arXiv:2602.12334v1 [quant-ph] 12 Feb 2026

从原理重构有限准概率与概率：句法局部性的作用

Jacopo Surace[1], *

[1]艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，*LIS*，马赛，法国

准概率广泛存在于物理学的不同领域，但其概念基础仍不明确：人们往往仅将其视为计算工具，而条件化和贝叶斯定理等运算也因此变得含糊不清。我们通过构建一个有原则的框架来解决这两个问题，该框架根据结构一致性要求，推导出准概率及其条件演算；这些要求规定了如何在不同论域中对陈述赋值，而论域被理解为由陈述构成的有限布尔代数。我们从一种普适赋值开始，它为所有陈述赋予确定的（可能为复数的）值。核心概念是句法局部性：每个论域都可以嵌入一个更大的环境论域中，而普适赋值必须在此类嵌入和限制下保持一致。基于一组结构性原则，我们证明了一个表示定理（定理 1），表明每个可容许赋值都可以重新表示为互斥命题上的有限可加测度，与通常的概率加法规则相呼应。我们将这类加性代表称为预概率。这种表示在加性重新标度自由度范围内唯一。当这种自由度可以典范地固定时，预概率便化为有限准概率，从而使准概率理论不再只是计算工具，而成为对普适赋值的一种唯一确定的加性表示。经典有限概率则是在相对化下稳定的准概率子类，即在限制到子宇宙时保持封闭。最后，同一框架使我们能够定义一种一致的条件概率理论，并由此得到一个定义良好的广义贝叶斯定理，适用于预概率和准概率。最后，我们讨论了其他正则性条件，包括在这一框架下有理概率与无理概率所起的作用。

一、引言

什么是概率？概率所描述的又是什么？在标准的经典范式中，概率表达不确定性：人们假定关于世界的陈述非真即假，而当主体仍不了解其背后的事实时，概率便代表这种不完整的知识。在这种观点下，概率并非世界本身的一种属性，而是主体认知情境的反映。然而，量子理论的结构与这种直觉产生了冲突。即便对制备和测量作出完整说明，该理论仍认为，无论如何细化描述，都无法对人们可能合理提出的所有问题给出确定的答案。

我们认为，这并非技术上的局限，而是反映了量子力学所描述的世界具有内禀随机性。近期研究进展表明，量子现象中观测到的随机性可以被严格认证为完全内禀的 [1——3]，这一基础性洞见促成了量子随机数生成器的开发 [4] ，也催生了量化测量固有不可预测性的新方法 [5]。如果这种认知局限是绝对的那么，将量子概率解释为“缺失信息”的程度究竟意味着什么，就变得难以理解了。究竟缺失了关于什么的信息 [6]?

定义概率并非量子领域独有的难题。一个多世纪以来，该领域的基础始终是持续争论的主题 [7]。为避开这些形而上学僵局，现代学说将关注点转向内部相干性。最终，柯尔莫哥洛夫的公理化形式化 [8]，成功地将数学概率与其物理诠释脱钩。尽管这使该理论得以普遍应用，却也推动了一种重构传统的发展：尝试找出那些在概念上有理据、能够选定特定概率形式体系的原则 [9]。事实证明，这类重构是解决实际问题的根本工具；在这些问题上，纯粹的数学工具无法提供解决方案 [10–13]。

量子力学的发展轨迹也惊人地相似。冯·诺伊曼提出了其典范公理化表述 [14]，时间仅比柯尔莫哥洛夫的工作早一年；然而，与概率论相似，量子力学也没有一种公认的诠释。这促使人们开展了大量重构尝试 [15–32]。由于量子力学与概率论密切交织，许多人将前者视为后者的广义形式或非交换形式，

* jacopo.surace@gmail.com

后者的语言正是准概率，它在量子理论中得到了广泛发展 [33–48]。然而，准概率本身作为独立对象，受到的探索相对较少；人们往往只把它视为一种技术工具，用于量子理论及其他定义域。迄今尚缺乏对准概率理论本身的重构。

如果量子理论中出现的概率必须被理解为不同于标准范式中的概率，并且量子理论事实上需要准概率，那么我们就会认为，准概率并非仅仅是为了更方便地处理概率而采用的技术工具。相反，它们可能具有更深层的意义，也就是说，它们是需要以另一种方式加以诠释的对象。在本文中，我们朝这个方向迈出了第一步。我们的目标并非重构量子力学中出现的准概率，而是要理解准概率本身。我们不将准概率强行纳入认知不确定性的经典范式。因此，我们引入一种普适赋值V，通过这种方式，可以为每个陈述赋予一个确定的值，而该值不局限于零或一。我们将普适赋值视为对每个陈述的一种性质进行量化，并以刻画物理量的同样思路来刻画它。

为刻画 V，我们提出一组有充分动机的原则，其灵感部分源自物理学的思想，并以句法局部性的概念为基础。句法局部性将一种简单的直觉形式化：陈述总是相对于更大的陈述语境来理解，正如在物理学中，任何系统都可以被视为更大环境系统的子系统。在我们的设定中，这体现为嵌入之间的一致性要求。每当一个句法宇宙嵌入更大的宇宙时，赋值都应沿该嵌入相干地限制。这种跨系统层级的兼容性对V的行为施加了强约束。由此出发，我们提出五条原则，从而全面刻画普适赋值的结构 V。这构成了我们的研究纲领。

重构的核心技术结果以及我们的主要结果是，这些原则迫使加性结构的存在。具体而言，我们证明（定理 1），每个可容许的普适赋值都可以重新参数化为一个定义在不相交并上的有限可加代表元，且除加性重新标度（规范）自由度外，该代表元是唯一的。我们将任何这样的加性代表元定义为预概率 。随后，我们将准概率确定为那些可以固定典范重新参数化的预概率。最后，我们证明，有限可加概率恰好是满足额外稳定性（相对化下的稳定性）的准概率：所有概率构成的集合，就是在局部宇宙上考察时表现良好的所有准概率构成的集合。

：所有概率构成的集合，就是在局部宇宙上考察时表现良好的所有准概率构成的集合。

这一框架还带来了本研究的第二项成果：一套连贯的条件概率理论。它解决了定义条件准概率时通常遇到的困难，并为全概率公式和贝叶斯定理提供了自然的推广。这不同于标准做法；标准做法只是将普通概率的演算应用于一个扩大的陪域，其中包含 $[0,1]$之外的取值。而在这里，演算与其底层结构一并得到；当限制在经典域上时，它便重现熟悉的规则。

作为附录中提出的进一步结果，由于有限可加结构，我们的重构只得到有理概率。允许概率取无理数值，会带来额外的描述复杂性，而在预概率层级处理最为自然。这与德·菲内蒂支持有限概率的论证一致 [49, 50]。我们从技术和诠释两个方面论证有理概率的合理性，并以此为依据，对无限频率主义或假设频率主义，以及将无理数值概率视为原始概念的各种方法提出批评。不过，我们也证明，增加正则性要求后，便能完整处理无理概率。

我们的重构既受到逻辑—贝叶斯学派 [51–56] 的启发，也受到主观贝叶斯传统 [57–61] 的启发。

II. 贡献

本文从句法局部性这一概念以及对陈述的“全局赋值”的一组原则出发，对加性（准）概率演算作出原则性重构。具体而言，(i) 我们证明，任一可容许的普适赋值 V 都容许一种在不相交并上有限可加的重新参数化 $R = \varphi \circ V$（定理1），亦即一种加性代表，我们称之为预概率。(ii) 我们刻画由此产生的规范自由度（引理 2），并引入语义框架，作为在各子宇宙之间比较表示所需的最小规范不变数据。(iii) 我们为预概率与准概率提供一个一般性的条件化/同步化框架，从而得到定义良好的全（准）概率法则以及广义贝叶斯定理，即便在标准准概率条件概率含糊不清的情形中亦然。(iv) 我们

证明，经典概率正是那些在相对化下保持稳定的准概率；在此情形下，条件化归结为标准的柯尔莫哥洛夫/贝叶斯演算。(v) 附录包含证明与进一步讨论，其中包括附加正则性假设的后果以及诠释性说明。

a. 组织结构。第二节介绍普适赋值并陈述重构问题。第三节介绍宇宙与子宇宙，并将句法局部性形式化。第四节给出各项原则并推导主要结构约束。第五节证明可加性定理，并引入预概率及其规范自由度。第六节阐述条件化与同步化，包括广义贝叶斯定理和全条件化；第七节则通过相对化下的稳定性描述概率（正）情形。附录包含证明及其他讨论，其中包括正则性假设和诠释性说明。

III. 普适赋值与准概率理论的重构

在本文中，我们偶尔会提及标准概率论，指的是柯尔莫哥洛夫提出的公理框架 [8]。为方便起见，我们在下文回顾柯尔莫哥洛夫的三条公理，因为在整个重构过程中牢记这些公理将很有用。本文最终将重构有限可加概率论，即按照德·菲内蒂的思路，以有限可加性取代可数可加性的柯尔莫哥洛夫公理化概率论 [62, 63]。不过，我们将按逻辑顺序的逆序重构这些公理，从第三条公理开始，逐步回溯至第一条。提及柯尔莫哥洛夫的标准概率时，我们使用符号 $\mathcal{P}$。我们还会提及标准准概率，记作 $\mathcal{Q}$。所谓标准准概率，是指保留柯尔莫哥洛夫公理、但弱化第一条公理（非负性），允许 $\mathcal{Q}$ 取遍整个 复数域。

对柯尔莫哥洛夫而言，一个概率模型由以下部分构成：所有可能结果的集合 Ω，Ω 的子集族 $\mathcal{F}$（即事件），该子集族在取补集和可数并运算下封闭；以及一个函数 $\mathcal{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$，为每个事件赋予一个实数。柯尔莫哥洛夫公理要求：

1. 非负性：对于每个 $A \in \mathcal{F}$，都有$\mathcal{P}(A) \geq 0$。
2. 归一化：$\mathcal{P}(\Omega) = 1$。
3. 可数可加性：如果 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$两两不相交，那么

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

标准准概率是函数 $\mathcal{Q}$，定义为 $\mathcal{P}$，但省略公理1.。

在我们的重构中，我们从一小组原则出发，逐步恢复柯尔莫哥洛夫公理。我们认为这种方法的一个优点是，作为起点的原则蕴含了对柯尔莫哥洛夫第三公理的弱化，即以有限可加性取代可数可加性：

3.1. 有限可加性：若 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$两两不相交，则

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i).$$

正如我们已经指出的，我们的重构自然地产生了一个理论层级，其中每个理论都包含于前一个理论，并根据其满足柯尔莫哥洛夫公理的情况而有所区别。我们将最一般的理论称为预概率：它满足有限可加性 3.1.，但不一定满足公理 2. 和 1.。施加归一化条件后，得到准概率：每个准概率都是预概率，但反之不成立。最后，当理论经过特化而满足全部三条公理时，便恢复了标准有限概率论。

IV. 宇宙与子宇宙：句法局部性的理念

我们所能谈论的一切都可以表述为陈述，而本研究恰恰关注我们所能谈论的一切。这就是为什么我们的重构以陈述这一常见概念为核心。为了保持这种普遍性，我们不假设陈述必然对应于关于世界的事实，也不假设它们只是编码主体的信息。陈述可以置于完全虚构的情境中，依然符合我们对陈述的定义。任何人都可以随心所欲地谈论或书写一个幻想世界。即便在如此普遍的层面上，陈述仍有构成规则，并且可以系统地组织起来。它们可以组合成更复杂的陈述，可以通过运算进行转换，还可以汇集成一个论域。若某个主体列出所有可构成的陈述并将其组织起来，可能会发现其中许多陈述实际上等价。对这种等价关系取商，便得到一个有限结构，我们将其视为

可说的一切的整个宇宙，并且在这种形式意义上，也是论域中可思想的一切 [64]。所有可能陈述的宇宙这一概念是本研究的核心。我们将这些宇宙称为句法宇宙。我们以经典命题逻辑作为背景形式体系，因为它为陈述的构成方式以及推理的进行方式提供了一套简单且不奇特的规则。我们的重点是与这一逻辑相关联的最基本代数结构：命题的布尔代数 [65]。在这一形式体系中，我们可以如下形式化地刻画句法宇宙

定义 1（句法宇宙）。句法宇宙（或简称宇宙）是由陈述的等价类组成的集合 $\mathcal{L}$，满足

$$(\mathcal{L}, \wedge, \vee, \neg, \bot, \top)$$

构成一个布尔格。我们用 $s \in \mathcal{L}$ 表示一个元素（一个陈述）。运算 $\wedge$、$\vee$、$\neg$ 分别是合取、析取和否定的代数对应物，而 $\bot$、$\top$ 分别是底元素和顶元。我们将含有 $n \in$ 个原子陈述的宇宙记作 $\mathcal{L}_n \mathbb{N}$。

顶元 $\top$ 是宇宙中所有陈述的上确界，而 $\bot$则是宇宙中所有陈述的下确界。不同的宇宙可以有不同的顶元，因为不同宇宙中的陈述可能不同；不过，仿照空集或真空态的情形，我们将 $\bot$ 元素视为所有宇宙共有的。我们之所以称这些结构为宇宙，关键在于它们对自身的运算封闭：在宇宙内通过任意可能的运算组合形成的每个新陈述，都已包含在该宇宙中。然而，给定一个宇宙 $\mathcal{L}$，我们可以找到一些陈述子集，它们同样构成布尔格结构，具有 $\mathcal{L}$ 相同的合取和析取，并且包含 $\mathcal{L}$相同的底元素。我们称这些结构为子宇宙

定义 2（子宇宙）。设 $\mathcal{L}$为一个句法宇宙。$\mathcal{L}$ 的一个句法子宇宙 是一个子集 $\tilde{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}$，满足 $\bot \in \tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{\mathcal{L}}$ 在环境运算 $\wedge$ 和 $\vee$下封闭，并且存在一个元素 $\tilde{\top} \in \mathcal{L}$ 和一个映射 $\tilde{\neg}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$，使得

$$(\tilde{\mathcal{L}}, \wedge, \vee, \tilde{\neg}, \bot, \tilde{\top})$$

是一个布尔格（其中 $\wedge$、$\vee$ 是 $\mathcal{L}$相应运算的限制）。

每个子宇宙都可以被视为一个独立的宇宙。因此，我们可以把任何宇宙看作嵌入于一个更大的环境宇宙之中，而它只截取其中一个在继承的合取与析取运算下封闭的片段。这启发了句法局部性 [66] 这一概念：相对于某种环境话语，一个宇宙提供了一种局部描述。这一术语的灵感来自物理理论通过约化和扩张来处理子系统的方式，尽管本文提出的概念纯粹是句法上的。因此，主体的语句宇宙应被视为更大话语中的一个局部片段，其中可能不包含环境宇宙中存在、但无法用主体自身语言表述的陈述。句法局部性这一概念至关重要。必须始终将每个宇宙视为更大环境宇宙中的局部宇宙。每个宇宙都只是对一个大宇宙的（句法）局部描述。为此，可以设想存在一个普遍的、可能无限但原子的布尔宇宙 U，所有人们谈及的宇宙 $\mathcal{L}$ 都只是 U 的局部宇宙。即使我们能够设想 U，由于句法局部性告诉我们，我们始终只考虑局部宇宙，因此本文中出现的每个原理、定理、引理或命题都只对有限宇宙 $\mathcal{L}$进行量化。特别是，由于句法局部性，没有任何公理会对 U 的所有元素进行量化。

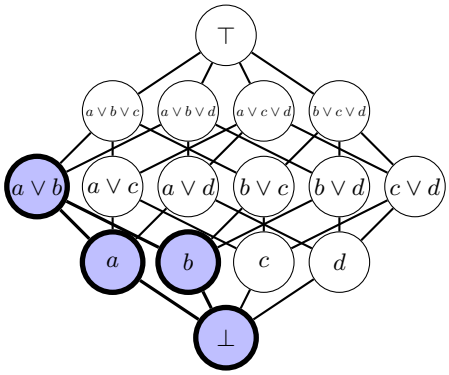

图1. 宇宙 $\mathcal{L}_4$，其中以蓝色突出显示相对（子）宇宙 $\mathcal{L}_{a \vee b}$。

我们区分宇宙嵌入环境句法宇宙 $\mathcal{L}$的两种方式。

首先，可以取严格意义上的定义：$\tilde{\mathcal{L}}$ 包含 $\tilde{\bot}$ 和 $\tilde{\top}$，并且在环境运算 $\wedge$、$\vee$和 $\neg$下封闭。这样的 $\tilde{\mathcal{L}}$ 通过限制继承了$\mathcal{L}$的全部布尔结构。从概念上说，这些子宇宙充当环境宇宙的粗粒化，因为它们保留了布尔推理，却忽略了 $\mathcal{L}$中存在的区别。

其次，可以将 $\mathcal{L}$ 限制到由元素 $t \in \mathcal{L}$生成的主理想上。我们将该理想定义为

$$\downarrow t \; := \; \{ s \in \mathcal{L} : s \wedge t = s \}.$$

该集合在环境$\wedge$ 和 $\vee$ 下自动封闭，且包含 $\bot$，但通常不在环境补元 $\neg$下封闭，因此未必构成一个以 t为顶元素的布尔格。尽管如此，可以通过赋予 $\downarrow t$ 相对补元，使其成为布尔格

$$\neg_t s = \neg(\neg t \vee s) \qquad s \in \downarrow t,$$

使得 $(\downarrow t,\ \wedge,\ \vee,\ \neg_t,\ \bot,\ t)$ 是布尔的。我们将以这种方式产生的子宇宙称为 相对全集 (见图 1)，并在以下定义中对其形式化

定义 3 (相对宇宙)。 设 $\mathcal{L}$ 是一个宇宙，且 $t \in \mathcal{L}$。t 处的相对宇宙 是如下结构

$$\mathcal{L}_t := \downarrow t = \{ s \in \mathcal{L} : s \wedge t = s \},$$

配备继承自 $\mathcal{L}$ 的运算 $\wedge$和 $\vee$，其底元素为 $\bot$，顶元为 t，并且具有相对补元 $\neg_t$： $\mathcal{L}_t \to \mathcal{L}_t$，定义如下

$$\neg_t s = \neg(\neg t \vee s) \qquad s \in \mathcal{L}_t,$$

其中 $\neg$ 表示 $\mathcal{L}$ 中的补元。

V. 命题的普适赋值

给定一个宇宙 $\mathcal{L}$，我们称普适赋值 为一个函数

$$V : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$$

为宇宙中的每个陈述赋予一个复数 [67]。对于每个宇宙 $\mathcal{L}$，我们感兴趣的是刻画 $\mathcal{V}(\mathcal{L})$这一可容许赋值集合。

我们称之为 V 普适赋值，以突出这一理念：根据句法局部性的概念，这确实是将 U 上的普适赋值限制到局部宇宙的结果。因此，赋值总是在限制下保持稳定；也就是说，对于两个宇宙 $\mathcal{L}'$，$\mathcal{L}$ 若有 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ 且 $V \in \mathcal{V}(\mathcal{L})$，则 $V|_{\mathcal{L}'} \in \mathcal{V}(\mathcal{L}')$。

我们希望刻画遵循以下原则的可容许赋值集合

i**与经典命题逻辑相容**：在适当的极限下，可容许赋值集合必须退化为经典命题逻辑的标准真值赋值集合。

ii**局部可推导性**：存在一条推理规则，可以据此计算陈述的赋值。这条推理规则允许根据 s 的赋值计算宇宙中所有其他陈述的赋值。在每个宇宙$\mathcal{L}$中，V 对某个陈述所赋的值，由 $\mathcal{L}$ 中所有其他陈述所赋的值唯一确定。

iii**普遍性**：演绎规则具有普遍性：它们仅取决于宇宙的逻辑结构，而与其元素的标记方式或特定赋值 V无关。

iv **最大可实现性**：可接受赋值的集合，是与这些原则相容的最大可实现集合。

v **对称性消除赋值自由度**：对称性消除结构，而结构是赋值自由度的唯一来源。因此，当原子区分被抹去时，单个非底语句的值便能唯一确定赋值。

这些原则将在下一小节中得到精确的形式化。

A. 原则的形式化

本节将讨论并以数学形式表达每条原则背后的思想。在这种形式化过程中，各原则彼此交织，并非相互独立。对每条原则背后思想的形式化，也取决于先前引入的原则所规定的结构。因此，原则的引入顺序十分重要。

1. 与经典命题逻辑的相容性

我们引入的第一个原理是与经典命题逻辑的相容性。

在标准范式中，概率量化主体对陈述所具有的性质（即为真或为假）的不确定性。这表明，我们已经将真和假视为对陈述性质的量化。因此，在赋值 V 的所有取值中，必定有两个值分别对应真和假。真和假是对陈述性质的量化。我们要求普适赋值 V 承认并纳入这一经典极限。

我们将这一要求形式化如下。
在任意宇宙 $\mathcal{L}$ 上，真值指派是一个函数

$$\mathtt{L} : \mathcal{L} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\},$$

它将每个陈述判定为真或假。

我们所考虑的真值指派包括布尔格上的所有经典布尔真值赋值，以及将宇宙中的每个陈述都映射为**F**的退化赋值。在经典逻辑中，这种退化赋值通常会被排除，主要是因为人们通常会固定一个论域宇宙，不会将任意子宇宙视为其自身合法的宇宙。然而，在本文中，局部性发挥着核心作用，因此子宇宙必须被视为真正的宇宙。一旦允许将布尔格限制到配备经典真值指派的子宇宙上，全**F**赋值便会自然出现，因而必须将其纳入考虑。

如果存在两个指定数 τ，$\varphi \in \mathbb{C}$，满足 $\tau \neq \varphi$ 并分别充当**T** 和**F**的角色，而且真值指派与 $\{\tau, \varphi\}$ 值赋值之间的转换始终可行且明确无歧义（图2 以图示方式展示了赋值与经典真值指派之间的对应关系），我们就称一组赋值与经典命题逻辑相容。

原则 I（与经典命题逻辑相容）。 一组赋值若满足以下性质，则与经典命题逻辑相容。

(i) 二值情形。 二值赋值 $V{:}\mathcal{L} \to \{\tau, \varphi\}$ 与真值指派 $\mathrm{L}: \mathcal{L} \to \{\mathbf{T},\mathbf{F}\}$ 之间存在双射：

$$\mathrm{L}(s) = \mathbf{T} \iff V(s) = \tau,$$
$$\mathrm{L}(s) = \mathbf{F} \iff V(s) = \varphi,$$

(ii) 底元素的赋值始终固定，与经典命题逻辑中的情形相同：

$$V(\bot) \coloneqq \varphi.$$

这一原理表明，每当某个赋值恰好取值于 $\{\tau, \varphi\}$ 时，它在各方面都是一个经典真值指派；而且，每个经典真值指派都可以视为我们框架的一个特例。

2. 局部可推导性

局部可推导性原则指出，在一个固定的句法宇宙中，任意陈述的赋值都由同一宇宙中所有其他陈述的赋值所决定。等价地，知道每一个

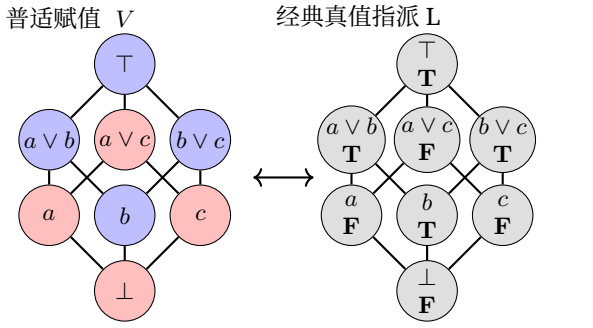

图2. 赋值与经典真值指派之间的对应关系。左侧以不同颜色表示的是 φ 和 τ 对于 V的取值。

其宇宙中除一个陈述之外的所有陈述的赋值的主体 $\tilde{s}$ 都拥有足够的信息，能够唯一地重 $\tilde{s}$ 建该陈述的赋值（参见图 3，其中以图示形式展示了局部可推导性的一个使用案例）。

为了使主体能够重构其指定语句的赋值，宇宙中必须存在其他非平凡陈述，因此只要宇宙中不止一个原子陈述，局部可推导性原则就成立。事实上，若 $\mathcal{L} = \{\bot, \top\}$ 主体将没有其他数据来推导 $\top$的赋值；实际上，根据原则 i $V(\bot){:}= \varphi$ 因此，我们不将其作为推理的数据。在这种情况下，顶元的取值是自由的。

我们将这一原理形式化如下。

原则二 (局部可推导性)。设 $\mathcal{L}$ 是一个由有限布尔格描述、含有$n \geq 2$ 个原子的宇宙。对于每个指定语句$\tilde{s} \in \mathcal{L} \setminus \{\bot\}$，都存在一个函数，即一条**推理规则** $\mathsf{D}_{\mathcal{L},\,\tilde{s}}$ 使得对于每个赋值 $V \in \mathcal{V}(L)$,

$$V(\tilde{s}) = \mathsf{D}_{\mathcal{L},\tilde{s}}\big(\{V(s)\}_{s\in\mathcal{L}\setminus\{\tilde{s},\bot\}}\big)\,. \tag{1}$$

此外，如果 $\mathcal{L}_a = \{\bot, a\}$ 是一个 1-原子宇宙，那么对于每个 $x \in C$，都存在 $V \in \mathcal{V}(L_a)$，使得 $V(a) = x$。

换言之，赋给 $\tilde{s}$ 的值由对所有其他陈述的赋值确定（此处我们明确排除对 $\bot$ 的赋值，以提醒读者它是一个固定值）。由于推理规则 $\mathsf{D}_{\mathcal{L},\,\tilde{s}}$ 是一个函数，因此这一推理是明确无歧义的。

这一原理似乎相当薄弱，因为它要求知道宇宙中所有其他陈述的赋值。受物理学启发，我们可以设想一个更合理的原理：无论在句法宇宙中如何定义最近邻，都要求一个陈述的赋值能够完全从其最近邻推导出来。然而，这一

原理与下一个原理（普遍性）以及句法局部性相结合，将产生一条推理规则，其“局部性”确实比单独采用这一原理所要求的更强。

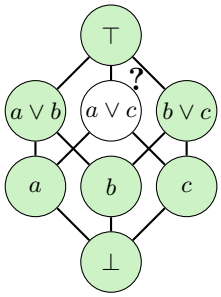

图3. 根据局部可推导性原则，可以从所有绿色陈述的赋值推导出 $V(a \vee c)$。

3. 普遍性

普适性原则表明，演绎规则仅取决于句法宇宙的结构，而不取决于附加在陈述上的任意标签。例如，我们可以设想两个句法宇宙 $\mathcal{L}_X = \{\bot, a, b, \top_X := a \vee b\}$和 $\mathcal{L}_Y = \{\bot, c, d, \top_Y := c \vee d\}$。这两个宇宙具有相同的结构，但元素的标签不同。我们希望演绎规则彼此独立，也就是说，a的赋值应当能够从 $\mathcal{L}_X$ 中其他陈述的赋值推导出来，且使用的推理规则应与从 $\mathcal{L}_Y$中其他陈述的赋值计算 c的赋值时所用的规则相同。

重新标记这一概念可由布尔格同构这一概念刻画，因此我们希望演绎规则在布尔格同构下保持不变。在有限布尔格中，处于同一层级（或秩）的陈述彼此同构，因此我们预期它们遵循相同的推理规则；而处于不同层级的陈述并不同构，因此我们预期它们遵循不同的演绎规则。因此，普遍性确定了每个陈述结构类中的演绎规则，也就是说，它要求原理 (ii) 的演绎规则仅取决于陈述在布尔格中的层级，而不取决于具体陈述。

为了明确普遍性与局部可推导性这一理念之间的相互作用，在附录E 中，我们将普遍性拆分为两个互补的要求：一个是全局要求（在固定宇宙内），另一个是局部要求（在同构子宇宙之间）。二者可以概括为以下单一原理：

普遍性指出，推理规则仅取决于宇宙中原子的数量 n （布尔格同构不会改变原子的数量）以及 l 特定陈述的层级（层级的图示见图4）。

原则 III（普遍性）。对于每一对（n, l），其中 $n \geq 2$ 且 $1 \leq l \leq n$，存在一个推理规则 $\mathsf{D}_{n,\,l}$，使得每当 $\mathcal{L}$ 是一个具有 n 个原子的布尔格，$V \in \mathcal{V}(\mathcal{L})$，且 $\tilde{s} \in \mathcal{L} \setminus \{\bot\}$ 处于该格的 l 层级时，均有

$$V(\tilde{s}) = \mathsf{D}_{n,l}\big(\{V(s)\}_{s \in \mathcal{L} \setminus \{\tilde{s}, \bot\}}\big)\,. \tag{2}$$

特别地，该推理规则仅取决于n 以及指定语句的 l 层级，而不取决于具体的宇宙或其元素的标签。

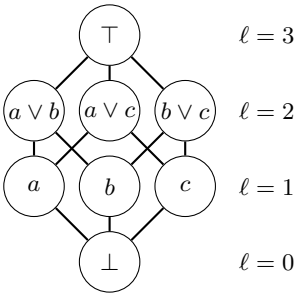

图 4. 一个具有三个原子状态且标有标签的宇宙的层级。

4. 最大可实现性

最大可实现性原则旨在表达这样一个事实：我们希望考虑与我们的原则相容的所有可能赋值。我们希望确保，如果某个赋值与我们的原则相容，那么该赋值就必须是可容许的。由于根据句法局部性的思想，我们知道任何句法宇宙，从而任何赋值，总是在一个更大的环境宇宙中具有局部性，因此我们必须从局部宇宙的角度来处理最大可实现性这一概念。为此，采用以下定义将会很有帮助。

定义4（相容的部分赋值）。设 $\mathcal{L}$ 是一个宇宙。$\mathcal{L}$ 上的部分赋值 是一个映射$p : \mathcal{S} \to$ 复数域，其中 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$ 不一定是子宇宙，且 $\bot \in \mathcal{S}$。如果满足以下条件，则部分赋值 p 称为相容的：

1. $p(\bot) = \varphi$;

2. 对于每个子宇宙 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$，当 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{S}$ 且 $\mathcal{L}' \setminus \{\tilde{s}, \bot\} \neq \emptyset$ 时，对每个 $\tilde{s} \in \mathcal{L}' \setminus \{\bot\}$，都有

$$p(\tilde{s}) = \mathsf{D}_{\mathcal{L}',\tilde{s}}\Big(\{\, p(s) \,\}_{s \in \mathcal{L}' \setminus \{\tilde{s}, \bot\}}\Big).$$

我们称之为相容的部分赋值，是因为我们希望将它视为宇宙 $\mathcal{L}$上的完整赋值的一种“不完整”说明。换言之，我们不知道 $\mathcal{L}$中每个陈述的赋值，只知道其中一些陈述的赋值。我们用 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$ 表示其赋值已知的陈述子集。它是相容的，因为我们没有理由认为它不是 $\mathcal{L}$上某个可容许赋值的限制。事实上，第 1 点和第 2 点表明，这个部分指派并未引入任何与我们能够检验的演绎规则相矛盾的不一致性。

一旦验证了一致性，我们就可以合理地将相容的部分赋值视为宇宙 $\mathcal{L}$上的完整赋值的一种“不完整”说明。以下原理对此作了概括，也正是我们对最大可实现性概念进行精确定义的方式。

原理 IV（最大可实现性）。设 $\mathcal{L}$ 为一个句法宇宙。$\mathcal{L}$上的每个相容的部分赋值 $p : S \to$ 复数域都可扩展为一个可容许赋值 $V \in \mathcal{V}(L)$，也就是说，

$$V|_S = p.$$

也就是说，如果没有理由认为局部宇宙中的局部主体不应接受某个赋值，那么该赋值就必须是可接受的。这一原理用于确保：对一组陈述所作的任何不违反可推导性约束的赋值，都能由某个可接受的赋值实现。具体而言，在可加性定理的附录 G 的证明中，运用这一原理来保证二元复合规则 A具有满射性／可逆性，并在构造测试赋值时允许自由选择原子值。

5. 对称性消除赋值自由度

局部可推导性和普遍性源于这样一种思想：赋值仅取决于句法层级上存在的区分。任何句法上不可访问的结构，对赋值而言都是不可见的，因而不会影响其赋值结果。

当原子陈述被视为不可区分时，会产生一种特别强的约束。如果所有原子都被赋予相同的值，就不再有任何语法标签允许赋值将它们区分开来。在这种情况下，赋值无法访问布尔格的内部组合结构。

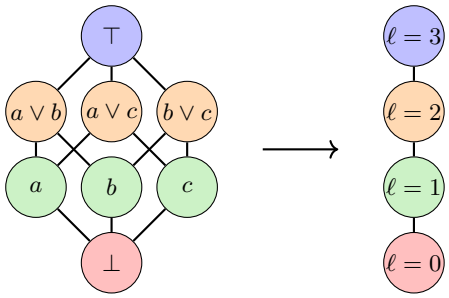

图 5. 对所有布尔同构施加赋值对称性，会使宇宙的布尔结构坍缩为链结构。

这种结构的丧失由以下塌缩结果刻画。

引理 1. 设 $\mathcal{L}$ 是一个具有 $n \geq 2$ 个原子的宇宙，并设 $V : \mathcal{L} \to$ 复数域 满足局部可推导性和普遍性。若存在 $x \in$复数域 使得

$$V(a) = x \qquad \textit{for all } a \in \mathrm{Atoms}(\mathcal{L}),$$

那么 V 在宇宙的每个层级上都是常数：对于每个 $l = 1$、……、n，都存在 $v_l \in$复数域 使得

$$V(s) = v_l$$

对于层级 l上的每个陈述 s。

引理的证明见附录 B1。

引理 1表明，一旦原子区分被抹去，赋值就只能根据陈述所处的层级加以区分。从赋值的角度看，所有处于同一层级的陈述都变得无法区分：如图 5 所示，格结构从布尔格坍缩为简单的链。普遍性进一步意味着，这种层级结构不具有内在身份。给定层级上的任何陈述都可以由其他陈述替换，而不改变赋值。因此，赋值看不出在给定层级上出现的是哪一个陈述，只能看出它出现在该层级上。由此，原子区分被移除后，不应再有任何隐藏的自由度：固定一个陈述的值，就应能完全确定赋值。若允许多个赋值与同一已声明的无差别性相容，就等于引入句法并不支持的额外结构。具有相同 $V(s)$ 的多个对称赋值，将意味着存在由抹去原子身份的自同构所无法确定的额外“标签”。

以图 5中的链结构为例。对于赋值 V，所有原子陈述都相同，因此我们将宇宙的结构表示为右侧的链；在层级$l = 1$上有陈述 s，在层级 $l = 2$ 上有陈述 $s \vee s$，而在层级 $l = 3$ 上有陈述 $s \vee s \vee s$。我们预期，在每个层级上，赋值仅取决于宇宙的层级以及陈述s的赋值。因此，我们预期实质上只有一个自由度，即 s的赋值。允许更多自由度，就相当于要求存在某种隐藏结构。在当前方法中，这种隐藏结构被排除。一旦声明原子彼此相同，赋值就不得保留任何关于如何为它们的组合赋值的剩余选择。这引出了以下刚性原理。

原理 V（对称性消除赋值自由度）。设 $\mathcal{L}$ 为有限布尔格，并设$s \in \mathcal{L} \setminus \{\bot\}$。对任意 $z \in$ 复数域，存在唯一赋值 $V:\ \mathcal{L} \to$ 复数域，满足 $V(s) = z$，使得 V 对出现在 s中的 $\mathcal{L}$ 的所有原子赋予相同的值。

一旦我们忽略原子之间的区分，就不再有可利用的进一步句法结构，因此仅固定一个陈述的值便已固定其余所有值，并唯一确定该赋值。

VI. 预概率

在陈述我们的原则时，我们并未固定任何特定的可推演规则。相反，我们仅要求可容许赋值满足一般的结构约束。这些约束已经决定了一种强代数形式：每个可容许赋值都可以重新参数化为陈述的并上的可加函数。这是本文的核心结果，因为它表明全局赋值具有有限可加表示，因而展现出一种部分反映概率函数的结构。

现在我们可以陈述重构的主定理：每个普适赋值 V 都存在一个有限可加表示。

定理 1。存在一个双射 $\phi:$ 复数域 $\to$ 复数域，我们称之为预概率映射，使得 $R:\ \mathcal{L} \to$ 复数域由 $R = \phi \circ V$ 定义，并满足以下条件：

1. 对任意一组互不相同的原子状态索引—*ments* $\{i_j\}_j$，

$$R\left(\bigvee_j s_{i_j}\right) = \sum_j R(s_{i_j}), \tag{3}$$

2. $R(\bot) = 0$,

3. *for every* $s \in \mathcal{L}$,

$$R(\neg s) = R(\top) - R(s). \tag{4}$$

我们称 R 为预概率。

该定理的证明见附录A。

无论底层赋值是什么，我们总能将其映射为一个具有可加性的预概率。尤其是，我们可以使用普通概率的相同代数规则对赋值进行推理。例如，对于任意给定的句法宇宙 $\mathcal{L}$ 及其赋值 V 和预概率函数 R，宇宙中任意陈述上的 R 的值，都可以根据 R 在原子陈述上的取值向量推断得出

$$\vec{r} = (R(s_1), R(s_2), \ldots, R(s_d)). \tag{5}$$

主定理的一个核心引理是，即使 V 总是存在预概率表示，这种表示通常也并不唯一。下一条引理将对此作出陈述。

引理 2。预概率映射 ϕ 在与一个可加函数复合后唯一；这种加性规范重参数化称为a-函数，即一个满足柯西函数方程的双射 $a:$ 复数域 $\to$复数域

$$a(x + y) = a(x) + a(y).$$

引理的证明可见附录 B2。

与 a-函数复合所带来的规范自由度，是预概率语言的一项鲜明且根本的性质。为保持完全的一般性，我们不对 a-函数施加连续性或任何其他正则性假设，因此甚至允许高度非构造性的 a-函数 [68]。我们采用这种不受限制的设定，是因为赋值 V 被视为原始对象。若其陪域没有额外结构，原则上便不存在可要求的正则性的典范概念。例如，除了格运算本身所编码的内容之外，我们并不清楚对 V（以及容许重参数化）而言，“连续性”应当意味着什么。从这个意义上说，不作正则性假设，就能使

重构纯粹保持代数性质。不过，为求完整，我们将在第 XA 节讨论施加额外正则性假设的影响。当要求 V 具有进一步的解析意义时，便可能需要作出此类假设；我们也会说明这些假设对本文结果的影响。

由于存在这种规范自由度，对于任意固定的、具有赋值 V 的宇宙 $\mathcal{L}$，都有无穷多个可接受的预概率映射 ϕ，因此也会导出无穷多个预概率 $R = \phi \circ V$。因此，一般而言，预概率表示并不唯一，不同的 ϕ 选择之间可通过与一个 a 函数复合而相互关联。

不过，有一种特殊情形例外，此时预概率表示是唯一的。这就是退化赋值

$$V(s) = \varphi \qquad \text{for all } s \in \mathcal{L},$$

它对应于这样一种退化的经典逻辑赋值：其中每个陈述都为假。在这种情况下，所有导出的预概率恒为零，与任意 a 函数复合都不会使其改变。因此，我们将这一特殊情形称为不变赋值。

对于唯一的普适赋值，存在如此多种预概率表示，这对下文的许多结果至关重要，尤其有助于理解和定义条件概率与准概率。

A. 语义框架与语义维数

下一小节将介绍一些额外结构，用于追踪重新标度自由度，并比较同一赋值的不同预概率表示。

引理 2表明，单个赋值可能有许多预概率表示，它们全都通过与 a函数复合而彼此相关。同一 V 的所有这些不同表示都共享一种共同的底层不变量结构。对于每个宇宙和每个赋值，都可以选出一组最小的陈述，其预概率值构成 有理数域上线性无关的参考值。这引出了语义框架和语义维数的概念。语义框架的诠释及其更广泛的作用将在第 X节讨论。

定义 5 (语义框架与语义维**数)**。 设 $\mathcal{L}$ 为一个宇宙，且 R： $\mathcal{L} \to$ 复数域 为一个预概率函数。

一个有限集合

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R) = \{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq \mathcal{L}$$

如果它是一个极大陈述集，并且对于所有有理数$q_1, \ldots, q_m \in$ 有理数域，则称它为语义框架 $(\mathcal{L}, R)$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j \, R(s_j) = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_1 = \cdots = q_m = 0.$$

整数 $m := |\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)|$ 称为语义维数 $(\mathcal{L}, R)$。

语义框架确定了 a函数作用于其上的自由度，而语义维数 m则确定了赋值在某个宇宙上的规范自由度所具有的自由度数量。下面的引理将介绍语义框架的一些性质。

引理 3. 给定一个包含 n 个原子陈述的宇宙 $\mathcal{L}$，以及一个预概率 $R : \mathcal{L} \to$ 复数域，考虑任意一个 a-函数和一个新的预概率 $R' := a \circ R$。那么：

1. *If* $s \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$ *then* $R(s) \neq 0$.
2. 所有语义框架 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$ 具有相同的语义维度。
3. 所有语义框架均独立于 a。它们只取决于赋值 V。*4.* 总是存在一个仅由原子陈述组成的语义框架，因此语义维度 m 有如下界限： $m \leq n$。

5. 如果 R' 满足

$$R'(s_j) = R(s_j) \quad \textit{for all } j = 1, \ldots, m,$$

then

$$R'(s) = R(s) \quad \textit{for all } s \in \mathcal{L}.$$

引理的证明见附录 B3。

性质 5 指出了这样一个观点：语义框架能够确定前概率表示的自由度。对于给定的宇宙，如果两个前概率表示在某个语义框架的所有元素上都相同，那么这两个预概率就相同；因此，任何非平凡的a-函数都会通过改变语义框架中至少一个元素的赋值来发挥作用。

B. 在环境宇宙中嵌入子宇宙

设有两个主体 X 和 Y，各自配备一个句法宇宙 $\mathcal{L}_X$ 和 $\mathcal{L}_Y$，并希望通信交流各自陈述的赋值。通信的可能性本身

就预设了一个更大的宇宙 $\mathcal{L}$，即一个环境宇宙，两个子宇宙都共同位于其中。换言之，每个主体都可能发现，自己最初认为的“那个”宇宙实际上只是一个子宇宙，并且存在一个环境宇宙 $\mathcal{L}$ ， $\mathcal{L}_X$ 和 $\mathcal{L}_Y$ 都嵌入其中 [69]；这是句法局部性的又一个实例。

现在假设两个主体 X 和 Y 分别为其各自的（子）宇宙 $\mathcal{L}_X$ 和 $\mathcal{L}_Y$配备了预概率 R_X 和 R_Y。我们将它们的预概率称为局部预概率，这一称谓体现了这样的认知：它们的预概率只是将普适赋值在 $\mathcal{L}$ 上的限制 $V|_X$ 和 $V|_Y$分别映射到子宇宙 $\mathcal{L}_X$ 和 $\mathcal{L}_Y$所得的预概率映射。在主体的子宇宙为相对子宇宙 $\mathcal{L}_s$且满足 $s \in \mathcal{L}$这一特殊情形下，我们将其局部预概率 R_s 称为相对先验概率。

因此，对于两个局部主体 X 和 Y而言，交流各自子宇宙中陈述的先验概率赋值，相当于以协调的方式将这些子宇宙嵌入环境宇宙 $\mathcal{L}$ ，使得局部赋予的赋值 R_X 和 R_Y 与在环境宇宙中考察相应陈述时的赋值 R 一致。因而，核心难点在于找到这样一种协调嵌入。尤其是，相干性要求两个主体首先同步其局部预概率表示的选择，也就是说，他们必须确保使用相同的预概率映射。

定义 6（预概率赋值的同步化）。设 $\mathcal{L}_X$ 和 $\mathcal{L}_Y$ 是环境宇宙 $\mathcal{L}$ 的句法子宇宙，在 $\mathcal{L}$ 上具有赋值 V，并具有诱导限制 $V|_X$ 和 $V|_Y$。设 R_X 和 R_Y 分别是主体 X 和 Y 在 $\mathcal{L}_X$ 和 $\mathcal{L}_Y$ 上使用的局部先验概率。

如果主体 X 和 Y 同步化其局部先验概率（相对于 $\mathcal{L}$），即定义两个 a-函数 a_X 和 a_Y，使其新的局部先验概率

$$R'_X := a_X \circ R_X, \qquad R'_Y := a_Y \circ R_Y$$

满足

$$R'_X = R|_{\mathcal{L}_X}, \qquad R'_Y = R|_{\mathcal{L}_Y},$$

对于环境格 $\mathcal{L}$ 的某个预概率 R 。

如果两个主体能够交流，我们就必须假设他们确实嵌入在一个共同的句法宇宙中，因此他们的赋值原则上可以同步化。然而，这仅仅意味着同步化所必需的两个 a 函数存在，并不保证这两个主体能够找到

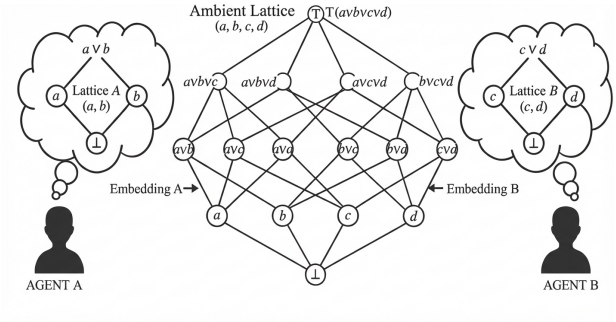

图 6. 两个主体的子宇宙嵌入一个共享的环境宇宙中。

它们。我们要探讨的是，这两个主体需要具备哪些资源，才能同步化他们的赋值。

如果主体对环境宇宙上的预概率 R 取值有所了解，就可以调整其局部先验概率表示，使之与该取值相匹配。根据引理 5 的第 3 点，可以直接证明以下引理

引理4。对于主体 A，只需知道任意语义框架 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}_X}$（$R_X$）中所有陈述的环境赋值，即可将其局部预概率 R_X 与环境宇宙上的预概率 R 同步。

C. 全预概率规则 y

除了同步不同子宇宙的局部预概率之外，还有些情形下，多个主体各自在局部宇宙中工作，却能够共同重构环境宇宙及其环境预概率。当这些主体的（子）宇宙共同包含环境宇宙的所有原子时，就会出现这种情况。

一个有趣的情形是，局部主体的子宇宙是环境宇宙 $\mathcal{L}$ 的相对宇宙 $\mathcal{L}_{s_j}$，且满足

$$s_{j_1} \wedge s_{j_2} = \bot \quad (j_1 \neq j_2), \qquad \bigvee_j s_j = \top.$$

每个主体都配有其相对预概率

$$R_{s_j} : \mathcal{L}_{s_j} \to \mathbb{C}$$

其定义域为其相对宇宙 $\mathcal{L}_{s_j}$。我们用 $a_j(\cdot)$ 表示将 R_{s_j} 与环境预概率 R 同步的 a-函数。

我们希望从相对先验概率的集合 R_{s_j} 重构 R 。为此

，定义局部化映射$[\cdot]_{s_j}\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}_{s_j}$很有用：

$$[s]_{s_j} \coloneqq s\wedge s_j.$$

局部化映射使我们能够将相对先验概率 R_{s_j} 的定义域扩展到整个环境宇宙。我们将此扩展记为$R(s\mid s_j)\colon \mathcal{L}\to\mathbf{C}$，其定义如下

$$R(s\mid s_j)\coloneqq R_{s_j}\big([s]_{s_j}\big), \tag{6}$$

并称其为条件先验概率。

借助这些工具，我们可以证明以下恒等式，主体由此能够重构整个环境宇宙的预概率 R 。

命题1。在上述假设下，**全先验概率法则**是恒等式

$$R(s)=\sum_j a_j(R(s\mid s_j))\,, \tag{7}$$

其中 $a_j(\cdot)$是用于同步各主体预概率的 a-函数。

命题中恒等式的证明见附录B4。

D. 广义贝叶斯定理

在标准概率论中，贝叶斯定理用于“反转”条件概率。它是标准条件概率定义的直接推论，通常写作

$$\mathcal{P}(B=b\mid A=a)=\frac{\mathcal{P}(A=a\mid B=b)\mathcal{P}(B=b)}{\mathcal{P}(A=a)}. \tag{8}$$

在预概率的语境下，只需考虑不同条件先验概率的同步化，便可推导出类似的方程。普适赋值的存在对广义贝叶斯定理至关重要。事实上，不同的条件先验概率确实是通过局部化映射，将同一普适赋值在子宇宙上的限制扩展而来；由于预概率映射的选择不同，预概率可能采用不同的参数化 V。广义贝叶斯定理不过是一个明确的方案，用于同步表示不同的条件先验概率。

为了明确展示一个类似于（8）的恒等式，使用包含四个原子陈述的宇宙 $\mathcal{L}_4$ $\{a,b,c,d\}$会比较方便。为便于阅读，我们将交替使用记号 $\{a,b,c,d\}$ 以及 AB附录 C 中引入的 $\{a,b,c,d\}$ 标记。记号 AB便于从布尔格的角度思考，而采用 $\{a,b,c,d\}$ 标记的记号则便于与标准概率论中这些概念的常见表述进行比较。

考虑两个条件先验概率

$$R(B=i_b\mid A=0),\quad R(A=i_a\mid B=1). \tag{9}$$

根据条件先验概率的定义，这些对应于

$$R_{a\vee b}(x),\quad R_{b\vee d}(y),$$

其中，我们将定义域限制为 $x\in\{a,b\}$和 $y\in\{b,d\}$ ，以使其与方程（9）中两个条件先验概率的定义域相匹配，并且$R_{a\vee b}$， $R_{b\vee d}$ 分别是两个主体的相对先验概率，它们各自配备了相对子宇宙 $\mathcal{L}_{a\vee b}$ 和 $\mathcal{L}_{b\vee d}$。由于我们知道这两个主体的宇宙实际上是 $\mathcal{L}_4$的子宇宙，因此它们的预概率可以同步为环境宇宙的预概率 R 在各自子宇宙上的限制。特别是，我们知道存在两个 a-函数 a_A 和 a_B ，使得

$$a_A\circ R_{a\vee b}=R|_{a\vee b},\quad a_B\circ R_{b\vee d}=R|_{b\vee d}.$$

这意味着，使用 AB 标记，我们可以写成

$$a_A(R(B=1\mid A=0))=a_B(R(A=0\mid B=1)).$$

我们可以用一种类似贝叶斯定理的形式，写出一个可称为**广义贝叶斯定理**的实例

$$R(B=1\mid A=0)=a_A^{-1}(a_B(R(A=0\mid B=1))). \tag{10}$$

我们看到，“反转条件概率”对应于同步化条件先验概率的表示。我们知道，这两个条件先验概率都来自同一个基础普适赋值 V，但通常分别以两种不同的预概率表示来表达。因此，广义贝叶斯定理不过是对预概率进行同步化，这些预概率分别对应于不同的主体，而每个主体都配有环境宇宙的某个限制上的普适赋值 V 的一种表示。

接下来我们将说明，当该定理应用于经典概率时，它恰好化为贝叶斯定理。以这种方式来看，贝叶斯定理可以轻松应用于准概率，而不会遇到通常的困难：由于这一结果本质上是一个同步恒等式，因此始终定义良好，即使某些准概率的值为零也是如此。

VII. 准概率

A. 限制到具有语义维度 1 的宇宙

接下来我们将讨论范围限制在语义维数为 $\mathcal{L}$ 的宇宙 $m = 1$，将更高语义维度的讨论留到第X节。此限制大大简化了可容许预概率的结构。在语义维数为 $m = 1$ 时，预概率的所有取值都与任一固定的非零值成$\mathbb{Q}$比例，正如下一个引理所述。

引理 5. 设 $\mathcal{L}$ 为语义维度 1 的宇宙，并设 $R : \mathcal{L} \to$ 复数域 为预概率函数。则对于 $\hat{s} \in \mathcal{L}$ 的每一个满足 $R(\hat{s}) \neq 0$ 的选择，以及对每一个 $s \in \mathcal{L}$，存在有理数 $q(s)$ $\in$有理数域，使得

$$R(s) = q(s)\, R(\hat{s}). \tag{11}$$

等价地，R 的所有非零值彼此成比例，且比例常数为有理比例常数。

该引理的证明见附录 B5。

特别地，一旦固定单个非零参考值 $R(\hat{s})$，整个预概率便由 $\mathcal{L}$ 上的有理函数 $q(\cdot)$ 确定。此外，在此设定下，与 a-函数复合所带来的自由度退化为一个整体的标量自由度，正如下述引理所述。

引理 6. 设 $\mathcal{L}$ 是一个语义维数为 $m = 1$的宇宙，并设 R 是相应的预概率函数。那么，每个 a-函数必然是一个标量乘法：存在唯一的复数 α_a $\in$复数域 使得

$$a \circ R \;=\; \alpha_a\, R,$$

即，对于所有 $s \in \mathcal{L}$，都有 $a(R(s)) = \alpha_a R(s)$。

引理的证明见附录 B6。

B. 规范表示

现在我们可以运用引理 5，为语义维数为 $m = 1$的预概率选取一个方便的典范代表。这里的“典范”是指消除 a-自由度所导致的不唯一性：在所有通过与 a-函数复合而彼此相关的预概率表示中，我们选出一个唯一确定的表示。

为明确无误地指定这一典范代表，我们注意到，每个宇宙都包含一个指定语句，即唯一的顶元 $\top$。我们采用该元素作为参照，具体方式见引理 5 [70]。事实上，每当 $R(\top) \neq 0$ 时，我们可以在引理 $\hat{s} = \top$ 中取5，并通过有理函数来描述预概率赋值 q。

在这种情况下，我们可以利用剩余的 a-函数自由度来固定顶元处的值，从而消除预概率表示选择上的歧义。具体而言，我们选取一个 a-函数（等价地，在语义维数为 $m = 1$时，选取一个标量 α_a），并将其代入重新参数化的预概率

$$R' := a \circ R \qquad (\text{equivalently } R' = \alpha_a R).$$

不失一般性，我们规定 [71]

$$R'(\top) = 1.$$

根据这一选择，引理 5 立即给出$R'(s)$ $\in$ $\mathbb{Q}$对每个 $s \in \mathcal{L}$成立。更重要的是，条件 $R'(\top) = 1$ 消除了 a-自由度：不再存在由与 a-函数复合而产生的自由度，从而得到唯一确定的代表元。我们将这个唯一确定的典范预概率 称为典范预概率。

定义 7（准概率）。宇宙 $\mathcal{L}$ 上的有理准概率函数（下文简称准概率）是一个预概率 Q： $\mathcal{L} \to \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$，满足：

1. 对于对应于原子陈述的任意一组互不相同的指标 $\{i_j\}_j$，

$$Q\left(\bigvee_j s_{i_j}\right) = \sum_j Q(s_{i_j}). \tag{12}$$

2. 对于每个 $s \in \mathcal{L}$,

$$Q(\neg s) = Q(\top) - Q(s). \tag{13}$$

3. Q要么在原子上归一化，

$$\sum_{s \in \mathrm{Atoms}(\mathcal{L})} Q(s) = 1, \tag{14}$$

或者 Q 恒等于零，即 $Q(s) = 0$ 对所有$s \in \mathcal{L}$都成立。

预概率与准概率之间并没有太大区别：准概率只是预概率在 a自由度下的典范代表，通过固定顶元处的值而得到。

请注意，只有顶元非零，或者存在不变赋值时，才能采用这一典范选择。

事实上，每个 a-函数都满足 $a(0) = 0$，因此，如果一个预概率 R 具有

$$R(\top) = 0,$$

那么不存在满足 $(a \circ R)(\top) = 1$ 的重新参数化 $a \circ R$。在这种情况下，无法定义与 R 相关联的归一化拟概率，除非 R 恒等于零（即不变赋值的情形）。在这个退化情形下，a 自由度已然平凡；对于每个 a 函数，都有 $a \circ R = R$，因此同样只有一个定义良好的代表，不存在剩余自由度。基于此，我们将 $Q \equiv 0$ 纳入规范拟概率表示。其他所有情形下，都无法对普适赋值 V 作拟概率表示，只能使用预概率。

VIII. 条件准概率

A. 作为条件概率扩展的标准条件准概率及其问题

在准概率的标准构造中，通常的条件化概念可能失效。事实上，标准方法将经典概率扩展到区间 $[0, 1]$ 之外，同时保持其余定义在形式上不变。

柯尔莫哥洛夫将条件概率定义为（参见 [8]第 1.4 节）

$$\mathcal{P}(B \mid A) \coloneqq \frac{\mathcal{P}(A, B)}{\mathcal{P}(A)}. \tag{15}$$

给定一个标准准概率 $\mathcal{Q}$，随后便用同一公式定义条件准概率，

$$\mathcal{Q}(B \mid A) \coloneqq \frac{\mathcal{Q}(A, B)}{\mathcal{Q}(A)}. \tag{16}$$

然而，正如下例所示，这一定义并非总是有意义。

例 1. 考虑两个二元变量 $A,\ B \in \{0, 1\}$，以及一个由下式给出的准概率分布 $\mathcal{Q}(A,\ B)$

$$\mathcal{Q}(A = 0, B = 0) = 0.3, \qquad \mathcal{Q}(A = 0, B = 1) = -0.3,$$
$$\mathcal{Q}(A = 1, B = 0) = 0.6, \qquad \mathcal{Q}(A = 1, B = 1) = 0.4.$$

对应的边缘概率为

$$\mathcal{Q}(A = 0) = 0, \qquad \mathcal{Q}(A = 1) = 1,$$
$$\mathcal{Q}(B = 0) = 0.9, \qquad \mathcal{Q}(B = 1) = 0.1.$$

例如，使用标准条件化规则，我们得到

$$\mathcal{Q}(A = 0 \mid B = 0) = \frac{0.3}{0.9} = \frac{1}{3},$$
$$\mathcal{Q}(A = 1 \mid B = 0) = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3},$$
$$\mathcal{Q}(B = 0 \mid A = 1) = \frac{0.6}{1} = 0.6,$$
$$\mathcal{Q}(B = 1 \mid A = 1) = \frac{0.4}{1} = 0.4.$$

但无法对 $A = 0$ 进行条件化，因为$\mathcal{Q}(A = 0) = 0$:

$$\mathcal{Q}(B = 0 \mid A = 0) \text{ is undefined},$$
$$\mathcal{Q}(B = 1 \mid A = 0) \text{ is undefined}.$$

这会带来问题：例如，联合取值$\mathcal{Q}(A = 0,\ B = 0) = 0.3$ 完全有定义，但却无法构造相应的条件量。

在经典概率论中，带有$\mathcal{P}(A) = 0$ 的事件可以得到一致处理，因此上述推导表明，将条件化的比值定义引入准概率框架，可能会导致真正的不一致性或未定义表达式。$\diamond$

B. 准概率及条件准概率相对化的不稳定性

通过我们的重构，上一小节指出的准概率和条件概率相关问题便不复存在。事实上，在我们的框架中，条件准概率并非通过扩展经典条件概率得到，而是作为条件先验概率概念的限制得到；后者总是定义良好的。在我们的重构中，我们认为，条件准概率的标准定义之所以失效，是因为准概率在以下意义上不具有相对化稳定性。

对于预概率，限制到子宇宙的处理性质良好：如果一个宇宙 $\mathcal{L}$ 配备了一个预概率 R，那么将 R 限制到任意子宇宙的定义域后，得到的仍然是一个预概率。

对于准概率，这种稳定性并不成立。如果 $\mathcal{L}$承载一个准概率 Q，那么将 Q限制到相对宇宙 $\mathcal{L}_t$ 上通常不是一个有效的准概率，因为准概率必须在局部顶元素 t处归一化。具体而言，如果 $Q(t) = 0$，那么不存在一个 a-函数 a 使得

$a\big(Q(t)\big) = 1$，因此$\mathcal{L}_t$ 上的诱导赋值无法参数化为准概率。在这种情况下，必须改为使用 $\mathcal{L}_t$上相应的相对先验概率。

然而，若 $Q(t) \neq 0$，则总可以将该限制与标量 a- 函数 a_t 复合，使其归一化为准概率，其中乘法因子为

$$\alpha_{a_t} = \frac{1}{Q(t)}.$$

这促使我们给出以下定义。

定义 8 (相对拟概率). 设 $\mathcal{L}$ 是配备准概率 Q的宇宙，且 $t \in \mathcal{L}$ 满足 $Q(t) \neq 0$。在 t 处的相对拟概率是将 Q限制到相对宇宙 $\mathcal{L}_t$后进行归一化所得，定义如下：

$$Q_t(s) \coloneqq \frac{Q(s)}{Q(t)} \qquad (s \in \mathcal{L}_t). \tag{17}$$

等价地，$Q_{ts} = a_t \circ \big(Q|_{\mathcal{L}_t}\big)$ 其中 $a_t(z) = z/Q(t)$。

定义 9 (条件拟概率). 设Q_t 是在 t处的相对拟概率。对于任意 $s \in \mathcal{L}$，给定 t时 s 的条件拟概率 定义如下：

$$Q(s \mid t) \coloneqq Q_t\big([s]_t\big). \tag{18}$$

C. 准概率的全概率公式

全先验概率法则可以专用于准概率，从而明确给出同步的 a-函数。然而，由于准概率在相对化下并不稳定，在某些情况下就不得不退回使用预概率。因此，我们区分三种情形。

1. 稳定情形： 准概率在相对化下稳定，因此整个分析都可以在准概率框架内进行。2.混合情形：对准概率进行条件化（相对化）会得到预概率，而该预概率无法重新参数化为准概率。这会导出混合的全准概率／预概率法则；而这正是条件准概率的标准处理方法失效的情形。3. 不变子宇宙：赋值在某个子宇宙上的限制就是不变赋值的情形。

对于每种情况，我们都给出一个采用 AB 标记的具体示例。

1. 情形 *1*：准概率在相对化下稳定

我们考虑一个赋有拟概率 Q 的宇宙 $\mathcal{L}$，以及一族相对宇宙 $\{\mathcal{L}_{s_j}\}_j$，使得

$$s_j \wedge s_k = \bot \quad (j \neq k), \qquad \bigvee_j s_j = \top,$$

从而

$$\sum_j Q(s_j) = Q(\top) = 1.$$

假设每个相对宇宙 $\mathcal{L}_{s_j}$ 都配备了一个准概率 Q_{s_j}：$\mathcal{L}_{\tilde{s}_j} \to$复数域。因此，只需与局部化映射复合，我们便得到一族条件准概率 $\{Q(s \mid s_j)\}_j$。

命题 2（准概率全概率公式）。在上述假设下，**准概率全概率公式** 就是恒等式

$$Q(s) = \sum_j Q(s \mid \tilde{s}_j)\, Q(\tilde{s}_j).$$

例 2。 现在，我们在环境宇宙 $\mathcal{L}_4$ 中考察一个准概率全概率公式的具体实例。使用 AB 标记（见附录复数域），准概率全概率公式给出

$$\begin{aligned} Q((B = i_b)) &= Q(B = i_b \mid A = 0)\, Q((A = 0)) + \\ &\quad + Q(B = i_b \mid A = 1)\, Q((A = 1)), \\ Q((A = i_a)) &= Q(A = i_a \mid B = 0)\, Q((B = 0)) + \\ &\quad + Q(A = i_a \mid B = 1)\, Q((B = 1)), \end{aligned}$$

它与标准全概率公式具有相同的形式结构。$\diamond$

2. 情形 *2*：准概率在相对化下不稳定

现在考虑这样一种情况：选定的某个相对宇宙（记作 $\mathcal{L}_{s_k}$）未配备准概率，而仅配备满足 $R_{s_k}(\tilde{s}_k) = 0$ 的预概率 R_{s_k}。为了使这一局部赋值与整体准概率 Q 同步，必须选择一个陈述 $s'_k \in \mathcal{L}_{s_k}$，使得 $Q(s'_k) \neq 0$（因而 $R_{s_k}(s'_k) \neq 0$）。在这种情况下，我们得到如下形式的混合准概率／预概率全概率公式

$$Q(s) = \sum_{j \neq k} Q(s \mid s_j)\, Q(s_j) + R(s \mid s_k) \frac{Q(s'_k)}{R_{s_k}(s'_k)}.$$

示例 3. 考虑与示例 2相同的宇宙，但现在假设 $Q(A=1)=0$ 而$Q((A=1,B=1)) \neq 0$。

在这种情况下，全先验概率法则给出

$$Q((B=i_b)) = Q(B=i_b \mid A=0)\, Q((A=0)) + R(B=i_b \mid A=1)\, \frac{Q((A=1,B=1))}{R(B=1 \mid A=1)}.$$

◇

3. 情形 *3*：具有不变赋值子宇宙的准概率

作为最后一种情形，我们考察相对宇宙 $\mathcal{L}_{s_k}$ 未配备准概率、而仅配备预概率 R_{s_k} 的情况，其中 $R_{s_k}(s) = 0$ 对所有 $s \in \mathcal{L}_{s_k}$均成立。由于与 a-函数复合后会保持 R_{s_k} 不变，因此 R_{s_k}必定已经同步，于是全先验概率法则具有如下形式

$$Q(s) = \sum_{j \neq k} Q(s \mid s_j) Q(s_j) + R(s \mid s_k) = \\ = \sum_{j \neq k} Q(s \mid s_j) Q(s_j).$$

示例 4. 考虑与示例3中相同的宇宙，但现在假设

$$Q((A=1)) = Q((A=1,B=1)) = \\ = Q((A=1,B=0)) = 0$$

。这意味着 $Q((A=0)) = 1$，在这种情况下我们有：

$$Q((B=i_b)) = Q(B=i_b \mid A=0).$$

◇

D. 准概率的广义贝叶斯定理

清晰且连贯地定义条件准概率，使我们能够为准概率表述一种贝叶斯定理。

正如我们在预概率的情形中所看到的，贝叶斯定理本质上是不同条件赋值之间的一种同步化原理。准概率的许多常见困难都源于它们通常无法在相对化下保持稳定。换言之，若我们在一个配备了准概率的宇宙中转向某个相对宇宙，所得的相对赋值，以及由此关联的条件赋值，可能不再能表示为条件拟概率。不过，既然我们已经知道如何同步化预概率，而且还有适用于预概率的广义贝叶斯定理，这个障碍便不复存在。

接下来，与上一节一样，我们分三种情形形式化阐述准概率的贝叶斯定理。首先，当准概率在相对化下稳定时，我们得到的贝叶斯定理与标准形式完全类似。其次，当所考虑宇宙上的准概率不稳定时，我们必须采用混合形式的贝叶斯定理，将准概率与先验概率结合起来。这两种形式都只是针对这些特定情形对先验概率广义贝叶斯定理的特化。第三种情形则是采用不变赋值的情况。

1. 情形 *1*：相对化下稳定的准概率

考虑一个包含 $\mathcal{L}_4$ 四个原子命题的宇宙 $\{a,b,c,d\}$，其普适赋值V 允许一种准概率表示 Q。为便于阅读，我们将交替使用记号 $\{a,b,c,d\}$ 和 AB 附录C中引入的标记方式。

我们假设 $Q((A=0)) = Q(a \vee b) \neq 0$ 且$Q((B=1)) = Q(b \vee d) \neq 0$。考虑以下两个条件准概率

$$Q(B=i_b \mid A=0), \quad Q(A=i_a \mid B=1). \tag{19}$$

根据条件准概率的定义，它们对应于

$$Q_{a \vee b}(x), \quad Q_{b \vee d}(y),$$

这里，我们将定义域限制为 $x \in \{a,b\}$ 和 $y \in \{b,d\}$，以匹配方程（19）中两个条件准概率的定义域；$Q_{a \vee b}$，$Q_{b \vee d}$ 分别是两个主体的相对准概率，这两个主体各自配备了相对子宇宙 $\mathcal{L}_{a \vee b}$ 和 $\mathcal{L}_{b,\ d}$。由于我们知道这两个主体的宇宙实际上是 $\mathcal{L}_4$ 的子宇宙，因此可以确定，它们的准概率能够同步为环境宇宙准概率 Q在各自子宇宙上的限制。特别地，我们知道存在两个 a-函数 a_A 和 a_B，使得

$$a_A \circ Q_{a \vee b} = Q|_{a \vee b}, \quad a_B \circ Q_{b \vee d} = Q|_{b \vee d}.$$

这意味着，采用 AB 标记后，我们可以写成

$$a_A(Q(B=1 \mid A=0)) = a_B(Q(A=0 \mid B=1)).$$

特别是，我们知道 $a_A(x) = Q((A=0)) \cdot x$且 $a_B(x) = Q((B=1)) \cdot x$。利用同步 a- 函数的显式形式，广义贝叶斯定理

$$Q(B=1 \mid A=0) = a_A^{-1}(a_B(Q(A=0 \mid B=1))),$$

对于相对化下稳定的准概率，其形式为

$$Q(B=1 \mid A=0) = \frac{Q(A=0 \mid B=1)Q((B=1))}{Q((A=0))}.$$

这恰好是标准贝叶斯定理的形式。

2. 情况 2：相对化下不稳定的准概率

我们考虑与情况 1 相同的设定，但现在假设 $Q(A=0) = Q(a \vee b) = 0$。在这种情况下，我们不再有两个条件准概率。相反，我们得到一个条件预概率和一个条件准概率，

$$R(B=i_b \mid A=0), \quad Q(A=i_a \mid B=1). \tag{20}$$

完全按照上一节的步骤，广义贝叶斯定理

$$R(B=1 \mid A=0) = a_A^{-1}\big(a_B(Q(A=0 \mid B=1))\big)$$

可简化为

$$R(B{=}1 \mid A{=}0) = a_A^{-1}\big(Q(A{=}0 \mid B{=}1)\, Q(B{=}1)\big).$$

假设存在一个陈述 $\tilde{s} \in \mathcal{L}_a$ 使得$Q(\tilde{s}) \neq 0$。那么

$$a_A^{-1}(x) = \frac{R_{a\vee b}([\tilde{s}]_{a\vee b})}{Q(\tilde{s})}\, x.$$

等价地，在 AB 标记中，假设存在一个 $\tilde{}$ 值 i_b，属于 B，使得 $Q(A{=}0, B{=}i_b) \neq 0$。在这种情况下，

$$a_A^{-1}(x) = \frac{R(B{=}\tilde{i}_b \mid A{=}0)}{Q(A{=}0, B{=}\tilde{i}_b)}\, x.$$

因此，在预概率与准概率混合的情形下，广义贝叶斯定理变为

$$R(B{=}1 \,|\, A{=}0) = Q(A{=}0 \,|\, B{=}1)\, Q((B{=}1))^{\,\frac{R(B=\tilde{i}_b \mid A=0)}{Q(A=0, B=\tilde{i}_b)}}.$$

当然，当 A 和 B 都只有两个可能结果时，预概率与准概率混合的情况在实际应用中基本用途有限。然而，一旦允许有更多结果，只要知道 $\tilde{}$ 一个参考值 $R(B{=}i_b \mid A{=}0)$，就足以根据量 $Q(A{=}0 \mid B{=}i)$ 求出所有其他条件概率 $R(B{=}i \mid A{=}0)$。

关键点与第 VIB 节相同：在语义维数 $m = 1$ 下，要使两个赋值同步，必须固定一个参考值。对于准概率，我们总可以选择顶元的赋值作为这个参考值。然而，对于预概率，如果顶元的赋值为零，就必须改为指定某个其他元素的赋值。

3. 情况 3：具有不变赋值子宇宙的准概率

此情况与情况 2 完全相同，区别在于，对于 $\tilde{}$，事实是对于任意值 i_b B Q $A=$，我们都有 $(0, B = i_b) = 0$。在这种情况下，$\mathcal{L}_{a\vee b}$上的赋值 V 是不变赋值，并且我们有

$$Q(B=1 \mid A=0) = 0.$$

IX. 经典概率

在整个重构过程中，我们已经看到，纯预概率，即无法重新参数化为准概率的预概率，恰恰出现在这样的宇宙中：顶元$\top$ 被赋予赋值 $V(\top) = \varphi$，也就是说，$R(\top) = 0$。在纯预概率的情形下，并不存在固定预概率表示的典范方式。

相反，只要 $V(\top) \neq \varphi$，普适赋值就总能参数化为准概率，从而得到典范表示。然而，我们也已经看到，准概率在相对化下并不稳定。

本节将说明，对于配备了在所有陈述上符号相同的准概率的宇宙，总能将普适赋值参数化为真正的概率。此外，这种概率表示在相对化下是稳定的。换言之，将可容许赋值的集合限制为在宇宙的所有陈述上符号相同的赋值，等同于将其限制为在相对化下稳定的可容许赋值集合 [72]。

因此，我们通过构造概率表示来完成重构。关于 Cox 和 Jaynes 对概率的经典推导的简要比较，见附录 F。

A. 经典概率与相对化的稳定性

对于每一个带有赋值且允许拟概率表示的宇宙，如果该宇宙中每个陈述的准概率符号都相同，我们就可以定义一个（经典）概率函数。

定义10 (概率函数)。设 $\mathcal{L}$ 是一个宇宙。在 $\mathcal{L}$ 上的概率函数 是一个准概率函数 $P\colon \mathcal{L} \to$ 有理数域 $\subseteq$ 复数域，并且满足

$$P(s) \geq 0 \qquad for\ all\ s \in \mathcal{L}.$$

现在考虑定义在宇宙 $\mathcal{L}$ 上的概率函数 P，令 $t \in \mathcal{L}$，并考虑相对子宇宙 $\mathcal{L}_t$。显然，对于概率而言，相对化是稳定的。

定义11 (相对概率)。设 P 是定义在 $\mathcal{L}$ 上的概率函数，并令 $t \in \mathcal{L}$。在 t 处的相对概率 是映射

$$P_t : \mathcal{L}_t \to \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$$

定义为

$$P_t(s) := \begin{cases} \dfrac{P(s)}{P(t)}, & if\ P(t) > 0, \\ 0, & if\ P(t) = 0, \end{cases} \qquad (s \in \mathcal{L}_t).$$

当 $P(t) > 0$ 时，这是通常的条件赋值。当 $P(t) = 0$ 时，定义 $P_t \equiv 0$ 可由正性推出：若 $P(t) =0$，则非负性与可加性共同迫使 $P(s) = 0$ 对每个 $s \in \mathcal{L}_t$ 都成立，因此 P 在整个相对宇宙上的限制恒为零，即不变赋值。因此，即使顶元为零，重新参数化也没有自由度。因此，与准概率情形不同，转到相对宇宙绝不会使我们脱离概率表示。

B. 全概率法则

设 $\mathcal{L}$ 是赋有经典概率 P 的宇宙。设 $\{\tilde{s}_j\}_j$ 是一族两两不相交的陈述，它们构成顶元的一个划分，

$$\tilde{s}_j \wedge \tilde{s}_k = \bot \quad (j \neq k), \qquad \bigvee_j \tilde{s}_j = \top,$$

因此

$$\sum_j P(\tilde{s}_j) = P(\top) = 1.$$

在这种情况下，全概率公式的形式与命题2中的准概率全概率公式完全相同。

命题3 （全概率公式）。在上述假设下，对于每个 $s \in \mathcal{L}$，都有

$$P(s) = \sum_j P(s \mid \tilde{s}_j)\, P(\tilde{s}_j).$$

由于相对化下的稳定性，我们不会遇到混合情形。

C. 相对概率与条件概率

将相对概率的概念与条件概率的概念进行比较很有意思。相对概率 $P_t(\cdot)$ 是从子宇宙 $\mathcal{L}_t$ 到有理数域 Q 的函数，而条件概率 $P(\cdot \mid t)$ 是从宇宙 $\mathcal{L}$ 到有理数域 Q 的函数。这两个函数的定义域不同，但它们在子宇宙 $\mathcal{L}_t$ 上取值相同。

相对概率 P_t 是概率函数在一个子宇宙上的限制，并通过 a-函数进行重新参数化。从底层普适赋值 V 的角度来看，相对概率恰好是将 V 限制到子宇宙 $\mathcal{L}_t$ 上。因此，概率与相对概率实际上是同一个赋值，变化的只是定义域的限制。

条件概率并不描述它们所源自的同一个普适赋值 V。条件概率是通过局部化映射，将相对概率扩展到完整环境宇宙的定义域上所得的结果。这种扩展为环境格中所有属于局部化映射所指定同一等价类的元素赋予固定的概率值（有关等价类以及将相对概率扩展为条件概率的示例，见图 12 ）。

X. 高语义维度：归一化与顶端为零语义框架

到目前为止，我们关注的是语义维数为 $m = 1$ 的宇宙，其中预概率的所有非零值都彼此成有理数比例；而一旦转为准概率，归一化 $Q(\top) = 1$ 便固定了剩余的 a-自由度。在更高语义维度下，情况则有所不同：当赋值的值在复数域C中张成多个Q-线性无关方向时，单个标量约束无法确定这些独立方向的表示方式。

因此，在准概率（进而是经典概率）的情形下，归一化会迫使语义框架之间出现结构不对称性：

只有恰好一个语义方向可以承载 $\top$ 的归一化，而所有其他独立方向的 top 都必须等于 0。等价地，每个准概率都典范地分解为一个真正归一化的分量和若干必然是纯预概率的附加分量。

a. 从语义框架出发的有理数域线性分解设 $\mathcal{L}$ 是一个宇宙，且 $R:\mathcal{L}\to\mathsf{C}$ 是一个预概率。固定一个语义框架

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)=\{s_1,\dots,s_m\}\subseteq\mathcal{L},$$

使得 $\{R(s_k)\}_{k=1}^{m}$ 在有理数域上线性无关，并且在此性质下是极大的（定义 5）。

引理 7. 对于每个陈述 $s\in\mathcal{L}$，都存在唯一的有理数 $q_1(s)\dots,q_m(s)\in$ 有理数域 使得

$$R(s)=\sum_{k=1}^{m}q_k(s)\,R(s_k). \tag{21}$$

引理的证明见附录 B7。

函数 $q_k:\mathcal{L}\to$有理数域可以解释为相对于该语义框架的 $R(s)$ 的有理坐标。

b. 语义分量是预概率利用坐标函数，我们将 R 的语义分量定义为支撑在每个独立框架值上的部分。

定义 12（预概率的语义分量）。设 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)=\{s_1,\dots,s_m\}$ 是一个语义框架，并设 $q_k(\cdot)$ 是引理 7中的坐标函数。对于每个 $k\in\{1,\dots,m\}$，定义

$$R^{(k)}:\mathcal{L}\to\mathbb{C},\qquad R^{(k)}(s):=q_k(s)\,R(s_k). \tag{22}$$

我们称 $\{R^{(k)}\}_{k=1}^{m}$ 为相对于框架 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$ 的语义分解。

由构造可知，

$$R(s)=\sum_{k=1}^{m}R^{(k)}(s)\qquad\text{for all } s\in\mathcal{L}. \tag{23}$$

此外，每个 $R^{(k)}$ 本身都是语义维数为 1 的预概率。

c. 归一化选出唯一的语义方向 现在我们专门讨论准概率。设 $Q:\mathcal{L}\to$ 复数域 是一个准概率，满足$Q(\top)=1$。将语义分解（23）应用于 $\top$可得

$$1=Q(\top)=\sum_{k=1}^{m}Q^{(k)}(\top)=\sum_{k=1}^{m}q_k(\top)\,Q(s_k), \tag{24}$$

这是 1 与 $\{Q(s_k)\}_{k=1}^{m}$ 这些在有理数域上线性无关的数的一个有理数域上线性组合之间的等式。

对于准概率，可以选择语义框架，使得 $\top$ 本身属于该框架；这会迫使其余方向均为顶端为零。

命题 4。设 $\mathcal{L}$ 是一个宇宙，且 $Q:\mathcal{L}\to$复数域是一个准概率，并满足 $Q(\top)=1$。那么存在一个语义框架

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(Q)=\{\top,s_2,\dots,s_m\}\subseteq\mathcal{L}$$

使得，相对于此框架的语义分解 $\{Q^{(k)}\}_{k=1}^{m}$满足

$$Q^{(1)}(\top)=1,\qquad Q^{(k)}(\top)=0\ \ (k=2,\dots,m). \tag{25}$$

特别地，$Q^{(1)}$ 是语义维度 1 的准概率，而每个满足 $k\geq 2$ 的 $Q^{(k)}$ 都是纯前概率。对于经典概率，同样的结论也更是成立。

该命题的证明见附录 B8。

关于数域选择（例如有理数域分量与实分量）以及类似频率的解释的可选说明，留待附录 G 和H。

A. a-函数的正则性条件会怎样?

在本文中，我们始终允许 a-函数具有完全的代数一般性，即将其视为 (C $+$) 的加法自同构。除可加性和双射性外，我们没有施加任何正则性假设，因为我们的出发点是将普适赋值 V 视为原始对象：若其陪域不具备额外的解析结构，就没有可供要求的典范“正则性”概念。尤其是，我们的选择允许柯西函数方程存在高度非构造性的解。从代数角度看，正是这一点使规范自由度足够大，能够沿值空间中不同的 Q 方向独立作用，从而支撑对更高语义维度的讨论。

在许多诠释情境中，人们确实需要额外的结构。如果 V意在表示例如“信息含量”“似然性”或其他适合用复分析来研究的量，那么将容许重参数化限制为保留这种结构的变换便是顺理成章的做法。具体而言，可以要求允许的规范重新标度（ a-函数）是全纯的，同时保持双射性并满足柯西函数方程。在这种全纯限制下， a的自由度完全消失。每个全纯解必然具有 [73, 74]的形式

$$a(z)=c\,z,\qquad c\in\mathbb{C}, \tag{26}$$

而且，双射性等价于 $c \neq 0$。因此，剩下的唯一规范作用就是对所有值同时施加统一的全局缩放和旋转。

等价地，全纯性将 a自由度压缩为由 $z \mapsto cz$ 作用的函数。特别是，这排除了对不同有理数域线性无关语义方向进行非均匀处理的重新刻度，例如固定一个语义分量，同时放大另一个（例如参见附录G）。对于全纯 a函数，只有一个常数 c，因此无法对语义分解所区分的不同有理数域向量空间分量分别采取行动。

一个有用的概念性推论是，在全纯性条件下，人们可以在任意语义框架中进行研究，尤其可以在完整的语义维数下开展研究，而无需引入依赖于框架的规范伪影。事实上，剩余的重新刻度 $z \mapsto cz$ 会一致地作用于整个值空间。最重要的后果是，我们可以自然地重新引入无理数作为概率的取值，并将完整的复数用于预概率和准概率。

重要的是，由于这一限制是在可加性定理之后提出的，因此不会改变定理 1，也不会影响从可加性和可同步性得出的任何代数结论。关于预概率、同步化问题和广义贝叶斯定理的所有结果仍然成立：改变的只是可接受的规范自由度的大小及其定性行为（因此，比较不同表示时所需的记录方式也会改变）。

关于准概率的讨论，在规范不变内容层面也基本不受影响。在语义维度 1 中，全纯性意味着，在固定归一化之前，准概率可以表示为任意复数，因为残余自由度是复数缩放；施加典范归一化（例如 $Q(\top) = 1$ ）即可固定 c，并彻底消除这种自由度。更一般地，在全纯性条件下，剩余的规范自由度完全是全局性的，因此即使在更高语义维度下，只需一次典范归一化，就足以消除残余歧义。

最后，如果将概率定义为在相对化下保持稳定、且即使在更高语义维数中也表现为真正非负权重的准概率，那么还必须额外要求其所源自的准概率为实数且非负。这排除了非平凡的抵消（例如，在 $\top$ 处求和为零的纯虚部），否则这类抵消会在相对化下造成虚假的“顶端为零”行为。加入这一正性要求后，概率的概念便与我们先前的定义完全一致，且此前推导出的所有代数恒等式仍然成立。

这里要表达的是，如果对预概率、准概率和概率施加额外的正则性条件，它们就会失去沿不同$\mathbb{Q}$方向的分解；本文的证明也能以类似方式进行（因为我们主要研究了语义维数为 $m = 1$ 的赋值和论域），并且可以在完整的复数域/实数域 [75] 上恢复这些表示。

XI. 结论

抛掷一枚硬币时，大多数情况下，你并不知道它会正面朝上还是反面朝上。不过，你可以设想这样一种情境：你掌握了足够的信息，能够准确预测硬币落地时朝上的一面。我们的物理学理论会告诉你如何做到这一点。测量量子系统时，大多数情况下，你并不知道会得到什么测量结果，而且也无从得知。我们的物理学理论也会告诉你这一点。

这两种情境都用概率来建模。不过，在硬币情境中，概率显然是处理不确定性的工具，很难让人相信它是硬币及其抛掷这一行为的性质。抛出的硬币会正面朝上这一事实，要么为真，要么为假；而这一真或假是硬币及其抛掷这一行为的性质。相反，在量子情境中，人们可能会觉得概率实际上是系统和测量的性质。理论精确地预测了这一概率，而且我们可以通过实验检验它。关于测量结果将 为——比如说——0的陈述，并非简单地为真或为假。它带有一个概率，而这个概率看起来像是量子系统和测量的性质。关于系统和测量整体的所有信息，都会给出与“测量结果将为0”这一陈述相关联的概率，却无法说明它是真是假。

量子力学启示我们，应将其概率视为系统的性质。我们认真看待这一启示，并尝试据此发展一种理论。我们习惯于认为陈述具有一种性质，即我们称为真值的二元性质。量子理论促使我们将这一量适用于每个陈述时的取值范围扩展到两个值以上。我们也知道，量子力学常以复数表示准概率，因此我们从一个附属于陈述的量开始，即普适赋值 V，并允许它取复数值。这一推理促使我们直接形式化一种基本

性质，我们希望这种普适赋值 V 具备这一性质。我们希望普适赋值 V 与经典逻辑相容，也就是说，与真值的赋值相容。归根结底，我们并不想要什么异乎寻常的东西。我们想要一种理论，能够纳入我们已经了解的关于陈述这一性质——普适赋值 V——的知识；我们也已经知道，当它取我们习惯称为真和假的两个特定值时，会如何表现。

此外，一旦我们将这个量解释为陈述的一种性质，就可以引入物理学中的概念。我们可以把陈述视为“物理”对象，把普适值 V 视为这些对象的一种“物理”性质。受这一类比的启发，我们提出一些原则，并期望普适赋值 V 满足这些原则。不过，在此之前，我们先引入句法局部性的概念。它所做的不过是确定陈述系统彼此接近意味着什么、子系统是什么，以及如何将陈述系统嵌入更大的系统中。这就是系统相对化的概念。受 Moore 启发，我们称这些系统为（句法）“宇宙”。除此之外，这一概念还意味着，我们所考虑的每个 论域都应始终被视为更大宇宙中的一个局部部分。

在将问题化约为真值赋值的基础上，我们又提出四条附加原则。首先，我们假设普适值 V 具有结构，也就是说，它的值可以根据宇宙中其他元素的信息推导出来。我们称之为局部可推导性原则。其次，我们假设这些规则在不同宇宙之间保持不变。普适赋值 V具有唯一的结构，不依赖于具体的论域。我们称之为普适性原则。接着，我们要求所刻画的普适赋值集合在符合这些原则的前提下尽可能大。我们不希望引入隐藏的约束。最后，我们要求普适赋值 V 在句法对称性下表现良好。

从这些原则出发——它们显然受到物理学基本思想的启发——我们得到了本文的主要结果，对普适赋值 V 作出了有力的刻画。我们发现，任何普适赋值 V 总能重新参数化为一个对陈述可加的函数。换言之，普适赋值 V 本质上是有限可加的。可加性是概率论的本质性质，而我们证明，普适赋值 V（我们赋予每个陈述的这一性质）总能被视为可加的。鉴于它在结构上与概率相似，我们将普适赋值的这些重新参数化称为 V 预概率。作为主要结构定理的一个引理，我们还发现，普适赋值 V 的预概率表示方式有极大的选择自由度，并对这种自由度作出了刻画。

研究这种自由度得出了两个重要结果。第一个结果涉及能否固定一种典范预概率参数化。我们发现，这并非总是可行，但在某些情况下，可以通过典范方式消除这种自由度。能够做到这一点时，我们将经过典范固定的表示称为准概率表示。事实上，在这种典范形式下，普适赋值 V 的表示与人们通常通过放宽柯尔莫哥洛夫正性公理，并可能将定义域扩展到复数域，所定义的标准准概率完全相似。我们发现，准概率这一几乎不可避免地出现在量子力学中的语言，是在尝试刻画普适赋值 V 时自然而连贯地涌现出来的。

尽管准概率通常被视为一种实用的计算工具，往往被认为本身并无意义，但在这里，我们从有充分动机的原则出发推导出准概率，使其成为一套独立的理论。在这种观点下，准概率是对句法宇宙中的陈述进行的一种恰当且结构化的赋值。此外，我们所构建的框架消除了人们在为标准准概率定义条件概率时通常遇到的问题，并阐明了更广义意义上的条件化究竟意味着什么，而不将其局限于标准经典概率。这使我们能够得出并定义适用于预概率和准概率的广义全概率公式与广义贝叶斯定理。在这一框架中，概率是准概率的一种特殊情形，即在相对化下保持稳定的准概率。换言之，这些准概率在从宇宙转向子宇宙或环境（扩张）宇宙时，能够表现得恰当而连贯。概率是具有稳定性这一性质的准概率。从这一视角来看，如果不把准概率视为准概率，而仅仅将其看作对普通概率的放宽，那么某些问题会失效，这并不令人意外。具体而言，失效的是这种稳定性，而要解决这一问题，就必须使用预概率。

研究为普适赋值 V 选择预概率表示的自由度，所得的第二个结果是发现了额外的结构，我们称之为语义框架。特别地，在我们的框架中，由于我们允许高度非正则的规范重参数化，准概率和概率可以自

然地取值于有理数而非无理数，而无理数则携带额外结构。这一额外结构配备了一种赋值，该赋值无法由准概率和概率本身来描述，而只能通过预概率来描述。

这是一种特殊结构，与德·菲内蒂的构造相呼应 [76]。然而，我们注意到，一旦要求额外的正则性条件（例如，在复数域上工作时要求全纯性，或在实数域上工作时要求在某一点连续），这一额外结构便会崩塌，而我们的重构则会在整个复数域/实数域上恢复准概率和概率，不再区分有理数与无理数。这种重构的一个优点，还在于凸显了这一额外假设的必要性，并表明即使没有这一假设，概率与准概率的基本结构仍会涌现。

最后，我们在附录中讨论有理数与无理数的数值实现如何与某些频率主义直觉相互作用，

从基础层面来说，我们强调，普适赋值假设 V 并非旨在对量子态的诠释表明立场。该框架关注句法宇宙上的赋值结构及其所导出的演算；它只是受到量子力学的启发，并不取决于人们如何选择诠释其底层的量子形式体系。

一旦建立起纳入预概率的、更完善的准概率理论，未来研究自然会有两个方向。首先，是发展贝叶斯意义上的推断理论。贝叶斯推断规定了应如何依据数据更新先验概率，从而在抽象的概率结构与实验实践之间搭建桥梁；本文尚未探讨这一联系。本文考察的准概率完全属于理论层面；推断框架将阐明如何在实验后更新这些准概率，进而说明如何使其与观测建立联系。标准贝叶斯推断以条件概率这一理论对象与一种操作行为之间的紧密关系为基础：一旦记录了结果，便更新概率描述。对于准概率，也可以寻求类似的关系，不过必须考虑拟概率设置特有的其他一致性要求；量子力学文献或许能为此提供有益的指引。

第二个研究方向涉及这样一个事实：人们通常不太关注不受约束的准概率理论，而更关注受约束的准概率理论。例如，在量子力学中，并非每个准概率向量都是可容许的；有意义的对象恰恰是那些满足相关约束的对象。因此，可以认为，准概率只有在受约束时才主要具有实验价值，因为它们能够作为一种简洁的方式来编码可容许性条件。从这一视角出发，对受约束准概率进行系统研究，应当能够导出保持约束的条件概率概念，以及相应版本的贝叶斯定理，并使其更新规则遵循可容许集合的结构。

十二、致谢

我感谢许多曾与我讨论这些想法的人，包括圆周理论物理研究所的量子基础研究群体，特别是 Yìlè Yˉıng 和 Rob Spekkens（关于附录的最后一部分）；Borivoje Dakić 的研究群体，特别是 Flavio Del Santo 和 Borivoje Dakić；Časlav Brukner 的研究群体，特别是 Luis Cortés Barbado 和 Časlav Brukner；以及 Matteo Scandi、Leonardo Vaglini 和 Shintaro Minagawa。本研究得到了法国政府法国2030投资计划的支持，是艾克斯-马赛大学卓越计划（Initiative d’Excellence d’Aix-Marseille Université-A*MIDEX, AMX-22-CEI-01）的一部分。

[1]C. Dhara、G. de la Torre 和 A. Acín，观测到的随机性是否能够被认证为完全内禀？物理评论快报**112**，100402（2014）。[2] A. Acín 和 L. Masanes，量子物理学中的认证随机性，《自然》**540**，213（2016）。[3] S. Meng、F. Curran、G. Senno、V. J. Wright、M. Farkas、V. Scarani 和 A. Acín，量子态的最大内禀随机性，《物理评论A》**110**，L010403（2024年）。[4]M. Herrero-Collantes 和 J. C. Garcia-Escartin，量子随机数生成器，现代物理评论**89**，015004（2017）。[5] G. Senno、T. Strohm 和 A. Acín，量子测量内禀随机性的量化 （2022），arXiv:2211.03581 [quant-ph]。[6] 这个问题呼应了 Fuchs 在4节中提出的探究：量子领域中信息的本质是什么。文中 [23], 探讨了另一种观点

。尤其是，人们可以将量子概率理解为“信念量” [77]„该词源自希腊语“doxa”，可译为“意见”；与之相对的是希腊语“episteme”，可译为“知识”。[7] 正如 A. Hájek [78]，援引 E.T. Bell 转述 B. Russell 的话所指出的：“概率是现代科学中最重要的概念，尤其是因为没有人对它的含义有丝毫头绪。”[8] A. N. Kolmogorov，《概率论基础》（Chelsea Pub. Co，1933）。[9] T. L. Fine，《概率理论：基础考察》（Academic Press，2014）。[10] H. R. Richardson 和 L. D. Stone，《蝎子号水下搜索期间的运筹分析》，《海军研究后勤季刊》18，141（1971）。[11] L. D. Stone，《最优搜索理论》，《科学与工程数学》第118卷（Academic Press，纽约，1975）。[12] L. Barone，《Bruno de Finetti 与临界线最后一段的问题》，《保险：数学与经济学》42，359（2008年）。[13] F. Pressacco 和 P. Serafini，《金融领域均值-方差方法的起源：65年后重访 de Finetti》，《经济与金融决策》30，19（2007）。[14] J. Von Neumann，《量子力学的数学基础》，新版，由 N. A. Wheeler 编（Princeton University Press，普林斯顿，2018）。[15] L. Hardy，《从五条合理公理出发的量子理论》（2001），arXiv:quant-ph/0101012。[16] L. Hardy，《重构量子理论》（2013），arXiv:1303.1538 [quant-ph]。[17] G. Chiribella、G. M. D’Ariano 和 P. Perinotti，《量子理论的信息论推导》，《物理评论A》84，012311（2011）。[18] L. Masanes 和 M. P. Müller，《从物理要求推导量子理论》，《新物理学杂志》13，063001（2011）。[19] B. Dakić 和 Č. Brukner，《量子理论及其延伸：量子纠缠是否特殊？》，载于《深层之美》，H. Halvorson 编（剑桥大学出版社，2011），第1版，第365–392页。[20] H. Barnum 和 A. Wilce，《量子理论的局部层析与约当结构》（2013），arXiv:1202.4513 [quant-ph]。[21] P. Janotta 和 H. Hinrichsen，《广义概率理论：是什么决定了量子理论的结构？》，《物理学杂志A：数学与理论》47，323001（2014）。[22] G. L. Bretthorst，《贝叶斯谱分析与参数估计》，《统计学讲义》丛书第48卷（Springer New York，纽约，纽约州，1988）。[23] C. A. Fuchs，《作为量子信息的量子力学（以及仅仅多一点点）》（2002），arXiv:quant-ph/0205039。[24] J. Barrett，《广义概率理论中的信息处理》，《物理评论A》75，032304（2007）。[25] R. Clifton、J. Bub 和 H. Halvorson，《以信息论约束刻画量子理论》，《物理学基础》33，1561（2003年）。[26] C. A. Fuchs 和 R. Schack，《通往量子态空间的量子贝叶斯路径》，《物理学基础》41，345（2011年）。[27] M. Pawłowski、T. Paterek、D. Kaszlikowski、V. Scarani、A. Winter 和 M. Żukowski，《信息因果性作为一项物理原理》，《自然》461，1101（2009年）。[28] J. H. Selby、C. M. Scandolo 和 B. Coecke，《从图解公设重构量子理论》，Quantum 5，445（2021年）。[29] A. Wilce，《通往量子理论的康庄大道（或大致如此）》，《熵：熵与信息研究国际跨学科期刊》20，227（2018年）。[30] C. Piron，《论量子物理学的基础》，载于《量子力学、决定论、因果性与粒子：纪念路易·德布罗意及其著名论文发表周年的国际文集》，M. Flato、Z. Maric、A. Milojevic、D. Sternheimer 和 J. P. Vigier 编（施普林格·荷兰，多德雷赫特，1976年），第105–116页。[31] P. Goyal，《量子理论的信息几何重构》，《物理评论A》78，052120（2008年）。[32] G. W. Mackey，《量子力学的数学基础》（多佛出版社，米尼奥拉，纽约州，2004年）。[33] E. Wigner，《关于热力学平衡的量子修正》，《物理评论》40，749（1932年）。[34]负概率：Richard P. Feynman，载于《量子学的启示：纪念戴维·玻姆文集》，B. Hiley 和 F. D. Peat 编（Routledge，1987年）。[35] J. G. Kirkwood，《近经典系综的量子统计》，《物理评论》44，31（1933年）。[36] J. E. Moyal，《作为统计理论的量子力学》，《剑桥哲学学会数学学报》45，99（1949年）。[37] R. J. Glauber，《辐射场的相干态与非相干态》，《物理评论》131，2766（1963年）。[38]D. Gross，《有限维量子系统的Hudson定理》，《数学物理学杂志》47，122107（2006年）。[39] W. K. Wootters，《有限态量子力学的维格纳函数表述》，《物理学年鉴》176，1（1987年）。[40] C. Ferrie 和 J. Emerson，《量子力学的框架表示及准概率表示中负性的必要性》，《物理学杂志A：数学与理论》41，352001（2008年）。[41] R. W. Spekkens，《负性与情境性是非经典性的等价概念》，《物理评论快报》101，020401（2008年）。

[42]H. Pashayan、J. J. Wallman 和 S. D. Bartlett，《利用准概率估计量子线路的结果概率》，《物理评论快报》115，070501（2015年）。[43] H. Zhu，《具有最小负性的量子力学准概率表示》，《物理评论快报》117，120404（2016年）。[44] D. Schmid、J. H. Selby、M. F. Pusey 和 R. W. Spekkens，《广义非情境本体模型的结构定理》，Quantum 8，1283（2024年）。[45] W. F. Braasch Jr. 和 W. K. Wootters，《作为一组认知受限的经典预言的量子预言》，Quantum 6，659（2022年）。[46] J. Surace，《不可及信息理论》，Quantum 8，1464（2024年）。[47] M. Lostaglio、A. Belenchia、A. Levy、S. Hernández-Gómez、N. Fabbri 和 S. Gherardini，《用于不相容可观测量统计的Kirkwood-Dirac准概率方法》，Quantum 7，1128（2023年）。[48] A. Levy 和 M. Lostaglio，《量子体制下热涨落的准概率分布》，PRX Quantum 1，010309（2020年）。[49] B. 德·菲内蒂，《概率论：批判性导论》（约翰·威利父子出版公司，英国奇切斯特、美国新泽西州霍博肯，2017年）。[50] L. E. Dubins、L. J. Savage、W. D. Sudderth、D. Gilat 和 L. E. Dubins，《不得不赌时如何下注：随机过程不等式》，多佛版（多佛出版社，米尼奥拉，纽约，2014年）。[51]R. 卡尔纳普，《概率的逻辑基础》（芝加哥：芝加哥大学出版社，芝加哥], 1950 ）。

[52] S. H. 杰弗里斯，《概率论》，第三版，牛津物理科学经典文本（牛津大学出版社，牛津、纽约，1998年）。[53] R. T. Cox，《概然推理代数》（约翰斯·霍普金斯大学出版社，2001年）。[54] 杰恩斯，《概率论：科学的逻辑》，G. L. Bretthorst 编（剑桥大学出版社，剑桥，2003年）。[55] A. Caticha，《量化理性信念》，AIP会议论文集1193，60（2009年）。[56] K. H. Knuth，《格对偶：概率与熵的起源》，《神经计算：神经网络与学习中的几何方法》，67，245（2005年）。[57] 拉姆齐，《真理与概率》，载于《形式认识论读本：资料集》，H. Arló-Costa、V. F. Hendricks 和 J. van Benthem 编（施普林格国际出版公司，查姆，2016年），第21–45页。[58] B. 德·菲内蒂，《概率主义：关于概率论与科学价值的批评论文》（Logos，哲学文库，意大利，1931年）。[59] 萨维奇，《统计学基础》（约翰·威利父子出版公司，纽约，1954年）。[60] 杰弗里，《决策逻辑》，d. edition 编（芝加哥大学出版社，伊利诺伊州芝加哥，1990年）。[61] J. M. Bernardo 和 A. F. M. Smith，《贝叶斯理论》，《测量科学与技术》12，221（2001）。[62] E. Regazzini，《德·菲内蒂对可数可加性的批判之源》，载于《现代统计理论与应用进展：纪念 Morris L. Eaton 文集》，第 10 卷（数理统计学会，2013年），第 63–83 页。[63] C. Howson，《德·菲内蒂、可数可加性、一致性与相干性》，《英国科学哲学杂志》59，1（2008年）。[64] G. Boole，《思维规律》（Prometheus，阿默斯特，纽约州，2003年）。[65] 具体而言，这个布尔代数可以构造为经典命题逻辑的林登鲍姆–塔斯基代数，即通过对公式施加纯句法的等价关系并取商而得。[66]句法局部性仅指陈述的布尔宇宙之间的嵌入/限制关系（粗粒化和主理想）。它并非关于时空、信号传递或因果结构的局部性假设。这个术语旨在凸显子宇宙在逻辑演算中类似子系统的作用。[67] 以下所有内容也可以类似地表述为一个赋值 $\tilde{V}\colon\ \mathcal{L}\to$ 只需将复数域替换为实数域即可。由于（复数域 $+$，0）与（实数域 $+$，0）同构，定理 1 的证明将完全相同。一般而言，任何与（复数域 $+$，0）同构的群都适用于定理 1 的证明。因此，表示可以在实数上可加，也可以例如在四元数上可加。我们在表述定理时采用复数，因为我们关注量子力学中的准概率，而准概率最一般地表示为复数向量，例如柯克伍德–狄拉克分布 [79, 80] 或任何一般框架 [81–83]。[68] 特别是，柯西函数方程的大多数可加解都可以通过选择实数域（或视为有理数向量空间的复数域）的哈梅尔基来构造，这需要选择公理。定理 1 的证明已经用到了选择公理。[69] 提醒读者，我们将讨论范围限定在所有局部宇宙均源自同一个环境宇宙，且其赋值由全局赋值限制而得的情形。[70] 选择 $\top$ 作为参考陈述很自然，因为每个宇宙都有一个顶元，而且这不会从任何特定宇宙中挑出某个特定陈述。任何其他选择都将取决于具体的宇宙。例如，要求某个特定陈述 $s\in\mathcal{L}$ 的预概率取值为 1，无法推广到缺少 s 的宇宙。同样，要求“最左侧的原子陈述”的预概率取值为 1，也不具有布尔格同构不变性，因为布尔格同构可能会置换原子陈述。[71] 这只是一种约定：可以用任何非零值替代 1，例如 $R'(\top)=-\sqrt{2}+$

$i\pi$，而讨论内容不会因此改变。唯一无法规定的值是 $R'(\top) = 0$，因为没有任何 a-函数能将非零数映射为 0。我们选择 $R'(\top) = 1$，使典范代表与标准准概率和概率归一化相一致。[72] 无论是在全为负值的赋值中，还是在全为正值的赋值中，0 始终包含在内。[73] J. Aczel、J. D. Aczél、J. Aczél 和 J. Dhombres，《多变量函数方程》（剑桥大学出版社，1989年）。[74] R. V. Churchill 和 J. W. Brown，《复变函数及其应用》，第九版，Brown and Churchill 系列（麦格劳-希尔教育，纽约，纽约州，2014年）。[75] 即使增加正则性条件，本文的结果也可以表述为一个赋值 $\tilde{V}\colon \mathcal{L} \to$ 只需将复数域替换为实数域即可。由于（复数域 $+$，0）与（实数域 $+$，0）同构，定理 1 的证明将完全相同。一般而言，任何与（复数域 $+$，0）同构的群都适用于定理 1 的证明。因此，表示可以在实数上可加，也可以例如在四元数上可加。[76] B. 德·菲内蒂，《概率的主观意义》，Fundamenta Mathematicae 17，298（1931年）。[77] B. C. Stacey，《通往 QBism 途中被放弃的想法》（2019年），arXiv:1911.07386 [quant-ph]。[78] A. Hájek，《概率的诠释》，载于《斯坦福哲学百科全书》，E. N. Zalta 和 U. Nodelman 编（形而上学研究实验室，斯坦福大学，2023年），2023年冬季版。[79] M. Lostaglio、A. Belenchia、A. Levy、S. Hernández-Gómez、N. Fabbri 和 S. Gherardini，《用于不相容可观测量统计的柯克伍德–狄拉克准概率方法》，Quantum 7，1128（2023年）。[80] D. Schmid、R. D. Baldijão、Y. Y¯ıng、R. Wagner 和 J. H. Selby，《超越量子态的柯克伍德–狄拉克表示及其与非语境性的关系》，《物理评论A》110，052206（2024年）。[81] C. Ferrie 和 J. Emerson，《量子力学的框架表示及准概率表示中负性的必要性》，《物理学杂志A：数学与理论》41，352001（2008年）。[82] C. Ferrie 和 J. Emerson，《框架化希尔伯特空间：悬置量子理论的准概率图景》，《新物理学杂志》11，063040（2009年）。[83] C. Ferrie，《量子理论的准概率表示及其在量子信息科学中的应用》，《物理学进展报告》74，116001（2011年）。[84] 主理想 $\downarrow(a \vee b)$ 和 $\downarrow(b \vee c)$。[85] 这个证明需要选择公理。[86] L. Fuchs，《可除性与内射性》，载于《阿贝尔群》，L. Fuchs 编（施普林格国际出版公司，查姆，2015年），第 131–148 页。[87] 这里的讨论保持非形式化。在 Cox–Jaynes 传统中，人们对 $w(A \mid B)$ 施加一致性约束（和规则与积规则，以及较弱的正则性假设），然后

表明它可以重新定级为一个普通概率函数。[88] A. Hájek，《Mises redux》——再论：反对有限频率主义的十五条论证，Erkenntnis。《国际科学哲学杂志》**45**，209（1996年）。[89] A. Hájek，《反对假想频率主义的十五条论证》，Erkenntnis。《国际科学哲学杂志》**70**，211（2009年）。

附录 A：定理 1 的证明

1. 原子的赋值可以自由选择

开始主要证明之前，先证明下面这个引理会很有帮助。

引理 8. 固定 $n \geq 1$ 以及值 $x_1, \ldots, x_n \in$ 复数域。那么对于任何具有原子 $a_1, \ldots, a_n$ 的宇宙 $\mathcal{L}_n$，都存在一个可容许赋值 $V\colon \mathcal{L}_n \to$ 复数域，使得对于所有 i，$V(a_i) = x_i$。

证明。考虑 $\mathcal{S} := \{\bot, a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathcal{L}_n$，并定义部分赋值 $p\colon \mathcal{S} \to$ 复数域如下：

$$p(\bot) = \varphi, \qquad p(a_i) = x_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

首先可以看出，p 是相容的部分赋值。事实上，根据构造，$p(\bot) = \varphi$ 成立。此外，$\mathcal{L}$ 的任何包含 $\mathcal{S} \setminus \{\bot\}$ 中多个元素的子宇宙都不能包含于 $\mathcal{S}$中，因为 $\mathcal{S}$ 不包含任何原子的并。因此，对值$p(a_i)$没有施加任何可推导性约束，且 p 是相容的。根据原理 IV，p 可扩展为可容许赋值 $V \in \mathcal{V}(L_n)$。特别地，对于所有 $i = 1, \ldots, n$，$V(a_i) = p(a_i) = x_i$。 □

2. V 相对于 $\vee$的行为：定理1的证明概要

在开始之前，我们定义两个函数 G : 复数域^2 →复数域 和 K : 复数域^2 →复数域，使得对于宇宙 $\mathcal{L}$的任意子宇宙 $\mathcal{L}_2$，下列等式成立

$$V(a \vee b) = \mathsf{D}_{2,2}(V(a), V(b)) := \mathsf{G}\big(V(a), V(b)\big), \qquad V(a) = \mathsf{D}_{2,1}(V(a \vee b), V(b)) := \mathsf{K}\big(V(a \vee b), V(b)\big)$$

这些函数的存在性由局部可推导性原则所保证；并且由于普遍性，对于任何具有两个原子陈述的子宇宙上的任意 V，都可以使用这同一个函数。

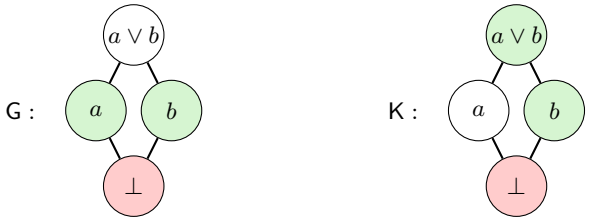

图 7. 由于局部可推导性原则（原理 ii），格中白色元素的赋值完全由格中绿色元素所确定。由于普遍性（原理 iii），a 与 b确定 $a \vee b$的方式，以及 b 与 $a \vee b$、确定 a 的方式是普遍的。我们将白色元素与绿色元素之间的关系，在左侧情形中等同于函数 G，在右侧情形中等同于 K。

我们将通过 G 来刻画赋值 V。由于刻画 G 的过程较长，我们按照下文概述的结构将其分步进行。

a. 第 ***1*** 部分：$(\text{复数域}, \mathsf{G}\ \varphi)$ 是一个可消去、交换、无挠幺半群。在第一部分中，我们将证明，原理 (i),(ii),(iii) 和 (iv蕴含函数 G 对任意$x, y, z \in$ 复数域 均具有以下性质：

- $\mathsf{G}(x, y) = \mathsf{G}(y, x)$ “交换性”（参见第 A 2 aa 节），
- $\mathsf{G}(x, \mathsf{G}(y, z)) = \mathsf{G}(\mathsf{G}(x, y), z)$ “结合性”（参见第 A2 a b 节），
- $\mathsf{G}(x, \varphi) = x$ “中性元”（参见第 A 2 ad 节），
- $\mathsf{G}(x, y) = \mathsf{G}(x, z) \implies y = z$ “可消去”（参见第 A 2a c）。

本质上我们将证明，原则（i）、（ii）、（iii）蕴含（复数域，G φ）**是一个可消去交换幺半群**。有了这一结构，我们将看到，在每个格 $\mathcal{L}$上，每个 V 完全由其在 $\mathcal{L}$ 的原子陈述上的取值所刻画。随后，要求G满足原则（v），我们将得到（复数域，G φ）**是一个可消去、交换、无挠的可除幺半群**。

b. 第 ***2*** 部分：将(复数域，G φ)映射到(复数域 $+$，0) 在本部分中，我们证明主定理，即预概率映射 ϕ 在群自同构意义下的存在性与唯一性，该映射允许将每个赋值 V 双射地映射到一个预概率，即一个在原子陈述的上确界上可加的赋值 R

$$V \overset{\phi}{\mapsto} R \mid R(s_i \vee s_j) = R(s_i) + R(s_j) \qquad \text{with } s_i, s_j \text{ atomic statements.} \tag{A1}$$

为此，我们证明满足使用可除群结构定理的条件，从而证明 (复数域，G φ) 同构于 (复数域 $+$，0)，由此证明该定理，并得到预概率映射ϕ是一个双射同态，将 (复数域，G φ) 映射到 (复数域 $+$，0)。

a. 第 ***1*** 部分：(复数域，G φ)是一个可消去、交换、无挠幺半群。

a. 交换性我们考虑图 8 中的两个格 $\mathcal{L}_2$ 。



图 8。右侧的子宇宙是通过布尔格同构得到的，该同构 β_s 定义于公式 (A2)

我们定义布尔格同构

$$\beta(\bot) = \bot, \qquad \beta(a) = b, \qquad \beta(b) = a, \qquad \beta(a \vee b) = a \vee b. \tag{A2}$$

根据局部可推导性和普遍性，我们有

$$V(a \vee b) = \mathsf{G}(V(a), V(b)), \qquad V(a \vee b) = \mathsf{G}(V(b), V(a)).$$

由此可直接得出

$$\mathsf{G}(V(a), V(b)) = \mathsf{G}(V(b), V(a)),$$

并且由于这对每个 V 都必须成立，因此 G **是交换的**。

b. 结合性 我们考虑宇宙 $\mathcal{L}_3$ 在图 9左侧所示的两个子宇宙。对于它们，我们有

$$V(a \vee b \vee c) = \mathsf{G}\left(V(a \vee b), V(c)\right),$$
$$V(a \vee b \vee c) = \mathsf{G}\left(V(a), V(b \vee c)\right).$$

我们还考虑两个子宇宙 [84] 在图9右侧所示的两个子宇宙，对于它们，我们有

$$V(a \vee b) = \mathsf{G}\left(V(a), V(b)\right), \tag{A3}$$
$$V(b \vee c) = \mathsf{G}\left(V(b), V(c)\right). \tag{A4}$$

综上所述，我们有

$$\mathsf{G}\left(\mathsf{G}\left(V(a), V(b)\right), V(c)\right) = \mathsf{G}\left(V(a), \mathsf{G}\left(V(b), V(c)\right)\right).$$

这对每一个 V 都必须成立，因此 G **是结合的**。

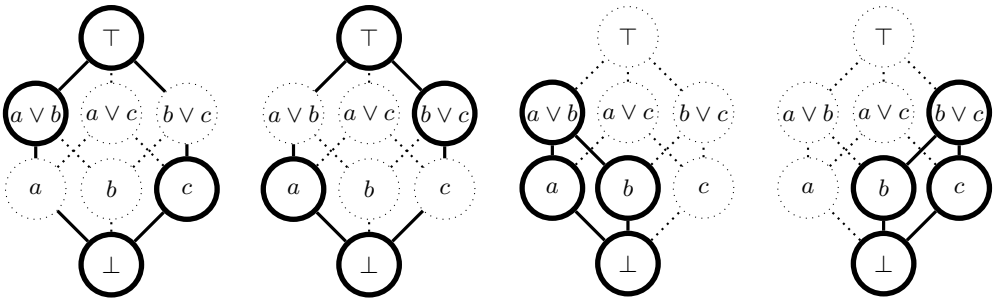

图 9. 四个格 $\mathcal{L}_3$ 及其突出显示的子格，左边两个是布尔子格，右边两个是主理想。

c. 消去性 考虑宇宙 $\mathcal{L}_2 = \{\bot, a, b, a \vee b\}$ 以及

$$V(b) = \mathsf{K}(V(a \vee b), V(a)). \tag{A5}$$

设 $x := V(a)$ 和 $y := V(b)$。由引理 8 及 $n = 2$，对于每一对 $(x, y) \in \mathsf{C}^2$，都存在一个 2原子宇宙 $\mathcal{L}_2 = \{\bot, a, b, a \vee b\}$ 及其赋值 V，使得 $V(a) = x$ 且 $V(b) = y$。因此，上述恒等式对所有 $x, y \in C$ 均成立，即

$$\mathsf{K}(\mathsf{G}(x, y), x) = y \qquad \forall x, y \in C. \tag{A6}$$

现在假设 $\mathsf{G}(x, y) = \mathsf{G}(x, z)$。将 $\mathsf{K}(\,\cdot, x)$ 应用于两边，并利用 (A6)，得到 $y = z$。因此 G**是可消去的**。

d. 中性元 我们证明 φ是 G 的中性元。

首先，很容易看出，只要化归到经典真值赋值，φ 就是 G 的中性元。设 $\mathcal{L}_2 = \{\bot, a, b, a \vee b\}$ 是一个2原子宇宙。考虑 $\mathcal{L}_2$上的经典真值指派，其中 a 为真，b为假。根据经典相容性，存在 $\mathcal{L}_2$ 上的可容许赋值 V 实现这一指派，即

$$V(\bot) = \varphi, \qquad V(a) = \tau, \qquad V(b) = \varphi, \qquad V(a \vee b) = \tau.$$

因此，我们有

$$\mathsf{G}(\tau, \varphi) = \tau, \tag{A7}$$

并且由复数域的交换性，还可得复数域$(\varphi, \tau) = \tau$。现在任取一个 $x \in$复数域。由引理8结合$n = 3$，存在一个3-原子宇宙 $\mathcal{L}_3$，其原子为 a, b, c，以及一个可容许赋值 W，使得

$$W(a) = x, \qquad W(b) = \varphi, \qquad W(c) = \tau.$$

利用复数域 G 的结合性，我们计算

$$\mathsf{G}\big(\mathsf{G}(W(a), W(b)),\, W(c)\big) = \mathsf{G}\big(W(a),\, \mathsf{G}(W(b), W(c))\big).$$

代入 $W(a) = x$, $W(b) = \varphi$, $W(c) = \tau$，得到

$$\mathsf{G}\big(\mathsf{G}(x, \varphi),\, \tau\big) = \mathsf{G}\big(x,\, \mathsf{G}(\varphi, \tau)\big).$$

利用复数域$(\varphi, \tau) = \tau$，由（A7）可得

$$\mathsf{G}\big(\mathsf{G}(x, \varphi),\, \tau\big) = \mathsf{G}(x, \tau). \tag{A8}$$

利用复数域的交换性，方程（A8）可改写为

$$\mathsf{G}\big(\tau,\, \mathsf{G}(x, \varphi)\big) = \mathsf{G}(\tau, x).$$

利用消去性 G，我们得出

$$\mathsf{G}(x, \varphi) = x.$$

最后，由交换性也可得 $\mathsf{G}(\varphi, x) = x$。因此，$\varphi$ **是 G 的中性元**。

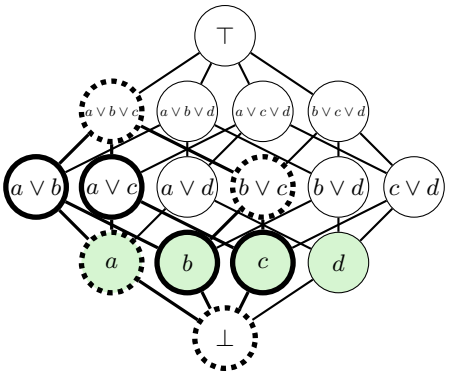

图1。一个宇宙 $\mathcal{L}_4$。从已知原子陈述（绿色）上的 V 值出发，可以计算所有其他陈述上的 V 值。尤其是，为了计算 $V(a\vee b\vee c)$，必须考虑 $\downarrow(a\vee b\vee c) = \{\bot, a, b, c, a\vee b, a\vee c, b\vee c, a\vee b\vee c\}$（以较粗的线突出显示）以及该素理想的一个布尔子格（虚线）。

e. 根据 V 在原子陈述上的取值对其进行刻画 考虑任意宇宙 $\mathcal{L}$。我们注意到，赋值 $V(s_i)$ 在原子陈述 $\{s_i\}_i$ 上的取值，完全决定了 V 在该宇宙每个陈述上的取值。事实上，可以直接根据 V 在原子陈述上的取值，重构 V 对任意原子陈述上确界的取值。例如，对于两个不同的原子陈述 $s_i \neq s_j$， $V(s_i \vee s_j)$ 的取值可简单表示为 $\mathsf{G}\,(V(s_i)\ V(s_j))$。若要确定三个不同原子 $s_i \vee s_j \vee s_k$ 的上确界的取值，可考虑任意一个构成布尔子格 $\mathcal{L}_2$ 的子宇宙，该子格包含于素理想 $\downarrow(s_i \vee s_j \vee s_k)$，然后再次使用 G。例如（见图1），要计算 $V(a\vee b\vee c)$，可考虑主理想 $\downarrow(a\vee b\vee c)$，并聚焦于其子宇宙 $\{\bot, a, b\vee c, a\vee b\vee c\}$。在这个子宇宙中，我们有

$$V(a\vee b\vee c) = \mathsf{G}\,(V(a), V(b\vee c)) = \mathsf{G}\,(V(a), \mathsf{G}\,(V(b), V(c)))\,, \tag{A9}$$

其中 $V(b\vee c) = \mathsf{G}\,(V(b)\ V(c))$ 是从子宇宙 $\downarrow(b\vee c)$ 计算得出的。这样，同样的方法可以推广到计算任意宇宙 $\mathcal{L}$ 中每个元素上的 V 值，而只需使用其在原子陈述上的值。一般而言，对于原子陈述指标的任意一组互不重复的指标 $\{i_j\}_j$，以下关系成立

$$V\left(\bigvee_j s_{i_j}\right) = \mathsf{G}\,(s_{i_1}, \mathsf{G}\,(s_{i_2}, \mathsf{G}\,(s_{i_3}, \dots)))\,. \tag{A10}$$

f. 无挠性与整除性 我们为每个 $n \in \mathsf{N}_{>0}$ 定义以下函数

$$\begin{cases} \mathsf{G}^{(n)}\,(x) = \mathsf{G}\left(x, \mathsf{G}^{(n-1)}\,(x)\right), \\ \mathsf{G}^{(1)}\,(x) = x. \end{cases} \tag{A11}$$

原理 (v) 告诉我们，对于原子陈述的每一组互不重复的指标 $\{i_j\}_j$ 以及一个值$y \in$ 复数域 都恰有一个 V使得 $V(\bigvee_j s_{i_j}) = y$且 $V(^{s_{i_j}}) = V(^{s_{i_{j'}}})$ 对于每个 j， j'。

现在固定 $n \geq 1$ 并令 $s = \bigvee_{j=1}^{n} s_{i_j}$ 为 n 个不同原子的上确界。施加对称条件，令所有这些原子具有相同的赋值，即 $V(^{s_{i_j}}) = x$ 对每个 j都成立。于是，根据方程 A10 和结合性，上确界的值仅取决于 x ，并由 n 重复迭代 G 给出:

$$V\left(\bigvee_{j=1}^{n} s_{i_j}\right) = \mathsf{G}^{(n)}(x).$$

这意味着 在 V（s）$= y$ 等价于 $G^{(n)}$（x）$= y$。因此，原理 v 正是这一陈述 nt

$$\forall\ y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_{>0}\ \exists!\ x \in \mathbb{C} \mid \mathsf{G}^{(n)}\,(x) = y. \tag{A12}$$

回想一下 即 φ 是 G 的中性元，性质（A12）意味着 G **是无扭的** **ee**:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_+,\ \mathsf{G}^{(n)}(x) = \varphi \iff x = \varphi \qquad \text{“}\textit{torsion-free}\text{”}.$$

由（A12）可直接得出，G **是可除的**:

$$\forall\, y \in \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{N}_{>0}, \exists\, x \in \mathbb{C} \mid \mathsf{G}^{(n)}(x) = y \qquad \text{“}\textit{divisibility}\text{”}.$$

b. 第 ***2*** 部分：主定理的证明

a. ***G*** 的性质 本部分开始时，我们回顾 G 的所有推导性质
根据原则（i）、（ii）、（iii）、（iv）、（v），函数 G： 复数域 ×复数域 → 复数域 满足以下性质:

1. $\mathsf{G}(x,y) = \mathsf{G}(y,x)$ “*commutativity*”,
2. $\mathsf{G}(x, \mathsf{G}(y,z)) = \mathsf{G}(\mathsf{G}(x,y), z)$ “*associativity*”,
3. $\mathsf{G}(x,\varphi) = x$ “*neutral element*”,
4. $\mathsf{G}(x,y) = \mathsf{G}(x,z) \implies y = z$ “*cancellative*”.

结合性质（v），我们还可知 G 满足:

5. $\forall\, n \in \mathrm{N}_+,\ \mathsf{G}^{(n)}(x) = \varphi \iff x = \varphi$ “*torsion-free*”
6. $\forall\, y \in$ 复数域 $\forall\, n \in \mathrm{N}_{>0}, \exists\, x \in$ 复数域 $\mid \mathsf{G}^{(n)}(x) = y$ “*divisibility*”

b. 主定理的证明

定理 1. 存在一个双射 ϕ : 复数域 → 复数域，我们称之为预概率映射，使得 R : $\mathcal{L}$ → 复数域 由 $R = \phi \circ V$ 定义，满足以下条件:

1. 对于原子陈述 $\{i_j\}_j$ 的任意一组互不相同的指标，

$$R\left(\bigvee_j s_{i_j}\right) = \sum_j R(s_{i_j}), \tag{3}$$

2. $R(\bot) = 0$,

3. 对每个 $s \in \mathcal{L}$,

$$R(\neg s) = R(\top) - R(s). \tag{4}$$

我们称 R 为预概率。

证明。 由于方程（A10）证明定理 1等价于证明定理 1 的以下改述:

存在一个双射 ϕ： 复数域 →复数域，我们称之为**预概率映射**，使得 t

$$\phi(\mathsf{G}(x,y)) = \phi(x) + \phi(y). \tag{A13}$$

此外 $\phi(\varphi) = 0$。

为证明这一点，我们首先固定 $y \in$复数域，并定义映射

$$\mathsf{G}_y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \mathsf{G}_y(x) := \mathsf{G}(x, y).$$

消去性意味着 G_y 是单射。为证明它是满射，任取 $z \in$ 复数域 C，并考虑宇宙 $\mathcal{L}_2 = \{\bot, a, b, a \vee b\}$ 以及子集 $\mathcal{S} := \{\bot, b, a \vee b\} \subseteq \mathcal{L}_2$。定义部分赋值 p: $\mathcal{S} \to$ 复数域 C 如下:

$$p(\bot) = \varphi, \qquad p(b) = y, \qquad p(a \vee b) = z.$$

这个部分赋值是一致的，因此根据原理（iv），它可以扩展为一个可容许赋值 $V : \mathcal{L}_2 \to$ 复数域 C。令 $x := V(a)$，即可得到

$$z \;=\; V(a \vee b) \;=\; \mathsf{G}(V(a), V(b)) \;=\; \mathsf{G}(x, y) \;=\; \mathsf{G}_y(x),$$

因此 G_y 也是满射。于是，对每个 $y \in$ 复数域 C，映射 G_y 都是双射；特别地，取 $z = \varphi$，对于每个 $y \in$ 复数域 C，都存在一个元素 $y^{-1} \in$ 复数域 C，使得 $\mathsf{G}(y^{-1},\ y) = \varphi$。由交换性，同样有 $\mathsf{G}(y,\ y^{-1}) = \varphi$，所以每个元素都有一个双边逆元，且 (复数域 C，G φ) 是一个阿贝尔群。

由于 复数域上 G φ 的可除性和无挠性，(复数域，G φ) 是一个可除无挠阿贝尔群 .

下一步是证明 (复数域, G φ) 同构于 (复数域 $+$)，从而存在一个群同构ϕ，将 (复数域, G φ) 映射到 (复数域 $+$)。利用可除群结构定理 [85]（ [86]中的定理 3.1），我们知道，由于 (复数域, G φ) 是一个无挠可除阿贝尔群，它同构于若干个有理数域的直和，即存在一个基数 κ 使得

$$(\mathbb{C}, \mathsf{G}, \varphi) \cong \left(\bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q}, +_{\cdot} \right),$$

其中 $+_{\cdot}$ 表示逐分量加法。同时，(复数域 $+$) 同构于 ($\bigoplus_{2^{\aleph_0}}$有理数域 $+_{\cdot}$)（ [86]中的练习 3.2）。因此，要得出结论

$$(\mathbb{C}, \mathsf{G}, \varphi) \cong (\mathbb{C}, +),$$

只需证明 $\kappa = 2^{\aleph_0}$。

由于 $|\bigoplus_{\kappa} \mathsf{Q}| = \kappa$ 且 (C，G φ) $\cong$($\bigoplus_{\kappa}$ Q $+_{\cdot}$)，因此

$$|\mathbb{C}| = \left| \bigoplus_{\kappa} \mathbb{Q} \right| = \kappa.$$

因为 $|\mathsf{C}| = 2^{\aleph_0}$，我们得出 $\kappa = 2^{\aleph_0}$。因此，

$$(\mathbb{C}, \mathsf{G}, \varphi) \cong \left(\bigoplus_{2^{\aleph_0}} \mathbb{Q}, +_{\cdot} \right) \cong (\mathbb{C}, +),$$

因此存在群同构 ϕ: (C，G φ) $\to$(C $+$)。

综上，我们得到

$$(\mathbb{C}, \mathsf{G}, \varphi) \xrightarrow{\phi} (\mathbb{C}, +, 0).$$

我们称这个双射 ϕ： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 一个预概率映射，其具有 $\phi(\varphi) = 0$ 并定义该预概率 y

$$R := \phi \circ V. \tag{A14}$$

由刚刚证明的同构，我们有

$$\phi(\mathsf{G}(x, y)) = \phi(x) + \phi(y).$$

我们刚刚证明了第 1. 点和第 2.点。现在证明第 3. 部分。对于每个 $s \in \mathcal{L}$，我们有

$$\mathsf{G}\,(V(s), V(\neg s)) = V(s \vee \neg s) = V(\top),$$

映射到预概率，我们有

$$\phi\left(\mathsf{G}\left(V(s), V(\neg s)\right)\right) = \phi(V(\top)),$$

即

$$\phi(V(s)) + \phi(V(\neg s)) = R(\top),$$

即

$$R(s) + R(\neg s) = R(\top),$$

最后

$$R(\neg s) = R(\top) - R(s).$$

□

附录 B：证明

1. 引理 1 的证明1

引理 1. 设 $\mathcal{L}$ 是一个具有 $n \geq 2$ 个原子的宇宙，且令 $V: \mathcal{L} \to$ 复数域 满足局部可推导性和普遍性。若存在 $x \in$ 复数域 使得

$$V(a) = x \qquad for\ all\ a \in \mathrm{Atoms}(\mathcal{L}),$$

那么 V 在宇宙的每个层级上都是常数：对于每个 $l = 1$、……、n，都存在 $v_l \in$ 复数域 使得

$$V(s) = v_l$$

对于层级 l 上的每个陈述 s，

证明。固定 $n \geq 2$，并假设 V 满足局部可推导性和普遍性。此外，假设 V 在原子上为常数，即存在 $x \in$复数域，使得

$$V(a) = x \qquad \text{for all } a \in \mathrm{Atoms}(\mathcal{L}).$$

我们对陈述的层级 l 进行归纳，证明 V 在层级 l 的所有元素上都是常数。

首先，我们证明该结论对 $l = 1$ 成立。层级 1 的陈述就是原子，因此该结论对 $v_1 = x$ 成立。

现在假设对于某个 $l \geq 2$，该结论对层级 1、2、……、$l-1$ 的所有陈述都成立，也就是说，对于每个 $r < l$，都存在一个数 $v_r \in \mathsf{C}$，使得 $V(t) = v_r$ 对层级为 r 的每个陈述 t 都成立。考虑一个层级为 l 的陈述 $t \in \mathcal{L}$，以及其主理想 $\downarrow t$ 的子宇宙（其中有 l 个原子陈述）。根据局部可推导性原则和普遍性，存在一个推导函数 $\mathsf{D}_{l,\,l}$，使得

$$V(t) = \mathsf{D}_{l,l}\big(\underbrace{v_1, \ldots, v_1}_{\binom{l}{1}}, \underbrace{v_2, \ldots, v_2}_{\binom{l}{2}}, \ldots, \underbrace{v_{l-1}, \ldots, v_{l-1}}_{\binom{l}{l-1}}\big) \tag{B1}$$

˜其中输入数据来自我们的归纳假设。现在考虑任意另一个层级为l 的陈述 t，并以同样的方式进行推导，得到

$$V(\tilde{t}) = \mathsf{D}_{l,l}\big(\underbrace{v_1, \ldots, v_1}_{\binom{l}{1}}, \underbrace{v_2, \ldots, v_2}_{\binom{l}{2}}, \ldots, \underbrace{v_{l-1}, \ldots, v_{l-1}}_{\binom{l}{l-1}}\big). \tag{B2}$$

由于输入相同，归纳步骤得证。由于我们已证明该结论对 $l = 1$ 成立，因此引理得证。

□

2. 引理 2 的证明2

在定理 1中，我们证明了存在一个作用于赋值函数的双射，使得我们可以得到可加性。该定理并未说明这个双射的唯一性；事实上，这个双射通常根本不是唯一的。选择 ϕ 时所拥有的自由度由以下定理给出。

引理 2. 预概率映射 ϕ 在与一个可加函数复合的意义下是唯一的；这种加性规范重参数化称为 a-函数，也就是说，它是一个双射 a ：复数域 $\to$ 复数域，满足柯西函数方程

$$a(x + y) = a(x) + a(y).$$

证明。 假设在定理 1 的证明中， ϕ_1, ϕ_2: (复数域, G φ) $\to$(复数域 $+$) 是两个有效的同构。那么复合映射 $a_{2,\,1} := \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ 是 (复数域 $+$) 的一个自同构，并且 $\phi_2 = a_{2,1} \circ \phi_1$。因此，如果 ϕ 是一个预概率映射，那么对于任意自同构 a: (复数域 $+$) $\to$(复数域 $+$)， $a \circ \phi$ 也是一个预概率映射。(复数域 $+$) 的自同构 a 是从复数域 C 到 C 的任意双射，且保持群结构，也就是说，对于所有 $x, y \in \mathsf{C}$，都有 $a(x, y) = a(x) + a(y)$。 □

3. 引理3

引理 3。 给定一个含有 n 个原子陈述的宇宙 $\mathcal{L}$，以及一个预概率 $R:\ \mathcal{L}\to$复数域，考虑任意a-函数和一个新的预概率 $R' := a \circ R$。那么：

1. 如果 $s \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$ 那么 $R(s) \neq 0$。

2. 所有语义框架 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$具有相同的语义维数。

3. 所有语义框架均独立于 a。它们仅取决于赋值 V。

4. 总存在一个仅由原子陈述组成的语义框架，因此语义维数m 有界，如 $m \leq n$。

5. 如果 R' 满足

$$R'(s_j) = R(s_j) \quad for\ all\ j = 1, \ldots, m,$$

then

$$R'(s) = R(s) \quad for\ all\ s \in \mathcal{L}.$$

证明。 我们先证明，任何满足柯西可加性的 a: 复数域 $\to$ 复数域 都是

$$a(x+y) = a(x) + a(y) \qquad (\forall x, y \in \mathbb{C})$$

有理数域上线性的。

令 $x = y = 0$，得到 $a(0) = a(0) + a(0)$，因此 $a(0) = 0$。此外，$0 = a(x + (-x)) = a(x) + a(-x)$，所以$a(-x) = -a(x)$。对于 $n \in$N，

$$a(nx) = a(\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ times}}) = \underbrace{a(x) + \cdots + a(x)}_{n \text{ times}} = n\, a(x),$$

利用可加性，通过归纳法可得。对于 $n \in$ Z，我们利用 $a(-x) = -a(x)$ 将此结论推广到负整数：$a(nx) = n\, a(x)$。现在固定 $q \in$ N。我们知道

$$a(qx) = q\, a(x).$$

将 x 替换为 x/q 并反复使用可加性，可得

$$a(x) = a\left(q \cdot \frac{x}{q}\right) = q\, a\left(\frac{x}{q}\right),$$

因此 $a(x/q) = a(x)/q$。所以，对于任意 $p \in$ Z 和 $q \in$N，

$$a\left(\frac{p}{q}x\right) = p\, a\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q}\, a(x).$$

因此，对所有 $r \in$ Q，$a(rx) = r\, a(x)$，也就是说，a 在有理数域上线性。

从现在起，设 $R:\ \mathcal{L} \to$复数域是一个预概率，并设 $R' := a \circ R$，其中某个 $a - function\ a$。回顾一下，语义框架 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$ 是一组极大的陈述 $\{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq \mathcal{L}$，满足 $\{R(s_1) \ldots, R(s_m)\}$ 在有理数域上线性无关；其基数 m 就是语义维数。

1. 如果 $s \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$，那么 $R(s) \neq 0$。

事实上，如果 $R(s) = 0$，那么 $\{R(s)\}$ 在有理数域上线性相关（因为例如 $1 \cdot R(s) = 0$），这与 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$ 在有理数域上线性无关相矛盾。

2. 所有语义框架 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$ 都具有相同的语义维数。

Let

$$W_R := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{R(s) : s \in \mathcal{L}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

根据极大性，集合 $\{R(s) : s \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)\}$ 是 W_R 的 Q-基。同一向量空间的任意两个 Q-基具有相同的基数，因此每个语义框架的大小均为 $\dim_{\mathbb{Q}}(W_R)$。

3. 所有语义框架都与 a 无关（因此只取决于 V）。

由于 a 是有理数域上线性且单射的，对于任意有限族 $\{t_j\}$，

$$\sum_j q_j R(t_j) = 0 \iff a\left(\sum_j q_j R(t_j)\right) = 0 \iff \sum_j q_j a(R(t_j)) = 0 \iff \sum_j q_j R'(t_j) = 0,$$

对所有 $q_j \in \mathbb{Q}$。因此，$\{R(t_j)\}$是Q-独立的，当且仅当 $\{R'(t_j)\}$ 是Q-独立的。因此，陈述的极大Q-独立集，即语义框架，对于 R 和 R'是相同的。特别地，如果 R 和 R' 是通过选择不同的预概率映射，从同一个底层赋值 V 得到的两个预概率，那么它们具有相同的语义框架。

4. 总存在一个仅由原子陈述组成的语义框架，因此 $m \leq n$

将 $\mathcal{L}$ 的 n 个原子记为 $s_1^{\mathrm{at}}, \ldots, s_n^{\mathrm{at}}$。每个 $s \in \mathcal{L}$ 都是其下方原子的上确界，设为 $s = \bigvee_{i \in I_s} s_i^{\mathrm{at}}$，并且有

$$R(s) = \sum_{i \in I_s} R(s_i^{\mathrm{at}}).$$

因此，$W_R = \text{张成}_{\mathbb{Q}}\{R(s_1^{\mathrm{at}}) \ldots, R(s_n^{\mathrm{at}})\}$。从原子值中选取一个极大Q-独立子族；令其对应于原子 $s_{i_1}^{\mathrm{at}}, \ldots, s_{i_m}^{\mathrm{at}}$。这些原子值构成 W_R的Q-基，因此相应的原子构成一个语义框架。特别地，$m \leq n$。

5. 若对于所有 $j = 1, \ldots, m$，$R'(s_j) = R(s_j)$，则对于所有 $s \in \mathcal{L}$，$R'(s) = R(s)$。

令 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R) = \{s_1, \ldots, s_m\}$。由于 $\{R(s_1) \ldots, R(s_m)\}$ 是 W_R 的 Q-基，对于每个 $s \in \mathcal{L}$，都存在唯一的 $q_1, \ldots, q_m \in \in \mathbb{Q}$，使得

$$R(s) = \sum_{j=1}^{m} q_j \, R(s_j).$$

利用 a 的有理数域上线性以及假设 $a(R(s_j)) = R'(s_j) = R(s_j)$，

$$R'(s) = a(R(s)) = a\left(\sum_{j=1}^{m} q_j R(s_j)\right) = \sum_{j=1}^{m} q_j \, a(R(s_j)) = \sum_{j=1}^{m} q_j \, R(s_j) = R(s).$$

这对每个 $s \in \mathcal{L}$ 都成立，正如所要求的。 □

4. 命题1 的证明

命题1。 在上述假设下，**全先验概率法则** 是如下恒等式

$$R(s) = \sum_j a_j(R(s \mid s_j)), \tag{7}$$

其中，$a_j(\cdot)$ 是用于同步主体预概率的 a-函数。

证明。任取任意陈述 $s \in \mathcal{L}$。由于 $\bigvee_j s_j = \top$，我们有

$$s = s \wedge \top = s \wedge \left(\bigvee_j s_j\right).$$

因为 $\wedge$ 在布尔格中对 $\vee$ 满足分配律，这意味着

$$s = \bigvee_j (s \wedge s_j) = \bigvee_j [s]_{s_j}. \tag{B3}$$

此外，这个上确界中的各项两两不相交：若 $j \neq k$ 则

$$(s \wedge s_j) \wedge (s \wedge s_k) = s \wedge (s_j \wedge s_k) = s \wedge \bot = \bot,$$

因此，族 $\{[s]_{s_j}\}_j$ 是 $\mathcal{L}$中的一个两两不相交的陈述族。

由于 R 是一个预概率，它在不相交的上确界上有限可加，因此将 R 应用于 (B3) 可得

$$R(s) = \sum_j R(s \wedge s_j) = \sum_j R([s]_{s_j}). \tag{B4}$$

现在利用可同步性。根据假设，对每个 j ，都存在一个 a-函数 a_j ，使得重新参数化的局部预概率

$$R'_{s_j} := a_j \circ R_{s_j}$$

与环境预概率在相对宇宙 $\mathcal{L}_{s_j}$上的限制一致，也就是说，

$$R'_{s_j}(t) = R(t) \qquad \text{for all } t \in \mathcal{L}_{s_j}.$$

特别地，对于 $t = [s]_{s_j} \in \mathcal{L}_{s_j}$ ，我们得到

$$R([s]_{s_j}) = R'_{s_j}([s]_{s_j}) = a_j\big(R_{s_j}([s]_{s_j})\big) = a_j(R(s \mid s_j)),$$

其中在最后一个等式中，我们使用了定义 $R(s \mid s_j) := R_{s_j}([s]_{s_j})$。

将此恒等式代入（B4）得

$$R(s) = \sum_j a_j(R(s \mid s_j)),$$

这恰好就是（7）。 □

5. 引理 5 的证明

引理 5. 设 $\mathcal{L}$ 是语义维数为1 的宇宙，且 $R : \mathcal{L} \to$复数域 是一个预概率函数。那么，对于任意选择的$\hat{s} \in \mathcal{L}$ ，满足 $R(\hat{s}) \neq 0$ ，以及任意 $s \in \mathcal{L}$ ，都存在一个有理数 $q(s) \in$ 有理数域，使得

$$R(s) = q(s)\, R(\hat{s}). \tag{11}$$

等价地， R 的所有非零值彼此成比例，且比例常数为有理数。

证明。 假设 $(\mathcal{L}, R)$ 按照定义 5 的意义具有语义维数 1。那么存在一个由单个陈述 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R) = \{t\}$ 构成的语义框架 $t \in \mathcal{L}$。特别是 $R(t) \neq 0$，否则 $\{t\}$ 将不满足 $\mathbb{Q}$-线性无关。

任取满足 $R(\hat{s}) \neq 0$ 的$\hat{s} \in \mathcal{L}$ 。我们首先证明，每个 $R(s)$ 都是 $R(t)$ 的有理数倍。令 $s \in \mathcal{L}$。若$R(s) = 0$ ，则取有理数 $q_t(s) = 0$ 即可得证。若 $R(s) \neq 0$，那么集合 $\{t, s\}$ 不可能在有理数域上线性无关，因为语义维数为 1。因此存在有理数 $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$，且两者不全为零，使得

$$q_1\, R(t) + q_2\, R(s) = 0.$$

此外 $q_2 \neq 0$：如果 $q_2 = 0$ ，那么 $q_1 R(t) = 0$ 会推出 $q_1 = 0$ ，因为 $R(t) \neq 0$，这就产生了矛盾。因此 e

$$R(s) = -\frac{q_1}{q_2}\, R(t),$$

所以，确实存在某个 $q_t(s) \in \in$有理数域，使得 $R(s) = q_t(s)\, R(t)$（约定当 $R(s) = 0$时， $q_t(s) = 0$ ）。用$\hat{s}$代替 s，应用相同的论证，可得到一个有理数 $q_t(\hat{s}) \in$有理数域 $\setminus \{0\}$，使得

$$R(\hat{s}) = q_t(\hat{s})\, R(t).$$

合并这两个关系可得，对每个 $s \in \mathcal{L}$,

$$R(s) = q_t(s)\, R(t) = \frac{q_t(s)}{q_t(\hat{s})}\, R(\hat{s}),$$

且系数 $q(s) := {}^{q_t(s)}\, {}_{q_t(\hat{s})}$ 是有理数。这就证明了（11）。 □

6. 引理 6 的证明6

引理 6。 设 $\mathcal{L}$ 是一个语义维数为 $m = 1$的宇宙， R 是其对应的预概率函数。那么，每个 a-函数必然是一个标量乘法：存在唯一的复数$\alpha_a \in$复数域 使得

$$a \circ R \;=\; \alpha_a\, R,$$

也就是说，对所有 $s \in \mathcal{L}$，都有 $a(R(s)) = \alpha_a R(s)$。

证明。 若 $R \equiv 0$，则 $a \circ R \equiv 0$，结论成立（取 $\alpha_a = 0$）。假设 R 不恒为零，并取满足 $R(\hat{s}) \neq 0$的$\hat{s} \in \mathcal{L}$。定义

$$\alpha_a \;:=\; \frac{a\big(R(\hat{s})\big)}{R(\hat{s})} \in \mathbb{C}.$$

现在令 $s \in \mathcal{L}$。根据引理 5，存在 $q(s) \in$ 有理数域 使得 $R(s) = q(s)\, R(\hat{s})$。因此 ce

$$a\big(R(s)\big) \;=\; a\big(q(s)\, R(\hat{s})\big) \;=\; q(s)\, a\big(R(\hat{s})\big) \;=\; q(s)\, \alpha_a\, R(\hat{s}) \;=\; \alpha_a\, R(s),$$

这恰好就是 $a \circ R = \alpha_a R$。

唯一性：若也 有 $a \circ R = \beta R$，那么在$\hat{s}$处求值可得 $\alpha_a R(\hat{s}) = \beta R(\hat{s})$，因此 $\alpha_a = \beta$，因为 $R(\hat{s}) \neq 0$。 □

7. 引理 7 的证明7

引理 7。 对于每个陈述 $s \in \mathcal{L}$，都存在唯一的有理数 $q_1(s) \ldots, q_m(s) \in$有理数域 使得

$$R(s) = \sum_{k=1}^{m} q_k(s)\, R(s_k). \tag{21}$$

证明。 考虑由集合 有理数域 上生成的 复数域 向量子空间 $\{R(t)\colon\ t \in \mathcal{L}\}$。根据极大性， $\{R(s_k)\}_{k=1}^{m}$是该子空间的一组有理数域 - 基，因此每个 $R(s)$ 都可展开成式（ 21 ）的形式。唯一性由 有理数域 - 线性无关性得出： $\{R(s_k)\}_{k=1}^{m}$。 □

8. 命题 4 的证明

命题 4。 设 $\mathcal{L}$ 是一个宇宙，且 $Q : \mathcal{L} \to$复数域是一个准概率，并满足 $Q(\top) = 1$。那么存在一个语义框架

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(Q) = \{\top, s_2, \ldots, s_m\} \subseteq \mathcal{L}$$

使得相对于此框架的语义分解 $\{Q^{(k)}\}_{k=1}^{m}$ 满足

$$Q^{(1)}(\top) = 1, \qquad Q^{(k)}(\top) = 0 \;\; (k = 2, \ldots, m). \tag{25}$$

特别地， $Q^{(1)}$ 是语义维度 1 的准概率，而每个满足 $k \geq 2$ 的 $Q^{(k)}$ 都是纯前概率。对于经典概率，同样的结论显然也成立。

证明。 由于 $Q(\top) = 1 \neq 0$, 单元素集 $\{\top\}$ 在有理数域上线性无关。将其扩充为由框架语句组成的极大 Q-线性无关集，从而得到一个语义框架

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(Q) = \{\top, s_2, \ldots, s_m\}.$$

令 $q_k(\cdot)$为唯一的 引理7 给出的该标架的有理坐标函数。将（21）应用于 $\top$ 得到 s

$$Q(\top) = \sum_{k=1}^{m} q_k(\top)\, Q(s_k), \qquad \text{with } s_1 \equiv \top.$$

但同样有

$$Q(\top) = 1 \cdot Q(\top) + \sum_{k=2}^{m} 0 \cdot Q(s_k).$$

由 有理坐标的唯一性， $q_1(\top) = 1$ 和 $q_k(\top) = 0$ 对于 $k \geq 2$。利用定义 12 得到 s

$$Q^{(1)}(\top) = q_1(\top)\, Q(\top) = 1, \qquad Q^{(k)}(\top) = q_k(\top)\, Q(s_k) = 0 \quad (k \geq 2),$$

如所声称。 □

Appendix C: AB-labelling

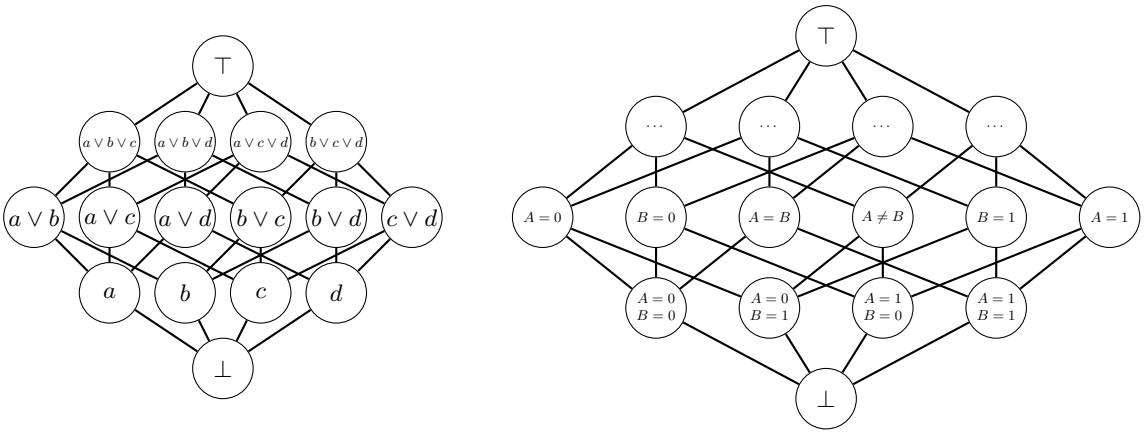

图 11。左侧使用我们对宇宙 $\mathcal{L}_4$ 的原子陈述所采用的标准记法；右侧展示了另一种原子陈述的选择。由于空间不足，带有虚线标签的节点尚未填入。

对于宇宙 $\mathcal{L}_4$ 其中包含四个原子陈述 $\{a, b, c, d\}$，陈述的 AB 标记由以下恒等式给出 e
（见下述恒等式 （参见图 11 ，其中清晰地展示了这些恒等式的图形表示）

$$\begin{aligned} a &= (A = 0, B = 0), \qquad b = (A = 0, B = 1), \\ c &= (A = 1, B = 0), \qquad d = (A = 1, B = 1), \end{aligned} \tag{C1}$$

其中， A 和 B 表示两个二元实验的结果。由此可得

$$\begin{aligned} a \vee b &= (A = 0), \qquad c \vee d = (A = 1), \\ a \vee c &= (B = 0), \qquad b \vee d = (B = 1). \end{aligned} \tag{C2}$$

我们还引入简写条件记号（对准概率Q 和概率 P也可作类似处理）

$$\begin{aligned} R(B = i_b \mid A = i_a) &\coloneqq R((A = i_a, B = i_b) \mid (A = i_a)), \\ R(A = i_a \mid B = i_b) &\coloneqq R((A = i_a, B = i_b) \mid (B = i_b)), \end{aligned} \tag{C3}$$

其中包含 $i_a,\ i_b \in \{0, 1\}$。

附录 D：补充图示

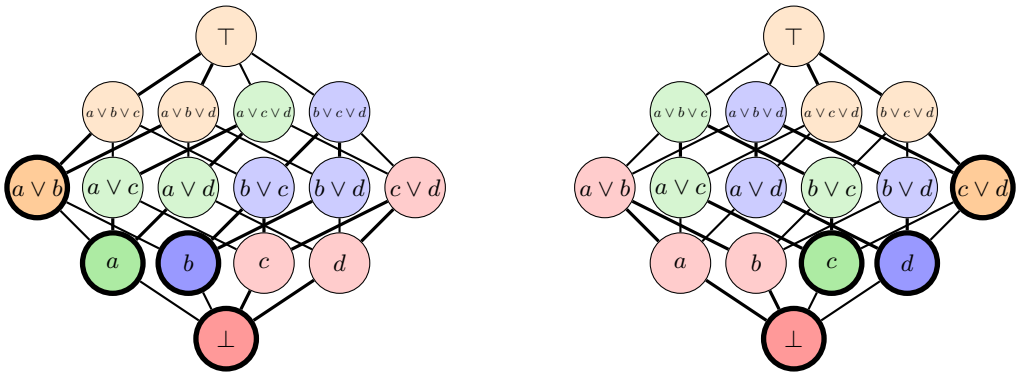

图 12. 宇宙 $\mathcal{L}_4$ 包含两个子宇宙，并突出显示了具有相同条件概率的语句类。左侧考虑子宇宙 $\mathcal{L}_{a\vee b}$，相对概率 $P_{a\vee b}$ 是 P 在该子宇宙上的限制。将 $P_{a\vee b}$ 扩展为整个 $\mathcal{L}_4$ 上的条件概率后，条件概率取值也按图中所示扩展，其中相同颜色表示相同的值。相同颜色的陈述属于由等价关系 $\sim_{a\vee b}$ 定义的同一等价类：$s \sim_{a\vee b} s' \iff s \wedge (a \vee b) = s' \wedge (a \vee b)$。右侧以相同方式考虑子宇宙 $\mathcal{L}_{c\vee d}$。

附录 E：普适性划分

全局普适性

设 $\mathcal{L}$ 为一个含有 $n \geq 2$ 个原子的宇宙，并固定一个指定语句 $\tilde{s} \in \mathcal{L} \setminus \{\bot\}$。根据局部可推导性，存在一个函数$F_{\mathcal{L},\,\tilde{s}}$ 使得

$$V(\tilde{s}) = F_{\mathcal{L},\tilde{s}}\big(\{V(s)\}_{s\in\mathcal{L}\setminus\{\tilde{s},\bot\}}\big)\,. \tag{E1}$$

全局普适性 r equires 要求，经过任意布尔格重新标记后，均适用相同的推理规则
格自同构。也就是说，对于每个布尔格自同构 $\phi:\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}$，都有

$$F_{\mathcal{L},\phi(\tilde{s})} = F_{\mathcal{L},\tilde{s}}, \tag{E2}$$

因此

$$V\big(\phi(\tilde{s})\big) = F_{\mathcal{L},\tilde{s}}\big(\{V(\phi(s))\}_{s\in\mathcal{L}\setminus\{\tilde{s},\bot\}}\big)\,. \tag{E3}$$

由于自同构保持秩，式（E2）确定了格的每个层级内的推理规则，但并未要求它在不同层级间一致。

子宇宙间的普适性

设 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 是环境宇宙中的句法子宇宙，并假设存在一个布尔格同构

$$\phi_{12} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2.$$

令 $V_{\mathcal{L}_1}$ 和 $V_{\mathcal{L}_2}$ 分别表示 V 在 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$上的限制。固定一个指定语句$\tilde{s} \in \mathcal{L}_1 \setminus \{\bot\}$。由 $\mathcal{L}_1$ 上的局部可推导性，存在一个函数 $F_{\mathcal{L}_1,\,\tilde{s}}$，使得

$$V_{\mathcal{L}_1}(\tilde{s}) = F_{\mathcal{L}_1,\tilde{s}}\big(\{V_{\mathcal{L}_1}(s)\}_{s\in\mathcal{L}_1\setminus\{\tilde{s},\bot\}}\big)\,. \tag{E4}$$

将局部可推导性应用于 $\mathcal{L}_2$，并取指定语句 $\phi_{12}(\tilde{s})$，可得

$$V_{\mathcal{L}_2}\big(\phi_{12}(\tilde{s})\big) = F_{\mathcal{L}_2,\phi_{12}(\tilde{s})}\big(\{V_{\mathcal{L}_2}(\phi_{12}(s))\}_{s\in\mathcal{L}_1\setminus\{\tilde{s},\bot\}}\big)\,. \tag{E5}$$

局部 普遍性要求同构的子宇宙共享相同的推理规则，即

$$F_{\mathcal{L}_2,\phi_{12}(\tilde{s})} = F_{\mathcal{L}_1,\tilde{s}}. \tag{E6}$$

在（E6）条件下，方程（E5）变为

$$V_{\mathcal{L}_2}\big(\phi_{12}(\tilde{s})\big) = F_{\mathcal{L}_1,\tilde{s}}\big(\{V_{\mathcal{L}_2}(\phi_{12}(s))\}_{s\in\mathcal{L}_1\setminus\{\tilde{s},\bot\}}\big)\,. \tag{E7}$$

附录 F：全局赋值、句法局部性与 Cox–Jaynes 概率的推导

我们的推导从一个全局赋值 V开始，这个对象之后将特化为概率赋值（或者更一般地，特化为准概率或预概率）。相比之下，Cox–Jaynes 方法将 Cox 所说的“可信度” [53]，也就是 Jaynes 所理解的“扩展逻辑”[54]，作为原始概念：相对于某个背景条件的陈述的数值赋值，通常示意性地写作

$$w(A \mid B),$$

并且预期其行为类似于条件概率。[87]乍看之下，这些出发点似乎有所不同：我们从无条件赋值 V 出发，而 Cox 和 Jaynes 则从明确的相对赋值$w(\cdot \mid \cdot)$出发。

然而，这种差异在很大程度上只是表达方式上的差异。原因在于，我们对句法局部性 的理解将相对性融入了形式体系之中，只是采用了不同的语言。句法局部性是这样一种思想：任何语句宇宙都总可以被视为某个更大环境宇宙的子宇宙。这一思想受到还原论物理学家所熟悉的视角启发：当一种描述看起来是“内在的”时，将其视为某个更全局描述在嵌入或扩张之后的限制，往往更有启发性（可以将其理解为通过引入辅助系统进行扩展、进行 Naimark 型扩张，或更广泛地说，转而考虑一个更大的系统，在其中相关结构成为典范）。

a. 作为相对化的子宇宙 设 L 为某个宇宙的语句所构成的布尔格，且 V是定义在 $\mathcal{L}$上的赋值。给定一个非平凡语句 $b \in \mathcal{L}$，通过将注意力限制在与 b相容的对象上，可以自然地得到一个相应的子宇宙。具体而言，可以将这个子宇宙表示为主理想 $\mathcal{L}_b$。

从环境宇宙上的一个赋值，通过限制定义域，可以得到 $\mathcal{L}_b$ 上的一个相对赋值。因此，尽管我们的论述是从概率定义条件概率，但其机制是相同的：条件性不过是转到一个子宇宙后所得到的结果。

b. 为什么这与 *Cox* 和 *Jaynes* 的观点十分接近 我们可以认为，原始对象不只是 V，而是它所有相对化构成的族。这个族恰好就是 Cox 和 Jaynes 所取作原始对象的那类对象，只不过他们选择从一开始就立足于相对量的层级。从纯数学的角度看，这两个出发点因此远比乍看之下接近：Cox 和 Jaynes 从一个条件赋值 $w(\cdot \mid \cdot)$ 出发，重构全局概率演算；而我们则从全局赋值 V 出发，将条件性视为子宇宙上诱导出的演算。

句法局部性正是帮助我们做到这一点的概念。由于每个宇宙都可以嵌入一个更大的宇宙，我们实际应用的任何赋值，都是应用于由语境或主体的信息状态所选定的某个子宇宙。全局对象 V 最好被理解为对所有相容的局部赋值进行记录的工具，而非一种形而上学主张，即概率作为绝对数值写入了世界。

c. 相对性：信息与嵌入同一调和也可以从哲学角度来表述。Cox 和 Jaynes 将相对性置于其论述的核心：可信度总是以某些条件为前提，通常是主体的背景信息。不存在独立于主体的陈述赋值，只有相对于已知信息的赋值。用我们的语言来说，人们可能会倾向于把“普适赋值”理解为一种客观量，因而认为它偏离了 Cox 和 Jaynes 的观点。

句法局部性缓和了这种表面上的张力。可以将其理解为：普适的并非某种特定的数值指派，而是关联不同相对化的结构。对 Cox 和 Jaynes 而言，改变作为条件的信息，就是改变信息；对我们而言，改变所研究的子宇宙，就是通过嵌入和限制来改变相对化。这是对同一种数学运算的两种描述，而应施加的相干性约束在精神实质上是相同的。关键在于，不同语境之间的转换必须定义良好。

d. 预概率作为客观相干数据 这一视角也阐明了，为什么我们坚持在全局层级上使用预概率而非概率。我们从第一性原理出发发现，组织所有相对化的全局结构本身不必满足正性，也不必由单个预概率映射唯一确定；对于语义维度 1 的理论，也不必由单个归一化约定唯一确定。事实上，一旦允许更丰富的语义结构，全局赋值就可以保有 a-函数自由度，同时仍能在所关注的子宇宙上诱导出定义良好的相对概率模型。从这个意义上说，普适赋值并非关于世界的伪概率，而是在指定语境后生成相对概率的相干规则。

因此，我们可以谈论一种较弱、或许也更适合基础物理学的客观性：客观性并不意味着存在唯一的、与语境无关的概率赋值，而是指存在一种客观的相干结构，规定相对赋值在语境变化时必须如何变换。普适前概率恰恰在这一有限意义上是客观的。它编码了连接不同相对赋值的可推导性所允许的规则，因此，即使主体的子宇宙及其条件化各不相同，它仍捕捉到了主体之间可以共享的内容。

最后，Cox 和 Jaynes 强调相对性，随后推导出全局演算；而我们则从全局演算出发，再将条件性理解为限制。句法局部性表明，这其实是同一机制的两种视角。

最后补充一点：我们发现，在准概率表示中加入 Jaynes 的单调性假设，就能筛选出概率表示；但在我们的情形中，无须假设单调性，甚至无须假设连续性，就能推导出单调性。

附录 G：有理概率的论证

命题 4 阐明了归一化如何与高语义维度相互作用。即使 Q 取值覆盖了复数域中多个 有理数域-独立方向，复数域中也只有一个方向能够表现为（准）概率。其余所有独立方向必然都是顶端为零，因此仍处于纯前概率的层级。

尤其是，一旦我们将注意力限制在真正归一化的方向 $Q^{(1)}$上，就回到了语义维数为 1 的情形。 Q的高维特征并非额外的（准）概率自由度：它们是额外的、与有理数域独立的前概率分量，本身无法归一化，因此也无法提升为准概率或概率。

因此，我们将语义维数限制为 1，并将这一结构视为一种线索：我们的重构表明，准概率乃至经典概率都应取有理数值；更谨慎地说，在没有额外正则性公理的情况下（见附录 F 和第 XA节），典范归一化只确定了 $\mathbb{Q}$-标量自由度，而无理分量则如同额外的语义坐标。我们强调，这一主张并非源自实验考量。例如，有人可能基于频率学派依据认为概率应为有理数，因为有限主体无法进行无穷多次试验。在这里，对有理数值的要求似乎纯粹是重构所施加的结构性约束；它源自支配赋值及其参数化的公理，而不诉诸经验局限或测量程序。从这个意义上说，理论与实验两种观点都指向同一个方向：若不对允许的重新分级施加额外的正则性公理，无理分量可能表现为额外的语义坐标，而非具有典范意义的概率自由度。

a. 沿无理数方向的剩余自由度当语义维数为 $m > 1$ 时，可以改变无理分量，而完全不影响顶元，因为这些分量属于顶零语义方向。

我们通过一个最简示例来明确说明这一点。

例5。 考虑一个由原子 $\{a, b\}$ 构成的双原子宇宙，并定义

$$P(a) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{10}, \qquad P(b) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{10},$$

使得 $P(\top) = P(a \vee b) = 1$和 $P(a)\ P(b) \geq 0$。我们考虑将 P分解为有理部分与无理部分的语义分解， $P = P_{\text{rat}} + P_{\text{irr}}$，使得

$$P_{\text{rat}}(a) = P_{\text{rat}}(b) = \frac{1}{2},$$
$$P_{\text{irr}}(a) = -\frac{\sqrt{2}}{10}, \quad P_{\text{irr}}(b) = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

于是 $P_{\text{rat}}(\top) = 1$ ，而 $P_{\text{irr}}(\top) = 0$，因此全部无理贡献都处于一个顶端为零的语义方向上。现在选取一个加法的 a-函数，使其固定有理方向并缩放无理方向，例如

$$a(x + y\sqrt{2}) \coloneqq x + 2y\sqrt{2} \qquad (x, y \in \mathbb{Q}),$$

定义在 $\{1, \sqrt{2}\}$的有理数域线性张成上。定义 $P' \coloneqq a \circ P$。那么

$$P'(\top) = a(P(\top)) = a(1) = 1,$$

but

$$P'(a) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{5}, \qquad P'(b) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

因此， P' 仍然是一个概率赋值，但它对应于不同的无理参数化。 ◇

有人可能会反驳说，无理数可以被有理数任意精确地逼近，因此任何额外的语义方向都可以变得微不足道。例如，在示例 5 中，可以将 $\sqrt{2}$ 替换为截断的连分数近似，从而得到一个无理误差项

$$\beta_n \ := \ \sqrt{2} \ - \ \Bigg(1 + \underbrace{\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2}}}}}_{n \text{ levels}}\Bigg),$$

通过增加 n，可以使其任意变小。然而，这一结论具有误导性：始终存在一个 a-函数，它固定 **1**，却能将误差放大任意大的倍数。因此，额外的语义框架确实带来了一个新的自由度，而不是一个微小的修正。

最后，可以尝试对每个语义方向分别施加独立的归一化，实际上将单个准概率替换为一组语义维度 **1** 的准概率。但这样一来，所得的全局参数化便依赖于额外的选择（尤其是语义框架的选择），从而失去了典范性。这也是为什么在当前的重构中，选择语义维度 **1** 作为研究（准）概率的自然情形。

附录 x H：无理概率的情形：反对假设频率主义／无限频率主义

将概率论与经验数据联系起来的最常见方式之一，是频率主义解释；按照这种解释，概率被视为相对频率。通常会区分两种主要变体：有限频率主义 [88] 和假设频率主义 [89] （也称无限频率主义）。原则上，本文所构建的框架与有限频率主义相容，尽管我们在此不探讨这种联系。事实上，我们对概率和准概率的定义完全依赖

于有理估值。这一特点似乎与假设频率主义相矛盾，因为后者通常将概率赋值为无限相对频率的极限，因此允许出现无理数值。

为了论证有理概率的合理性，下面我将通过考察两个案例，对假设频率主义的诠释提出反驳；在这两个案例中，假设频率主义对概率的定义会引发一些尤为有趣的问题和不一致性。

设有一枚完全偏置硬币，它必定出现反面，出现正面的概率为零。在假设频率主义中，实验的一个可能结果是一个无限序列

$$x : \mathbb{N} \to \{\mathsf{head}, \mathsf{tail}\},$$

而概率　　赋予结果 ∈ {正面，反面} 的概率定义为极限相对频率　　y

$$p_x(\mathsf{out}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta\big(x(i), \mathsf{out}\big), \tag{H1}$$

其中 $\delta(u,\ v) = 1$ 若 $u = v$ 且 $\delta(u,\ v) = 0$ 否则。

一个可接受序列是

$$x(n) = \mathsf{tail} \qquad \forall n,$$

对于该情况

$$p_x(\mathsf{head}) = 0, \qquad p_x(\mathsf{tail}) = 1.$$

另一个可接受序列是

$$y(n) = \begin{cases} \mathsf{head} & \text{if } \log_2(n) \in \mathbb{N}, \\ \mathsf{tail} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

使得正面只在时刻 $n = 2^k$ 出现。在这种情况下，同样有，

$$p_y(\mathsf{head}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \log_2(n) \rfloor}{n} = 0,$$

因此 p_y(反面) = 1。结果序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都是某枚硬币的恰当序列，该硬币出现正面的概率为 0，出现反面的概率为 1。

1. 结果确定且概率定义良好的实验，却导致未定义的概率

现在我们考虑以下实验。打印机每秒输出一个符号，可能是 0，也可能是 1。打印机有两个内部状态，分别记作 A 和 B。如果打印机处于状态 A，那么在时刻 $t \in \mathbb{N}$，它会打印

$$f_{\mathsf{A}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \text{ is even,} \\ 1 & \text{if } t \text{ is odd,} \end{cases} \tag{H2}$$

而在状态 B 下，它每一步都会打印 0。

每次打印前都会抛一次硬币。如果结果是正面，打印机的内部状态就会切换；如果是反面，状态则保持不变。打印机初始处于状态 A。我们使用上文提到的完全偏置硬币，对于它，在假想频率主义意义下 p(正面) $= 0$，并询问打印出符号 0 的概率。

如果实际出现的硬币序列为 $x(n) =$ ，对所有 n 都是反面，那么打印机就不会切换状态，纸上 0 的相对频率为 1 2。然而，如果实际出现的序列为 y，情况就不同了。打印出的 0 的相对频率不会收敛：它会振荡，并始终严格大于 1 2。因此，打印出 0 的假想频率主义概率不存在。

因此，在假设频率主义中，为硬币的结果赋予概率，会导致一个明确的派生事件不存在概率的情形。这表明该诠释内部存在张力。

2. 一个结果确定的实验：局部概率定义良好，但不存在全局概率

现在，我们稍微扩展一下实验，以说明同一机制可以产生某些概率存在而另一些不存在的情形。假设打印机现在每次输出两个符号t，分别位于左列和右列。打印机仍有两个内部状态，A 和 B。在状态 A 下，它打印

$$\left(f_{\mathsf{A}}^{L}(t), f_{\mathsf{A}}^{R}(t)\right) = \begin{cases} (0,1) & \text{if } t \text{ is even}, \\ (1,0) & \text{if } t \text{ is odd}, \end{cases}$$

而在状态 B 下，它会打印

$$\left(f_{\mathsf{B}}^{L}(t), f_{\mathsf{B}}^{R}(t)\right) = \begin{cases} (0,0) & \text{if } t \text{ is even}, \\ (1,1) & \text{if } t \text{ is odd}. \end{cases}$$

和之前一样，打印机从状态 A 开始，且仅在出现正面这一结果时才切换状态。我们再次考虑这样一个假想频率主义情境：实际观测到的硬币序列为 y，其中 p_y(正面) $= 0$。

在这种情况下，每一列中各符号的相对频率分别定义良好；两列中 0 的相对频率都收敛于 $\frac{1}{2}$，1 的情况也类似。因此，所有局部概率都存在，且等于 $\frac{1}{2}$。

然而，考察联合结果 $\left(f^{L}(t)\ f^{R}(t)\right)$ 时，相对频率并不收敛。序列 y 所引发的两个内部状态之间稀疏但无界的切换，使联合符号 (0,0)、(0,1)、(1,0) 和 (1,1) 的频率持续振荡。因此，无法为全局双列输出赋予假想频率主义概率。

这个例子表明，在假设频率主义中，定义良好的局部概率并不保证存在定义良好的全局概率分布。