{G}(\phi)^\circ)^{\varphi(W_F)}{}_\circ$。由于我们假设 $C\hat{}\mathrm{G}(\phi)^\circ = C\hat{}\mathrm{G}(\phi)$，这意味着$C_{\hat{\mathbf{G}}}(\varphi')^\circ$ 包含于（因而等于） $Z(\mathcal{L}_\phi)^\circ$。因此，对于包含 $\varphi'(W_F)$的 $^L\mathrm{G}$的任意 Levi 子群 $\mathcal{M}$，我们有 $Z(\mathcal{M})^\circ \subseteq Z(\mathcal{L}_\phi)^\circ \subseteq Z(\mathcal{M}_\phi)$，进而得到$\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}_\phi$。根据假设， $\mathcal{M}_\phi$ 相关，因此 $\mathcal{M}$ 相关， φ'也相关。 □

引理。——设$\mathbf{H}$ 是一个复约化群，且 Γ 是作用于$\mathbf{H}$ 并保持$\mathbf{H}$的一个钉扎不变的群。那么 $Z(\mathbf{H}^{\Gamma,\circ})^\circ = Z(\mathbf{H})^{\Gamma,\circ}$。

证明。包含 $Z(\mathrm{H}^{\Gamma,\circ})^\circ \supset Z(\mathrm{H})^{\Gamma,\circ}$显然。要证明反向包含，只需证明 $Z(\mathrm{H}^{\Gamma,\circ}) \subset Z(\mathrm{H})$。注意，任意同种 $\mathrm{H}' \longrightarrow \mathrm{H}$ 都是 Γ-等变的，其中 Γ 在 H' 上的作用，是通过将一个 Γ-稳定的钉扎从 H 提升到 H' 并识别 $\mathrm{Out}(\mathrm{H}) = \mathrm{Out}(\mathrm{H}')$而得到的。在这种情况下，$(\mathrm{H}')^\Gamma$ 的像在 H^Γ 中具有有限指数，因此该引理对 H 成立，当且仅当它对 H'成立。由于环面的情形显然，同种 $\mathrm{H}' = \mathrm{H}_{\mathrm{sc}} \times Z(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{H}$ 使我们可以将问题化归为 H 半单且单连通的情形。此时 Γ 置换 H 的单因子集合，因此我们可以将问题限制在只有一个轨道的情形，再限制到一个单因子及其稳定子的作用。于是可设 H 为单群，并将 Γ 替换为其在 $\mathrm{Out}(\mathrm{H})$中的像，该像或者是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ，或者是 S_3。此时，我们可以逐一检查各种情形得出结论。但也可以援引 [Ste68], 中的 Steinberg 定理 8.1，该定理保证 $\mathrm{H}^\Gamma = \mathrm{H}^{\Gamma,\circ}$是一个约化群，其极大环面为 $\mathrm{T}^\Gamma = \mathrm{T}^{\Gamma,\circ}$，其中 T 是一个 Γ- 稳定钉扎的一部分。特别地， $Z(\mathrm{H}^\Gamma)^\circ \subset \mathrm{T}^\Gamma$。现在，设 $(\mathrm{T}, \mathrm{B}, (X_\alpha)_{\alpha\in\Delta(\mathbf{T},\mathbf{B})})$ 是 H 的一个 Γ-稳定钉扎，其中 X_α是李代数 $\mathfrak{h}$ 中权 α 子空间 H的一个非零元素。那么 $Z(\mathrm{H}^\Gamma)^\circ$ 必定在元素 $\sum_{\gamma\in\Gamma} X_{\gamma\alpha} \in \mathfrak{h}^\Gamma$ 上平凡作用，其中 $\alpha \in \Delta(\mathrm{T}, \mathrm{B})$。这些元素均非零（这里，与 Steinberg 的结果相比，我们需要 Γ 保持钉扎，而不只是保持 (T, B)），因此有 $Z(\mathrm{H}^\Gamma)^\circ \subset \bigcap_{\alpha\in\Delta} \ker(\alpha) = Z(\mathrm{H})$。 □

注记.– 对于任意 F-有理的 $\iota \in I_\phi$，我们可以按照命题 2.1.5 的证明，将群 $X_\phi := X^*(Z(\mathcal{L}_\phi)/Z(^L\mathbf{G}))_{\mathrm{tors}}$识别为 $H^1(F, \mathbf{G}_\iota, \mathbf{G})$。记 $\mathcal{I}_\phi$ 为 $G(F)$-共轭类中 I_ϕ 内 F-有理元素的集合，则上一个命题的 ii) 和 iii) 项赋予 $\mathcal{I}_\phi$ 一个 X_ϕ-扭子结构。

2.2.4 引理。— 假设 $\mathbf{G}$ 是温和分歧的。那么 $\mathbf{L}^{\phi}$ 是温和分歧的，${}^{L}\mathbf{G}$ 的子群 $1\times P_F$ 包含于 $\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_\phi}$ 并且存在一个分裂 $\psi:\ W_F\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_\phi}$，它是温和 的，即 $\psi|_{P_F}=1\times\mathrm{Id}$。

证明。我们可以将 $\phi=\phi\times$Id 写作 $\phi:\ P_F\longrightarrow$G 的一个同态。于是 $C\hat{}$G(ϕ) $=C\hat{}$G(ϕ)，因此 $\phi($ $P_F)\subset$L$^{\phi}$。由于 $1\times P_F$在 G 上作用平凡，$\phi(P_F)$ 在 L$^{\phi}$上的作用是内作用，因此 L$^{\phi}$ 是温和分歧的。此外，由于按构造 $\phi(P_F)\subset\mathcal{L}_{\phi}$，我们得到 $\hat{}1\times P_F\subset\mathcal{L}_{\phi}$；又因为该群在 G 上作用平凡，甚至有 $1\times P_F\subset\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}$。现在，上文考虑的扩张 $\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}$ 是扩张 $Z($L$^{\phi})\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}/(1\times P_F)\twoheadrightarrow W_F/P_F$ 沿投影 $W_F\twoheadrightarrow W_F/P_F$ 的拉回，我们需要证明后一个扩张分裂。根据 DHKM25，引理 3.8], ，对于任意带有 W_F/P_F 有限作用的复环面 S，我们有 $H^2_{cts}(W_F/P_F,\hat{}$S) $=\{1\}$（另一种论证可参考证明 [Kal19，引理 5.2.8]，该论证依赖于 Lan79] 中的 Langlands 引理 4)π_{θ} 另一$_{\phi}$方面，引理 2.2.2 中相同的论证表明，扩张 W_F/P_F $^{L}\qquad\rtimes\ W_F/P_F$ ($Z($ L $))\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}/((1\times P_F)Z($L $)^{\circ})$ 分裂。事实上，只需将 G 替换为其商 G ( )。

□

$\hat{}$**2.2.5** 引理。— 假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是 $\mathbf{G}$ 的 *Levi* 子群。那么 $\mathbf{G}$ 是温和分歧的，$\hat{}$ $\hat{}\hat{}C\hat{}_{\mathbf{G}}(\phi)=\mathbf{L}^{\phi}$，子群 $\phi(P_F)$ 包含于 $\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}$，且 $\phi(P_F)\subset Z(\mathbf{L}^{\phi})$，其中记 $\hat{}\phi=\phi\times$Id。此外，以下性质成立：

i) 存在一个分裂 φ: $W_F\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}$，它扩张了 ϕ。

$\hat{}$ $\hat{}$*ii)* 存在一个 1-余循环 $\hat{}\varphi$: $W_F\longrightarrow Z(\mathbf{L}^{\phi})$，它扩张了 ϕ。

$\hat{}\,\hat{}$ 证明。由 L$^{\phi}$ 的定义，等式 $C\hat{}$G(ϕ) $=$L$^{\phi}$ 显然成立。包含关系 $\phi(P_F)\subset\mathcal{L}_{\phi}\hat{}$ 由构造可知成立；又由于 $\phi(P_F)$ 中心化 L$^{\phi}$，它正规化 ε_ϕ，因此有包含关系 $\hat{}\,\hat{}\phi(P_F)\subset\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}$。事实上，$\phi($ $P_F)$ 中心化 L$^{\phi}$ 的任意极大环面，因此 $\phi(P_F)$ 的一个 G-共轭 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 中心化 G 的一个参考极大环面 T（即 G 的一个 W_F-稳定钉扎 ε 的一部分）。但是 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ Ω(T, G) $\rtimes_{\varepsilon}$ Out(G) $\hookrightarrow$ Aut(T)，其中 Ω(T$^{'}$ G) 表示相对于 $\hat{}$T 的 G 的外尔群，所以 ^{L}G 中 $\hat{}$T 的中心化子是 $\hat{}$T $\times$ ker($W_F\longrightarrow$ Out($\hat{}$G))。由此可得，W_F 在 T 上的作用限制到 P_F 后是平凡的，因此 G 是温和分歧的。现在，由于 $1\times P_F$ 和 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\phi(P_F)$，$\phi(P_F)$ 也中心化 L$^{\phi}$，因此 $\phi(P_F)\subset Z($L$^{\phi})$。

我们断言性质 i) 和 ii) 等价。事实上，由于 $\mathbf{G}$ 是温和分歧的，引理 2.2.4 为我们提供了一个分裂 $\psi:W_F\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_\phi}$，使得 $\psi|_{P_F}=1\times$Id。因此，若 φ 如 i) 项所述，我们可以将其写成 $\varphi=\hat{}\varphi\cdot\psi$ 的形式，而 $\hat{}\varphi$ 如 ii) 项所述。反过来，同一公式表明等价关系 $i)\Leftrightarrow ii)$。

$\hat{}$ 最后证明 i)。由于 $\phi(P_F)\subset\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_\phi}$，扩张 $Z($L$^{\phi})\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_\phi}\twoheadrightarrow W_F$ 是扩张 $Z($L$^{\phi})$ $\hookrightarrow\mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_\phi}/\phi(P_F)\twoheadrightarrow W_F/P_F$的 $\hat{}$ 拉回。因此，存在如 i) 所示的分裂，当且仅当后一个扩张分裂。现在，回想 $\phi=\phi\times\mathrm{Id}_{P_F}$ 和$\psi|_{P_F}=1\times\mathrm{Id}_{P_F}$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} Z(\mathbf{L}^{\phi}) & \hookrightarrow & \mathcal{L}_{\phi,\,\varepsilon_\phi}/\phi(P_F) & \twoheadrightarrow & W_F/P_F \\ \uparrow{\scriptstyle\hat{\phi}} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} & & \| \\ P_F & \hookrightarrow & W_F & \twoheadrightarrow & W_F/P_F \end{array}$$

该图表明，上方一行在 $H^2(W_F/P_F,\ Z(\hat{\mathbf{L}}^\phi))$ 中的类是典范扩张 $\mathcal{E} = [W_F/[P_F,P_F]] \in H^2(W_F/P_F,\ P_F^{\mathrm{ab}})$ 的推前 $\hat{}\,\phi(\mathcal{E})$。但众所周知，后者为零，例如由 [Iwa55] 的主要结果可知（其证明在等特征情形下同样适用）。 □

2.2.6 范畴 $\mathrm{Rep}_R^\phi(G'_\phi)$. — 假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是一个 Levi 子群。按照引言和 [Dat17]，中的记号，我们记 $\mathbf{G}^\phi = \mathbf{L}^\phi$，并将 $\mathbf{G}'_\phi$ 记为 $\mathbf{G}^\phi$ 的一个内形式。于是有 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi) = \mathbf{G}^\phi = \mathbf{G}'_\phi$，而任意一个如引理 2.2.4 中所述的 ψ 的选择，都会给出一个温和分歧嵌入 ${}^L\mathbf{G}_\phi \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$，该嵌入使态射 ϕ 能够通过其分解。

推论。— ϕ 是 $\mathbf{G}'_\phi$ 的一个野惯性参数。

证明。 这由命题 2.2.3 ii) 应用于 $\mathbf{G}'_\phi$ 得出。具体而言，取引理 2.2.5 ii) 中的 $\hat{\varphi}$，定义 φ' 为 $\varphi'_{|W_F} = \hat{\varphi} \rtimes \mathrm{Id}$，并令 $\varphi'_{|\mathrm{SL}_2}$ 为 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{\varphi} \rtimes \mathrm{Id})$ 的一个主 SL_2。于是 φ' 不会通过 $\mathbf{G}^\phi$ 的任何真 Levi L-子群分解。 □

现在固定一个如引理 2.2.5 ii) 中所述的 1-余循环 $\hat{\varphi} : W_F \longrightarrow Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))$。乘以 $\widehat{\hat{\varphi}}$ 诱导出一个双射 $Z^1(W_F,\ \mathbf{G}'_\phi)_1 \xrightarrow{\sim} Z^1(W_F,\ \mathbf{G}'_\phi)^{\hat{\phi}}$，其中下标规定了余循环在 P_F 上的限制。我们在此关注这一双射的表示论对应物。

设 R 是一个交换的 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$-代数。回顾引言中的满子范畴 $\mathrm{Rep}_R^1(G'_\phi)$，它是 $\mathrm{Rep}_R(G'_\phi)$ 的子范畴，由所有深度为零的 R-表示组成，即其对象由 $\mathrm{Rep}_R^1(G'_\phi) = \left\{ V \in \mathrm{Rep}_R(G'_\phi) \;\middle|\; V = \sum_{x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}'_\phi, F)} e_{G'_\phi, x, 0+} V \right\}$ 给出，其中 $\mathcal{B}(\mathbf{G}'_\phi, F)$ 表示 $\mathbf{G}'_\phi$ 的扩展 Bruhat–Tits 建筑，而 $e_{G'_\phi, x, 0+} \in \mathcal{H}_R(G'_\phi)$ 是沿着点 x 处抛物型群的 pro-p-根基 $G'_{\phi,x,0+}$ 的平均幂等元。

Borel 构造在 [Bor79, 10.2] 中将上述选取的 1-余循环 $\hat{\varphi}$ 与一个特征相联系

$$\check{\varphi} : G'_\phi = \mathbf{G}'_\phi(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times.$$

任意其他选取 $\hat{\varphi}'$ 与 $\hat{\varphi}$ 相差一个余循环 $\hat{\delta} \in Z^1(W_F, Z(\hat{\mathbf{G}}^\phi))$，满足 $\hat{\delta}|_{P_F} = 1 \times \mathrm{Id}$。于是，对于特征 $\check{\delta}$ of G'_ϕ，我们有 $\check{\varphi}' = \check{\varphi}\check{\delta}$，且对于所有 $x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}'_\phi, F)$，它在 $G'_{\phi,x,0+}$ 上都是平凡的（见引理 2.4.1）。由此，对于每个 $x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}'_\phi, F)$，限制 $(\check{\varphi})|_{G'_{\phi,x,0+}}$ 与 $\hat{\varphi}$ 的选取无关，因此 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G'_\phi)$ 的子范畴 $\check{\varphi} \otimes \mathrm{Rep}^1_{\mathbb{C}}(G'_\phi)$ 也与该选取无关。现在，鉴于朗兰兹对应与扭曲之间预期的相容性，我们自然地定义 $\mathrm{Rep}^\phi_{\mathbb{C}}(G'_\phi) := \check{\varphi} \otimes \mathrm{Rep}^1_{\mathbb{C}}(G'_\phi)$。对于任意交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$-代数 R，它通过其对象所满足的以下公式定义

$$\mathrm{Rep}^\phi_R(G'_\phi) = \left\{ V \in \mathrm{Rep}_R(G'_\phi), V = \sum_{x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}'_\phi, F)} e^\phi_x V \right\}$$

其中，$e^\phi_x \in RG'_{\phi,x,0+}$ 是与任意 $\check{\varphi}$ 对 $G'_{\phi,x,0+}$ 的限制相关联的幂等元。事实上，结合下一条引理以及 Borel 方法会产生群同态 $H^1(W_F, Z(\hat{\mathbf{G}}^\phi)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{G}'_\phi(F)\ \mathbb{C}^\times$ 这一事实可知，我们可以选取 $\hat{\varphi}$，使得 $\check{\varphi}$ 具有 p-幂阶，特别地，其取值于 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]^\times$。于是我们有 $\mathrm{Rep}^\phi_R(G'_\phi) = \check{\varphi} \otimes \mathrm{Rep}^1_R(G'_\phi)$。

2.2.7 引理。— 设$\mathbf{H}$ 是 F 上的温和分歧约化群。给定任意$\hat{\varphi} \in Z^1(W_F, Z(\hat{\mathbf{H}}))$，可以找到 $\hat{\varphi}' \in Z^1(W_F, Z(\hat{\mathbf{H}}))$，使得$\hat{\varphi}'|_{P_F} = \hat{\varphi}|_{P_F}$，且 $[\hat{\varphi}']$ 在阿贝尔群 $H^1(W_F, Z(\hat{\mathbf{H}}))$中具有 p-幂阶。

证明。我们首先断言，存在一个非分歧 1-余循环 $\hat{\delta} \in Z^1(W_F/I_F,\ Z(\hat{\mathbf{H}})^{I_F})$，使得 $[\hat{\varphi}.\hat{\delta}^{-1}]$ 在 $H^1(W_F,\ Z(\hat{\mathbf{H}}))$ 中具有有限阶。事实上，考虑正合列

$$1 \longrightarrow H^1(W_F/I_F, Z(\hat{\mathbf{H}})^{I_F}) \xrightarrow{i} H^1(W_F, Z(\hat{\mathbf{H}})) \xrightarrow{p} H^1(I_F, Z(\hat{\mathbf{H}}))^{W_F/I_F}.$$

由于 I_F 是前有限的，且对于系数上的离散拓扑，同调是连续的，因此最后的 H^1 是一个挠群。所以存在某个整数 N 以及某个非分歧余循环 $\hat{\ }\ \delta_1$，使得 $[\hat{\varphi}]^N = i[\hat{\delta}_1]$。令 c为分支群 $\pi_0(Z(\hat{\mathbf{H}})^{I_F})$ 的阶。于是，存在 $\hat{\delta}_2 \in Z^1(W_F/I_F, (Z(\hat{\mathbf{H}})^{I_F})^\circ)$，使得 $[\hat{\varphi}]^{Nc} = i[\hat{\delta}_2]$。然而，$Z^1(W_F/I_F, (Z(\hat{\mathbf{H}})^{I_F})^\circ) \simeq (Z(\hat{\mathbf{H}})^{I_F})^\circ$是一个可除群，因此我们可以找到 $\hat{\delta} \in Z^1(W_F/I_F, (Z(\hat{\mathbf{H}})^{I_F})^\circ)$，使得 $[\hat{\varphi}]^{Nc} = i[\hat{\delta}]^{Nc}$，从而证明 $[\hat{\varphi}\hat{\delta}^{-1}]$ 在 $H^1(W_F, Z(\hat{\mathbf{H}}))$ 中具有有限阶。

现在，写出 $[\hat{\varphi}$ 的阶 $\hat{\delta}^{-1}]$ $p^r \cdot M$ M p $M' \in \mathbb{N}$ $MM' \equiv$与互素。选取使得，并令 $\hat{\ }: (\hat{\ }\hat{\ })$。于是，$\hat{\ }$ 在 $(,(\hat{\mathbf{H}}))$ 中的阶为，且 $\hat{\ }(\hat{\ })$。由于 P_F 在 $Z(\hat{\mathbf{H}})$ 上平凡作用，因此有 $Z^1(P_F, Z(\hat{\mathbf{H}})) = H^1(P_F, Z(\hat{\mathbf{H}}))$，故 $\hat{\varphi}|_{P_F}$ 在 $Z^1(P_F, Z(\hat{\mathbf{H}}))$ 中的阶整除 $p^r M$，从而整除 p^r；而同余关系 $MM' \equiv 1[p^r]$ 保证 $(\hat{\varphi}|_{P_F})^{MM'} = \hat{\varphi}|_{P_F}$ 属于 $Z^1(P_F, Z(\hat{\mathbf{H}}))$。 $\square$

2.2.8 *Levi* 中心嵌入与根系。——我们仍假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是一个 Levi 子群。固定一个 F-有理的 Levi 中心嵌入 $\iota : \mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$，它属于命题 2.2.3 的集合 I_ϕ。由第 2.2.6 段可得一类特征 $\check{\varphi} : \mathbf{G}_\iota(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$（模深度 0 特征），与 ϕ 相关联。

设 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{G}$ 的任意一个温和分歧极大 F-环面，且包含 $\iota(\mathbf{S}_\phi)$；设 $E \supseteq F$ 是一个使 $\mathbf{S}$分裂的温和分歧伽罗瓦扩张。于是我们有一个范数映射 $N_{E|F} : \mathbf{S}(E) \to \mathbf{S}(F)$，以及一个包含 $\subseteq \mathbf{G}_\iota(F)$ 的 $\mathbf{S}(F)$。

引理。——对于任意一个与 ϕ 相关联的 $\mathbf{G}_\iota(F)$ 的特征 $\check{\varphi}$，$\mathbf{G}_\iota$ 相对于 $\mathbf{S}$ 的（绝对）根系由下式给出

$$\Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G}_\iota) = \left\{\alpha \in \Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G}),\ \check{\varphi}(N_{E|F}(\alpha^\vee(E_{0+}^\times))) = \{1\}\right\}.$$

证明。包含$\mathbf{S} \subseteq \mathbf{G}_\iota$ 导出一个 W_F-稳定的极大环面嵌入共轭类$\mathbf{S} \hookrightarrow C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$。固定任意一个这样的嵌入，并据此将$\mathbf{S}$与 $C_{\hat{\ }\mathbf{G}}(\phi)$ $\hat{\ }\hat{\ }$中的一个极大环面等同。然后，通过双射 $\alpha \leftrightarrow \alpha^\vee, \Sigma(\mathbf{S},\mathbf{G}) \leftrightarrow \Sigma(\mathbf{S}^{'}\mathbf{G})$，子集 $\hat{}\Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G}_\iota)$ 按照 2.1.3 中的构造对应于 $\Sigma(\mathbf{S}\ C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))$。

$\hat{}$另一方面，$\mathbf{S}$ 包含 $Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))$，因此 $\hat{}\varphi$（如 2.2.5.ii) 和 2.2.6) 中所述）可经由 $\hat{}\mathbf{S}$分解，从而得到一个朗兰兹参数，我们仍将其记为 $\hat{}\varphi \in Z^1(W_F, \hat{}\mathbf{S})$。这是特征 $\check{}\varphi$ 的朗兰兹参数：$\mathbf{S}(F) \hookrightarrow \mathbf{G}_\iota(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$。特征 $\check{}\varphi \circ N_{E|F} :\ \mathbf{S}(E) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ 的朗兰兹参数则为 $\hat{}\varphi|_{W_E}$。相应地，特征 $\check{}\varphi \circ N_{E|F} \circ \alpha^\vee :\ \ E^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ 通过局部类域互反对应于 W_E 的特征 $\hat{}\alpha^\vee \circ \hat{}\varphi$（其中 $\alpha^\vee$ 首先视为 $\mathbf{S}$ 的余特征，随后视为 $\mathbf{S}$ 的特征）。因此，其 $\hat{}$ 对 $E_{0+}^\times$ 的限制为平凡特征，当且仅当 $\alpha^\vee \circ \phi$ 是 $P_E = P_F$ 的平凡特征；$\hat{}$ 这等价于 $\alpha^\vee$ 是中心化子 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 中 $\mathbf{S}$ 的一个根，正如所需。 $\square$

2.2.9 关于 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是 *Levi* 子群这一条件。——从上文的引理 2.2.5 出发，我们的结果一直以假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是 Levi 子群为前提，本文余下部分均沿用这一假设。这里我们讨论这一假设 ^ ^ 的强弱。容易看出，它蕴含 ϕ 可经由 $\mathbf{G}$ 的某个极大环面分解，进而蕴含 ^ $\phi(P_F)$ 是一个阿贝尔群。一般而言，反向蕴含未必成立。^ 因此，Steinberg 在 [Ste75] 中为$\mathbf{G}$ 引入了“挠素数”的概念；这类素数要么对$\mathbf{G}$ 的根系而言是坏素数，要么整除 $\pi_1(\mathbf{G}_{\mathrm{der}})$ 的阶。以下引理可由他的结果推出。

引理。 ^— 设 P 是 $\mathbf{G}$ 的一个有限 p-子群。考虑 P 的以下性质 :

^*(a)* 中心化子 $C_{\mathbf{G}}(P)$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 *Levi* 子群。

^*(b)* 连通中心化子 $C_{\mathbf{G}}(P)^\circ$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 *Levi* 子群。

^*(c)* P 包含于$\mathbf{G}$ 的一个极大环面中。

(d) P 是阿贝尔群。

那么以下结论成立。

i) 我们总有 $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$。

^*ii)* 若 p 对$\mathbf{G}$的根系是好的，则 $(b) \Leftrightarrow (c)$。

^*iii)* 若 p 不是$\mathbf{G}$的挠素数，则 $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$。

^*iv)* 若 p 不整除$\mathbf{G}$的外尔群的阶，则(a) 对所有 P均成立。

请注意，每个蕴含式 $(d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$ 在一般情形下都不成立。

证明。 i) 只有蕴含式 $(b) \Rightarrow (c)$ 不是重言式。因此，设 $C_{\mathbf{G}}(P)^\circ$是$\mathbf{G}$的一个 Levi ^ ^ 子群。它在$\mathbf{G}$ 中的中心化子就是它的中心，而该中心包含于它的所有极大环面中。由于 P中心化了 $C_{\mathbf{G}}(P)^\circ$，故得证。

ii) 假设 p 良好。当 P是循环群时， $C_{\mathbf{G}}(P)^\circ$ 是 Levi 子群这一事实，例如可见于 [AS08, 命题 A.7]。对于包含在极大环面 $\mathbf{T}$ 中的更一般的 P，我们将其分解为循环 p-群的乘积 $P = P_1 \times \cdots \times P_r$。每个 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(P_i)^\circ$ 都是包含$\mathbf{T}$ 的 Levi 子群，因此它们的交集 $\bigcap_i C_{\hat{\mathbf{G}}}(P_i)^\circ$ 也是包含$\mathbf{T}$ 的 Levi 子群。由于 $C_{\mathbf{G}}(P) = \bigcap_i C_{\mathbf{G}}(P_i)$，我们推得 $C_{\mathbf{G}}(P)^\circ = \bigcap_i C_{\mathbf{G}}(P_i)^\circ$ 是 Levi 子群。

iii) 假设 p 良好。我们只需证明 $(c) \Rightarrow (a)$，因此不妨假设 P 是阿贝尔群。当 P 是循环群，因而包含在某个环面中时，根据 ii)，我们已知 ^$C^G(P)^\circ$ 是 Levi 子群。此外，由于 p 不整除 $|\pi_1(\mathbf{G}_{\mathrm{der}})|$，根据 [Ste75, 推论 2.16]，有$C^G(P) = C^G(P)^\circ$。对于一般的阿贝尔群 P，我们对其秩 r归纳，其中秩即 P的循环因子数。我们可以将 $P = P' \times P''$写成 P'为循环群且 ^P''秩为 $r-1$的形式。于是 P''包含在 $\mathbf{L} := C^G(P')$ 中，并且有 $C^G(P) = C_{\hat{\mathbf{L}}}(P'')$。由于 ^ ^ ^ L 是 G 的 Levi 子群，素数 p 不是 L 的挠素数。因此，根据归纳法， $C_{\hat{\mathbf{L}}}(P'')$ ^ ^ 是 L 的 Levi 子群，因而也是 G 的 Levi 子群。

^ iv) 假设 p 不整除 $\mathbf{G}$ 的外尔群的阶，并设 P 为 $\mathbf{G}$ 的一个有限 p-子群。根据 [Ste75, Cor. 2.8]， p 不是 $\mathbf{G}$ 的挠素数，因此由 iii) 可知，

ˆ 任意阿贝尔子群 A 的中心化子都是一个 Levi 子群 $\mathbf{M}$。如果 A 在 P中正规，则 Pˆ ˆ ˆ ˆ 正规化 $\mathbf{M}$。由于 $N_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{M})/\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{G}$ 的外尔群的一个子商，因而其阶与 p互素，所以可推出 P实际上包含于 $\mathbf{M}$ 中，从而中心化 A。然而，一个非阿贝尔 p-群 Q总是包含一个阿贝尔、正规但非中心的子群；例如，由中心 $Z(Q)$ 与第二中心中的任意非中心元素所生成的子群（第二中心是 $Q/Z(Q)$ 的中心的原像）。因此 P 必为阿贝尔群。 □

从 G 表示论的角度来看， p 为好的假设相当宽松。对于拟单群，在 A_n 型中该假设为空；在 B_n, C_n 和 D_n 型中，它表示 $p \neq 2$；在 G_2、 E_6 和 E_7 型中，它表示 $p > 3$；在 E_8 型中，它表示 $p > 5$。对于这类群，不是挠素数等价于是好的，唯独 A_n 型例外。在该型中，至少当 p 不整除 $n+1$ 时该条件成立；不过，例如 GL_n 没有挠素数。 p 不整除外尔群的阶这一假设显然强得多，因为它会排除 $n \geqslant p$ 的 GL_n。

2.3 分歧群与扭曲 Levi 序列

我们用 I_F^r、 $r \in \mathbb{R}_+$ 表示伽罗瓦群 Γ_F 的上编号分歧子群。另设 $I_F^{r+} := \bigcup_{s>r} I_F^s$。因此我们有 $I_F^0 = I_F$ 和 $I_F^{0+} = P_F$。按照似乎已成惯例的做法，我们使用记号 $\mathbb{R}$:
$= \mathbb{R} \sqcup \{r+, r \in \mathbb{R}\}$，其排序方式是令任意 $r < s \in \mathbb{R}$ 都有 $r < r+ < s$。

我们固定一个野惯性参数 ϕ： $P_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$，并假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是一个 *Levi* 子群。

ˆ 根据引理 2.2.5，这意味着 $\mathbf{G}$ 是温和分歧的，并且 $\phi(P_F)$ 是一个有限阿贝尔 ˆ ˆp-群，包含在 Cˆ$_{\mathbf{G}}(\phi) = \mathbf{G}_\phi = \mathbf{L}_\phi$ 的中心中。回忆一下，$\mathbf{S}_\phi$ 表示与 $\mathbf{S}_\phi = (\mathbf{G}_\phi)_{\mathrm{ab}}$ 对偶并带有典范伽罗瓦作用的 F-环面。我们将定义 $\mathbf{S}_\phi$ 的一个由 F-子环面构成的滤过。为此，从现在起假设下述假设成立:

(H1) p *is not a torsion prime of* $\hat{\mathbf{G}}$.

~ ˆ 2.3.1 群 $\mathbf{G}_{\phi,r}$ 和 $\mathbf{S}_{\phi,r}$。——固定 $r \in \mathbb{R}_{>0}$。令 $\mathbf{G}_{\phi,r} := C$ˆ$\mathbf{G}(\phi(I_F^r))$，并令 ˆ ˆ ˆ ˆ $\mathbf{S}_{\phi,r} := (\mathbf{G}_{\phi,r})_{\mathrm{ab}}$。由假设 (H1) 和引理 2.2.9，$\mathbf{G}_{\phi,r}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 Levi 子群，且包含 ˆ Cˆ$\mathbf{G}(\phi)$。因此，群 $\mathcal{G}_{\phi,r} := \mathbf{G}_{\phi,r} \cdot \varphi(W_F)$ 不依赖于将 ϕ 扩张到 W_F 的扩张 φˆ 的选择，并处于正合列 $\mathbf{G}_{\phi,r} \hookrightarrow \mathcal{G}_{\phi,r} \twoheadrightarrow W_F$ 中；该正合列给出有限外作用 $W_F \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathbf{G}_{\phi,r})$，从而定义一个准分裂约化 F-群 $\mathbf{G}_{\phi,r}$。 ˆ ˆ 由于 $\phi(P_F)$ 包含于 Cˆ$\mathbf{G}(\phi)$ 中，因而也包含于 $\mathbf{G}_{\phi,r}$ 中，外作用可经由 W_F/P_Fˆ 分解，因此 $\mathbf{G}_{\phi,r}$ 是温和分歧的。此外，该外作用下降到 $\mathbf{S}_{\phi,r}$，给出一个带有典范同构 $\mathbf{S}_{\phi,r} \xrightarrow{\sim} Z(\mathbf{G}_{\phi,r})^\circ$ 的对偶温和分歧 F-环面 $\mathbf{S}_{\phi,r}$。

ˆ 我们选取一个钉扎 $\varepsilon_{\phi,\,r}$ 用于群 $\mathbf{G}_{\phi,\,r}$ 并考虑该钉扎在 $\mathcal{G}_{\phi,\,r}$中的稳定子 $\mathcal{G}_{\phi,\,r,\,\varepsilon_{\phi,\,r}}$，它位于正合列 $Z(\mathbf{G}_{\phi,\,r}) \hookrightarrow \mathcal{G}_{\phi,\,r,\,\varepsilon_{\phi,\,r}} \twoheadrightarrow W_F$中。注意， $1 \times P_F$ 包含于 $\mathcal{G}_{\phi,\,r,\,\varepsilon_{\phi,\,r}}$。根据引理 2.2.4 的证明中相同的论证，我们有:

ˆ引理。——存在一个分裂 $\psi_r : W_F \longrightarrow \mathcal{G}_{\phi,r,\varepsilon_{\phi,r}}$，使正合列 $Z(\mathbf{G}_{\phi,r}) \hookrightarrow \mathcal{G}_{\phi,r,\varepsilon_{\phi,r}} \twoheadrightarrow W_F$ 满足 $\psi_r|_{P_F} = 1 \times \mathrm{Id}$。

这样的 ψ_r 诱导出一个同构 ${}^L\mathbf{G}_{\phi,r} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{\phi,r}$，它在 $1 \times P_F$ 上是恒等映射，因此使我们能够将 ϕ 视为 $\mathbf{G}_{\phi,r}$ 的野惯性参数。

^^^^ 现在，包含 $\mathbf{G}_\phi \subseteq \mathbf{G}_{\phi,r}$ 诱导出一个 W_F-等变满同态 $\mathbf{S}_\phi \twoheadrightarrow \mathbf{S}_{\phi,r}$；在对偶侧，它诱导出一个 F-有理嵌入 $\mathbf{S}_{\phi,r} \hookrightarrow \mathbf{S}_\phi$。注意，后一个嵌入只取决于 ϕ，而不取决于其他任何选择。对于命题 2.2.3 的集合 I_ϕ 中任意一个 F-有理 Levi中心嵌入 $\iota : \mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$，其限制 $\iota|_{\mathbf{S}_{\phi,r}}$ 是一个 F-有理 Levi中心嵌入，而 $\mathbf{G}$ 的扭曲 Levi 子群 $C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r}))$ 的 L-群为 ${}^L\mathbf{G}_{\phi,r}$。

2.3.2 引理。— ϕ 是 $C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r}))$ 的野惯性参数。

证明。这由命题 2.2.3 的 ii) 应用于群 $\mathbf{G}'_{\phi,r} := C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r}))$ 得出。^ 确实，由于 $C\hat{}\mathbf{G}_{\phi,r}(\phi) = C\hat{}\mathbf{G}(\phi)$ 是 $\mathbf{G}_{\phi,r}$ 的 Levi 子群，它是连通的；根据引理 2.2.5 i)，任意钉扎都可由 ϕ 的某个适当扩张归一化。另一方面，ι 诱导出一个 F-有理 Levi中心嵌入 $\mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}'_{\phi,r} = C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r}))$，它与对偶 Levi中心嵌入 $\hat{\iota}: Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))^\circ \hookrightarrow \mathbf{G}_{\phi,r}$ 对偶。因此，我们可以应用命题 2.2.3 ii)。□

2.3.3 引理。— 设 $\iota : \mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$ 是命题 *2.2.3* 所述集合中的一个 F-有理 *Levi*中心嵌入，并设 $\mathbf{S}$ 是 $\mathbf{G}_\iota$ 的一个极大 F- 环面，且被 F 的某个温和分歧伽罗瓦扩张 E 分裂。那么，对于与 ϕ 相关联的 $\mathbf{G}_\iota(F)$ 的任意特征 $\check{}\varphi$，如 *2.2.6* 所述，我们有

$$\Sigma(\mathbf{S}, C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r}))) = \left\{\alpha \in \Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G}),\, \check{\varphi}(N_{E|F}(\alpha^\vee(E_r^\times))) = \{1\}\right\}.$$

^ 证明。如引理 2.2.8 的证明，固定一个对偶嵌入 $\mathbf{S} \subset C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$。根据 2.1.3 中的构造，双射 $\alpha \leftrightarrow \alpha^\vee, \Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G}) \leftrightarrow \Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G})$ 将 $\Sigma(\mathbf{S} C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r})))$ 映到 ^^^^Σ(S $C\hat{}\mathbf{G}(\phi(I_F^r)))$ $= \{\alpha^\vee \in \Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G})\ \alpha^\vee \circ \phi(I_F^r) = \{1\}\}$。接下来只需仿照 Kal19 引理 3.6 的证明。事实上，$\alpha^\vee \circ \hat{\varphi}|_{W_E}$ 经由局部类域互反$E^\times \xrightarrow{\sim} W\mathrm{ab}_E$ 对应于 $\check{}\varphi \circ N_{E|F} \circ \alpha^\vee$，而后者也将 $E_r^\times$ 映到 W_E^{ab} 中 $I_E^r = I_F^r$ 的像。引理得证。□

2.3.4 与 ϕ 和 ι相关联的扭曲 Levi 序列。——我们用 $0 < r_0 < \ldots < r_{d-1}$表示递减滤过（$\mathbf{S}_{\phi,r}$）$_{r>0}$ 的跳跃点，其中 $\mathbf{S}\phi$。也就是说，我们有

$$\{r_0, \ldots, r_{d-1}\} = \{r > 0,\, \mathbf{S}_{\phi,r+} \subsetneq \mathbf{S}_{\phi,r}\} = \{r > 0, C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F^{r+})) \supsetneq C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi(I_F^r))\}.$$

注意，对于 $r \leqslant r_0$，$\mathbf{S}_{\phi,r} = \mathbf{S}\phi$，而对于 $r > r_{d-1}$，$\mathbf{S}_{\phi,r} = Z(\mathbf{G})^\circ$。我们还令 $r_{-1} := 0$ 和r_d: = 深度(ϕ) := $\inf\{r > 0, \phi(I_F^r) = \{1\}\}$，其满足 $r_d \geqslant r_{d-1}$。

现在固定一个 F-有理 Levi中心嵌入 $\iota : \mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$ 于 I_ϕ 中。为使记号稍微简洁一些，我们设

$$\mathbf{G}_\iota^i := C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r_i})) = C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r_{i-1}+})) \text{ for } i = 0, \ldots, d-1 \text{ and } \mathbf{G}_\iota^d := \mathbf{G}$$

我们由此得到$\mathbf{G}$中的一个温和分歧扭曲 Levi 序列

$$\vec{\mathbf{G}}_\iota := \left(\mathbf{G}_\iota = \mathbf{G}_\iota^0 \subset \ldots \subset \mathbf{G}_\iota^d = \mathbf{G}\right).$$

2.4 特征与幂等元

在本节中，我们将使用 Borel 在[Bor79, 10.2] 中所描述的特征的朗兰兹对应，来构造 $\mathrm{G}_\iota^i(F)$ 的某些特征，这些特征适合于在 [Yu01] 中应用 Yu过程，从而得到 G的某些开 pro-p子群的特征。Yu 的工作涉及分歧滤过在群一侧的类似物，即 Moy–Prasad滤过 [MP94, MP96]。因此，对于 G 的（扩大的）Bruhat–Tits 建筑 $\mathcal{B}(\mathrm{G}\ F)$ 中的每个点 x，我们有由紧开正规子群给出的、 x的稳定子 $G_x = \mathrm{G}(F)_x$ 的滤过 $(G_{x,r} = \mathrm{G}(F)_{x,r})_{r\geqslant 0}$。若令 $G_{x,r+} := \bigcup_{s>r} G_{x,s}$，则已知 $G_{x,0+}$ 是抛物型群 $G_{x,0}$ 的 pro-p-根。我们将需要这两个滤过之间的如下关系，它可由 Yu 的 [Yu09, 定理 7.10]容易得出。

2.4.1 引理。— 设 $\mathbf{G}$ 是 F 上的温和分歧约化群，并设 $\check{}$ φ $\longrightarrow$ $\mathbb{C}^\times$ $\varphi \in H^1\ W_F\ Z$ φ $_{\mathrm{sc}}\ F$ $:\mathbf{G}(F)$ 是与某个 $\hat{}(,(\hat{}\mathbf{G}))$相关联的特征。那么 $\check{}$在 $\mathbf{G}()$上平凡，并且$\tilde{}$对于每个 $x \in \mathcal{B}(\mathrm{G}\ F)$ 和每个 $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，都有 $\check{}\varphi|_{G_{x,r}} \equiv 1 \Leftrightarrow \hat{}\varphi|_{I_F^r} \equiv 1$。

$\tilde{}$证明。我们需要遵循 [Bor79, 10.2] 中的 Borel 方法。因此设 G $\longrightarrow$ G 是一个z-扩张，即 G 是 G 被诱导环面 Z 扩张所得的中心扩张，且 G 的导出$\tilde{}$子群是单连通的。在对偶侧，我们得到一个 W_F-等变嵌入，将 $\hat{}\ \hat{}\ \tilde{}Z(\mathrm{G})$ 嵌入环面 $Z(\mathrm{G})$ 中。通过此嵌入推送 $\hat{}\varphi$，我们得到温和分歧环面 G_{ab} 的朗兰兹参数，进而得到 $\mathrm{G}_{\mathrm{ab}}(F)$ 的一个特征。根据 [Yu09, 定理 7.10] ，我们有 $\tilde{}$ $\tilde{}\theta|\ \tilde{}\mathrm{G}_{\mathrm{ab}}(F)_r \equiv 1 \Leftrightarrow \hat{}\varphi|_{I_F^r} \equiv 1$。现在，$\check{}\varphi$ 定义如下。映射 $\mathrm{G}(F) \longrightarrow \mathrm{G}(F)$ 是满射$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$，而特征 $\theta\colon \mathrm{G}(F) \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathrm{ab}}(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ 在此映射的核 $\mathrm{Z}(F)$ 上，以及在 $\tilde{}$ $\tilde{}\mathrm{G}_{\mathrm{der}}(F) = \mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(F)$ 上平凡。因此， θ下降为所需的 $\mathrm{G}(F)$ 的特征 $\check{}\varphi$，它在 $\tilde{}$（即 $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(F)$ 的像）上平凡。现在，对于每个 $x \in \mathcal{B}(\mathrm{G}\ F)$ 以及每个投影到 x 的 $\tilde{x} \in \mathcal{B}(\mathrm{G}\ F)$， [Kal19] 的引理3.5.3 告诉我们，映射 $\mathrm{G}(F)_{\tilde{x},r} \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathrm{ab}}(F)_r$ 和 $\mathrm{G}(F)_{\tilde{x},r} \longrightarrow \mathrm{G}(F)_{x,r}$ 都是满射。这就推出了引理中所述的等价性。 □

2.4.2 注记。——反过来，任何在 $\mathrm{G}_{\mathrm{sc}}(F)$ 上平凡的特征 $\check{}\varphi\colon \mathrm{G}(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$，都来自某个 $\hat{}\varphi \in H^1(W_F, Z(\hat{}\mathrm{G}))$，这是通过 Borel 方法得到的。事实上，采用上述证明中的记号，由 $\mathrm{G}(F) \longrightarrow \mathrm{G}(F)$ 的满射性，我们可以将 $\check{}\varphi$ 膨胀为 $\mathrm{G}(F)$ 的一个特征 $\theta\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$，它在 $\mathrm{Z}(F)\mathrm{G}_{\mathrm{der}}(F)$ 上平凡。特别地， θ 可经满射映射 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}\mathrm{G}(F) \longrightarrow \mathrm{G}_{\mathrm{ab}}(F)$ 分解，因此给出 $\mathrm{G}_{\mathrm{ab}}(F)$ 的一个特征；根据 Langlands 环面对应，它来自某个 $\hat{}\varphi \in H^1(W_F, Z(\ \tilde{}\mathrm{G}))$。但是，$\hat{}\varphi$ 在 $H^1(W_F, \hat{}\mathrm{Z})$ 中的推前必定平凡，因此 $\hat{}\varphi$ 来自 $H^1(W_F, Z(\hat{}\mathrm{G}))$。

$\hat{}$回顾 2.3.1 中$\mathbf{G}_{\phi,r}$ 和 $\mathcal{G}_{\phi,r}$ 的定义，以及对于$\mathbf{G}_{\phi,r}$的钉扎 $\hat{}\varepsilon_{\phi,r}$，$\mathcal{G}_{\phi,r,\varepsilon_{\phi,r}}$ 的定义。注意， $\phi(I_F^r)$ 包含于 $\mathcal{G}_{\phi,r,\varepsilon_{\phi,r}}$。

2.4.3 引理。— 以下假设等价。

i) 存在一个分裂 $\varphi_r : W_F \longrightarrow \mathcal{G}_{\phi,r,\varepsilon_{\phi,r}}$，使得 $\varphi_r|_{I_F^r} = \phi|_{I_F^r}$。

ii) 存在$\hat{}\varphi_r \in Z^1(W_F, Z(\hat{}\mathbf{G}_{\phi,r}))$，使得$\hat{}\varphi_r|_{I_F^r} = \hat{}\phi|_{I_F^r}$。

iii) 典范扩张 $\mathcal{E}_r = [W_F/[I_F^r, I_F^r]] \in H^2(W_F/I_F^r, I^{r}{}_{,F}{}^{\mathrm{ab}})$ 的像 $\hat{}\ \phi(\mathcal{E}_r) \in H^2(W_F/I_F^r, Z(\overline{\hat{}\mathbf{G}_{\phi,r)}})$ 为零。

ˆ此外，若 p 不整除 $|\pi_0(Z(\mathbf{G}))| = |\pi_1(\mathbf{G}_{\mathrm{der}})|$，则这些假设成立。

证明。由引理 2.3.1 可知，三个假设之间的等价性可按引理 2.2.5 中的方式证明。对于最后一个断言，注意到如果 p 不整除 $|\pi_0(Z(\mathbf{G}))|$ ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ 的阶 $\pi_0(Z(\mathbf{G}))$，那么它也不整除 $|\pi_0(Z(\mathbf{G}_{\phi,r}))|$，因为 $Z(\mathbf{G}_{\phi,r}) = Z(\mathbf{G}_{\phi,r})^\circ Z(\mathbf{G})$。ˆ ˆ ˆ 因此，在这种情况下，我们有 $\phi(P_F) \subset Z(\mathbf{G}_{\phi,r})^\circ$，故 $\phi(\mathcal{E}_r)$ 属于映射 $H^2(W_F/I_F^r, Z(\hat{\mathbf{G}}_{\phi,r})^\circ) \longrightarrow H^2(W_F/I_F^r, Z(\hat{\mathbf{G}}_{\phi,r}))$ 的像。由下文的引理 2.4.4 可知，ˆ $\phi(\mathcal{E}_r)$ 为零。 □

˜**2.4.4 引理。**— 设$\mathbf{S}$ 是一个温和分歧环面，并且 $r \in \mathbb{R}_{>0}$。那么$H^2_{cts}(\Gamma_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}})$ 在 $H^2(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}})$ 中的像是平凡的。

证明。 从 $\eta \in H^2_{cts}(\Gamma_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}})$开始，并令 $\bar{\eta}$表示其在 $H^2(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}})$中的像。根据连续上同调的定义， η来自元素 $\eta \in H^2(\Gamma_{E/F}, \hat{\mathbf{S}})$，其中 E是一个分裂$\mathbf{S}$ 的有限扩张，并且按 I_F^r 映射到 $\Gamma_{E/F}$中的 $\{1\}$ 的意义，它是 r-分歧的。我们可以并且将假设$\mathbf{S}$ 也被 F上的 E 的最大温和分歧子扩张 E^{tr} 分裂。仿照 [Lan79 引理 4], 的证明，我们可以选取正合列$\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{S}_1 \twoheadrightarrow \mathbf{S}_2$，其中$\mathbf{S}_1$ 是 $\Gamma_{E^{tr}/F}$的一个诱导环面。注意，此时每个$\mathbf{S}_i$ 都是温和分歧的。我们来看正合列

$$H^1(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}}_1) \longrightarrow H^1(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}}_2) \longrightarrow H^2(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}}) \longrightarrow H^2(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}}_1)$$

由于 $H^2(\Gamma_{E/F}, \hat{\mathbf{S}}_1) = \{1\}$（因为对于 E/F 而言，$\mathbf{S}_1$ 也是一个诱导环面）， $\bar{\eta}$ 在 $H^2(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}}_1)$ 中的像是平凡的。因此，如果我们能证明第一个映射是满射的，就可以推知 $\bar{\eta}$ 本身是平凡的。但根据 [Yu09，定理 7.10]，局部朗兰兹对应将 $H^1(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}}_i)$ 与群 $\mathbf{S}_i(F)/\mathbf{S}_i(F)_r$ 的特征标群相对应。此外，根据 [Kal19，引理 3.1.3]，对偶嵌入 $\mathbf{S}_2 \hookrightarrow \mathbf{S}_1$ 满足 $\mathbf{S}_2(F)_r = \mathbf{S}_2(F) \cap \mathbf{S}_1(F)_r$。因此，这个对偶嵌入诱导出一个单射映射 $\mathbf{S}_2(F)/\mathbf{S}_2(F)_r \hookrightarrow \mathbf{S}_1(F)/\mathbf{S}_1(F)_r$，这表明映射 $H^1(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}}_1) \longrightarrow H^1(W_F/I_F^r, \hat{\mathbf{S}}_2)$ 是满射的。 □

2.4.5 特征. — 现在我们固定一个 F-有理嵌入 $\iota \in I_\phi$，并采用 2.3.4 中的记号 $\mathbf{G}_\iota$。从现在起，我们还将作出以下假设：

(H2) $$p \text{ does not divide } |\pi_0(Z(\hat{\mathbf{G}}))| = |\pi_1(\mathbf{G}_{\mathrm{der}})|.$$

ˆ 注意，*(H1)* 与 *(H2)* 合起来意味着 p 既不是 $\mathbf{G}$ 的挠素数，也不是 $\mathbf{G}$ 的挠素数。ˆ 由于这一假设，引理 2.4.3 保证存在一个 1-余循环 ˆφ_i : $W_F \longrightarrow Z(\mathbf{G}_{\phi,r_{i-1}+})$ ˆ，它对每个 $i = 0, \ldots, d$ 都延拓 $\phi|_{I_F^{r_{i-1}+}}$。利用引理 2.2.7，我们可以假设 ˆφ_i 在 $H^1(W_F, Z(\hat{\mathbf{G}}_{\phi,r_{i-1}+}))$ 中具有 p-幂阶。于是，由于 $\mathbf{G}_\iota^i$ 是 $\mathbf{G}_{\phi,r_{i-1}+}$ 的内形式，关于特征的朗兹对应 [Bor79, 10.2] 将一个特征与 ˆφ_i 相关联

$$\check{\varphi}_i : \mathbf{G}_\iota^i(F) \longrightarrow \mu_{p^\infty} \subset \mathbb{C}^\times,$$

我们可以将其视为任意交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$-代数 R 上的一个 R 值特征。引理 2.4.1 推出以下结论，对每个 $x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}_\iota^i, F)$:

ˆ i) 限制 $(\check{\varphi}_i)|_{\mathbf{G}_\iota^i(F)_{x,r_{i-1}+}}$ 仅取决于 $\phi|_{I_F^{r_{i-1}+}}$，而不取决于 ˆφ_i 的选择，

ii) 对所有 $j \geqslant i$，我们有 $(\check{}\varphi_i)|_{\mathbf{G}_\iota^i(F)_{x,r_{j-1}+}} = (\check{}\varphi_j)|_{\mathbf{G}_\iota^i(F)_{x,r_{j-1}+}}$，

iii) 特征 $\psi_i := \check{}\varphi_i \check{}\varphi_{i+1}^{-1}$ 在$\mathbf{G}_\iota^i(F)$上的限制在$\mathbf{G}_\iota^i(F)_{x,r_i+}$上是平凡的（其中我们令 $\check{}\varphi_{d+1} = 1$）。

2.4.6 建筑的子集。— 我们用 $\mathcal{B}$ 表示（扩展）Bruhat–Tits 建筑$\mathcal{B}(\mathbf{G}, F)$。若 S 是 G 的极大 F-环面，且在 F 的某个温和分歧有限域扩张 E 上分裂，则令 $\mathcal{B}(\mathbf{S}, F) := \mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{S}, E) \cap \mathcal{B}(\mathbf{G}, F)$，其中 $\mathcal{A}(\mathbf{G}, \mathbf{S}, E)$ 是与 S 相关联的 $\mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$ 的公寓，交集取自 $\mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$。正如记号所示，这不依赖于 E 的选择。注意，除非 S 具有极大 F-分裂秩，否则它不必是 $\mathcal{B}$ 的公寓。现在我们为 ι 关联以下 $\mathcal{B}$ 的子集：

$$\mathcal{B}_\iota := \bigcup_{\mathbf{S} \subset \mathbf{G}_\iota} \mathcal{B}(\mathbf{S}, F)$$

其中，S 遍历 $\mathbf{G}_\iota$ 的温和分歧极大 F-环面。集合 $\mathcal{B}_\iota$ 也是所有嵌入 $\mathcal{B}(\mathbf{G}_\iota, F) \hookrightarrow \mathcal{B}$ 的共同像；这些嵌入是将一个伽罗瓦(E/F)-等变容许嵌入（依照 [KP23, §14.2] 的定义） $\mathcal{B}(\mathbf{G}_\iota, E) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$ 限制后得到的，其中 E 是伽罗瓦温和分歧域扩张，且 $\mathbf{G}_{\iota,E}$ 是 $\mathbf{G}_E$ 的一个 E-有理抛物子群的 Levi 分量。从现在起，我们所说的“容许嵌入”均指上述类型的嵌入。这类嵌入的集合是一个在 $X_*(\mathbf{S}_\iota)_{\mathbb{R}}^{W_F}$ 之下的扭子。得益于 [Yu01，引理 2.1]，上述并集也可以限制为 $\mathbf{G}_\iota$ 的极大 F-分裂（温和分歧极大） F-环面。对于这样的极大分裂环面，子集 $\mathcal{B}(\mathbf{S}, F)$ 是 $\mathcal{B}(\mathbf{G}_\iota, F)$ 的一个公寓，但它不是 $\mathcal{B}$ 的公寓，除非 $\mathbf{G}_\iota$ 是一个 F-Levi 子群。

2.4.7 *Yu* 的构造。——固定 。对于每个 , . . . , d，交集

$$G_{\iota,x,r}^i := \mathbf{G}_\iota^i(F)_{x,r} := G_{x,r} \cap \mathbf{G}_\iota^i(F)$$

是与 r 相关联的 Moy–Prasad群，也是任一容许嵌入$\mathcal{B}(\mathbf{G}_\iota^i, F) \hookrightarrow \mathcal{B}$下 x 的原像。注意，只要 $i \leqslant j$，$G_{\iota,x,r}^i$就会正规化$G_{\iota,x,s}^j$，因此我们可以定义$G_{x,0+}$ 的一个开子群：

$$K_{\iota,x}^{++} := G_{\iota,x,0+}^0 G_{\iota,x,r_0+}^1 \cdots G_{\iota,x,r_{d-1}+}^d.$$

根据 2.4.5 的性质 ii)，存在$K_{\iota\,x}^{++}$,的一个特征 $\check{}\phi_{\iota,x}^{++}$，其在$G_{\iota,x,r_{i-1}+}^i$上的限制与 $\check{}\varphi_i|_{G_{\iota,x,r_{i-1}+}^i}$一致。根据 2.4.5 的性质 i)，$\check{}\phi_{\iota\,x}^{++}$,仅取决于 ϕ，而与扩张 $\hat{}\varphi_i$ 的选择无关。现在考虑$G_{x,0+}$的以下更大的开子群：

$$K_{\iota,x}^{+} := G_{\iota,x,0+}^0 G_{\iota,x,(r_0/2)+}^1 \cdots G_{\iota,x,(r_{d-1}/2)+}^d.$$

在 [Yu01 的 §4], , Yu 描述了一种构造特征 $\check{}\phi_{\iota,x}^{+}$ 的方法，该特征属于 $K_{\iota,x}^{+}$ 并扩张 $\check{}\phi_{\iota\,x}^{++}$,，其起点是 2.4.5 中的特征 ψ_i。为说明这一点，我们先注意到，$\check{}\phi_{\iota\,x}^{++}$, 也可写成乘积$\prod_{i=0}^d(\psi_{i\,x}^{++},)|_{K_{\iota\,x}^{++}}$,，其中 $\psi_{i\,x}^{++}$,表示群 $G_{\iota,x,0+}^i G_{x,r_i+}$ 的唯一特征标，它同时扩张 $\psi_i|_{G_{\iota,x,0+}^i}$ 以及 G_{x,r_i+} 上的平凡特征。类似地，Yu 将 $\check{}\phi_{\iota,x}^{+}$ 定义为一个乘积

$$\check{\phi}_{\iota,x}^{+} := \prod_{i=0}^{d} (\psi_{i,x}^{+})|_{K_{\iota,x}^{+}}$$

其中 $\psi_i^+{}_{,x}$ 是 $G^i_{\iota,x,0+}G_{x,(r_i/2)+}$ 的某个特征，它扩张$\psi_i^{++}{}_{x}$，正如 [Yu01, §4] 和 [FS25, 引理 4.2 中所述。1]，下文将对此作回顾。

Yu 的构造 $\psi_i^+{}_{,x}$ 使用李代数 $\mathfrak{g}:=\mathrm{Lie}(\mathbf{G})(F)$上的 Moy–Prasad 滤过 $(\mathfrak{g}_{x,r})_{r\in\tilde{\mathbb{R}}}$。我们采用 Yu 的记号 $G_{x,(r/2)+:r+}$ 表示商群 $G_{x,(r/2)+}/G_{x,r+}$。该群是阿贝尔群，Moy 和 Prasad 定义了一个同构 $\mathfrak{g}_{x,(r/2)+:r+}\xrightarrow{\sim}G_{x,(r/2)+:r+}$。现在，李子代数 $\mathfrak{g}_\iota^i=\mathrm{Lie}(\mathbf{G}_\iota^i)(F)$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补空间是 $\iota(\mathbf{S}_{\phi,r_i})$ 通过伴随表示作用于 $\mathfrak{g}$ 所产生的非零权空间之和 $\mathfrak{n}_\iota^i$。这导出一个分解

$$\mathfrak{g}_{x,(r/2)+:r+}=\mathfrak{g}^i_{\iota,x,(r/2)+:r+}\oplus\mathfrak{n}^i_{\iota,x,(r/2)+:r+}.$$

借助这一分解，任意特征 ψ of $G^i_{\iota,x,(r/2)+:r+}$ 都可以扩展为 $G_{x,(r/2)+:r+}$ 的特征 ψ，方法是令其在 $\mathfrak{n}^i_{\iota,x,(r/2)+:r+}$ 上平凡。特别地，我们从 $\psi_{i|G^i_{\iota,x,(r_i/2)+}}$ 得到一个特征 ψ_i of$G_{x,(r_i/2)+}$；进而，它可以与 $\psi_{i|G^i_{\iota,x,0+}}$ 粘合，得到所需的 $G^i_{\iota,x,0+}G_{x,(r_i/2)+}$ 的特征 $\psi_i^+{}_{,x}$。注意，这个特征取决于 $\hat{}\varphi_i$ 和 $\hat{}\varphi_{i+1}$ 的选择，而且，事先看来，限制 $(\psi_i^+{}_{,x})|_{K_\iota^+,x}$ 也取决于这些选择。不过，我们有以下独立性结果。

2.4.8 引理。 — 特征$\check{}\phi_\iota^+{}_{,x}$ 仅取决于 ϕ、ι、x，而与$\hat{}\varphi_i$的选择无关。

证明。首先注意到，上文所述的映射 $\psi\mapsto\psi$ 显然关于 ψ 是乘法的，并且具有如下性质：若 ξ 是 G 的一个深度为 $\leqslant r$ 的特征，则 $\xi|_{G^i_\iota、x、(r/2)+}=\xi|_{G_x、(r/2)+}$。事实上，$\xi$ 在 G 的根子群上平凡，因此 $\xi|_{G_x、(r/2)+}$ 必须在 $\mathfrak{n}^i_{\iota、x、(r/2)+:r+}$ 上平凡。更一般地，若 ξ_j 是某个 $j\geqslant i$ 的 G^j 的特征，则 $(\xi_{j|G^i_{\iota,x,(r/2)+}})|_{G^j_\iota,x,(r/2)+}=\xi_{j|G^j_\iota,x,(r/2)+}$ 因而 $\xi_{j|G^i_\iota、x、(r/2)+}=\xi_{j|G^j_\iota、x、(r/2)+}$ 也成立。因此，我们可以明确地将此特征记作 ξ_j。

现在来验证，乘积 $\prod_{i=1}^d(\{\mathrm{v2},)\{\mathrm{v5}_{,x}$ 与余循环 $\hat{}\varphi_i$ 的选取无关。设 $(\hat{}\varphi_i')\{\mathrm{v11}_{,\dots,d}$ 是另一组余循环，其导出的特征为 $\{\mathrm{v15},$，并记 $\check{}\varphi_i'=\check{}\varphi_i\xi_i$。那么 ξ_i 是 G_i 的一个深度为 $\leqslant r_{i-1}$ 的特征，因此 $\{\mathrm{v24},\{\mathrm{v27}_{,(r_{i-1}/2)+}$ 按照引理之前描述的步骤，延拓为 ξ_i 在$\{\mathrm{v32},\{\mathrm{v35}_{)+}$ 上的一个特征。于是我们看到，对所有$\{\mathrm{v39}, j\leqslant d$，都有

$$(\psi_{i,x}'^{+})|_{G^j_{\iota,x,(r_{j-1}/2)+}}=\begin{cases}(\psi_{i,x}^+)|_{G^j_{\iota,x,(r_{j-1}/2)+}}\cdot(\xi_i\xi_{i+1}^{-1})|_{G^j_{\iota,x,(r_{j-1}/2)+}} & \text{if } j\leqslant i\\ (\psi_{i,x}^+)|_{G^j_{\iota,x,(r_{j-1}/2)+}}\cdot(\widetilde{\xi_i}\widetilde{\xi_{i+1}^{-1}})|_{G^j_{\iota,x,(r_{j-1}/2)+}} & \text{if } j>i\end{cases}$$

其中约定 $\xi_{d+1}=1$。取乘积可得，对所有 $\{\mathrm{v2},\dots,d$

$$\prod_{i=0}^d(\psi_{i,x}'^{+})|_{G^j_{x,(r_{j-1}/2)+}}=\prod_{i=0}^d(\psi_{i,x}^+)|_{G^j_{x,(r_{j-1}/2)+}}\cdot(\widetilde{\xi_j})^{-1}|_{G^j_{x,(r_{j-1}/2)+}}(\xi_j)|_{G^j_{x,(r_{j-1}/2)+}}=\prod_{i=0}^d(\psi_{i,x}^+)|_{G^j_{x,(r_{j-1}/2)+}}$$

正如所需。 □

由于 $K_\iota^+{}_{,x}$ 是一个 pro-p-群，光滑特征 $\check{}\phi_\iota^+{}_{,x}$ 取值于环 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty},\frac{1}{p}]$。 –

2.4.9 *Iwahori*分解。— 对于某些与 ι 和 x相适配的对向抛物子群对，$(K_\iota^+,_x,\check{\phi}_\iota^+,_x)$ 存在 Iwahori 分解。更确切地说，设 $\bar{}(\mathbf{P},\mathbf{P})$ 是一对相反的 F- 有理抛物子群，它们具有共同的 Levi 分量 $\mathbf{M}$，并满足以下条件：

i) $\iota(\mathbf{S}_\phi) \subseteq \mathbf{M}$ （等价地， $Z(\mathbf{M})^\circ \subseteq \mathbf{G}_\iota$），

ii) x 属于 $\mathcal{B}(\mathbf{M}\ F)$（即与$\mathbf{M}$的环面相对应的所有公寓的并集）。

$\bar{}$ $\bar{}$我们分别用$\mathbf{U}$和$\bar{\mathbf{U}}$表示$\mathbf{P}$和$\bar{\mathbf{P}}$的幺幂根。照例，我们也用 U、 $\bar{U}$等表示这些代数群的 F-点群。

引理。——在上述假设下，群K_ι^+、$_x$ 和$K_\iota^\dagger$、$_x$ 关于 P、 $\bar{P}$具有 *Iwahori* 复合性质，即乘法映射 $(U \cap K_{\iota,x}^\bullet) \times (M \cap K_{\iota,x}^\bullet) \times (\bar{U} \cap K_{\iota,x}^\bullet) \longrightarrow K_{\iota,x}^\bullet$ 对于$K_{\iota,x}^\bullet \in \{K_{\iota,x}^+, K_{\iota,x}^\dagger\}$ 是一个双射。此外，我们有 $(\check{\phi}_\iota^+,_x)|_{U\cap K_\iota^+,x} \equiv 1$以及 $(\check{\phi}_\iota^+,_x)|_{\bar{U}\cap K_\iota^+,x} \equiv 1$。

证明。令 $K_{\iota,x}^\bullet \in \{K_{\iota,x}^+, K_{\iota,x}^\dagger\}$。根据大胞腔 UM $\bar{}$U 的性质，第一个断言等价于等式 $\bar{}K_{\iota,x}^\bullet = (U \cap K_{\iota,x}^\bullet)(M \cap K_{\iota,x}^\bullet)(U \cap K_{\iota,x}^\bullet)$。但是对于每个 $i = 0, \ldots, d$，交集 $\mathbf{P} \cap \mathbf{G}_\iota^i$和 $\bar{}\mathbf{P} \cap \mathbf{G}_\iota^i$是 $\mathbf{G}_\iota^i$的两个相反抛物子群，其交集为 $\mathbf{M} \cap \mathbf{G}_\iota^i$，因为 $Z(\mathbf{M})^\circ \subseteq \mathbf{G}_\iota^i$。接着，由于 x属于 $\mathcal{B}(\mathbf{M} \cap \mathbf{G}_\iota^i, F) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{G}_\iota^i, F)$，我们知道 Moy–Prasad群 $G_{\iota,x,r_{i-1}/2+}^i$ 具有 Iwahori分解 $G_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+}^i = (U \cap G_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+}^i)(M \cap G_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+}^i)(\bar{U} \cap G_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+}^i)$，对于 $G_{\iota,x,r_{i-1}/2}^i$ 也同样成立。现在，利用如下事实：对于 $i < j$，群 $\bar{U} \cap G_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+}^i$ 正规化 $G_\iota^j,_x,_{(r_{j-1}/2)+}$ ，而群$\bar{M} \cap G_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+}^i$ 正规化 $U \cap G_\iota^j,_x,_{(r_{j-1}/2)+}$，即可对$K_\iota^+,_x$归纳得出所需分解；对于$K_{\iota,x}^\dagger$也可类似处理。

现在证明 $\check{\phi}_{\iota,x}^+$ 在 $U \cap K_{\iota,x}^+$ 和 $\bar{U} \cap K_{\iota,x}^+$ 上平凡。回到 $\check{\phi}_{\iota,x}^+$ 的构造，只需证明对每个 $i = 0, \ldots, d$，第2.4.7段的特征 $\psi_i^+,_x$ 在群 $U \cap (G_{\iota,x,0+}^i G_{x,(r_i/2)+})$ 上平凡（对 U 也同样如此）。按照上述相同的论证，该群为 $(U \cap G_{\iota,x,0+}^i)(U \cap G_{x,(r_i/2)+})$。一方面，$\bar{\psi}_i^+,_x$ 在 $U \cap G_{\iota,x,0+}^i$ 上的限制是平凡的，因为它也是 G_ι^i 的特征 ψ_i 在此处的限制，而 $U \cap G_\iota^i$ 包含于 G_ι^i 的导出子群中。另一方面，$\psi_i^+,_x$ 在 $G_{x,(r_i/2)+}$ 上的限制，是 2.4.7 中记作 ψ_i 的$\tilde{}$特征；根据分解$\mathfrak{g}_{x,(r_i/2)+:r_i+} = \mathfrak{g}_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}^i \oplus \mathfrak{n}_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}^i$，并通过 Moy–Prasad 同构，它扩张了 $(\psi_i)|_{G_{\iota,x,(r_i/2)+}^i}$。回想一下，后一个分解由 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\iota^i \oplus \mathfrak{n}_\iota^i$ 诱导，其中 $\mathfrak{g}_\iota^i$（分别为 $\mathfrak{n}_\iota^i$）是 $\iota(\mathbf{S}_\phi,r_i)$ 作用于 $\mathfrak{g}$ 时的平凡特征子空间（分别为所有非平凡特征子空间之和）。另一方面，$U \cap G_{x,(r_i/2)+}$ 在 $\mathfrak{g}_{x,(r_i/2)+:r_i+}$ 中的像 $\mathfrak{u}_{x,(r_i/2)+:r_i+}$，由 $\mathbf{U}$ 的李代数 $\mathfrak{u}$ 诱导；该李代数是 $Z(\mathbf{M})^\circ$ 作用于 $\mathfrak{g}$ 时的（非平凡）特征子空间之和。现在， $\iota(\mathbf{S}_\phi,r_i)$ 与 $Z(\mathbf{M})^\circ$ 彼此交换，因为 $\mathbf{M}$ 包含 $\iota(\mathbf{S}_\phi,r_i)$。因此， $\mathfrak{u}$ 在 $\iota(\mathbf{S}_\phi,r_i)$ 下稳定，且有 $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}_\iota^i) \oplus (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{n}_\iota^i)$。相应地，$\mathfrak{u}_{x,(r_i/2)+:r_i+}$ 分解为 $\mathfrak{u}_{x,(r_i/2)+:r_i+} \cap \mathfrak{n}_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}^i$ 与 $\mathfrak{u}_{x,(r_i/2)+:r_i+} \cap \mathfrak{g}_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}^i$ 的直和。我们已经看到， ψ_i 在后一个交集上平凡，$\tilde{}$；根据定义， ψ_i 在前一个交集上平凡，由此证明完毕。

□

2.4.10 一对相反抛物子群的来源。——为便于后文参考，我们在此描述¯一类有用的相反抛物子群对 (**P**,**P**)，它们满足 2.4.9 的条件 i) 和 ii)。

取两个点 $x \neq x' \in \mathcal{B}_\iota$，并选取一个温和分歧极大环面 S $\subseteq \subset$G$_\iota$，使得 $x, x' \in \mathcal{B}$(S F)。令 E 为一个分裂 S 的温和伽罗瓦扩张 F。仿射空间$\mathcal{A}$(G, S E) 是向量空间 X_*(S)$_\mathbb{R}$ 下的主齐性空间，因此可写作 $x' = x + \lambda$，其中 $\lambda \in X_*$(S)$_\mathbb{R}$ 唯一。此外，X_*(S)$_\mathbb{R}$ 对 $\mathcal{A}$(G, S E) 的作用，与 $\Gamma_{E/F}$ 的相应伽罗瓦作用相容。由于 x 和 x' 都是 $\Gamma_{E/F}$-不动的，我们有 $\lambda \in$(X_*(S)$_\mathbb{R}$)$^{\Gamma_{E/F}}$。与 λ 相关联的是一对 F-有理抛物子群 (P, P) := (P$_\lambda$, P$_{-\lambda}$)，它们具有共同的 Levi 分量 M :=M$_\lambda$ =M$_{-\lambda}$，相应的幺幂根记为 U :=U$_\lambda$ 和¯U :=U$_{-\lambda}$ （另见 [Vig97, §1.27]）。根据构造，M 包含 S，因此也包含 G$_\iota$ 的连通中心 ι(Sϕ)；并且 x 和 x' 都属于 $\mathcal{B}$(M F)。

2.4.11 定义。– 回忆一下，$\mathcal{H}_R(G)$ 是由紧支撑、局部常值的 R 值分布构成的 R-代数。我们用 $e_{\iota,x}$ 表示沿着 G 的开子群 $K^+_{\iota,x}$ 的 pro-p 特征 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 取平均的分布。这是一个支撑在 $K^+_{\iota,x}$ 上的 $\mathcal{H}_R(G)$ 幂等元。

由 $K^+_{\iota,x}$ 和 $e_{\iota,x}$ 的构造可知，尤其是后者除了 ι、x 和 ϕ 之外不依赖于其他选择，因此我们看到

$$\forall g \in G,\ {}^g K^+_{\iota,x} = K^+_{g\iota,gx} \text{ and } {}^g e_{\iota,x} = e_{g\iota,gx}, \tag{2.4.12}$$

其中 $g\iota$ 是 g 的共轭，即对于所有 $s \in$ Sϕ，我们有 ($g\iota$)(s) := $g\iota$(s)g^{-1}。

由于这对 ($K^+_{\iota,x}$,$e_{\iota,x}$) 依赖于 ϕ，因此在需要强调这种依赖关系时，我们可以写作 $K^+_{\phi\,\iota,,x}$ 和 $e_{\phi,\iota,x}$。

2.5 交织

2.5.1 沿用上一小节中的数据 ϕ、$\iota \in I_\phi$ 和 $x \in \mathcal{B}_\iota$，现在引入以下紧开子群:

$$\begin{aligned} K^\dagger_{\iota,x} &:= G^0_{\iota,x,0+} G^1_{\iota,x,(r_0/2)} \cdots G^d_{\iota,x,(r_{d-1}/2)}, \\ K^\circ_{\iota,x} &:= G^0_{\iota,x,0} G^1_{\iota,x,(r_0/2)} \cdots G^d_{\iota,x,(r_{d-1}/2)}, \\ K_{\iota,x} &:= G^0_{\iota,x} G^1_{\iota,x,(r_0/2)} \cdots G^d_{\iota,x,(r_{d-1}/2)}. \end{aligned}$$

因此，我们有包含关系 $K^+_{\iota,\ x} \subseteq K^\dagger_{\iota,\ x} \subseteq K^\circ_{\iota,\ x} \subseteq K_{\iota,\ x}$，且所有子群都是 $K_{\iota,\ x}$ 的正规子群。此外，$K^\dagger_{\iota,\ x}$ 是 $K^\circ_{\iota,\ x}$ 的 pro-p-根基。为强调对 ϕ 的依赖，我们将记作 $K^?_{\phi,\ \iota,\ x}$。本小节的目标是证明以下结果。

2.5.2 命题。— *i)* 群 $K_{\phi,\iota,x}$ 中心化 $e_{\phi,\iota,x}$。*ii)* 若 (ϕ', ι', x') 是另一个同类三元组，则

$$e_{\phi,\iota,x} e_{\phi',\iota',x'} \neq 0 \Rightarrow \left(\phi \simeq \phi' \ and\ K^\dagger_{\phi,\iota,x} \cdot \iota \cap K^\dagger_{\phi',\iota',x'} \cdot \iota' \neq \emptyset\right). \tag{2.5.3}$$

在 (2.5.3) 的左端，乘积 $e_{\phi,\iota,x}e_{\phi',\iota',x'}$ 是在 G 上紧支撑、局部常值且取值于 R 的分布所构成的 R-代数 $\mathcal{H}_R(G)$ 中进行的。因此，

$$e_{\phi,\iota,x}e_{\phi',\iota',x'} \neq 0 \Leftrightarrow (\check{\phi}^{+}_{\iota,x})|_{K^{+}_{\phi,\iota,x}\cap K^{+}_{\phi',\iota',x'}} = (\check{\phi}'^{+}_{\iota',x'})|_{K^{+}_{\phi,\iota,x}\cap K^{+}_{\phi',\iota',x'}}. \tag{2.5.4}$$

在 (2.5.3) 的右侧，$K^{\dagger}_{\phi,\,\iota,\,x}\cdot\iota$ 表示嵌入 ι 在 I_ϕ中的 $K^{\dagger}_{\phi,\,\iota,\,x}$-轨道；由于 G_ι 中心化 ι，它也就是 $K_{\phi,\,\iota,\,x}$-轨道。若处于 $\phi \simeq \phi'$的情形，则有 $\mathbf{S}_\phi = \mathbf{S}_{\phi'}$ 和 $I_\phi = I_{\phi'}$，而交集 $K^{\dagger}_{\phi,\,\iota,\,x}\cdot\iota \cap K^{\dagger}_{\phi',\,\iota',\,x'}\cdot\iota'$ 取为 I_ϕ的子集。

证明思路如下：借助 Kaletha 的一个引理，我们证明 2.4.5 iii) 中的特征 ψ_i 是深度为 r_i 的一般位置特征，其含义取自 [Yu01, §9] 和 [Fin25, 定义 3.8]。这一一般位置条件正是使我们能够像 ii) 中那样控制交织的关键。

2.5.5 层与交织. — 我们用 $\mathfrak{g}^*$ 表示李代数 $\mathfrak{g}$ 的对偶。为简化记号，在不致混淆时，我们仅将 $\mathfrak{g}(F)$ 记作 $\mathfrak{g}$，将 $\mathfrak{g}^*(F)$ 记作 $\mathfrak{g}^*$。若 $\mathcal{L}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中任意一个格，我们令 $\mathcal{L}^\bullet = \{f \in \mathfrak{g}^*, \langle f, \mathcal{L}\rangle \subset (F)_{0+}\}$。于是，沿用 Moy 和 Prasad 的记号，我们写作 $\mathfrak{g}^*_{x,\,-r} := (\mathfrak{g}_{x,\,r+})^\bullet$。

固定一个深度 0 特征 $\Psi : F \longrightarrow R^\times$，并回顾 Adler 对 Moy–Prasad 同构 $\varphi_{x,r+} : \mathfrak{g}_{x,(r/2)+}/\mathfrak{g}_{x,r+} \xrightarrow{\sim} G_{x,(r/2)+}/G_{x,r+}$ 的表述，该表述出自 [Adl98, 1.6.6]，适用于 $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$。介于 $G_{x,r+}$ 与 $G_{x,(r/2)+}$ 之间的任意群 J，对应于介于 $\mathfrak{g}_{x,r+}$ 与 $\mathfrak{g}_{x,(r/2)+}$ 之间的一个格 $\mathfrak{j}$。若特征 ψ 属于 J，且存在元素 $X \in \mathfrak{g}^*_{x,-r}$，使得对所有 $h \in J$ 都有 $\psi(h) = \Psi(\langle X, \varphi_x^{-1}{}_{,r+}(h)\rangle)$，则称该特征由此元素实现。这样的 X 并非由 ψ 唯一确定，但分层 $X + \mathfrak{j}^\bullet$ 是唯一确定的。以下结果对专家而言当然是众所周知的，但我们未能找到适用于如此一般情形的参考文献。

引理。—令 x、r、J、ψ 如上，并令 x'、r'、J'、ψ' 为另一个具有相同性质的元组。假设 ψ 由某个 $X \in \mathfrak{g}^*_{x,\,-r}$ 实现，且 ψ' 由某个 $X' \in \mathfrak{g}^*_{x',\,-r'}$ 实现。那么，当且仅当 $(X + \mathfrak{j}^\bullet) \cap (X' + \mathfrak{j}'^\bullet) \neq \emptyset$ 时，有 $\psi|_{J\cap J'} = \psi'|_{J\cap J'}$。

证明。 我们首先断言，存在两个“模拟指数映射” $\varphi_x : \mathfrak{g}_{x,\,0+} \longrightarrow G_{x,\,0+}$ 和 $\varphi_{x'} : \mathfrak{g}_{x',\,0+} \longrightarrow G_{x',\,0+}$，其意义见 [Adl98, §1.5]，使得它们在 $\mathfrak{g}_{x,\,0+} \cap \mathfrak{g}_{x',\,0+}$ 上的限制相一致。

具体如下。我们选取一个同时包含 x 和 x' 的公寓，并将相应的极大 F-分裂环面记为 S。如 2.4.10 中所述，点 x 和 x' 给出一个 Levi 子群 $\mathbf{M} \subset \mathbf{G}$ 以及对向抛物子群 $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{MU}$ 和 $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{MU}$，使得 $G_{x,0+} = (G_{x,0+}\cap U)(G_{x,0+}\cap M)(G_{x,0+}\cap U)$，$G_{x',0+} = (G_{x',0+}\cap U)(G_{x',0+}\cap M)(G_{x',0+}\cap U)$，$G_{x,\,0+}\cap M = M_{x,0+} = M_{x',0+} = G_{x',0+}\cap M$，以及李代数的相应等式成立。此外，我们有 $U = \prod_{a\in\Sigma_{x,x'}(\mathbf{S})} U_a$ 和 $\bar{U} = \prod_{a\in\Sigma_{x,x'}(\mathbf{S})} U_{-a}$ 作为拓扑空间，并且有 $\mathfrak{u} = \oplus_{a\in\Sigma_{x,x'}(\mathbf{S})}\mathfrak{u}_a$ 和 $\bar{\mathfrak{u}} = \oplus_{a\in\Sigma_{x,x'}(\mathbf{S})}\mathfrak{u}_{-a}$，其中 $\Sigma_{x,x'}(\mathbf{S})$ 表示相对于 S 的不可倍增相对根的子集，这些根作为 S 作用于 $\mathfrak{u}$ 上的特征出现；其中 $\mathfrak{u}_a$ 表示 a 和 $2a$-特征子空间的和，而 U_a 表示其相应的根子群，其李代数为 $\mathfrak{u}_a$。

令 $a \in \pm\Sigma_{x,x'}(\mathbf{S})$。那么，$\mathfrak{u}_a$ 在 x和 x' 处的 Moy–Prasad 滤过子模，除深度参数化存在平移外彼此一致；子群集合 $\{U_{a,x,r}\cap U_{a,x',0+}\}_{r\in\mathbb{R}_{r>0}}$和 $\{U_{a,x',r}\cap U_{a,x,0+}\}_{r\in\mathbb{R}_{r>0}}$ 也同样一致。沿用 [Adl98, §1.3]，并利用这些滤过，我们可以

现在定义同胚 $\varphi_{x,a}:\mathfrak{u}_{a,x,0+}\longrightarrow U_{a,x,0+}$ 和 $\varphi_{x',a}:\mathfrak{u}_{a,x',0+}\longrightarrow U_{a,x',0+}$，使它们对所有 $r\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 都分别与 $\varphi_{x,r+}$ 和 $\varphi_{x',r+}$ 的限制一致。对于包含在 $\mathfrak{u}_{a,x,0+}\cap\mathfrak{u}_{a,x',0+}$ 中的所有陪集及其像，在构造同上文献中的 $\varphi_{x,a}$ 和 $\varphi_{x',a}$ 时使用相同的陪集代表元，即可确保 $\varphi_{x,a}$ 和 $\varphi_{x',a}$ 在 $\mathfrak{u}_{a,x,0+}\cap\mathfrak{u}_{a,x',0+}$ 上一致。令 $\varphi_{M,x}:\mathfrak{m}_{x,0+}=\mathfrak{m}_{x',0+}\to M_{x,0+}=M_{x',0+}$ 为 [Adl98, §1.5]所提供的模拟指数映射。然后，利用分解 $\mathfrak{g}_{x,0+}=(\oplus_{a\in\Sigma_{x,x'}(\mathrm{S})}\mathfrak{u}_{-a,x,0+})\oplus\mathfrak{m}_{x,0+}\oplus(\oplus_{a\in\Sigma_{x,x'}(\mathrm{S})}\mathfrak{u}_{a,x,0+})$ 和 $G_{x,0+}=(\prod_{a\in\Sigma_{x,x'}(\mathrm{S})}U_{-a,x,0+})M_{x,0+}(\prod_{a\in\Sigma_{x,x'}(\mathrm{S})}U_{a,x,0+})$，以及上述映射在各自直和项上的乘积，我们得到模拟指数映射 $\varphi_x:\mathfrak{g}_{x,0+}\to G_{x,0+}$，如[Adl98, 注记 1.3.3 和 §1.5]所述。类似地，我们得到模拟指数映射 $\varphi_{x'}:\mathfrak{g}_{x',0+}\to G_{x',0+}$。按构造，这两个模拟指数映射在 $\mathfrak{g}_{x,0+}\cap\mathfrak{g}_{x',0+}$ 上一致。

现在，根据定义，$\varphi_{x,r+}$ 和 $\varphi_{x',r'+}$ 分别由从 φ_x 和 $\varphi_{x'}$ 的限制所诱导。由此可得 $\varphi_x^{-1}(J)=\mathfrak{j}$，并且由于 $\Psi(\langle X,\mathfrak{g}_{x,r+}\rangle)=1$，故对所有 $j\in J$ 有 $\psi(j)=\Psi(\langle X,\varphi_x^{-1}(j)\rangle$。类似地，$\varphi_{x'}^{-1}(J')=\mathfrak{j}'$，且对所有 $j'\in J'$ 有 $\psi(j')=\Psi(\langle X',\varphi_{x'}^{-1}(j')\rangle$，以及对所有 $j'\in J'\cap J$ 有 $\psi(j')=\Psi(\langle X',\varphi_x^{-1}(j')\rangle$。因此，我们有 $\psi|_{J\cap J'}=\psi'|_{J\cap J'}$ 当且仅当对所有 $Y\in\mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}'$ 有 $\Psi(\langle X,Y\rangle)=\Psi(\langle X',Y\rangle)$。这等价于 $X-X'\in(\mathfrak{j}\cap\mathfrak{j}')^\bullet=\mathfrak{j}^\bullet+\mathfrak{j}'^\bullet$，而这又等价于 $(X+\mathfrak{j}^\bullet)\cap(X'+\mathfrak{j}'^\bullet)\neq\emptyset$。 □

2.5.6 一般元。——设 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个温和分歧扭 Levi 子群。我们可以将 $\mathfrak{l}^*=\mathrm{Lie}^*(\mathbf{L})$ 识别为 $\mathfrak{g}^*$ 在 $\mathbf{L}$ 的连通中心的余伴随作用下的权 0 子空间，并将 $(\mathfrak{l}^*)^{\mathbf{L}}$ 记作 $\mathbf{L}$ 的余伴随作用下的不变量。我们从 [Fin22, 引理 2.3] 记得，$(\mathfrak{l}^*)^{\mathbf{L}}\cap(\mathfrak{l}^*)_{x,\,r}=(\mathfrak{l}^*)^{\mathbf{L}}\cap(\mathfrak{l}^*)_{x',\,r}$ 对于 $x,x'\in\mathcal{B}(\mathbf{L},F)$ 以及 $r\in\mathbb{R}$。Fin22, 引理 2.3] 的证明还表明，

$$(\mathfrak{l}^*)^{\mathbf{L}}\cap((\mathfrak{l}^*)_{x,r}+(\mathfrak{l}^*)_{x',r})=(\mathfrak{l}^*)^{\mathbf{L}}\cap(\mathfrak{l}^*)_{x,r}. \tag{2.5.6a}$$

若某元素 $X\in(\mathfrak{l}^*)^{\mathbf{L}}\subseteq\mathfrak{g}^*$ 满足 $X\in(\mathfrak{l}^*)_{x,-r}\smallsetminus(\mathfrak{l}^*)_{x,-r+}$，其中 $-r$ 为深度，则称其为深度 $-r$ 的 G-泛型元；这里条件须对某个（等价地，任意）点 $x\in\mathcal{B}(\mathbf{H},F)$ 成立，并且对于某个（等价地，任意）极大环面 $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{L}$ 以及每个 $\alpha\in\Sigma(\mathbf{S},\mathbf{G})\setminus\Sigma(\mathbf{S},\mathbf{L})$，均有 $v(\langle X,H_\alpha\rangle)=-r$；其中 E 是 $\mathbf{S}$ 的分裂域，赋值 v 延拓自 F 上的赋值，而 $H_\alpha:=\mathrm{Lie}(\alpha^\vee)(1)\in\mathfrak{s}(E)$。注意，我们不排除 $\mathbf{L}=\mathbf{G}$ 的情形，此时只有第一个条件 $X\in(\mathfrak{l}^*)_{x,-r}\smallsetminus(\mathfrak{l}^*)_{x,-r+}$ 非空。

对于 $x\in\mathcal{B}(\mathbf{L},F)$，我们定义 $\mathfrak{j}_{x,r}:=\mathfrak{l}_{x,r}\oplus\mathfrak{n}_{x,r/2}$ 和 $\mathfrak{j}^+_{x,r}:=\mathfrak{l}_{x,r}\oplus\mathfrak{n}_{x,(r/2)+}$。这里，$\mathfrak{n}$ 表示在 $\mathfrak{g}$ 中，中心 $\mathbf{L}$ 在伴随作用下非不变特征子空间的和。这些格对应于介于 $G_{x,r}$ 与 $G_{x,r/2}$ 之间的子群 $J_{x,r}$ 和 $J^+_{x,r}$。采用 Yu01 中的 Yu 的记号 [Yu01]，我们会写作 $J_{x,r}=(L,G)_{x,(r,r/2)}$ 和 $J^+_{x,r}=(L,G)_{x,(r,r/2+)}$。我们令 $X\in(\mathfrak{l}^*)^{\mathbf{L}}\subseteq\mathfrak{g}^*$ 为深度 $-r$ 的 G-泛型。与 2.5.5 中一样，元素 X 定义了 $J^+_{x,r}$ 上的一个特征 ψ_x，它在 $G_{x,r+}$ 上平凡。此外，由于 $[J_{x,r},J^+_{x,r}]\subset G_{x,r+}$，该特征被 $J_{x,r}$ 中心化。下面的引理可由将 Yu 在 [Yu01, §8] 中的论证调整到我们的情形而得。

引理。— 设 $(L,\ X,r,x)$ 如上所述，且 (L',X',r',x') 是另一个性质相同的元组（特别是，X' 是深度为 $-r'$ 的 G-泛型）。若 $(X+(\mathfrak{j}^+_{x,r})^\bullet)\cap(X'+(\mathfrak{j}^+_{x',r'})^\bullet)\neq\emptyset$，则 $r=r'$，并且存在 $g\in J_{x,r}$ 及 $g'\in J_{x',r'}$，使得 ${}^gL={}^{g'}L'$，且对每个 $x''\in\mathcal{B}({}^gL,F)$，都有 ${}^gX-{}^{g'}X'\in({}^g\mathfrak{l})^*_{x'',-r+}\cap({}^g\mathfrak{l}^*)^gL$。

证明。 我们首先证明 $r=r'$。事实上，由于 $(\mathfrak{j}^+_{x,\,r})^\bullet\subset\mathfrak{g}^*_{x,\,-r+}$，层 $X+\mathfrak{g}^*_{x,\,-r+}$ 和

[4]此处我们仅回顾 Yu01 第 8] 节中条件 GE1 的表述形式，该形式见 Fin25 的定义 3.8]；因为在我们的假设（*H1*）和（第二上同调群）下，[Yu01 的引理 8.1] 表明，条件 GE2 可由 GE1 推出。

$X' + \mathfrak{g}^*_{x',\ -r'+}$ 具有非空交集。但 $-r$ 是非幂零元素 X 在 [AD02 §3.3], 意义下的深度 $d(X)$，并且根据 [AD02，引理 3.3.7], ，该深度函数在陪集$X + \mathfrak{g}^*_{x,\ -r+}$上为常数。同样，深度函数在陪集$X' + \mathfrak{g}^*_{x',\ -r'+}$上恒等于 $-r'$。因此我们得出 $r = r'$。

首先假设 $\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{G}$。那么利用 (2.5.6a)（以及 [Fin22，引理 2.3]），我们有$X - X' \in (\mathfrak{g}^*_{x,\ -r+} + \mathfrak{g}^*_{x',-r+}) \cap (\mathfrak{g}^*)^{\mathbf{G}} = \mathfrak{g}^*_{x,-r+} \cap (\mathfrak{g}^*)^{\mathbf{G}} = \mathfrak{g}^*_{x'',-r+} \cap (\mathfrak{g}^*)^{\mathbf{G}_\circ}$

现在回到一般情形。交集 $(X + (\mathfrak{j}^+_{x,r})^\bullet) \cap (X' + (\mathfrak{j}^+_{x',r})^\bullet)$ 在$\mathfrak{g}^*$中是开集。假设它非空，因此其中包含一个正则半单元素 Y，使得 Y 的中心化子 S 是 G 的极大环面。现在，[Yu01] 的引理 8.6 给出一个元素 $g \in G_{x,r/2}$，满足 $^{g^{-1}}Y \in X + \mathfrak{l}^*_{x,-r+\circ}$ 由此可得 $\mathsf{S} \subset {}^g\mathbf{L}$，并且对于 $\alpha \in \Sigma(\mathsf{S}, \mathsf{G})$，有$v(\langle Y, H_\alpha\rangle) \geqslant -r$；当且仅当 $\alpha \notin \Sigma(\mathsf{S}\ {}^g\mathbf{L})$ 时，等式成立。类似地，存在一个元素 $g' \in G_{x',r/2}$，满足 $^{g'^{-1}}Y \in X' + \mathfrak{l}'^*_{x',-r+}$，由此可得 $\mathsf{S} \subset {}^{g'}\mathbf{L}'$，并且 $v(\langle Y, H_\alpha\rangle) = -r$ 当且仅当 $\alpha \notin \Sigma(\mathsf{S}\ {}^{g'}\mathbf{L}')$。

由此得到等式 $\Sigma(\mathbf{S}\ {}^g\mathbf{L}) = \Sigma(\mathbf{S}\ {}^{g'}\mathbf{L}')$。这意味着 ${}^g\mathbf{L} = {}^{g'}\mathbf{L}'$，并且 $({}^gX + {}^g\mathfrak{l}^*_{x,-r+}) \cap ({}^{g'}X' + {}^g\mathfrak{l}^*_{x',-r+}) \neq \emptyset$。这种情形与上文处理的 $\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{G}$ 情形类似，因此我们得出结论：$^gX - {}^{g'}X' \in ({}^g\mathfrak{l})^*_{x'',-r+} \cap ({}^g\mathfrak{l}^*)^{{}^g\mathbf{L}}_\circ$ □

我们回到与 (ϕ, ι) 相关的设定。取关于$\iota(\mathbf{S}_{\phi,r_i})$ 的余伴随作用的不变量，可得到一个子空间递增序列 $\mathfrak{g}^{0*}_\iota \subset \ldots \subset \mathfrak{g}^{d*}_\iota = \mathfrak{g}^*$，其 Moy–Prasad 滤过由 $\mathfrak{g}^*$ 的 Moy–Prasad 滤过诱导而来。最后，回顾在 2.4.5 中为每个 $i = 0, \ldots, d-1$ 定义的 $\mathbf{G}^i_\iota(F)$ 的特征 ψ_i。

2.5.7 引理。 — 存在一个 $\mathbf{G}^{i+1}_\iota$-一般元 $X_i \in (\mathfrak{g}^{i*}_\iota)^{\mathbf{G}^{\mathbf{i}}_\iota}$，其深度为 $-r_i$，并且对所有 $x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}^i_\iota, F)$</style}，它表示,$_{x,r_i}$。（特别地，$\psi_i$ 的深度为 r_i）。

证明。设 S 是 G^i_ι 的一个由某个温和分歧伽罗瓦扩张 E 分裂的极大 F-环面。根据引理 2.3.3，对于 $\Sigma(\mathsf{S}, \mathsf{G}^i_\iota) \setminus \Sigma(\mathsf{S}, \mathsf{G}^i_\iota)$ 中的所有根 α，我们有 $\check{}\varphi_i(N_{E|F}(\alpha^\vee(E^\times_{r_i}))) \neq \{1\}$。另一方面，对于此类根 α，我们也有 $\check{}\varphi_{i+1}(N_{E|F}(\alpha^\vee(E^\times_{r_i}))) = \{1\}$，因为 $N_{E|F}(\alpha^\vee(E^\times)) \subset (\mathsf{G}^{i+1}_\iota)_{\mathrm{sc}}(F)$。由于 G^i_ι 中的每个极大分裂环面都包含于一个温和极大环面中，我们推得 $\psi_i = \check{}\varphi_i \check{}\varphi^{-1}_{i+1}$ 的深度为 $\geqslant r_i$。结合 2.4.5iii)，可知 $\mathsf{G}^i_\iota(F)$ 的特征 ψ_i 在每个点 $x \in \mathcal{B}(\mathsf{G}^i_\iota, F)$ 处的深度恰为 r_i，且 [Kal19，引理 3.6.8] 的假设均得到满足。该引理断言，对于每个 $x \in \mathcal{B}(\mathsf{G}^i_\iota, F)$，存在某个深度为 $-r_i$ 的 G^{i+1}_ι-一般 $X_i(x)$，它表示 $\psi_i|_{G^i_{\iota,x,r_i}}$。然而，例如由 [AFMO24b，引理 3.3.1] 的证明（另见 [HM08，引理 2.51]）可知，我们可以对所有 x 一致地选取 X_i。 □

2.5.8 一些辅助群。——对于 $i = 1, \ldots, d$ 和 $x \in \mathcal{B}_\iota$，我们引入 G^i_ι 的开紧子群 $J^i_{\iota,x}$，它介于 $G^i_{\iota,x,r_{i-1}}$ 与 $G^i_{\iota,x,r_{i-1}/2}$ 之间，并对应于格

$$\mathfrak{j}^i_{\iota,x} = \mathfrak{g}^{i-1}_{\iota,x,r_{i-1}} \oplus (\mathfrak{n}^{i-1}_\iota \cap \mathfrak{g}^i_\iota)_{x,r_{i-1}/2}$$

$\mathfrak{g}^i_\iota$ 在 Moy–Prasad 同构下的像。这是 Yu 的记号中的群 $J^i_{\iota,x} = (G^{i-1}_\iota, G^i_\iota)_{x,r_{i-1},r_{i-1}/2}$。类似地，将 $r_{i-1}/2$ 替换为 $r_{i-1}/2+$，即可定义 $J^{i+}_{\iota,x}$。

回忆在 2.4.7 中定义的群 $G^i_{\iota,\ x,\ 0+}G_{x,\ r_i/2+}$ 的特征 $\psi^+_{i\ ,\ x}$。根据构造，限制 $(\psi^+_{i-1,\ x})|_{J^{i+}_{\iota,\ x}}$ 由引理 2.5.7 给出的元素 X_{i-1} 表示。

2.5.9 命题 2.5.2 的证明。— i) 我们有 $K_{\iota,x} = G^0_{\iota,x} \prod_i J^i_{\iota,x}$，并且由于 $G^0_{\iota,x}$ 根据 (2.4.12) 中心化 $e_{\phi,\iota,x}$，只需证明对于每个 i 和 j，群 $J^i_{\iota,x}$ 中心化特征 $\psi^+_j{}_{,x}$。当 $j \neq i-1$ 时，这显然成立，因为 $J^i_{\iota,x}$ 包含于群 $G^j_{\iota}{}_{,x,0+}G_{\iota,x,r_j/2+}$ 中，而特征 $\psi^+_j{}_{,x}$ 定义在该群上。当 $j = i-1$ 时，这由 $[J^i_{\iota,x}, G^{i-1}_{\iota,x,0+}G_{\iota,x,r_{i-1}/2+}] \subset (G^{i-1}_{\iota}, G_\iota)_{x,r_{i-1}+,r_{i-1}/2+} \subset \ker(\psi^+_{i-1,x})$ 得出；另参见 Yu01, 引理 4.2.]。

ii) 我们将通过归纳论证证明 (2.5.3)。

我们从满足以下条件的两个三元组 $(\phi,\ \iota,\ x)$ 和 $(\phi',\ \iota',\ x')$ 开始

$$(\check{\phi}_{\iota,x})|_{K^+_{\phi,\iota,x}\cap K^+_{\phi',\iota',x'}} = (\check{\phi}'_{\iota',x'})|_{K^+_{\phi,\iota,x}\cap K^+_{\phi',\iota',x'}}. \tag{2.5.10}$$

这里，为简化记号，我们省略 $\check{}\phi^+_{\iota,\ x}$ 的指数 $+$。我们用符号 $'$ 标记与三元组 $(\phi',\ \iota',\ x')$ 有关的所有对象。特别地，滤过 $\mathbf{S}_{\phi',\ r}$ 的跳跃记为 $r'_0,\ \ldots,\ r'_{d'-1}$，而 $r'_{d'}$ 是特征 ϕ' 的深度。

我们先将问题化归到 $r_{d-1} = r_d$ 的情形。事实上，若 $r_{d-1} < r_d$，则只需将 ϕ 替换为 $\phi \cdot (\varphi_d^{-1})|_{P_F}$，并将 ϕ' 替换为 $\phi' \cdot (\varphi_d^{-1})|_{P_F}$ 后证明结论即可，因为这一操作不影响 (2.5.10), 也不会改变 $K^\dagger_{\phi\ ,\ \iota,\ x}$，也不会改变 $K^\dagger_{\phi',\ \iota',\ x'}$。因此，我们只需对这些新的 ϕ 和 ϕ' 证明 (2.5.3) 的结论。现在我们已得到所需的 $r_d = r_{d-1}$，但原则上 $r'_{d'-1}$ 和 $r'_{d'}$ 可能并不相同。

由于 $r_d = r_{d-1}$，特征 $\check{}\phi_{\iota,\ x}$ 在 $G_{x,\ r_{d-1}+}$ 上是平凡的，并且 $(\check{}\phi_{\iota,\ x})|_{J^{d+}_{\phi\ \iota\ ,\ ,x}} = (\psi^+_{d-1,\ x})|_{J^{d+}_{\phi\ \iota\ ,\ ,x}}$ 由命题 2.5.7 的一般元 X_{d-1} 表示。另一方面，对于 $\phi'_{\iota',\ x'}$，先验上有两种可能：

- either $r'_{d'} > r'_{d'-1}$ and $(\check{\phi}'_{\iota',x'})|_{G_{x',r'_{d'}}}$ is represented by some generic element $X'_{d'} \in (\mathfrak{g}^*)^{\mathbf{G}}$ of depth $-r'_{d'}$,
- or $r'_{d'} = r'_{d'-1}$ and $(\check{\phi}'_{\iota',x'})|_{J^{d'+}_{\phi',\iota',x'}}$ is represented by $X'_{d'-1}$ as provided by Proposition 2.5.7.

˘˘ 第一种情况实际上不可能。事实上，由 (2.5.10)，特征 $\phi_{\iota,\ x}$ 和 $\phi'_{\iota',\ x'}$ 在 $J^{d+}_{\phi\ \iota\ ,\ ,x} \cap G_{x',\ r'_{d'}}$ 上相同。因此，在第一种情况下，引理 2.5.5 和引理 2.5.6 蕴含 $\mathbf{G}^{d-1}_\iota \subsetneq \mathbf{G}$ 与 $\mathbf{G}^{d'}_{\iota'} = \mathbf{G}$ 共轭，这显然荒谬。

˘˘ 因此我们处于第二种情况，并且由 (2.5.10)，特征 $\phi_{\iota,x}$ 和 $\phi'_{\iota',x'}$ 在 $J^{d+}_{\phi\ \iota\ ,\ ,x} \cap J^{d'+}_{\phi'\ \iota'\ ,\ ,x'}$ 上相同。于是，引理 2.5.5 和引理 2.5.6 告诉我们 $r_{d-1} = r'_{d'-1}$，并给出元素 $j \in J^d_{\phi,\iota,x}$ 和 $j' \in J^{d'}_{\phi',\iota',x'}$，使得 ${}^j\mathbf{G}^{d-1}_\iota = {}^{j'}\mathbf{G}^{d'-1}_{\iota'}$。注意 ${}^j\mathbf{G}^{d-1}_\iota = \mathbf{G}^{d-1}_{j\iota}$。由于 $j \in K^\dagger_{\phi\ ,\iota,x}$，命题的陈述 i) 和 (2.4.12) 表明 $e_{\phi,\iota,x} = e_{\phi,j\iota,x}$。因此，只需对三元组 $(\phi, j\iota, x)$ 和 $(\phi', j'\iota', x')$ 证明 (2.5.3) 的结论。换言之，我们可以并且将假设 $\mathbf{G}^{d-1}_\iota = \mathbf{G}^{d'-1}_{\iota'}$。

令 $\mathbf{H} := \mathbf{G}^{d-1}_\iota = \mathbf{G}^{d'-1}_{\iota'}$。野惯性参数 $\hat{}\phi\colon P_F \longrightarrow \hat{}\mathbf{G}$ 可经由 $\hat{}\mathbf{H}$ 分解；根据引理2.3.2，它给出 $\mathbf{H}$ 的一个野惯性参数，记为 $\phi|_H$。其对应的 F-环面 $\mathbf{S}_{\phi|_H}$ 等于 $\mathbf{S}_\phi$，而 Levi 中心嵌入 $\iota : \mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$ 可经由 $\mathbf{H}$ 分解。此外，对应的集合 $\mathcal{B}_\iota \subset \mathcal{B}(\mathbf{H}, F)$ 与迄今考虑的集合相同。因此，我们得到一个属于 $\mathbf{H}$ 的三元组 $(\phi|_H, \iota, x)$，由此得到群 ${}^HK_{\phi,\iota,x}$ 和 ${}^HK^+_{\phi\ ,\iota,x}$，以及一个特征 $\check{}\phi^{|H}_{\iota\ x,}$。实际上，我们只需

$${}^HK^+_{\phi,\iota,x} = G^0_{\iota,x,0+} \cdots G^{d-1}_{\iota,x,(r_{d-2}/2)+} \subset K^+_{\phi,\iota,x} \text{ and } \check{\phi}^{|H}_{\iota,x} = (\check{\phi}_{\iota,x})|_{{}^HK^+_{\iota,x}}.$$

类似地，我们有一个属于 H 的三元组 $(\phi'^{|H}, \iota', x')$、群 ${}^H K_{\phi',\iota',x'} \subset K_{\phi',\iota',x'}$ 和 ${}^H K^+_{\phi',\iota',x'} \subset K^+_{\phi',\iota',x'}$，以及一个 ${}^H K^+_{\phi',\iota',x'}$ 的特征 $\check{\phi}'^{|H}_{\iota',x'}$，它与 $\check{\phi}'_{\iota',x'}$ 的限制相同。特别地，(2.5.10) 表明，特征 $\check{\phi}^{|H}_{\phi\,\iota,x}$ 与 $\check{\phi}'^{|H}_{\phi'\,\iota',x'}$ 在交集 ${}^H K^+_{\phi\,\iota,x} \cap {}^H K^+_{\phi',\iota',x'}$ 上相同。现在假设结论 (2.5.3) 对三元组 $(\phi^{|H}, \iota, x)$ 和 $(\phi'^{|H}, \iota', x')$ 成立。那么它意味着，对三元组 (ϕ, ι, x) 和 (ϕ', ι', x')，同一结论也成立。

因此，为了完成 (2.5.3) 的证明，我们可以采用归纳法，例如对数目 $n(\phi, G) = \dim(S_\phi) - \dim(Z(G))$ 进行归纳。不过，我们仍需通过考虑 $n(\phi, G) = 0$ 的情形来启动归纳过程。在这种情形下，我们有 $d = 0$, $K^\dagger_{\phi,\iota,x} = G_{x,0+}$，并且 $\check{\phi}_{\iota,x}$ 是 G 的一个特征 $\check{\varphi}_0$ 的限制。与上文一样，我们可以将 ϕ 和 ϕ' 都乘以 $(\check{\varphi}_0^{-1})|_{P_F}$，从而可以假设现在 ϕ 是平凡的。接下来，我们需要证明 ϕ' 也平凡，或者等价地说，它的深度为 $r'_{d'} = 0$。然而，如果 ϕ' 的深度为 $r'_{d'} > 0$，那么 $\check{(\phi'_{\iota',x'})}|_{G_{x',r'_{d'}}}$ 将由一个深度为 $-r'_{d'}$ 的一般元 $X'_{d'}$ 表示。由于 [AD 02] 的深度函数在分层 $X'_{d'} + \mathfrak{g}^*_{x',-r'_{d'}+}$ 上为常数，后者不可能与分层 $\mathfrak{g}^*_{x,0+}$ 相交，因此根据引理 2.5.5，我们将得到与 (2.5.10) 矛盾的结论。□

2.5.11 一个变体。——固定 ϕ，并考虑 $K^+_{\iota,x}$ 的开子群 $K'_{\iota,x} := \prod_{i=1}^d J^{i+}_{\iota,x}$。以下对 2.5.2 ii) 的稍微加强将在第 3 节中用到。

Proposition. — *If* $(\check{\phi}_{\iota,x})|_{K'_{\iota,x} \cap K'_{\iota',x'}} = (\check{\phi}_{\iota',x'})|_{K'_{\iota,x} \cap K'_{\iota',x'}}$, *then* $K^\dagger_{\iota,x}\iota \cap K^\dagger_{\iota',x'}\iota' \neq \emptyset$

证明。当 $\phi = \phi'$ 时，这就是前述证明实际得到的结果。 □

2.5.12 命题 *2.5.2 ii)* 的逆命题。——利用 (2.4.12)，以下引理表明，蕴含关系 (2.5.3) 实际上是一个等价关系。

引理。——固定 ϕ、 $\iota \in I_\phi$ 和两个点 x、 $x' \in \mathcal{B}_\iota$。那么，两个特征 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 和 $\check{\phi}^+_{\iota,x'}$ 在交集 $K^+_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'}$ 上相同。

证明。只有 $x \neq x'$ 的情形并非平凡。设 $(\mathbf{P},\mathbf{P})$ 是 $\mathbf{G}$ 的一对相反抛物子群，它们有共同的 Levi 子群 $\mathbf{M}$，其定义见 2.4.10；并将它们相应的 Levi分解写作 $\mathbf{P} = \mathbf{MU}$ 和 $\mathbf{P} = \mathbf{MU}$。由引理 2.4.9 可知，我们有一个 Iwahori分解

$$K^+_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'} = (U \cap K^+_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'})(M \cap K^+_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'})(\bar{U} \cap K^+_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'})$$

并且 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 和 $\check{\phi}^+_{\iota,x'}$ 在 $(U \cap K^+_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'})$ 和 $(\bar{U} \cap K^+_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'})$ 上均为平凡。从该引理的证明中，令 $\mathbf{M}^i := \mathbf{M} \cap \mathbf{G}^i_\iota$，我们还得到

$$M \cap K^+_{\iota,x} = M^0_{x,0+} M^1_{x,(r_0/2)+} \cdots M^d_{\iota,x,(r_{d-1}/2)+}$$

且对 x' 也同样适用。但由于 x' 是 $X_*(Z(\mathbf{M}))^{\Gamma_{E/F}}_{\mathbb{R}}$ 下 x 的平移，我们有 $M^i_{x,(r_{i-1}/2)+} = M^i_{x',(r_{i-1}/2)+}$，对所有 i 均成立，因此 $M \cap K^+_{\iota,x} = M \cap K^+_{\iota,x'} = M \cap K^+_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'}$。还需证明 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 和 $\check{\phi}^+_{\iota,x'}$ 在该群上的限制相等。为此，只需验证对所有 $i = 0, \ldots, d$，特征 $\psi^+_{i,x}$ 和 $\psi^+_{i,x'}$ 在

2.4.7 中，这两个特征在该群上的限制相等。特征 $\psi_i^+{}_{,x}$ 定义在 $G^i_{\iota,x,0+}G_{x,(r_i/2)+}$ 上。由上述相同论证可得 $M\cap(G^i_{\iota,x,0+}G_{x,(r_i/2)+})=M^i_{x,0+}M_{x,(r_i/2)+}=M^i_{x',0+}M_{x',(r_i/2)+}$，因此只需证明 $\psi_i^+{}_{,x}$ 和 $\psi_i^+{}_{,x'}$ 在该群上一致。一方面，根据定义，我们有 $(\psi_i^+{}_{,x})|_{M^i_{x,0+}}=(\psi_i)|_{M^i_{x,0+}}=(\psi_i^+{}_{,x'})|_{M^i_{x,0+}}$。另一方面，$\psi_i^+{}_{,x}$ 在 $\widetilde{G_{x,(r_i/2)+}}$ 上的限制是 2.4.7 中记作 ψ_i 的特征；根据分解 $\mathfrak{g}_{x,(r_i/2)+:r_i+}=\mathfrak{g}^i_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}\oplus\mathfrak{n}^i_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}$，它平凡地延拓了 $(\psi_i)|_{G^i_{\iota,x,(r_i/2)+}}$，并且是通过 Moy–Prasad 同构给出的。回想一下，后一分解由 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^i_\iota\oplus\mathfrak{n}^i_\iota$ 诱导，其中 $\mathfrak{g}^i_\iota$（分别为 $\mathfrak{n}^i_\iota$）是 $\iota(\mathrm{S}_{\phi,r_i})$ 作用于 $\mathfrak{g}$ 时的平凡特征子空间（分别为所有非平凡特征子空间之和）。由于 $\iota(\mathrm{S}_{\phi,r_i})$ 与 $Z(\mathrm{M})^\circ$ 彼此交换，对上述分解取 $Z(\mathrm{M})^\circ$ 作用的权 0 部分，便得到分解 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^i\oplus(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}^i_\iota)$；由此可见，$(\psi_i^+{}_{,x})|_{M_{x,(r_i/2)+}}$ 是根据分解 $\mathfrak{m}_{x,(r_i/2)+:r_i+}=\mathfrak{m}^i_{x,(r_i/2)+:r_i+}\oplus(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}^i)_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}$，通过 Moy–Prasad 同构平凡延拓 $(\psi_i)|_{M^i_{x,(r_i/2)+}}$ 的特征。同样的描述也适用于 $(\psi_i^+{}_{,x'})|_{M_{x,(r_i/2)+}}$，证明得证。

□

2.5.13 海森堡性质。— 根据 [Yu01，引理 1.3]，，我们知道商群 $K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}$ 是阿贝尔群，因此导出子群 $[K^\dagger_{\iota,x},K^\dagger_{\iota,x}]$ 包含于 $K^+_{\iota,x}$，从而得到一个映射

$$K^\dagger_{\iota,x}\times K^\dagger_{\iota,x}\longrightarrow\mu_{p^\infty},\ (g,h)\mapsto\check{\phi}^+_{\iota,x}(ghg^{-1}h^{-1}).$$

由于 $K^\dagger_{\iota,x}$ 中心化特征 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$，该映射可下降为一个映射

$$\theta\colon K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}\times K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}\longrightarrow\mu_{p^\infty}.$$

命题 。— 假设 p 为奇数，并且满足我们一直采用的假设 (*H1*) 和 (*H2*).

i) 群 $K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}$ 的指数为 p，且映射 θ 在该群上定义了一个取值于 μ_p的完美交错配对。

ii) 若 (**P**,**P**) 是满足 *2.4.9* 的条件 *i)* 和 *ii)* 的 **G** 的相反抛物子群，则 θ 在$(U\cap K^\dagger_{\iota,x})/(U\cap K^+_{\iota,x})$与$(\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x})/(\bar{U}\cap K^+_{\iota,x})$之间诱导出一个完美配对，并在$(M\cap K^\dagger_{\iota,x})/(M\cap K^+_{\iota,x})$上诱导出一个完美交错配对。

证明。 i) 根据 [Yu01，引理 1.3], 我们知道，$K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}$ 与其李代数对应对象 $\mathfrak{k}_{\iota,x}/\mathfrak{k}^+_{\iota,x}$同构。根据构造，后者分解为

$$\mathfrak{k}_{\iota,x}/\mathfrak{k}^+_{\iota,x}=\bigoplus_{i=1}^d(\mathfrak{g}^i_\iota\cap\mathfrak{n}^{i-1}_\iota)_{x,(r_{i-1}/2):(r_{i-1}/2)+},$$

它是 F 的剩余域上的向量空间的直和，因此其指数为 p。等式 $[g,hh']=[g,h]\cdot{}^h[g,h']$ 表明映射 θ 是 $\mathbb{Z}$-双线性的，因此该映射的像包含于 μ_{p^∞} 中唯一指数为 p 的子群 μ_p。注意，在上述 $\mathfrak{k}_{\iota,x}/\mathfrak{k}^+_{\iota,x}$ 的分解中，直和项 $(\mathfrak{g}^i_\iota\cap\mathfrak{n}^{i-1}_\iota)_{x,(r_{i-1}/2):(r_{i-1}/2)+}=\mathfrak{j}^i_{\iota,x}/\mathfrak{j}^{i+}_{\iota,x}$ 与子群 $J^i_{\iota,x}$ 在 $K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}$ 中的像相对应，因此该分解也可以写作

$$K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}=\prod_{i=1}^d\left(J^i_{\iota,x}/J^{i+}_{\iota,x}\right). \tag{2.5.14}$$

现在，回顾 2.4.7 的分解 $\check{\phi}^+_{\iota,x} = \prod_{k=0}^{d}(\psi^+_{k,x})|_{K^+_{\iota,x}}$，并令 $i,j \in \{1,\dots,d\}$ 和 $k \in \{0,\dots,d\}$。我们断言，除非 $i=j=k+1$，否则 $[J^i_{\iota,x}, J^j_{\iota,x}] \subset \ker \psi^+_{k,x}$。当 $k+1 \neq i,j$ 时，这是因为 $J^i_{\iota,x}$ 和 $J^j_{\iota,x}$ 都包含于群 $G^k_{\iota,x,0+}G_{x,r_k/2+}$ 中，而 $\psi^+_{k,x}$ 定义在该群上。当 $k+1=i$ 且 $i \neq j$ 时，这由包含关系 $[J^i_{\iota,x}, J^j_{\iota,x}] \subset [J^{k+1}_{\iota,x}, G^k_{\iota,x,0+}G_{x,r_k/2+}] \subset (G^k_\iota, G)_{x,r_k+,r_k/2+} \subset \ker(\psi^+_{k,x})$ 得出；对 $k+1=j\neq i$ 也有类似结论。

因此，最后显示的分解关于双线性形式 θ 是正交的，而 θ 在直和项 $J^i_{\iota,x}/J^{i+}_{\iota,x}$ 上的限制由 $\theta(\bar{j},\bar{h}) = \psi^+_{i-1,x}(jhj^{-1}h^{-1})$ 给出。根据 Yu01，引理 11.1]，$J^i_{\iota,x}/J^{i+}_{\iota,x}$ 上的后一双线性形式是非退化的，因此 θ 也是非退化的。

ii) 我们有 $[(U\cap K^\dagger_{\iota,x}),(P\cap K^\dagger_{\iota,x})] \subset (U\cap K^+_{\iota,x})$。由于 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 在 $U\cap K^+_{\iota,x}$ 上是平凡的，我们看到，对于双线性形式 θ，$P\cap K^\dagger_{\iota,x}$ 与 $U\cap K^\dagger_{\iota,x}$ 正交。根据 $K^\dagger_{\iota,x}$ 和 $K^+_{\iota,x}$ 关于 $(\mathbf{P}\ \bar{}\mathbf{P})$ 的 Iwahori分解，见引理 2.4.9，我们得到一个 $\mathbb{F}_p$-向量空间的分解

$$K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x} = (U\cap K^\dagger_{\iota,x})/(U\cap K^+_{\iota,x}) \oplus (M\cap K^\dagger_{\iota,x})/(M\cap K^+_{\iota,x}) \oplus (U\cap K^\dagger_{\iota,x})/(U\cap K^+_{\iota,x})$$

而 ii）现在可由 θ 的非退化性推出。 □

2.6 幂等元系

本节固定一个野惯性参数 ϕ，以及一个 F-有理嵌入 $\mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$ 的 $\mathbf{G}(F)$-共轭类 $I \subseteq I_\phi$。回顾一下，我们假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是 Levi 子群，并且 p 满足（*H1*）和（*H2*）。

2.6.1 正交性。——对于 $x \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{G}\ F)$，我们定义 $I_x := \{\iota \in I, x \in \mathcal{B}_\iota\}$。若 $\iota,\iota' \in I_x$，则规定：当且仅当 $\iota' \in K^\dagger_{\iota,x}\cdot\iota$ 时，$\iota' \sim_x \iota$。利用（2.4.12）可知，若 $\iota' \in K^\dagger_{\iota,x}\cdot\iota$，则有 $K^\dagger_{\iota',x} = K^\dagger_{\iota,x}$，由此得到关系 $\sim_x$ 的传递性和对称性，因此它是 I_x 上的等价关系。

Lemma. — *For* $\iota',\iota \in I_x$ *we have* $e_{\iota,x}e_{\iota',x} = \begin{cases} e_{\iota,x} & \text{if } \iota \sim_x \iota' \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$

证明。若 $e_{\iota,x}e_{\iota',x} \neq 0$，则由命题 2.5.2 的 ii) 可知 $K^\dagger_{\iota',x}\cdot\iota' \cap K^\dagger_{\iota,x}\cdot\iota \neq \emptyset$，因此 $\iota \sim_x \iota'$。故若我们不处于 $\iota \sim_x \iota'$ 这一情形，则 $e_{\iota,x}e_{\iota',x} = 0$。若 $\iota \sim_x \iota'$，则由 (2.4.12) 和命题 2.5.2 i) 可得 $e_{\iota',x} = e_{\iota,x}$，因此 $e_{\iota,x}e_{\iota',x} = e_{\iota,x}$。 □

2.6.2 一个变体. — 以下对上述引理的加强在第 2 节中并非必需，但在第 3 节中偶尔会有用。回顾在 2.5.11 中引入的 $K'_{\iota',x}$ 的开子群 $K^+_{\iota',x}$，并将与 $\check{\phi}^+_{\iota',x}|_{K'_{\iota',x}}$ 相关联的幂等元记为 $e'_{\iota',x}$。它比 $e_{\iota',x}$ 更粗，意即 $e_{\iota',x}e'_{\iota',x} = e_{\iota,x'}$，且 (2.4.12) 的类似结论仍成立，即对所有 $g \in G$，${}^g e'_{\iota,x} = e'_{g\iota,gx}$。

Lemma. — *For* $\iota',\iota \in I_x$ *we have* $e_{\iota,x}e'_{\iota',x} = \begin{cases} e_{\iota,x} & \text{if } \iota \sim_x \iota' \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$

证明。 证明方法与上一个引理相同，只需将命题 2.5.2 替换为命题2.5.11。 □

2.6.3 与 ϕ 和 I相关的幂等元。— 由于支撑在 G_x 上并满足 $e\cdot e_{G_x,\ r_{\phi^+}}=e$ 的幂等元 $e\in\mathcal{H}_R(G)$ 有限，故由引理 2.6.1 可知，其和

$$e_x:=e_{I,x}:=e_{\phi,I,x}:=\sum_{\iota\in I_x/\sim_x}e_{\iota,x}$$

是有限的，并定义了 $\mathcal{H}_R(G)$ 中一个支撑于 $G_{x,0+}$ 上的幂等元。当且仅当 I_x 非空时，它才非零。根据构造，我们具有如下等变性:

$$\forall x\in\mathcal{B},\ \forall g\in G,\ e_{gx}={}^ge_x. \tag{2.6.4}$$

特别地， e_x 是 $\mathcal{H}_R(G_x)$ 中的一个中心幂等元。

引理。——固定 x、 $x'\in\mathcal{B}$，置 $I_{x,x'}:=I_x\cap I_{x'}$，并赋予此集合等价关系 $\iota\sim_{x,x'}\iota'\Leftrightarrow(\iota\sim_x\iota'$ 和 $\iota\sim_{x'}\iota')$。则有

$$e_xe_{x'}=\sum_{\iota\in I_{x,x'}/\sim_{x,x'}}e_{\iota,x}e_{\iota,x'}. \tag{2.6.5}$$

证明。记 $\bar\iota:=K^\dagger_{\iota,x}\cdot\iota$ 为 $\iota\in I_x$ 的 $\sim_x$-等价类， $\iota'\in I_{x'}$ 同理。根据命题 2.5.2.ii)，当 $e_{\iota,x}e_{\iota',x'}\neq0$ 时，我们有 $\bar\iota\cap\bar\iota'\neq\emptyset$。因此 $e_xe_{x'}=\sum_{\bar\iota\cap\bar\iota'\neq\emptyset}e_{\bar\iota,x}e_{\bar\iota',x'}$。现在， I 中的交集 $\bar\iota\cap\bar\iota'$ 包含于 $I_{x,x'}$ 中；若 $\bar\iota\cap\bar\iota'$ 非空，则它实际上是一个 $\sim_{x,x'}$-等价类。因此我们得到一个映射 $(\bar\iota,\bar\iota')\mapsto\bar\iota\cap\bar\iota'$，

$$\left\{(\bar\iota,\bar\iota')\in I_{x/\sim_x}\times I_{x'/\sim_{x'}},\bar\iota\cap\bar\iota'\neq\emptyset\right\}\longrightarrow I_{x,x'/\sim_{x,x'}},$$

这显然是一个双射。 □

2.6.6 一个望远镜恒等式。——沿测地线移动时，我们将给出一个望远镜恒等式。在下引理中，我们固定 $\iota\in I$ 和两点 x， $x'\in\mathcal{B}_\iota$。由于 $\mathcal{B}_\iota$ 是凸的，它包含线段 $[x,x']$。

Lemma. — Suppose $x''\in[x,x']$. Then $e_{\iota,x}e_{\iota,x'}=e_{\iota,x}e_{\iota,x''}e_{\iota,x'}$ (product in $\mathcal{H}_R(G)$).

证明。如 2.4.10 中所述，线段 $(x,\ x')$ 确定了一对 $(\mathbf{P},\ \mathbf{P})$，它们是 $\mathbf{G}$ 的 F-有理互反抛物子群，并具有共同的 Levi 子群 $\mathbf{M}$，且对于点 x， x'， x'' 中的每一个，这对抛物子群都满足 2.4.9 的条件 i) 和 ii)。以下等式和包含关系

- $M\cap K^+_{\iota,x}=M\cap K^+_{\iota,x''}=M\cap K^+_{\iota,x'}$
- $U\cap K^+_{\iota,x}\supset U\cap K^+_{\iota,x''}\supset U\cap K^+_{\iota,x'}$
- $\bar U\cap K^+_{\iota,x}\subset\bar U\cap K^+_{\iota,x''}\subset\bar U\cap K^+_{\iota,x'}$

由将 $K^+_{\iota,x}$ 替换为每个 $G^i_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+}$ 后得到的类似等式和包含映射可知。然后，利用引理 2.4.9 的 Iwahori分解，我们推得

$$K^+_{\iota,x''}=(K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''})(K^+_{\iota,x''}\cap K^+_{\iota,x'}).$$

现在将与 $(\check\phi^+_{\iota,x''})|_{K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''}}$ 和 $(\check\phi^+_{\iota,x''})|_{K^+_{\iota,x''}\cap K^+_{\iota,x'}}$ 分别关联的幂等元记为 $e_{\iota,x,x''}$ 和 $e_{\iota,x'',x'}$。我们得到 $\mathcal{H}_R(G_{x''})$ 中的分解 $e_{\iota,x''}=e_{\iota,x,x''}e_{\iota,x'',x'}$。由引理 2.5.12 可得 $e_{\iota,x}e_{\iota,x''}e_{\iota,x'}=e_{\iota,x}e_{\iota,x,x''}e_{\iota,x''}$，$_{x'}e_{\iota,x'}=e_{\iota,x}e_{\iota,x'}$。 □

命题。——设 $x, x' \in \mathcal{B}$ 和 $x'' \in [x, x']$。假设 $\mathcal{B}$ 存在一个面，其闭包同时包含 x 和 x''。则 $e_x e_{x''} e_{x'} = e_x e_{x'}$。

证明。由于存在某个面，其闭包包含 x 和 x''，群 $G_{x''}$ 包含$G_{x,\ 0+}$，因此 $e_{x''}$ 与所有 $e_{\iota,\ x}$ 交换，因为前者在 $\mathcal{H}_R(G_{x''})$ 中是中心的，而后者支撑在 $G_{x,\ 0+}$上。这一交换性质给出了下述计算中的第一个和第四个等式。

$$\begin{aligned} e_x e_{x''} e_{x'} = e_{x''} e_x e_{x'} &= e_{x''} \left(\sum_{\iota \in I_{x,x'}/\sim_{x,x'}} e_{\iota,x} e_{\iota,x'} \right) = e_{x''} \left(\sum_{\iota \in I_{x,x'}/\sim_{x,x'}} e_{\iota,x} e_{\iota,x''} e_{\iota,x'} \right) \\ &= \sum_{\iota \in I_{x,x'}/\sim_{x,x'}} e_{\iota,x} e_{x''} e_{\iota,x''} e_{\iota,x'} = \sum_{\iota \in I_{x,x'}/\sim_{x,x'}} e_{\iota,x} e_{\iota,x''} e_{\iota,x'} \\ &= \sum_{\iota \in I_{x,x'}/\sim_{x,x'}} e_{\iota,x} e_{\iota,x'} = e_x e_{x'}. \end{aligned}$$

在第二个和最后一个等式中，我们使用了 (2.6.5)。在第三个和第六个等式中，我们使用了上一个引理，在第五个等式中，我们使用了引理 2.6.3。 □

2.6.7 E-面。——从现在起，我们还假设 p 是奇数。我们的目标是在 $\mathcal{B}$ 上找到一个多单纯形的 G-等变结构，使得 e_x 仅取决于其所属的面。简单的例子表明，$\mathcal{B}$ 上的通常 Bruhat–Tits 结构并不可行。相反，对于一个合适的温和分歧扩张 E，我们将考虑 $\mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$ 上 Bruhat–Tits 结构与 $\mathcal{B}$ 的交集，其中该扩张是 F 上的扩张。

引理。— 假设 p 是奇数。存在一个 F的温和分歧伽罗瓦域扩张 E，它分裂 $\mathbf{G}_\iota$ 的一个极大 F-环面（对任意 $\iota \in I$），并且满足 $\{r_0/2, \dots, r_{d-1}/2\} \subset v(E^\times)$，其中 v 是 E 上延拓 F的标准化赋值的唯一赋值。

证明。令 E 为某个极大 F-环面 $\mathbf{S}$ 在 $\mathbf{G}_\iota$中的一个温和分歧分裂域。引理 2.3.3 表明，对于 $0 \leqslant i \leqslant d-1$，实数 r_i 是 $E^\times$上的滤过的一个跳跃，因此属于 $v(E^\times) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$，其中 e是 E/F的分歧指数。如有必要，将 E替换为一个二次分歧扩张后，我们得到对每个 i，都有 $r_i/2 \in v(E^\times)$，如所需。于是，该 E 的伽罗瓦闭包满足引理的要求。 □

设 E 如上引理所述。回顾一下，约化群 $\mathbf{G}_E$ 在 E 上的约化 Bruhat–Tits 建筑 $\mathcal{B}^{\mathrm{red}}(\mathbf{G}, E)$ 具有多重单纯形结构。$\mathcal{B}^{\mathrm{red}}(\mathbf{G}, E)$ 中一个多单纯形在$\mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$ 中的原像称为 $\mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$ 的一个面。另请参见例如 [Lan00, 定理 2.1.1],，其中证明了存在一个典范嵌入 $\mathcal{B}(\mathbf{G}, F) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$，因此我们可以且将会把 $\mathcal{B}$ 视为 $\mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$ 的子集。由于 $\mathbf{G}$ 定义在 F 上，建筑 $\mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$ 带有 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 的作用；根据 Rousseau 的一个结果（参见 [Pra01], ），我们有 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{G}, E)^{\mathrm{Gal}(E/F)}$，因为 E/F 是温和分歧的。$\mathcal{B}(\mathbf{G}, E)$ 的一个面与 $\mathcal{B}$ 的交集称为“E-面”。由此得到 $\mathcal{B}$ 的一个划分，其各部分称为“E-面”，并且一个 E-面的闭包是若干 E-面之并。我们将用 $\mathcal{F}_E(x)$ 表示包含 $x \in \mathcal{B}$ 的$\mathcal{B}$ 的 E-面。

2.6.8 命题。— 设 E 如前述引理所述。则有：

i) $\forall \iota \in I, \forall x \in \mathcal{B},\ x \in \mathcal{B}_\iota \Rightarrow \mathcal{F}_E(x) \subseteq \mathcal{B}_\iota$

ii) $\forall \iota \in I, \forall x, x' \in \mathcal{B}_\iota,\ \ \mathcal{F}_E(x) = \mathcal{F}_E(x') \Rightarrow (e_{\iota,x} = e_{\iota,x'}\ \textit{and}\ K^\dagger_{\iota,x} = K^\dagger_{\iota,x'})$

iii) $\forall x, x' \in \mathcal{B},\ \ \mathcal{F}_E(x) = \mathcal{F}_E(x') \Rightarrow e_x = e_{x'}.$

˜证明。 i) 记 $\mathcal{F}_E(x)$ 为包含 x 的 $\mathcal{B}(\mathbf{G}\ E)$ 的面。由于 $(\mathbf{G}_\iota)_E$ 是 ˜$\mathbf{G}_E$ 的 Levi 子群，因此，对于任意容许嵌入 $\mathcal{B}(\mathbf{G}_\iota, E) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{G}\ E)$，面 $\mathcal{F}_E(x)$ 都包含在其像 $\mathcal{B}_\iota(E)$ 中。因此 $\mathcal{F}_E(x) = \tilde{\mathcal{F}}_E(x) \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\iota(E)^{\mathrm{Gal}(E/F)} = \mathcal{B}_\iota$，证毕。

ii) 根据 [Vig97, 命题 1.1], ，群 $\mathbf{G}(E)_{x,r+}$ 仅取决于包含 x 的面，前提是 $r \in v(E^\times)$（在该文中，赋值以 $v(E^\times) = \mathbb{Z}$ 归一化）。另回顾 [Yu01, §2]，可知 $G_{x,r+} = G \cap \mathbf{G}(E)_{x,r+}$。由此，对于每个 $i = 0, \ldots, d$，群 $G^i_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+} = G^i_\iota \cap \mathbf{G}(E)_{x,(r_{i-1}/2)+}$ 仅取决于 E-面 $\mathcal{F}_E(x)$。因此得到 $K^+_{\iota,x} = K^+_{\iota\, x'}$。类似的论证表明 $K^\dagger_{\iota,x} = K^\dagger_{\iota\ ,x'}$。现在，引理 2.5.12 蕴含 $\check{}\phi^+_{\iota,x} = \check{}\phi^+_{\iota\ ,x'}$，因此也有 $e_{\iota,x} = e_{\iota,x'}$。

iii) 根据 ii)，只需证明 $I_x = I_{x'}$，而这由 i) 得出。 □

2.6.9 命题。— 设 E 为如引理 *2.6.7* 中所述的 F 的扩张，并设 x、$x' \in \mathcal{B}$。假设存在 $\mathcal{B}$ 的一个 E-面，其闭包同时包含 x 与 x'。则对任意$x'' \in]x$、 $x'[$，我们有 $e_x e_{x'} = e_{x''} = e_{x'} e_x$。

证明。 首先注意，在此情形下我们有 $x, x' \in \mathcal{F}_E(x'')$。

我们断言$I_{x,x'} = I_{x''}$。事实上，包含关系$I_{x,x'} = I_x \cap I_{x'} \subseteq I_{x''}$ 由 $\mathcal{B}_\iota$ 在 $\mathcal{B}$中的凸性得出，而另一包含关系则由 $\mathcal{B}_\iota$ 是 $\mathcal{B}$的闭子集，以及由命题 2.6.8.i) 对任意 $\iota \in I_{x''}$ 有 $\mathcal{F}_E(x'') \subseteq \mathcal{B}_\iota$ 得出。

现在，我们固定$\iota \in I_x$、$_{x'}$。由 [Vig97，命题 1.1], ，只要 $r \in v(E^\times)$，则对每个 i，群 $\mathbf{G}^i_\iota(E)_x$、$_{r+}$ 与 $\mathbf{G}^i_\iota(E)_{x'}$、$_{r+}$ 都包含于 $\mathbf{G}^i_\iota(E)_{x''}$、$_{r+}$。取伽罗瓦不动元，可得 G^i_ι、$_{x}$、$_{(r_{i-1}/2)+}$ 与G^i_ι、$_{x'}$、$_{(r_{i-1}/2)+}$ 包含于G^i_ι、$_{x''}$、$_{(r_{i-1}/2)+}$。我们推得K^+_ι、$_x \subseteq K^+_\iota$、$_{x''}$ 与K^+_ι、$_{x'} \subseteq K^+_{\iota\, x''}$，。引理 2.5.12 进而表明$e_\iota$、$_x e_\iota$、$_{x''} = e_\iota$、$_{x''}$ 与e_ι、$_{x''} e_\iota$、$_{x'} = e_\iota$、$_{x''}$。借助引理 2.6.6，我们得出e_ι、$_x e_\iota$、$_{x'} = e_\iota$、$_x e_\iota$、$_{x''} e_\iota$、$_{x'} = e_\iota$、$_{x''}$。利用 (2.6.5)，我们由此得到该公式

$$e_x e_{x'} = \sum_{\iota \in I_{x''}/\sim_{x,x'}} e_{\iota,x''},\ \text{to compare with}\ e_{x''} = \sum_{\iota \in I_{x''}/\sim_{x''}} e_{\iota,x''}.$$

对于 ι_1，$\iota_2 \in I_{x''}$，引理 2.6.1 告诉我们

$$\begin{aligned} \iota_1 &\sim_{x''} \iota_2 \Leftrightarrow e_{\iota_1,x''} = e_{\iota_2,x''} \\ \iota_1 &\sim_{x,x'} \iota_2 \Leftrightarrow (e_{\iota_1,x} = e_{\iota_2,x} \text{ and } e_{\iota_1,x'} = e_{\iota_2,x'}) \end{aligned}$$

刚刚证明的等式 $e_{\iota,\ x} e_{\iota,\ x'} = e_{\iota,\ x''}$ 表明 $\iota_1 \sim_{x,\ x'} \iota_2 \Rightarrow \iota_1 \sim_{x''} \iota_2$。另一方面，引理 2.6.1 还表明

$$\begin{aligned} \iota_1 &\sim_{x''} \iota_2 \Leftrightarrow e_{\iota_1,x''} e_{\iota_2,x''} \neq 0 \\ \iota_1 &\sim_{x,x'} \iota_2 \Leftrightarrow (e_{\iota_1,x} e_{\iota_2,x} \neq 0 \text{ and } e_{\iota_1,x'} e_{\iota_2,x'} \neq 0) \end{aligned}$$

这一次，等式 $e_{\iota,\ x} e_{\iota,\ x'} = e_{\iota,\ x''} = e_{\iota,\ x'} e_{\iota,\ x}$ 表明 $\iota_1 \sim_{x''} \iota_2 \Rightarrow \iota_1 \sim_{x,\ x'} \iota_2$。 □

2.7 范畴$\mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)$

现在我们构造与野惯性参数 ϕ 相关联的范畴： $P_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ 以及 G-共轭类 $I \subset I_\phi$，其中包含 F-有理嵌入 ι： $\mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$。如果 V 是任意一个光滑的 RG-模，它就具有 Hecke 代数 $\mathcal{H}_R(G)$ 的作用，特别是幂等元 $e_x = e_{\phi,I,x}$ 作用于其上。本小节主要用于证明以下定理。

2.7.1 定理。— 由下述条件定义的子范畴$\mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)$ 是$\mathrm{Rep}_R(G)$ 的子范畴

$$\mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G) := \left\{ V \in \mathrm{Rep}_R(G),\, V = \sum_{x\in\mathcal{B}} e_{\phi,I,x} V \right\}$$

它是$\mathrm{Rep}_R(G)$的 ***Serre*** 子范畴，对任意余极限稳定，且由$\mathrm{Rep}_R(G)$中的以下紧投射对象生成

$$P^{\phi,I} := \bigoplus_{x\in\Delta_0} \bigoplus_{\iota\in I_x/\sim_x} \mathrm{ind}_{K^+_{\iota,x}}^G(\check{\phi}^+_{\iota,x}),$$

其中， Δ_0 表示 e-室 Δ 的顶点集，而该室属于 $\mathcal{B}$ （此概念将在下文 *2.7.3* 中引入）。此外，任意对象 $V \in$$\mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)$ 在函子意义下都是一个扩张

$$V^{\phi,I} \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V_{\phi,I} \tag{2.7.2}$$

其中 $V^{\phi,I} \in \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)$，且 $V_{\phi,I}$ 没有属于$\mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)$的子商。

策略是将问题置于适当的框架中，以便应用 [MS10，定理 3.1]，，或者至少紧密遵循其证明。该文献讨论的是与约化建筑 $\mathcal{B}' := \mathcal{B}(\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}, F)$ 中的顶点（更一般地，多重单形）相关联的幂等元系，而我们构造的是与 $\mathcal{B}$ 中的点相关联的幂等元。不过，我们的幂等元 e_x 仅取决于 x 在 $\mathcal{B}'$中的像，因此实际上我们得到的是与$\mathcal{B}'$中的点相关联的幂等元。遗憾的是，这些幂等元在 F-面上并非常值，而只在某个伽罗瓦扩张 E （如 2.6.7 中所述）对应的 E-面上为常值。

2.7.3 的 e细分 $\mathcal{B}'$。—— 固定一个整数 $e \geqslant 1$。我们按以下方式定义 $\mathcal{B}'$ 上的多重单纯形结构的细分。

取 $\mathcal{B}'$ 的一个公寓 A，并将形如$\varphi^{-1}(\frac{k}{e}t_1 + \frac{e-k}{e}t_2)$的仿射超平面称为 e-墙，其中 φ是 A 上的仿射根，— t_1， $t_2 \in \mathbb{R}$ 满足 $\varphi^{-1}(t_1)$ 和 $\varphi^{-1}(t_2)$ 是 A的墙，而 k 是介于 0 与 e之间的整数。特别地，1-墙就是通常的墙，并且对任意 $e \geqslant 1$也都是 e-墙；此外，任意 e-墙都平行于某个 1-墙。这样，我们便得到一组扩大的仿射超平面，从而将 A 细分为面，我们称之为 e-面。注意，若 o是 A的特殊点，则 A 的 e-墙是以 o为中心、比率为 $1/e$ 的位似变换下墙的像。事实上，对于 A上的任意仿射根 φ，由 [BT72, (6.2.16)] 可知，使得 $\varphi^{-1}(t + \varphi(o))$为墙的所有 $t \in \mathbb{R}$ 构成 $\mathbb{R}$的一个离散子群。因此， e-面是经同一位似变换得到的通常的面的像。

如果 A' 是另一个公寓，我们以相同的方式定义 e-墙和 e-面。于是对于任意 $g \in G$， g 在 $\mathcal{B}'$ 上的作用会将 A 的一个 e-墙映射为 gA 的一个 e-墙。特别地，如果 F 是一个

A 的 e-面且与 A' 相交，那么 $F \subset A'$ 和 F 是 A' 的一个 e-面。事实上，存在某个 $g \in G$ 满足 $A' = gA$，并且使得 g 固定包含 F 的 1-面 $F_1 \in \mathcal{B}'$。这使我们能够无歧义地定义 $\mathcal{B}'$ 的 e-面，并在 $\mathcal{B}'$ 上得到一个多重单纯形结构，该结构在 G 的作用下保持不变。我们称之为 $\mathcal{B}'$ 的 e- 细分。

引理。— 设 E 是 F 的温和分歧伽罗瓦域扩张，其分歧指数为 $e = e(E/F)$。假设 G 在 E 上是分裂的，并且在 E 的最大非分歧子扩张 E_0 上是准分裂的。那么，$\mathcal{B}'$ 的 e-细分细化了将 $\mathcal{B}'$ 划分为 E-面的划分；也就是说，任意一个 E-面都是若干个 e-面的并。

证明。给定 G 的一个极大 F-分裂环面 T，根据 [BT84，推论 5.1.12]，可知存在一个包含 T 的极大 E_0-分裂 F-环面 T_0。于是，T_0 的中心化子 $\mathrm{S} = C_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0)$ 是 G 的极大 F-环面，并且在 E 上分裂。在这种情况下，存在公寓的包含映射$A = A(\mathrm{G}, \mathrm{T}\ F) \subset A_0 = A(\mathrm{G}, \mathrm{T0}, E_0) \subset A_S = A(\mathrm{G}, \mathrm{S}\ E)$，且每个子空间都是通过取适当的伽罗瓦不变量得到的。根据 [BT84，定理 5.1.20（iii）]，，公寓 A 的墙恰好是 A 与公寓 A_0 的墙的非平凡交集。此外，根据 [BT84，4.2.4]，A_0 的每面墙都是 A_0 与 A_S 的一面墙的交集。反过来，A_S 的一面墙与 A_0 的交集若非平凡，则未必是 A_0 的墙，但至少平行于 A 的一面墙。更准确地说，固定一个原点 o，使其为 A_0 中的特殊点（例如，取自 [BT84，4.2.3] 中的 Chevalley–Steinberg 系统），并令 a 为 G 中 T_0 的一个不可整除根，令 $E_0 \subset E_a \subset E$ 为相应的扩张（同上记作 L_a）。将满足 $\{x \in A_0, a(x) = v\}$ 是 A_0 的一面墙的实数 v 的集合记为 $\Gamma_a \subset \mathbb{R}$。于是，根据 [BT84，4.2.21]，若 $2a$ 不是根，则有 $\Gamma_a = v(E_a^\times)$（E_a 的赋值格）；若 $2a$ 是根，则有 $\Gamma_a = \frac{1}{2}v(E_a^\times)$。另一方面，令 $\Gamma_{a,E} \subset \mathbb{R}$ 为满足 $\{x \in A_0, a(x) = v\}$ 是 A_0 与 A_S 的一面墙的交集的实数 v 的集合。若 $2a$ 不是根且$v \in \Gamma_{a,E}$，则存在 G 中 S 的一个根 α，其限制为 a，且 $\{x \in A_S, \alpha(x) = v\}$ 是 A_S 的一面墙，因此 $v \in v(E^\times)$。若 $2a$ 是根，则要么存在上述的 α，此时$v \in v(E^\times)$；要么存在上述的 α, α'，其中 $\alpha + \alpha'$ 是根，并且 $\{x \in A_S, (\alpha + \alpha')(x) = 2v\}$ 是 A_S 的一面墙，此时 $v \in \frac{1}{2}v(E)^\times$。由此可得，若 $2a$ 不是根，则有 $\Gamma_{a,E} = v(E^\times)$；若 $2a$ 是根，则有 $\Gamma_{a,E} = \frac{1}{2}v(E^\times)$。总之，对于 T_0 的所有不可整除根 a，都有 $\Gamma_{a,E} = {}_e{}^1(E/E_a)\,\Gamma_a$。

———

由于 $e = e(E/E_0)$ 是所有 $e(E/E_\alpha)$ 的公倍数，上述讨论表明，A_0 上多重单纯形结构的 e-细分细化了由 A_S 得到的结构。由于 A_0 上的多重单纯形结构诱导出 [BT84]) 的 A 上的结构（同样由定理 5.1.20（iii）可知），因此 A 上多重单纯形结构的 e-细分细化了其划分为 E-面的结构。 □

2.7.4 从现在起，我们选取一个整数 e，使其可被满足引理 2.6.7 和 2.7.3 两者要求的温和分歧域扩张 E of F 的分歧指数整除。于是，对每个 $\iota \in I$，$\mathcal{B}'$ 中 $\mathcal{B}_\iota$ 的像 $\mathcal{B}'_\iota$ 是若干个 e-面的并。

对于 $x \in \mathcal{B}'$，我们用 $\mathcal{F}_e(x)$ 表示包含 x 的唯一 e-面 $\mathcal{B}'$。此外，我们用 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$ 表示所有 e-面的偏序集，其序由 $\mathcal{F}' \preceq \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ 给出。我们也将 $\mathcal{B}'_{d/e}$ 记作 d 维 e-面的集合。对于 $d = 0$，我们也称其为“e-顶点”。如果一族 $x_1, \ldots\ldots, x_r$ 个 e-顶点都包含在某个闭包中，则称它们“相邻”；该闭包属于一个 e-面。此时，存在唯一具有这一性质且在上述序下极小的 e-面 $\mathcal{F}_e(x_1, \ldots\ldots, x_r)$。

若 x，x' 是 $\mathcal{B}$ 中的两个点，则它们包含在同一个公寓 A 中。已知，包含 x 和 x' 的 A 的墙所对应的所有半空间的交集，与 A 的选取无关。它称为 x an x' 的“组合凸包”，记作 $\mathcal{H}_1(x,\ x')$。它是若干面的并集。类似地，我们用 $\mathcal{H}_e(x,\ x')$ 表示 A 中包含 x 和 x' 的所有 e-墙所对应的 e-半空间的交集。这同样与 A 无关，且是若干 e-面的并集。显然，$[x,x']\subset\mathcal{H}_e(x,\ x')\subset\mathcal{H}_1(x,\ x')$。

2.7.5 引理。— 令整数 e 如 *2.7.4* 所述。
那么，幂等元 $(e_x)_{x\in\mathcal{B}'}$ 具有以下性质。

i) 对所有 $x,x'\in\mathcal{B}'$，都有 $\mathcal{F}_e(x)=\mathcal{F}_e(x')\Rightarrow e_x=e_{x'}$。

ii) 若 x,x' 是相邻的 e-顶点，且 $x''\in]x,x'[$，则 $e_xe_{x'}=e_{x'}e_x=e_{x''}$。

iii) 若 x,x',x'' 是三个 e-顶点，满足 $x'\in\mathcal{H}_e(x,x'')$，且 x' 与 x 相邻，则 $e_xe_{x'}e_{x''}=e_xe_{x''}$。

*I*特别地，系统 $(e_x)^{x\in\mathcal{B}'_{0/e}}$ 按照 *[MS10*，定义 *2.1* 的意义是一致的 *].*

证明。由引理 2.7.3，i) 部分可由命题 2.6.8 iii) 得出，而 ii) 可由命题 2.6.9 得出。为证明陈述 iii)，取 $y\in]x,x''[$，使其充分接近 x，从而$x\in\mathcal{F}_e(y)$。那么，$\mathcal{F}_e(y)$ 是唯一的 e-面，在满足$\mathcal{F}\subset\mathcal{H}_e(x,x'')$ 和$x\in\mathcal{F}$的那些 e-面 $\mathcal{F}$ 中，它是极大的。事实上，这已在 [MS10], 的引理 2.9 中证明，因为该引理证明中所用到的 $\mathcal{B}'$ 多重单纯形结构的几何性质，在其 e-细分中均成立。特别地，我们有 $x'\in\mathcal{F}_e(y)$，并且可取 $y'\in\mathcal{F}_e(y)$，使得 $y\in]x',y'[$。由 i) 部分可得 $e_y=e_{y'}$。反复运用 $e_y=e_{y'}$ 以及命题 2.6.6 和 2.6.9，可得

$$e_xe_{x''}=e_xe_ye_{x''}=e_xe_{x'}e_{y'}e_{x''}=e_xe_{x'}e_ye_{x''}=e_{x'}e_xe_ye_{x''}=e_{x'}e_xe_{x''}=e_xe_{x'}e_{x''}。$$

□

根据上述引理的 i) 部分，我们可以采用以下记号。

2.7.6 记号。— 若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}'$的一个 e-面，则对于任意 $x\in\mathcal{F}$，我们记作 $e_{\mathcal{F}}:=e_x$。

根据前一个引理的 ii)，对于任意两个满足 $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$的 e-面 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$，我们有 $e_{\mathcal{F}}e_{\mathcal{F}'}=\overline{e_{\mathcal{F}}}$。现在我们来验证，[MS10]中的定理 2.4 的证明可以调整以适用于我们的情形。设 $V\in\mathrm{Rep}_R(G)$ 是一个光滑的 RG-模。它在 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$上定义了一个系数系统 $\mathcal{F}\longmapsto\mathcal{V}(\mathcal{F}):=e_{\mathcal{F}}V$；得益于上述恒等式 $e_{\mathcal{F}}e_{\mathcal{F}'}=e_{\mathcal{F}}$，其中对于 $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$，过渡映射 $e_{\mathcal{F}}V\longrightarrow e_{\mathcal{F}'}V$都是包含映射。选定 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$的一个定向后，我们可以构造胞腔链复形 $\mathcal{C}(\mathcal{B}'_{\bullet/e},\ \mathcal{V})$，其同调记为 $H_*(\mathcal{B}'_{\bullet/e},\ \mathcal{V})$。更一般地，对于 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$ 的任意多单纯复形子复形 Σ，我们都有一个链复形及其同调 $H_*(\Sigma,\ \mathcal{V})$。关于这些胞腔链复形的简要介绍，可参见例如 [MS10, §1.1.2] 。

2.7.7 引理。（参见 [MS10，定理 2。4]）——对于任意凸多单纯复形子复形 Σ*of* $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$，有 $H_0(\Sigma,\ \mathcal{V})=\sum_{x\in\Sigma_0}e_xV$，且对于 $n>0$，有 $H_n(\Sigma,\ \mathcal{V})=0$。

证明。我们回顾 Meyer 和 Solleveld 在 [MS10] 中证明定理 2.4 的各个步骤。

步骤 *1*。当 Σ是一个多单纯形时证明该结论。同上引理 2.18 后的论证直接依赖于引理 2.7.5 的性质 i)、ii) 和 iii)，无需任何修改即可适用。

步骤 *2*。 分治法：假设 Σ 是有限的，并且是两个凸子复形 Σ_+ 和 Σ_- 的并集，且二者的交集 Σ_0 为凸集。那么，如果该陈述对 Σ_+、Σ_- 和 Σ_0 成立，则对 Σ 也成立。这一步约化遵循同上的定理 2.12；该定理断言，分布 $e_\Sigma := \sum_{\mathcal{F}\subset\Sigma}(-1)^{\dim(\mathcal{F})}e_\mathcal{F}$ 是一个幂等元，使得对所有 $\mathcal{F}\subset\Sigma$ 都有 $e_\Sigma e_\mathcal{F} = e_\mathcal{F} e_\Sigma = e_\mathcal{F}$。该定理又由同上 的引理 2.8 和 2.9 以及命题 2.2 推出。但是，鉴于引理 2.7.5 的性质 i)、ii) 和 iii)，所有这些陈述都涉及公寓中组合凸包的几何性质，因此对于我们情形中的任何细分，它们仍然成立。

步骤 *3.* 证明若 Σ 是有限的且不是多单纯形，则可以像步骤 2 那样将其拆分。这里的论证还需稍作补充。先假设 Σ 包含在某个公寓中。那么存在一面 e墙，其对应的两个开半空间与 Σ的交非空。只需取 $\Sigma_\pm$ 与闭半空间的交，并取 Σ_0 与该墙的交。现在假设 Σ 不包含在单个公寓中。那么我们可以找到一个 1-室 Δ，其闭包与 Σ 的交非空，但不包含 Σ。选取一个包含 Δ 的公寓 A，以及 A 的一面墙，该墙支撑 Δ 的一个面并与 Σ相交非空。它对应某个仿射根 a，我们可以像同上引文第 140 页那样，使用以 Δ 为中心的 A 上的收缩。

步骤 *4.* 当 Σ有限时，这一陈述现已得知。将 Σ写成递增序列的有限凸子复形 Σ_n之并，即可推出 Σ 无限时的情形；这总是可以做到的。事实上，链复形 Σ 是由 Σ_n的链复形构成的直接极限。

□

2.7.8 定理 2.7.1 的证明。——若 $x\in\mathcal{B}'$，则存在一个 e-顶点 y，它位于 e-面 $\mathcal{F}_e(x)$ 的闭包中。由命题 2.6.9 可知 $e_x = e_y e_{x^\circ}$ 因此我们看到，$V\in$ 表示$_R^{\phi\, I}$，(G) 当且仅当 $V = \sum_{x\in\mathcal{B}_{0/e}} e_\phi$、$_I$、$_x V$。因此，根据前述引理的情形 $\Sigma = \mathcal{B}'_{\bullet/e}$，[MS10] 中定理 3.1 的证明可以原样适用，从而证明范畴 表示$_R^{\phi\, I}$，(G) 是一个 Serre 范畴，在任意余极限下稳定，并按定理所述生成。此外，设 V 是任意一个光滑的 RG-模，并令 V^ϕ，$_I := \sum_{x\in\mathcal{B}} e_x V$。显然 V^ϕ，$^I\in$ 表示$_R^{\phi\, I}$，(G)，并且我们看到，商 V_ϕ，$_I := V/V^\phi$，$_I$ 被所有 e_x 消去，因此 V_ϕ，$_I$ 的任何非零子商都不属于 表示$_R^{\phi\, I}$，(G)。

2.7.9 注记。 — 设 $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{B}'$ 的凸多面单纯子复形的一个递增序列，使得 $\mathcal{B}' = \bigcup_n \Sigma_n$。我们已经回顾过，$e_{\Sigma_n} := \sum_{\mathcal{F}\subset\Sigma_n}(-1)^{\dim(\mathcal{F})}e_\mathcal{F}$是一个幂等元，且对所有 $\mathcal{F}\subset\Sigma_n$，都有 $e_{\Sigma_n}e_\mathcal{F} = e_\mathcal{F}e_{\Sigma_n} = e_\mathcal{F}$。由此可得 $e_{\Sigma_{n-1}}e_{\Sigma_n} = e_{\Sigma_n}$，并且对所有 $V\in$表示$_R(G)$，我们有

$$\sum_{x\in\mathcal{B}} e_x V = \bigcup_n e_{\Sigma_n} V.$$

2.8 Repφ,I R (G) 的一些性质 Rep$_R^{\phi\, I}$,(G)

2.8.1 直因子问题。——我们坚信，范畴 Rep$_R^{\phi\, I}$,(G) 实际上是 Rep$_R(G)$ 的一个直因子，但这并不能从 Meyer– Solleveld 的工作中形式地推出，也不能从 Yu 的工作中推出。问题在于证明扩张 (2.7.2) 分裂；更确切地说，要证明 V映射的子空间 $\bigcap_x \ker(e_x|V)$ 满射到 $V_{\phi,I}$。

缺少的是 $\mathrm{Rep}_R^{\phi\, I}(G)$ 中内射余生成元的存在性，或者等价地说，存在足够多的被所有 $e_{\phi,I,x}$ 消去的投射表示。似乎要绕过这些问题，需要某种穷尽性结果，例如 Kim [Kim07] 和第二位作者 [Fin21]，证明的结果，或 Bushnell–Kutzko–Stevens 型理论所提供的结果。然而，如果将注意力限制在完备局部环上的容许对象，那么对偶技巧便可推出所需的分裂。

命题。— 设 $\mathcal{R}$ 是一个完备局部交换 R-代数，且 V 是一个容许光滑 $\mathcal{R}G$-模（意即，对任意开紧子群 $H \subset G$，$\mathcal{R}$-模 V^H 都是诺特模）。则扩张 *(2.7.2)* 分裂。换言之，容许范畴 $\mathrm{Adm}_{\mathcal{R}}^{\phi\, I}(G)$ 是 $\mathrm{Adm}_{\mathcal{R}}(G)$ 的一个直因子。

证明。设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{R}$ 上的 Matlis 模（即剩余域的内包），并通过令 $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(V, \mathcal{E})^\infty$，将 Matlis 对偶函子扩展到光滑 $\mathcal{R}G$-模。由于 p 在 $\mathcal{R}$ 中可逆，对任意开 pro-p-子群，均有 $(V^*)^H = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(V^H, \mathcal{E})$。因此，诺特 $\mathcal{R}$- 模的通常 Matlis 对偶定理表明，对于容许 $\mathcal{R}G$- 模，典范映射 $V \longrightarrow V^{**}$ 是一个同构，并且对 V 的每个 $\mathcal{R}G$-子模 W，都诱导出同构 $W \mapsto (W^\perp)^\perp$。

现在，令 e_x^* 为 $\mathcal{H}_R(G)$ 上的反对合 $g \mapsto g^{-1}$ 将 e_x 映到的像。注意，幂等元系 $(e_x^*)_{x \in \mathcal{B}_{0/e}}$ 是与配对 $(\phi,\ I)$ 相联系的幂等元系，其中 $^-$ 表示由复共轭诱导的 ${}^L\mathbf{G}$ 的自同构。令 $eV := \sum_{x \in \mathcal{B}} e_x V$，并令 $e^*V^* := \sum_{x \in \mathcal{B}} e_x^* V^*$。于是我们看到 $(e^*V^*)^\perp = \bigcap_{x \in \mathcal{B}} \ker(e_x | V)$，且 $(eV)^\perp = \bigcap_{x \in \mathcal{B}} \ker(e_x^* | V^*)$。由双对偶性可得 $(\bigcap_{x \in \mathcal{B}} \ker(e_x|V))^\perp = e^*V^*$，从而得到 $V = eV \oplus \bigcap_{x \in \mathcal{B}} \ker(e_x|V)$，如所需。 □

2.8.2 命题.（分离）— 设 (ϕ', I') 和 (ϕ, I) 是 *2.7.1* 中的两个不同的有序对。那么范畴 $\mathrm{Rep}_R^{\phi'\, I'}(G)$ 和 $\mathrm{Rep}_R^{\phi\, I}(G)$ 是正交的，具体而言，对于所有对象 $V \in \mathrm{Rep}_R^{\phi\, I}(G)$ 和 $V' \in \mathrm{Rep}_R^{\phi'\, I'}(G')$，我们有 $\mathrm{Ext}^*_{RG}(V, V') = \mathrm{Ext}^*_{RG}(V', V) = \{0\}$.

证明. 由 (2.5.3) 可得 $e_{\phi', I', x'} e_{\phi, I, x} = 0$ 对所有 $x', x \in \mathcal{B}$ 均成立。因此 $e_{\phi', I', x'} V = 0$ 对所有 $V \in \mathrm{Rep}_R^{\phi\, I}(G)$ 均成立，从而 $\mathrm{Hom}_{RG}(V', V) = 0$ 对所有 $V' \in \mathrm{Rep}_R^{\phi'\, I'}(G')$ 均成立。利用 $\mathrm{Rep}_R^{\phi'\, I'}(G')$ 中的投射分解，我们还得到 $\mathrm{Ext}^*_{RG}(V', V) = 0$。 □

2.8.3 “本质温和”子范畴。——我们引入满子范畴

$$\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{et}}(G) := \left\{ V \in \mathrm{Rep}_R(G), V = \sum_{\phi, \iota, x} e_{\phi, \iota, x} V \right\}.$$

这里的“et”代表“本质温和”（essentially tame），以沿用 Bushnell 和 Henniart 的术语，尽管我们担心这有些容易引起误解。从本质上说（并且在假设（*H1*）和（第二上同调群）下），这个子范畴应当涵盖所有与在野惯性子群 P_F 的导出子群 $[P_F, P_F]$ 上平凡的朗兰兹参数相关联的表示。按照构造，它是由投射对象生成且对任意余极限封闭的 Serre 子范畴，而命题 2.8.2 告诉我们，它分解为一个直积

$$\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{et}}(G) = \prod_{(\phi, I)} \mathrm{Rep}_R^{\phi, I}(G).$$

如上所述，我们一般不知道它是否为直因子子范畴，但我们将证明，在附加一个假设后，它就是整个范畴。回顾一下，我们构造 $\mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)$ 的方法适用于任意 ϕ，只要 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是 $\hat{\mathbf{G}}$ 的 Levi 子群，且满足假设 p 为奇数，并且既不是$\mathbf{G}$ 的挠素数，也不是$\mathbf{G}$ 的挠素数。在一个附加且强得多的假设下，实际上可以保证，对于 $\phi \in \Phi(P_F, \mathbf{G})$，所有中心化子 $C_{\hat{\mathfrak{G}}}(\phi)$ 都是 Levi 子群。事实上，根据引理 2.2.9 iv)，只要 p 不整除$\mathbf{G}$ 的绝对外尔群的阶，情况便是如此。

在这一假设下，自然可以预期，所有表示都是上述意义下的本质温和表示。事实上，这是[Fin21]和 [Fin22]中的穷尽结果所带来的结论。

2.8.4 定理。 — 设 p 不整除$\mathbf{G}$的绝对 *Weyl* 群的阶。则$\mathrm{表示}_R^{\mathrm{et}}(G) = \mathrm{表示}_R(G)$。

证明。为了证明该定理，我们必须证明，对于每个 $V \in \mathrm{表示}_R(G)$，都存在一个野惯性参数 ϕ、一个嵌入 $\iota \in I_\phi$ 和 $y \in \mathcal{B}_\iota$，使得$e_{\phi,\iota,y}V \neq 0$。我们将从 [Fin21] 和 [Fin22] 在证明 Kim 和 Yu 构造的类型为所有 Bernstein 块产生类型时得到的类似结果推出这一结论。我们先回顾一下转用于我们情形的相关结果。注意，要应用 2.4.7 中所述的 Yu 构造，只需要一个三元组 $(\vec{\mathbf{G}}, \vec{\psi}, x)$，我们称之为“截断 Yu 数据”；其中 $\vec{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}^0 \subset \ldots \subset \mathbf{G}^d)$是一个温和扭曲 Levi 序列，$x \in \mathcal{B}$属于容许嵌入 $\mathcal{B}(\mathbf{G}^0, F) \hookrightarrow \mathcal{B}$的像，而 $\vec{\psi} = (\psi_i)_{i=0,\ldots,d}$ 是一组特征[5]$\psi_i : \mathbf{G}^i(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$，满足

- ψ_0、……、ψ_{d-1}的深度构成递增序列 $r_{-1} := 0 < r_0 < \ldots < r_{d-1}$，
- $\psi_d = 1$（此时记 $r_d = r_{d-1}$）或 ψ_d 的深度为 $r_d > r_{d-1}$。

˄ 对于这样的截断 Yu 数据，2.4.7 中的过程会关联一对 (K_x^+, ψ_x)，其中包含一个开 pro-p 子群及该子群的一个特征。此对进而定义了 $\mathcal{H}_R(G)$ 中的一个幂等元 $e(\vec{\mathbf{G}}, \vec{\psi}, x)$，其支集为 K_x^+。

类似于 [Fin22, Theorem 4.1]，证明开头的讨论，利用 pro-p 群的特征的像可经由 $\mu_p^\infty \to R^\times$ 分解这一观察，并利用 μ_p^∞ 的整除性来扩张特征，我们可以应用 [Fin21, Theorem 6.1] 的证明论证（其较弱形式，即在同上的记号下包含一个截断数据，在此已足够）以及 [Fin21, Lemma 7.6] 的证明论证，再结合 [Fin21, Lemma 7.3]，得到以下结果：对于任意 RG-模 V，存在规范化的一般截断 *Yu* 数据 $(\vec{\mathbf{G}}, \vec{\psi}, x)$ 使得 $e(\vec{\mathbf{G}}, \vec{\psi}, x)V \neq 0$。

这里，如果对所有 $i < d$，限制 $(\psi_i)|_{G^i_{x,r_i}}$ 都由一个$\mathbf{G}^{i+1}$-一般元表示（如 2.5.7 中所述），则称（截断）Yu 数据为一般位置；如果 ψ_i 在所有 i 对应的 $(\mathbf{G}_i)_{\mathrm{sc}}(F)$ 上平凡，则称其为规范化的。有了这一结果，我们只需证明：对于任意规范化的一般位置截断 Yu 数据，存在一个野惯性参数 ϕ、一个嵌入 $\iota \in I_\phi$ 和一个$\vec{\ }$ $\vec{\ }$点 $y \in \mathcal{B}_\iota$，使得 $e_{\phi,\iota,y} = e(\vec{\mathbf{G}}, \psi, x)$。这由下一个引理得出。□

[5]文献中，这些特征的标准记号是 ϕ_i，但本文已将字母 ϕ 专用于参数。

2.8.5 引理。 — 这里我们只假设 p 是奇数，且不是$\mathbf{G}$ 的挠素数（对我们通常的假设略作弱化）。设 $(\vec{\mathbf{G}}\ \vec{\psi}, x)$ 为规范化的一般位置截断 *Yu* 数据。那么存在一对 (ϕ, ι)，由$\mathbf{G}$ 的一个野惯性参数 ϕ 和一个 F-有理嵌入 $\iota \in I_\phi$ 组成，使得 $\mathbf{G}_\iota^0 = \mathbf{G}^0$, $K_{\iota,\,x}^+ = K_x^+$，并且 $\check{}\phi_{\iota,\,x}^+ = \hat{}\psi_x$。

证明。 特征 $\check{}\varphi_0 := \prod_{k=0}^d (\psi_k)|_{\mathbf{G}^0}$ 在 $\mathbf{G}^0(F)$ 上是平凡的，因为该数据已规范化。根据注 2.4.2, $\check{}\varphi_0$ 来自某个元素 $\hat{}\varphi_0 \in Z^1(W_F, Z(\hat{}\mathbf{G}^0))$。

取 $\mathbf{G}^0$ 中一个温和分歧极大环面 S。存在一个典范的 W_F-等变嵌入 $Z(\hat{}\mathbf{G}^0) \hookrightarrow \hat{}\mathbf{S}$，它使我们能够将 $\hat{}\varphi_0$ 推前到 $Z^1(W_F, \hat{}\mathbf{S})$ 中，从而得到特征 $(\check{}\varphi_0)|_{\mathbf{S}(F)}$ 的朗兰兹参数 $\varphi_0 := \hat{}\varphi_0 \rtimes \mathrm{Id}_{W_F} \colon W_F \longrightarrow {}^L\mathbf{S}$。考虑与 $\mathbf{S}_F \to \mathbf{G}_F$ 对偶的、由 W_F-稳定的嵌入 $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 的共轭类。任意此类嵌入 $\kappa : \hat{}\mathbf{S} \hookrightarrow \hat{}\mathbf{G}$ 都可以延拓为一个温和分歧的 L-嵌入 ${}^L\kappa \colon {}^L\mathbf{S} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$（参见 [Kal19, 引理 5.2.6]）。令 $\varphi := {}^L\kappa \circ \varphi_0 \colon W_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ 且 $\phi := \varphi|_{P_F}$。

按照构造， $\phi(P_F)$ 包含于 $\kappa(\mathbf{S})$ 中，因此它是阿贝尔的。由于 p 不是$\mathbf{G}$的挠素，中心化子 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 根据引理 2.2.9 iii) 是$\mathbf{G}$ 的 Levi 子群。和往常一样，我们记 $\mathbf{S}_\phi := C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)_{\mathrm{ab}}$。由 φ，我们得到 W_F 在$\mathbf{S}_\phi$ 上的作用，而嵌入 $\kappa \colon \mathbf{S} \hookrightarrow C_{\hat{}\mathbf{G}}(\phi)$ 诱导出一个 W_F-等变的环面满射 $\mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{S}_\phi$。该满射的对偶进而给出一个 F-有理嵌入 $\iota : \mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$；仅凭其存在性，便可由命题 2.2.3 ii) 得出 ϕ 是$\mathbf{G}$的野惯性参数。

到目前为止，我们已将一对 (ϕ, ι) 与任意一个标准化截断 Yu 数据 $(\vec{\mathbf{G}}\ \vec{\psi}, x)$ 联系起来。现在利用给定的截断 Yu 数据也是一般位置的这一事实，并选取一个使$\mathbf{S}$分裂的驯 ramified 扩张 E。接下来我们断言，对于任意满足 $r_{i-1} < r \leqslant r_i$ 的 $r \in \mathbb{R}$，都有

$$\left\{\alpha \in \Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G}), \check{\varphi}_0(N_{E/F}(\alpha^\vee(E_r^\times))) = \{1\}\right\} = \Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G}^i).$$

事实上， $i = 0$ 的情形已在 [Kal19] 的引理 3.6.9 证明中处理，而同一证明也适用于 $i < d$。如引理 2.3.3 的证明所示，$\Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G})$ 与 $\Sigma(\hat{}\mathbf{S}, \hat{}\mathbf{G})^\vee$ 之间的识别将 $\Sigma(\mathbf{S}, \mathbf{G}^i)$与 $\Sigma(\hat{}\mathbf{S}\ C\hat{}\mathbf{G}(\phi(I_F^r)))^\vee$识别起来，对 $r_{i-1} < r \leqslant r_i$成立。换言之，我们有 $\mathbf{G}^i = C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_{\phi,r}))$，特别地，$\mathbf{G}^i = \mathbf{G}_\iota^i$。还可推出，对任意点 $x \in \mathcal{B}_\iota$，都有$K_{\iota,x}^+ = K_x^+$。

最后，对每个 i，特征 $\check{}\varphi_i := \prod_{k=i}^d (\psi_k)|_{\mathbf{G}_i(F)}$ 在$\mathbf{G}_i(F)$上也在$(\mathbf{G}_i)_{\mathrm{sc}}(F)$上平凡，对所有 i均如此，因此它来自某个元素 $\hat{}\varphi_i \in Z^1(W_F, Z(\hat{}\mathbf{G}^i))$。根据构造，我们有 $(\hat{}\varphi_0)|_{I_F^{r_i}} = (\hat{}\varphi_i)|_{I_F^{r_i}}$属于 $H^1(I_F^{r_i}, Z(\hat{}\mathbf{G}_0))$。我们处于 2.4.5 的情形，因此可得 $\check{}\phi_{\iota,x}^+ = \hat{}\psi_x$。

□

2.8.6 与同种的相容性。——对于任意同种 $f : \mathbf{G}' \longrightarrow \mathbf{G}$，都有一个与之关联的对偶等ogeny $f : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}'$ 的典范共轭类。此外，若 f 定义在 F 上，则任意此类对偶同种都可以扩展为 L-群 ${}^L\mathbf{G} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}'$ 之间的态射。因此我们得到一个良定义的转移映射 $f^* \colon \Phi(P_F, \mathbf{G}) \mapsto \Phi(P_F, \mathbf{G}')$。注意，由于假设 (H1) 和 (H2) 对 G 成立，它们对 $\mathbf{G}'$ 也成立。若固定一个对偶同种 f 以及一个态射 $\phi \colon P_F \longrightarrow \mathbf{G}$，使得 $\phi = \phi \times \mathrm{Id}$ 是一个野惯性参数，那么我们就得到 Levi 子群之间的一个同种 $C\hat{}\mathbf{G}(\phi) = C\hat{}\mathbf{G}(\phi) \longrightarrow C\hat{}\mathbf{G}'(f \circ \phi)$，其核为 $\ker(f)$；对偶地，这提供了一个 F-有理同种的共轭类 $\mathbf{G}_{f^*\phi} \longrightarrow \mathbf{G}_\phi$，其核为 $\ker(f)$，并伴有一个 F-有理同种 $\mathbf{S}_{f^*\phi} \longrightarrow \mathbf{S}_\phi$。现在，任意一个 $\iota \in I_\phi$ 都诱导出一个同构 $\mathbf{S}_\phi \xrightarrow{\sim} Z(\mathbf{G}_\iota)^\circ$，而 2.1.3 中的讨论表明，这个同构唯一提升为一个

同构 $\mathbf{S}_{f^*\phi} \xrightarrow{\sim} Z(f^{-1}(\mathbf{G}_\iota))^\circ$，从而给出一个元素 $f^*\iota \in I_{f^*\phi}$。由此我们得到一个保持 F-有理性的双射 $I_\phi = I_{f^*\phi}$，但 G'-共轭先验上比 G-共轭更粗。

命题。——在此情形下，拉回函子 f^*：表示$_R(G) \longrightarrow$ 表示$_R(G')$ 将表示$_R^{\phi,I}(G)$ 映入 $\prod_{I' \subseteq f^*I}$表示$_R^{f^*\phi,I'}(G')$。

证明。我们将$\mathbf{G}$ 和$\mathbf{G}'$的 Bruhat–Tits 建筑视为相同。由定义可知，$\mathcal{B}_\iota = \mathcal{B}_{f^*\iota}$ 对任意 $\iota \in I_\phi$ 均成立。此外，对于 $x \in \mathcal{B}_\iota$，存在满射 $K'^+_{f^*\phi,f^*\iota,x} \twoheadrightarrow K^+_{\phi,\iota,x}$，而特征的构造表明 $\check{}(f^*\phi)^+_{f^*\iota,x}$ 是 $\check{}\phi^+_{\iota,x}$的拉回。根据所考虑范畴的定义，结论随即得证。

□

2.8.7 与抛物诱导的相容性。——假设 ϕ 来自$\mathbf{G}$的一个 F-Levi 子群$\mathbf{M}$，也就是说，存在对偶嵌入 $^L\mathbf{M} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ 以及分解$\phi : P_F \xrightarrow{\phi_M} {}^L\mathbf{M} \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$，其中 ϕ_M 是$\mathbf{M}$ 的一个野惯性参数（回忆一下，这意味着 ϕ_M 可扩张为相关朗兹参数 $W'_F \longrightarrow {}^L\mathbf{M}$）。

在此情形下，我们有 $\hat{\mathbf{M}}_{\phi_M} = \hat{\mathbf{M}} \cap \hat{\mathbf{G}}_\phi$，从而得到一个 W_F-等变满射 $\hat{\mathbf{S}}_{\phi_M} \twoheadrightarrow \hat{}$ $\mathbf{S}_\phi$，它在对偶侧诱导 F-环面的一个单射$\mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{S}_{\phi_M}$。由此可知，集合 I_{ϕ_M} 中的任一 F-有理Levi中心嵌入 $\iota_M : \mathbf{S}_{\phi_M} \hookrightarrow \mathbf{M}$ 都诱导集合 I_ϕ中的一个嵌入 $\iota\colon \mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$。显然，$M$-共轭嵌入导出 G-共轭嵌入，因此对 M-共轭类 $I_M \subset I_{\phi_M}$ 的任一选取都指向一个 G-共轭类 $I \subset I_\phi$。我们将使用记号$(\phi_M, I_M) \mapsto (\phi, I)$来表示 ϕ来自 ϕ_M且 I来自 I_M这一事实。

定理. — 设$\mathbf{P}$ 为$\mathbf{G}$ 的抛物 F-子群，其*Levi*分量为$\mathbf{M}$，并以 i_P 表示相应的（未正规化的）抛物诱导函子，以 r_P 表示相应的*Jacquet*函子。

i) 若此对 (ϕ, I) 来自此对 (ϕ_M, I_M)，则有

$$i_P\left(\mathrm{Rep}_R^{\phi_M,I_M}(M)\right) \subseteq \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G).$$

ii) 假设 p 不整除 $\mathbf{G}$ 的绝对 *Weyl* 群的阶，则有

$$r_P(\mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)) \subseteq \prod_{(\phi_M,I_M)\mapsto(\phi,I)} \mathrm{Rep}_R^{\phi_M,I_M}(M).$$

iii) 进一步假设 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi) \subseteq \hat{}\mathbf{M}$，则 i_P 诱导出一个范畴等 es

$$\mathrm{Rep}_R^{\phi_M,I_M}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)$$

价于 q r_P与到(ϕ_M, I_M)-因子上的投影之复合的*uasi*逆 .

2.8.8 我们从一些初步观察开始，为证明该定理做准备。首先 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 注意等式 $\mathbf{M}_{\phi_M} = \mathbf{M} \cap \mathbf{G}_\phi$ 给出两个满射 $\mathbf{S}_{\phi_M} \longrightarrow \mathbf{S}_\phi$ 和 $\mathbf{S}_{\phi_M} \longrightarrow \hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\mathbf{M}_{\mathrm{ab}}$，其乘积 $\mathbf{S}_{\phi_M} \longrightarrow \mathbf{S}_\phi \times \mathbf{M}_{\mathrm{ab}}$ 具有有限核（因为 $Z(\mathbf{M}_{\phi_M})^\circ = Z(\mathbf{M})^\circ Z(\mathbf{G}_\phi)^\circ$）。对偶地，这给出两个包含映射 $\mathbf{S}_\phi \subset \mathbf{S}_{\phi_M}$ 和 $Z(\mathbf{M})^\circ \subset \mathbf{S}_{\phi_M}$，使得 $\mathbf{S}_{\phi_M} = \mathbf{S}_\phi Z(\mathbf{M})^\circ$。

特别地，如果 $\iota_M \in I_M$通过第一个嵌入诱导 $\iota \in I_\phi$，则我们有 $\iota_M(\mathbf{S}\phi_M) = \iota(\mathbf{S}\phi)Z(\mathbf{M})^\circ$，因此 $\mathbf{M}_{\iota_M} = \mathbf{M} \cap \mathbf{G}_\iota$。

记 $\mathcal{B}_M$ 为任意容许嵌入 $\mathcal{B}(\mathbf{M}, F) \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{G}, F)$ 的像。于是我们有$\mathcal{B}_{\iota_M} = \mathcal{B}_\iota \cap \mathcal{B}_M$。现在，给定一个点 $x \in \mathcal{B}_{\iota_M}$，前面各小节中的构造分别给出两个幂等元 $e_{\iota,x} \in \mathcal{H}_R(G)$ 和 $e_{\iota_M,x} \in \mathcal{H}_R(M)$，它们分别与由一对 $(K^+_{\iota,x}, \check{\phi}^+_{\iota,x})$ 和 $(K^+_{\iota_M,x}, \check{\phi}^+_{\iota_M,x})$ 构成的对象相关联；这两对对象由 G（分别为 M）的一个开 pro-p-群及该群的一个特征组成。为了比较这两个幂等元，将环 $\mathcal{H}_R(G)$ 扩大为环 RG 是有用的； RG 由 G 上所有紧支撑分布组成（不一定局部常值）。对于 G 的任意开紧子群，我们将使用第 1.1 节中引入的类似记号。特别地，我们可以将 $e_{\iota,x}$ 和 $e_{\iota_M,x}$ 视为环 RG_x 中的幂等元；该环由 x 的稳定子 G_x 上的所有分布组成。此环还包含闭 pro-p-子群 $U_x := U \cap G_x$，$U_{x,0+} := U \cap G_{x,0+}$，$U^\dagger_{\iota,x} := U \cap K^\dagger_{\iota,x}$ 以及 $U^+_{\iota,x} := U \cap K^+_{\iota,x}$ 的平均幂等元 e_{U_x}，$e_{U_{x,0+}}$，$e_{U^\dagger_{\iota,x}}$ 和 $e_{U^+_{\iota,x}}$；这些子群属于 G_x，其中 U 表示 P 的幺幂根。类似地，我们有幂等元 $e_{\bar{U}_x}$，$e_{\bar{U}_{x,0+}}$，$e_{\bar{U}^\dagger_{\iota,x}}$ 和 $e_{\bar{U}^+_{\iota,x}}$，其中 U 是相对于 M 而言，P 的对向抛物子群 P 的幺幂根。

下述 引理包含上述定理证明中的主要技术要点 .

2.8.9 引理。 — 对于任意的 $x \in \mathcal{B}_{\iota_M}$ 以及前述记号，我们有：

i) $e_{\iota,x} = e_{U^+_{\iota,x}} e_{\iota_M,x} e_{\bar{U}^+_{\iota,x}} = e_{U^+_{\iota,x}} e_{\bar{U}^+_{\iota,x}} e_{\iota_M,x} = e_{\bar{U}^+_{\iota,x}} e_{\iota_M,x} e_{U^+_{\iota,x}}$ *in* $RK^+_{\iota,x}$.

ii) $(e_{U^\dagger_{\iota,x}} e_{\bar{U}^\dagger_{\iota,x}} e_{U^\dagger_{\iota,x}}) e_{\iota,x} = |U^\dagger_{\iota,x}/U^+_{\iota,x}|^{-1} e_{U^\dagger_{\iota,x}} e_{\iota,x}$

iii) $e_{\iota,x} \in RK^\dagger_{\iota,x}\, e_{U^\dagger_{\iota,x}} e_{\iota_M,x} e_{\bar{U}^\dagger_{\iota,x}} RK^\dagger_{\iota,x}$

iv) $e_{U_{x,0+}} e_{\bar{U}_x} e_{\iota_M,x} \in RG_x e_{U_x} e_{\bar{U}_x} e_{\iota_M,x}$ *and* $e_{\iota_M,x} e_{U_x} e_{\bar{U}_{x,0+}} \in e_{\iota_M,x} e_{U_x} e_{\bar{U}_x} RG_x$.

v) $e_{\iota,x} e_{U_x} e_{\iota,x} = |U_x/U_{\iota,x}|^{-1} e_{U_{\iota,x}} e_{\iota,x}$ *and* $e_{\iota,x} e_{U_{x,0+}} e_{\iota,x} = |U_{x,0+}/U^\dagger_{\iota,x}|^{-1} e_{U^\dagger_{\iota,x}} e_{\iota,x}$.

vi) If $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi) \subseteq \hat{\mathbf{M}}$, *then* $U_{\iota,x} = U^\dagger_{\iota,x}$ *and* $\bar{U}_{\iota,x} = \bar{U}^\dagger_{\iota,x}$.

证明。 i) 由于 $\iota(\mathbf{S}\phi) \subset \iota_M(\mathbf{S}\phi_M) \subset \mathbf{M}$，我们可以将 2.4.9 应用于 $(K^+_{\iota,x}, \check{\phi}^+_{\iota,x})$ 的伊wahori 分解。记 $e^M_{\iota,x}$ 为与特征 $(\check{\phi}^+_{\iota,x})|_{M \cap K^+_{\iota,x}}$ 相关联的 RG_x 的幂等元，则该引理推出 RG_x 中的如下分解（实际上在 $RK^+_{\iota,x}$ 中）：

$$e_{\iota,x} = e_{U^+_{\iota,x}} e^M_{\iota,x} e_{\bar{U}^+_{\iota,x}} = e_{U^+_{\iota,x}} e_{\bar{U}^+_{\iota,x}} e^M_{\iota,x} = e_{\bar{U}^+_{\iota,x}} e^M_{\iota,x} e_{U^+_{\iota,x}}.$$

因此，只需证明 $e_{\iota_M,x} = e^M_{\iota,x}$。等价地，我们需要证明

$$M \cap K^+_{\iota,x} = K^+_{\iota_M,x} \text{ and } (\check{\phi}^+_{\iota,x})|_{M \cap K^+_{\iota,x}} = \check{\phi}^+_{\iota_M,x}.$$

我们先来验证群的等式。我们在 2.8.8 中看到，$\iota_M(\mathbf{S}\phi_M) = \iota(\mathbf{S}\phi)Z(\mathbf{M})^\circ$，因此 $\mathbf{M}_{\iota_M} = \mathbf{M} \cap \mathbf{G}_\iota$。类似地，对任意 $r > 0$，我们有 $\iota_M(\mathbf{S}\phi_M,r) = \iota(\mathbf{S}\phi,r)Z(\mathbf{M})^\circ$，因此 $C_{\mathbf{M}}(\iota_M(\mathbf{S}\phi_M,r)) = \mathbf{M} \cap C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}\phi,r))$。特别地，由此可知，递减滤过 $(\mathbf{S}\phi_M,r)_r$ 的跳跃点集合$r'_{-1} = 0 < r'_0 < \ldots < r'_{d'-1}$是滤过 $(\mathbf{S}\phi,r)_r$的跳跃点集合$r_{-1} = 0 < r_0 < \ldots < r_{d-1}$的子集。对于 $0 \leqslant j < d'$，记 i_j为 0 与 $d-1$之间满足 $r'_j = r_{i_j}$的唯一整数，并令 $i_{-1} = -1$。那么，按照 2.4.7 的记号，我们

有 $M\cap G^i_{\iota,\ x,\ r+}=M^j_{\iota_M,\ x,\ r+}$，对所有 $i=0,\ \ldots\ldots,\ d$以及满足 $i_{j-1}<i\leqslant i_j$的 j，特别地，我们看到 $M\cap G^i_{\iota,\ x,\ (r_{i-1}/2)+}\subseteq M^j_{\iota_M,\ x,\ (r'_{j-1}/2)+}$，当 $i=i_{j-1}+1$时取等号。这意味着以下第二个等式:

$$\begin{aligned}M\cap K^+_{\iota,x} &= (M\cap G^0_{\iota,x,0+})(M\cap G^1_{\iota,x,(r_0/2)+})\cdots(M\cap G^d_{\iota,x,(r_{d-1}/2)+})\\ &= M^0_{\iota_M,0+}M^1_{\iota_M,(r'_0/2)+}\cdots M^{d'}_{\iota_M,(r'_{d'-1}/2)+}=K^+_{\iota_M,x}\end{aligned}$$

第一个等式由每个 $G^i_{\iota,x,(r_{i-1}/2)+}$ 关于对 (**P**,**P**) 的 Iwahori分解得出，正如引理 2.4.9 的证明中所示。

现在转而讨论特征。根据定义，$\check{}\phi^+_{\iota_M,x}$是一个乘积 $\prod_{j=0}^{d'}(\psi^+_{M,j})|_{K^+_{\iota_M,x}}$，其中 $\psi^+_{M,j}$是 $M^j_{\iota_M,x,0+}M_{x,(r'_j/2)+}$的某个特征；而 $(\check{}\phi^+_{\iota,x})|_{K^+_{\iota_M,x}}$是一个乘积 $\prod_{i=0}^{d}(\psi^+_i)|_{K^+_{\iota_M,x}}$，其中$\psi^+_i$ 是 $G^i_{\iota,x,0+}G_{x,(r_i/2)+}$的某个特征。注意，若 $i_{j-1}<i\leqslant i_j$，则有

$$M\cap G^i_{\iota,x,0+}G_{x,(r_i/2)+}=(M\cap G^i_{\iota,x,0+})M_{x,(r_i/2)+}=M^j_{\iota_M,x,0+}M_{x,(r_i/2)+}\supseteq M^j_{\iota_M,x,0+}M_{x,(r'_j/2)+}.$$

因此，只需证明 $\psi^+_{M,j}=\prod_{i=i_{j-1}+1}^{i_j}(\psi^+_i)|_{M^j_{\iota_M,x,0+}M_{x,(r'_j/2)+}}$。回顾一下，$(\psi^+_i)|_{G^i_{\iota,x,0+}}$ 是特征 $\check{}\varphi_i\check{}\varphi_{i+1}^{-1}$ 的限制，该特征属于 G^i_ι，并取决于如下选择：选择延拓 $\hat{}\ \phi|_{I_F^{r_{i-1}+}}$ 的 $\hat{}\varphi_i\in H^1(W_F,Z(\hat{}\mathbf{G}_{\phi,r_{i-1}+}))$，以及选择延拓 $\hat{}\ \phi|_{I_F^{r_i+}}$ 的 $\hat{}\varphi_{i+1}\in H^1(W_F,Z(\hat{}\mathbf{G}_{\phi,r_i+}))$。类似地，$(\psi^+_{M,j})|_{M^j_{\iota_M,x,0+}}$ 是特征 $\check{}\varphi_{M,j}\check{}\varphi_M^{-1}{}_{,j+1}$ 的限制，该特征取决于如下选择：选择延拓 $\hat{}\phi_M|_{I_F^{r'_{j-1}+}}$ 的 $\hat{}\varphi_{M,j}\in H^1(W_F,Z(\hat{}\mathbf{M}_{\phi_M,r'_{j-1}+}))$，以及选择延拓 $\hat{}\ \phi_M|_{I_F^{r'_j+}}$ 的 $\hat{}\varphi_{M,j+1}\in H^1(W_F,Z(\hat{}\mathbf{M}_{\phi_M,r'_j+}))$。根据引理 2.4.8，这些选择最终并不重要；也就是说，$\prod_{j=0}^{d'}(\psi^+_{M,j})|_{K^+_{\iota_M,x}}$ 和 $\prod_{i=0}^{d}(\psi^+_i)|_{K^+_{\iota_M,x}}$ 不依赖于这些选择。因此，我们可以将 $\hat{}\varphi_{M,k}$ 选为 $\hat{}\varphi_{i_{k-1}+1}$ 与包含映射 $\hat{}\ \hat{}Z(\mathbf{G}_{\phi,r_{i_{k-1}}+})\subset Z(\mathbf{M}_{\phi_M,r'_{k-1}+})$ 的复合，对所有 $1\leqslant k\leqslant d'$ 均如此。这样，我们便确保特征 $\psi^+_{M,j}$ 和 $\prod_{i=i_{j-1}+1}^{i_j}\psi^+_i$ 在 $M^j_{\iota_M,x,0+}$上相同。接下来只需验证它们在$M_{x,(r'_j/2)+}$上也相同，方法是检查 Yu 延拓过程在 M 和 G 上的相容性。对于 G和指标 i，该过程基于分解 $\mathfrak{g}_{x,(r_i/2)+:r_i+}=\mathfrak{g}^i_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}\oplus\mathfrak{n}^i_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}$。关键在于，每当 $i_{j-1}<i\leqslant i_j$时，将此分解与 $\mathfrak{m}$相交（这相当于取M的极大分裂中心环面作用的权 0 部分），就会得到相应的分解 $\mathfrak{m}_{x,(r_i/2)+:r_i+}=\mathfrak{m}^j_{\iota,x,(r_i/2)+:r_i+}\oplus\mathfrak{n}^M_{\iota,x}{}^j{}_{,(r_i/2)+:r_i+}$。

ii) 和 iii) 由命题 2.5.13 的海森堡性质可知，Dat09, §5. 中的计算表明，对于每个特征 $\chi:U^\dagger_{\iota,\ x}/U^+_{\iota,\ x}\longrightarrow R^\times$，记 e_χ 为 $RU^\dagger_{\iota,\ x}$ 中与之对应的幂等元，我们有

$$|U^\dagger_{\iota,x}/U^+_{\iota,x}|e_\chi e_{\bar{U}^\dagger_{\iota,x}}e_\chi e_{\iota,x}=e_\chi e_{\iota,x}.$$

取 $\chi=1$，我们得到 ii）。对所有 χ 求和，得到

$$|U^\dagger_{\iota,x}/U^+_{\iota,x}|\sum_{\chi:U^\dagger_{\iota,x}/U^+_{\iota,x}\longrightarrow R^\times}e_\chi e_{\bar{U}^\dagger_{\iota,x}}e_\chi e_{\iota,x}=e_{\iota,x},$$

[6]事实上，我们将同上中的记号特化如下：$G^\dagger:=K^\dagger_{\iota,\ x}$, $G^*:=K^+_{\iota,\ x}$, $U^\dagger:=U^\dagger_{\iota,\ x}$, $U^*:=U^+_{\iota,\ x}$, 以及 $\theta:=\check{}\phi^+_{\iota,\ y}$。

特别可知 $e_{\iota,x} \in RK^\dagger_{\iota,x} e_{\bar{U}^\dagger_\iota,x} RK^\dagger_{\iota,x_\circ}$。类似地，我们有 $e_{\iota,x} \in RK^\dagger_{\iota,x} e_{U^\dagger_\iota,x} RK^\dagger_{\iota,x}$，因此也有 $e_{\iota,x} \in RK^\dagger_{\iota,x} e_{U^\dagger_\iota,x} RK^\dagger_{\iota,x} e_{\bar{U}^\dagger_\iota,x} RK^\dagger_{\iota,x_\circ}$。但是 $K^\dagger_{\iota,x}$ 相对于 (P, $\bar{}$P) 也具有 Iwahori分解性质，因此 $RK^\dagger_{\iota,x} e_{U^\dagger_\iota,x} RK^\dagger_{\iota,x} e_{\bar{U}^\dagger_\iota,x} RK^\dagger_{\iota,x} = RK^\dagger_{\iota,x} e_{U^\dagger_\iota,x} e_{\bar{U}^\dagger_\iota,x} RK^\dagger_{\iota,x_\circ}$。最后，回顾一下 $e_{\iota,x}$ 在 $RK^\dagger_{\iota,x}$ 中是中心的，并注意到 $e_{U^\dagger_\iota,x} e_{\iota,x} e_{\bar{U}^\dagger_\iota,x} = e_{U^\dagger_\iota,x} e_{\iota_M,x} e_{\bar{U}^\dagger_\iota,x_\circ}$

iv) 这是 Dat [Dat09] 的命题 9.3。不过，由于该处证明将许多细节留给读者，我们在此补充这些细节。该命题最终是将 同上 的推论 5.10 应用于以下设置的结果：

- $\underline{G} := G_{x,\,0}$（因此也有 $G^\dagger = G_{x,\,0+}$，见下文），
- $\underline{G'} := K^\circ_{\iota,\,x}$（因此也有 $G'^\dagger = K^\dagger_{\iota,\,x}$ 和 $M' = K^\dagger_{\iota_M,\,x}$），
- $\varepsilon' := e_{\iota_M,\,x}$ 和 $\tilde{\varepsilon}' := e_{\iota,\,x_\circ}$

为了应用同上处的推论 5.10，需要检验若干性质。首先，G 和 G' 都必须是 G 在 $\mathcal{O}_F$ 上某个连通光滑模型的整点群。根据定义，G_x,0 是 G_x 的抛物型子群，而所需模型由 Bruhat–Tits 构造；$K^\circ_{\iota,x}$ 的所需模型则由 Yu 在 [Yu15，命题 10.2] 中构造。接着，群 $G^\dagger$（分别为 $G'^\dagger$）应是 G（分别为 G'）特殊纤维中幺幂根的膨胀的整点群；更明确地说，它们分别是 G 和 G' 的 pro-p-根。因此，它们确实分别由 $G_{x,0+}$ 和 $K^\dagger_{\iota,x}$ 给出。注意，同上处的假设 $G' \cap \underline{G}^\dagger \supseteq G'^\dagger$ 确实成立（甚至等式也成立）。其次，抛物型子群 P 和 P 应当按照 [Dat09，§5.1] 的意义是 G'-可容许的。为此，只需证明 M 的极大分裂中心环面 $\mathbf{A_M}$ 能扩张为 Yu 的模型 $K^\circ_{\iota,x}$ 的一个子环面。但后者包含抛物型子群 $G^0_{\iota,x}$,0 的 Bruhat–Tits 模型，该子群属于 G_ι，见 [Yu15，命题 10.4 iv)]。因此，$\mathbf{G}_\iota$ 的任意极大分裂环面 S，只要其公寓在 $\mathcal{B}_\iota$ 中包含 x，就能扩张为 Yu 模型中的一个分裂环面。由于 $x \in \mathcal{B}_{\iota_M} = \mathcal{B}(\mathbf{M}_{\iota_M})$ 且 $\mathbf{M}_{\iota_M} = \mathbf{M} \cap \mathbf{G}_\iota$ 是 $\mathbf{G}_\iota$ 的一个 F-Levi 子群，我们可以选取一个包含于 $\mathbf{M}_{\iota_M}$ 的这样的 S。而 $\mathbf{A_M}$ 包含于 $\mathbf{M}_{\iota_M}$ 的中心，因此也包含于 S；由此可知，$\mathbf{A_M}$ 能扩张为 Yu 模型中的一个分裂子环面。幂等元 ε' 和 $\tilde{\varepsilon}'$ 还有三个条件需要满足。首先，按照 [Dat09，引理 5.6] 的意义，ε' 应当“实质上是零深度的”。事实上，我们已在上文 ii) 的证明中验证了这一性质。其次，[Dat09，推论 5.10] 的假设 i) 可由本引理的 i) 推出，而同上处的假设 ii) 可由命题 2.5.2 ii) 推出（该命题更一般地蕴含 $e_{\iota,x}$ 在 G_x 中的中心化子是 $K_{\iota,x}$）。现在可应用 [Dat09], 的推论 5.10，从而完成 iii) 的证明。

v) 根据命题 2.5.2 ii) 和 (2.4.12)，对于所有 $u \in U_x \setminus U_{\iota,\,x}$，我们有 $e_{\iota,\,x} u e_{\iota,\,x} = 0$；而根据命题 2.5.2 i)，如果 $u \in U_{\iota,\,x}$，则有 $e_{\iota,\,x} u e_{\iota,\,x} = u e_{\iota,\,x}$。令 $e_{U_x} = |U_x/U_{\iota,\,x}|^{-1} \sum_{u \in U_x/U_{\iota,\,x}} u e_{U_{\iota,\,x}}$，即可得到第一个恒等式。第二个恒等式的证明方法相同。

ˆ vi) 假设 CˆG(ϕ) $\subseteq$M 蕴含 Sϕ $=$Sϕ_M。由于 ι_M(Sϕ_M) $\supseteq Z$(M)°，我们得到 $\bar{}$G$_\iota \subseteq$ M（实际上是 G$_\iota =$ M$_{\iota_M}$）。特别地，我们有 U $\cap$ G$_\iota =$ U $\cap$ G$_\iota = \{1\}$，从而可知 $U \cap K_{\iota,\,x} = U \cap K^\dagger_{\iota,\,x}$ 以及 $\bar{U} \cap K_{\iota,\,x} = \bar{U} \cap K^\dagger_{\iota,\,x_\circ}$ □

2.8.10 引理。 — 采用 *2.8.8* 的记号，存在一个 $G \times K_{\iota_M,x}$-等变同构

$$i_P\left(\mathrm{ind}^M_{K^+_{\iota_M,x}}\left(\check{\phi}^+_{\iota_M,x}\right)\right) \simeq \mathrm{ind}^G_{U_{\iota,x} K^+_{\iota,x}}(\tilde{\phi}^+_{\iota,x})$$

其中，$\tilde{\phi}^{+}_{\iota,x}$ 是 $U_{\iota,x}K^{+}_{\iota,x}$ 的唯一特征标，它延拓了 $\check{\phi}^{+}_{\iota,x}$ 以及 $U_{\iota,x}$ 的平凡特征。

这里，$K_{\iota_M,x}$ 的作用源于该群同时中心化了$K^{+}_{\iota_M}$的x 的特征 $\check{\phi}^{+}_{\iota_M,x}$以及$U_{\iota}$的$x K^{+}_{\iota}$、$x$的特征 $\phi^{+}_{\iota,x}$。具体而言，通过以下识别

$$\mathrm{ind}^{M}_{K^{+}_{\iota_M,x}}\left(\check{\phi}^{+}_{\iota_M,x}\right)=\mathcal{H}_R(M)e_{\iota_M,x}\text{ and }\mathrm{ind}^{G}_{U_{\iota,x}K^{+}_{\iota,x}}(\tilde{\phi}^{+}_{\iota,x})=\mathcal{H}_R(G)e_{U_{\iota,x}}e_{\iota,x}$$

这些作用由右乘给出。

证明。 由引理 2.8 的 (iv) 可知，9, [Dat09, Cor. 3.6(ii)] 给出了一个$RG\otimes RK_{\iota_M,x}$-线性同构

$$\mathrm{ind}^{G}_{G_x}\left(\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}_{x,0+}}e_{U_x}e_{\iota_M,x}\right)\xrightarrow{\sim} i_P\left(\mathrm{ind}^{M}_{K^{+}_{\iota_M,x}}\left(\check{\phi}^{+}_{\iota_M,x}\right)\right).$$

注意，在同上中，等变性是针对 $RG\otimes_R(e_{\iota_M,x}RM_xe_{\iota_M,x})$而言的，而这里我们将第二个作用与映射 $RK_{\iota_M,x}\xrightarrow{\times e_{\iota_M}}e_{\iota_M,x}RM_xe_{\iota_M,x}$复合。（另请注意，将 i_P替换为正规化诱导，会得到上述同构的一个同构陪域。）

因此，接下来只需在 $RG_x\otimes_R RK_{\iota_M,x}$ 之间找到一个线性同构

$$\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}_{x,0+}}e_{U_x}e_{\iota_M,x}=\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}_{x,0+}}e_{\iota_M,x}e_{U_x}=\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}_{x,0+}}e_{\iota,x}e_{U_x},$$

其中，第一个等式由 $K_{\iota_M,x}\subset M_x$ 归一化 U_x 得出，且

$$\mathcal{H}_R(G_x)e_{U_{\iota,x}}e_{\iota,x}=\mathrm{ind}^{G_x}_{U_{\iota,x}K^{+}_{\iota,x}}(\tilde{\phi}^{+}_{\iota,x}).$$

由引理 2.8.9 (v)，包含映射

$$\mathcal{H}_R(G_x)e_{\iota,x}e_{\bar{U}_{x,0+}}e_{\iota,x}\subseteq\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}_{x,0+}}e_{\iota,x}\subseteq\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}$$

是等式。出于类似的原因，即因为 $e_{\iota,x}e_{U_{\iota,x}}$ 是 $e_{\iota,x}e_{U_x}e_{\iota,x}$ 的标量倍，映射

$$\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}e_{U_{\iota,x}}\xrightarrow{\times e_{U_x}}\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}e_{U_x}\xrightarrow{\times e_{\iota,x}}\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}e_{U_x}e_{\iota,x}$$

是同构。类似地，由引理 2.8.9 (ii)，包含映射

$$\mathcal{H}_R(G_x)e_{U^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{U^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}\subseteq\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{U^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}\subseteq\mathcal{H}_R(G_x)e_{U^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}$$

是等式。根据最后一个等式和命题 2.5.2(i)，利用 $e_{U^{\dagger}_{\iota,x}}e_{U_{\iota,x}}=e_{U_{\iota,x}}$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_R(G_x)e_{U_{\iota,x}}e_{\iota,x}&=\mathcal{H}_R(G_x)e_{U^{\dagger}_{\iota,x}}e_{U_{\iota,x}}e_{\iota,x}=\mathcal{H}_R(G_x)e_{U^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}e_{U_{\iota,x}}=\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{U^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}e_{U_{\iota,x}}\\&=\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}e_{U_{\iota,x}}.\end{aligned}$$

综合以上所有观察，我们还得到

$$\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}_{x,0+}}e_{\iota,x}e_{U_x}=\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}e_{U_x}=\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}^{\dagger}_{\iota,x}}e_{\iota,x}e_{U_x},$$

并且我们看到，右乘 e_{U_x} 诱导出一个同构 $\mathcal{H}_R(G_x)e_{U_{\iota,x}}e_{\iota,x}\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}_R(G_x)e_{\bar{U}_{x,0+}}e_{\iota,x}e_{U_x}$，它是 $G_x\times K_{\iota_M,x}$-等变的，因为 $K_{\iota_M,x}\subset M_x$ 正规化了 U_x。 □

2.8.11 定理 *2.8.7* 的证明。—— i) 鉴于定理 2.7.1 中给出的投射生成元，只需证明对每个 $\iota_M \in I_M$ 和 $x \in \mathcal{B}_\iota \cap \mathcal{B}_M$，我们都有

$$i_P\left(\mathrm{ind}_{K^+_{\iota_M,x}}^{M}\left(\check{\phi}^+_{\iota_M,x}\right)\right) \in \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G).$$

这由引理 2.8.10 得出。

ii) 关于 p的假设会继承到$\mathbf{G}$的 Levi 子群上，因此由定理 2.8.4，我们有两个分解 $\mathrm{Rep}_R(G) = \prod \mathrm{Rep}_R^{\phi\, I_M}(G)$ 和 $\mathrm{Rep}_R(M) = \prod \mathrm{Rep}_R^{\phi_M\, I_M}(M)$。因此，根据弗罗贝尼乌斯互反律，ii) 可由 i) 得出。

iii) 将系数域扩张以加入 p 的一个平方根后，即可检验该等价，因此不失一般性，我们可以假设 R 是一个 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数。现在只需证明所述结论对归一化抛物诱导和 Jacquet 函子成立，因为这种归一化保持范畴和等价。因此，在证明余下部分中，我们用 $r_P = r_P^G$和 $i_P = i_P^G$分别表示归一化 Jacquet 函子和归一化抛物诱导，并用 $\tilde{r}_P$表示 r_P与投影到 $\mathrm{Rep}_R^{\phi_M\, I_M}(M)$ 的复合。我们首先证明 $\tilde{r}_P \circ i_P$同构于 $\mathrm{Rep}_R^{\phi_M\, I_M}(M)$ 上的恒等函子，因此，特别地， i_P在 $\mathrm{Rep}_R^{\phi_M\, I_M}(M)$ 上是全忠实的。

为此，回顾一下，弗罗贝尼乌斯互反律由一个自然变换 $r_P \circ i_P \longrightarrow \mathrm{Id}$ 给出，它是表示 $R(M)$ 的加性自函子范畴中的满同态，其核由 Mackey 公式描述如下：存在一个由双陪集 $P\dot{w}P$in $G \setminus P$ 编号的滤过，其分次部分具有如下形式 $\mathcal{F}_{\dot{w}} := \mathrm{Ad}_{\dot{w}} \circ i_{P\cap M^w}^{M^w} \circ r_{M\cap P^w}^{M} \circ$ 这里，我们选取了极大分裂极大环面 $\mathbf{T}$ 的有理正规化子 $N_G(T)$ 中的代表元 $\dot{w}$，而 w 是 $\dot{w}$ 在绝对 Weyl 群 $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ 中的像。在这种情况下，$\mathbf{M} \cap \mathbf{P}^w$ 是 $\mathbf{M}$ 的一个抛物 F-子群，其 Levi 分量为 $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^w$；而 $\mathbf{P} \cap \mathbf{M}^w$ 是 $\mathbf{M}^w$ 的一个抛物子群，且具有相同的 Levi 分量 $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^w$。由此，根据 i) 和 ii) 可得

$$\mathcal{F}_{\dot{w}}\left(\mathrm{Rep}_R^{\phi_M, I_M}(M)\right) \subseteq \prod_{(\phi_w, I_w) \mapsto (\phi_M, I_M)} \mathrm{Ad}_{\dot{w}}\left(\mathrm{Rep}_R^{\phi_w, I_w}(M^w)\right)$$

其中乘积取遍相对于 $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^w$的、映射到 (ϕ_M, I_M) 的配对 (ϕ_w, I_w)，其到 $\mathbf{M}^w$ 的推前仍记作 (ϕ_w, I_w)。

让我们画出对偶图景。我们可以假设 $\mathbf{M}$ 包含 $\mathbf{T}$，它是$\mathbf{G}$ 中的参考极大环面（属于 $\mathbf{G}$的一个 W_F-稳定钉扎）。我们有 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{T}$ 之间的对偶性，它交换根与余根。这诱导出一个同构 $w \mapsto w, W_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) \xrightarrow{\sim} W_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{T})$。令 $\hat{}w$为 w在正规化子 $N_{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{}\mathbf{T})$ 中的一个提升。那么 $\hat{}\mathbf{M}^{\hat{}w}$ 是 $\hat{}\mathbf{G}$的一个 Levi 子群，与 $\mathbf{M}^w$对偶，而 $\mathrm{Ad}_{\hat{w}^{-1}}$ 是 $\mathrm{Ad}_{\dot{w}}$的对偶同源（实际上是同构）。因此，最后一个包含关系可以改写为

$$\mathcal{F}_{\dot{w}}\left(\mathrm{Rep}_R^{\phi_M, I_M}(M)\right) \subseteq \prod_{(\phi_w, I_w) \mapsto (\phi_M, I_M)} \left(\mathrm{Rep}_R^{\mathrm{Ad}_{\hat{w}^{-1}}(\phi_w, I_w)}(M)\right)$$

遵循与上文相同的约定。现在令 ϕ_w：$P_F \longrightarrow \hat{}\mathbf{M} \cap \hat{}\mathbf{M}^{\hat{w}}$为 $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}^w\hat{}$ 的一个参数，其推前到 $\mathbf{M}$后表示 ϕ_M。假设 $\mathrm{Ad}_{\hat{}w^{-1}}(\phi_w)$ 也表示 ϕ_M。那么存在某个 $\hat{}m \in \hat{}\mathbf{M}$，使得 $\mathrm{Ad}_{\hat{}m\hat{}w^{-1}}(\phi_w) = \phi_w$，即 $\hat{}m\hat{}w^{-1} \in C_{\hat{}\mathbf{G}}(\phi_w)$。根据我们的假设，$\hat{}$ 这意味着 $\hat{}w \in \mathbf{M}$，因此 $\dot{w} \in \mathbf{M}$，这与 $P\dot{w}P \neq P$ 这一事实矛盾。这意味着

$\mathcal{F}_{\dot{w}}\left(\mathrm{Rep}_R^{\phi_M\, I_M,}(M)\right)$ 在 $\mathrm{Rep}_R^{\phi_M\, I_M,}(M)$ 上的投影为零，最终我们证明了自然变换 $r_P \circ i_P \longrightarrow \mathrm{Id}$ 诱导出一个同构 $\tilde{r}_P \circ i_P \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathrm{Rep}^{\phi_M, I_M}(M)}$。

现在，为了得出 $\tilde{r}_P$ 和 i_P 是范畴的准逆等价，只需证明 $\tilde{r}_P$ 在 $\mathrm{Rep}_R^{\phi\, I}$，$(G)$ 上是保守的。因此，设 V 是 $\mathrm{Rep}_R^{\phi\, I}$，$(G)$ 中的一个非零对象。根据定义，存在一个点 $x \in \mathcal{B}_\iota$，使得 $e_{\iota,x}V \neq 0$。回想一下，在假设 $C^{\wedge}\mathrm{G}(\phi) \subseteq \mathrm{M}$ 下，我们有 $\mathrm{G}_\iota \subseteq \mathrm{M}$，因此 $\mathcal{B}_\iota \subseteq \mathcal{B}_M$ 和 x 实际上属于 $\mathcal{B}_{\iota_M}$。我们断言 $e_{U_x} e_{\bar{U}_x,0+} e_{\iota_M,x} V \neq 0$。事实上，由引理 2.8.9 的 (i) 和 (v)，我们有 $e_{\iota,x} e_{U_x} e_{\bar{U}_x,0+} e_{\iota_M,x} e_{\iota,x} = e_{\iota,x} e_{U_x} e_{\iota_M,x} e_{\bar{U}_x,0+} e_{\iota,x} = e_{\iota,x} e_{U_x} e_{U_\iota^+,x} e_{\iota_M,x} e_{\bar{U}^+_\iota,x} e_{\bar{U}_x,0+} e_{\iota,x} = e_{\iota,x} e_{U_x} e_{\iota,x} e_{\bar{U}_x,0+} e_{\iota,x} = e_{U_\iota,x} e_{\bar{U}_\iota^\dagger,x} e_{\iota,x}$，而根据同一引理的 (vi)，这也等于 $e_{U_\iota^\dagger,x} e_{\bar{U}_\iota^\dagger,x} e_{\iota,x} = e_{U_\iota^\dagger,x} e_{\iota,x} e_{\bar{U}_\iota^\dagger,x} = e_{U_\iota^\dagger,x} e_{\iota_M,x} e_{\bar{U}_\iota^\dagger,x}$。因此，由引理 2.8.9(iii) 可推得 $e_{\iota,x} \in RK_{\iota,x} e_{U_x} e_{\bar{U}_x,0+} e_{\iota_M,x} RK_{\iota,x}$，而我们的断言 $e_{U_x} e_{\bar{U}_x,0+} e_{\iota_M,x} V \neq 0$ 可由 $e_{\iota,x} V \neq 0$ 得出。现在利用引理 2.8.9 的 (iv)，我们可以应用 [Dat09], 的命题 3.1，该命题指出，自然映射 $V \longrightarrow r_P(V) = V_U$ 诱导出一个同构 $e_{U_x} e_{\bar{U}_x,0+} e_{\iota_M,x} V \xrightarrow{\sim} e_{\iota_M,x} r_P(V)$。特别地，$e_{\iota_M,x} r_P(V)$ 非零，因此 $r_P(V)$ 在 $\mathrm{Rep}^{\phi_M, I_M}(M)$ 上的投影非零。

2.8.12 命题。— 在定理 *2.8.7 iii)* 的情形下，伴随等价对$\tilde{r}_P$: 表示$_R^{(\phi,I)}(G) \rightleftarrows$表示$^{(\phi_M, I_M)}{}_R(M)$: i_P在同构意义下独立于 **P** 的选择。

证明。与定理 2.8.7iii) 的证明一样，我们可以将 p 的平方根加入系数域，并假设 $\tilde{r}_P$ 和 i_P 已归一化。设 Q 是 G 的另一个抛物 F 子群，其 Levi 分量为 M，从而得到另一个逆等价的伴随对 $(\tilde{r}_Q, i_Q)$。根据几何引理，复合 $r_P \circ i_Q$ 具有一个由 G 中的双陪集 $Q\dot{w}P$ 索引的滤过，其分次部分具有 $\mathrm{Ad}\, \dot{w} \circ i_{P \cap M^w} \circ r_{M \cap Q^w}$ 的形式。特别地，与陪集 QP 相关的分次部分是 $\mathrm{Rep}_R(M)$ 的恒等自函子。与定理 2.8.7iii) 的证明一样，将定义域限制到 $\mathrm{Rep}^{(\phi_M, I_M)}{}_R(M)$ 并投影到这一因子时，只有该分次部分保留下来。因此我们得到一个同构 $\tilde{r}_P \circ i_Q \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathrm{Rep}_R^{(\phi_M, I_M)}(M)}$。由伴随性，我们得到一个态射 $(i_Q)|_{\mathrm{Rep}^{(\phi_M, I_M)}{}_R(M)} \longrightarrow (i_P)|_{\mathrm{Rep}_R^{(\phi_M, I_M)}(M)}$，其与 $\tilde{r}_P$ 的复合是一个同构。由于 $\tilde{r}_P$ 是保守的（正如我们在定理 2.8.7iii) 的证明中所见），该态射也是一个同构。

□

3 范畴等价与归约到零深度

回忆一下，我们假设 p 是奇数，并满足假设（*H1*）和（*H2*），也就是说，p 既不是 **G** 的挠素数，也不是 G 的挠素数。对于一对 $(\phi,\ I)$，其中 $\phi:\ P_F \longrightarrow \mathbf{G}$ 是一个野惯性参数，其中心化子 $C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是 G 的 Levi 子群，而 G-共轭类 I 由有理 Levi 中心嵌入 $\mathbf{S}_\phi \hookrightarrow$**G** 构成，我们在第 2.7 节中为其关联了一个 Serre 子范畴 $\mathrm{Rep}_R^{(\phi,I)}(G)$，它包含于 $\mathrm{Rep}_R(G)$ 中，其中 R 是任意交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$-代数。选取 $\iota \in I$ 后，我们也可以将 ϕ 视为 $\mathbf{G}_\iota$ 的一个野惯性参数，它具有相同的关联环面 $\mathbf{S}_\phi$；对于该参数，相应的 Levi 中心嵌入集合恰好是单元素集合 $\{\iota\}$，因此得到一个 Serre 子范畴 $\mathrm{Rep}_R^{\phi}(G_\iota)$。本节的目的是构造一些“自然的”等价

$$\mathrm{Rep}_R^{\phi}(G_\iota) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_R^{(\phi,I)}(G).$$

如第 2.2.6 节所述，$\mathrm{Rep}^{\phi}_{R}(G_\iota)$ 是深度 0 子范畴 $\mathrm{Rep}^{1}_{R}(G_\iota)$ 经任意特征 $\hat{}\check{}\varphi : G_\iota \longrightarrow R^\times$ 扭曲所得，其中该特征关联于将 ϕ 扩张为 1-余循环 $\varphi : W_F \longrightarrow Z(\mathbf{G}_\iota) = Z(C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi))$。因此，这些范畴等价属于“约化至深度 0”这一一般范式；实际上，我们将要构造的是范畴等价

$$\mathrm{Rep}^{1}_{R}(G_\iota) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^{(\phi,I)}_{R}(G).$$

除非另有说明，R 表示一个交换的 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$-代数 R。不过，我们的主要结果要求 R 含有一个 4th 次单位根和一个 p的平方根。

3.1 主要结果

固定一对 (ϕ, I) 以及如上所述的一个嵌入 $\iota \in I$。回顾一下，$\mathcal{B}'_\iota$ 表示 $\mathbf{G}_\iota$ 的扩展 Bruhat–Tits 建筑在 G 的约化 Bruhat–Tits 建筑 $\mathcal{B}'$ 中的像，群 $G_{\iota,x}$ 是 G_ι 中一点 $x \in \mathcal{B}'_\iota$ 的稳定子，并且我们将群 $K_{\iota,x}$ 定义为 $G_{\iota,x}K^\dagger_{\iota,x}$，其中 $K^\dagger_{\iota,x} := K^\dagger_\iota \hat{,x}$ 表示在 2.5.1 中为 $\hat{}x$ 在 $\mathcal{B}_\iota$中 x 的任意原像所定义的群。类似地，我们记 $K^+_{\iota,x} := K^+_\iota \hat{,x}$，其中 $\hat{}x$ 是 $\mathcal{B}_\iota$中 x 的任意原像。

3.1.1 定　理。— 若 R 是一个 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数，则存在一个范畴等价 s

$$\mathcal{I} : \mathrm{Rep}^{1}_{R}(G_\iota) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^{(\phi,I)}_{R}(G)$$

以及一族显式构造的 $\{\mathcal{W}_{\iota,x}\}_{x\in\mathcal{B}'_\iota}$ $RK_{\iota,\ x}$-模 $\mathcal{W}_{\iota,\ x}$ 使得，对于任意 $x \in \mathcal{B}'_\iota$以及任意 $G_{\iota,\ x}$ 的 R-表示 ρ，只要它在 $G_{\iota,\ x,\ 0+}$上平凡，就存在一个 RG-模的同构

$$\mathcal{I}(\mathrm{ind}^{G_\iota}_{G_{\iota,x}}(\rho)) \simeq \mathrm{ind}^{G}_{K_{\iota,x}}(\mathcal{W}_{\iota,x} \otimes_R \rho)$$

通过该同构，$\mathcal{I}$ 诱导出一个 R-代数同构

$$\mathrm{End}_{RG_\iota}(\mathrm{ind}^{G_\iota}_{G_{\iota,x}}(\rho)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{RG}(\mathrm{ind}^{G}_{K_{\iota,x}}(\mathcal{W}_{\iota,x} \otimes_R \rho)).$$

本定理的证明将构成本论文余下大部分内容。关于$RK_{\iota,\ x}$-模$\mathcal{W}_{\iota,\ x}$的更多细节，请参见定理 3.4.11 和推论 3.4.14；在正式定义它们之前，还需做更多准备。这里只需指出，它们将通过一种适用于 R 的海森堡–韦伊表示理论构造，我们将在 3.3.1 中介绍该理论。该描述将使我们能够推出与类型相关联的正深度 Hecke 代数和深度零 Hecke 代数之间的同构；详情请参见 4.1，尤其是推论 4.1.2。

3.2 建筑上的局部化

在本文余下部分中，整数 e 始终假定满足 *2.7.4* 的条件，并且使得1-面 的重心是 e-顶点（这确保了 G 中 e-面的稳定子群也是这些 e-面的固定子群）。

3.2. $\mathcal{B}'$ 上的 **1** G-等变系数系统。——我们定义一个范畴 $[\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G]$ 如下：

- 其对象集合是 G的约化建筑中所有 e面的集合 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$。
- 对于 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}' \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}$, 我们定义 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') := \{g \in \overline{G}, g\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'\}$, 复合由 G中的乘法给出。

G-等变的 R-模系数系统是一个函子 $\mathcal{V}$: $[\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G] \longrightarrow R$ –Mod。具体来说，它由一族 R-模 $(\mathcal{V}_\mathcal{F})^{\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\bullet/e}}$ 以及面映射 $\mathcal{V}_\mathcal{F} \xrightarrow{\beta_\mathcal{V},\ \mathcal{F}\ \mathcal{F}'} \mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$ 组成，对每一对满足 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$的面（对应于 $g = 1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$）都给出相应的面映射，并配备同构$g_{\mathcal{V},\mathcal{F}}$: $\mathcal{V}_\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{g\mathcal{F}}$，这些映射满足适当的传递性和相容关系。若上下文明确，我们也可以简写为 $\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$，表示 $\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$，并将 $g_{\mathcal{F}}$ 简写为 $g_{\mathcal{V},\mathcal{F}}$。特别地，每个$\mathcal{V}_\mathcal{F}$ 都带有其在 G中稳定子 $G_\mathcal{F}$ 的 $\mathcal{F}$ 的 R-线性作用。若这些作用是光滑的，我们就称该 G-等变系数系统是光滑的。光滑的 G-等变系数系统构成一个阿贝尔范畴 $\mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$，其中态射由函子间的自然变换给出。

3.2.2 系数系统与表示。——存在一个投影函子 $[\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G] \xrightarrow{\pi} [*/G]$，其目标范畴 $[*/G]$只有一个对象 $*$，且该对象的自同态集合为 G。注意， G 在一个 R-模上的表示 V由一个函子 $[*/G] \longrightarrow R$ –Mod 给出。与π 复合后，便得到一个正合函子

$$\pi^* : \mathrm{Rep}_R(G) \longrightarrow \mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G),$$

它将 V 映至常系数系统 $\mathcal{F} \mapsto V$，其 G-等变结构由 G 在 V上的作用给出。函子 π^* 有一个左伴随，记作 $\pi_!$。具体而言，我们有

$$\begin{array}{rccc} \pi_! : & \mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G) & \to & \mathrm{Rep}_R(G) \\ & \mathcal{V} & \mapsto & \mathrm{colim}_{\mathcal{B}'_{\bullet/e}}\mathcal{V} \end{array},$$

其中，余极限是对函子 $\mathcal{V}$ 限制到偏序集 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$所关联的范畴后取的，而 G 的作用来自它在该偏序集上的作用以及 $\mathcal{V}$上的 G-等变结构。

3.2.3 (ϕ, I)-系数系统。——回顾命题 2.6.8 iii)：对于 $x \in \mathcal{B}$，幂等元 $e_{\phi,\ I,\ x}$ 仅取决于包含 x 在 $\mathcal{B}'$中的像的 e-面 $\mathcal{F} \in \mathcal{B}'$，因此我们可以将这个幂等元记为 $e_{\phi,\ I,\ \mathcal{F}}$。我们定义：

> $\mathrm{Coef}_R^{\phi\ I,}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$:= 由 $\mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$ 中所有光滑的 G-等变系数系统 $\mathcal{V}$组成的满子范畴；对于任意面 $\mathcal{F}$，都有 $\mathcal{V}_\mathcal{F} = e_{\phi,\ I,\ \mathcal{F}}\mathcal{V}_\mathcal{F}$。

由 $\pi_!$ 的定义可知

$$\pi_!(\mathrm{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)) \subset \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G).$$

由命题 2.6.9，我们有等式 $e_{\phi,I,\mathcal{F}}e_{\phi,I,\mathcal{F}'} = e_{\phi,I,\mathcal{F}}$，只要 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$。因此，对于 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$ 上任意光滑的 G-等变系数系统 $\mathcal{V}$，我们有 $\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}(e_{\phi,I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_\mathcal{F}) \subseteq e_{\phi,I,\mathcal{F}'}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$。

另一方面，事实 $e_{\phi,I,g\mathcal{F}} = ge_{\phi,I,\mathcal{F}}g^{-1}$ 意味着 $g_{\mathcal{V},\mathcal{F}}(e_{\phi,I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}}) = e_{\phi,I,g\mathcal{F}}\mathcal{V}_{g\mathcal{F}}$。由此我们得到一个函子

$$\begin{array}{rccl}(-)^{\phi,I}: & \mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G) & \to & \mathrm{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G) \\ & \mathcal{V} & \mapsto & \mathcal{V}^{\phi,I}: \mathcal{F} \mapsto e_{\phi,I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}}\end{array}$$

这是从包含函子 $\mathsf{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G) \subset \mathsf{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$ 到右伴随的函子。与 π^* 复合后，我们得到一个函子

$$(\pi^*)^{\phi,I}: \mathrm{Rep}_R(G) \longrightarrow \mathrm{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$$

它是限制在 $\mathsf{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$ 上的 $\pi_!$ 的右伴随。具体而言，对于 $V \in$ 表示$_R(G)$，系数系统 $(\pi^*)^{\phi,I}(V)$ 由以下数据给出

- $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}$，$(\pi^*)^{\phi,I}(V)_{\mathcal{F}} = e_{\phi,I,\mathcal{F}}V$
- $\forall \mathcal{F}, \mathcal{F}'$w 即 $\overline{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}'$，映射 $\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 是包含 $e_{\phi,I,\mathcal{F}}V = e_{\phi,I,\mathcal{F}}e_{\phi,I,\mathcal{F}'}V \subseteq e_{\phi,I,\mathcal{F}'}V$
- $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}$，$\forall g \in G$，映射 $g_{\mathcal{F}}$: $e_{\phi,I,\mathcal{F}}V \xrightarrow{g} e_{\phi,I,g\mathcal{F}}V = ge_{\phi,I,\mathcal{F}}g^{-1}V$ 由 g 的作用给出。

我们注意到，$(\pi^*)^{\phi,I}$ 可通过以下满子范畴分解：

> $\mathsf{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}}$:=由所有光滑的 G-等变系数系统 $\mathcal{V}$组成的 $\mathsf{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$ 的满子范畴，满足：对于任意一对面 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$，只要满足 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$，映射$\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 就诱导出同构 $\mathcal{V}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} e_{\phi,I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$。

我们将 $\mathsf{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}}$ 中的系数系统称为 笛卡尔 (ϕ, I)-系数系统。

命题。——上述函子诱导出范畴的准逆等价

$$\pi_!: \mathrm{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}} \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G): (\pi^*)^{\phi,I} \tag{3.2.4}$$

证明。这是 [Lan21] 的定理 (4.11) 应用于幂等元系 $(e_{\phi,I,x})^{x\in\mathcal{B}'_{0/e}}$，不同之处在于，我们的面分解是 同上 所采用面分解的 e细分，特别是，在 同上 的背景下，我们的顶点不一定是顶点。除了 [MS10] 的原有技术（我们已在引理 2.7.7 的证明中将其调整到我们的背景下）之外，Lanard 在 [Lan21] 中论证的要点，是在 §3那里构造“局部映射”。这反过来依赖于顶点之间“容许路径”的概念（§2同上），而该概念只取决于公寓的面分解的几何性质。但我们的面分解与 [Lan21], 中所采用的面分解是相似的，因此容许路径的概念以相同方式成立，该论证也适用于我们的情形。

□

3.2.5 G_ι-等变系数系统 $\mathcal{B}'_\iota$。— 固定 $\iota \in I$。回顾 2.7.4，由于我们对整数 e 的选择，$\mathcal{B}_\iota$ 在 $\mathcal{B}'$ 中的像 $\mathcal{B}'_\iota$ 在 $\mathcal{B}'$ 的 e-面分解下是稳定的，即 $\mathcal{B}'$ 的一个 e-面要么包含于 $\mathcal{B}'_\iota$ 中，要么与之不相交。我们将 $\mathcal{B}'_\iota$ 中包含于 $\mathcal{B}'_\iota$ 的 e-面集合记为 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$。[7] 由于 G_ι 在 $\mathcal{B}'_\iota$ 上的作用保持 e- 面分解不变，我们可以像 3.2.1 中那样定义一个范畴 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota]$ 和一个光滑 G_ι-等变系数系统的阿贝尔 R-线性范畴 $\mathsf{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$，其定义在 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 上。于是我们有一个投影函子 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota] \xrightarrow{\pi_\iota} [*/G_\iota]$，它诱导出一对伴随函子

$$(\pi_{\iota,!}, \pi_\iota^*) : \mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota) \rightleftarrows \mathrm{Rep}_R(G_\iota),$$

如 3.2.2 中所述。此外，由于 $G_{\iota,\ x,\ 0+}$ 仅取决于包含点 x 的 e-面 $\mathcal{F}_e(x)$，因此我们也可以考虑如下定义的"深度 0"系数系统范畴：

$\mathsf{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\ \bullet/e}/G_\iota) :=$ 由所有光滑的 G_ι-等变系数系统 $\mathcal{V}$ 组成的 $\mathsf{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\ \bullet/e}/G_\iota)$ 的满子范畴，使得对于任意面 $\mathcal{F}$，都有 $\mathcal{V}_\mathcal{F} = e_{G_{\iota,\ \mathcal{F},\ 0+}}\mathcal{V}_\mathcal{F}$，

其中 $e_{G_{\iota,\ \mathcal{F},\ 0+}}$ 是对 $G_{\iota,\ \mathcal{F},\ 0+}$ 取平均化的幂等元，因而将其投影到$G_{\iota,\ \mathcal{F},\ 0+}$-不动向量上。我们注意到 $\pi_{\iota,\ !}(\mathsf{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\ \bullet/e}/G_\iota)) \subset \mathsf{Rep}^1_R(G_\iota)$。

如 3.2.3 中所述，当 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$ 时，等式 $e_{\iota,\mathcal{F},0+}e_{\iota,\mathcal{F}',0+} = e_{\iota,\mathcal{F},0+}$，以及当 $g \in G_\iota$ 时，等式 $e_{\iota,g\mathcal{F},0+} = ge_{\iota,\mathcal{F},0+}g^{-1}$，使我们能够构造一个右伴随函子 $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^1$，对应于 $\mathsf{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$ 到 $\mathsf{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$ 的包含，定义为对所有 $\mathcal{F} \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，令 $\mathcal{V}^1_\mathcal{F} := e_{\iota,\mathcal{F},0+}\mathcal{V}_\mathcal{F}$。再与 π_ι^* 复合，即可得到一对伴随函子

$$(\pi_{\iota,!}, (\pi_\iota^*)^1) : \mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota) \rightleftarrows \mathrm{Rep}^1_R(G_\iota).$$

如同 3.2.3，$(\pi_\iota^*)^1$ 通过以下满子范畴分解

$$\mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)^{\mathrm{cart}} := \begin{array}{l}\mathsf{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\ \bullet/e}/G_\iota) \text{ 的满子范畴，其中包含所有光滑 } G_\iota\text{-等变}\\ \text{系数系统 } \mathcal{V}\text{，使得对于任意一对满足 } \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}' \text{ 的面 } (\mathcal{F},\ \mathcal{F}'),\\ \text{映射} \beta_{\mathcal{V},\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}'} \text{ 都诱导出一个同构 } \mathcal{V}_\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} e_{G_{\iota,\ \mathcal{F},\ 0+}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'},\end{array}$$

我们将其对象称为笛卡尔深度0 系数系统。

命题 *ion*。——上述两个函子诱导出范畴之间的准逆等价 *s*

$$\pi_{\iota,!} : \mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)^{\mathrm{cart}} \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}^1_R(G_\iota) : (\pi_\iota^*)^1 \tag{3.2.6}$$

证明。这同样由 [Lan21] 得出，采用与命题 3.2.2 的证明相同的调整，即需要使用"容许路径"来定义"局部映射"。但是，对于包含在 $\mathcal{B}'_\iota$ 中的两个 e-面$\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$，组合凸包（针对 e-面分解） $\mathcal{H}_e(\mathcal{F},\ \mathcal{F}')$ 包含于 $\mathcal{B}'_\iota$ 中，因此，从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{F}'$ 的任何容许路径都包含于 $\mathcal{B}'_\iota$ 中。 □

鉴于等价关系 (3.2.4) 和 (3.2.6)，接下来我们的目标是构造一对伴随的范畴等价：

$$\mathrm{Coef}^{\phi,I}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}} \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} \mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)^{\mathrm{cart}}, \tag{3.2.7}$$

我们将在下一小节中讨论这一点。

[7]注意，对于 $\mathcal{B}'_\iota$ 也有一种内在的 e-面概念，其定义先验地更粗略；我们不在此讨论。因此，我们所说的"e-面"始终指 $\mathcal{B}'$ 的 e-面。

3.3 海森堡–外尔系数系统

为了构造 (3.2.7) 中的等价，我们将使用一种辅助系数系统，称为海森堡–韦伊系数系统，并将在下文介绍。为定义这种系数系统，我们将依赖一些将在第 3.5 节证明的结果。本小节还将陈述一些相关结果，并在第 3.6 节和第 3.7 节证明。在第 3.4 节中，我们将假设本小节和第 3.3 节陈述的结果，进而证明定理 3.1.1。由于第 3.5、3.6 和 3.7 节不依赖第 3.1、3.2、3.3 和 3.4 节的结果，因此不存在循环论证。按照这一顺序呈现结果，使关注结果而非证明技术细节的读者能够更快达到目的，同时也为关注全部细节的读者提供了学习第 3.5、3.6 和 3.7 节的动机。

3.3.1 海森堡表示与外尔表示。——我们需要海森堡表示这一概念，并须将其调整为适用于一般交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$-代数 R 的情形。根据命题 (2.6.8) ii)，对于 $x \in \mathcal{B}_\iota$，群 $K_{\iota,x}^\dagger$ 和 $K_{\iota,x}^+$，以及特征 $\check{\phi}_{\iota,x}^+$，仅取决于包含 x 的 e-面 $\mathcal{F}$。因此，我们可将它们分别记为 $K_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger$、$K_{\iota,\mathcal{F}}^+$ 和 $\check{\phi}_{\iota,\mathcal{F}}^+$。

定义。——对于 $\mathcal{F} \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，三元组 $(K_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger, K_{\iota,\mathcal{F}}^+, \check{\phi}_{\iota,\mathcal{F}}^+)$ 的海森堡表示 $\eta_{\iota,\mathcal{F}}$ 是一个有限生成的投射 $RK_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger$-模；将其限制到 $RK_{\iota,\mathcal{F}}^+$ 后，它是 $\check{\phi}_{\iota,\mathcal{F}}^+$-同型分量，并且其 $RK_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger$-自同态环为 R。

关于存在性的证明、唯一性的讨论，以及我们所关注的主要性质的证明（即这样的表示是范畴 $\mathcal{H}_R(K_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger)e_{\iota,\mathcal{F}} - \mathrm{Mod}$ 中所有 $\check{\phi}_{\iota,\mathcal{F}}^+$-同型分量光滑 $RK_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger$-模的投射生成元），请参见引理 3.5.2。特别地，我们有一对范畴的伴随等价：

$$\mathrm{Hom}_{RK_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger}(\eta_{\iota,\mathcal{F}}, -) : \mathcal{H}_R(K_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger)e_{\iota,\mathcal{F}} - \mathrm{Mod} \rightleftarrows R - \mathrm{Mod} : \eta_{\iota,\mathcal{F}} \otimes_R -. \tag{3.3.2}$$

此外，与系数环为 $\mathbb{C}$的情形一样，我们将在第 3.6 节说明韦伊表示理论如何产生将海森堡表示扩张到更大群的扩张

$$K_{\iota,\mathcal{F}} := G_{\iota,\mathcal{F}} K_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger,$$

其中 $G_{\iota,\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{F}$ 在 G_ι中的稳定子。我们称这样的表示为“海森堡–韦伊表示”。任一海森堡–韦伊表示 $\kappa_{\iota,\mathcal{F}}$ 都会将上述一对伴随等价增强为以下一对伴随等价：

$$\mathrm{Hom}_{RK_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger}(\kappa_{\iota,\mathcal{F}}, -) : \mathcal{H}_R(K_{\iota,\mathcal{F}})e_{\iota,\mathcal{F}} - \mathrm{Mod} \rightleftarrows R[G_{\iota,\mathcal{F}}/G_{\iota,\mathcal{F},0+}] - \mathrm{Mod} : \kappa_{\iota,\mathcal{F}} \otimes_R -. \tag{3.3.3}$$

这里，右侧的范畴由同构 $G_{\iota,\mathcal{F}}/G_{\iota,\mathcal{F},0+} \xrightarrow{\sim} K_{\iota,\mathcal{F}}/K_{\iota,\mathcal{F}}^\dagger$所保证，该同构源于包含 $G_{\iota,\mathcal{F}} \subseteq K_{\iota,\mathcal{F}}$。

因此，构造如 (3.2.7) 中的等价的一种自然策略，是尝试以足够协调的方式安排“局部等价”(3.3.3)，使其与面映射和作用相容。为此，我们在下文引入海森堡–韦伊系数系统的概念。它将是定义在一个范畴上的系数系统，该范畴将作为 $[\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G]$ 与

$[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota]$ 之间的中间范畴。此时，注意到当 $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}'$ 时，以下包含关系成立或许会有所帮助：$K_\iota^{+,\mathcal{F}'}\subseteq K_\iota^{+,\mathcal{F}}\subseteq K_{\iota,\mathcal{F}}\subseteq K_{\iota,\mathcal{F}'}$（最后一个包含关系成立，是因为 e 的选取使得 e-面的稳定子群与其固定子群一致）。另一方面，$K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}}$ 和 $K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}'}$ 互不包含，但我们有 $K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}}=(K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}}\cap K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}'})\,G_{\iota,\mathcal{F},0+}$。这些事实使我们能够作出如下定义：

3.3.4 定义。– 我们用 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]$ 表示 $[\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G]$ 的以下子范畴：

- 其对象集合是包含于 $\mathcal{B}'_\iota$ 中的 $\mathcal{B}'$ 的 e-面的子集 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$。
- 对于 $\mathcal{F},\mathcal{F}'\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，态射由下式给出

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}'):=\{g\in K_{\iota,\mathcal{F}'}\,G_\iota,\ \overline{g\mathcal{F}}\supseteq\mathcal{F}'\}=\{g\in K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'}\,G_\iota,\ \overline{g\mathcal{F}}\supseteq\mathcal{F}'\},$$

复合由 G 中的乘法给出。

通常，$[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]$ 上的系数系统 $\mathcal{W}$ 就是到 R –Mod 的函子。注意，这等价于给出一个 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 上的 G_ι-等变系数系统，并且对每个 $\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，给出 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上 $K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}}$ 的光滑作用，使得对于满足 $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}'$ 的每一对 $\mathcal{F},\mathcal{F}'$，面映射 $\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 是 $K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}}\cap K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}'}$-等变的；并且对于每个 $g\in G_\iota$，作用映射 $g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}$ 诱导一个 $K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}}$-等变同构 $g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}:\mathcal{W}_{\mathcal{F}}\xrightarrow{\sim}g^*\mathcal{W}_{g\mathcal{F}}$，当 $g\in G_{\iota,\mathcal{F}}$ 时，该同构与 g 在 $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ 上的作用一致。注意，由于 $\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 也是 $G_{\iota,\mathcal{F}}=(G_{\iota,\mathcal{F}}\cap G_{\iota,\mathcal{F}'})$-等变的，作为 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 上的 G_ι-等变系数系统定义的一部分，可知 $\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 也是 $K_{\iota,F}$-等变的。

3.3.5 定义。– 系数系统 $\mathcal{W}_\iota:[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]\longrightarrow R$–Mod 称为海森堡–韦伊系数系统，如果：

1. 对每个 $\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，$RK_\iota^{\dagger,\mathcal{F}}$-模 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 是三元组 $(K_{\iota,\mathcal{F}}^{\dagger},K_{\iota,\mathcal{F}}^{+},\check{\phi}_{\iota,\mathcal{F}}^{+})$ 的海森堡表示。

2. 对每一对面 $\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}$（位于 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 中），映射 $\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 是 R-模 $\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,\mathcal{F}}^{\dagger}\cap K_{\iota,\mathcal{F}'}^{\dagger})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$ 的一个生成元。

3.3.6 命题。— 设 $\mathcal{W}_\iota$ 为海森堡–韦伊系数系统。则 R-模$\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,\mathcal{F}}^{\dagger}\cap K_{\iota,\mathcal{F}'}^{\dagger})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$ 是秩为一的自由模，且 $\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 诱导

i) a $K_{\iota,\mathcal{F}'}^{\dagger}$-equivariant isomorphism $\mathrm{ind}_{K_{\iota,\mathcal{F}}^{\dagger}\cap K_{\iota,\mathcal{F}'}^{\dagger}}^{K_{\iota,\mathcal{F}'}^{\dagger}}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}$, *and*

ii) 一个 $K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}}\cap K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}'}$-等变同构 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}\xrightarrow{\sim}e'_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}$，其中 $e'_{\iota,\mathcal{F}}$ 是与 $\check{\phi}_{\iota,\mathcal{F}}$ 限制到 $K_\iota^{+,\mathcal{F}}\cap K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}'}$ 相关联的幂等元。

由于$\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 也与 G_ι的作用相容，因此 *(ii)* 中的同构实际上是$K_{\iota,\mathcal{F}}$-等变的，并且$e'_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}=e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}$。

证明。 我们将在引理 3.5.5 i) 中证明，若满足定义 3.3.5 的性质 1，则 R-模 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\ \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$ 通常是可逆的。若存在生成元，它便是秩 1 自由模。我们将在引理 3.5.5 iii) 中证明，此时像 $\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 这样的生成元会诱导 i) 和 ii) 中的同构。上文已经指出，$\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 是 $K_{\iota,\mathcal{F}}$-等变的，因此 $e'_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}=e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}$。 □

3.3.7 定理。 — 设 R 是一个交换 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数。则存在一个海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$，属于 $\mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota)$。

我们将此定理的证明推迟到第 3.7 节，因为它需要第 3.6 节中完成的大量技术准备。此定理将是构造等价 (3.2.7) 的主要要素。我们还将在 3.7.12 中给出以下唯一性结果。

3.3.8 命题。 — 若 $\mathcal{W}_\iota$ 和 $\mathcal{W}'_\iota$ 是两个海森堡–韦伊系数系统，则存在一个可逆 R-模 L 和一个深度 0 特征 $\theta: G_\iota\longrightarrow R^\times$，使得 $\mathcal{W}'_\iota\simeq\mathcal{W}_\iota\otimes_R L_\theta$。

3.4 等价的构造

本节中，我们将为任意海森堡–韦伊系数系统关联一对等价，如 (3.2.7) 所示，并满足定理 3.1.1 的附加性质。更确切地说，我们证明定理 3.1.1 的更精确版本，即下文的定理 3.4.11；该证明以第 3.3 节所陈述结果的证明为前提，而这些结果将在第 3.5、3.6 和 3.7 节中证明（这些部分独立于本节，因此不存在循环论证）。

3.4.1 概述。 ——对于定义 3.3.5 中的海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$，我们将关联一对保持笛卡尔对象的范畴准逆等价

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}:\ \mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)\underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}}\mathrm{Coef}^{\phi,I}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)\ :\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}$$

。由于这些函子的构造见 3.4.2 和 3.4.3，乍看之下可能相当技术性，因此我们在此尝试提供一些几何直觉。本节在逻辑上独立于后文，可以跳过。

回忆一下，$\mathcal{W}_\iota$ 是定义 3.3.5 之前引入的范畴 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]$ 上的系数系统。我们有函子

$$[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/\overline{G}_\iota]\xleftarrow{\ p\ }[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]\xrightarrow{\ q\ }[\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G].$$

这里 q 是自然包含。另一方面，$[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota]$ 表示对象集合为 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 且态射由 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\ \mathcal{F}')=\{g\in G_\iota, g\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}'\}/G_{\iota,\mathcal{F},0+}$ 给出的范畴。函子 p 在对象上为恒等，并且在态射上由以下（定义良好的）映射给出

$$g=kg_\iota\in K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}G_\iota(\text{such that } g\overline{\mathcal{F}}\supseteq\mathcal{F}')\mapsto\overline{g_\iota}\in G_\iota/G_{\iota,\mathcal{F},0+}.$$

注意，$\mathrm{Coef}_R([\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota])$ 通过沿投影函子 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota]\xrightarrow{\ r\ }[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota]$ 的拉回 r^* 与 $\mathrm{Coef}^1_R([\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota])$ 相对应。

与 p 和 q 相关联的是两个拉回函子（由前复合给出）

$$\mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/\overline{G}_\iota]) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota) \xleftarrow{q^*} \mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G).$$

函子 p^*有一个右伴随 p_*，由 $p_*(\mathcal{W})_{\mathcal{F}}:=\{w\in\mathcal{W}_{\mathcal{F}},\forall\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F},\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}(w)\in(\mathcal{W}_{\mathcal{F}'})^{K_\iota^\dagger,\overline{\mathcal{F}'}}\}$ 给出，其中 $\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$。 函子 q^* 有一个左伴随 $q_!$，其描述见 3.4.3。现在，在 Coef $_{\mathcal{F}}=$ $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}\otimes_R\mathcal{W}'_{\mathcal{F}}$ $(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota)$ 上，我们有张量积，其在各面上的定义为 $(\mathcal{W}\otimes_R\mathcal{W}')$，并配有显然的面映射和作用映射。我们还有在各面上由 $\mathcal{H}om(\mathcal{W},\mathcal{W}')_{\mathcal{F}}:=\mathrm{Hom}(\mathcal{W}|_{\mathcal{F}},\mathcal{W}'|_{\overline{\mathcal{F}}})$ 定义的内Hom，其中右侧的 Hom 表示 R-模，即限制到 $\mathcal{F}$ 的系数系统 $\mathcal{W}$ 与 $\mathcal{W}'$ 之间的态射模。与层论中一样，这些构造满足通常的 Hom- 张量伴随关系。

现在变得 自然的是考虑核为 $\mathcal{W}_\iota$ 的拉推函子伴随对 :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}:\mathcal{V}_\iota\mapsto q_!(\mathcal{W}_\iota\otimes_R p^*\mathcal{V}_\iota)\text{ and }\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}:\mathcal{V}\mapsto p_*(\mathcal{H}\mathrm{om}_R(\mathcal{W}_\iota,q^*\mathcal{V})).$$

在接下来的三节中，我们将更明确地定义这些函子，并证明它们在我们所关注的范畴之间诱导出所需的等价。不过，这些明确的定义确实描述了上述函子，留待读者自行验证。

3.4.2 从 $\mathrm{Coef}_R^{\phi\, I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$ 到 $\mathrm{Coef}_R^1(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$ 的函子。—— 这是较容易的方向，因为我们从定义在目标建筑上的系数系统出发。与上文一样，我们固定一个定义 3.3.5 中的海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$，并令 $\mathcal{V}$ 为 $\mathrm{Coef}_R^{\phi\, I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$ 中的一个系数系统。我们如下定义 $\mathcal{B}'_\iota$ 上的系数系统 $\mathcal{V}_\iota$。

- $\forall\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$, set $\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}}:=\mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{V}_{\mathcal{F}})$.
- 若 $\overline{\mathcal{F}}\supseteq\mathcal{F}'$，则定义 $\beta_{\mathcal{V}_\iota,\,\mathcal{F},\,\mathcal{F}'}$ 为使下图交换的唯一映射：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}}=\mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{V}_{\mathcal{F}}) & \overset{\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}}{\dashrightarrow} & \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'}=\mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'},\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}) \\ \downarrow{\scriptstyle u\mapsto\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ u} & & \downarrow{\scriptstyle u\mapsto u\circ\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}} \\ \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}) & = & \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{V}_{\mathcal{F}'})\end{array}$$

存在 性由命题 3.3.6 的 i) 和弗罗贝尼乌斯互反律得出 .

- 若 $g\in G_\iota$，定义 $g_{\mathcal{V}_\iota,\,\mathcal{F}}:\mathcal{V}_{\iota,\,\mathcal{F}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{V}_{\iota,\,g\mathcal{F}}$ 为

$$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}}=\mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{V}_{\mathcal{F}})\xrightarrow{u\mapsto g_{\mathcal{V},\mathcal{F}}\circ u\circ(g_{\mathcal{W},\mathcal{F}})^{-1}}\mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,g\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,g\mathcal{F}},\mathcal{V}_{g\mathcal{F}})\ =\mathcal{V}_{\iota,g\mathcal{F}}$$

引理。——上述数据定义了一个对象 $\mathcal{V}_\iota$ $\mathrm{Coef}_R^1(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$，若 $\mathcal{V}$是笛卡尔对象，则该对象也是笛卡尔对象。

证明。作用映射的传递性，即恒等式 $(hg)_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}} = h_{\mathcal{V}_\iota,g\mathcal{F}} \circ g_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}}$，由 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$的作用映射的传递性推出。

我们来检查面映射的传递性。给定 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$，$\mathcal{F}''$使得 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}''$，我们看到$\beta_{\mathcal{V}_\iota,\overline{\mathcal{F}'},\mathcal{F}''} \circ \beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 使定义 $\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}''}$ 的图表交换。因此，由唯一性可知，两个映射相等。

现在来检查面映射与作用的相容性。给定 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$使得$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$且 $g \in G_\iota$，映射 $g_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{V}_\iota,\overline{\mathcal{F},\mathcal{F}'}} \circ (g_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}})^{-1}$使下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{V}_{\iota,g\mathcal{F}} = \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,g\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,g\mathcal{F}}, \mathcal{V}_{g\mathcal{F}}) & \xrightarrow{g_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ (g_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}})^{-1}} & \mathcal{V}_{\iota,g\mathcal{F}'} = \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,g\mathcal{F}'}}(\mathcal{W}_{\iota,g\mathcal{F}'}, \mathcal{V}_{g\mathcal{F}'}) \\
\downarrow{\scriptstyle u \mapsto (g_{\mathcal{V},\mathcal{F}})^{-1} \circ u \circ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle u \mapsto (g_{\mathcal{V},\mathcal{F}'})^{-1} \circ u \circ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}'}} \\
\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}} = \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}} & \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'} = \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}'}) \\
\downarrow{\scriptstyle u \mapsto \beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ u} & & \downarrow{\scriptstyle u \mapsto u \circ \beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}} \\
\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}'}) & = & \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}'}) \\
\downarrow{\scriptstyle u \mapsto g_{\mathcal{V},\mathcal{F}'} \circ u \circ (g_{\mathcal{W},\mathcal{F}})^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle u \mapsto g_{\mathcal{V},\mathcal{F}'} \circ u \circ (g_{\mathcal{W},\mathcal{F}})^{-1}} \\
\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,g\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,g\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,g\mathcal{F}}, \mathcal{V}_{g\mathcal{F}'}) & = & \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,g\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,g\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,g\mathcal{F}}, \mathcal{V}_{g\mathcal{F}'})
\end{array}$$

由于 $\mathcal{V}$ 是一个系数系统，我们有 $\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ (g_{\mathcal{V},\mathcal{F}})^{-1} = (g_{\mathcal{V},\mathcal{F}'})^{-1} \circ \beta_{\mathcal{V},g\mathcal{F},g\mathcal{F}'}$，因此左侧竖直映射的复合为 $u \mapsto \beta_{\mathcal{V},g\mathcal{F},g\mathcal{F}'} \circ u$。类似地，由于 $\mathcal{W}$ 是一个 G_ι-等变系数系统，我们有 $g_{\mathcal{W},\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'} = \beta_{\mathcal{W},g\mathcal{F},g\mathcal{F}'} \circ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}$，且右侧竖直映射的复合为 $u \mapsto u \circ \beta_{\mathcal{W},g\mathcal{F},g\mathcal{F}'}$。由此可知，顶部映射使定义 $\beta_{\mathcal{V}_\iota,g\mathcal{F},g\mathcal{F}'}$ 的图表交换，因此 $\beta_{\mathcal{V}_\iota,g\mathcal{F},g\mathcal{F}'} = g_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ (g_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}})^{-1}$，正如所求。

至此，我们已证明 $\mathcal{V}_\iota$ 是 G_ι-等变系数系统，定义在 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 上。由于 $G_{\iota,\mathcal{F},0+}$ 显然在 $\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上平凡作用，因此该系数系统属于 $\mathsf{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$。

现在假设 $\mathcal{V}$ 是笛卡尔的。接下来只需验证，对于所有面$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，$\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 诱导出一个同构$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} e_{G_\iota,\mathcal{F},0+}\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'}$。由其定义图以及$\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$的单射性可知，$\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 是单射。由$\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 与作用映射的相容性，以及$G_{\iota,\mathcal{F},0+} \subseteq K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}$ 在$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}}$上平凡作用可知，$\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 的像在$G_{\iota,\mathcal{F}'}$ 的子群$G_{\iota,\mathcal{F},0+}$ 作用下不变。现在，令 $u \in \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'} = \mathrm{Hom}^{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}'})$。子空间$\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}) = \check{e}'_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'} \subseteq \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}$在 $u(\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}))$下的像，包含于 $\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$的$(\phi_{\iota,\mathcal{F}})|_{K^+_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}}$-等型子模中。此外，若 u 在$G_{\iota,\mathcal{F},0+}$作用下不变，则 $u(\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}})) \subseteq (\mathcal{V}_{\mathcal{F}'})^{G_{\iota,\mathcal{F},0+}}$也成立，因为$G_{\iota,\mathcal{F},0+} \subset G_{\iota,\mathcal{F}} \cap G_{\iota,\mathcal{F}}$ 在$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上平凡作用，因此也在$\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}})$上平凡作用。由于$G_{\iota,\mathcal{F},0+}.(K^+_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}) = K^+_{\iota,\mathcal{F}}$，且$\check{\phi}_{\iota,\mathcal{F}}$在$G_{\iota,\mathcal{F},0+}$上平凡，这意味着 $u(\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}})) \subseteq e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'}$。然而，$\mathcal{V} \in \mathsf{Coef}^{\phi\, I}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$，因此我们知道$\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 是一个同构$\mathcal{V}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$。在两边作用幂等元$e_{\iota,\mathcal{F}}$ 后，可知$\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 诱导出一个同构$e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$。将$u \circ \beta_{\mathcal{W},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$与该同构的逆映射复合，得到一个态射 $v\colon \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} \longrightarrow e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$，它既是$K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}$-等变的，也是$G_{\iota,\mathcal{F},0+}$-等变的。由于$G_{\iota,\mathcal{F},0+}.(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}) = K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}$，可知 v属于$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}} = \mathrm{Hom}^{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}})$。根据构造，我们有$\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(v) = u$。

□

赋值 $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_\iota$ 显然关于 $\mathcal{V}$是函子性的，从而给出一个函子

$$\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota} : \mathrm{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G) \longrightarrow \mathrm{Coef}_R^1(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota),$$

将 $\mathsf{Coef}_R^{\phi\, I}{}_,(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}}$ 映射到 $\mathsf{Coef}_R^1(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)^{\mathrm{cart}}$。

3.4.3 从 $\mathsf{Coef}_R^1(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$ 到 $\mathsf{Coef}_R^{\phi\, I}{}_,(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$ 的函子。—— 这个方向还会带来额外的复杂性，因为我们从一个仅定义在目标建筑的子集上的系数系统出发。于是，设 $\mathcal{V}_\iota$ 是 $\mathsf{Coef}_R^1(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$ 的一个对象。我们定义以下对象。

- 对任意 $\mathcal{F} \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}$，定义

$$\mathcal{V}_{\mathcal{F}} := \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}} \mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} \right)_{G_\iota} \quad \text{with} \quad \mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} := \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}) \otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}).$$

  这里，$G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota} := \{g \in G, g\mathcal{F}_\iota = \mathcal{F}\}$ 是 G 的一个开子集，而 $\mathcal{C}_c^\infty$表示光滑且紧支撑的 R 值函数[8]。特别地，$\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})$具有由 G中的乘法导出的右$RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$-模结构，即 $g \in G$ 通过 g^{-1}的右平移作用于函数；而根据定义，$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 是一个左$RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$-模，因此$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$通过投影映射$K_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \twoheadrightarrow G_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$也具有左模结构。最后，$h \in G_\iota$ 的作用是所有映射$\mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{F},h\mathcal{F}_\iota}$，$f \otimes w \otimes v \mapsto fh^{-1} \otimes h_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}_\iota}(w) \otimes h_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}_\iota}(v)$之和。

- 对于 $g \in G$，令 $g_{\mathcal{V},\mathcal{F}} : \mathcal{V}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{V}_{g\mathcal{F}}$ 由对 $\mathcal{F}_\iota \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 上所有映射$\mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} \longrightarrow \mathcal{V}_{g\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota}$，$f \otimes w \otimes v \mapsto gf \otimes w \otimes v$求和所诱导，其中 $gf(h) = f(g^{-1}h)$，对 $h \in G_{(g\mathcal{F})\mathcal{F}_\iota}$ 成立。
- 对于 $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$，满足 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$ 的情形，令 $\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'} : \mathcal{V}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$为由对 $\mathcal{F}_\iota, \mathcal{F}'_\iota \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 上所有映射求和所诱导的映射，其中 $\mathcal{F}_\iota \supseteq \mathcal{F}'_\iota$

$$p_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota} \otimes \beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota} \otimes \beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota} : \mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{F}',\mathcal{F}'_\iota}$$

  其中 $p_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota} : \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}) \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota})$ 表示将函数限制到 $G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota} \cap G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}$，再零延拓到 $G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}$。由于$G_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \subseteq K_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \subseteq K_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}$（根据我们对 e 的选择），这些映射下降到 $G_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$-余不变量，进而该和下降到 G_ι-余不变量。

引理。——上述数据定义了一个对象 $\mathcal{V}$，属于 $\mathrm{Coef}_R^{\phi\, I}{}_,(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$；若 $\mathcal{V}_\iota$ 是笛卡尔的，则该对象也是笛卡尔的。

证明。作用映射的传递性及其与面映射的相容性都显而易见。为证明面映射的传递性，取 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'$ 和 $\mathcal{F}''$，使得 $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}''$。利用系数系统 $\mathcal{W}_\iota$ 和 $\mathcal{V}_\iota$ 的面映射传递性，只需证明：对于任意两个面 $\mathcal{F}_\iota$，$\mathcal{F}''_\iota \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，若 $\mathcal{F}_\iota \supseteq \mathcal{F}''_\iota$，则有

$$p_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}''\mathcal{F}''_\iota} = \sum_{\mathcal{F}'_\iota, \mathcal{F}_\iota \supseteq \mathcal{F}'_\iota \supseteq \mathcal{F}''_\iota} p_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota,\mathcal{F}''\mathcal{F}''_\iota} \circ p_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota},$$

[8]我们将 $\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}) = \{0\}$ 设为 $G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}$ 为空时的情形。

或者等价地，

$$G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota} \cap G_{\mathcal{F}''\mathcal{F}''_\iota} = \bigsqcup_{\mathcal{F}'_\iota, \overline{\mathcal{F}}_\iota \supseteq \overline{\mathcal{F}}'_\iota \supseteq \mathcal{F}''_\iota} G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota} \cap G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota} \cap G_{\mathcal{F}''\mathcal{F}''_\iota}.$$

这由以下观察得出：对于任意 $g \in G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota} \cap G_{\mathcal{F}''\mathcal{F}''_\iota}$，面 $\mathcal{F}'_\iota(g) := g^{-1}\mathcal{F}'$满足 $\mathcal{F}_\iota \supseteq \mathcal{F}'_\iota(g) \supseteq \mathcal{F}''_\iota$，并且特别地，属于 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$。

至此，我们知道 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$上的光滑 G-等变系数系统。要证明它属于 $\mathrm{Coef}_R^{\phi I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$，只需证明对于所有面 $\mathcal{F}_\iota$，$e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} = \mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota}$。我们可以假设 $\mathcal{F}_\iota$ 与 $\mathcal{F}$ 是 G-共轭的，因为否则两边都为零。注意到$\mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} \xleftarrow{\sim} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})$，因为 $e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 在 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 上的作用是恒等的。同理，$e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} \xleftarrow{\sim} e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})$。但是 $e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota} = \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{I,\mathcal{F}_\iota}e_{\iota,\mathcal{F}_\iota} = \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$，因为根据引理 2.6.1，$e_{I,\mathcal{F}_\iota}e_{\iota,\mathcal{F}_\iota} = e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$。

现在假设 $\mathcal{V}_\iota$ 是笛卡尔的。接下来只需证明，只要$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'$，$\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 便诱导一个同构 $\mathcal{V}_\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$。为此，注意到 $\mathcal{V}_\mathcal{F}$也可以写成

$$\mathcal{V}_\mathcal{F} = \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}} \mathcal{V}^\dagger_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} \right)_{G_\iota} \quad \text{with} \quad \mathcal{V}^\dagger_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} := \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}) \otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}).$$

事实上，和上的 G_ι-余不变量处理了$K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 与每个直和项上的$K_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 余不变量之间的差异。由于对任意 $g \in G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}$都有$g^{-1}\mathcal{F}' \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，我们有进一步的分解$\mathcal{V}^\dagger_{\mathcal{F},\mathcal{F}_\iota} = \bigoplus_{\mathcal{F}'_\iota \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}, \mathcal{F}_\iota \supseteq \mathcal{F}'_\iota} \mathcal{C}_c^\infty($ $G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota} \cap G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}) \otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})$，由此得到如下表达式：

$$\mathcal{V}_\mathcal{F} = \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota, \mathcal{F}'_\iota \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}, \overline{\mathcal{F}}_\iota \supseteq \mathcal{F}'_\iota} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota} \cap G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}) \otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}) \right)_{G_\iota}. \tag{3.4.4}$$

另一方面，对于 $g \in G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}$，面 $g^{-1}\mathcal{F}$ 不必包含在$\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$中，但我们仍有一个分解

$$\mathcal{V}^\dagger_{\mathcal{F}',\mathcal{F}'_\iota} = \bigoplus_{\mathcal{G} \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}, \overline{\mathcal{G}} \supseteq \mathcal{F}'_\iota} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota} \cap G_{\mathcal{F}\mathcal{G}}) \otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}),$$

因此也

$$\begin{aligned} e_{I,\mathcal{F}}\,\mathcal{V}^\dagger_{\mathcal{F}',\mathcal{F}'_\iota} &= \bigoplus_{\mathcal{G} \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}, \overline{\mathcal{G}} \supseteq \mathcal{F}'_\iota} e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota} \cap G_{\mathcal{F}\mathcal{G}}) \otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}) \\ &= \bigoplus_{\mathcal{G} \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}, \overline{\mathcal{G}} \supseteq \mathcal{F}'_\iota} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota} \cap G_{\mathcal{F}\mathcal{G}})e_{I,\mathcal{G}} \otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota} \otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}). \end{aligned}$$

与 $\mathcal{G}$ above 相关联的直和项非零，当且仅当 $G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota} \cap G_{\mathcal{F}\mathcal{G}} \neq \emptyset$ and $e_{I,\,\mathcal{G}}e_{\iota,\,\mathcal{F}'_\iota} \neq 0$。根据命题 2.5.2 ii)，后一个条件意味着存在一个 $\iota' \in I$，使得 $\mathcal{G} \in \mathcal{B}'_{\iota'}$ and

$\iota' \in K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}\cdot\iota$。由于 $K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota} \subseteq G_{\mathcal{F}_\iota,0+}$ 固定了 $\mathcal{G}$，这意味着 $\mathcal{G} \in \mathcal{B}'_\iota$，因此我们可以将最后一个和改写为

$$e_{I,\mathcal{F}}\,\mathcal{V}^\dagger_{\mathcal{F}',\mathcal{F}'_\iota} = \bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e},\overline{\mathcal{F}}_\iota\supseteq\mathcal{F}'_\iota} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}\cap G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{I,\mathcal{F}_\iota}\otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}\otimes_R\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}).$$

根据命题 3.3.6 的 i），我们可以进一步将其改写为

$$e_{I,\mathcal{F}}\,\mathcal{V}^\dagger_{\mathcal{F}',\mathcal{F}'_\iota} \xleftarrow[\oplus(\mathrm{id}\otimes\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota}\otimes\mathrm{id})]{\simeq} \bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\bullet/e},\overline{\mathcal{F}}_\iota\supseteq\mathcal{F}'_\iota} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}\cap G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{I,\mathcal{F}_\iota}\otimes_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota})$$

回想命题 3.3.6 ii）中的幂等元 $e'_{\iota,\mathcal{F}}$，它支撑在 $K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}\cap K^+_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \subseteq K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 上，并在 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}$ 上平凡作用。由于 $K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}\cap K^+_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 包含备注 2.5.11 中引入的群 $K'_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$，由备注 2.6.2 可知 $e_{I,\mathcal{F}_\iota}e'_{\iota,\mathcal{F}_\iota} = e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$，因此最后一个和中的每个 $e_{I,\mathcal{F}_\iota}$ 都可以替换为 $e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$。于是得到 $e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'}$ 的如下表达式：

$$e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'} \xleftarrow[(\oplus(\mathrm{id}\otimes\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota}\otimes\mathrm{id}))_{G_\iota}]{\simeq} \left(\bigoplus_{\substack{\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e},\\ \overline{\mathcal{F}}_\iota\supseteq\mathcal{F}'_\iota}} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}\cap G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota})\right)_{G_\iota}.$$

现在，由于 $K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota} = (K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota})G_{\iota,\mathcal{F}_\iota,0+}$，我们还有

$$e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'} \xleftarrow[(\oplus(\mathrm{id}\otimes\beta_{\mathcal{W},\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota}\otimes\mathrm{id}))_{G_\iota}]{\simeq} \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e},\overline{\mathcal{F}}_\iota\supseteq\mathcal{F}'_\iota} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}\cap G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota})\right)_{G_\iota}.$$

此外，由于$e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$在$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$上作用平凡，并且通过$e_{G_{\iota,\mathcal{F}_\iota,0+}}$作用于$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}$，我们有

$$e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota}) = \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R e_{G_{\iota,\mathcal{F}_\iota,0+}}\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}'_\iota} \xleftarrow[\mathrm{id}\otimes\beta_{\mathcal{V}_\iota,\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota}]{\simeq} \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}.$$

将此与（3.4.4）结合，得到

$$e_{I,\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}'} \xleftarrow{\sim} \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota,\mathcal{F}'_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e},\overline{\mathcal{F}}_\iota\supseteq\mathcal{F}'_\iota} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}'\mathcal{F}'_\iota}\cap G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})\otimes_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_\iota}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})\right)_{G_\iota} = \mathcal{V}_{\mathcal{F}}, \tag{3.4.5}$$

其中，该同构按构造与映射$\beta_{\mathcal{V},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$一致。引理的证明至此完成。

□

同样，容易看出赋值 $\mathcal{V}_\iota \mapsto \mathcal{V}$ 关于 $\mathcal{V}_\iota$具有函子性，从而给出一个函子

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}:\ \mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota) \longrightarrow \mathrm{Coef}^{\phi,I}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$$

将 $\mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)^{\mathrm{cart}}$ 映射到 $\mathrm{Coef}^{\phi\,I}_R\,,(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}}$。

3.4.6 定理。—— 函子 $\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}$ 是范畴的准逆等价

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}:\ \mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota) \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} \mathrm{Coef}^{\phi,I}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)\ :\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}$$

它在两侧都保持笛卡尔对象。

证明。 在本证明中，我们简化记号 $\mathcal{I}:=\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}$ 和 $\mathcal{R}:=\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}$。我们首先构造一个同构 $\mathrm{Id}_{\mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}\circ\mathcal{I}$。因此，我们从一个对象 $\mathcal{V}_\iota \in \mathsf{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$ 开始。对于任意 $\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，我们有

$$\mathcal{R}\circ\mathcal{I}(\mathcal{V}_\iota)_{\mathcal{F}} = \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}\left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}} \mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})\right)_{G_\iota}\right).$$

因此，我们可以定义一个 R-线性映射

$$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}\left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}})\right) \longrightarrow \mathcal{R}\circ\mathcal{I}(\mathcal{V}_\iota)_{\mathcal{F}}, \tag{3.4.6a}$$

其中，第一个映射将 $v\in\mathcal{V}_\iota$ 送到 $(w\mapsto e_{\iota,\mathcal{F}}\otimes(w\otimes v))$。我们来证明这个映射是一个同构。下面给出同构序列，并在下文解释：

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\circ\mathcal{I}(\mathcal{V}_\iota)_{\mathcal{F}} &= \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}\left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}} \mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})\right)_{G_\iota}\right)\\
&\xleftarrow{\sim} \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}} \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}\left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})\right)\right)_{G_\iota}\\
&\xleftarrow{\sim} \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}} \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}\left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})\right)\right)_{G_\iota}\\
&= \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in G_\iota\cdot\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}\left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_\iota})\right)\right)_{G_\iota}\\
&\xleftarrow{\sim} \left(\mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}\left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}})e_{\iota,\mathcal{F}}\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}})\right)\right)_{G_{\iota,\mathcal{F}}}\\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}\left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \left(\mathcal{C}^\infty_c(K_{\iota,\mathcal{F}})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}}} (\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}})\right)_{G_{\iota,\mathcal{F}}}\right)\\
&= \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}\otimes_R \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}}).
\end{aligned}$$

第一个自然映射（上述同构序列中第二行到第一行之间的映射）是同构，因为 $\mathrm{Hom}^{RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, -)$ 与余极限可交换，这是因为 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 是一个有限生成投射 $RK^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}$-模。第二个映射由包含映射 $e_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\subseteq\mathcal{C}^\infty_c(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})$ 诱导。它是同构，因为中心幂等元

$e_{\iota,\mathcal{F}} \in \mathcal{H}_R(K_\iota^\dagger,_{\mathcal{F}})$ 在 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上平凡作用；类似地，中心幂等元 $e_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \in \mathcal{H}_R(K_{\iota,\mathcal{F}_\iota})$ 在 $(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes \mathcal{V}_\iota,$ $_{\mathcal{F}_\iota})$ 上也平凡作用。第二个等式表明，面 $\mathcal{F}_\iota$ 只有在它是 $\mathcal{F}$ 的一个平移 G_ι 时，才会对大和产生非零贡献。为说明这一点，注意对于 $g \in G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}$, $e_{\iota,\mathcal{F}} g e_{\iota,\mathcal{F}_\iota} = e_{\iota,\mathcal{F}} e_{g\iota}$，只有当 $g\iota \in K_\iota^\dagger,_{\mathcal{F}}\iota$ 时，$_{\mathcal{F}}g$ 在 RG 中才非零，这是由引理 2.6.1 得出的。在这种情况下，g 可写成 $g = kg_\iota$，其中 $k \in K_\iota^\dagger,_{\mathcal{F}}$ 且 $g_\iota \in G_\iota$，因此 $\mathcal{F}_\iota = g^{-1}\mathcal{F} = (g_\iota)^{-1}\mathcal{F} \in G_\iota \cdot \mathcal{F}$。第三个映射定义良好且为同构，因为 G_ι 在各直和项上传递地置换，而 $G_{\iota,\mathcal{F}}$ 是与 $\mathcal{F}_\iota = \mathcal{F}$ 相关联的直和项的稳定子。为证明第四个映射是同构，我们再次利用 $W_{\mathcal{F},\iota}$ 作为 $RK_{\iota,\mathcal{F}}$-模的投射性来交换 Hom 与余不变量（注意 $G_{\iota,\mathcal{F}}$ 只作用于 Hom 的目标）。然后，如上所述，我们注意到对于 $g \in G_{\mathcal{F}}$，乘积 $e_{\iota,\mathcal{F}} g e_{\iota,\mathcal{F}}$ 非零当且仅当 $g \in K_\iota^\dagger,_{\mathcal{F}} G_{\iota,\mathcal{F}} = K_{\iota,\mathcal{F}}$。由此可将 $e_{\iota,\mathcal{F}} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}}) e_{\iota,}$ $_{\mathcal{F}} = \mathcal{C}_c^\infty(K_{\iota,\mathcal{F}}) e_{\iota,\mathcal{F}}$ 改写。接着，幂等元 $e_{\iota,\mathcal{F}}$ 可以移至 $\otimes_{RK^\iota}$ 的右侧

$,_{\mathcal{F}}$，它在此处的作用是平凡的。

将此同构与 (3.4.6a) 中的映射 $\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{I}(\mathcal{V}_\iota)_{\mathcal{F}}$ 作前复合，所得恰为 $v \mapsto (w \mapsto w \otimes v)$；由伴随等价 (3.3.2)，它是 R-模的同构，因为 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 是海森堡表示（根据 (3.3.3)，它甚至是 $RG_{\iota,\mathcal{F}}$-模的同构）。容易看出，此同构与作用映射相容；检查它与面映射相容稍微繁琐一些，但仍然直接。此外，它显然关于 $\mathcal{V}_\iota$ 具有函子性，因此我们刚刚构造了一个同构 $\mathrm{Id}_{\mathrm{Coef}_R^\dagger(\mathcal{B}'_{\iota,}}$ $_{\bullet/e}/G_\iota) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R} \circ \mathcal{I}$。

现在我们来构造一个同构 $\mathcal{I} \circ \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathrm{Coef}^{\phi,}{}_R{}^I(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)}$。令 $\mathcal{V}$ 为 $\mathrm{Coef}_R^{\phi\, I},(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$ 中的一个对象，令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{B}'_{\bullet/e}$中的一个面。根据构造，我们有

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{R}(\mathcal{V})_{\mathcal{F}} = \left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}) \otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} \left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathrm{Hom}_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}^\dagger}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}) \right) \right)_{G_\iota}.$$

对于固定的 $\mathcal{F}_\iota$，考虑映射

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}) \otimes_R \left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathrm{Hom}_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}^\dagger}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}) \right) & \to & \mathcal{V}_{\mathcal{F}} \\ h \otimes (w \otimes \theta) & \mapsto & h_{\mathcal{V},\mathcal{F}_\iota}(\theta(w)) \end{array}.$$

根据作用的定义，它下降为一个映射

$$\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}) \otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}} \left(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathrm{Hom}_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}^\dagger}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}) \right) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{F}}$$

a并且所有这些映射的和下降到 G_ι-余不变量，从而给出一个映射

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{R}(\mathcal{V})_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{F}}. \tag{3.4.6g}$$

我们来证明这个映射是一个同构。为此，首先注意到，每个求值映射 $\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathrm{Hom}^{RK_\iota^\dagger,\ \mathcal{F}_\iota}$ $(\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}_\iota},\ \mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}) \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}$ 都会诱导一个 R-模同构

$$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \otimes_R \mathrm{Hom}_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}^\dagger}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}, \mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}) \xrightarrow{\sim} e_{\iota,\mathcal{F}_\iota} \mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota} \tag{3.4.6h}$$

ˇ，因为 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 是一个中心特征标为 $\phi_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$的海森堡表示。根据 (3.3.3)，这甚至是一个 $RK_{\iota,\mathcal{F}}$-模同构。

另一方面，由引理 2.6.1 可知，$K_{\iota,\mathcal{F}_\iota}=K_\iota^{\dagger,\mathcal{F}_\iota}G_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 是$e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$ 在 $G_{\mathcal{F}_\iota}$ 中的中心化子，并且各个幂等元 $e_{h\iota,\mathcal{F}_\iota}$（其中 $h\in G_{\mathcal{F}_\iota}/K_{\iota,\mathcal{F}_\iota}$）两两正交。因此，作用映射 $\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}_\iota})^{\otimes RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}}e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}\longrightarrow\mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}$ 诱导出一个同构

$$\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}_\iota})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}}e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{h\in G_{\mathcal{F}_\iota}/K_{\iota,\mathcal{F}_\iota}}e_{h\iota,\mathcal{F}_\iota}\mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}=\sum_{h\in G_{\mathcal{F}_\iota}/K_{\iota,\mathcal{F}_\iota}}e_{h\iota,\mathcal{F}_\iota}\mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}\subseteq\mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}.$$

这又诱导出一个同构

$$\mathcal{C}_c^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_\iota}}e_{\iota,\mathcal{F}_\iota}\mathcal{V}_{\mathcal{F}_\iota}\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{\iota'\in(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}.\iota)/\sim_{\mathcal{F}}}e_{\iota',\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}}=e_{I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota},\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}},\tag{3.4.6i}$$

其中，$I_{\mathcal{F}}$ 的子集 $I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}:=G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}.\iota$ 上的等价 $\sim_{\mathcal{F}}$ 是 2.6.1 中的等价；并且我们记 $e_{I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota},\mathcal{F}}:=\sum_{\iota'\in(I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota})/\sim_{\mathcal{F}}}e_{\iota',\mathcal{F}}$，它是 $\mathcal{H}_R(G_{\mathcal{F}})$ 中的一个幂等元。结合 (3.4.6h) 和 (3.4.6i)，得到以下同构

$$\mathcal{I}\circ\mathcal{R}(\mathcal{V})_{\mathcal{F}}\xrightarrow{\sim}\left(\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}}e_{I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota},\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}}\right).$$

由于 G_ι 仅作用于指标集，我们可以将右侧改写为 $\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota}e_{I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota},\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$，，并且映射 (3.4.6g) 分解为

$$\mathcal{I}\circ\mathcal{R}(\mathcal{V})_{\mathcal{F}}\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota}e_{I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota},\mathcal{F}}\mathcal{V}_{\mathcal{F}}\xrightarrow{\Sigma}\mathcal{V}_{\mathcal{F}}.$$

因此，为了证明该映射是一个同构，只需证明幂等元 $e_{I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota},\mathcal{F}}$ 在 $\mathcal{H}_R(G_{\mathcal{F}})$ 中两两正交，且它们的和为 $e_{I,\mathcal{F}}$。等价地，我们需要证明 $I_{\mathcal{F}}/_{\sim_{\mathcal{F}}}=\bigsqcup_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota}I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}/_{\sim_{\mathcal{F}}}$。显然，我们有 $I_{\mathcal{F}}=\bigsqcup_{\mathcal{F}_\iota\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota}I_{\mathcal{F}\mathcal{F}_\iota}$，因此只需证明这个划分分解了等价关系 $\sim_{\mathcal{F}}$。换言之，给定 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 和 $g_i\in G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_i}$，使得 $e_{g_1\iota,\mathcal{F}}=e_{g_2\iota,\mathcal{F}}$，我们需要证明 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是 G_ι-共轭的。但如同引理 2.6.1，存在 k 属于 $K_{g_1\iota,\mathcal{F}}^\dagger$，使得 $g_2\iota=kg_1\iota$，由此可得一个元素 $g_\iota\in G_\iota$，使得 $g_2g_\iota=kg_1$。由于 k 固定了 $\mathcal{F}$，因此 $\mathcal{F}_1=g_1^{-1}\mathcal{F}=g_1^{-1}k^{-1}\mathcal{F}=g_\iota^{-1}g_2^{-1}\mathcal{F}=g_\iota^{-1}\mathcal{F}_2$。于是，$\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是 G_ι-共轭的，我们证明了自然映射 (3.4.6g) 是一个同构。

与反方向的情形一样，上述识别具有足够的自然性，因而与两侧的面映射和作用映射相容；由此我们构造出了所需的同构$\mathcal{I}\circ\mathcal{R}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Id}_{\mathrm{Coef}^{\phi,I}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)}$。□

3.4.10 现在，我们通过设定来收获上述构造的成果

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}:\mathrm{Rep}^1_R(G_\iota)\xrightarrow{(\pi_\iota^*)^1}\mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)^{\mathrm{cart}}\xrightarrow{\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}}\mathrm{Coef}^{\phi,I}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}}\xrightarrow{\pi_!}\mathrm{Rep}^{\phi,I}_R(G)$$
$$\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}:\mathrm{Rep}^{\phi,I}_R(G)\xrightarrow{(\pi^*)^{\phi,I}}\mathrm{Coef}^{\phi,I}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}}\xrightarrow{\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}}\mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)^{\mathrm{cart}}\xrightarrow{\pi_{\iota,!}}\mathrm{Rep}^1_R(G_\iota)$$

3.4.11 定理。— 设 $\mathcal{W}_\iota$ 是定义 *3.3.5* 中的 *Heisenberg–Weil* 系数系。上述两个函子互为准逆等价:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}:\ \mathrm{Rep}_R^1(G_\iota) \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G)\ :\mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}.$$

此外，对于任意 e-顶点 $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 以及任意表示 ρ *of* $G_{\iota,\mathcal{F}_0}$ ，若其在$G_{\iota,\mathcal{F}_0,0+}$上是平凡的，则存在一个 RG-模同构

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\mathrm{ind}_{G_{\iota,\mathcal{F}_0}}^{G_\iota}(\rho)) \simeq \mathrm{ind}_{K_{\iota,\mathcal{F}_0}}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0}\otimes_R \rho)$$

经由该同构， $\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}$ 诱导出一个 R-代数同构

$$\mathrm{End}_{RG_\iota}(\mathrm{ind}_{G_{\iota,\mathcal{F}_0}}^{G_\iota}(\rho)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{RG}(\mathrm{ind}_{K_{\iota,\mathcal{F}_0}}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0}\otimes_R \rho)).$$

证明。 第一个陈述现在由定理 3.4.6、(3.2.4) 和 (3.2.6) 得出。为证明第二个陈述，我们先注意到以下图表是 1-可交换的（即，在函子同构意义下可交换）。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G) & \xrightarrow{\pi_!} & \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G) \\
{\scriptstyle \mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}}\uparrow\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}} & & {\scriptstyle \mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}}\uparrow\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}} \\
\mathrm{Coef}_R^{1}(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota) & \xrightarrow{\pi_{\iota,!}} & \mathrm{Rep}_R^{1}(G_\iota)
\end{array}$$

事实上，由以下图表的 1-可交换性可通过伴随得到这一结论，而该图表按构造即成立。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Coef}_R^{\phi,I}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G) & \xleftarrow{(\pi^*)^{\phi,I}} & \mathrm{Rep}_R^{\phi,I}(G) \\
{\scriptstyle \mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}}\uparrow\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}} & & {\scriptstyle \mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}}\uparrow\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota}} \\
\mathrm{Coef}_R^{1}(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota) & \xleftarrow{(\pi_\iota^*)^{1}} & \mathrm{Rep}_R^{1}(G_\iota)
\end{array}$$

现在，记 $\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho}$ 为定义在 $\mathcal{B}'_\iota$ 上的系数系统，其定义为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho}(\mathcal{F}) := \mathcal{C}^\infty(G_{\iota,\mathcal{F}\mathcal{F}_0})\otimes_{RG_{\iota,\mathcal{F}_0}}\rho,\ \ \forall \mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}\\
&g_{\mathcal{F}}:\ \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho}(\mathcal{F}) \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}} \mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho}(g\mathcal{F}),\ \ \forall \mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}, \forall g\in G\\
&\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}=0,\ \forall \mathcal{F},\mathcal{F}' \text{ s.t. } \overline{\mathcal{F}'}\subsetneq\overline{\mathcal{F}}
\end{aligned}$$

Obs注意，$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho}(\mathcal{F}) = \{0\}$ ，除非 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}_0$是 G_ι-共轭的，因此可得 t

$$\pi_{\iota,!}(\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho}) = \mathrm{ind}_{G_{\iota,\mathcal{F}_0}}^{G_\iota}(\rho).$$

根据定义，$\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho}$ 属于 $\mathsf{Coef}_R^1(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota)$，而 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho})$ 又是一个系数系统，其面映射均为平凡映射；它在 G-轨道之外为零，并且定义为

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho})(\mathcal{F}) = \mathcal{C}^\infty(G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_0})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_0}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0}\otimes_R\rho)$$

对所有面 $\mathcal{F} \in \mathcal{B}'_{\bullet/e}$ 均成立。因此

$$\pi_!(\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho})) = \mathrm{ind}_{K_{\iota,\mathcal{F}_0}}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0} \otimes_R \rho).$$

由上面的第一个 1-交换图，我们得出

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\mathrm{ind}_{G_{\iota,\mathcal{F}_0}}^{G_\iota}(\rho)) = \mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\pi_{\iota,!}(\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho}) \simeq \pi_!(\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\mathcal{V}_{\iota,\mathcal{F}_0,\rho})) = \mathrm{ind}_{K_{\iota,\mathcal{F}_0}}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0} \otimes_R \rho).$$

最后，最后一条陈述由第二条陈述以及 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}$ 是一个范畴等价这一事实得出。

□

3.4.12 对选择的依赖. — 我们的构造依赖于两个选择：整数 e 和海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$。我们先固定 e，并将 $\mathcal{I}^e_{\mathcal{W}_\iota} : \mathrm{Rep}^1_R(G_\iota) \leftrightarrows \mathrm{Rep}^{\phi^I}_R(G)$ 重新记为： $\mathcal{R}^e_{\mathcal{W}_\iota}$ 定理 3.4.11 中的那对逆等价，以强调对 e的依赖。改变 $\mathcal{W}_\iota$ 的影响由命题 3.3.8 清楚给出。给定另一个海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}'_\iota$，并令 L, θ 如该陈述中所述，我们有

$$\mathcal{I}^e_{\mathcal{W}'_\iota} = \mathcal{I}^e_{\mathcal{W}_\iota} \circ (L_\theta \otimes_R -) \text{ and } \mathcal{R}^e_{\mathcal{W}'_\iota} = (L_\theta)^{\otimes -1} \otimes_R -) \circ \mathcal{R}^e_{\mathcal{W}_\iota}. \tag{3.4.13}$$

现在，让我们将 e 改为某个倍数 e'。存在一个函子 $[\mathcal{B}'_{\bullet/e'}/G] \longrightarrow [\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G]$，它将一个 e'-面 $\mathcal{G}$ 映到唯一包含 $\mathcal{G}$的 e-面 $\mathcal{F}_e(\mathcal{G})$。与此函子复合，诱导出一个线性正合函子 $\mathsf{Coef}^{\phi^I}_R([\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G]) \xrightarrow{c_{e,e'}} \mathsf{Coef}^{\phi^I}_R([\mathcal{B}'_{\bullet/e'}/G])$，它满足 $\mathcal{C}_{e,e'} \circ (\pi^*)^{\phi^I}_e = (\pi^*)^{\phi^I}_{e'}$（这里我们使用 (3.2.4) 的记号，并额外加上一个指标以强调对 e的依赖）。特别地，$\mathcal{C}_{e,e'}$ 是一个范畴等价。类似地，我们有一个函子 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e'}/G_\iota] \longrightarrow$
$[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota]$ 从而诱导出范畴等价 $\mathsf{Coef}^1_R([\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota]) \xrightarrow{\mathcal{C}_{\iota,\ e,\ e'}} \mathsf{Coef}^1_R([\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e'}/G_\iota])$，使得 $\mathcal{C}_{\iota,\ e,\ e'} \circ (\pi^*_\iota)^1_e = (\pi^*_\iota)^1_{e'}$。最后，与 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e'}/K_\iota] \longrightarrow [\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]$复合后，任意用于 e-面细分的海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$ 都会诱导出一个用于 e'-面细分的海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{C}_{\iota,\ e,\ e'}(\mathcal{W}_\iota) =: \mathcal{W}'_\iota$。

命题。——采用上述记号，定理 *3.4.11* 中的范畴等价 $\mathcal{R}^e_{\mathcal{W}_\iota}, \mathcal{I}^e_{\mathcal{W}_\iota}$，分别地，$\mathcal{R}^{e'}_{\mathcal{W}'_\iota}, \mathcal{I}^{e'}_{\mathcal{W}'_\iota}$，分别与 $(e, \mathcal{W}_\iota)$ 和 $(e', \mathcal{W}'_\iota)$ 相关联，并满足

$$\mathcal{R}^e_{\mathcal{W}_\iota} \simeq \mathcal{R}^{e'}_{\mathcal{W}'_\iota} \ and \ \mathcal{I}^e_{\mathcal{W}_\iota} \simeq \mathcal{I}^{e'}_{\mathcal{W}'_\iota}.$$

证明。 由其构造可知，定理 3.4.6 中的函子满足交换关系 $\mathcal{C}_{\iota,\ e,\ e'} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{W}_\iota} = \mathcal{R}_{\mathcal{W}'_\iota} \circ \mathcal{C}_{e,\ e'}$ 以及 $\mathcal{C}_{e,\ e'} \circ \mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota} = \mathcal{I}_{\mathcal{W}'_\iota} \circ \mathcal{C}_{\iota,\ e,\ e'}$，命题遂得证。

□

3.4.14 推论。 — 设 $\mathcal{W}_\iota$ 为一个海森堡–外尔系数系统，$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}$ 为定理 *3.4.11* 的范畴同构。则对于任意 $x \in \mathcal{B}'_\iota$ 以及任意 R-表示 ρ *of* $G_{\iota,\ x}$且其在 G_ι上是平凡的，$_{x,\ 0+}$，存在一个 RG-模的同构

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\mathrm{ind}_{G_{\iota,x}}^{G_\iota}(\rho)) \simeq \mathrm{ind}_{K_{\iota,x}}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,x} \otimes_R \rho).$$

这里 $\mathcal{W}_{\iota,x}$ 表示 $RK_{\iota,x}$-模 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$，其中 $\mathcal{F}$ 是包含 x 的 e-面。

证明。 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 的一个 e-顶点的情形，已在定理 3.4.11 中证明。一般而言，令 y 为 $\mathcal{F}$ 的重心。于是，对于某个 e 的倍数 e'，y 成为 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e'}$ 中的一个顶点。由上一个命题可知，根据定理 3.4.11，$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}(\mathrm{ind}_{G_{\iota,y}}^{G_\iota}(\rho)) \simeq \mathrm{ind}_{K_{\iota,y}}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,y}\otimes_R \rho)$，因此结论成立，因为 $K_{\iota,x} = K_\iota$，$_{\mathcal{F}} = K_{\iota,y}$, $\mathcal{W}_{\iota,x} = \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} = \mathcal{W}_{\iota,y}$，相应地，对于 $G_{\iota,x}$ 和 $G_{\iota,x,0+}$ 也成立。 □

3.4.15 注记。— 我们将在下文的推论 3.7.11 中看到，给定一个点 $x \in \mathcal{B}'_\iota$ 以及任意一个扭曲的 $RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示 $\kappa_{\iota,x}$（定义见下文定义 3.6.8），其在 $K^+_{\iota,x}$ 上的限制是 $\check{}\phi^+_{\iota,x}$-同型分量，便存在一个海森堡–韦伊系数系统，使得$\mathcal{W}_{\iota,x} \simeq \kappa_{\iota,x}$。

3.4.16 定理 *3.1.1* 的证明（假定第 *3.3* 节的结果成立）. — 该定理，实际上是它的一个更精确版本，现在可由定理 3.4.11 和推论 3.4.14 得出。当然，我们仍需证明上文证明中所假定的第 3.3 节所声称的结果。接下来的几个小节将讨论这一问题。

3.5 海森堡表示

本小节将海森堡表示理论推广到系数取自任意交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$-代数 R的情形。与前面的小节一样，我们已固定一个嵌入$\iota \in I$。根据 2.5.13，对于任意 $x \in \mathcal{B}_\iota$，三元组 $(K^\dagger_{\iota,x}, K^+_{\iota,x}, \check{}\phi^+_{\iota,x})$ 在以下意义下是一个“海森堡三元组”。

3.5.1 定义。– 由一个 pro-p-群 $K^\dagger$、一个开正规子群 $K^+ \subset K^\dagger$ 以及一个被 $K^\dagger$中心化的连续同态$\check{}\phi : K^+ \longrightarrow \mu_{p^\infty}$ 组成的三元组 $(K^\dagger, K^+, \check{}\phi)$，若 $K^\dagger/K^+$ 是一个 $\mathbb{F}_p$-向量空间，且映射 $(k, k') \mapsto \check{}\phi(kk'k^{-1}(k')^{-1})$ 在 $K^\dagger/K^+$上定义了一个（取值于μ_p的）完美配对，则称为一个海森堡三元组。

注意，由于 $p \neq 2$，该配对必为辛配对。对于任意交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$代数 R，我们仍将特征 $K^\dagger \longrightarrow \mu_{p^\infty} \subset R^\times$记为 $\check{}\phi$，并将对应的幂等元记为 $e \in \mathcal{H}_R(K^\dagger)$；它是中心的，且支撑在 K^+ 上。其限制到 K^+ 后为 $\check{}\phi$-同型分量的光滑$RK^\dagger$-模所构成的范畴，可识别为 $e\mathcal{H}_R(K^\dagger)-$ Mod，即有限 R-代数 $e\mathcal{H}_R(K^\dagger)$上的模范畴。

3.5.2 引理。— 设$(K^\dagger, K^+, \check{}\phi)$ 是一个海森堡三元组。对于交换$\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{p}]$代数 R，存在一个光滑 $RK^\dagger$-模 η，使得

i) η 是 R上的有限生成射影模。

ii) $\eta|_{K^+}$ 是 $\check{}\phi$-同型分量。

iii) 结束$_{RK^\dagger}(\eta) = R$.

任意这样的 η 都有 R-秩 $\sqrt{[K^\dagger : K^+]}$ 并且是 $e\mathcal{H}_R(K^\dagger) - \mathrm{Mod}$ 的投射生成元。特别地，我们有范畴的伴随等价

$$\mathrm{Hom}_{RK^\dagger}(\eta, -) : e\mathcal{H}_R(K^\dagger) - \mathrm{Mod} \rightleftarrows R - \mathrm{Mod} : \eta \otimes_R -$$

此外，若 η' 是另一个满足 *(i)*、*(ii)* 和 *(iii)* 的 $RK^\dagger$-模，则 $\mathrm{Hom}_{RK^\dagger}(\eta,\eta')$ 是一个可逆的 R-模（即秩为 1 的有限生成投射模）。

证明。 我们首先构造一个满足 (i)、(ii) 和 (iii) 的表示 η。令 $V:=K^\dagger/K^+$，取一个拉格朗日子空间 $W\subseteq V$，并将 $K^\dagger$ 中 W 的原像记为 $K_W^\dagger\subseteq K^\dagger$。因此我们有 $[K^\dagger:K_W^\dagger]=[K_W^\dagger:K^+]=\sqrt{[K^\dagger:K^+]}$，并将这个整数记为 a。恰有 a 个不同的特征 $\nu: K_W^\dagger\longrightarrow\mu_{p^\infty}\subseteq R^\times$ 延拓 $\check{}\,\phi$，且它们在 $K^\dagger$ 的共轭作用下传递地互相置换。现在取这样一个特征 ν，将其对应的底层 R-模为 R 的 $RK_W^\dagger$-模记为 R_ν，并令

$$\eta:=\mathrm{ind}_{K_W^\dagger}^{K^\dagger}R_\nu.$$

这显然满足 (i) 和 (ii)。此外，由 Mackey 公式，我们有 $(\mathrm{ind}_{K_W^\dagger}^{K^\dagger}R_\nu)|_{K_W^\dagger}=\bigoplus_{\nu'}R_{\nu'}$，因此由弗罗贝尼乌斯互反律可得 (iii)。出于同样的原因，对于任意延拓 $\check{}\phi$ 的特征 $\nu': K_W^\dagger\longrightarrow\mu_{p^\infty}\subseteq R^\times$，$R$-模 $\mathrm{Hom}_{RK^\dagger}(\eta,\ \mathrm{ind}_{K_W^\dagger}^{K^\dagger}R_{\nu'})$ 是秩 1 的自由模。取这个 R-模的一个生成元 f。它的像包含 $\mathrm{ind}_{K_W^\dagger}^{K^\dagger}R_{\nu'}$ 的 $K_W^\dagger$-ν 特征子空间，而该子空间生成后一个 $RK^\dagger$-模，因此 f 是满射。由于它是秩相同的自由 R-模之间的态射，它也是单射，因而是同构。现在注意到，每个 $R_{\nu'}$ 都是投射 $RK_W^\dagger$-模，因为 $K_W^\dagger$ 是一个 pro-p-群，且 $p\in R^\times$。因此 $\bigoplus_{\nu'}R_{\nu'}$ 是 $(e\mathcal{H}_R(K_W^\dagger))-\mathrm{Mod}$ 的投射生成元，而弗罗贝尼乌斯互反律意味着 η 是 $(e\mathcal{H}_R(K^\dagger))-\mathrm{Mod}$ 的投射生成元。这形式上意味着这对伴随函子

$$\mathrm{Hom}_{RK^\dagger}(\eta,-):(e\mathcal{H}_R(K^\dagger))-\mathrm{Mod}\rightleftarrows R-\mathrm{Mod}:\eta\otimes_R-$$

是范畴等价。最后，设 η' 是另一个满足 (i)、(ii) 和 (iii) 的光滑 $RK^\dagger$-模。由于它是 R-投射的，所以它也是 $RK^\dagger$-投射的。因此，R-模 $P:=\mathrm{Hom}_{RK^\dagger}(\eta,\eta')$ 是有限生成投射模，并满足 $\mathrm{End}_R P=R$。所以 P 的秩为 1，且 $\eta'\simeq\eta\otimes_R P$ 也是 $e\mathcal{H}_R(K^\dagger)$ –Mod 的投射生成元。□

3.5.3 定义。– 前述引理中的表示 η 将被称为海森堡三元组 $(K^\dagger,K^+,\check{}\phi)$ 的海森堡表示。

3.5.4注意，当 R 是域，或当 $R=\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 时，任何可逆 R-模都是自由的，因此 η 由性质 (i)、(ii) 和 (iii) 唯一确定，且在同构意义下唯一。一般而言，η 仅在同构以及与可逆 R-模扭曲的意义下唯一。无论如何，我们总有一个典范求值同构

$$\eta\otimes_R\mathrm{Hom}_{RK^\dagger}(\eta,\eta')\xrightarrow{\sim}\eta'$$

对于海森堡表示的任意两种选择 η 和 η'。

如前所述，对于任意 $x\in\mathcal{B}_\iota$，由 2.5.13 可知，三元组 $(K^\dagger_{\iota,\,x},\ K^+_{\iota,\,x},\ \check{}\phi^+_{\iota,\,x})$ 是一个海森堡三元组。我们通常将该三元组的海森堡表示记为 $\eta_{\iota,\,x}$。注意，这个概念只取决于包含 x 的 $\mathcal{B}_\iota$ 的 e-面 $\mathcal{F}_e(x)$。因此，在需要时，对于包含 x 的面 $\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\,\bullet/e}$，我们可以用记号 $\eta_{\iota,\,\mathcal{F}}$ 代替 $\eta_{\iota,\,x}$。

3.5.5 引理。— 设 $x, x' \in \mathcal{B}_\iota$，并选取海森堡表示 $\eta_{\iota,\ x}$ 和 $\eta_{\iota,\ x'}$。

i) R-模$\mathrm{H}_{x,x'} := \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x'})$ 是可逆的。

ii) 求值映射 $\eta_{\iota,x}\otimes_R \mathrm{H}_{x,x'} \longrightarrow \eta_{\iota,x'}$ 可分解为：

$$\eta_{\iota,x}\otimes_R \mathrm{H}_{x,x'} \twoheadrightarrow (e_{\iota,x',x}\,\eta_{\iota,x})\otimes_R \mathrm{H}_{x,x'} \xrightarrow{\sim} e_{\iota,x,x'}\eta_{\iota,x'} \hookrightarrow \eta_{\iota,x'},$$

其中，$e_{\iota,x,x'}$ 是与 $\check{}\phi^+_{\iota\ ,x}$ 在$K^+_{\iota\ ,x}\cap K^\dagger_{\iota\ ,x'}$上的限制相关联的幂等元，而第一个映射是应用此幂等元得到的投影。

iii) 若$\overline{\mathcal{F}_e(x)}\supseteq \mathcal{F}_e(x')$，则求值映射诱导出：

(a) an $RK^\dagger_{\iota,x'}$*-isomorphism* $\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}^{K^\dagger_{\iota,x'}}\eta_{\iota,x}\otimes_R \mathrm{H}_{x,x'} \xrightarrow{\sim} \eta_{\iota,x'}$

(b) an $R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})$*-isomorphism* $\eta_{\iota,x}\otimes_R \mathrm{H}_{x,x'} \xrightarrow{\sim} e_{\iota,x,x'}\eta_{\iota,x'}$.

¯证明。 i) 根据前述引理，我们可以假设 $x\neq x'$。设**(P，P)**为2.4.10中构造的 F-有理相反抛物子群对。如常，我们将它们共同的Levi分量记为**M**，将相应的幺幂根记为**U** 和 ¯**U** 。于是，$K^\dagger_{\iota,\ x}$和$K^\dagger_{\iota\ ,\ x'}$ 都关于此抛物子群对具有Iwahori分解，并且以下等式和包含关系成立：

$$M\cap K^\dagger_{\iota,x} = M\cap K^\dagger_{\iota,x'},\quad \bar{U}\cap K^+_{\iota,x}\supseteq \bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'},\quad U\cap K^\dagger_{\iota,x}\subseteq U\cap K^+_{\iota,x'}. \tag{3.5.5a}$$

根据引理 2.4.9，$\bar{U}\cap K^+_{\iota,\ x}$在 $\eta_{\iota,\ x}$ 上作用平凡，而$U\cap K^+_{\iota\ ,\ x'}$在 $\eta_{\iota,\ x'}$ 上作用平凡。因此，任意 $K^\dagger_{\iota,\ x}\cap K^\dagger_{\iota\ ,\ x'}$-等变映射 $\eta_{\iota,\ x}\longrightarrow \eta_{\iota,\ x'}$都可经由 $(\eta_{\iota,\ x})_{U\cap K^\dagger_{\iota,\ x}}$分解，且其像落在 $(\eta_{\iota,\ x'})^{\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota\ ,\ x'}}$中。由 Iwahori 分解可知

$$K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'} = (U\cap K^\dagger_{\iota,x})(M\cap K^\dagger_{\iota,x})(\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'}),$$

这意味着

$$\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x'}) = \mathrm{Hom}_{R(M\cap K^\dagger_{\iota,x})}\left((\eta_{\iota,x})_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}}, (\eta_{\iota,x'})^{\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}\right). \tag{3.5.5b}$$

根据命题 2.5.13 ii)，双线性形式 θ（与 $\check{}\phi^+_{\iota,\ x}$相关联）在 $(M\cap K^\dagger_{\iota,\ x})/(M\cap K^+_{\iota\ ,\ x})$上的限制是非退化的，因此 $(M\cap K^\dagger_{\iota,\ x},\ M\cap K^+_{\iota\ ,\ x},\ (\check{}\phi^+_{\iota,\ x})|_{M\cap K^+_{\iota,\ x}})$ 是一个海森堡三元组。我们断言，$(\eta_{\iota,\ x})_{U\cap K^\dagger_{\iota,\ x}}$和 $(\eta_{\iota,\ x'})^{\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota\ ,\ x'}}$都是该三元组的海森堡表示。根据引理 3.5.2 的最后一条陈述，证明至此完成。

为证明这一断言，我们可以对$\eta_{\iota,x}$的任意特定选择进行论证，尤其可以采用一个模型$\eta_{\iota,x} = \mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,\ K^\dagger_W}}^{K^\dagger_{\iota,\ x}} R_\nu$，如引理 3.5.2 的证明中所述，其中取合适的拉格朗日子空间$W\subseteq K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota\ ,x}$和特征 ν W $W_{\bar{U}}\oplus W_M$ $W_{\bar{U}} = \bar{U}\cap K^\dagger_{\iota\ x}\ /\ \bar{U}\cap$。具 $K^+_{\iota\ x}$ W_M $M\cap K^\dagger_{\iota\ x}\ /\ M\cap K^+_{\iota\ x}$ ν 体而言，先选择满足（,）（,）且是（,）（,）中的拉格朗日子空间的形式，然后任取一个在W_U上平凡的。接着利用麦基公式，我们得到 $(\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,\ K^\dagger_W}}^{K^\dagger_{\iota,\ x}} R_\nu)_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}} = (\mathrm{ind}_{P\cap K^\dagger_{\iota,\ P\cap K^\dagger_W}}^{K^\dagger_{\iota,\ x}} R_\nu)_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}} \xrightarrow{\sim}$

$\mathrm{ind}_{M\cap K^\dagger_{\iota,x}/M\cap K^\dagger_{\iota,x}W_M}{}^{x} R_\nu$，这确实是 $(M\cap K^\dagger_{\iota,x},\check{\phi}^+_{\iota,x})$ 的海森堡表示。对于 $(\eta_{\iota,x'})^{\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}$，我们也用类似的方法，通过取 $K^\dagger_{\iota,x'}/K^+_{\iota,x'}$ 中形如 $W_U\oplus W_M$ 的拉格朗日子空间进行计算。

ii) 根据上述讨论，求值映射 $\eta_{\iota,x}\otimes_R \mathrm{H}_{x,x'}\longrightarrow \eta_{\iota,x'}$ 分解为一个 s

$$\eta_{\iota,x}\otimes_R \mathrm{H}_{x,x'}\twoheadrightarrow (\eta_{\iota,x})_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}}\otimes_R \mathrm{H}_{x,x'}\xrightarrow{\sim}(\eta_{\iota,x'})^{\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}\hookrightarrow \eta_{\iota,x'}, \tag{3.5.5c}$$

其中，中间的映射是 $R(M\cap K^\dagger_{\iota,x})$-模的一个同构，同时也是经由识别 (3.5.5b) 得到的求值映射。

另一方面，由 (3.5.5a) 可得 $K^+_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}=(K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x'})(\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'})$。由于 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 在 $\bar{U}\cap K^+_{\iota,x}$ 上平凡，且在 $K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x'}$ 上与 $\check{\phi}^+_{\iota,x'}$ 一致，因此在 $\mathcal{H}_R(K^\dagger_{\iota,x'})$ 中有等式 $e_{\iota,x,x'}e_{\iota,x'}=e_{\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}e_{\iota,x'}$，于是 $(\eta_{\iota,x'})^{\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}=e_{\iota,x,x'}\eta_{\iota,x'}$。交换 x 和 x' 的角色，同样可得 $e_{\iota,x',x}e_{\iota,x}=e_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}}e_{\iota,x}$，它们属于 $\mathcal{H}_R(K^\dagger_{\iota,x})$。因此，投影 $\eta_{\iota,x}\twoheadrightarrow(\eta_{\iota,x})_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}}$ 可分解为 $\eta_{\iota,x}\twoheadrightarrow e_{\iota,x',x}\eta_{\iota,x}\xrightarrow{\sim}(\eta_{\iota,x})_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}}$，其中第一个映射由 $e_{\iota,x',x}$ 的作用给出。至此，ii) 的证明完成。

iii) 在假设 $\mathcal{F}_e(x')\subseteq\mathcal{F}_e(x)$ 的条件下，线段 $\overline{[x,x']}$ 与面 $\mathcal{F}_e(x)$ 有非空开交集。根据 e-面分解的定义可知，对每个 $i=0,\dots,d$，都有 $U\cap G^i_{\iota,x,(r_{i-1}/2)_+}=U\cap G^i_{\iota,x,(r_{i-1}/2)}$ 且 $\bar{U}\cap G^i_{\iota,x,(r_{i-1}/2)_+}=\bar{U}\cap G^i_{\iota,x,(r_{i-1}/2)}$，由此可推出 $U\cap K^\dagger_{\iota,x}=U\cap K^+_{\iota,x}$ 和 $\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x}=\bar{U}\cap K^+_{\iota,x}$。特别地，我们有 $K^\dagger_{\iota,x}=(M\cap K^\dagger_{\iota,x})K^+_{\iota,x}$ 且 $(\eta_{\iota,x})_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}}=\eta_{\iota,x}=(\eta_{\iota,x})_{U\cap K^\dagger_{\iota,x}}$，因此 iii)(b) 可由 ii) 得出。

现在，取一个拉格朗日子空间 W_M 属于 $(M\cap K^\dagger_{\iota,x})/(M\cap K^+_{\iota,x})=K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}$，记其在 $K^\dagger_{\iota,x}$ 中的原像为 $K^\dagger_{\iota,x,W_M}$，并取一个 $K^\dagger_{\iota,x,W_M}$ 的特征 ν，使其延拓 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$。那么我们知道，$\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x}/K^\dagger_{\iota,x,W_M}}{}^{x}\nu$ 是 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 的海森堡表示，并且我们注意到

$$(\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x,W_M}}^{K^\dagger_{\iota,x}}\nu)|_{K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}=\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x,W_M}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}^{K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}\nu$$

因为 $K^\dagger_{\iota,x}=K^+_{\iota,x}(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})$ 且 $K^\dagger_{\iota,x,W_M}=K^+_{\iota,x}(K^\dagger_{\iota,x,W_M}\cap K^\dagger_{\iota,x'})$。现在，关键在于，群 $K^\dagger_{\iota,x,W_M}\cap K^\dagger_{\iota,x'}$ 是 $K^\dagger_{\iota,x'}/K^+_{\iota,x'}$ 中拉格朗日子空间 $W_M\oplus(\bar{U}\cap K^\dagger_{\iota,x'})/(\bar{U}\cap K^+_{\iota,x'})$ 的原像，而 ν 在 $K^+_{\iota,x'}$ 上的限制与 $\check{\phi}^+_{\iota,x'}$ 一致（根据引理 2.4.9）。由此可得

$$\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}^{K^\dagger_{\iota,x'}}(\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x,W_M}}^{K^\dagger_{\iota,x}}\nu)=\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x,W_M}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}^{K^\dagger_{\iota,x'}}\nu$$

是 $\check{\phi}^+_{\iota,x'}$ 的一个海森堡表示。这证明了当 $\eta_{\iota,x}=\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x}/K^\dagger_{\iota,x,W_M}}{}^{x}\nu$ 且 $\eta_{\iota,x'}=\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x'}/K^\dagger_{\iota,x,W_M}\cap K^\dagger_{\iota,x'}}{}^{x'}\nu$ 时的 iii)(a)，而一般情形由引理 3.5.2 的最后一条陈述得出。

□

3.5.6 引理。 — 设有三个点 x、x'、$x''\in\mathcal{B}_\iota$，以及分别关于 $K^\dagger_{\iota,x}$, $K^\dagger_{\iota,x'}$ 和 $K^\dagger_{\iota,x''}$ 的海森堡表示 $\eta_{\iota,x}$, $\eta_{\iota,x'}$ 和 $\eta_{\iota,x''}$。假设

$$(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}\cap K^\dagger_{\iota,x''})(K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''})=K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x''}.$$

则包含 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x''})}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x''}) \subseteq \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}\cap K^\dagger_{\iota,x''})}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x''})$ 是一个等式，而所得的复合映射

$$\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x'}) \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x'}\cap K^\dagger_{\iota,x''})}(\eta_{\iota,x'},\eta_{\iota,x''}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x''})}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x''})$$

是一个同构。

证明。根据定义，$(\eta_{\iota,x})|_{K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''}}$ 是 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$-同型分量，而 $(\eta_{\iota,x''})|_{K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''}}$ 是 $\check{\phi}^+_{\iota,x''}$-同型分量。由引理 2.5.12，特征 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 和 $\check{\phi}^+_{\iota,x''}$ 在 $K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''}$上相同。因此，任意 R-线性映射$\eta_{\iota,x} \longrightarrow \eta_{\iota,x''}$ 实际上都是 $K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''}$-等变的，该引理所声称的等式由其假设立即得出。

特别地，该引理的复合映射是良定义的。我们先证明它非零。为此，根据引理 3.5.5 的 ii) 点中的分解，只需证明映射 $e_{\iota,x,x'}\eta_{\iota,x'} \xrightarrow{e_\iota \cdot x''\,x'*-} e_{\iota,x'',x'}\eta_{\iota,x'}$ 非零。由于 $\eta_{\iota,x'}$ 是 $\mathcal{H}_R(K^\dagger_{\iota,x'})e_{\iota,x'}$-Mod 的投射生成元，且其自同态环为 R，求值映射

$$\eta_{\iota,x'} \otimes_R H \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_R(K^\dagger_{\iota,x'})e_{\iota,x'}, \text{ with } H := \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,x'}}(\eta_{\iota,x'}, \mathcal{H}_R(K^\dagger_{\iota,x'})e_{\iota,x'})$$

是一个 $RK^\dagger_{\iota,x'}$-模同构。因此，只需证明乘积$e_{\iota,x'',x'}e_{\iota,x,x'}$ 在 $\mathcal{H}_R(K^\dagger_{\iota,x'})e_{\iota,x'}$ 中非零。与 (2.5.4) 中一样，这等价于 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 和 $\check{\phi}^+_{\iota,x''}$ 在 $(K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x'})\cap(K^+_{\iota,x'}\cap K^+_{\iota,x''})$ 上一致。但这由引理 2.5.12 得出。

我们刚刚证明了，对于任意交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty},\frac{1}{p}]$-代数 R，该引理中的复合映射非零。由于它与标量变换相容，这意味着经过任意此类标量变换后它仍然非零，尤其是在模去任意极大理想后。现在，这个复合映射是两个可逆 R-模之间的一个 R-线性映射。由于它模去任意极大理想后都非零，因此它是一个同构。 □

3.5.7 推论。— 设 C 是 $\mathcal{B}'_\iota$ 上通常的 *Bruhat–Tits* 多单纯形结构中的一个室（即最大维数的面），并设 x、x'、x'' 是 C 的闭包$\bar{C}$ 中的三个点，满足 x'' 属于 C，且 $\mathcal{F}_e(x') \subseteq \mathcal{F}_e(x)$。那么复合映射

$$\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x'}) \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x'}\cap K^\dagger_{\iota,x''})}(\eta_{\iota,x'},\eta_{\iota,x''}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x''})}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x''})$$

是良定义的，且为同构。

证明。由于 $\mathcal{F}_e(x') \subseteq \mathcal{F}_e(x)$，对于所有 $i>0$，我们有包含 $G^i_{\iota,x,r_{i-1}/2} \subseteq G^i_{\iota,x',r_{i-1}/2}$，由此得到等式 $K^\dagger_{\iota,x} = (K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})G_{\iota,x,0+}$。特别地，元素 $g \in K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x''}$可以写成 $g = kg_\iota$，其中 $k \in K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}$ 且$g_\iota \in G_{\iota,x,0+}$。另一方面，由于 $x \in \bar{C}$ 且$x'' \in C$，我们有 $G_{\iota,x,0+} \subseteq G_{\iota,C,0+} = G_{\iota,x'',0+}$，因此也有 $G_{\iota,x,0+} \subseteq K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''} \subseteq K^\dagger_{\iota,x''}$。由此可得 $g_\iota \in K^\dagger_{\iota,x''}$，因此也有 $k \in K^\dagger_{\iota,x''}$。所以我们已经证明了 $K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x''} = (K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}\cap K^\dagger_{\iota,x''})G_{\iota,x,0+}$，这意味着 $K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x''} = (K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'}\cap K^\dagger_{\iota,x''})(K^+_{\iota,x}\cap K^+_{\iota,x''})$。最后应用前述引理即可。

□

3.6 一族海森堡–韦伊表示

本节旨在构造一族 $(\kappa_{\iota,\ x})_{x\in\mathcal{B}'_\iota}$ 光滑 $RK_{\iota,\ x}$-模，使得：

i) 对所有 $x\in\mathcal{B}'_\iota$，限制 $(\kappa_{\iota,x})_{|K^\dagger_{\iota,x}}$ 是 $\check{}\phi^+_{\iota,x}$ 的海森堡表示，

ii) 对任意两个 $x,x'\in\mathcal{B}'_\iota$，包含 $\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,x}\cap K_{\iota,x'})}(\kappa_{\iota,x},\kappa_{\iota,x'})\subseteq\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})}(\kappa_{\iota,x},\kappa_{\iota,x'})$ 是一个等式。

在基环 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上工作时，要得到满足 i) 的 $RK_{\iota,x}$-模存在性的非构造性证明并不困难。然而，此类扩张缺乏唯一性，使得难以选取它们以使 ii) 也得到满足。遵循 [Yu01，§11] 以及[G´er 77]，，海森堡–韦伊表示理论给出了甚至已经定义在基环 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]$ 上的显式扩张，尽管它们仍然不满足 ii)。为确保性质 ii)，我们将用[FKS23]与 [AFMO24b]中引入的二次特征来扭变这些扩张。

3.6.1 -代数上的广义海森堡–韦伊表示——一个显式模型. — 设 C 是一个阶为 p^N 的循环群，其中 N 是某个正整数，并记其阶为 p 的子群为 μ_p。设 V 是一个带有取值于 $\mu_p\subseteq C$ 的非退化辛形式 θ 的 $\mathbb{F}_p$-向量空间。我们定义群 $C\widetilde{\boxtimes}V$，其底集为 $C\times V$，群运算定义为

$$(a_1,v_1)\cdot(a_2,v_2)=(a_1\cdot a_2\cdot\sqrt{\theta(v_1,v_2)},v_1+v_2).$$

注意，$N=1$ 的特殊情形给出通常的海森堡 $\mathbb{F}_p$-群 $\mu_p\widetilde{\boxtimes}V$。

若 (V,C,ν) 是定义 3.5.1 意义下的海森堡三元组。取一个拉格朗日子空间 $W\subseteq V$，并对任意交换 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty},\frac{1}{p}]$-代数 R，令

$$\eta_{\nu,W,R}:=\mathrm{Ind}_{C\times W}^{C\widetilde{\boxtimes}V}(\nu\times 1),$$

其中 ν 被视为特征 $C\longrightarrow\mu_{p^\infty}\subset R^\times$。这是定义 3.5.3 意义下的海森堡表示。若 R 从上下文中清楚，我们去掉下标 R，并简单地将 $\eta_{\nu,W,R}$ 写成 $\eta_{\nu,W}$。我们令 $\mathrm{Sp}(V)$ 通过作用于第二个坐标来作用于 $C\widetilde{\boxtimes}V$，即，对于 $g\in\mathrm{Sp}(V)$ 以及 $(a,v)\in C\widetilde{\boxtimes}V$，我们有 $g(a,v)=(a,gv)$。注意，这一作用保持中心 $C=C\times\{0\}\subseteq C\widetilde{\boxtimes}V$ 的特征 ν，并且保持子群 $\mu_p\widetilde{\boxtimes}V$。

若 V 是经典意义下的海森堡表示，其中心特征标为 $\nu|_{\mu_p}$。根据 [G´er77，定理 2.4]，，存在 $\mathrm{Sp}(V)$ 在作为 $\eta_{\nu,W,\mathbb{C}}$ 底空间的向量空间 $V_{\eta_{\nu,W,\mathbb{C}}}$ 上的表示 $\omega_{\mathbb{C}}$，使得乘积映射

$$\omega_{\mathbb{C}}\ltimes\eta_{\nu,W,\mathbb{C}}:\mathrm{Sp}(V)\ltimes(\mu_p\widetilde{\boxtimes}V)\longrightarrow\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_{\eta_{\nu,W,\mathbb{C}}})$$

是一个同态。由于 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}(\mu_p\widetilde{\boxtimes}V}(\eta_{\nu,W,\mathbb{C}})=\mathbb{C}$，这一性质使 $\omega_{\mathbb{C}}$ 在特征扭曲意义下唯一，因此它是唯一的，因为 $\mathrm{Sp}(V)=[\mathrm{Sp}(V),\mathrm{Sp}(V)]$，，除非 $p=3$ 且 $\dim_{\mathbb{F}_p}V=2$，此时我们遵循 [G´er77，Theorem 2.4] 中所采用的选择。

Lemma. — *The submodule* $V_{\eta_{\nu,W,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}}$ *of* $V_{\eta_{\nu,W,\mathbb{C}}}$ *is stable under* $\omega_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}(V))$.

证明。取一个满足 $V = W \oplus W^-$ 的拉格朗日子空间 $W^- \subset V$。将函数从 $C\boxtimes V$ 限制到 $\{1\} \times W^-$，得到一个同构，它将 $\mathbb{C}$-向量空间 $V_{\eta_\nu,W,\mathbb{C}}$ 映到 $\mathbb{C}[W^-]$ 上的 $\mathbb{C}$ 值函数空间，并将 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$-子模 $V_{\eta_\nu,W,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}$ 映到 W^- 上的 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$ 值函数子模 $\mathbb{Z}[\overline{\mu_{4p^\infty}}, \frac{1}{\sqrt{p}}][W^-]$。[G´er77, Theorem 2.4] 的证明给出了经由上述同构传递到 $\mathbb{C}[W^-]$ 上的表示 $\omega_\mathbb{C}$ 的显式描述。群 $\mathrm{Sp}(V)$ 由稳定 $W \subset V$ 的抛物子群 P 以及一个交换 W 与 W^- 的元素 $s \in \mathrm{Sp}(V)$ 生成。G´erardin（[G´er77, (2.7) and (2.8)]）指出， P 的作用由下式给出

$$\begin{aligned}(\omega_\mathbb{C}(p)(F))(y) &= \mathrm{sgn}(\det{}_{\mathbb{F}_p}(p|_W))F(p^{-1}(y)) && \text{if } p \in P \text{ stabilizes } W^-\\ (\omega_\mathbb{C}(p)(F))(y) &= \chi'(p)F(y) && \text{if } p \in P \text{ fixes } W \text{ pointwise,}\end{aligned}$$

对于 $F \in \mathbb{C}[W^-]$ 以及某个明确给出的二次特征 χ'。此外，由 [G´er77, (2.18)], 可得，对于 $F \in \mathbb{C}[W^-]$ 和 $y \in W^-$

$$(\omega_\mathbb{C}(s)(F))(y) \in \mu_4 \cdot p^{-\dim W/2} \sum_{z\in W^-} F(z) \cdot \nu \circ \theta(z, (s|_W)^{-1}y)dz. \tag{3.6.1a}$$

由于 $\mathrm{Sp}(V)$ 由 P和 s生成，这些公式表明子模 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}][W^-] \subset \mathbb{C}[W^-]$ 在整个 $\mathrm{Sp}(V)$ 的作用下保持不变。通过上述同构反推可得，$V_{\eta_\nu,\ W,\ \mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}$ 在 $\omega_\mathbb{C}(\mathrm{Sp}(V))$ 下是稳定的。 □

我们将上述引理给出的表示记为 $\omega_{\nu,\ \mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]} : \mathrm{Sp}(V) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]} V_{\eta_\nu,\ W,\ \mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}$。根据 $\omega_\mathbb{C}$ 的定义，我们有

$$\eta_{\nu,W,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}({}^g k) = \omega_{\nu,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}(g)\eta_{\nu,W,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}(k)\omega_{\nu,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}(g)^{-1}$$

对所有 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 和 $k \in \mu_p\boxtimes V$ 都成立。由于 $C = C \times \{0\}$ 被 $\mathrm{Sp}(V)$ 中心化，且在 $V_{\eta_{\nu,W,\ \mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}}$ 上通过一个特征作用，同一等式对 $g \in \mathrm{Sp}(V)$ 和 $k \in C\boxtimes V$ 也成立。因此，我们得到整个群 $\mathrm{Sp}(V)\ltimes(C\boxtimes V)$ 在 $V_{\eta_{\nu,W,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}}$ 上的一个表示 a representation $\omega_{\nu,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]} \ltimes \eta_{\nu,W,\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]}$。

定义.– 设 R 是一个交换的 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数。我们将由上面的 $(\mathrm{Sp}(V) \ltimes (C\boxtimes V))$-模经基变换得到的 $(\mathrm{Sp}(V) \ltimes (C\boxtimes V))$-模记为 $\omega_{\nu,W,R} \ltimes \eta_{\nu,W,R}$（若上下文清楚，也简称为 $\omega_{\nu,\ W} \ltimes \eta_{\nu,W}$）。我们称其为 (η, W)-海森堡–韦伊表示，并将其在 $\mathrm{Sp}(V)$ 上的限制 $\omega_{\nu,W}$ 称为 (η, W)-韦伊表示。

注意，(η, W)-海森堡–韦伊表示 $\omega_{\nu,W} \ltimes \eta_{\nu,W}$ 在 $C\boxtimes V$ 上的限制，就是我们最初采用的海森堡表示 $\eta_{\nu,W}$。

从现在起， R 表示一个交换的 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数。

注记.– 若 $p \equiv 1 \bmod 4$，则由 [G´er77 的 (2.17) 与 (2.18)]，(3.6.1a) 中的 μ_4 可替换为 $\mu_2 = \{\pm 1\}$，并且我们自始至终可以用环 $\mathbb{Z}[\mu_{p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$ 代替 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$。

3.6.2 引理. — 设 V^+ 为 W 的一个子空间，并记 $V^+ \oplus V^0$ 为 V^+ 在 V 中的正交补。则 θ 到 V^0 的限制是非退化的，从而我们可以构造 $\backsim C\boxtimes V^0$。设 P 为 $\mathrm{Sp}(V)$ 中稳定 V^+ 的子群。则 (η, W)-$\widetilde{}$海森堡–韦伊表示到 $P \ltimes (C\boxtimes V)$ 的限制满足：

$$(\omega_{\nu,W} \ltimes \eta_{\nu,W})|_{P\ltimes(C\tilde{\boxtimes}V)} \simeq \mathrm{Ind}_{P\ltimes((C\tilde{\boxtimes}V^0)\times V^+)}^{P\ltimes(C\tilde{\boxtimes}V)}(\omega_{\nu,W\cap V^0} \ltimes \eta_{\nu,W\cap V^0}) \otimes (\chi^{V^+} \ltimes 1), \tag{3.6.2a}$$

$\widetilde{}$其中，$\omega_{\nu,\ W\cap V^0} \ltimes \eta_{\nu,\ W\cap V^0}$是作用于 $(\eta, W\cap V^0)$-海森堡–韦伊表示的 $\mathrm{Sp}(V^0)\ltimes(C\boxtimes V^0)$，其中 $P \ltimes ((C\tilde{\boxtimes}V^0) \times V^+)$ 通过投影到 $\mathrm{Sp}(V^0) \ltimes ((C\tilde{\boxtimes}V^0) \times \{0\})$ 而作用； χ^{V^+} 表示特征 $P \to \{\pm 1\} \subset R^\times$，其由 $p \mapsto \mathrm{sgn}(\det^{\mathbb{F}_p}(p|_{V^+}))$给出。

证明。注意到 $W = V^+ \oplus (W \cap V^0)$，并且 $W \cap V^0$是 V^0的一个拉格朗日子空间。因此，根据定义以及归纳法的传递性，我们得到

$$\eta_{\nu,W} = \mathrm{Ind}_{C\times W}^{C\tilde{\boxtimes}V}(\nu \times 1) \simeq \mathrm{Ind}_{(C\tilde{\boxtimes}V^0)\times V^+}^{C\tilde{\boxtimes}V}\left(\mathrm{Ind}_{C\times(W\cap V^0)}^{C\tilde{\boxtimes}V^0}(\nu \times 1) \times 1\right) = \mathrm{Ind}_{(C\tilde{\boxtimes}V^0)\times V^+}^{C\tilde{\boxtimes}V}(\eta_{\nu,W\cap V^0})$$

$\widetilde{}$这意味着 (3.6.2a) 的两边作为 $C\boxtimes V$的表示是同构的，我们利用这一同构来标识两边底层的 R-模。由于两边都是 $P \ltimes (C\boxtimes V)$的$\widetilde{}$表示，每一边上 $p \in P$的作用都给出了 $\eta_{\nu,\ W}$与 $\eta_{\nu,\ pW}$之间的一个同构。由于 $\mathrm{End}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,\ W}) = R$，因此我们得出结论：(3.6.2a) 两边上 P 的作用至多相差一个取值于 $R^\times$中所含单位根的特征的扭曲。只需在 $R = \mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$处确定这一特征；在那里我们可以将基域变换为 $\mathbb{C}$，并应用 [Gérer77 的定理 2.4.(b)][9]，从而看到所需的特征正是 χ^{V^+}，如所断言。

□

3.6.3 定义／引理.– 设 η 是海森堡三元组 $(C\tilde{\boxtimes}V, C, \nu)$ 的海森堡表示。则求值同构 $\eta_{\nu,\ W} \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,W}, \eta) \xrightarrow{\sim} \eta$将 R-模 $V_{\eta_{\nu,W}} \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,W}, \eta)$ 上的表示 $(\omega_{\nu,W} \ltimes \eta_{\nu,W}) \otimes 1$ 转换为 $\mathrm{Sp}(V) \ltimes (C\boxtimes V)$ 在 V_η 上的一个表示，该表示与拉格朗日子空间 $W \subset V$ 的选取无关。我们称该表示 $\omega \ltimes \eta$ 为与 η 相关联的海森堡–韦伊表示，并称其为与海森堡表示 η相关联的韦伊表示。

证明. 设 W和 W'是 V的两个拉格朗日子空间。则存在 $g \in \mathrm{Sp}(V)$，使得 $gW = W'$。$\mathrm{Sp}(\ g\ )$在 $C\boxtimes V$ 上的函数上的作用给出一个 R-线性同构I_g: $V_{\eta_W,\nu} \xrightarrow{\sim} V_{\eta_{W'},\nu}$，它将 $\eta_{W,\nu}$与 $(\eta_{W',\nu})^g := \eta_{W',\nu} \circ$ 的作用 g 交织起来。因此，与 $\omega_{\nu,W'}(g)^{-1}$ 复合后，我们得到一个同构 $\eta_{\nu,\ W} \xrightarrow{\sim} \eta_{\nu,W'}$，它是可逆$R$-模 $\mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,W}, \eta_{\nu,W'})$ 的生成元。由韦伊表示的唯一性，或者由引理 3.6.1 证明中的显式公式可知，该同构必定是 $\mathrm{Sp}(V)$-等变的，从而得到一个同构 $\omega_{\nu,\ W} \ltimes \eta_{\nu,W} \xrightarrow{\sim} \omega_{\nu,W'} \ltimes \eta_{\nu,W'}$。因此，求值同构 $\eta_{\nu,W} \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,W}, \eta_{\nu,W'}) \xrightarrow{\sim} \eta_{\nu,W'}$将 $(\omega_{\nu,\ W} \ltimes \eta_{\nu,W}) \otimes 1$映到 $\omega_{\nu,W'} \ltimes \eta_{\nu,W'}$，故 $(\omega_{\nu,W} \ltimes \eta_{\nu,W}) \otimes 1$ 的传递作用经由

$$\eta_{\nu,\ W} \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,\ W},\ \eta) \xleftarrow{\sim} \eta_{\nu,\ W} \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,\ W},\ \eta_{\nu,\ W'}) \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,\ W'},\ \eta) \xrightarrow{\sim} \eta$$

[9] [Gérer77，定理 2.4.(b)] 的陈述遗漏了因子（$\chi^{V^+} \ltimes 1$），这是一个排版错误。另请参见 [Fin22，引理 3.2]。

与经由 $\eta_{\nu,\ W'} \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta_{\nu,\ W'},\ \eta) \xrightarrow{\sim} \eta$. 对 $(\omega_{\nu,\ W'} \ltimes \eta_{\nu,\ W'}) \otimes 1$ 的传输一致 □

3.6.4 引理。— 设 η 和 η' 是对应于 $(C\tilde{\boxtimes}V, C, \nu)$ 的两个海森堡表示，其对应的韦伊表示分别为 ω 和 ω'。那么包含

$$\mathrm{Hom}_{R(\mathrm{Sp}(V)\ltimes(C\tilde{\boxtimes}V))}(\omega \ltimes \eta, \omega' \ltimes \eta') \subseteq \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta, \eta')$$

是一个等式。

证明。 根据定义/引理 3.6.3，求值诱导出一个同构

$$(\omega \ltimes \eta) \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta, \eta') \xrightarrow{\sim} \omega' \ltimes \eta'.$$

由于 $\mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta, \eta')$ 是一个平坦的 R-模，因此这又诱导出一个同构

$$\mathrm{Hom}_{R(\mathrm{Sp}(V)\ltimes(C\tilde{\boxtimes}V))}(\omega \ltimes \eta, \omega' \ltimes \eta') \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{R(\mathrm{Sp}(V)\ltimes(C\tilde{\boxtimes}V))}(\omega \ltimes \eta) \otimes_R \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta, \eta').$$

这将引理归结为 $\eta = \eta'$ 的情形，此时结论由下式得出

$$R = \mathrm{Hom}_{R(C\tilde{\boxtimes}V)}(\eta, \eta) \supseteq \mathrm{Hom}_{R(\mathrm{Sp}(V)\ltimes(C\tilde{\boxtimes}V))}(\omega \ltimes \eta, \omega \ltimes \eta) \supseteq R.$$

□

3.6.5 从 p-进群到抽象的海森堡–韦伊框架。— 我们采用与点 $x \in \mathcal{B}_\iota$ 相关的常用设置。记 C_x 为特征 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$ 在 μ_{p^∞} 中的像 $\check{\phi}^+_{\iota,x}(K^+_{\iota,x})$。回顾 2.5.13，映射 $(a, b) \mapsto [a, b] := \check{\phi}^+_{\iota,x}(aba^{-1}b^{-1})$ 给出 $V_x := K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x}$ 上的一个非退化辛形式 $V_x \times V_x \to C_x$，该形式经由阶为 p 的子群 $\mu_p \subseteq C_x$ 分解。根据构造，$G_{\iota,x}$ 对 $K^\dagger_{\iota,x}$ 的共轭作用在 V_x 上诱导出一个保此非退化辛形式的作用。记相应的态射为 $\sigma : G_{\iota,x} \longrightarrow \mathrm{Sp}(V_x)$。

引理。— 存在一个同态 $f : K^\dagger_{\iota,\ x} \to C_x\tilde{\boxtimes}V_x$，使得

i) 下图是交换图

$$\begin{array}{ccccc} K^+_{\iota,x} & \hookrightarrow & K^\dagger_{\iota,x} & \twoheadrightarrow & V_x \\ \downarrow{\scriptstyle \check{\phi}^+_{\iota,x}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| \\ C_x & \hookrightarrow & C_x\tilde{\boxtimes}V_x & \twoheadrightarrow & V_x \end{array}$$

ii) 乘积映射 $\sigma \ltimes f : G_{\iota,\ x} \ltimes K^\dagger_{\iota,\ x} \to \mathrm{Sp}(V_x) \ltimes (C_x\tilde{\boxtimes}V_x)$ 是一个同态。

此外，这样的 f 在 $C_x\tilde{\boxtimes}V_x$ 中相差一个元素的共轭后复合而唯一。更确切地说，若 f' 是另一个满足 *i)* 和 *ii)* 的同态，则存在 $w \in (V_x)^{\sigma(G_{\iota,x})}$，使得 $\forall k \in K^+_{\iota,x}$, $f'(k) = (c(k).[w, v(k)], v(k))$，其中 $f(k) = (c(k)\ v(k))$。

证明。回顾在 2.5.8 中引入的群 $J^i_{\iota,x}$ 和 $J^{i+}_{\iota,x}$，以及等式 $K^\dagger_{\iota,x} = G_{\iota,x,0+}\prod_{i=1}^d J^i_{\iota,x}$。令

$$J^{\mathrm{der}} := \prod_{i=1}^d \left(J^i_{\iota,x} \cap \mathbf{G}^i_{\iota,\mathrm{der}}(F)\right) \text{ and } J^{\mathrm{der}}_+ := \prod_{i=1}^d \left(J^{i+}_{\iota,x} \cap \mathbf{G}^i_{\iota,\mathrm{der}}(F)\right)$$

由 [Fin21, 推论 7.2] 可得 $K^\dagger_{\iota,x} = G_{\iota,x,0+}J^{\mathrm{der}}$. 所需的态射 f 必须在 G_ι 上与 $\check{}\,\phi^+_i$ 重合，因为 $G_{\iota,x,0+} \subset K^+_{\iota,x}$。我们将仿照 Yu，在 J^{der} 上定义 f。注意，$J\mathrm{der}/J^{\mathrm{der}}_+ \xrightarrow{\sim} K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x} = V_x$，且 $\check{}\phi^+_{\iota,x}(J\mathrm{der}) = \mu_p \subset C_x$。因此，令 $N{:=}\ker(\check{}\phi^+_{\iota,x}|_{J^{\mathrm{der}}})$，群 J/N 便是 Yu01, §10] 意义下的 Heisenberg p-群。现在，我们可以将 Yu01, 命题 11.4] 的证明应用于我们的情形，只需将 Yu 的 J 替换为我们的 J^{der}，将他的 J_+ 替换为我们的 $J\mathrm{der}_+$，将他的 N 替换为我们的，将他的 G' 替换为我们的 G_ι，将他的 y 替换为我们的 x，将他的 $(G',G)(F)_{y,(r+,s+)}$ 替换为我们的 $\prod_{i=1}^d(G^{i-1}_\iota \cap (G^i_\iota)^{\mathrm{der}}, (G^i_\iota)^{\mathrm{der}})_{x,r_{i-1}+,r_{i-1}/2+}$，并将他的 $G_a(F)_{y,s}$ 替换为我们的 $U_\alpha \cap G(F)_{x,r_i/2}$；其中 i 是使根 α 出现在 $\mathfrak{g}^i_\iota$ 中的最小指标。他的论证同样成立，并给出一个群同态 f^{Yu}，使其嵌入交换图中

$$\begin{array}{ccccc} J^{\mathrm{der}}_+ & \hookrightarrow & J^{\mathrm{der}} & \twoheadrightarrow & V_x \\ \downarrow{\scriptstyle \check{\phi}^+_{\iota,x}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{\mathrm{Yu}}} & & \| \\ \mu_p & \hookrightarrow & \mu_p\widetilde{\boxtimes}V_x & \twoheadrightarrow & V_x \end{array}$$

并且 $\sigma \ltimes f\mathrm{Yu} : G_{\iota,x} \ltimes J^{\mathrm{der}} \longrightarrow \mathrm{Sp}(V_x) \ltimes (\mu_p\widetilde{\boxtimes}V_x)$ 是一个同态。由于在 $G_{\iota,x,0+} \cap J\mathrm{der} \subset J^{\mathrm{der}}_+$ 上，$f\mathrm{Yu}$ 与 $\check{}\phi^+_{\iota,x}$ 重合，我们可以通过令 $f(k) := \check{}\phi^+_{\iota,x}(g)f\mathrm{Yu}(j)$ 来定义一个态射 $f\colon K^\dagger_{\iota,x} \longrightarrow C_x\widetilde{\boxtimes}V_x$，其中任意 $k = gj$ 都满足 $g \in G_{\iota,x,0+}$ 和 $j \in J^{\mathrm{der}}$。引理 i) 中图表的交换性由上方图表的交换性得出。性质 ii) 则由 f^{Yu} 满足同一性质，以及 $G_{\iota,x}$ 中心化 $\check{}\phi^+_{\iota,x}$ 这一事实得出。

现在，设 f' 是另一个满足 i) 和 ii) 的态射。存在 α，它是 $\widetilde{}$ 的扩张 $C_x \hookrightarrow C_x\boxtimes V_x \twoheadrightarrow V_x$ 的一个自同构，且满足 $f' = \alpha \circ f$。任意这样的自同构都具有形式 $(c,v) \mapsto (c\Lambda(v)\ v)$，其中 $\Lambda\colon V_x \longrightarrow C_x$ 是某个态射。由于 V_x 是一个 $\mathbb{F}_p$-向量空间，Λ 可通过 μ_p 分解，且是一个线性形式。因此存在 $w \in V_x$，使得对所有 $v \in V_x$，$\Lambda(v) = [w,v]$。于是，记 $f(k) = (c(k)\ v(k))$，并记 $f'(k) = (c'(k)\ v'(k))$，其中 $k \in K^\dagger_{\iota,x}$，我们有 $v'(k) = v(k)$，以及 $c'(k) = c(k)[w,v(k)]$。现在，f（分别地，f'）满足性质 ii) 意味着 $f(gkg^{-1}) = (c(k)\ \sigma(g).v(k))$（分别地，$f'(gkg^{-1}) = (c'(k)\ \sigma(g).v'(k))$），由此我们推得，对所有 $g \in \mathbf{G}_{\iota,x}$ 和 $k \in K^\dagger_{\iota,x}$，$c'(k) = c(k)[w,\sigma(g).v(k)],$。因此，对所有 $k \in K^\dagger_{\iota,x}$，$[\sigma(g)^{-1}w, v(k)] = [w,\sigma(g).v(k)] = [w,v(k)]$。由于 $k \mapsto v(k)$ 满射到 V_x，我们得出 $w \in (V_x)^{\sigma(G_x)}$。

□

3.6.6 一族非扭曲海森堡–韦伊表示。——设 $\eta_{\iota,x}$ 是三元组 $(K^\dagger_{\iota,x}, K^+_{\iota,x}, \check{}\phi^+_{\iota,x})$的一个海森堡表示。我们将利用海森堡–韦伊表示理论，把这个表示扩张为 $K_{\iota,x}$ 的一个表示。

取一个态射 $f : K^\dagger_{\iota,\ x} \to C_x\widetilde{\boxtimes}V_x$ 如引理 3.6.5 所述。注意，对于 $C_x\boxtimes V_x$ 的任意海森堡$\widetilde{}$表示 η，拉回表示 $\eta \circ f$ 是$K^\dagger_{\iota,\ x}$ 的一个海森堡表示。因此，由海森堡表示分类可知，$K^\dagger_{\iota,\ x}$ 的所有海森堡表示均由 f 拉回得到。特别地，存在唯一的 $C_x\boxtimes V_x$ 在模 $V_{\eta_{\iota,\ x}}$ 上的海森堡$\widetilde{}$表示 η_f，使得 $\eta_{\iota,\ x} = \eta_f \circ f$。记 ω_f 为由定义/引理 3.6.3 将 η_f 与之关联的韦伊表示 $\mathrm{Sp}(V_x) \longrightarrow \mathrm{Aut}_R(V_{\eta_{\iota,\ x}})$。

引理。— 表示 $\omega_{\iota,\ x}:=\omega_f\circ\sigma:\ G_{\iota,\ x}\longrightarrow \mathrm{Aut}_R\ (V_{\eta_{\iota,\ x}})$ 不依赖于 f。

证明。设 f' 是引理 3.6.5 中所述的另一个态射，并设 w 是该引理最后一句中所述的 V_x 的一个元素。那么 $\eta_{f'}=\eta_f\circ \mathrm{Inn}^{(1,w)}$，其中 $\mathrm{Inn}^{(1,w)}$ 表示在 $C_x\boxtimes V_x$ 中由 $(1,\ w)$ 给出的内共轭$\tilde{}$。因此，R-线性自同构 $\eta_f(1,\ w)$ 诱导出表示的同构 $\eta_f\xrightarrow{\sim}\eta_{f'}$。根据引理 3.6.4，它还诱导出一个同构$\omega_f\xrightarrow{\sim}\omega_{f'}$。因此，对任意 $u\in \mathrm{Sp}(V_x)$，有

$$\omega_{f'}(u)=\eta_f(1,w)\circ\omega_f(u)\circ\eta_f(1,w)^{-1}=\omega_f(u)\circ\eta_f(1,u^{-1}.w)\circ\eta_f(1,w)^{-1}.$$

由于 w 在 $\sigma(G_{\iota,\ x})$ 下保持不变，我们得到 $\omega_{f'}\circ\sigma=\omega_f\circ\sigma$，正如所需。 □

我们将 $\omega_{\iota,x}$ 称为与 $\eta_{\iota,x}$ 相关联的韦伊表示。根据构造，乘积映射$\omega_{\iota,x}\ltimes\eta_{\iota,x}: G_{\iota,x}\ltimes K_{\iota,\ x}^{\dagger}\longrightarrow \mathrm{Aut}_R(V_{\eta_{\iota,x}})$ 是一个群同态。然而，这个表示不能沿乘法映射 $G_{\iota,x}\ltimes K_{\iota,x}^{\dagger}\longrightarrow K_{\iota,x}$下降。为了能够沿此映射下降，我们需要用 $G_{\iota,x}$ 的一个特征（该特征扩张了 $\check{}\phi_{\iota}^{+}{}_{,x}$）对 $\omega_{\iota,x}$ 进行扭曲。我们将使用 2.4.5 中选定的特征 $\check{}\varphi_0: G_{\iota}\longrightarrow \mu_{p^\infty}\subset R^\times$ 的限制。此选择独立于 x 和 $\eta_{\iota,\ x}$。

定义.– 我们将 $\kappa_{\iota}^{\mathrm{nt}}{}_{,x}$ 的$K_{\iota,x}$ 表示定义为满足以下条件的唯一 R-表示：态射

$$\begin{array}{ccc} G_{\iota,x}\ltimes K_{\iota,x}^{\dagger} & \twoheadrightarrow & K_{\iota,x} \\ (k_1,k_2) & \mapsto & k_1k_2 \end{array}$$

与 $\kappa_{\iota}^{\mathrm{nt}}{}_{,x}$ 复合后，得到表示 $(\check{}\varphi_0|_{G_{\iota,x}}\omega_{\iota,x})\ltimes\eta_{\iota,x}$。我们称 $\kappa_{\iota}^{\mathrm{nt}}{}_{,x}$ 为与 $\eta_{\iota,x}$相关联的非扭曲 $RK_{\iota,x}$- 海森堡–韦伊表示。

推论。— 设 $\eta_{\iota,x}$ 和 $\eta'_{\iota,x}$ 是 $K_{\iota,x}^{\dagger}$ 的两个海森堡表示。通过定义 *3.6.6*，我们分别将表示 $\kappa_{\iota}^{\mathrm{nt}}{}_{,x}$ 和 $\kappa'^{\mathrm{nt}}_{\iota}{}_{,x}$ 与之关联，它们是$K_{\iota,x}$ 的表示。那么

$$\mathrm{Hom}_{RK_{\iota,x}}(\kappa_{\iota,x}^{\mathrm{nt}},\kappa'^{\mathrm{nt}}_{\iota,x})=\mathrm{Hom}_{RK_{\iota,x}^{\dagger}}(\eta_{\iota,x},\eta'_{\iota,x})$$

证明。由引理 3.6.4 可知，$K_{\iota,x}^{\dagger}$ 满射到 $C_x\widetilde{\boxtimes}V_x$。 □

3.6.7 二次扭曲。 — 我们用 $\varepsilon_x^{\mathbf{G}_\iota}$（或简写为 ε_x）表示 $K_{\iota,x}$ 的二次特征，该特征定义于 [AFMO24b，记号 3.6.4]，源自 [FKS23]，并与序列$\vec{}\mathbf{G}_\iota$ 及一般特征 ψ_i相关联，即

$$\varepsilon_x=\prod_{i=1}^{d}\varepsilon_x^{G_\iota^i/G_\iota^{i-1}},$$

其中 $\varepsilon_x^{G_\iota^i/G_\iota^{i-1}}$在 $K_{\iota,x}^{\dagger}$ 上是平凡的，而在 $K_{\iota,x}/K_{\iota,x}^{\dagger}\simeq G_{\iota,x}/G_{\iota,x,0+}$ 上，它由 $G_{\iota,x}^i$ 上的二次特征 $\varepsilon_x^{G_\iota^i/G_\iota^{i-1}}$ 限制给出，该特征定义于 [FKS23, 引理 4.1.2] 对于 $r=r_{i-1}$。我们使用的二次特征 ε_x 的唯一性质是它满足以下条件。

引理。([FKS23]) — 设 $x, x' \in \mathcal{B}'_\iota$。则

$$(\varepsilon_x)\,|_{K_{\iota,x}\cap K_{\iota,x'}} \cdot \delta^x_{x'} = (\varepsilon_{x'})\,|_{K_{\iota,x}\cap K_{\iota,x'}} \cdot \delta^{x'}_x, \tag{3.6.7a}$$

其中 $\delta^x_{x'}(g)$ = 符号函数($\det_{\mathbb{F}_p}(u_g)$)，其中 u_g 表示由 $g \in K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}$ 通过共轭在 $\mathbb{F}_p$-向量空间上诱导的作用

$$((K^\dagger_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'})K^+_{\iota,x})/K^+_{\iota,x}.$$

证明。 这可由对每个 $\varepsilon_x^{G^i_\iota/G^{i-1}_\iota}$ 应用 [FKS23，引理 4.1.2]并取乘积得出。

□

3.6.8 定义。– 给定 $K^\dagger_{\iota,x}$的一个海森堡表示 $\eta_{\iota,x}$ ，我们将与 $\eta_{\iota,x}$ 相关联的扭曲$RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示定义为

$$\kappa_{\iota,x} := \varepsilon_x \cdot \kappa^{\mathrm{nt}}_{\iota,x}.$$

更一般地，若一个 $RK_{\iota,x}$-模是与 $K^\dagger_{\iota,x}$的某个海森堡表示相关联的扭曲 $RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示，则称其为扭曲 $RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示 。

3.6.9 注记。 — 若 R 是代数闭域，则表示$\kappa_{\iota,x}$ 与 [AFMO24b] 中构造的以下表示一致：若 $r_{d-1} = r_d$，分别地，若 $r_{d-1} < r_d$，令

$$\mathrm{HW}_x = \left(\left(\mathbf{G}_\iota = \mathbf{G}^0 \subsetneq \mathbf{G}^1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbf{G}^d\right), (r_0, \ldots, r_{d-1}), x, \mathbf{G}^0(F)_x, (\psi_0, \ldots, \psi_{d-1})\right), \text{ resp.}$$
$$\mathrm{HW}_x = \left(\left(\mathbf{G}_\iota = \mathbf{G}^0 \subsetneq \mathbf{G}^1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbf{G}^d \subseteq \mathbf{G}^{d+1} := \mathbf{G}^d\right), (r_0, \ldots, r_d), x, \mathbf{G}^0(F)_x, (\psi_0, \ldots, \psi_d)\right)$$

对于 $x \in \mathcal{B}_\iota$。那么，根据 [AFMO24b，定义 3.6.1]，由引理 2.5.7 可知，HW_x 是一个海森堡–外尔数据。注意，根据我们的构造，我们已固定嵌入 $\mathcal{B}_\iota = \mathcal{B}(\mathbf{G}^0, F) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{G}^1, F) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{G}\ F)$，因此不将它们记录为海森堡–外尔数据的一部分。接着，由 [G´er77，推论 2.5] 和 [AFMO24b，引理 3.6.8] 可知，(κ_x, V_{κ_x}) 同构于通过 [AFMO24b，记号 3.6.3] 中的扭曲海森堡–外尔构造，从 HW_x 得到的 $K_{\iota,x}$ 的表示。

3.6.10 推论。— 设 $\eta_{\iota,x}$ 和 $\eta'_{\iota,x}$ 是 $K^\dagger_{\iota,x}$ 的两个海森堡表示，其对应的扭曲 $RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示分别为 $\kappa_{\iota,x}$ 和 $\kappa'_{\iota,x}$。那么

$$\mathrm{Hom}_{RK_{\iota,x}}(\kappa_{\iota,x}, \kappa'_{\iota,x}) = \mathrm{Hom}_{RK^\dagger_{\iota,x}}(\eta_{\iota,x}, \eta'_{\iota,x})$$

证明。 这由推论 3.6.6 和定义 3.6.8 得出。 □

3.6.11 命题。— 设 $x, x' \in \mathcal{B}'_\iota$，并设 $\eta_{\iota,x}$ 和 $\eta_{\iota,x'}$ 是两个海森堡表示，其对应的扭曲 $RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示分别为 $\kappa_{\iota,x}$ 和 $\kappa_{\iota,x'}$。那么

$$\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,x}\cap K_{\iota,x'})}(\kappa_{\iota,x}, \kappa_{\iota,x'}) = \mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,x}\cap K^\dagger_{\iota,x'})}(\eta_{\iota,x}, \eta_{\iota,x'}).$$

证明。若 $x = x'$，则所声称的等式成立，因为两边都等于 R。因此，设 $x \neq x'$，并令 **(P,P)** 为 **G** 的一对相反抛物子群，其幺幂根分别为 $\bar{\mathbf{U}}$ 和 **U**，它们如引理 2.5.12 和引理 3.5.5 的证明中所述，与线段 (x, x') 相关联；也就是说，我们有

$$M \cap K_{\iota,x} = M \cap K_{\iota,x'}, \quad \bar{U} \cap K^+_{\iota,x} \supseteq \bar{U} \cap K_{\iota,x'}, \quad U \cap K_{\iota,x} \subseteq U \cap K^+_{\iota,x'},$$

$$K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'} = (U \cap K_{\iota,x})(M \cap K_{\iota,x})(\bar{U} \cap K_{\iota,x'})$$

and

$$K^\dagger_{\iota,x} \cap K^\dagger_{\iota,x'} = (U \cap K^\dagger_{\iota,x})(M \cap K^\dagger_{\iota,x})(\bar{U} \cap K^\dagger_{\iota,x'}) \tag{3.6.11a}$$

因此，$K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}$ 的共轭作用保持该子空间

$$V_U := (U \cap K^\dagger_{\iota,x})/(U \cap K^+_{\iota,x}) = ((K^\dagger_{\iota,x} \cap K^+_{\iota,x'})K^+_{\iota,x})/K^+_{\iota,x}$$

属于$K^\dagger_{\iota,x}/K^+_{\iota,x} = V_x$。因此，$K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}$ 在 $\mathrm{Sp}(V_x)$ 中的像包含于抛物子群 P^{Sp}，该子群是 $\mathrm{Sp}(V_x)$ 中 V_U 的稳定子。记 $V_M := (M \cap K^\dagger_{\iota,x})/(M \cap K^+_{\iota,x})$。于是，根据引理3.6.2，与$\eta_{\iota,x}$相关联的海森堡–韦伊表示$\omega \ltimes \eta_{\iota,x}$ 在 $P^{\mathrm{Sp}} \ltimes (C_x \widetilde{\boxtimes} V_x)$上的限制满足：

$$(\omega \ltimes \eta_{\iota,x})|_{P^{\mathrm{Sp}} \ltimes (C_x \widetilde{\boxtimes} V_x)} \simeq \mathrm{Ind}^{P^{\mathrm{Sp}} \ltimes (C_x \widetilde{\boxtimes} V_x)}_{P^{\mathrm{Sp}} \ltimes ((C_x \widetilde{\boxtimes} V_M) \times V_U)} (\omega^M \ltimes \eta^M_{\iota,x}) \otimes (\chi^U \ltimes 1),$$

其中，$\omega^M \ltimes \eta^M_{\iota,x}$ 表示 $\mathrm{Sp}(V_M) \ltimes (C_x \boxtimes V_M)$ 的一个海森堡–韦伊表示，其中心特征标为 $\check{\phi}^+_{\iota,x}$，而 $P_{\mathrm{Sp}} \ltimes (V_U \times (C_x \widetilde{\boxtimes} V_M))$ 通过投影到 $\mathrm{Sp}(V_M) \ltimes (\{0\} \times (C_x \widetilde{\boxtimes} V_M))$ 来作用于其上；χ^U 表示特征 $P_{\mathrm{Sp}} \to \{\pm 1\}$，其定义为 $p \mapsto \mathrm{sgn}(\det_{\mathbb{F}_p}(p|_{V_U}))$。注意，$K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'} \to P^{\mathrm{Sp}}$ 与 χ^U 复合后得到的特征就是 3.6.7 中定义的 $\delta^x_{x'}$。因此我们得到

$$(\kappa_{\iota,x})|_{K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}} \simeq \left(\mathrm{Ind}^{(K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'})K^\dagger_{\iota,x}}_{(U \cap K_{\iota,x})(M \cap K_{\iota,x})(\bar{U} \cap K^+_{\iota,x})} \varepsilon^{\vec{\mathbf{G}}_\iota}_x \varepsilon^{\vec{\mathbf{M}}_\iota}_x \kappa^M_{\iota,x} \otimes \delta^x_{x'} \right) |_{K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}},$$

其中，$\kappa^M_{\iota,x}$ 表示按照定义 3.6.8 中构造 $\kappa_{\iota,x}$ 的类似方式构造的 $M \cap K_{\iota,x}$ 的表示，只是在构造中将 $\vec{\mathbf{G}}_\iota$ 替换为 $\vec{\mathbf{M}}_\iota$，并将 $\eta_{\iota,x}$ 替换为 $\eta^M_{\iota,x}$；而将 $\varepsilon^{\vec{\mathbf{M}}_\iota}_x \kappa^M_{\iota,x}$ 视为 $(U \cap K_{\iota,x})(M \cap K_{\iota,x})(U \cap K^+_{\iota,x})$ 的表示，其中 $(U \cap K_{\iota,x})$ 和 $(U \cap K^+_{\iota,x})$ 作用平凡。由此可推得

$$(\kappa_{\iota,x}|_{K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}})_{U \cap K^\dagger_{\iota,x}} \simeq \left(\varepsilon^{\vec{\mathbf{G}}_\iota}_x \varepsilon^{\vec{\mathbf{M}}_\iota}_x \kappa^M_{\iota,x} \otimes \delta^x_{x'} \right) |_{K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}}, \tag{3.6.11b}$$

并且满射 $V_{\kappa_{\iota,x}} \twoheadrightarrow (V_{\kappa_{\iota,x}})_{U \cap K^\dagger_{\iota,x}}$ 是 $K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}$-等变的。类似地，我们得到

$$(\kappa_{\iota,x'}|_{K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}})^{\bar{U} \cap K^\dagger_{\iota,x'}} \simeq \left(\varepsilon^{\vec{\mathbf{G}}_\iota}_{x'} \varepsilon^{\vec{\mathbf{M}}_\iota}_{x'} \kappa^M_{\iota,x'} \otimes \delta^{x'}_x \right) |_{K_{\iota,x} \cap K_{\iota,x'}}, \tag{3.6.11c}$$

尤其是，$V^{\bar{U}\cap K_\iota^\dagger}{}_{,\kappa_\iota\, x'}{}^{x'}{}_{,}$是$V_{\kappa_{\iota,x'}}$的$K_{\iota,x}\cap K_{\iota,x'}$-稳定子空间。因此，我们可以考虑以下包含映射的交换图

$$\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,x}\cap K_{\iota,x'})}\left((\kappa_{\iota,x})_{U\cap K_{\iota,x}^\dagger},(\kappa_{\iota,x'})^{\bar{U}\cap K_{\iota,x'}^\dagger}\right)\ \subset\ \mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,x}\cap K_{\iota,x'})}(\kappa_{\iota,x},\kappa_{\iota,x'})$$

$$\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,x}^\dagger\cap K_{\iota,x'}^\dagger)}\left((\eta_{\iota,x})_{U\cap K_{\iota,x}^\dagger},(\eta_{\iota,x'})^{\bar{U}\cap K_{\iota,x'}^\dagger}\right)\ \subset\ \mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,x}^\dagger\cap K_{\iota,x'}^\dagger)}(\eta_{\iota,x},\eta_{\iota,x'})$$

其中，两个水平包含映射分别由与投影作前复合以及与包含映射作复合得到。由 (3.5.5b)，底部包含映射是等式。另一方面，由于 x 和 x' 在 M 的约化建筑中的像相同，我们有 $\varepsilon_x^{\vec{\mathbf{M}}_\iota}=\varepsilon^{\vec{\mathbf{M}}}{}_{x'}{}^{\iota}$ 和

$$\mathrm{Hom}_{R(M\cap K_{\iota,x})}(\kappa_{\iota,x}^M,\kappa_{\iota,x'}^M)=\mathrm{Hom}_{R(M\cap K_{\iota,x}^\dagger)}(\eta_{\iota,x}^M,\eta_{\iota,x'}^M)$$

根据推论 3.6.10。将此等式与 (3.6.11b)、(3.6.11c) 和 (3.6.7a) 结合，我们得到上图中的左侧垂直包含映射是等式。因此，剩下的两个包含映射也都是等式。

□

3.7 Heisenberg–Weil 系数系的构造 m

本节我们终于证明定理 3.3.7，因此令 R 为一个交换的 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\ \frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数。

我们将先在以下假设下证明该结果，并从现在起一直假设该条件成立，直至 3.7.5 结束。

3.7.1 假设。— 我们有 $Z(C^{\hat{}}\mathbf{G}(\phi))^{\varphi(W_F)^\circ}=Z(\hat{}\mathbf{G})^{W_F,\circ}$。等价地，$\mathbf{G}_\iota$ 的极大分裂中心环面与 $\mathbf{G}$ 的极大分裂中心环面重合，即 $Z(\mathbf{G}_\iota)/Z(\mathbf{G})$ 是各向异性的。

这一假设的作用是确保 $\mathcal{B}'_\iota$ of $\mathcal{B}'$ 是G_ι的约化建筑。特别地，它配备了典范的 Bruhat–Tits 多单纯形结构。请注意，每个 Bruhat–Tits 多单纯形都是其所包含的 e-面之并。不过请注意，我们的 e-面是相对于 G定义的，而它们相对于G_ι可能并非 e-面。

记号。– 对于 $\mathcal{B}'_\iota$的每个室 $\mathcal{C}$ （即最大维数的多单纯形），我们用 $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ 表示包含 $\mathcal{C}$重心的唯一 e-面。根据我们对 e的选择，这实际上是一个 e-顶点，其稳定子$G_{\iota,\mathcal{F}_\mathcal{C}}$ 与 $\mathcal{C}$的稳定子$G_{\iota,\mathcal{C}}$ 重合。

3.7.2 基本选择. — 我们选择并固定以下数据：

i) $\mathcal{B}'_\iota$的一个室 $\mathcal{C}_0$，其闭包记为$\mathcal{C}_0$。

ii) $\mathcal{B}'$ 中位于 $\mathcal{C}_0$的 e面之c_0-轨道的一组代表元 $\mathscr{S}G_{\iota,\mathcal{C}_0}$。注意，这组代表元必须包含 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}$，同时也是位于 $\mathcal{B}'_\iota$的 e面之 G_ι-轨道的一组代表元。

iii) 对每个 $\mathcal{F}_0\in\mathscr{S}$，存在一个扭曲的 $RK_{\iota,\ \mathcal{F}_0}$-海森堡–韦伊表示（$\kappa_{\iota,\ \mathcal{F}_0}$，$\mathcal{W}^0_{\iota,\ \mathcal{F}_0}$），使得可逆的 R-模 $\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,\mathcal{F}_0}\cap K_{\iota,\mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}})}(\kappa_{\iota,\ \mathcal{F}_0},\ \kappa_{\iota,\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}})\ =:\ H_{\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}}$是自由的。

可按如下方式实现：任意选取 $(\kappa'_{\iota,\ \mathcal{F}_0})_{\mathcal{F}_0\in\mathscr{S}}$，并令 $\kappa_{\iota,\ \mathcal{F}_0}:=\kappa'_{\iota,\ \mathcal{F}_0}\otimes_R(H_{\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}})^*$，其中 $(H_{\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}})^*:=\mathrm{Hom}_R(H_{\mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}},\ R)$ 表示逆 R-模。

iv) 一个 $\alpha_{\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}}$ R-模 $\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,\mathcal{F}_0}\cap K_{\iota,\mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}})}(\kappa_{\iota,\mathcal{F}_0},\kappa_{\iota,\mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}})$ 的生成元。

3.7.3 假设 *3.7.1* 下海森堡–韦伊系数系统的构造，步骤 *1*：模与作用。—— 对任意 $\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，我们令 $\mathcal{F}_0\in\mathscr{S}$ 为 $\mathcal{F}$ 的 G_ι-轨道中的唯一元素。如前所述，我们用 $G_{\iota,\mathcal{F}\mathcal{F}_0}$ 表示从 $\mathcal{F}_0$ 到 $\mathcal{F}$ 的传输子集，它是 G_ι 的一个开子集，并令

$$K_{\iota,\mathcal{F}\mathcal{F}_0}:=G_{\iota,\mathcal{F}\mathcal{F}_0}K_{\iota,\mathcal{F}_0}=K_{\iota,\mathcal{F}}G_{\iota,\mathcal{F}\mathcal{F}_0},$$

它是 G 的一个开子集。注意，由于 $G_{\iota,\mathcal{F}}$ 包含于 $K_{\iota,\mathcal{F}}$ 中，集合 $K_{\iota,\mathcal{F}\mathcal{F}_0}$ 是一个右 $K_{\iota,\mathcal{F}_0}$-陪集，也是一个左 $K_{\iota,\mathcal{F}}$-陪集。现在我们令

$$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}:=\mathcal{C}_c^\infty(K_{\iota,\mathcal{F}\mathcal{F}_0})\otimes_{RK_{\iota,\mathcal{F}_0}}\mathcal{W}^0_{\iota,\mathcal{F}_0}.$$

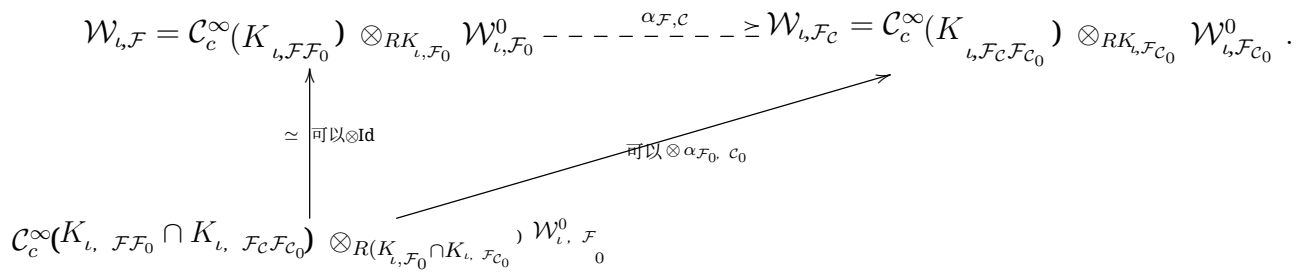
对于 $\mathcal{F}$ 的 G_ι-轨道中的任意面 $\mathcal{F}'\in\mathcal{B}'_{\iota,\ \bullet/e}$，集合 $K_{\iota,\ \mathcal{F}'\mathcal{F}}$ 是 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]$ 中的 Hom 集 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\ \mathcal{F}')$。因此，这些映射

$$\begin{array}{rccc}\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}: & K_{\iota,\mathcal{F}'\mathcal{F}} & \to & \mathrm{Hom}_R(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}) \\ & g & \mapsto & \lambda_g\otimes\mathrm{Id}\end{array},$$

其中 λ_g：$\mathcal{C}_c^\infty(K_{\iota,\ \mathcal{F}\mathcal{F}_0})\longrightarrow\mathcal{C}_c^\infty(K_{\iota,\ \mathcal{F}'\mathcal{F}_0})$ 是由 g^{-1} 的左平移诱导的映射，它们在 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]$ 的满子范畴上定义了一个系数系统，该满子范畴由 $\mathcal{F}_0$ 的轨道给出。特别地，$\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}}$ 定义了 $K_{\iota,\ \mathcal{F}}$ 在 $\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}}$ 上的一个表示；根据构造，它在 $K_\iota^{\dagger}{}_{,\ \mathcal{F}}$ 上的限制是 $\check{}\phi_\iota^+{}_{,\ \mathcal{F}}$ 的海森堡表示。为使我们的记号与 G_ι-等变系数系统的记号保持一致，我们也写作

$$g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}:=\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},g\mathcal{F}}(g),\ \text{ for any } g\in G_\iota$$

3.7.4 假设 3.7.1 下海森堡–韦伊系数系统的构造，第 2 步：面映射。——取上一段中的 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}_0$，并另选一个室 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}$。于是我们可以找到 $g\in G_\iota$，使得 $\mathcal{C}=g\mathcal{C}_0$ 和 $\mathcal{F}=g\mathcal{F}_0$。这样的 g 在右乘 $G_{\iota、\ \mathcal{F}_0}\cap G_{\iota、\ \mathcal{C}_0}$ 的意义下唯一，并且有 $K_{\iota、\ \mathcal{F}\mathcal{F}_0}\cap K_{\iota、\ \mathcal{F}\mathcal{C}、\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}}=g(K_{\iota、\ \mathcal{F}_0}\cap K_{\iota、\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}_0}})=(K_{\iota、\ \mathcal{F}}\cap K_{\iota、\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}}})g$. 因此，我们可以通过要求下图交换来定义 $\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,\mathcal{F}}\cap K_{\iota,\mathcal{F}_{\mathcal{C}}})}(\mathcal{W}_{\iota、\ \mathcal{F}、\ \mathcal{W}_{\iota、\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}}}})$ 的一个生成元 $\alpha_{\mathcal{F}、\ \mathcal{C}}$。图中的对象是 $R(K_{\iota、\ \mathcal{F}}\cap K_{\iota、\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}}})$-模（其中，$can$表示典范包含）：



根据构造，这些映射满足与作用映射的以下相容性：

$$\forall g \in G_\iota,\ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}_\mathcal{C}} \circ \alpha_{\mathcal{F},\mathcal{C}} = \alpha_{g\mathcal{F},g\mathcal{C}} \circ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}.$$

现在，令 $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$为 $\mathcal{F}$闭包中的另一个 e-面。它也包含于 $\mathcal{C}$中，因此我们得到如上所述的映射$\alpha_{\mathcal{F}',\mathcal{C}}$。根据推论 3.5.7，存在唯一的 $R(K_\iota^\dagger{}_{,\mathcal{F}} \cap K_\iota^\dagger{}_{,\mathcal{F}'})$-线性映射

$$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}} : \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}$$

满足$\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{C}} = \alpha_{\mathcal{F}',\mathcal{C}} \circ \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}}$。它是 R-模 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$的一个生成元，并且根据命题 3.6.11，它实际上属于 $\mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,\mathcal{F}} \cap K_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$。由唯一性可得$\beta_{\mathcal{F}',\mathcal{F}'',\mathcal{C}} \circ \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}} = \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'',\mathcal{C}}$，再次根据构造，我们得到它与作用映射的如下相容性：

$$\forall g \in G_\iota,\ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}} = \beta_{g\mathcal{F},g\mathcal{F}',g\mathcal{C}} \circ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}.$$

引理。— $\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}}$ 与 $\mathcal{C}$无关。我们将其简单记为$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$

证明。回顾一下，$G_{\iota,\mathcal{F}}$ 在包含 $\mathcal{F}$的室集合上传递地作用。此外，根据我们对 e的选择，有$G_{\iota,\mathcal{F}} \subseteq G_{\iota,\mathcal{F}'}$ 以及$K_{\iota,\mathcal{F}} \subseteq K_{\iota,\mathcal{F}'}$，因此也有$G_{\iota,\mathcal{F}} \subseteq K_{\iota,\mathcal{F}} \cap K_{\iota,\mathcal{F}'}$。现在，当$g \in G_{\iota,\mathcal{F}}$时，最后显示的性质表示为$g_{\mathcal{W},\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}} = \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',g\mathcal{C}} \circ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}$。另一方面，$K_{\iota,\mathcal{F}} \cap K_{\iota,\mathcal{F}'}$关于$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}}$的等变性意味着$g_{\mathcal{W},\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}} = \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}} \circ g_{\mathcal{W},\mathcal{F}}$。由此可得$\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{C}} = \beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}',g\mathcal{C}}$。

□

3.7.5 假设 *3.7.1* 下海森堡–韦伊系数系统的构造，第 *3* 步：态射。——现在令 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$任意，并回顾 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}') = \{g \in K_{\iota,\mathcal{F}'}G_\iota,\ g\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}'\}$。

$$\text{For } g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}'),\ \text{set } \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(g) := \mathcal{W}_{\iota,g^{-1}\mathcal{F}',\mathcal{F}'}(g) \circ \beta_{\mathcal{F},g^{-1}\mathcal{F}'}.$$

由于 $g\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ 时 $\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = \mathrm{Id}$，因此这与我们先前的定义一致 .

引理。——对于所有 $g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}')$以及$h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}',\mathcal{F}'')$，我们有 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}''}(h) \circ \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(g) = \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}''}(hg)$。

证明。取分解 $g = kg_\iota$ 和 $h = lh_\iota$，满足 $k \in K_{\iota,\mathcal{F}'}$, $l \in K_{\iota,\mathcal{F}''}$ 以及 $g_\iota, h_\iota \in G_\iota$。我们有

$$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(g) = \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}'}(k) \circ (g_\iota)_{\mathcal{W},g_\iota^{-1}\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{F},g_\iota^{-1}\mathcal{F}'}$$
$$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}''}(h) = \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'',\mathcal{F}''}(l) \circ (h_\iota)_{\mathcal{W},h_\iota^{-1}\mathcal{F}''} \circ \beta_{\mathcal{F}',h_\iota^{-1}\mathcal{F}''}$$

由于 $\beta_{\mathcal{F}',h_\iota^{-1}\mathcal{F}''}$ 是 $K_{\iota,\mathcal{F}'} \cap K_{\iota,h_\iota^{-1}\mathcal{F}''}$-等变的，且 $K_{\iota,\mathcal{F}'} \subset K_{\iota,h_\iota^{-1}\mathcal{F}''}$，我们有

$$\beta_{\mathcal{F}',h_\iota^{-1}\mathcal{F}''} \circ \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}'}(k) = \mathcal{W}_{\iota,h_\iota^{-1}\mathcal{F}'',h_\iota^{-1}\mathcal{F}''}(k) \circ \beta_{\mathcal{F}',h_\iota^{-1}\mathcal{F}''}.$$

另一方面，我们已经看到

$$\beta_{\mathcal{F}',h_\iota^{-1}\mathcal{F}''} \circ (g_\iota)_{\mathcal{W},g_\iota^{-1}\mathcal{F}'} = (g_\iota)_{\mathcal{W},(h_\iota g_\iota)^{-1}\mathcal{F}''} \circ \beta_{g_\iota^{-1}\mathcal{F}',(h_\iota g_\iota)^{-1}\mathcal{F}''}.$$

根据 $\mathcal{W}_\iota$ on G_ι-轨道的性质，我们有

$$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'',\mathcal{F}''}(l)\circ(h_\iota)_{\mathcal{W},h_\iota^{-1}\mathcal{F}''}\circ\mathcal{W}_{\iota,h_\iota^{-1}\mathcal{F}'',h_\iota^{-1}\mathcal{F}''}(k)\circ(g_\iota)_{\mathcal{W},(h_\iota g_\iota)^{-1}\mathcal{F}''}=\mathcal{W}_{\iota,(hg)^{-1}\mathcal{F}'',\mathcal{F}''}(hg).$$

最后，面映射的传递性意味着

$$\beta_{g_\iota^{-1}\mathcal{F}',(h_\iota g_\iota)^{-1}\mathcal{F}''}\beta_{\mathcal{F},g_\iota^{-1}\mathcal{F}'}=\beta_{\mathcal{F},(h_\iota g_\iota)^{-1}\mathcal{F}''}=\beta_{\mathcal{F},(hg)^{-1}\mathcal{F}''}.$$

最后显示的四个等式推出了该引理。 □

命题。——设 R 是一个交换的 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty},\frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数，并假设假设 *3.7.1*。则存在一个海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$ 属于 $\mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota)$。

证明。由引理 3.7.5，映射 $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 和 $g\in\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}')\mapsto\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(g)$ 定义了一个函子 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]\longrightarrow R\text{–}\mathbf{Mod}$。我们已经看到，$K_\iota^\dagger{}_{,\mathcal{F}}$ 通过 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}}$ 在 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上的作用是一个海森堡表示，并且根据构造，每个面映射 $\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}=\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(1)$ 都是 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$ 的一个生成元。 □

我们现在不再施加假设 3.7.1。

3.7.6 经有理利维子群的极小分解。——考虑 ${}^L\mathbf{G}$ 中 $C\hat{}\mathbf{G}(\phi)$ 内最大 W_F-不变中心环面的中心化子 $\mathcal{M}:=C_\iota\mathbf{G}(Z(C\hat{}\mathbf{G}(\phi))^{\varphi(W_F)}{}_\circ)$。这是 Borel [Bor79, §3.4], so 意义下的 ${}^L\mathbf{G}$ 的一个 Levi 子群。共轭 ϕ 后，我们可以假设 $\mathcal{M}$ 具有某个（非扭曲的） F-有理 Levi 子群 $\mathbf{M}$ 的形式 ${}^L\mathbf{M}$。根据构造，ϕ 和 φ 都经由 $\mathcal{M}$ 分解，从而得到一个野惯性参数 $\phi_M\in\Phi(P_F,\mathbf{M})$（因为任何关于 G 的相关扩张 φ' 都经由 $\mathcal{M}$ 分解，因此也给出关于 M 的相关扩张 $\hat{}$）。注意，根据定义，$\mathbf{M}=\mathcal{M}^\circ$ 是 $\mathbf{G}$ 中 $(\hat{}\mathbf{S}^\phi)^{W_F}{}_\circ$ 的中心化子。另一方面，取 I 中的一个 $\iota\colon\mathbf{S}_\phi\hookrightarrow\mathbf{G}$，并考虑 $C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_\phi^{\mathrm{split}}))$，即 $\mathbf{S}_\phi$ 的最大分裂子环面的像的中心化子。这是 $\mathbf{G}$ 的一个有理 Levi 子群，属于 $\mathbf{M}$ 的 G-共轭类。因此，共轭 ι 后，我们可以假设它经由 $\mathbf{M}$ 分解，使得 $\mathbf{M}=C_{\mathbf{G}}(\iota(\mathbf{S}_\phi^{\mathrm{split}}))$。根据 $\mathcal{M}$ 的构造，我们有 $C\hat{}\mathbf{G}(\phi)\subseteq\hat{}\mathbf{M}$，因此 $\mathbf{S}_\phi=\mathbf{S}_{\phi_M}$，且 ι 确定了 I_{ϕ_M} 中的一个嵌入 ι_M，对此我们有 $\mathbf{M}_{\iota_M}=\mathbf{G}_\iota$。

$\hat{}$ 根据构造，$(\mathbf{M}\ \phi_M,I_M)$ 满足假设 3.7.1。因此，命题 3.7.5 适用，并为我们提供了一个与这些数据相关的海森堡–韦伊系数系统。我们需要比较相关的建筑。

我们沿用 2.8.8 中的记号 $\mathcal{B}_M$ 和 $\mathcal{B}_{\iota_M}$。它们是 $\mathcal{B}$的子集，我们用$\mathcal{B}'_M$ 和 $\mathcal{B}'_{\iota_M}$ 表示它们在 $\mathcal{B}'$中的像。在这里的设置中，实际上有 $\mathcal{B}'_\iota=\mathcal{B}'_{\iota_M}$。这些子集在 $\mathcal{B}'$的 e-面分解下稳定；相应的偏序集分别记为$\mathcal{B}'_M$、$\bullet/e$，以及$\mathcal{B}'_{\iota_M}$、$\bullet/e$。另一方面，$\mathbf{M}$ 的约化 Bruhat–Tits 建筑 $\mathcal{B}'(\mathbf{M}\ F)$ 也带有其自身的 e-面分解，其子集 $\mathcal{B}'(\mathbf{M}\ F)^{\iota_M}$ 在此分解下稳定。相应的偏序集分别记为 $\mathcal{B}'(\mathbf{M}\ F)^\bullet{}_{/e}$和 $\mathcal{B}'(\mathbf{M}\ F)_{\iota_M,\bullet/e}$。存在一个典范投影 $\mathcal{B}'_M\longrightarrow\mathcal{B}'(\mathbf{M}\ F)$，它将$\mathcal{B}'_M$中的任意 e-面映到 $\mathcal{B}'(\mathbf{M}\ F)$中的一个 e-面。因此，该投影诱导出一个函子

$$\pi:[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/(M\cap G_\iota)]=[\mathcal{B}'_{\iota_M,\bullet/e}/M_{\iota_M}]\longrightarrow[\mathcal{B}'(\mathbf{M},F)_{\iota_M,\bullet/e}/M_{\iota_M}].$$

将 $K_{\iota_M,\pi(\mathcal{F})}$、$K^\dagger_{\iota_M,\pi(\mathcal{F})}$ 等记为与为 $(\mathbf{M}\ \phi_M,\iota_M\in I_M)$ 和面 $\pi(\mathcal{F})$ 构造的类似于 $K_{\iota,\mathcal{F}}$, $K_\iota^\dagger{}_{,\mathcal{F}}$ 等的对象，以代替 $(\mathbf{G}\ \phi,\iota\in I)$ 和面 $\mathcal{F}$。于是我们有

一个包含 $M \cap K_{\iota,\mathcal{F}} \subset K_{\iota_M,\pi(\mathcal{F})}$ 和一个等式 $M \cap K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} = K^{\dagger}_{\iota_M,\pi(\mathcal{F})}$。因此，我们的函子 π 可以升级为

$$\pi : [\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/(M \cap K_\iota)] \longrightarrow [\mathcal{B}'(\mathbf{M}, F)_{\iota_M,\bullet/e}/K_{\iota_M}].$$

现在，命题 3.7.5 给出的海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_{\iota_M}$ 是一个从 $[\mathcal{B}'(\mathbf{M}\ F)_{\iota_M,\bullet/e}/K_{\iota_M}]$ 到 R–Mod 的函子，因此我们可以并且将会把它与 π 复合，从而得到定义在 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/(M \cap K_\iota)]$ 上的系数系统，我们仍将其记为 $\mathcal{W}_{\iota_M}$。在接下来的几段中，我们从 $\mathcal{W}_{\iota_M}$ 出发，构造定义在 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota]$ 上的海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$。

我们令 $K^{?}_{\iota_M,\mathcal{F}} := M \cap K^{?}_{\iota,\mathcal{F}}$ 对于 $? = \dagger, +, \emptyset$。我们有 $K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}} = K^{\dagger}_{\iota_M,\pi(\mathcal{F})}$、$K^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}} = K^{+}_{\iota_M,\pi(\mathcal{F})}$，以及 $K^{\circ}_{\iota_M,\pi(\mathcal{F})} \subset K_{\iota_M,\mathcal{F}} \subset K_{\iota_M,\pi(\mathcal{F})}$。

3.7.7 海森堡–韦伊系数系统的构造 1：模。——我们选取 G 的一个抛物子群 P，其 Levi 子群为 M，并将其幺幂根记为 $\bar{\mathbf{U}}$，沿用 2.8.7 和 2.8.8 中的记号；特别地，P 表示相对于 M、与 P 对向的抛物子群，其幺幂根为 $\bar{\mathbf{U}}$，并且 $U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} = K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} \cap U$, $U^{+}_{\iota,\mathcal{F}} = K^{+}_{\iota,\mathcal{F}} \cap U$, $\bar{U}^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} = K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} \cap \bar{U}$，以及 $\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}} = K^{+}_{\iota,\mathcal{F}} \cap \bar{U}$。在此处的设定下，我们有 $K_{\iota,\mathcal{F}} = U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} K_{\iota_M,\mathcal{F}} \bar{U}^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}$。事实上，这可由 $K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} = U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}} \bar{U}^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}$ 以及 $G_{\iota,\mathcal{F}} = M_{\iota_M,\mathcal{F}}$ 推出。回忆引理 2.8.9 i)：$\check{\phi}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$ 是 $K^{+}_{\iota,F} = U^{+}_{\iota,\mathcal{F}} K^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}} \bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上的特征，其在 $U^{+}_{\iota,\mathcal{F}} \bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上的限制为平凡特征，而在 $K^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}}$ 上的限制为 $\check{\phi}^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}}$。

对于每个 $\mathcal{F} \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，我们通过要求 $U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}$ 和 $\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$ 作用平凡，将 $\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}}$ 延拓为 $U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} K_{\iota_M,\mathcal{F}} \bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$ 的一个表示。然后我们定义

$$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} := \mathrm{ind}^{K_{\iota,\mathcal{F}}}_{U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} K_{\iota_M,\mathcal{F}} \bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}} \mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}},$$

它带有两个 $U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} K_{\iota_M,\mathcal{F}} \bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$-等变映射，这两个映射通过弗罗贝尼乌斯互反律对应于恒等映射：

$$i_{\mathcal{F}} : \mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} \quad \text{and} \quad pr_{\mathcal{F}} : \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} \twoheadrightarrow \mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}}.$$

注意，$pr_{\mathcal{F}} \circ i_{\mathcal{F}}$ 是恒等映射，而 $i_{\mathcal{F}} \circ pr_{\mathcal{F}}$ 是投影 $e_{U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}}$，其取值于 $U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}$ 作用平凡的子模上。

引理。— $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}}$ 是三元组 $(K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}},\ K^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}},\ \check{\phi}^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}})$ 的海森堡表示

证明。我们有 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}} = \mathrm{ind}^{K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}} K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}} \bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}}_{K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}} \mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}}|_{K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}}$，其中 $\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}}|_{K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}}$ 是三元组 $(K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}, K^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}}, \check{\phi}^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}})$ 的海森堡表示。由于 $\check{\phi}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$ 对 $U^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$ 和 $\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}$ 的限制是平凡的，而对 $K^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}}$ 的限制是 $\check{\phi}^{+}_{\iota_M,\mathcal{F}}$，我们可以像引理 3.5.5 iii)(a) 中那样证明，$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^{\dagger}_{\iota,x}}$ 是三元组 $(K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}, K^{+}_{\iota,\mathcal{F}}, \check{\phi}^{+}_{\iota,\mathcal{F}})$ 的海森堡表示。也就是说，忽略一个可逆 R-模的扭曲后，我们可以假设 $\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}}|_{K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}}$ 是由某个拉格朗日子空间 $W \subset K^{\dagger}_{\iota_M,x}/K^{+}_{\iota_M,x}$ 诱导的；在这种情况下，$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}}$ 是由拉格朗日子空间 $U^{\dagger}_{\iota,x}/U^{+}_{\iota,x} \oplus W \subset K^{\dagger}_{\iota,x}/K^{+}_{\iota,x}$ 诱导的。 □

3.7.8 海森堡–韦伊系数系统的构造 *2*：作用与面映射。 —
设 $\mathcal{F},\mathcal{F}'\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 和 $g\in G_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\subset M$，则 $gU^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}g^{-1}=U^{\dagger}_{\iota,g\mathcal{F}}$，$gK_{\iota_M,\mathcal{F}}g^{-1}=K_{\iota_M,g\mathcal{F}}$，$g\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}g^{-1}=\bar{U}^{+}_{\iota,g\mathcal{F}}$ 和 $gK_{\iota,\mathcal{F}}g^{-1}=K_{\iota,g\mathcal{F}}$。因此，$g_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}}$ 诱导出唯一的 $K_{\iota,\mathcal{F}}$-等变同构 $g_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}}\colon\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}\xrightarrow{\sim}g^*\mathcal{W}_{\iota,g\mathcal{F}}$；若 $g\in G_{\iota,\mathcal{F}}$，则该同构与 g 在 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上的作用一致。

引理。— 对于满足 $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}'$ 的每一对 e-面 $\mathcal{F},\mathcal{F}'\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/\overline{e}}$，存在唯一的生成元 $\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\in\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$，使得 $pr_{\mathcal{F}'}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ i_{\mathcal{F}}=\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$。

证明。令 $\mathcal{F}_0$和 $\mathcal{F}'_0$为两个 e-面，其闭包分别包含 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$，且满足

$$U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}_0}=U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}\,,\ \bar{U}^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}_0}=\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}=\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}_0}\,,\ U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'_0}=U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'}\,,\ \bar{U}^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'_0}=\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}'}=\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}'_0}\,,$$

and

$$K_{\iota_M,\mathcal{F}_0}=K_{\iota_M,\mathcal{F}}\,,\ K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}_0}=K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}\,,\ K_{\iota_M,\mathcal{F}'_0}=K_{\iota_M,\mathcal{F}'}\,,\ K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0}=K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'}.$$

这可以通过如下方式实现：令 $\mathcal{F}_0$ 为包含 $x+\varepsilon\lambda$ 的 e-面，其中 x 是 $\mathcal{F}$中的一个点，$\varepsilon>0$充分小，而 λ 是中心 $\mathbf{M}$的一个适当余特征（回想一下，$\mathbf{M}$ 的中心的极大分裂环面包含于 $\mathbf{M}_\iota$中）。e-面 $\mathcal{F}'_0$ 可以类似地得到。于是我们有

$$\text{(3.7.8a)}\qquad K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}_0}=U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}_0}K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}_0}\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}_0}=U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}\text{ and }\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0}=\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}_0}\simeq\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}}$$

$$\text{(3.7.8b)}\qquad K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'_0}=U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'_0}K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0}\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}'_0}=U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'}K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'}\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}'}\text{ and }\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_0}=\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0}\simeq\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'}$$

将引理 3.5.6 应用于点 $(x,x',x'')\in\mathcal{F}_0\times\mathcal{F}\times\mathcal{F}'$ 以及点 $(x,x',x'')\in\mathcal{F}_0\times\mathcal{F}'\times\mathcal{F}'_0$，可得一个由以下复合导出的同构：

$$\text{(3.7.8c)}\qquad \begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}_0}\cap K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}})\otimes\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})\otimes\\&\otimes\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'}\cap K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_0})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}_0}\cap K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_0})\end{aligned}$$

同理

$$\text{(3.7.8d)}\qquad \begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}_0}\cap K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}})}(\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}})\otimes\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}\cap K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'})\otimes\\&\otimes\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'}\cap K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'},\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}_0}\cap K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0}).\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{W}_{\iota_M}$ 是一个海森堡–韦伊系数系统，左侧 (3.7.8d) 中的所有 Hom 空间都是秩 1 的自由 R- 模，因此 $\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}_0}\cap K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0})$ 也是如此。
我们将证明，（3.7.8c）中的所有 Hom 空间也同样如此。

首先，我们有 $\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}_0}\cap K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_0})=\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}_0}\cap K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'_0})$，正如我们刚才所见，它是一个秩为 1 的自由 R-模。

接下来，回想一下 $(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}})\big|_{K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}}=\mathrm{ind}^{K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}}_{\iota_{\mathcal{F}},\mathcal{F}}K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}}\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}}$由 (3.7.8a) 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{R(K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}_0}\cap K^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}})&\overset{U^{\dagger}_{\iota}}{\simeq}\mathrm{Hom}_{R(U^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}K^{\dagger}_{\iota_M,\mathcal{F}}\bar{U}^{+}_{\iota,\mathcal{F}})}(\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}})\\&\simeq\mathrm{Hom}_{RK^{\dagger}_{\iota,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}),\end{aligned}$$

根据引理 3.7.7 和 3.5.2，它是一个秩 1 的自由 R-模。注意，$\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}_0}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}})}(\mathcal{W}_\iota,_{\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_\iota,_{\mathcal{F}})$ 的一个生成元是 $i_F\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}_0,\mathcal{F}}$；这里我们也将同构[10]$\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}_0,\mathcal{F}}\in\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota_M,\mathcal{F}_0}\cap K^\dagger_{\iota_M,\mathcal{F}})}(\mathcal{W}_{\iota_M},_{\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota_M},_{\mathcal{F}})=\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota_M,\mathcal{F}})}(\mathcal{W}_{\iota_M},_{\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota_M},_{\mathcal{F}})$视为 $\mathrm{Hom}_{R(U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}K^\dagger_{\iota_M,\mathcal{F}}\bar{U}^+_{\iota,\mathcal{F}})}(\mathcal{W}_{\iota_M},_{\mathcal{F}_0},\mathcal{W}_{\iota_M},_{\mathcal{F}})$ 中的一个同构。类似地，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'_0}) &\simeq \mathrm{Hom}_{R(U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}K^\dagger_{\iota_M,\mathcal{F}'}\bar{U}^+_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'},\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}'},)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{R(K_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}),\end{aligned}$$

这是一个秩 1 的自由 R-模，而 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'_0})}(\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}'},\ \mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}'_0})$ 的一个生成元由 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\ \mathcal{F}',\ \mathcal{F}'_0}\circ pr_{\mathcal{F}'}$ 给出。

因此，我们已经证明，(3.7.8c) 中除可逆模 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}},\ \mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}'})$ 之外的所有 Hom 空间都是秩 1 的自由 R- 模。由此可知，后者也具有秩 1 且为自由模；结合同构 (3.7.8c) 和 (3.7.8d)，可知存在唯一的生成元 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}'}}$，它属于 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}},\ \mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}'})$，使得

$$\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0}\circ pr_{\mathcal{F}'}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ i_{\mathcal{F}}\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}_0,\mathcal{F}}=\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0}\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}_0,\mathcal{F}}.$$

由于 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}',\mathcal{F}'_0}$ 和 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}_0,\mathcal{F}}$ 都是同构，因此可推出存在唯一的生成元 $\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$，属于 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}\cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$，使得 $pr_{\mathcal{F}'}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ i_{\mathcal{F}}=\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F},\mathcal{F}'}$. □

对于每一对满足 $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}'$ 的 e-面 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}'\in\mathcal{B}'_{\iota,\ \bullet/e}$，令 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}'}}$ 如引理 3.7.8 中所述。

3.7.9 海森堡–韦伊系数系统的构造 *3*：态射。——我们首先注意到，面映射具有以下所需性质，从而可以利用它们来定义所需的海森堡–韦伊系数系统。

Lemma. — *Let* $\mathcal{F},\mathcal{F}'\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ *with* $\overline{\mathcal{F}}\supseteq\mathcal{F}'$.

i) 若 $\mathcal{F}''\in\mathcal{B}'_{\iota,\ \bullet/e}$ 且 $\mathcal{F}''\supseteq\mathcal{F}'$，则有 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}',\ \mathcal{F}''}}\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}'}}=\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}''}}$。

ii) If $g\in G_\iota$, *then* $g_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}'}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}=\beta_{\mathcal{W}_\iota,g\mathcal{F},g\mathcal{F}'}\circ g_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}}$.

iii) 映射 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}'}}$ 是 $K_{\iota,\ \mathcal{F}}\cap K_{\iota,\ \mathcal{F}'}$-等变的。

证明。 i) 根据引理 3.7.8，且由于 $\mathcal{W}_{\iota_M}$ 是一个海森堡–韦伊系数系统，只需证明 $pr_{\mathcal{F}''}\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}',\ \mathcal{F}''}}\circ i_{\mathcal{F}'}\circ pr_{\mathcal{F}'}\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}'}}\circ i_{\mathcal{F}}=pr_{\mathcal{F}''}\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}',\ \mathcal{F}''}}\circ\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}'}}\circ i_{\mathcal{F}}$.。利用 $i_{\mathcal{F}'}\circ pr_{\mathcal{F}'}=e_{U^\dagger_{\iota,\ \mathcal{F}'}}$、$pr_{\mathcal{F}''}=pr_{\mathcal{F}''}\circ i_{\mathcal{F}''}\circ pr_{\mathcal{F}''}=pr_{\mathcal{F}''}\circ e_{U^\dagger_{\iota,\ \mathcal{F}''}}$、$U^\dagger_{\mathcal{F}'}\subseteq U^\dagger_{\mathcal{F}''}$，以及 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota,\ \mathcal{F}',\ \mathcal{F}''}}$是 $U^\dagger_{\mathcal{F}'}\cap U^\dagger_{\mathcal{F}''}=U^\dagger_{\mathcal{F}'}$-等变的，我们有

$$\begin{aligned}pr_{\mathcal{F}''}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}''}\circ i_{\mathcal{F}'}\circ pr_{\mathcal{F}'}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ i_{\mathcal{F}} &= pr_{\mathcal{F}''}\circ e_{U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}''}}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}''}\circ e_{U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ i_{\mathcal{F}}\\ &= pr_{\mathcal{F}''}\circ e_{U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}''}}e_{U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'}}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}''}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ i_{\mathcal{F}}\\ &= pr_{\mathcal{F}''}\circ e_{U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}''}}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}''}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ i_{\mathcal{F}}\\ &= pr_{\mathcal{F}''}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}''}\circ\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}\circ i_{\mathcal{F}}.\end{aligned}$$

[10]注意，如果我们选择 $\mathcal{F}_0$，使得 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}_0$ 在 $\mathcal{B}'_{\iota_M,\ \bullet/e}$ 中映射到同一个面，那么 $\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\ \mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}}$ 就是恒等映射。

ii) 我们有

$$\begin{aligned} pr_{\mathcal{F}'} \circ g_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ g^{-1}_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}} \circ i_{g\mathcal{F}} &= g_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}'} \circ pr_{\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ i_{g\mathcal{F}} \circ g^{-1}_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}} \\ &= g_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}'} \beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ g^{-1}_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F}} = \beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},g\mathcal{F},g\mathcal{F}'}, \end{aligned}$$

由此，依据$\beta_{\mathcal{W}_\iota,g\mathcal{F},g\mathcal{F}'}$的定义即可得出该结论。

iii) 由于$K_{\iota,\mathcal{F}} \cap K_{\iota,\mathcal{F}'} = (K_{\iota_M,\mathcal{F}} \cap K_{\iota_M,\mathcal{F}'})(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})$，只需证明$\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$是$K_{\iota_M,\mathcal{F}} \cap K_{\iota_M,\mathcal{F}'}$-等变的。设$k \in K_{\iota_M,\mathcal{F}} \cap K_{\iota_M,\mathcal{F}'}$，则

$$pr_{\mathcal{F}'} \circ k\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}k^{-1} \circ i_{\mathcal{F}} = k \circ pr_{\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ i_{\mathcal{F}} \circ k^{-1} = k\beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F},\mathcal{F}'}k^{-1} = \beta_{\mathcal{W}_{\iota_M},\mathcal{F},\mathcal{F}'},$$

由此，依据$\beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}$的定义即可得出该结论。 □

类似于 3.7.5，我们可以补全函子 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota] \longrightarrow R$–Mod 的定义，该函子将 $\mathcal{F}$映射到 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$，如下所示。对于 $\mathcal{F},\mathcal{F}' \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，该函子将元素 $g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}') = \{g \in K_{\iota,\mathcal{F}'}G_\iota, \overline{g\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}'\}$ 映射为

$$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(g) := g_{\mathcal{W},g^{-1}\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{F},g^{-1}\mathcal{F}'}.$$

推论。— 对所有 $g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}')$和$h \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}',\mathcal{F}'')$，我们有 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}',\mathcal{F}''}(h) \circ \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(g) = \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}''}(hg)$。

证明。 证明与引理 3.7.5 的证明相同，只需使用引理 3.7.9。 □

定理 3.3.7 的证明。由推论 3.7.9，映射 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$和 $g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}') \mapsto \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(g)$ 定义了一个函子 $[\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota] \longrightarrow R$ –Mod。由引理 3.7.7，$K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}$在$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 上的作用经由 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}}$ 是一个海森堡表示；根据构造，即引理 3.7.8，每个面映射 $\beta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} = \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'}(1)$ 都是 $\mathrm{Hom}_{R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}'})}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}},\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'})$ 的生成元。 □

以下命题并非构造等价本身所必需，但它本身具有独立的意义，并使我们能够推出推论 3.7.11 和推论 4.1.2。

3.7.10 命题。— $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 是一个扭曲的$RK_{\iota,\mathcal{F}}$-海森堡–韦伊表示，其在$K^+_{\iota,\mathcal{F}}$ 上的限制是$\check{\phi}^+_{\iota,\mathcal{F}}$-同型分量。

证明。 令 $\mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}}$ 表示附属于海森堡表示 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}}$ 的扭曲 $RK_{\iota,\mathcal{F}}$-海森堡–韦伊表示，我们需要证明 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} \simeq \mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}}$。令 $\mathcal{C}$为一个最大维数的 e-面，其闭包包含 $\mathcal{F}$且满足$U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}K_{\iota_M,\mathcal{F}}\bar{U}^+_{\iota,\mathcal{F}} = U^\dagger_{\iota,\mathcal{C}}K_{\iota_M,\mathcal{C}}\bar{U}^+_{\iota,\mathcal{C}}$。那么根据上述观察，我们有 $\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}} \simeq \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{C}}$，将其视为 $U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}K_{\iota_M,\mathcal{F}}\bar{U}^+_{\iota,\mathcal{F}}$ 的表示

$=$

$K_{\iota,\mathcal{C}}$ 在需要时通过适当的膨胀。结合将 $i_{\mathcal{F}}$ 限制到$K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}$，我们得到一个$K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}} \cap K^\dagger_{\iota,\mathcal{C}}$-等变同态$\mathcal{W}_{\iota_M,\mathcal{F}} \simeq \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{C}} \to \mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}}$；根据命题 3.6.11，它也是$K_{\iota,\mathcal{F}} \cap K_{\iota,\mathcal{C}}$-等变的。由于$K_{\iota,\mathcal{F}} \cap K_{\iota,\mathcal{C}} = K_{\iota,\mathcal{C}} = U^\dagger_{\iota,\mathcal{F}}K_{\iota_M,\mathcal{F}}\bar{U}^+_{\iota,\mathcal{F}}$，弗罗贝尼乌斯互反性为我们提供了一个非平凡的$K_{\iota,\mathcal{F}}$-态射$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} \to \mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}}$。根据引理 3.5.5.iii)，它是 $R(K^\dagger_{\iota,\mathcal{F}})$-模的同构，因而也是 $R(K_{\iota,\mathcal{F}})$-模的同构。 □

3.7.11 推论。— 给定一个点 $x \in \mathcal{B}'_\iota$ 以及任意一个扭曲的$RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示$\kappa_{\iota,x}$，其限制到$K^+_{\iota,x}$ 后是$\check{}\phi^+_{\iota,x}$-同型分量，则存在一个定义在$\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 上的海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$，使得$\kappa_{\iota,x} \simeq \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$，其中 $\mathcal{F}$ 表示包含 x的 e-面。

证明。由于根据定义 3.6.8，扭曲的 $RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示由其底层的 $K^\dagger_{\iota,x}$-海森堡表示决定，因此根据命题 3.7.10，只需证明：任意一个 $K^\dagger_{\iota,x}$ -海森堡表示，只要其对 $K^+_{\iota,x}$ 的限制是 $\check{}\phi^+_{\iota,x}$-同型分量，就能作为某个海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$的 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$ 限制出现。设 $\mathcal{W}'_\iota$ 是如上构造的某个海森堡–韦伊系数系统，其中我们在 3.7.2 中选择 $\mathcal{C}_0$ 和 $\mathscr{S}$，使得 $\mathscr{S}$包含 $\mathcal{F}$在$\mathcal{B}'_{\iota_M,\bullet/e}$中的像。那么，根据 3.5.4，我们有 $\kappa_{\iota,x}|_{K^\dagger_{\iota,x}} \simeq \mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^\dagger_{\iota,x}} \otimes_R R'$，其中 R'表示可逆的 R-模 $\mathrm{Hom}^{K^\dagger_{\iota,x}}(\mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^\dagger_{\iota,x}}, \kappa_{\iota,x}|_{K^\dagger_{\iota,x}})$。将 3.7.2 中基本选择里的所有扭曲海森堡–韦伊表示替换为它们与R'的 R-张量积，我们便可由上述构造得到一个新的海森堡–韦伊系数系统 $\mathcal{W}_\iota$，满足性质 $\kappa_{\iota,x}|_{K^\dagger_{\iota,x}} \simeq \mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^\dagger_{\iota,x}} \otimes_R R' \simeq \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}|_{K^\dagger_{\iota,x}}$。

□

3.7.12 唯一性——命题 3.3.8 的证明。——设 $\mathcal{W}_\iota$ 和 $\mathcal{W}'_\iota$ 是定义 3.3.5 中的两个海森堡–外尔系数系统。对于任意 e-面$\mathcal{F} \in \mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$，$R$-模$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$和$\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}'}$ 都带有$K^\dagger_\iota{}_{,\mathcal{F}}$ 的作用，从而成为关于$(K^\dagger_\iota{}_{,\mathcal{F}}, K^+_{\iota,\mathcal{F}}, \check{}\phi^+_{\iota,\mathcal{F}})$的海森堡表示。由引理 3.5.2，$R$-模 $H_\mathcal{F} := \mathrm{Hom}^{RK^\dagger_\iota{}_{,\mathcal{F}}}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}, \mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}})$是可逆的。我们在集合$(H_\mathcal{F})^{\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}}$ 上赋予如下结构，使其成为光滑的G_ι-等变系数系统，且其过渡映射均为同构。

- 若 $\mathcal{F}'$是包含于闭包 $\mathcal{F}$中的 e-面，则由命题 3.3.6 的 i) 部分可得一个 R-线性映射 $H_\mathcal{F} \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}} H_{\mathcal{F}'}$, $\alpha_\mathcal{F} \mapsto \alpha_{\mathcal{F}'}$，其特征由性质$\alpha_{\mathcal{F}'} \circ \beta_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'} = \beta_{\mathcal{W}'_\iota,\mathcal{F},\mathcal{F}'} \circ \alpha_\mathcal{F}$确定。由映射$\beta_{\mathcal{W}_\iota,-}$和$\beta_{\mathcal{W}'_\iota,-}$满足相同的传递性性质，这一刻画蕴含传递性$\gamma_{\mathcal{F}'',\mathcal{F}'} \circ \gamma_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} = \gamma_{\mathcal{F}'',\mathcal{F}}$（对 $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$成立）。反过来，由命题 3.3.6 的 ii) 部分可得一个 R-线性映射 $H_{\mathcal{F}'} \longrightarrow H_\mathcal{F}$, $\alpha_{\mathcal{F}'} \mapsto \alpha_\mathcal{F}$，其特征由与上述相同的等式确定。特别地，该映射是$\gamma_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$的逆映射。

- 若 $g \in G_\iota$，我们就得到一个 R-模 $g_\mathcal{F}$ 的同构：$H_\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} H_{g\mathcal{F}}$，其映射方式为将 $\alpha_\mathcal{F}$ 映至$g_{\mathcal{W}'_\iota,\mathcal{F}} \circ \alpha_\mathcal{F} \circ (g_{\mathcal{W}_\iota,\mathcal{F}})^{-1}$。对于任意 h，g，等式 $h_{g\mathcal{F}} \circ g_\mathcal{F} = (hg)_\mathcal{F}$以及 $\mathcal{F}$均可由 $\mathcal{W}_\iota$ 和 $\mathcal{W}'_\iota$满足的同类等式推出。与面映射 $\gamma_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ 的相容性同样可由 $\mathcal{W}_\iota$和 $\mathcal{W}'_\iota$满足的相容性推出。最后，由于 $\alpha_\mathcal{F}$是 $K^\dagger_\iota{}_{,\mathcal{F}}$-等变的，当 $g \in G_{\iota,\mathcal{F},0+}$时，我们有 $g_\mathcal{F} = \mathrm{Id}$。

因此，$(H_\mathcal{F}, g_\mathcal{F}, \gamma_{\mathcal{F},\mathcal{F}'})_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$定义了 $\mathrm{Coef}_R([\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota])$中的一个深度 0 对象；根据 3.4.1，我们也可以将其视为 $\mathrm{Coef}_R([\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_\iota])$中的对象，进而视为 $\mathrm{Coef}_R([\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota])$中的对象。根据构造，求值映射 $\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} \otimes_R H_\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}'_{\iota,\mathcal{F}}$诱导出 $\mathrm{Coef}_R([\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/K_\iota])$中的一个同构 $\mathcal{W}_\iota \otimes_R H \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}'_\iota$。

现在令 $L := \mathrm{colim}^{\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}} H$。由于 H 的所有面映射都是同构，L 是一个可逆的 R-模，且所有典范映射 $H_\mathcal{F} \xrightarrow{\text{均}} L$ 是同构。G_ι-等变结构在 L上诱导出 G_ι 的一个光滑作用，该作用由特征 θ：$G_\iota \longrightarrow R^\times$给出。由于它在每个子群 $G_{\iota,\mathcal{F},0+}$上都是平凡的，因此其深度为 0。我们将 L所构成的 R-模记为 L_θ

其上的 G_ι 作用通过 θ给出。我们看到，映射族 $(\mathrm{can}_{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}\in\mathcal{B}'_\iota}$ $\bullet_{/e}$ 给出了从 H 到与 L_θ相关联的常值 G_ι-等变系统的一个同构。换言之，我们构造出了一个同构 $\mathcal{W}_\iota \otimes_R L_\theta \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}'_\iota$。

□

4 示例应用

4.1 类型的 Hecke 代数归约到零深度

4.1.1 设置。——设 $R=\mathcal{C}$ 是特征不同于 p 的代数闭域，例如复数。设 $((\overrightarrow{\mathbf{G}},\mathbf{M}^0)\ \vec{r},x,(K_{M^0},\rho_{M^0})\ \vec{\psi})$ 是一个 G- 数据，如 [AFMO24b, 定义 4.11] 中所述，该定义沿用 [KY17, 7.2]。与 [AFMO24b] 和 [KY17] 不同，我们不将扭曲 Levi 子群 $\mathbf{M}^i \subseteq \mathbf{G}^i \subseteq \mathbf{G}$ 的扩展 Bruhat–Tits 建筑之间的嵌入记录为数据的一部分；其中，$\mathbf{M}^i$ 是 $\mathbf{G}^i$ 中极大分裂环面 $\mathbf{A}_{\mathbf{M}^0}$ 的中心化子，而 $\mathbf{A}_{\mathbf{M}^0}$ 位于 $\mathbf{M}^0$, 的中心。原因是此处我们固定这些嵌入，再选取$x \in \mathcal{B}(\mathbf{M}^0) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{G})$，使其满足 G-数据的所有条件。由此类 G-数据出发， [AFMO24b] 中沿用 Kim 和 Yu 的类型构造（[KY17]），并加入由 [FKS23], 引入的二次特征扭曲的构造，为我们提供一个紧开子群 $K_x \subset G$ 及其上的表示 ρ_x。此外，$((\mathbf{G}^0,\mathbf{M}^0)\ x,(K_{M^0},\rho_{M^0}))$ 是一个深度零数据，与之关联的是 $K_x^0 \supseteq K_{M^0}$ 的一个紧开子群，其上带有表示 ρ_x^0 ；该表示在 K_{M^0} 上的限制为 ρ_{M^0}，见 [AFMO24a, 5.1] 或 [AFMO24b, 4.1]。注意， K_x^0 包含于 G_x^0 中，并且包含抛物型子群 $G_{x,0}^0$。我们记$\mathcal{H}(G,K_x,\rho_x) := \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{K_x}^G \rho_x)$ 和 $\mathcal{H}(G,K_x^0,\rho_x^0) := \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{K_x^0}^{G^0} \rho_x^0)$ 为分别关联于 (K_x,ρ_x) 和 (K_x^0,ρ_x^0) 的 Hecke 代数。若 $\mathcal{C}=\mathbb{C}$，则 (K_x^0,ρ_x^0) 是 G^0 的一个深度零型，而 (K_x,ρ_x) 是 G 的一个类型。此外，若选取 K_{M^0} 使其等于 M_x^0，那么这些类型刻画单个 Bernstein 块。在这种情况下，这些 Bernstein 块分别等价于右幺复数 $\mathcal{H}(G,K_x,\rho_x)$-模范畴和 $\mathcal{H}(G,K_x^0,\rho_x^0)$-模范畴。若 p 不整除 G 的外尔群的阶，则每个 Bernstein 块都存在这种形式的类型（[Fin21]）。

ˆ4.1.2 推论。 — 假设 p 是奇数，且既不是 G 的挠素数，也不是 G 的挠素数。我们有一个 $\mathcal{C}$-代数同构 $\mathcal{H}(G,K_x,\rho_x) \simeq \mathcal{H}(G^0,K_x^0,\rho_x^0)$。

证明。我们用 $\bar{x}$ 表示 x 在 $\mathcal{B}'_\iota$ 中的像。类型 (K_x,ρ_x) 仅取决于乘积 $\psi := \prod \psi_i|_{G^0}$ ，而不取决于单个特征 ψ_i。将紧接在 [Fin21, 引理 7.3] 之前给出的特征构造（其中这些特征记作 ϕ_i, 此处记作 ψ'_i）应用于 ρ_x 在 $K_x^0 K_\iota^+,_{\bar{x}} \subseteq K_x$ 上的限制 $\rho_x|_{K_x^0 K_\iota^+,_{\bar{x}}}$ 的一个不可约子表示（利用单位根可被整除，而非庞特里亚金对偶，来延拓特征），再利用 [Fin21, 引理 7.3], ，我们得到 G^i 的 $\mathbf{G}^{i+1}$-一般特征 ψ'_i ，它们在 G^i 的导出子群上平凡，并满足 $\prod \psi_i|_{G_{x,0+}^0} = \prod \psi'_i|_{G_{x,0+}^0}$。令 $\psi''_i = \psi'_i$ 为 $i>0$，并令 $\psi''_0 = \psi'_0\delta$ 为 G^0 的一个适当特征 δ，它在 $G_{x,0+}^0$ 上平凡，则有 $\prod \psi_i|_{G^0} = \prod \psi''_i|_{G^0}$，因此由 $((\overrightarrow{\mathbf{G}},\mathbf{M}^0)\ \vec{r},x,(K_{M^0},\rho_{M^0})\ \vec{\psi})$ 和 $((\overrightarrow{\mathbf{G}},\mathbf{M}^0)\ \vec{r},x,(K_{M^0},\rho_{M^0})\ \vec{\psi''})$ 构造出的类型相同。此外，Yu 按照 2.8.4 将与三个截断的 Yu 数据 $(\overrightarrow{\mathbf{G}}\ \vec{\psi},x)$、$(\overrightarrow{\mathbf{G}}\ \vec{\psi'},x)$ 和 $(\overrightarrow{\mathbf{G}}\ \vec{\psi''},x)$ 关联的各对 $(K_x^+,\hat{}\psi_x)$ 也相同。根据引理 2.8.5，存在一对 (ϕ,ι)，由一个野惯性参数 ϕ 和

$\iota \in I \subseteq I_\phi$，使得 $\mathbf{G}_\iota^0 = \mathbf{G}^0$，$K_\iota^+{}_{,\bar{x}} = K_x^+$，且 $\check{}\phi_{\iota,\bar{x}}^+ = \hat{}\psi_x$。现在，群 K_x^0 包含于 $G_{\iota,\bar{x}}$，并且根据类型 $K_x = K_x^0 K_\iota^\dagger{}_{,\bar{x}}$ 和 $\rho_x = \rho_x^0 \otimes \kappa_{\iota,x}|_{K_x}$ 的构造，它们对应于一个扭曲的 $\mathcal{C}K_{\iota,\bar{x}}$-海森堡–韦伊表示，其在 $K_\iota^+{}_{,x} = K_\iota^+{}_{,\bar{x}}$ 上的限制为 $\hat{}\psi_x = \check{}\phi_{\iota,\bar{x}}^+$-同型的。令 $\rho := \mathrm{ind}_{G_{\iota\,\bar{x}}\,K_x^0}\rho_x^0$，，并令 $\mathcal{W}_\iota$ 为 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 上的一个海森堡–韦伊系数系统，使得 $\kappa_{\iota,x} = \mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}}$，其中 $\mathcal{F}$ 表示包含 $\bar{x}$ 的 e-面；根据推论 3.7.11，这样的面存在。根据推论 3.4.14，在 $\mathrm{Rep}_R^1(G_\iota)$ 与 $\mathrm{Rep}_R^{\phi\,I}(G)$ 之间的范畴等价 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}$ 下，表示 $\mathrm{ind}_{K_x^0}^{G_\iota^0}\rho_x^0 = \mathrm{ind}_{G_{\iota,\bar{x}}}^{G_\iota}\rho$ 被映到一个与 $\mathrm{ind}_{K_{\iota,\bar{x}}}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{C}} \rho) = \mathrm{ind}_{K_{\iota,\bar{x}}}^{G}(\kappa_{\iota,x} \otimes_{\mathcal{C}} \mathrm{ind}_{K_{\iota\,\bar{x}}\,K_x^0}\rho_x^0,) = \mathrm{ind}_{K_x}^{G}(\kappa_{\iota,x} \otimes \rho_x^0) \simeq \mathrm{ind}_{K_x}^{G}\rho_x$ 同构的表示；这里我们用到了 $K_{\iota,\bar{x}} = G_{\iota,\bar{x}} K_\iota^\dagger{}_{,\bar{x}}$ 以及 $K_x \overset{K_x}{=} K_x^0 K_\iota^\dagger{}_{,\bar{x}}$。因此 $\mathcal{H}(G, K_x^0, \rho_x^0) = \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{K_x^0}^{G^0}\rho_x^0) \simeq \mathrm{End}_G(\mathrm{ind}_{K_x}^{G}\rho_x) = \mathcal{H}(G, K_x, \rho_x)$。□

此结果此前已在 [AFMO24b，定理 4.4.1] 中证明（假设 K_{M^0} 被 $N_{G^0}(M^0)(F)^{[x]_{M^0}}$ 正规化，采用同上中的记号），其中得到了一个更明确的赫克代数同构。

4.2 投射　生成元，以及与 Chinello 的一个结果的联系

4.2.1 投射生成元。——我们回到一般情形，其中 R 可以是任意交换 $\mathbb{Z}[\mu_{4p^\infty}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$-代数，并固定一对 (ϕ, I) 以及如上的一个嵌入 $\iota \in I$。令 $\mathcal{C}_0$ 为 $\mathcal{B}'(\mathbf{G}_\iota, F)$ 的一个室（相对于通常的 Bruhat–Tits 多单纯形结构），并令 $^- S$ 为 $\mathcal{B}'(\mathbf{G}_\iota, F)$ 的顶点的 G_ι- 轨道代表元集合，且包含于 $\mathcal{C}_0$ 的闭包中。对于每个 $\bar{x} \in S$，选取 $\mathcal{B}'_\iota$ 中一个 e-顶点 x，使其 $\bullet/e$ 位于 $\bar{x}$ 上方，并将由这些提升构成的 $\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}$ 子集记为 S。深度零范畴 $\mathrm{Rep}_R^1(G_\iota)$ 由直和 $\bigoplus_{x\in S}\mathrm{ind}_{G_{\iota,x,0+}}^{G_\iota}(R)$ 生成。因此，根据定理 3.1.1，RG-模

$$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}\left(\bigoplus_{x\in S}\mathrm{ind}_{G_{\iota,x,0+}}^{G_\iota}(R)\right) \simeq \bigoplus_{x\in S}\mathrm{ind}_{K_{\iota,x}^\dagger}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,x}|_{K_{\iota,x}^\dagger})$$

是 $\mathrm{Rep}_R^{\phi\,I}(G)$ 的一个投射生成元。回顾我们对 $\{\mathcal{W}_{\iota,x}\}$ 的显式构造，限制 $\mathcal{W}_{\iota,x}|_{K_\iota^\dagger{}_{,x}}$ 恰好是 $(K_{\iota,x}^\dagger, K_\iota^+{}_{,x}, \check{}\phi_\iota^+{}_{,x})$ 的一个海森堡表示，其定义相当简单，不需要海森堡–韦伊表示的更精细理论。然而，由 R诱导的代数同构

$$\mathrm{End}_{RG_\iota}\left(\bigoplus_{x\in S}\mathrm{ind}_{G_{\iota,x,0+}}^{G_\iota}(R)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{RG}\left(\bigoplus_{x\in S}\mathrm{ind}_{K_{\iota,x}^\dagger}^{G}(\mathcal{W}_{\iota,x}|_{K_{\iota,x}^\dagger})\right)$$

先验地使用了定理 3.3.7 的全部力量。

4.2.2 例：$\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$。——设 $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$。根据 [Dat17, 2.4.6]，，中心化子 $C\hat{}\mathbf{G}(\phi)$ 连同其规范的 W_F 外作用具有如下形式：$\prod_{i=1}^r \mathrm{Ind}_{W_{F_i}}^{W_F}\mathbf{GL}_{e_i}$，其中 F_i/F 是满足条件 $\sum_{i=1}^r e_i d_i = n$、次数为 d_i 的温和分歧扩张。换言之，我们有 $\mathbf{G}_\phi = \prod_{i=1}^r \mathrm{Res}^{F_i|F}\mathbf{GL}_{e_i}$。相应地，我们有 $\mathbf{S}_\phi = \prod_{i=1}^r \mathrm{Res}^{F_i|F}\mathbf{GL}_1$。此外，存在唯一的 $\mathbf{G}(F)$-共轭类 I，其中包含 F-有理 Levi 中心嵌入 $\mathbf{S}_\phi \hookrightarrow \mathbf{G}$，因此我们可以在讨论中略去 I，且所有 $\mathbf{G}_\iota$, $\iota \in I$都与 $\mathbf{G}_\phi$同构。

在此情形下，我们知道深度零范畴 $\mathrm{Rep}^1_R(G_\iota)$由 $\mathrm{ind}_{G_{\iota,x,0}}^{G_\iota}$原 pro 生成，其中任意点 x 属于$(\mathcal{B}'_+)$，且该点映射到 $\mathcal{B}'(\mathbf{G}_\iota, F)$ 的一个顶点。由此可知，$\mathrm{Rep}^\phi_R(G)$由 $\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x}}^{G}(\eta_{\iota,x})$ 原 pro 生成，其中 $\eta_{\iota,x}$ 是 $(K^\dagger_{\iota,x}, K^+_{\iota,x}, \check{\phi}^+_{\iota,x})$ 的任意一个海森堡表示。和上文一样，我们的等价 $\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}$ 诱导出交织 R-代数的一个同构

$$\mathrm{End}_{RG_\iota}(\mathrm{ind}_{G_{\iota,x,0+}}^{G_\iota}(R)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{RG}(\mathrm{ind}_{K^\dagger_{\iota,x}}^{G}(\eta_{\iota,\mathcal{F}_0}))$$

并且，实际上，$\mathcal{I}_{\mathcal{W}_\iota}$ 与由相应原生成元的自同态代数之间的该同构所诱导的等价 $\mathrm{Rep}^1_R(G_\iota) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}^\phi_R(G)$ 重合。在此设置下，Chinello 已在 [Chi18,] 中通过对生成元与关系的显式计算得到了这样的代数同构。

4.3 化简　至零深度与局部朗兰兹对应

我们在朗兰兹纲领的表示论一侧进行的化至深度 0 的过程，与伽罗瓦侧的类似过程相平行；后者例如在 [DHKM25, §3] 中有所描述。因此，我们有理由尝试利用这两个过程，将关于深度 0 下局部朗兰兹对应及其近期增强的已知结果拓展至更高深度。

4.3.1 示例：关于局部朗兰兹对应的范畴化。— 设 $\mathbf{G}$ 为准分裂群。从 $\phi \in \Phi(P_F, \mathbf{G})$ 出发，其中心化子是一个 Levi 子群，我们或许希望补全以下图中的上方箭头：

$$\begin{array}{ccc} D\mathrm{Rep}^\phi_R(G) & \dashrightarrow & \mathrm{Ind.Coh}\left(Z^1(W^0_F, \hat{\mathbf{G}})/\hat{\mathbf{G}}\right)_{[\phi],R} \\ \simeq \uparrow \mathcal{I}_{\check{\varphi}_0} & & \mathcal{I}^{\mathrm{spec}}_{\varphi_0} \uparrow \simeq \\ \prod_{I\in\mathcal{I}_\phi} D\mathrm{Rep}^1_R(G_{\phi,I}) & \hookrightarrow & \mathrm{Ind.Coh}\left(Z^1(W^0_F/P_F, \hat{\mathbf{G}}_\phi)/\hat{\mathbf{G}}_\phi\right)_R \end{array} \tag{4.3.2}$$

$\hat{}$ 在此图中，我们稍微偏离了一般记号，将$\mathbf{G}$ 视为定义在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上的群概形。根据 [DHKM25，定理 3.1]，我们知道 ϕ可以经过共轭，使其经由 $\hat{\mathbf{G}}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ 分解，因此特别地，$\hat{\mathbf{G}}_\phi = C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 也是定义在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 上的群概形。下面来解释上图中的实线箭头表示什么。

- 底部水平箭头表示由 [Zhu25, §1.2.2]中引入的“温和”范畴局部 Langlands 对应应用于准分裂群 $\mathbf{G}_\phi$所得出的全忠实嵌入。特别地，为得到这样的嵌入，必须作出关于 $I_0 \in \mathcal{I}_\phi$ 与 $\mathbf{G}_{\phi,I_0} \simeq \mathbf{G}_\phi$ 的选择。一旦作出该选择，由命题 2.2.3 iii) 中的映射$\mathcal{I}_\phi \longrightarrow H^1(F, \mathbf{G}_{\phi,I_0})$，我们得到映射 $\mathcal{I}_\phi \hookrightarrow B(\mathbf{G}_\phi)_{\mathrm{basic}}$，$I \mapsto b(I)$。随后我们可以将 $D_{\mathrm{表示}R}(G_{\phi,I})$ 等同于 Isoc^{G_ϕ} 上支撑于分层 $b = b(I)$ 的层子范畴，而所声称的嵌入便由 Zhu 的陈述得出。注意，在撰写这些文字时，Zhu 的陈述仅对系数 $R = \mathbb{Q}_\ell$ 且在假定该群为非分歧的情形下得到证明，见 [Zhu25, Thm 1.6]。相比之下，我们的 $\mathbf{G}_\phi$ 可能是温和分歧的。然而，在 $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$ 的情形下，后一问题可以绕过，因为每个 $\mathbf{G}_\phi$ 都是 $\mathbf{GL}_m$ 的标量限制的乘积。

• 左侧竖直箭头由本文给出。同样，可能有若干种选择。假定 $\mathrm{Pic}(R) = \{0\}$，例如对 $\ell \neq p$ 取 $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ 或 $R = \mathbb{F}_\ell$，命题 3.3.8 和 3.4.12 表明，本文所构造的等价集合 表示$_R(G_\phi, I) \xrightarrow{\sim}$ 表示$_R^{\phi\, I}$, (G) 是特征标群$G_{\phi,I} \longrightarrow R^\times$ 下的一个扭子，这些特征在所有 $x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}_{\phi,I}, F)$ 上于 $(G_{\phi,I})_{x,0+}$ 处平凡。实际上，在为构造这些等价所作的诸选择中（例如包括对 $\iota \in I$的选择），唯一重要的是在海森堡–韦伊表示 3.6.6 的定义中所作的特征 $\check{}\varphi_0 : G_\iota \longrightarrow R^\times$ 的选择，它延拓每一个 $(\check{}\phi_\iota^+, x)|_{G_\iota, x, 0+}$。在图 (4.3.2) 中，我们用 $\mathcal{I}^{\check{}\varphi_0}$ 表示由该选择所产生的海森堡–外尔系数系统所关联的诸等价的乘积。

• 右侧的竖直箭头实质上由 [DHKM25] 给出。由引理 2.2.5，存在扩张 $\varphi_0 : W_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}(\mathbb{C})$，使得 $\varphi_0(W_F)$ 正规化 $\varepsilon_\phi \hat{}\mathbf{G}(\phi)$ 的一个钉扎。我们不清楚是否可以选择 φ_0，使得 $\varphi_0(W_F) \subset {}^L\mathbf{G}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$，但 [Dat25, Thm. 4.6] 的论证表明，只要中心 $\bar{Z}(\hat{}\underline{\mathbf{G}})$ 在 $\mathbb{Z}[\frac{1}{pN}]$ 上光滑，我们就能找到一个 φ_0，使得$W_F(\subset {}^L)\, \mathbb{Z}[\frac{1}{pN}]\mathbf{G}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$。例如，可以取 $N = |\pi_1(\mathbf{G}_{\mathrm{der}})|$。选定 φ_0 后，映射 $(c, w) \mapsto c\varphi_0(w)$ 给出一个 L-同态

$$ {}^L\varphi_0 : {}^L\mathbf{G}_\phi = C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi) \rtimes_{\mathrm{Ad}_{\varphi_0}} W_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}. $$

根据构造，诱导的 1-余循环映射 $Z^1(W_F^0, \hat{}\mathbf{G}_\phi)_R \xrightarrow{\sim} Z^1(W_F^0, \hat{}\mathbf{G})_R$ 限制为同构 $Z^1(W_F^0/P_F, \hat{}\mathbf{G}_\phi)_R \xrightarrow{\sim} Z^1(W_F^0, \hat{}\mathbf{G})_{\phi,\, R}$，对任意 $\mathbb{Z}[\frac{1}{pN}]$-代数 R 都成立,—其中右侧是将 ϕ 扩张至 W_F^0 的扩张模空间。由此进而诱导出 R-栈的一个同构

$$ \left(Z^1(W_F^0/P_F, \hat{\mathbf{G}}_\phi)/\hat{\mathbf{G}}_\phi\right)_R \xrightarrow{\sim} \left(Z^1(W_F^0, \hat{\mathbf{G}})/\hat{\mathbf{G}}\right)_{[\phi],R}, $$

其中右侧表示与 ϕ 相关联的直和项。上述图表中的符号 $\mathcal{I}_{\varphi_0}^{\mathrm{spec}}$ 表示 Ind.Coh 上相应的等价。

如何作出这些选择？根据上述讨论，上述图表中的每一条实线箭头都取决于若干选择。为了得到“正确”的虚线箭头，需要谨慎作出这些选择。以下是我们希望在未来工作中加以验证的预期。

• 对 $I_0 \in \mathcal{I}_\phi$ 的选择将取决于 $\mathbf{G}$ 中惠特克数据 (U, ψ) 的选取。记 $\Gamma_{U,\psi}$ 为与之相关联的 Gelfand–Graev $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-表示 G，集合 I_0 应当是 $\mathcal{I}_\phi$ 中唯一满足以下条件的 I : (ϕ, I)-分量 $(\Gamma_{U,\psi})^{\phi,I}$ of $\Gamma_{U,\psi}$ 非零。此外，$\mathcal{I}^{-1\check{}}{}_{\varphi_0}((\Gamma_{U,\psi})^{\phi,I_0})$ 应当是 $\mathbf{G}_{\phi,I_0}$ 的 Gelfand–Graev 表示的深度零直和项；该表示应当用于规范化 $\mathbf{G}_{\phi,I_0}$ 的温和范畴局部朗兰兹对应（即上述图表中的下方映射）。

• 原则上，φ_0 和$\check{}\varphi_0$都没有最佳选择，但我们预期，在 $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{pN}]$上，对于 φ_0的任意选择,—都应存在唯一的$\check{}\varphi_0$，使得等价 $\mathcal{I}^{\check{}\varphi_0}$ 与沿着 ${}^L\varphi_0$ 针对不可约复表示的朗兰兹函子性相容。在解释我们的意思之前，下面介绍一种自然的方式来构造映射 $\varphi_0 \mapsto \check{}\varphi_0$。设给定一个温和分歧 L-嵌入 ${}^L\mathbf{G}_\phi \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$，也就是说，一个同时延拓了• $\hat{}\mathbf{G}(\varphi_0)\, \varphi_0\mathbf{G}$的包含和 $R = \mathbb{Z}[\frac{1}{pN}]$上的恒等映射的嵌入

$\hat{}$ 将这样的嵌入写作$(c,w) \mapsto c.\psi(w)$，其中 ψ： $W_F \longrightarrow {}^L\mathrm{G}$的像正规化了$C\hat{}\mathrm{G}(\phi)$的钉扎 ε_ϕ，于是可将 $\varphi_0 = \hat{}\varphi_0.\psi$写作某个$\hat{}\varphi_0 \in Z^1(W_F, Z(C\hat{}\mathrm{G}(\phi)))$，它延拓了 ϕ，如引理 2.2.4（的证明）所示。对$\hat{}\varphi_0$ 应用 Borel 方法，便得到一个$\check{}\varphi_0$。我们预期，恰当选择 ψ，并按照 [Kal21a, §6.1],所述关联适当的 χ-数据，将在 φ_0 与$\check{}\varphi_0$之间给出“正确”的匹配，也就是说， $\mathcal{I}_{\check{\varphi}_0}$ 会沿着 ${}^L\varphi_0$ 对与 [Kal21b]中的超尖点 Langlands 参数相关联的 L-数据包实施函子提升。无论如何，一旦选定 ψ （或等价地，选定 L-嵌入${}^L\mathrm{G}_\phi \hookrightarrow {}^L\mathrm{G}$），使图 (4.3.2) 成为交换图的虚线箭头就与匹配对$(\varphi_0, \check{}\varphi_0)$的选择无关。

4.3.3 *GL* 的例子。——在 $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ 的情形下，上述讨论中的若干要点会大大简化。首先，集合 $\mathcal{I}_\phi$ 总是单元素集，因此无需在那里选择基点。此外，当 $R = \mathbb{Q}_\ell$ 时，Zhu 的工作给出了$\mathbf{G}_\phi$的驯分歧范畴 Langlands 对应，因为$\mathbf{G}_\phi$ 是 GL_{n_i} 的标量限制的乘积。因此，对于所有 $\phi \in \Phi(P_F, \mathrm{GL}_n)$，图 (4.3.2) 的底部映射都是可用的（事实上，无论 ϕ 是否具有阿贝尔像）。

此外，由于$C_{\hat{\mathbf{G}}}(\phi)$ 是 $\hat{\mathrm{GL}}_n$ 的 Levi 子群，投影映射 $N\hat{}\mathrm{G}(C\hat{}\mathrm{G}(\phi)) \longrightarrow N_{\hat{\mathbf{G}}}(C\hat{}\mathrm{G}(\phi))/C\hat{}\mathrm{G}(\phi)$ 有由置换矩阵给出的自然截面。再次利用 $\mathbf{G}_\phi$ 是 GL_{n_i} 的标量限制的乘积这一事实，这就提供了一种“自然”的方式来选择一个嵌入 ${}^L\mathbf{G}_\phi \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$，以及第 4.3.1 节最后一个项目中所述的 ψ。因此，与这一 ψ 选择相对应，我们得到一个嵌入 $D\mathrm{Rep}^{\phi}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F)) \hookrightarrow \mathrm{Ind.Coh}\left(\mathrm{Hom}(W_F^0, \mathrm{GL}_n)/\mathrm{GL}_n\right)_{[\phi],\mathbb{Q}_\ell}$，使图 (4.3.2) 交换。然而，这个嵌入通常需要进行“修正”。在 Bushnell 和 Henniart 的工作中，这种修正是通过将左侧竖直箭头与一个 G_ϕ 的驯分歧特征扭曲后再复合来实现的；该特征称为“修正因子”。另一种做法是，利用适当的 χ-数据来修改所选的嵌入 ${}^L\mathbf{G}_\phi \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$。两种方法之间的对应关系在 [Tam16] 和 [OT21], 中的略有不同的背景下得到了解释，但我们预计他们的论证可以调整后用于我们的背景。

推论。— 假设 $p > n$，存在一个嵌入

$$D\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F)) \hookrightarrow \mathrm{Ind.Coh}\left(\mathrm{Hom}(W_F^0, \mathrm{GL}_n)/\mathrm{GL}_n\right)_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}.$$

证明。由于 $p > n$，任意 $\phi \in \Phi(P_F, \mathrm{GL}_n)$ 的中心化子都是一个 Levi 子群，因此，在按照上文所述作出选择后，只需对所有 $\phi \in \Phi(P_F, \mathrm{GL}_n)$ 求和。 □

这样的嵌入已在 [BZCHN24]中构造。比较这两种构造将会很有意思。

关于 $\overline{\mathbb{F}}_\ell$。撰写本节时，温和CLLC尚未在 $\mathbb{F}_\ell$上建立。不过，Zhu 的论文给出了一个幺零版本，至少在 $\ell > n$时如此；我们在引言末尾介绍了这一版本。在 [Dat18], a 的推论 1.1.4 中，证明了一个关于 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$ 的深度零块的“向幺零约化”结果，其模式与本文所做的工作非常相似，不同之处在于，我们从温和分歧的“惯性参数”出发。详情请参阅 [Dat18] 的第 1.1 节，以及 [Dat17] 的第1.2.4段。将该结果与我们的向深度零约化结果结合起来，可得以下

推论。——假设 $p > n$ 和 $\ell > n$，存在一个嵌入

$$D\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F)) \hookrightarrow \mathrm{Ind.Coh}\left(\mathrm{Hom}(W_F^0, \mathrm{GL}_n)/\mathrm{GL}_n\right)_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}.$$

证明。 与上一个推论相同，在我们的等价关系之上使用 [Dat18] 的推论 1.1.4。 □

这里仍然涉及一些选择，而且还需要进一步工作才能给出“正确的”嵌入。

选定记号

$\mathcal{B}$, 28
$\mathcal{B}'_{\bullet/e}$ 57 ,,$\bullet/e$,
$\mathcal{B}'_{\iota}$ 59
$\beta_{\mathcal{F},c\mathcal{F}'}$, 57$\beta_{\mathcal{V},}$
$_{\mathcal{F},c\mathcal{F}'}$, 57$\mathcal{B}_{\iota}$,
28$\mathcal{B}'$, 42$\mathcal{B}'_{\iota}$,
43

$\mathrm{Coef}^1_R(\mathcal{B}'_{\iota,\bullet/e}/G_{\iota})$, 59
$\mathrm{Coef}^{\phi\, I}_R{}_{,}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$,
57 $\mathrm{Coef}^{\phi\, I}_R{}_{,}(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)^{\mathrm{cart}}$,
58 $\mathrm{Coef}_R(\mathcal{B}'_{\bullet/e}/G)$,
57C_x, 81

e, 56$e_{\iota,x}$,
31$e_{I,x}$,
39$e_{\phi,\iota,x}$,
31$e_{\phi,I,x}$,
39e_x,
39

$g_{\mathcal{F}}$, 57$G_{\mathcal{F}\mathcal{F}_{\iota}}$,
65$\hat{}\mathbf{G}_{\hat{\iota}}$,
11$\mathbf{G}_{\iota}$, 11,
13$G_{\iota,\mathcal{F}}$,
60$\mathbf{G}_{\phi}$, 21
$g_{\mathcal{V},\mathcal{F}}$, 57$I$,
38I_{ϕ}, 18

I_x, 38

$K_{\iota,\mathcal{F}}$, 60$K_{\iota,x}$,
31, 56
$K^{\circ}_{\iota\, x}$ 31 ,,, ,
$K^{\dagger}_{\iota\, x}$ 31
56$K^{\dagger}_{\iota}{}_{,\mathcal{F}}$,
60
$K^{+}_{\iota\, x}$ 28 56 ,, , ,,
$K^{+}_{\iota\,\mathcal{F}}$ 60
$K^{+}_{\phi\,\iota\, x}$ 31 ,,,,
$K^{++}_{\iota\, x}$ 28

$\mathbf{L}_{\phi}$, 17$\mathcal{L}_{\phi}$,
17$\mathcal{L}_{\phi,\varepsilon_{\phi}}$,
17 $\hat{}\mathbf{L}_{\phi}$,
17

$\check{}\varphi_{\imath}$,
27$\check{}\phi^{+}_{\iota\,,x}$,
28 $\check{}\phi^{+}_{\iota}{}_{,\mathcal{F}}$,
60$\psi_{\imath}$, 28

表示$^{\phi\, I}_R{}_{,}(G)$,
42$\mathbf{S}$, 11, 12$\hat{}$
$\mathbf{S}$, 11, 12$\hat{}\mathbf{S}$
$\{\hat{\imath}\}$, 11, 12$\mathbf{S}^{\{\hat{\imath}\}}$,
11, 12$\mathbf{S}_{\phi}$,
18, 24 $\hat{}\mathbf{S}_{\phi}$,
24V_x, 81

术语选编

海森堡表示, 74 海森堡三元组,
73

Levi中心嵌入, 11

相关的 F-有理Levi中心嵌入,
14

扭曲的 $RK_{\iota,x}$-海森堡–韦伊表示,
84

野惯性参数, 10

参考文献

[AD02] J. Adler 和 S. DeBacker。布鲁哈-蒂茨理论在约化 p-进群李代数上的调和分析中的若干应用。Michigan Math. J., 50(2):263–286, 2002.[Adl98] J. Adler。精细各向异性 K 型与超尖点表示。Pacific J. Math., 85(1):1–32, 1998.[AFMO24a] Jeffrey D. Adler、Jessica Fintzen、Manish Mishra 和 Kazuma Ohara。由类型产生的赫克代数的结构，2024。预印本，见 https://www.math.uni-bonn.de/people/fintzen/Adler--Fintzen--Mishra--Ohara_Structure_of_Hecke_algebras_arising_from_types.pdf.[AFMO24b]Jeffrey D. Adler、Jessica Fintzen、Manish Mishra 和 Kazuma Ohara。通过赫克代数同构将驯 p-进群约化到零深度，2024。预印本，见 https://www.math.uni-bonn.de/people/fintzen/Adler--Fintzen--Mishra--Ohara_Reduction_to_depth_zero_for_tame_p-adic_groups_via_Hecke_algebra_isomorphisms.pdf.[AS08] J. Adler 和 L. Spice。 p-进群中驯元的良好乘积展开。Int. Math. Res. Pap. IMRP, 2008.[Bor79] A. Borel。自守 L-函数。载于《自守形式、表示与 L-函数》（1977 年于俄勒冈州立大学科瓦利斯举行的纯数学研讨会论文集），第 2 部分，纯数学研讨会论文集，第 XXXIII 卷，第 27–61 页。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛，1979 年.[Bor91] Armand Borel。线性代数群。数学研究生文本丛书第 126 卷，第二版（增订版），1991 年.[BT72] F. Bruhat 和 J. Tits。局部域上的约化群 I。第 41 号。IHES 数学出版物，1972 年. ´BT[F. Bruhat 和 J. Tits。局部域上的约化群 II。第 60 号。IHES 数学出版物，1984 年.84] BZCHN ´David Ben-Zvi、Harrison Chen、David Helm 和 David Nadler。相干 Springer 理论与范畴化 Deligne-Langlands 对应。数学发明，235(2):255–344, 2024.[Chi24] Gianmarco Chinello。GL(,18]) 及其内形式的光滑 ℓ-模表示范畴的块：约化到零层。代数与数论，12(7):1675–1713, 2018.nDat FJ.-F. Dat。09] -进群光滑表示的有限性。J. Inst. Math. Jussieu, 8(2):261–333, 2009. ´Dat pJ.-F. Dat。线性[-进线性群之块的函子性原理。《当代数学》，691:103–131, 2017。

[Dat18] Jean-Fran¸cois Dat. p-进线性群的驯性块等价. 数学年刊, 371(1-2):565–613, 2018.[Dat25] Jean-Fran¸cois Dat. 局部朗兰兹参数的模空间. 载于《朗兰兹纲领：II. 朗兰兹对应的几何化》, 纯数学专题讨论会论文集 112.2, 第3–37页. 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 2025.[DHKM25] Jean-Fran¸cois Dat, David Helm, Robert Kurinczuk 与 Gilbert Moss. 朗兰兹参数模空间. 欧洲数学会杂志 (JEMS), 27(5):1827–1927, 2025.[DL25] Jean-Fran¸cois Dat 与 Thomas Lanard. $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$上的深度零表示, 2025. https://arxiv.org/abs/2202.03982, 即将发表于《代数与数论》.[Fin21] Jessica Fintzen. 驯性 p- 进群的类型 . 数学年刊 (2), 193(1):303–346, 2021.[Fin22] Jessica Fintzen. 非定义特征下的驯性尖点表示. 密歇根数学杂志, 72:331–342, 2022.[Fin25] Jessica Fintzen. 超尖点表示：构造、分类与特征. 载于《朗兰兹纲领：I. 表示、Shimura簇与Shtuka》, 纯数学专题讨论会论文集 112.1, 第51–86页. 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 2025.[FKS23] Jessica Fintzen, Tasho Kaletha 与 Loren Spice. 扭曲的Yu构造、Harish-Chandra特征标与端oscopy. 杜克数学杂志, 172(12):2241–2301, 2023.[FS24] Laurent Fargues 与 Peter Scholze. 局部朗兰兹对应的几何化, 2024. https://arxiv.org/abs/2102.13459, 即将发表于 Ast´erique.[FS25] Jessica Fintzen 与 David Schwein. 任意剩余特征下温和超尖表示的构造, 2025. 预印本, 可于 https://arxiv.org/pdf/2501.18553获取.[G´er77] Paul G´erardin. 与有限域相关联的韦伊表示. 代数杂志, 46(1):54–101, 1977.[HKSS24] David Helm, Robert Kurinczuk, Daniel Skodlerack 与 Shaun Stevens. p-进经典群及其内形式的块分解, 2024. https://arxiv.org/abs/2405.13713.[HM08] J. Hakim 与 F. Murnaghan. 特异驯性超尖点表示. 国际数学研究论文 IMRP, (2), 2008.[Iwa55] Kenkichi Iwasawa. 论局部域的伽罗瓦群. 美国数学会汇刊, 80:448–469, 1955.

[Kal19] Tasho Kaletha. 正则超尖点表示. 美国数学会杂志, 32(4):1071–1170, 2019.[Kal21a] Tasho Kaletha. 关于 L-嵌入与局部域上环面的双覆盖, 2021. https://arxiv.org/abs/1907.05173.[Kal21b] Tasho Kaletha. 超尖点 L-包, 2021. https://arxiv.org/abs/1912.03274.[Kim07] J.L. Kim. 超尖点表示：一个穷尽定理. 美国数学会杂志, 20(2):273–320, 2007.[Kot84] R.E. Kottwitz. 稳定迹公式：尖点温和项. 杜克数学杂志, 51(3):611–650, 1984.[KP23] Tasho Kaletha 与 Gopal Prasad. 布鲁哈-蒂茨理论——一种新方法, 新数学专著丛书第44卷. 剑桥大学出版社, 剑桥, 2023.[KY17] Ju-Lee Kim 与 Jiu-Kang Yu. 温和类型的构造. 载于《表示论、数论与不变理论》, 数学进展丛书第323卷, 第337–357页. Birkh¨auser/Springer, 沙姆, 2017.[Lan79] R. P. Langlands. 稳定共轭：定义与引理. 加拿大数学杂志, 31(4):700–725, 1979.[Lan00] E. Landvogt. Bruhat-Tits 建筑的若干函子性质. 纯粹与应用数学杂志, 518:213–241, 2000.[Lan21] Thomas Lanard. 系数系统与幂等元系之间的范畴等价. 表示论, 25:422–439, 2021.[Lan23] Thomas Lanard. 单连通 p-进群的幺幂 ℓ-块. 代数与数论, 17(9):1533–1572, 2023.[MP94] A. Moy 与 G. Prasad. 未加细极小 K-类型. 数学发明, 116:393–408, 1994.[MP96] A. Moy 与 G. Prasad. Jaquet 函子与未加细极小 K-类型. 瑞士数学评论, 71(1):98–121, 1996.[MS10] R. Meyer 与 M. Solleveld. 经由其建筑给出的约化 p-进群表示的分解. 纯粹与应用数学杂志, 647:115–150, 2010.[MS14] Alberto M´ınguez 与 Vincent S´echerre. $\mathrm{GL}_m(D)$模 ℓ的光滑表示. 杜克数学杂志, 163(4):795–887, 2014.[OT21] Masao Oi 与 Kazuki Tokimoto. $GL(n)$的正则超尖点表示的局部朗兰兹对应. 国际数学研究通报 IMRN, (3):2007–2073, 2021.

[Pra01] G. Prasad。《约化群 Bruhat-Tits 建筑中的伽罗瓦不动点》。法国数学会通报，129(2):169–174，2001。[Rag04] M. S. Raghunathan。《准分裂群中的环面》。拉马努金数学会杂志，19(4):281–287，2004。[Sch25] Peter Scholze。《局部朗兰兹对应的动机几何化》，2025。 https://arxiv.org/abs/2501.07944，即将在《纯粹与应用数学杂志》发表。[Spr98] T. A. Springer。《线性代数群》，数学进展丛书第9卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，第二版，1998。[Ste68] Robert Steinberg。《线性代数群的自同态》。美国数学会回忆录，第80号。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1968。[Ste75] Robert Steinberg。《约化群中的挠元》。数学进展，15:63–92，1975。[Tam16] Kam-Fai Tam。《L-环面的容许嵌入与本质温和局部朗兰兹对应》。国际数学研究通知 IMRN，(6):1695–1775，2016。[Vig97] M.-F. Vign´eras。《建筑上的层上同调与 R-表示》。数学发明，127:349–373，1997。[Vig98] Marie-France Vign´eras。《 R-进约化群的诱导 p-表示》。Selecta Mathematica（新系列），4(4):549–623，1998。[Yu01] J.-K. Yu。《温和超尖表示的构造》。美国数学会杂志，14(3):579–622，2001。[Yu09] J.-K. Yu。《关于环面的局部朗兰兹对应》。载于《渥太华关于约化 p-进群容许表示的讲座》，Fields Institute 专著第26卷，第177–183页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009。[Yu15] Jiu-Kang Yu。《布鲁哈-蒂茨理论中与凹函数相关的光滑模型》。载于《群概形专题》第III卷，综合与全景丛书第47卷，第227–258页。法国数学会，巴黎，2015。[Zhu25] Xinwen Zhu。《温和范畴化局部朗兰兹对应》，2025。 https://arxiv.org/abs/2504.07482.Jean-François Dat, Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG, Sorbonne Université, Uni-versité de Paris Cité, CNRS, 法国巴黎 Jussieu 广场 4 号，邮编 75005。电子邮箱：jean-francois.dat@imj-prg.fr
Jessica Fintzen, Universität Bonn, Mathematisches Institut, 德国波恩 Endenicher Allee 60 号，邮编 53115。电子邮箱：fintzen@math.uni-bonn.de