arXiv:2602.12336v1 [math.RT] 12 Feb 2026

主系列块伯恩斯坦中心的基变换基本引理

Shenghao Li

2026年2月16日

摘要

设 G 是 p-进域 F 上的一个非分歧群。本文为主系列块的伯恩斯坦中心引入了一个基变换同态，并证明了由该基变换同态关联的两个函数彼此相伴。此结果为 T. Haines 提出的关于稳定伯恩斯坦中心的扭曲端oscopic转移猜想提供了新的证据；该猜想将应用于 R. Kottwitz 和 T. Haines 关于志村簇测试函数的一般猜想。

目录

1 引言 **2**

2 基本记号 **4**

3 伯恩斯坦主块与类型 **5**

4 主块类型的构造 **6**

4.1 主要结果 .6 4.2 根据 Kim-Yu 构造类型 .7 4.3 G-数据的构造 .7 4.4 类型的具体描述 .10

5 伯恩斯坦中心、稳定伯恩斯坦中心与基变换同态 **11**

5.1 主块上的簇结构 .11 5.2 伯恩斯坦中心 .11 5.3 稳定伯恩斯坦中心.12 5.4 基变换同态 .13

6 下降公式 **15**

6.1 下降公式的准备 .15 6.2 下降公式 .16 6.3 定理 6.2.3 的证明.19

7 消失命题和约化步骤 **24**

7.1 消失命题 .24 7.2 约化步骤 .25 **8 Labesse 的初等函数** **28**

8.1 定义 .28 8.2 轨道积分 .30 8.3 识别集合的一种重要方法 $\mathfrak{R}_{0_{\chi_r}}(G_r)$ .31 8.4 初等函数的迹的计算 .32 8.5 适用于 $\mathfrak{R}_{0_{\chi_r,\lambda_N}}(G_r)$ 的 Labesse 初等函数.34

9 强正则椭圆情形中的证明 359.1 适配于 $\mathfrak{R}_{0_{\chi_r,\lambda N}(G_r)}$ .359.2 证明结束 .35

1 引言

设 F 是一个 p-进域， F_r/F 是包含在 $\bar{}$ 的某个代数闭包 F 中的 F 的唯一 r 次非分歧扩张。令 θ 表示伽罗瓦群 Gal(F_r/F) 的一个生成元。设 G 是定义在 F 上的非分歧连通约化群。用同一符号 θ 表示由 θ 诱导的 $G(F_r)$ 上的自同构。对于定义在 F 上的任意代数群 H，在不致混淆时，我们用 H 表示 $H(F)$，并用 H_r 表示 $H(F_r)$。

考虑具体的范数映射 $N_r\colon\ G_r \to G_r$ 由 $N_r\delta = \delta\theta(\delta)\cdots\theta^{r-1}(\delta)$ 给出。因此，我们可以定义一个范数映射 $\mathcal{N}$，它将 G_r 中稳定 θ-共轭类映射到 G 中的稳定共轭类（详见 [Kot82] ）。令 $\mathcal{H}(G_r)$ 表示 G_r 上取值于 $\mathbb{C}$ 的局部常值紧支撑函数的卷积代数。对于任意函数 $\phi \in \mathcal{H}(G_r)$，我们可以定义 ϕ 对任意具有半单范数的元素 $\delta \in G_r$ 的稳定扭曲轨道积分 $\mathrm{SO}^{G_r}_{\delta\theta}(\phi)$。关于稳定扭曲轨道积分 $\mathrm{SO}^{G_r}_{\delta\theta}$ 的更精确定义，见 [Kot86]。

本文主要考虑 $\mathcal{H}(G_r)$ 和 $\mathcal{H}(G)$ 中某些函数之间的匹配。我们作如下定义：

定义1.1。 若下列等式成立，则称两个函数 $\phi \in \mathcal{H}(G_r)$ 和 $f \in \mathcal{H}(G)$ 相伴（或称具有匹配的稳定轨道积分）：对于每个半单元素 $\gamma \in G$,

$$\mathrm{SO}^G_\gamma(f) = \sum_\delta \Delta(\gamma,\delta)\mathrm{SO}^{G_r}_{\delta\theta}(\phi),$$

其中求和遍及具有半单范数的稳定 θ-共轭类 $\delta \in G_r$；若 $\mathcal{N}\delta = \gamma$，则 $\Delta(\gamma,\delta) = 1$；否则 $\Delta(\gamma,\delta) = 0$。

首先研究球面海克代数的情形。设 $K_r \subset G_r$ 和 $K \subset G$ 分别表示布吕阿-蒂茨楼 $\mathscr{B}(G)$ 中一个超特殊顶点相伴的超特殊极大紧子群，其中该楼对应于 $G(F)$。将 $\mathcal{H}(G_r)$（分别为 $\mathcal{H}(G)$）中所有 K_r（分别为 K）双不变函数构成的 Hecke 代数记为 $\mathcal{H}(G_r,\ K_r)$（分别为 $\mathcal{H}(G,\ K)$）。萨塔克同构诱导出一个基变换同态

$$b : \mathcal{H}(G_r, K_r) \to \mathcal{H}(G, K).$$

我们有以下关于球面海克代数的基变换基本引理，该引理由 [Clo90]和 [Lab90]证明：

定理 1.2. 若 $\phi \in \mathcal{H}(G_r, K_r)$，则 ϕ 和 $b\phi$ 相伴。

Clozel 和 Labesse 的这一结果对 Kottwitz 关于在 p处良约化的志村簇的研究贡献良多。

数十年后，T. Haines 证明了关于抛物子赫克代数中心的类似基变换基本引理（[Hai09]），以及关于深度零主系列块伯恩斯坦中心的类似基变换基本引理（[Hai12]）。第一个结果在研究具有抛物层结构、位于p处的志村簇时发挥重要作用；第二个结果则是研究具有 $\Gamma_1(p)$-层结构、位于 p处的志村簇的关键。

此后，T. Haines 提出了关于稳定伯恩斯坦中心的扭端oscopic转移猜想（[Hai14，猜想 6.2.3]），这是对上述三个结果的推广。令 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G)$表示 G的稳定伯恩斯坦中心，并令 $b'_r\colon\ \mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G_r) \to \mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G)$表示基变换同态（更多细节见第 5 节）。我们假设 G 满足局部 Langlands 对应+（详情见 [Hai14，第 5.2]节）。由于 G 是一个拟分裂群，我们可以自然地将 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G)$嵌入 G的伯恩斯坦中心 $\mathfrak{Z}(G)$中（ Hai14，推论 5.5.2]）。将 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G_r)$视为 $\mathfrak{Z}(G)$的子环后，我们得到 T. Haines 提出的以下猜想：

猜想 1.3 (Haines)。 若 $\phi \in \mathcal{H}(G_r)$ 和 $f \in \mathcal{H}(G)$ 相伴，则对于任意 $Z_r \in \mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G_r)$， $Z_r * \phi$ 和 $b'_r(Z_r) * \phi$ 也相伴。

除了上述三个结果外，P. Scholze 还证明了上述猜想在 $G=\mathrm{GL}_n$ 的情形成立（参见 [Sch13，定理 C]）。本文旨在将 Haines 的结果（[Hai12]）推广到一般的主系列块，不再限制深度。在本文余下部分，我们将把主系列块简称为主块。

为陈述主定理，我们需要更多的记号和定义。令 A 表示一个极大 F-分裂环面，并令 $T=C_G(A)$ 表示 G 中 A 的中心化子。因此，T 是 G 的极大环面。取 G 的一个 Borel 子群 $B=TU$，以及与 B 对应的一个 Iwahori 子群。

由于我们假设 G 是非分歧的，这意味着 T 也是非分歧的。我们将 T（分别为 T_r）的唯一极大紧子群记为 ${}^0T$（分别为 ${}^0T_r$）。容易看出，${}^0T=I\cap T$。令 ${}^0\chi$ 表示从 ${}^0T$ 到 $\mathbb{C}^\times$ 的一个特征。定义 ${}^0\chi_r={}^0\chi\circ N_r$ 为 ${}^0T_r$ 中的一个特征。令 χ 表示将 ${}^0\chi$ 从 ${}^0T$ 延拓到 T 的任意延拓。类似地，定义 $\chi_r=\chi\circ N_r$ 为将 ${}^0\chi_r$ 从 ${}^0T_r$ 延拓到 T_r 的一个延拓。令 $\mathfrak{s}=[T,\chi]_G$（分别为 $\mathfrak{s}_r=[T_r,\chi_r]_{G_r}$）为一个惯性等价类，并令 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G)$（分别为 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}_r}(G_r)$）表示相应的 Bernstein 块（关于 Bernstein 块的更多细节，请参见第3节和第4节）。

接下来，我们需要为 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{s}_r$构造类型。然而，Roche 的构造（见 [Roc98]）仅适用于分裂群。在第4节中，我们将这一构造推广到非分歧群：

定理 1.4。固定一个惯性等价类 $\mathfrak{s}=[T,\chi]_G$。于是我们可以构造一个具体的类型$(J_{\mathfrak{s}},\rho_{\mathfrak{s}})$，属于 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G)$，且具有如下性质：$J_{\mathfrak{s}}$ 是 I 的开紧子群，而 ρ 是$J_{\mathfrak{s}}$上的特征。特别地，若 *[Roc98]* 是分裂的，则这一构造与 G 中的构造相同；若 *[Hai12, §3]* 的深度为零，则这一构造也与 χ中的构造相同。

注意，根据 [Fin22]，，只要 p 不被绝对魏尔群的阶整除，类型的构造就适用。在本文余下部分，我们将作出并始终采用这一假设。

假设我们分别为 $\mathfrak{s}$和 $\mathfrak{s}_r$构造类型（J，ρ）和（J_r，ρ_r）（注意，ρ和 ρ_r是特征）。定义 Hecke 代数 $\mathcal{H}$（G，ρ）如下：

$$\mathcal{H}(G,\rho):=\{f\in\mathcal{H}(G)|f(j_igj_2)=\rho(j_1)^{-1}f(g)\rho(j_2)^{-1},\forall j_1,j_2\in J,\forall g\in G\}.$$

卷积是使用使 J 体积为 1 的哈尔测度定义的。

将 $\mathcal{H}(G,\rho)$（分别为 $\mathcal{H}(G_r,\rho_r)$）中的单位元记为 e_ρ（分别记为 e_{ρ_r}），并将相应 Hecke 代数的中心记为 $\mathcal{Z}(G,\rho)$（分别为 $\mathcal{Z}(G_r,\rho_r)$）。注意，上述类型的具体构造为我们给出了相应 Bernstein 块的伯恩斯坦中心的一个具体实现。换言之，相应 Bernstein 块的伯恩斯坦中心同构于 $\mathcal{Z}(G,\rho)$。我们有以下推论：

推论 1.5. 存在一个基变换同态 b_r，从 $\mathcal{Z}(G_r,\rho_r)$ 到 $\mathcal{Z}(G,\rho)$：

$$b_r:\mathcal{Z}(G_r,\rho_r)\to\mathcal{Z}(G,\rho). \tag{1.1}$$

更多详情请参见第 5 节。这个基变换同态类似于 [Hai12]中定义的基变换同态。现在我们可以陈述主要定理：

定理 1.6. 对于任意 $\phi\in\mathcal{Z}(G_r,\rho_r)$，函数 ϕ 和 $b_r\phi$ 相伴。

这类定理在 R. Kottwitz 的简单志村簇上的伪稳定化过程中发挥作用（[Kot92]）。此外，在第5节中，我们证明基变换同态 b_r 与定义在稳定伯恩斯坦中心上的基变换同态 b'_r 相容。换言之，对于任意 $Z_r\in\mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G_r)$，我们有

$$b'_r(Z_r)*e_\rho=b_r(Z_r*e_{\rho_r}).$$

因此，这也为定理 1.3提供了佐证。

重要事实：证明主定理不需要任何形式的局部 Langlands 对应或局部 Langlands 对应+。对于任意非分歧群 G，只要它定义在一个 p-进域 F 上，且 p 不被绝对魏尔群的阶整除，主定理就成立。这里我们引入稳定伯恩斯坦中心和局部 Langlands 对应+，只是为了与定理 1.3建立联系。

本文有两个主要的新结果。第一项是为非分歧群的主系列表示构造类型。Roche 的工作仅限于分裂情形，因为某些 Hecke 代数同构只适用于分裂约化群。我们将 Roche 的构造与 Kim 和 Yu 的构造结合起来（参见 [KY17]），为所有主系列

级数块构造类型。第二项是下降公式。与零深度或抛物型情形不同，在我们的情形中，下降公式更加困难。在抛物型情形或零深度情形中，根据布鲁哈分解，双陪集 $P\backslash G/\mathcal{J}$ 可以由有限韦伊群的一个子集表示，其中 P 是标准抛物子群，$\mathcal{J}$ 表示一个抛物子群。因此，相应 Hecke 代数中函数的常数项很容易处理。然而，在更深的层次上，我们没有如此简洁的分解定律。换言之，$P\backslash G/J$ 不能由有限韦伊群的一个子群表示，其中 P 是标准抛物子群，J 是我们在定理 1.4 中构造的类型对应的群。$P\backslash G/J$ 的代表元可以写成 wi的形式，其中 w 是有限韦伊群中的一个元素，而 i是 Iwahori 子群中的一个元素I。然而，我们得到了一个令人惊讶的结果：只有有限韦伊群中的代表元（即 $i=1$）会对常数项作出贡献，而其他代表元则会产生（扭曲）轨道积分为零的项。这保证我们仍能写出与 [Hai09] 中类似的下降公式。详情请见第6节。

类似于 [Hai12], 定理 1.6的证明可以分为两部分：第一部分是将 G 约化为某些简单形式，并将 γ 约化为强正则椭圆。第二步是利用整体迹公式证明上述情形下的定理。需要注意的是，[Hai12] 中的约化步骤存在缺陷，因为我们无法约化到伴随群，并且必须将约化步骤停留在导出子群单连通且中心为诱导环面的群上。因此，需要重写整体迹公式。与约化到伴随群相比，约化到此类群需要对从迹公式的简单形式构造局部数据的过程作出一些修改。详情可参见 Weimin Jiang 即将完成的博士论文（[Jia]）。

本文的组织如下。在第2节中，我们介绍一些将在全文中使用的记号。在第3节中，我们回顾 Bernstein 块和类型的一般理论。第3节将 Roche 的工作推广到了非分歧群。我们在第 5 节定义伯恩斯坦中心、稳定伯恩斯坦中心和基变换同态。此外，本节还将研究它们的一些基本性质。第 6 节全部讨论下降公式。这是本文技术性最强的一节。不同于 [Hai09], 中的下降公式，我们将使用 K平均的常数项以及根群交换子的具体计算，将 γ 约化为椭圆半单元素。在第7节中，我们进一步将基本引理约化到以下情形：$G_{\mathrm{der}}=G_{\mathrm{sc}}$的中心 G 是诱导环面，并且 γ 是椭圆且强正则半单的。我们修改了 [Hai12] 中的一些论证，以适用于我们的情形。第8节给出了适用于 Bernstein 块 $\mathfrak{R}_{\mathfrak{s}}(G)$ 的 Labesse 初等函数的一个类似物。最后，在第9节中，我们结合所有材料以及 [Jia], 中介绍的局部数据，完成定理 1.6 的证明。

致谢：我要感谢我的导师 Thomas Haines 提出这一问题，并给予无数有益的讨论与建议。我要感谢 Jeffrey Adler 和 Kazuma Ohara 的宝贵建议。本研究部分得到美国国家科学基金会项目 DMS 2200873 与 DMS 1801352 的资助。

2 基本记号

我们将引入更多将在全文中使用的记号与定义。回顾一下，F 是特征零的 p 进域，F_r/F 是次数为 r 的唯一非分歧扩张。将 F 的整数环记为 $\mathfrak{O}$，素理想记为 $\mathfrak{p}$。令 $k_q=\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ 表示剩余域，其中 q 表示剩余域的基数。

假设 G 在 E 上分裂，其中 E/F 是有限非分歧扩张。令 h 为 Gal(E/F) 的一个生成元（本文有时也会用 h 表示函数，但这很容易区分）。令 $\mathfrak{O}_E$ 表示 E 的整数环，$\mathfrak{p}_E$ 表示 $\mathfrak{O}_E$ 中的素理想。将 $T(E)$ 的极大紧开子群记为 ${}^0T(E)$。

令 G' 表示 G 的导出子群，$T'=T\cap G'$ 表示 G' 的极大环面。将 G 相对于 F 和 F_r 的相对Weyl群记为 W 和 W_r。此外，将绝对魏尔群记为 W_E。因此，我们对 p 的限制可表示为 $p\nmid|W_E|$，其中 $|W_E|$ 表示 W_E 的基数。注意，$(W_r)^\theta=(W_E)^h=W$.

用 $\Phi_F(G,T)$ 和 $\Phi_E(G,T)$ 分别表示相对根系和绝对根系。用同一符号表示由 h 在 $\Phi_E(G,T)$ 上诱导的自同构。令

$\Phi_E^+(G,T)$ 表示由 B 确定的正根集合。由于 G 是非分歧的，$\Phi_E^+(G,T)$ 在 h 作用下稳定。我们可以为 $\alpha\in\Phi_E(G,T)$ 固定根群同构 $u_\alpha\colon \mathbb{G}_a\to U_\alpha$，使其满足 [Roc98,§2] 中的条件。根群上的伽罗瓦作用如下：

$$h(u_\alpha(a))=u_{h(\alpha)}(x_\alpha h(a))$$

对于任意 $a\in E$ 和 $\alpha\in\Phi_E(G,T)$，其中 x_α 是 $\mathfrak{O}_E^\times$ 中的一个元素，且仅由 α 的 h-轨道确定。令 $\mathfrak{g}_\alpha$ 表示 $\mathfrak{g}_E$ 中对应于 α 的一维特征子空间。

令 H 表示任意群。对于 $h\in H$ 和子集 $S\subset H$，定义 ${}^hS:=hSh^{-1}$。令 $H'\subset H$ 表示一个子群，σ 表示其在 H' 上的表示。我们令 ${}^h\sigma$ 为 ${}^hH'$ 上的表示，使得对于任意 $h'\in {}^hH'$，有 ${}^h\sigma(h')=\sigma(h^{-1}h'h)$。

3 Bernstein 分块与类型

本节回顾 $\mathfrak{R}(G)$（G 的光滑复表示范畴）上的 Bernstein 分解，以及类型的定义和一些推论。我们遵循[Roc98，§7]中的内容。

尖点对是形如 (M,σ) 的一对，由 Levi 子群 $M\subset G$ 和 M 的不可约超尖点表示组成。若存在一个 $g\in G$ 使得 $M_2={}^gM_1$ 且 $\sigma_2\simeq {}^g\sigma_1$，则称两对 (M_1,σ_1) 和 (M_2,σ_2) 等价。此外，若存在一个 $g\in G$ 以及 ν 的一个非分歧特征 M_2（关于非分歧特征的定义，见 [Hai14，§3.3。1]），使得

$$M_2={}^gM_1\quad\text{and}\quad {}^g\sigma_1\simeq\sigma_2\otimes\nu.$$

将 (M,σ) 的等价类记为 $(M,\sigma)_G$，将 (M,σ) 的惯性等价类记为 $\mathfrak{s}=[M,\sigma]_G$（无歧义时省略下标）。此外，用 $\mathfrak{B}(G)$ 表示 G 中所有惯性等价类构成的集合。

令 $\mathrm{Irr}(G)$ 表示 G 的光滑不可约表示的等价类集合。我们有以下定义良好的映射 ([BZ77])：

$$\mathrm{Irr}(G)\to\{\text{equivalence classes of cuspidal pairs}\}$$

$$\pi\to\text{class of }(M,\sigma)\text{ if }\pi\simeq\text{a }G\text{-subquotient of }i_P^G\sigma$$

其中 P 是 G 的任意抛物子群，具有 Levi 因子 M，而 i_P^G 是归一化抛物诱导函子。π 在此映射下的像称为 π 的超尖支撑。我们用 $\mathfrak{J}(\pi)$ 表示其超尖支撑的惯性等价类。对于固定的 $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)$，我们将 $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ 记为 $\mathfrak{R}(G)$ 的全子范畴，其定义如下：

定义 3.1。令 $(\pi,V)\in\mathfrak{R}(G)$。则 $(\pi,V)\in\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ 当且仅当 π 的每个不可约 G-子商 π_0 都满足 $\mathfrak{J}(\pi_0)=\mathfrak{s}$。

并且我们有如下定理，称为 Bernstein 分解：

定理 3.2 ([Roc98，定理 7。2])。范畴 $\mathfrak{R}(G)$ 是以下范畴的直积

$$\mathfrak{R}(G)=\prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)}\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$$

子范畴 $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$，其中 $\mathfrak{s}$ 遍历 $\mathfrak{B}(G)$。

更具体地，对于任意 $(\pi,V)\in\mathfrak{R}(G)$，以及任意 $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)$，$V$ 有唯一的极大 G-稳定子空间 $V_\mathfrak{s}\in\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ 并且

$$V=\bigoplus_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)}V_\mathfrak{s}.$$

接下来我们将回顾类型的定义：

定义 3.3。固定一个 $\mathfrak{s}\in\mathfrak{B}(G)$。$G$ 中的一个 $\mathfrak{s}$-类型是一对 $(K、\rho)$，其中 K 是 G 的紧开子群，ρ 是 K 的不可约光滑表示，并满足以下性质：对于 G 的不可约光滑表示 π，$\mathfrak{J}(\pi)=\mathfrak{s}$ 当且仅当 $\rho\subset\pi|_K$。

注 3.4。 对于 $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{B}(G)$，也有 $\mathfrak{s}$-类型的定义，其中 $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{B}$不是单点集。然而，在本文中，我们只讨论 $\mathfrak{s}$ 为单点集的情形。

定理 3.5 ([Roc98，定理 7。5])。 令 $\mathfrak{R}_\rho$ 表示 $\mathfrak{R}(G)$ 的全子范畴，其中由所有$(\pi, V) \in \mathfrak{R}(G)$ 满足 $V = V[\rho]$的对象组成；该空间由 V^ρ （ ρ-同型向量）生成。于是有以下结论：

(1) 范畴 $\mathfrak{R}_\rho(G)$ 与 $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ 作为 $\mathfrak{R}(G)$ 的子范畴是相同的。特别地， $\mathfrak{R}_\rho(G)$ 对取子商封闭。

(2) 此时函子

$$V \to V^\rho : \mathfrak{R}(G) \to \mathcal{H}(G, \rho)\text{-mod}$$

是范畴等价。

根据上述定理，我们可以将与惯性等价类 $\mathfrak{s}$ 对应的 Bernstein 块 $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$ 的伯恩斯坦中心识别为 $\mathcal{Z}(G, \rho)$，即 Hecke 代数 $\mathcal{H}(G, \rho)$ 的中心。

4 主系列块的类型构造

本节将为非分歧群的主系列块构造类型。这里，主系列块是指与惯性等价类 $[M, \sigma]_G \in \mathfrak{B}(G)$ 相对应的 Bernstein 块 $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$，其中 $M = T$ 和 χ 是从 T 到 $\mathbb{C}^\times$的特征。由于我们只考虑一对 (T, χ) 的惯性等价类，因此将使用符号 $({}^0T, {}^0\chi)_G$ 表示惯性等价类 $[T, \chi]_G$，其中 ${}^0\chi = \chi|_{{}^0T}$。简言之，我们将此类块称为主块，并将相应的惯性等价类称为主类。在后续各节中，固定一个主类 $\mathfrak{s} = ({}^0T, {}^0\chi)_G$ 和一个主块 $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)$。

4.1 主要结果

正如 [Roc98], 中所述，我们已经为分裂约化群的主块构造了类型。然而，要将这一结果推广到非分歧群，我们不能采用相同的方法。相反，我们需要结合 Roche 的构造与 Kim-Yu 的构造（见 [KY17]）。

在前面的各节中，我们已经固定了一个 Borel 子群 $B = TU$。因此，我们也固定了绝对根系 $\Phi_E(G, T)$中的一组正根 $\Phi_E(G, T)^+$。用 $\bar{B} = T\bar{U}$表示对立 Borel 子群。设 ${}^0\chi_E = {}^0\chi \circ N_E$是定义在 ${}^0T(E)$上的一个特征，其中 N_E表示从 ${}^0T(E)$到 ${}^0T$的范数映射。因此， $\mathfrak{s}_E := ({}^0T(E)\ {}^0\chi_E)^{G(E)}$也是 $\mathfrak{B}(G(E))$上的一个主类。

α的导子 $\mathrm{cond}(\alpha)$ 是满足 ${}^0\chi_E \circ \alpha^\vee(1 + \mathfrak{p}_E^l) = 1$ 的最小正整数 l。我们将凹函数 $f_\mathfrak{s}\colon \Phi_E(G, T) \to \mathbb{N}$ 定义如下：

$$f_\mathfrak{s}(\alpha) = \begin{cases} [\mathrm{cond}(\alpha)/2] & \alpha \in \Phi_E(G,T)^+ \\ [(\mathrm{cond}(\alpha)+1)/2] & \alpha \in \Phi_E(G,T)^-. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

这里 $[x]$ 表示最大整数 $\le x$。关于 $f_\mathfrak{s}$ 是凹函数的证明，参见 [Roc98，§3] .

定义 $U_{E,f_\mathfrak{s}} = \langle u_\alpha(\mathfrak{p}_E^{f_\mathfrak{s}(\alpha)}) : \alpha \in \phi_E(G,T)\rangle$ 以及 $J_{E,\mathfrak{s}} = \langle U_{f_\mathfrak{s}}, {}^0T(E)\rangle$. 注意，根据 [Roc98, 引理 3. 2]，，群 $U_{E,f_\mathfrak{s}}$ 和 $J_{E,\mathfrak{s}}$ 相对于任意抛物子群$P \subset G$都有 Iwahori分解。由于群 G 是拟分裂的，我们可以推知，群 $U_{f_\mathfrak{s}} = U_{E,f_\mathfrak{s}} \cap G(F) = (U_{E,f_\mathfrak{s}})^h$以及 $J_\mathfrak{s} = J_{E,\mathfrak{s}} \cap G(F) = (J_{E,\mathfrak{s}})^h$ 也相对于抛物子群 $P \subset G$ 有 Iwahori分解。注意，$J_{E,\mathfrak{s}} \cap T(E) = {}^0T(E)$ 和 $J_\mathfrak{s} \cap T = {}^0T$。主要结果如下：

定理 4.1.1. 一对 $(J_\mathfrak{s}, \rho_\mathfrak{s})$ 是一个 $\mathfrak{s}$-类型，其中 $J_\mathfrak{s}$ 如上定义，而 $\rho_\mathfrak{s}$ 是 $J_\mathfrak{s}$ 上的特征，使得 $\rho_\mathfrak{s}|_{J_\mathfrak{s}\cap U}$ 和 $\rho_\mathfrak{s}|_{J_\mathfrak{s}\cap \bar{U}}$ 是平凡的，并且 $\rho_\mathfrak{s}|_{J_\mathfrak{s}\cap T} = {}^0\chi$。

注记 4.1.2。 这是对 *[Roc98]*定理 7 的推广。*7]*若群 G 是分裂的，那么此定理将表明，在 *[Roc98]*和 *[KY17]* 中构造的类型实际上相同。

4.2 遵循 Kim-Yu 的类型构造

本小节将回顾 [KY17]中的类型构造。设 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 并设 $\vec{G} = (G = G^1 \supsetneq G^2 \supsetneq \cdots \supsetneq G^d)$ 是 G的一个温和分歧扭曲 Levi 子群序列。设 M^d是 G^d的一个 Levi 子群，并设 A_{M^d}是 M^d的中心的分裂部分的中心化子。记 A_{M^d}在 G^i中的中心化子为 M^i，其中 $1 \leq i \leq d$。根据 [KY17，引理 2.4(a)、(b)], M^i是 G^i 的一个 Levi 子群，也是 M^1的一个温和分歧扭曲 Levi 子群。

定义 4.2.1 ([KY17，§7.2])。一个 G-数据是一个 5-元组 $\Sigma := ((\vec{G}, M^d), (y, \{\iota\}) \vec{r}, (K_{M^d}, \rho_{M^d}) \vec{\phi})$ 满足以下条件：

D1 $\vec{G} = (G = G^1 \supsetneq G^2 \supsetneq \cdots \supsetneq G^d)$ 是由扭曲 *Levi* 子群构成的序列，这些子群在某个 F 的温和分歧扩张上分裂，其中 G 为某个 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，且 M^d 是 G^d的 *Levi* 子群。令$\vec{M} = (M^1 \supset M^2 \supset \cdots \supset M^d)$按上述方式构造。

D2 $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$ 是满足 $r_1 \geq r_2 > \cdots > r_d > 0$ 的实数序列。

D3 y是 $\mathcal{B}(M^d, F)$中的一个点，且 $\{\iota\}$ 是一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{B}(G^d, F) & \longrightarrow & \mathcal{B}(G^{d-1}, F) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & \mathcal{B}(G^1, F) \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ \mathcal{B}(M^d, F) & \longrightarrow & \mathcal{B}(M^{d-1}, F) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & \mathcal{B}(M^1, F) \end{array}$$

关于建筑的容许嵌入，满足以下条件： $\vec{s}$相对于 y 是 *[KY17第 3.5 定义]*, 其中 $\vec{s} = (r_2/2, \ldots, r_d/2, 0)$。我们将 $\mathcal{B}(M^d, F)$ 中的点与经嵌入 $\{\iota\}$所得的像等同起来。

D4 K_{M^d}是 $M^d(F)_y$ 的一个紧开子群（ y 的稳定子），包含 $M^d(F)_{y,0}$，且 ρ_{M^d} 是 K_{M^d} 的一个不可约光滑表示，使得 *$((G^d, M^d), (y, \iota: \mathcal{B}(M^d, F) \to \mathcal{B}(G^d, F)), (K_{M^d}, \rho_{M^d}))$* 是按照 *[KY17, §7.1]* 的定义的深度零 G^d-数据。

D5 $\vec{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_d)$ 是一个特征序列，其中 ϕ_i是 $G^i(F)$的一个特征。如果 $r_1 = r_2$，我们令$\phi_1 = 1$；否则 ϕ_d 的深度为 r_d。我们还要求，对于所有 ϕ_i，其为 G^{i-1}-泛型，深度为 r_i，其含义见 *[Fin25，定义 3.5。2]* 对所有 $2 \leq i \leq d$均成立。

注 4.2.2. 对于 ***D5***，原始定义应为 G^{i-1}相对于深度为 r_i 的点 $y \in \mathcal{B}(G^i, F)$-泛型。然而，根据 *[Fin25，定义 3.5，2]*, 对 y的选择并不重要；它可以是建筑中的任意点。事实上，在本节中，我们将直接选择公寓$\mathcal{A}(G^i, T, F)$的原点。

根据 [KY17，7.4 和 7.5 定理]，一对 $\mathcal{J} = (K, \rho)$ 将是 $\mathcal{J}_M = (K_M, \rho_M)$ 的 G-覆盖，其中 $K = K_{M^d} G^d_{y,0} G^{d-1}_{y, r_d/2} \cdots G^1_{y, r_2/2}$以及 $K_M = K_{M^d} M^{d-1}_{y, r_d/2} \cdots M^1_{y, r_2/2}$，而 ρ（分别为 ρ_1^M）是 K（分别为 K_M）的一个不可约表示。ρ_M 的具体构造较为复杂，但对于主块而言，描述起来很简单，我们将在下一段讨论。

为了获得主块的类型，我们需要要求 $M^1 = T$。因此，扭曲 Levi 序列 $\vec{M}$只能是常数序列 $(T, \ldots, T)$。为了得到单点集，群 K_{M^d} 就只能是群 $T_{y,0} = {}^0T$。因此，群 K_M 将与 ${}^0T$ 相同，而不可约表示 ρ_M就是 ${}^0\chi = \rho_{M^d} \otimes (\phi_d|_{{}^0T}) \otimes \cdots \otimes (\phi_1|_{{}^0T})$。由于 $\mathcal{J} = (K, \rho)$ 是 $\mathcal{J}_M = (K_M, \rho_M)$ 的一个 G-覆盖，我们可以说 ρ是 K上的特征，使得 $\rho|_{K \cap U}$和 $\rho|_{K \cap \bar{U}}$都是平凡的，并且

$$\rho|_{K \cap T} = \rho|_{{}^0T} = {}^0\chi.$$

总之，(K, ρ) 将是一个 $\mathfrak{s} = ({}^0T, {}^0\chi)$-类型。

4.3 G-数据的构造

为了证明定理 4.1.1，我们需要构造一个 G-数据。我们将首先定义扭曲 Levi 序列（$\vec{G}$, M^d），然后定义特征标序列 $\vec{\phi}$和实数序列 $\vec{r}$。最后，我们将定义（y, $\{\iota\}$）和（K_{M^d}, ρ_{M^d}），即零深度数据和建筑物的泛型嵌入。

仅在本节中，对任意约化群 H，我们将用符号 H_r（相应地， H_{r+}）表示 H的深度为 r（相应地， $r+$）的Moy-Prasad滤过子群。

4.3.1 扭曲 Levi 序列 $(\vec{G}、\ M^d)$

我们从给定的 $\mathfrak{s}$-类型出发，其中 $\mathfrak{s}=(^0T,{}^0\chi)$。设 χ 表示 T 上的任意特征，它是特征 $^0\chi$的一个延拓。由于 p 不整除G的绝对魏尔群的阶，我们可以通过定义在 $\mathfrak{g}$ 上的双线性形式 $B(\ ,\ )$将 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 等同（见 [AR00，命题4.1]）。假设特征 $^0\chi$ 的深度为 $r>0$ （深度为零的情形将稍后处理）。它在 T_{r+} 上平凡，但在 T_r上非平凡。固定 F 上的一个加性特征 ψ ，它在 $\mathfrak{p}$ 上平凡，但在 $\mathfrak{O}$上非平凡。借助同构 $T_r/T_{r+}\simeq\mathfrak{t}_r/\mathfrak{t}_{r+}$，我们可以把特征 $^0\chi|_{T_r/T_{r+}}$ 视为 $\mathfrak{t}_r/\mathfrak{t}_{r+}$上的加性特征。通过与特征 ψ复合，我们可以把特征 $^0\chi|_{T_r/T_{r+}}$ 视为元素 $a_0\in\mathfrak{t}_{-r}/\mathfrak{t}_{-r+}$ （见 [Roc98，引理4.3]）。我们定义元素 $a\in\mathfrak{t}_l\backslash\mathfrak{t}_{l+}$ 为好元素，如果对任意绝对根 $\alpha\in\Phi_E(G,T)$，要么$\mathrm{d}\alpha(a)=0$，要么$\mathrm{val}(\mathrm{d}\alpha(a))=l$（见[AR00，定义5.2]）。根据 [Fin21a，定理3.3], ，由我们对 p的限制， $\mathfrak{t}_{-r}/\mathfrak{t}_{-r+}$的任意陪集中都存在一个好元素。我们选取一个好元素 $a\in a_0$。

根据 [Roc98，定理 4.15], ， G 群中 a 的中心化子 $C_G(a)$ 是 G 的扭曲 Levi 子群。如果 $a\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，那么该特征在 T_r' 上必须是平凡的（注意，这是一个等价条件：如果该特征在 T_r' 上是平凡的，那么好元素必须属于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$）。因此，我们可以在 T 上选择一个特征 χ_1'，使得 $\chi_1'|_{T_r}=\chi|_{T_r}$ 且 $\chi_1'|T'=1$。令 $\chi'=\chi\otimes\chi_1'^{-1}$；我们得到 T 上的一个深度更小的新特征。重复此过程，直到我们所选择的好元素不属于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。将上述步骤中所选全部特征的乘积记为 χ_1。我们需要以下引理：

引理 4.3.1.1。令 G' 表示 G 的导出子群。$G\left(F\right)$ 中的任意元素都可以写成 $G'\left(F\right)$ 中的一个元素与 $T\left(F\right)$ 中的一个元素的乘积。换言之，$G\left(F\right)=G'\left(F\right)\cdot T\left(F\right)$。

证明。通过选取一个 z延拓（见下方公式（7.2.1））， 我们可以假设 G' 是单连通的。令 $T'=T\cap G'$为 G'的一个极大环面。由于 G'是单连通的， $X_*\left(T'\right)$具有一个由 $\mathrm{Gal}(F/F)$ 置换的简单正余根基。因此， T'是一个诱导环面。令$D=G/G'$为 G的余中心。于是我们得到两个正合列，其中第一个包含于第二个中：

$$1\longrightarrow T'(F)\longrightarrow T(F)\longrightarrow D(F)\longrightarrow 1$$

$$1\longrightarrow G'(F)\longrightarrow G(F)\longrightarrow D(F)\longrightarrow 1.$$

第一个序列由以下事实可知是正合的： T'是一个诱导环面，这意味着根据希尔伯特第90定理， $H^1(F,T')=0$。第二个序列根据克尼斯定理是正合的，该定理意味着$H^1(F,G')=0$。这意味着 $g\in G(F)$可以推到 $D(F)$，且其像可以提升到 $T(F)$。因此， $G(F)=G'(F)\cdot T(F)$。

□

根据上述引理， χ_1 在 T 上有唯一的延拓，使其成为 G 上的特征 ϕ_1。令 $\rho_1=\chi\otimes\chi_1^{-1}$ 为 T 中深度较小的新特征。假设我们选取的最后一个好元素为 a_1。因此，中心化子 $C_G(a_1)$ 将是 G 的一个真扭曲 Levi 子群。

继续进行。令 $\rho_i=\chi\otimes\chi_1^{-1}\otimes\cdots\otimes\chi_i^{-1}$。如果 $d\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 满足以下条件，我们就在此处停止： ρ_d 是环面 T上的零深度特征。因此，我们得到一个严格递减的扭曲 Levi 子群序列。令 $B_i(\ ,$ 表示定义在李代数 $\mathfrak{g}^i$ 上的双线性形式 G^i (参见 [AR00，命题 4。1])。序列中的所有群都包含极大环面 T。将该序列记为

$$\vec{G}=(G^1=G,G^2,\ldots,G^d)$$

以及我们选取的良元素序列 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_d)$。此外，我们选取 $M^d\subset G^d$ 作为极大环面（注意， G^d 不一定是极大环面）。群 G^i 的绝对根系定义如下：

$$\Phi_E(G^i,T)=\{\alpha\in\Phi_E(G^{i-1},T)\mid\mathrm{d}\alpha(a_{i-1})=0\}.$$

将 G^i 的导出子群记为 $(G^i)'$，将 $(G^i)'$ 的极大环面记为 $(T^i)'=T\cap G^i$。

4.3.2 特征序列

$\vec{}$我们将沿用上一节的所有内容。在 $\vec{G}$ 上有一个特征序列 $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_d)$，以及一个实数序列 $\vec{r}=(r_1,\ldots,r_d)$，其中 $r_i=\mathsf{depth}(\phi_i)$。由构造可知， ϕ_i 的深度与 χ_i 的深度相同。注意，对于第一个特征，如果$^0\chi$ 在 T'_r 上非平凡，那么表示 $^0\chi$ 的好元素将不属于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，因此我们无需将其与其他特征相乘。在这种情况下，我们将直接定义 $\phi_1=1$ 和 $r_1=r$。

To 为了证明除 ϕ_1 外，其余所有 ϕ_i 都不可能是平凡的，我们需要以下引理 :

引理 4.3.2.1. 设 l_i 表示 ϕ_i 的深度。那么，在李代数 $\mathfrak{g}^{i+1}$ *of* G^{i+1} 中表示它的好元素必须属于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{i+1})$。此外，对于 $1\leq i\leq d-1$， $l_i=r_{i+1}$。

证明。 对于第一部分，我们只需证明特征 ρ_i 在 T'_{i+1}上是平凡的, l_i，其中$T'_{i+1}=T'\cap G^{i+1}$。事实上，根据第 4.3.1 节中的构造可知，若通过限制将好元素 $a_i\in g^i\simeq(g^i)^*$ 视为 $(\mathfrak{g}^{i+1})^*$ 中的一个元素，那么它不仅表示特征 $\rho_i|_{T_{r_i}/T_{r_i+}}$，还表示特征$\phi_{i+1}|_{G^{i+1}_{r_{i+1}}/G^{i+1}_{r_{i+1}+}}$，通过同构

$G^{i+1}_{r_{i+1}}/G^{i+1}_{r_{i+1}+}\simeq\mathfrak{g}^{i+1}_{r_{i+1}}/\mathfrak{g}^{i+1}_{r_{i+1}+}$（这是因为对于任意 $\alpha\in\phi_E(G^i,\ T)$， $=0$ $B_i(\mathfrak{t},\ \mathfrak{g}_\alpha)$。将 a_i写成 $\mathfrak{t}'_i$ 中的一个元素与 $\mathfrak{z}(g_i)$ 中的一个元素之和，并直接检验双线性形式$B_i(,\ )$ 的定义，我们得到以下公式:

$$B_i(a_i,\mathrm{d}\alpha^\vee(1))=B_i(\gamma^\vee,\gamma^\vee)^{-1}\sum_{\beta\in\Phi_E(G^i,T)}\mathrm{d}\beta(a_i)(\beta,\alpha^\vee)\tag{4.3.2.1}$$

对于短余根 $\gamma^\vee\in\Phi_E(G^i,\ T)^\vee$。众所周知，

$$\sum_{\beta\in\Phi_E(G^i,T)}\beta(\beta,\alpha^\vee)=k_\alpha\alpha$$

对于某个标量 k_α。将其与 $\alpha^\vee$配对，我们得到 $k_\alpha=B_i(\alpha^\vee,\ \alpha^\vee)/2$。取导数可得以下等式:

$$B_i(a_i,\mathrm{d}\alpha^\vee(1))=m_\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha(a_i),\tag{4.3.2.2}$$

其中 $m_\alpha=B_i(\alpha^\vee,\ \alpha^\vee)/2B_i(\gamma^\vee,\ \gamma^\vee)$。因此， m_α是 $\Phi_E(G^i,\ T)^\vee$中根长度平方之比。由于 p 不整除绝对魏尔群的阶，我们可以看出 m_α 是 $\mathfrak{O}$中的一个单位。回忆一下，特征 $\rho_i|_{T_{l_i}}$ 在 $\mathfrak{t}_{-l_i}/\mathfrak{t}_{-l_i+}$中记作好元素 a_i。还要回忆， G^{i+1} 的绝对根系由 G^i 的所有绝对根 α 组成，满足 $\mathrm{d}\alpha(a_i)=0$。因此， T'_{i+1} 的李代数 $\mathfrak{t}'_{i+1}$ 由以下集合生成:

$$\{\alpha^\vee(1)\mid\alpha\in\Phi(G^{i+1},T)\}=\{\alpha^\vee(1)\mid\alpha\in\Phi(G^i,T),\ \mathrm{d}\alpha(a_i)=0\}$$

由等式 (4.3.2.2) 可知，对于所有 $\alpha\in\Phi(G^{i+1},T)$， $B_{i+1}(a_i,\alpha^\vee(1))=0$。这意味着 $B_{i+1}(a_i,\mathfrak{t}'_{i+1,l_i})=0$。因此， ρ_i 在 T'_{i+1,l_i} 上是平凡的。所以， χ_{i+1} 不可能是平凡的。证明完毕。

第二部分直接由 χ_{i+1} 的构造得出。因此，我们有 $\mathsf{depth}(\rho_i)=\mathsf{depth}(\chi_{i+1})=\mathsf{depth}(\phi_{i+1})$。

□

由上述引理可知，序列 $\vec{r}$ 是一个从 $i\geq2$ 开始严格递减的序列。如果 $r_1=r_2$，则根据定义可得 $\phi_1=1$。

接下来我们需要证明，特征 ϕ_i 是 G^{i-1}-泛型的，深度为 r_i。事实上，好元素与泛型特征互为"对偶概念"（参见 [Fin21b，旁注 3。13]）。更准确地说，我们有以下定理:

定理 4.3.2.2. 特征 ϕ_i 是深度为 r_i的 G^{i-1}-泛型特征。

证明。 根据 [Fin22，引理 2。3], 我们只需令 y 为公寓 $\mathcal{A}(G,\ T,\ F)$ 的原点，并在表述中省略它。

首先，根据 的构造，我们可以看出特征 $\phi_i|_{T_{r_i}/T_{r_i+}}=\rho_{i-1}|_{T_{r_i}/T_{r_i+}}$ 可以由好元素表示 $a_{i-1}\in\mathfrak{g}^{i-1}\simeq(\mathfrak{g}^{i-1})^*$。如果我们通过限制将 a_{i-1} 视为 $(\mathfrak{g}^i)^*$ 中的一个元素，那么它属于 $(\mathfrak{g}^i)^*_{-r_i}\backslash(\mathfrak{g}^i)^*_{-r_i+}$。此外，根据定理 4.3.2.1，我们可以看出

that $a_{i-1}(\mathrm{d}\alpha^\vee(1)) = B_{i-1}(a_{i-1}, \mathrm{d}\alpha^\vee(1)) = 0$. 根据良元素的定义，对于任意 $\alpha \in \Phi_E(G^{i-1},T)\backslash\Phi_E(G^i,T)$, 我们有 $\mathrm{val}(\mathrm{d}\alpha(a_{i-1})) = -r_i$。因此，对于任意 $\alpha \in \Phi_E(G^{i-1},T)\backslash\Phi_E(G^i,T)$，由公式 (4.3.2.2) 可得，

$$\mathrm{val}(a_{i-1}(\mathrm{d}\alpha^\vee(1)) = \mathrm{val}(B_{i-1}(a_{i-1}, d\alpha^\vee(1)) = \mathrm{val}(m_\alpha\alpha(a_{i-1})) = -r_i,$$

这意味着 ϕ_i 是深度为 r_i的 G^{i-1}-泛型。 □

4.3.3 零深度数据与建筑物的泛型嵌入

我们已经定义了扭曲 Levi 序列 $\vec{G}$、 $M^d = T$ 以及特征标序列 $\vec{\phi}$，连同实数序列 $\vec{r}$。设 $K_{M^d} = {}^0T$ 为环面 T的唯一极大开紧子群，并设 $\rho_{M^d} = \rho_d = (\phi_1^{-1}\otimes\cdots\otimes\phi_d^{-1})|_{{}^0T}\otimes{}^0\chi$，它是 ${}^0T$上的一个零深度特征。设 $\vec{s} = (r_2/2, r_3/2, \ldots, r_d/2, 0)$。我们可以看到，序列 $\vec{M} = (M^1, \ldots, M^d)$只是由极大环面 T构成的常数序列。我们任取一点 $y \in \mathcal{B}(T,F)$，并将其映到 $\mathcal{A}(G^d,T,F)$中的一点，该点同样记为 y，使得对任意 $\alpha \in \phi_E(G,T)^+$，都有 $0 < \langle\alpha, y\rangle < 1/2$。此嵌入是 $\vec{s}$-泛型的，相应的嵌入 ι: $\mathcal{B}(T,F) \to \mathcal{B}(G^d,F)$是0-泛型的。

结合上述三个部分，我们构造出一个 G-数据，其对应的类型属于主块 $\mathfrak{s} = ({}^0T, {}^0\chi)$。

4.4 类型的具体描述

本小节中，我们将具体描述刚刚构造的类型（K， ρ），并完成定理 4.1.1 的证明。

首先，我们想详细描述序列 $\vec{r}$。我们有如下定理:

定理 4.4.1. 若 $\alpha \in \Phi_E(G^{i-1},T)\backslash\Phi_E(G^i,T)$ 对于某个满足 $2 \le i \le d$ 的整数 i 成立，则 $\mathrm{cond}(\alpha) = r_i + 1$。若 $\alpha \in \Phi_E(G^d,T)$，则 $\mathrm{cond}(\alpha) = 1$。

证明。我们先考虑特殊情形 $\alpha \in \Phi_E(G^d,T)$。首先，由特征标序列的构造可知，$(\chi_1\otimes\cdots\otimes\chi_d)$ 在 $(T^d)'$ 上是平凡的。这说明 ${}^0\chi|_{0(T^d)'} = \rho_{M^d}|_{0(T^d)'}$。此外， $\alpha^\vee(1+\mathfrak{p}_E) \subset {}^0(T^d)'(E)$，且范数映射诱导出一个满射，从 ${}^0(T^d)'(E)$ 到 ${}^0(T^d)'(F)$（见 [[Hai12], 引理 8.2.1] 的证明）。这些都推出 ${}^0\chi_E \circ \alpha^\vee|_{1+\mathfrak{p}_E} = \rho_{M^d}\circ N_E\circ\alpha^\vee|_{1+\mathfrak{p}_E}$。然而， ρ_{M^d} 是一个零深度特征，这意味着它在$T_{0+} = T(F)_1$上是平凡的。由此可得 $\mathrm{cond}(\alpha) = 1$。

接下来，我们考虑 $\alpha \in \Phi_E(G^{i-1},T)\backslash\Phi_E(G^i,T)$ 的情形。对于任意 $s \ge i-1$, $N_E\circ\alpha^\vee \subset (T^s)'$，因此 $\chi_s\circ N_E\circ\alpha^\vee$ 将是平凡的。所以， $\rho_i\circ N_E\circ\alpha^\vee = {}^0\chi_E\circ\alpha^\vee$。由定理 4.3.2.1， ρ_{i-1} 的深度为 r_i，因此 ${}^0\chi_E\circ\alpha^\vee(1+\mathfrak{p}_E^{r_i+1}) = 1$。特征 $\rho_i|_{T_{r_i}/T_{r_i+}}$ 可由好元素 a_{i-1} 表示。回顾一下，$\mathrm{val}(B_{i-1}(a_{i-1},\alpha^\vee(1))) = -r_i$。因此，存在一个元素 $u \in \mathfrak{p}^{r_i}$，使得 $\psi\circ B_{i-1}(a_{i-1},\alpha^\vee(u)) \ne 0$。由同构 $\alpha^\vee(1+\mathfrak{p}_E^{r_i})/\alpha^\vee(1+\mathfrak{p}_E^{r_i+1}) \simeq \alpha^\vee(\mathfrak{p}_E^{r_i})/\alpha^\vee(\mathfrak{p}_E^{r_i+1})$，以及迹映射 $\mathrm{T}: k_E \to k_F$ 是满射这一事实，我们可以找到一个元素 $v \in 1+\mathfrak{p}_E^{r_i}$，使得 $\rho_i\circ N\circ\alpha^\vee(v) \ne 1$。因此，$\mathrm{cond}(\alpha) = r_i + 1$。证明完毕。 □

与第 4.2 节中一样，群 $K = K_{M^d}G^d_{y,0}G^{d-1}_{y,r_d/2}\cdots G^1_{y,r2/2} = G^d_{y,0}G^{d-1}_{y,r_d/2}\cdots G^1_{y,r2/2}$。由条件 D3 可知， K 中出现的每个根的深度恰为 $f_{\mathfrak{s}}(\alpha)$。根据 [Yu01，引理 2.10]，我们可知 $K = (G^d(E)_{y,0}G^{d-1}(E)_{y,r_d/2}\cdots G^1(E)_{y,r2/2})^h = (J_{E,\mathfrak{s}})^h = J_{\mathfrak{s}}$。定理 4.1.1 的证明完成。

注 4.4.2. 事实上， *[Yu01 引理 2.10]*中的条件比这里的条件稍强一些。在该引理中，我们要求序列的最后一项非零，但在我们的情形中它为零。如果域扩张是非分歧的，这不会造成任何影响。对于非分歧域扩张 E/F，我们有如下事实：$(G^d(E)_{y,0})^h = G^d(F)_{y,0}$。换言之， $G^d(E)$ 中一个 *Iwahori* 子群的伽罗瓦不动点也将是 $G^d(F)$中的一个 *Iwahori* 子群。利用这一点，我们可以直接照搬前引文献中的证明，因此省略这里的细节。

推论 4.4.3。 *Hecke* 代数 $\mathcal{H}(G,\rho_{\mathfrak{s}})$ 的支集为 $J_{\mathfrak{s}}W_{0\chi}J_{\mathfrak{s}}$，其中 W 表示 G 的扩张仿射韦伊群，而 $W_{0\chi}$ 表示 W 中所有固定特征${}^0\chi$的元素。

证明。 这直接来自 [KY17，推论 8。2] 或 [Roc98，定理 4。15]。 □

5 伯恩斯坦中心、稳定伯恩斯坦中心与基变换同态

本节将回顾伯恩斯坦中心、稳定伯恩斯坦中心和基变换同态的概念 b_r。我们的许多表述和记号取自 [Hai14] 和[Hai12]。

我们沿用此前的所有记号。设 G 是定义在 F 上的任意连通约化非分歧群。对于任意代数群 H，用 F_r 表示其 H_r 点。

5.1 主块上的代数簇结构

设 $\mathfrak{s}=({}^0T,\ {}^0\chi)_G$ 是 $\mathfrak{B}(G)$ 的一个主类，并设 χ 是 ${}^0\chi$ 到特征χ 的任意延拓： $T\to\mathbb{C}^\times$。令 $\mathfrak{X}_\mathfrak{s}=\{(T,\ \xi)_G\}$ 表示 G 等价类在 $\mathfrak{s}$中的全体。于是，根据[Hai14，§3。3], 我们有如下双射：

$$\begin{aligned}\hat{A}/W_{0\chi} &\xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_\mathfrak{s}\\ \eta &\to (T,\chi\eta)_G\end{aligned}$$

其中 $\hat{}A=\mathrm{Hom}(X_*(A)\ \mathbb{C}^\times)$ 且 $\eta\in\hat{}A$ 被视为定义在 $T(F)$ 上的非分歧特征（参见 [Hai12，§3。2]）。因此，集合 $\mathfrak{X}_\mathfrak{s}$ 可以视为一个仿射代数簇。注意，仿射代数簇的结构仅取决于特征 ${}^0\chi$。

如 [Roc98 所述，§7], 对于第$J_\mathfrak{s}$、 $\rho_\mathfrak{s}$4 节构造的类型（$J_\mathfrak{s}$，$\rho_\mathfrak{s}$），主块 $\mathfrak{R}_\mathfrak{s}$($G$自然等价于 $\mathcal{H}(G,\ \rho_\mathfrak{s})$-模范畴，这一等价由同构给出

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{s}(G)\to\mathcal{H}(G,\rho_\mathfrak{s})\text{-modules}: V\to V^{\rho_\mathfrak{s}},$$

其中 $V^{\rho_\mathfrak{s}}$ 表示 $\rho_\mathfrak{s}$-同型分量子空间。根据 V，由 [Hai12，§3.4], 我们有同构

$$\beta:\mathbb{C}[\mathfrak{X}_\mathfrak{s}]\xrightarrow{\sim}\mathcal{Z}(G,\rho_\mathfrak{s}) \tag{5.1.1}$$

如下所示：对于任意形如 $\xi=\chi\eta$ 的延拓 $\xi: T\to\mathbb{C}^\times$，其中 η 且 T 是非分歧特征，考虑 $i_B^G(\xi)$ 中的子空间 $i_B^G(\xi)^{\rho_\mathfrak{s}}$。那么，对于元素 $z\in\mathcal{Z}(G,\rho_\mathfrak{s})$，它在子空间 $i_B^G(\xi)^{\rho_\mathfrak{s}}$ 上的作用为标量 $\beta^{-1}(z)(\xi)$。容易看出，函数 $\beta^{-1}(z)$ 定义良好，因为对于任意元素 $w\in W$， z 在子空间 $i_B^G(\xi)^{\rho_\mathfrak{s}}$ 上的作用与 z 在 $i_B^G({}^w\xi)^{\rho_\mathfrak{s}}$ 上的作用相同。

为结束本小节，我们给出 $\mathcal{H}(G,\rho)$ 在 $i_B^G(\xi)^{\rho_\mathfrak{s}}$ 上的一个具体作用。我们将该作用记为 $\bullet$。那么对于任意 $f\in\mathcal{H}(G,\rho)$、 $h\in i_B^G(\xi)^{\rho_\mathfrak{s}}$ 和 $g_0\in G$，我们有

$$\begin{aligned}(f\bullet h)(g_0)&=\int_G h(g)f^\vee(g^{-1}g_0)\,dg\\ &=\int_G h(g)f(g_0^{-1}g)\,dg,\end{aligned}$$

其中 $f^\vee(g):=f(g^{-1})$。注意，根据上面的讨论，我们有

$$f\bullet h(g_0)=\beta(f)(\xi)\cdot h(g_0)$$

对于任意 $f\in\mathcal{Z}(G,\rho)$。

5.2 伯恩斯坦中心

伯恩斯坦中心 $\mathfrak{Z}(G)$ 定义为光滑表示范畴 $\mathfrak{R}(G)$ 上恒等函子的自同态环。令 $\mathcal{D}(G)_{ec}^G$ 表示 G-不变的本质紧支撑分布在 $C_c^\infty(G)$ 上的集合。根据 [Hai14，方程 3.2，2], 我们有如下同构

$$\mathfrak{Z}(G)\xleftarrow{\sim}\varprojlim\mathcal{Z}(G,J)\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}(G)_{ec}^G, \tag{5.2.1}$$

其中 J是 $G(F)$ 的开紧子群， $\mathcal{Z}(G, J)$ 表示环 $\mathcal{H}(G, J)$ 的中心，该环由J-双不变紧支撑函数构成；逆极限取遍所有紧开子群 J。

与上面的小节类似，对于每个惯性类 $\mathfrak{s} = [M, \sigma]_G$，我们赋予集合 $\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}} = \{(L, \tau)_G \mid (L, \tau) \sim (M, \sigma)\}$ 簇结构（详见 [Hai14, §3.3.1]）。定义

$$\mathfrak{X}_G = \coprod_{\mathfrak{s}} \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}.$$

我们将看到， $\mathfrak{X}_G$ 具有自然的代数簇结构，而 $\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}$构成该代数簇的连通分支。根据 [Hai14, §3.3.2], , 元素 $Z \in \mathfrak{Z}(G)$ 确定了$\mathfrak{X}_G$上的一个正则函数：对于点 $(M, \sigma)_G \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}$， Z通过标量 $Z(\sigma)$ 作用于 $i_P^G(\sigma)$，且函数 $(M, \sigma)_G \to Z(\sigma)$ 是 $\mathfrak{X}_G$上的正则函数。事实上，我们有一个同构

$$\mathfrak{Z}(G) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{X}_G]. \tag{5.2.2}$$

通过直接计算并核对定义，我们得到以下命题：

命题 *5.2.1*。设 $Z \in \mathfrak{Z}(G)$，并假设 Z 通过标量 $Z(\chi)$ 作用于 $\pi = i_B^G(\chi)$，其中χ 是 $T(F)$上的一个特征。令 $(J_{\mathfrak{s}}, \rho_{\mathfrak{s}})$ 为第 *4* 节中针对惯性等价类 $\mathfrak{s} = [T, \chi]_G$ 构造的类型。用 $\mathcal{H}(G, \rho_{\mathfrak{s}})$ 中的单位元表示为 $e_{\rho_{\mathfrak{s}}}$。则有以下陈述：

(a) $Z * e_{\rho_{\mathfrak{s}}}$ 属于 $\mathcal{Z}(G, \rho_{\mathfrak{s}})$，且 $Z * e_{\rho_{\mathfrak{s}}}$ 通过标量 $Z(\chi)$作用于 $\pi^{\rho_{\mathfrak{s}}}$。

(b) 更一般地，假设 π 只是一个光滑有限长度表示，且 Z 通过标量 $Z(\pi)$作用于它。那么对于每个 $f \in \mathcal{H}(G)$，都有$\mathrm{tr}(Z * f \mid \pi) = Z(\pi)\mathrm{tr}(f \mid \pi)$。

令 $\mathfrak{B}(G)_{\mathrm{ps}}$ 表示所有主系列块的集合，并令$\mathfrak{X}_G^{\mathrm{ps}} = \coprod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)_{\mathrm{ps}}} \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}$。记 $\mathfrak{X}_G^{\mathrm{ps}}$ 上的正则函数环为 $\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}$。对于任意 $Z \in \mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}$，将其平凡地延拓到所有非主块后，我们可以将其视为 $\mathfrak{Z}(G)$中的一个元素。因此，我们可以将 $\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}$ 视为$\mathfrak{Z}(G)$的一个子集。注意，这只是 $\mathfrak{Z}(G)$的一个子集，而非子环。不过，该子集在 $\mathfrak{Z}(G)$的乘法和加法下封闭。因此，我们可以在 $\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}$ 上赋予环结构。由于$\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}$ 是 $\mathfrak{Z}(G)$的子集，它在 $\mathcal{H}(G)$上有一个卷积作用。

根据定理 5.2.1(a)，我们得到如下推论：

推论 5.2.2。 $\mathcal{Z}(G, \rho_{\mathfrak{s}})$ 中的任意元素都可以写成 $Z * e_{\rho_{\mathfrak{s}}}$ 的形式，其中 $Z \in \mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}$。

接下来，我们将回顾常数项同态的定义。固定一个标准 Levi 子群 M、一个标准抛物子群 $P = MN$以及一个惯性等价类 $\mathfrak{s}_M = [M', \sigma]_M \subset \mathfrak{B}(M)$。令 $\mathfrak{s} = [M', \sigma]_G$为 G中相应的惯性等价类。存在一个簇的规范满射态射

$$\begin{aligned} c_M^{G*} : \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}_M} &\to \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}} \\ (L, \tau)_M &\to (L, \tau)_G. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

如果将态射 c_M^G限制在形如 $(T, \xi)_M$的一对上，其中 T表示极大环面，且ξ是 T上的复特征，那么我们便得到一个从 $\mathfrak{X}_M^{\mathrm{ps}}$到 $\mathfrak{X}_G^{\mathrm{ps}}$ 的态射；对此我们仍使用同一符号 c_M^{G*}表示。该态射诱导出一个代数同态

$$c_M^G : \mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}} \to \mathfrak{Z}(M)_{\mathrm{ps}}. \tag{5.2.4}$$

我们称 c_M^G 为常数项同态，对于任意 $Z \in \mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}$，我们将像记为 $(Z)_P$。

5.3 稳定伯恩斯坦中心

5.3.1 局部朗兰兹对应

这里我们回顾连通约化 p进群的猜想性局部 Langlands 对应（LLC）的一般形式。令 F 为一个 p进域， F 表示 F的代数闭包。令 $W_F \subset \Gamma_F := \mathrm{Gal}(F/F)$表示 F的 Weil 群， I_F表示 Γ_F的惯性子群。我们固定一个几何 Frobenius 元 $\Phi \in W_F$。令 $W_F' := W_F \ltimes \mathbb{C}$ 表示 Weil-Deligne 群。

Langlands 参数是一个可容许同态 $\varphi: W_F' \to {}^L G$，其中 ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$ˆ表示朗兹对偶群。用 $\Phi(G/F)$表示可容许同态$\varphi: W_F' \to {}^L G$的 G-共轭类集合，并令 $\Pi(G/F) = \mathfrak{R}(G)_{\text{irred}}$表示 $G(F)$的不可约光滑表示的同构类。

猜想 5.3.1.1 (局部 Langlands 对应)。 存在一个有限对一的满射 $\Pi(G/F) \to \Phi(G/F)$，它满足 *[Bor79, §10]* 中的要求。

5.3.2 稳定伯恩斯坦中心及其与伯恩斯坦中心的关系

在本小节中，我们将假设群 +满足局部 Langlands 对应 G （参见 [Hai14，定义 5.2。1] 详见相关内容）。对于 π 的任意不可约光滑表示 G，我们将 φ_π 记为局部 Langlands 对应所附带的参数。

ˆ我们将一个可容许同态的 G-共轭类称为

$$\lambda : W_F \to {}^L G$$

ˆ无穷小特征。将 λ 的 G-共轭类记作 $(\lambda)_{\hat{G}}$。

按照 [Hai14，§5.3], 我们可以将所有无穷小特征构成的集合视为一个仿射代数簇，并记作 $\mathfrak{Y}_G$。令 $\mathfrak{Z}^{\text{st}}(G)$ 表示仿射代数簇 $\mathfrak{Y}$上的正则函数环。我们称此环为 G/F的稳定伯恩斯坦中心。

我们有以下命题，见 [Hai14，命题 5.5.1 和推论 5.5。2] ：

命题 5.3.2.1。 假设 *LLC+*对 G成立。映射 $(M,\sigma)_G \to (\varphi_\sigma|_{W_F})_{\hat{G}}$ 定义了仿射代数簇之间的一个准有限态射

$$f : \mathfrak{X}_G \to \mathfrak{Y}_G.$$

当 G/F 准分裂时，该映射是满射。

此外， f 诱导一个 $\mathbb{C}$-代数同态 $\mathfrak{Z}^{\text{st}}(G) \to \mathfrak{Z}(G)$。当 G/F 准分裂时，该映射是单射。

为了完成这一部分，我们将介绍一种构造分布的方法。设 (τ, V) 是 ${}^L G$ 在复向量空间上的一个有限维代数表示。给定一个几何 Frobenius 元 $\Phi \in W_F$ 和一个可容许同态 $\lambda: W_F \to {}^L G$，我们可以定义半单迹

$$\text{tr}^{\text{ss}}(\lambda(\Phi), V) := \text{tr}(\tau\lambda(\Phi), V^{\tau\lambda(I_F)}).$$

命题 5.3.2.2 ([Hai14，命题 5.7。1])。 映射 $\lambda \to \text{tr}^{\text{ss}}(\lambda(\Phi)\ V)$ 在代数簇上定义了一个正则函数 $\mathfrak{Y}$，因而定义了一个元素 $Z_V \in \mathfrak{Z}^{\text{st}}(G)$ 如下

$$Z_V((\lambda)_{\hat{G}}) = \text{tr}^{\text{ss}}(\lambda(\Phi), V).$$

我们用同一个符号 Z_V 表示通过 $\mathfrak{Z}^{\text{st}}(G) \to \mathfrak{Z}(G)$给出的 $\mathfrak{Z}(G)$ 中的相应元素。后者具有以下性质

$$Z_V(\pi) = \text{tr}^{\text{ss}}(\varphi_\pi(\Phi), V) \tag{5.3.2.1}$$

对每个 $\pi \in \Pi(G/F)$，其中 $Z_V(\pi)$ 表示 $Z_V((M,\sigma)_G)$，若 $(M,\sigma)_G$ 是 π的超尖支撑。

备注 5.3.2.3. 事实上，为了陈述并证明定理*1.6*，我们不需要局部 *Langlands* 对应+ 和稳定伯恩斯坦中心。主要结果在没有局部 *Langlands* 对应+的情况下仍然成立。我们回顾稳定伯恩斯坦中心的定义及其与伯恩斯坦中心的关系，以便将这一结果与 *Haines* 提出的普遍猜想联系起来。

5.4 基变换同态

5.4.1 主系列块的基变换同态

回顾一下，在上文各节中，我们将集合 $\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}$ 视为一个仿射代数簇。那么，对于任意主类 $\mathfrak{s} = ({}^0T, {}^0\chi)_G$，我们都可以在 G_r 上得到相应的主类 $\mathfrak{s}_r = ({}^0T_r, {}^0\chi \circ N_r)_{G_r}$，其中

N_r 表示从 T_r 到 T 的范数映射。因此，我们可以定义一个态射 N_r^*: $\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}} \to \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}_r}$，将 $(T,\xi)_G$ 映射到 $(T_r, \xi \circ N_r)_{G_r}$。这诱导出一个代数同态，也记作 N_r:

$$N_r : \mathbb{C}[\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}_r}] \to \mathbb{C}[\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}]. \tag{5.4.1.1}$$

定义 5.4.1.1 ([Hai12，定义 4.1。1])。 基变换同态 b_r： $\mathcal{Z}(G, \rho_{\mathfrak{s}_r}) \to \mathcal{Z}(G, \rho_{\mathfrak{s}})$ 是使下图交换的唯一映射:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}_r}] & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{Z}(G_r, \rho_{\mathfrak{s}_r}) \\ \downarrow{\scriptstyle N_r} & & \downarrow{\scriptstyle b_r} \\ \mathbb{C}[\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}] & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{Z}(G, \rho_{\mathfrak{s}}) \end{array}$$

注意到，态射 N_r^*可以延拓为从 $\mathfrak{X}_G^{\mathrm{ps}}$ 到 $\mathfrak{X}_{G_r}^{\mathrm{ps}}$ 的态射。这诱导出一个从 $\mathfrak{Z}(G_r)_{\mathrm{ps}}$ 到 $\mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}$的代数同态，对此我们同样用 b_r 表示:

$$b_r : \mathfrak{Z}(G_r)_{\mathrm{ps}} \to \mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}}. \tag{5.4.1.2}$$

根据基变换同态的定义，我们有

$$b_r(Z_r * e_{\rho_{\mathfrak{s}_r}}) = b_r(Z_r) * e_{\rho_{\mathfrak{s}}} \tag{5.4.1.3}$$

对任意 $Z_r \in \mathfrak{Z}(G_r)_{\mathrm{ps}}$。

由 [Hai12，§5.1], 我们得到以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Z}(G_r)_{\mathrm{ps}} & \xrightarrow{c_{M_r}^{G_r}} & \mathfrak{Z}(M_r)_{\mathrm{ps}} \\ \downarrow{\scriptstyle b_r} & & \downarrow{\scriptstyle b_r} \\ \mathfrak{Z}(G)_{\mathrm{ps}} & \xrightarrow{c_M^G} & \mathfrak{Z}(M)_{\mathrm{ps}} \end{array} \tag{5.4.1.4}$$

5.4.2 稳定伯恩斯坦中心的基变换同态

再次，设 F_r/F 是一个有限非分歧域扩张。则 $W_{F_r} \subset W_F$ 和 $I_{F_r} = I_F$。令 $\mathfrak{Y}^{G/F}$（分别为 $\mathfrak{Y}^{G/F_r}$）表示与 G（分别为 G_r）相伴的无穷小特征代数簇。

命题 5.4.2.1 ([Hai14，命题 5.4.1])。 映射 $(\lambda)_{\widehat{G}} \to (\lambda|_{W_{F_r}})_{\widehat{G}}$ 确定了一个代数簇态射 $\mathfrak{Y}^{G/F_r} \to \mathfrak{Y}^{G/F}$。

定义 5.4.2.2。 我们将相应的映射 b_r'： $\mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G_r) \to \mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G)$ 称为稳定伯恩斯坦中心的基变换同态。

根据定理 5.3.2.1，如果我们假设局部 Langlands 对应+ 对 G成立，那么对于任意元素 $Z \in \mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G)$，我们可以将其视为伯恩斯坦中心中的元素 $\mathfrak{Z}(G)$，我们也将其记作 Z。因此， $\mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G)$ 也可以作用于 $\mathcal{H}(G)$进行卷积。我们有以下引理:

引理 5.4.2.3。 对于 $Z_r \in \mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G_r)$，我们有

$$b_r(Z_r * e_{\rho_{\mathfrak{s}_r}}) = b_r'(Z_r) * e_{\rho_{\mathfrak{s}}}.$$

证明。 根据 [KV12，引理 8.1。3], 我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{conts}}(T(F), \mathbb{C}^\times) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{conts}}(W_F, {}^L T) \\ \downarrow{\scriptstyle N_r} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{conts}}(T(F_r), \mathbb{C}^\times) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{conts}}(W_{F_r}, {}^L T_r) \end{array}$$

这立即得出了该引理 □

6 下降公式

本节中，我们将推导另一种形式的下降公式，以将情形化简为椭圆半单元素的情形。

固定一个主类 $\mathfrak{s}=({}^0T,\ {}^0\chi)$。在后续所有章节中，我们将省略下标 $\mathfrak{s}$。此外，我们将使用符号 $(J,\ \rho)$ 和 $(J_r,\ \rho_r)$ 来代替 $(J_{\mathfrak{s}},\ \rho_{\mathfrak{s}})$ 和 $(J_{\mathfrak{s}_r},\ \rho_{\mathfrak{s}_r})$。另外，根据定理 5.2.2和等式 (5.4.1.3)，我们只研究形如 $Z_r * e_{\rho_r}$ 的元素，其中 $Z_r \in \mathfrak{Z}(G_r)^{\mathrm{ps}}$。

6.1 下降公式的准备工作

固定哈尔测度 $\mathrm{d}g^i$，$\mathrm{d}g^j$，$\mathrm{d}g_r^i$，$\mathrm{d}g_r^j$，分别定义在 G，G_r 上，使得 $\mathrm{vol}^{\mathrm{d}g^i}(I)=\mathrm{vol}^{\mathrm{d}g^j}(J)=\mathrm{vol}^{\mathrm{d}g_r^i}(I_r)=\mathrm{vol}^{\mathrm{d}g_r^j}(J_r)=1$。

假设 $\delta\in G_r$ 是一个 θ-半单元素，且 $\gamma=\mathcal{N}\delta$ 非椭圆。记中心化子 G_γ° 的中心的 F-分裂部分为 S。令 $M=\mathrm{Cent}_G(S)$，这是一个 F-Levi 子群。由于 γ 非椭圆，M 是 G 的真 Levi 子群，且 γ 在 M 中是椭圆的。我们还可以假设 M 是标准的，并选取一个标准的 F-抛物子群 $P=MN$，其 Levi 因子为 M（否则可以用 γ 的共轭替换它）。根据 Hai09，引理 4.2.1]，γ 将是 M_r 中某些元素的范数。因此，我们可以假设 $\delta\in M_r$。总之，我们将假设 $\gamma\in M$ 是一个非椭圆半单元素，且 γ 在 M 中是椭圆的，并且 $\gamma=\mathcal{N}\delta$ 对某个 $\delta\in M_r$ 成立。

$G_{\delta\theta}$ 关于 $\delta\theta$ 的扭曲中心化子是 G_γ 的一个内形式，其 F点群为

$$G_{\delta\theta}(F)=\{g\in G_r\mid g^{-1}\delta\theta(g)=\delta\}.$$

出于维数方面的原因，我们有 $M_{\delta\theta}^\circ=G_{\delta\theta}^\circ$。我们在内形式 $G_{\delta\theta}^\circ$ 和G_γ°上选取相容测度，并用它们构造 $\phi\in C_c^\infty(G_r)$的（扭曲）轨道积分中的商测度 $d\bar{g}$。根据定义，我们有

$$\mathrm{TO}_{\delta\theta}^{G_r}(\phi)=\int_{G_{\delta\theta}^\circ\backslash G_r}\phi(g^{-1}\delta\theta(g))\,d\bar{g}. \tag{6.1.1}$$

我们还需要为同一个主块定义另一种类型：

引理 6.1.1。设 $\rho_r^I:=\mathrm{Ind}_{J_r}^{I_r}\rho_r$。那么 (I_r,ρ_r^I) 也是 $\mathfrak{s}_r$的一种类型。

证明。由弗罗贝尼乌斯互反律可知，

$$\mathrm{Hom}_{J_r}(\rho_r,\sigma)=\mathrm{Hom}_{I_r}(\rho_r^I,\sigma)$$

对任意 σ 的 G_r表示都成立。因此我们只需证明 ρ_r^I 是不可约的。由定理4.4.3可知，(J_r,ρ_r)在 I_r 中的交织算子恰为 J_r 本身。于是由 Mackey 理论，ρ_r^I是 I_r的一个不可约表示。□

按照 [Hai]，，我们定义 $e_{\rho_r^I}\in\mathcal{H}(G_r)$ 为

$$e_{\rho_r^I}(x)=\begin{cases}\dim(\rho_r^I)\ \mathrm{tr}(\rho_r^I(x^{-1})), & x\in I_r\\ 0, & x\notin I_r.\end{cases}$$

对于 G_r 的任意表示 $(\pi,\ V)$，令 $V^{\rho_r^I}$表示 V 的 ρ_r^I-等型分量。于是我们有$V^{\rho_r^I}=e_{\rho_r^I}V$。

接下来，我们将 $e_{\rho_r^I}$ 的扭曲轨道积分与e_{ρ_r} 的扭曲轨道积分进行比较（对于非扭曲版本，只需取 $r=1$）。我们有如下命题：

命题 6.1.2. 对于任意 θ-半单元素 $\delta\in G(F_r)$，我们有

$$\mathrm{TO}_{\delta\theta}^{G_r}(e_{\rho_r^I})=[I:J]\ \mathrm{TO}_{\delta\theta}^{G_r}(e_{\rho_r}),$$

其中，第一个积分使用哈尔测度$\mathrm{d}g_r^i$，第二个积分使用哈尔测度$\mathrm{d}g_r^j$。

证明。取一个 θ-稳定表示（π, V），它属于 G_r，并带有交织算子 I_θ。根据 Kazhdan 密度定理的扭曲版本（参见 [KR00]），我们只需证明 $\mathrm{tr}(e_{\rho_r^I} I_\theta|V) = [I\colon J]\,\mathrm{tr}(e_{\rho_r} I_\theta|V)$，其中左边使用哈尔测度 $\mathrm{d}g_r^i$，右边使用哈尔测度 $\mathrm{d}g_r^j$。给定这些哈尔测度后，这两个函数分别诱导从 V 到 $V^{\rho_r^I}$ 以及V^{ρ_r}的投影。结合 ρ_r^I 也 θ-稳定这一事实，我们可得

$$\mathrm{tr}(e_{\rho_r^I} I_\theta|V) = \mathrm{tr}(I_\theta|V^{\rho_r^I}),$$

$$\mathrm{tr}(e_{\rho_r} I_\theta|V) = \mathrm{tr}(I_\theta|V^{\rho_r}).$$

因此，我们只需证明 $\mathrm{tr}(I_\theta|V^{\rho_r^I}) = [I\colon J]\,\mathrm{tr}(I_\theta|V^{\rho_r})$。我们选取 $\mathrm{Hom}_{J_r}(\rho_r, V)$ 的一个基，记为 $\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$。根据弗罗贝尼乌斯互反律，若将 $\mathrm{Hom}_{J_r}(\rho_r^I, V)$ 中相应的元素记为 ϕ_i'，则集合 $\{\phi_1', \cdots, \phi_n'\}$ 将构成 $\mathrm{Hom}_{J_r}(\rho_r^I, V)$ 的一个基。

这里，我们回顾弗罗贝尼乌斯互反律的显式形式：固定 $J_r\backslash I_r$ 的左陪集代表元集合，记为 $\{i_1, \cdots, i_l\}$。我们对 $1 \le k \le l$ 定义函数 f_k 如下：

$$f_k(x) = \begin{cases} \rho_r(j), & \text{if } x \in J_r i_k \text{ and } x = j i_k \text{ for } j \in J_r, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，弗罗贝尼乌斯互反律的显式形式如下：

$$\phi_h'(f_k) = \sum_{x \in I_r/J_r} \pi(x)\phi_h(f_k(x^{-1})).$$

集合 $\{\phi_h(1)\}_{1\le h\le n}$ 和 $\{\phi_h'(f_k)\}_{1\le h\le n,\ 1\le k\le l}$ 分别构成 V^{ρ_r} 和 $V^{\rho_r^I}$ 的基。设对于某些复数 a_{hq}, $1 \le h,\ q \le n$，有 $I_\theta(\phi_h(1)) = \sum_{1\le q\le n} a_{hq}\phi_q(1)$。则有

$$\begin{aligned} I_\theta(\phi_h'(f_k)) &= I_\theta\Big(\sum_{x\in I_r/J_r} \pi(x)\phi_h(f_k(x^{-1}))\Big) \\ &= \sum_{x\in I_r/J_r} \pi(\theta(x)) I_\theta(\phi_h(f_k(x^{-1}))) \\ &= \sum_{x\in I_r/J_r} \pi(\theta(x)) I_\theta(\phi_h({}^\theta f_k((\theta(x))^{-1}))) \\ &= \sum_{x\in I_r/J_r} \pi(\theta(x)) \sum_{1\le q\le n} a_{hq}\cdot\phi_h({}^\theta f_k((\theta(x))^{-1})) \\ &= \sum_{1\le q\le n} a_{hq}\cdot\phi_q'({}^\theta f_k), \end{aligned}$$

其中 ${}^\theta f_k(x) = f_k(\theta^{-1}(x))$。我们可以看到，只有满足 k 且 $\theta(J_r i_k) = J_r i_k$ 的那些对象才可能对迹有贡献。由 [Yu01，命题 2.2], 可知 $H^1(\mathrm{Gal}(F_r/F)\ J_r) = 1$。因此，$(J_r\backslash I_r)^\theta = J\backslash I$，我们可以选取 i_k，使得对所有此类 k，$\theta(i_k) = i_k$。于是，对所有此类 k，$I_\theta(\phi_h'(f_k)) = \sum_{1\le q\le n} a_{hq}\,\phi_q'({}^\theta f_k)$ $= \sum_{1\le q\le n} a_{hq}\cdot\phi_q'(f_k)$。因此，$\mathrm{tr}(I_\theta|V^{\rho_r^I}) = [I\colon J]\ \sum_{1\le h\le n} a_{hh} = [I\colon J]\,\mathrm{tr}(I_\theta|V^{\rho_r})$。证明完毕。□

6.2 下降公式

选取 K_r 作为 G_r 的一个极大紧子群，该子群相对于 P 处于良好位置，并且在 θ作用下稳定。对于任意 $\phi \in C_c^\infty(G_r)$，我们将常数项 ϕ_P 定义如下：

$$\phi_{P_r}(m) = \delta_{P_r}^{1/2}(m)\int_{N_r}\int_{K_r} \phi(k^{-1}mn\theta(k))\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}n$$

其中，哈尔测度 $\mathrm{d}k$ 的选取满足 $\mathrm{vol}_{\mathrm{d}k}(K_r) = 1$，而哈尔测度 $\mathrm{d}n$ 的选取满足 $\mathrm{vol}_{\mathrm{d}n}(K_r \cap N_r) = 1$。注意，$\phi_{P_r} \in C_c^\infty(G_r)$。以下基本下降公式引自 [Lau96，命题 4.4。9]:

命题 6.2.1。 设 M是 F-*Levi* 子群 G的一个 $P=MN$，且 F-有理抛物子群的 *Levi* 因子为 M。设给定一个具有范数 $\gamma=\mathcal{N}\delta\in G$的 θ-半单 $\delta\in G_r$，并满足性质 $G^\circ_{\delta\theta}\subset M$。则

$$\mathrm{TO}^{G_r}_{\delta\theta}(\phi)=|D_{G/M}(\gamma)|^{-1/2}\mathrm{TO}^{M_r}_{\delta\theta}(\phi_{P_r}) \tag{6.2.1}$$

其中 $D_{G/M}(m)$ =行列式$(1-$伴随表示(m^{-1}); 李代数$(G(F))$/李代数$(M(F))$)。

接下来，我们将证明函数 ϕ_{P_r} 的若干重要性质。设 $(\sigma,\ V_r)$ 是 M_r 的一个光滑 θ-稳定有限长度表示。固定一个交织算子 I^M_θ: $\sigma\to\sigma^\theta$ （注意， I^M_θ 在非零标量倍数意义下唯一确定）。我们如下定义相应的交织算子 I_θ: $i^{G_r}_{P_r}(\sigma)\ \to(i^{G_r}_{P_r}(\sigma))^\theta$:

$$(I_\theta\Phi)(g)=I^M_\theta(\Phi(\theta^{-1}g)),$$

对任意 $\Phi\in i^{G_r}_{P_r}(\sigma)$ 和 $g\in G_r$。我们有以下引理:

引理 6.2.2。 设 σ 表示 M_r 的一个光滑 θ-稳定有限长度表示，并带有交织算子I^M_θ。那么对任意 $\phi\in C^\infty_c(G_r)$，有

$$\mathrm{tr}(\phi_{P_r}I^M_\theta\mid\sigma)=\mathrm{tr}(\phi I_\theta\mid i^{G_r}_{P_r}(\sigma)).$$

证明。 参见 [Van72，定理 2]，其中给出了非扭曲版本。扭曲版本的证明方法相同。

□

从这里开始，我们将写出函数e_{ρ_r}的下降公式。我们先考虑函数$e_{\rho^I_r}$和$e_{\rho_{r_\circ}}$。我们不计算轨道积分，而是计算迹。设 (σ,W) 是 M_r的任意不可约表示。于是由定理6.2.2，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(e_{\rho^I_r}I_\theta\mid i^{G_r}_{P_r}(\sigma))&=\mathrm{tr}((e_{\rho^I_r})_PI^M_\theta\mid\sigma)\\&=\mathrm{tr}(I_\theta\mid i^{G_r}_{P_r}(\sigma)^{\rho^I_r}).\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

令 ${}^PW_r$ de 记 $W_{M_r}\backslash W_r$ 的最短长度代表元。我们有精化的 Iwasaw 分解:

$$G_r=\coprod_{w\in{}^PW_r}P_rwI_r. \tag{6.2.3}$$

由麦基理论，我们有

$$i^{G_r}_{P_r}(\sigma)|_{I_r}=\bigoplus_{w\in{}^PW_r}i^{I_r}_{I_r\cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma).$$

将这个同构明确写出，可以看出 I_θ会把 $i^{I_r}_{I_r\cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)$ 中的一个函数映到 $i^{I_r}_{I_r\cap\theta(w)^{-1}P_r}({}^{\theta(w)^{-1}}\sigma)$ 中的一个函数。因此，对迹有贡献的唯一 w来自 $({}^PW_r)^\theta$。由 [[Hai09],引理 4.5.2(c)], $({}^PW_r)^\theta={}^PW$。因此，我们可以将等式 (6.2.2) 改写为

$$\mathrm{tr}(I_\theta\mid i^{G_r}_{P_r}(\sigma)^{\rho^I_r})=\bigoplus_{w\in{}^PW}\mathrm{tr}(I_\theta\mid i^{I_r}_{I_r\cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)^{\rho^I_r}). \tag{6.2.4}$$

根据定理的证明 6.1.2，我们可以将上述迹简化如下:

$$\bigoplus_{w\in{}^PW}\mathrm{tr}(I_\theta\mid i^{I_r}_{I_r\cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)^{\rho^I_r})=[I:J]\bigoplus_{w\in{}^PW}\mathrm{tr}(I_\theta\mid i^{I_r}_{I_r\cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)^{\rho_r}). \tag{6.2.5}$$

再次根据麦基理论，

$$\begin{aligned}i^{I_r}_{I_r\cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)|_{J_r}&=\bigoplus_{u\in I_r\cap w^{-1}P_r\backslash I_r/J_r}i^{J_r}_{J_r\cap u^{-1}(I_r\cap w^{-1}P_r)}({}^{u^{-1}w^{-1}}\sigma)\\&=\bigoplus_{u\in I_r\cap w^{-1}P_r\backslash I_r/J_r}i^{J_r}_{J_r\cap u^{-1}w^{-1}P_r}({}^{u^{-1}w^{-1}}\sigma).\end{aligned}$$

注意，$I_r \cap {}^{w^{-1}}P_r \backslash I_r = I_r \cap {}^{w^{-1}}\bar{N}_r$ 和 $I_r \cap {}^{w^{-1}}P_r \backslash I_r / J_r = (I_r \cap {}^{w^{-1}}\bar{N}_r)/(J_r \cap {}^{w^{-1}}\bar{N}_r)$。根据弗罗贝尼乌斯互反律，我们有

$$\mathrm{Hom}_{J_r}(\rho_r, i^{J_r}_{J_r \cap u^{-1}w^{-1}P_r}({}^{u^{-1}w^{-1}}\sigma)) = \mathrm{Hom}_{J_r \cap u^{-1}w^{-1}P_r}(\rho_r|_{J_r \cap u^{-1}w^{-1}P_r}, {}^{u^{-1}w^{-1}}\sigma|_{J_r \cap u^{-1}w^{-1}P_r}).$$

我们在此指出，σ 被膨胀为 P_r 的一个表示，且 N_r 在该表示上平凡作用。由此可知，对上述迹有贡献的唯一 u必须满足以下性质：

$$\rho_r|_{J_r \cap u^{-1}w^{-1}N_r} = 1. \tag{6.2.6}$$

以下是关于主类 $\mathfrak{s}$的一条重要引理：

引理 6.2.3. 对任意 $w \in {}^P W$，唯一的 $u \in (I_r \cap {}^{w^{-1}}\bar{N}_r)/(J_r \cap {}^{w^{-1}}\bar{N}_r)$ 满足等式(6.2.6)者为单位元。

我们将把证明推迟到下一小节。
现在，利用上述引理，我们可将等式(6.2.5)改写如下：

$$[I:J] \bigoplus_{w \in {}^P W} \mathrm{tr}(I_\theta \mid i^{I_r}_{I_r \cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)^{\rho_r}) = [I:J] \bigoplus_{w \in {}^P W} \mathrm{tr}(I_\theta \mid i^{J_r}_{J_r \cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)^{\rho_r}). \tag{6.2.7}$$

将弗罗贝尼乌斯互反律明确写出后，我们得到

$$\mathrm{tr}(I_\theta \mid i^{J_r}_{J_r \cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)^{\rho_r}) = \mathrm{tr}(I^M_\theta \mid {}^{w^{-1}}\sigma^{\rho_r|_{J_r \cap w^{-1}P_r}}) = \mathrm{tr}(I^M_\theta \mid {}^{w^{-1}}\sigma^{\rho_r|_{J_r \cap w^{-1}M_r}}).$$

用 w对其进行共轭，最终得到以下等式

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(e_{\rho_r} I_\theta \mid i^{G_r}_{P_r}(\sigma)) &= \frac{1}{[I:J]} \mathrm{tr}(e_{\rho_r^I} I_\theta \mid i^{G_r}_{P_r}(\sigma)) \\
&= \bigoplus_{w \in {}^P W} \mathrm{tr}(I_\theta \mid i^{J_r}_{J_r \cap w^{-1}P_r}({}^{w^{-1}}\sigma)^{\rho_r}) \\
&= \bigoplus_{w \in {}^P W} \mathrm{tr}(I^M_\theta \mid {}^{w}\sigma^{{}^{w}\rho_r|_{{}^{w}J_r \cap M_r}}).
\end{aligned}$$

由于 $w \in ({}^P W_r)^\theta$ 是 $W_{M_r} \backslash W_r$ 的最短长度代表元，因此对于 M_r 的任意正绝对根 α，$w^{-1}(\alpha)$ 仍为正根。因此，$({}^w J_r \cap M_r,\ {}^w\rho_r|_{{}^w J_r \cap M_r})$ 将是惯性等价类 ${}^w\mathfrak{s}_{M,\ r} = [{}^0 T_r, {}^w({}^0\chi_r)]_{M_r}$ 的一个类型。令 $({}^w J_{M_r},\ {}^w\rho_{M_r}) = ({}^w J_r \cap M_r,\ {}^w\rho_r|_{{}^w J_r \cap M_r})$，并令$e_{{}^w\rho_{M_r}}$ 为相应 Hecke 代数中的单位元。于是我们有

$$\mathrm{tr}(I^M_\theta \mid {}^{w}\sigma^{{}^{w}\rho_{M_r}}) = \mathrm{tr}(e_{{}^w\rho_{M_r}} I^M_\theta \mid \sigma).$$

结合以上所有结果，我们得到以下命题：

命题 6.2.4. 对于满足定理 *6.2.3* 的任意主块，以及任意不可约表示 $(\sigma,\ W)$，若其属于 M_r，则有以下等式：

$$\mathrm{tr}(e_{\rho_r} I_\theta \mid i^{G_r}_{P_r}(\sigma)) = \mathrm{tr}((e_{\rho_r})_{P_r} I^M_\theta \mid \sigma) = \bigoplus_{w \in {}^P W} \mathrm{tr}(e_{{}^w\rho_{M_r}} I^M_\theta \mid \sigma). \tag{6.2.8}$$

根据*Kazhdan*密度定理的扭曲版本（见 *[KR00]*），我们有

$$\mathrm{TO}^{G_r}_{\delta\theta}(e_{\rho_r}) = |D_{G/M}(\gamma)|^{-1/2} \sum_{w \in {}^P W} \mathrm{TO}^{M_r}_{\delta\theta}(e_{{}^w\rho_{M_r}}). \tag{6.2.9}$$

注记 6.2.5. 注意，该命题帮助我们绕过这一技术性结果 *[Hai09, 引理 4.5.4]*。

接下来，我们考虑形如 $Z_r * e_{\rho_r}$ for $Z_r \in \mathfrak{Z}_{\mathrm{ps}}(G_r)$ 的函数的下降公式。对于任意$\phi,\ \phi' \in C_c^\infty(G_r)$，若 $\phi - \phi'$ 在所有 θ-半单元素处的扭曲轨道积分均为零，则记为 $\phi \equiv \phi'$。我们有以下引理：

引理 6.2.6。对于任意 $Z_r \in \mathfrak{Z}(G_r)^{\mathrm{ps}}$ 以及任意 $\phi \in C_c^\infty(G_r)$，

$$(Z_r * \phi)_{P_r} \equiv (Z_r)_{P_r} * \phi_{P_r}.$$

证明。根据 Kazhdan 密度定理的扭曲版本（见 [KR00]），我们只需验证下列等式

$$\mathrm{tr}((Z_r * \phi)_{P_r} I_\theta^M \mid \sigma) = \mathrm{tr}(((Z_r)_{P_r} * \phi_{P_r}) I_\theta^M \mid \sigma)$$

对于任意光滑 不可约 θ-稳定表示 σ。由定理6.2.2和定理5.2.1，可得 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}((Z_r * \phi)_{P_r} I_\theta^M \mid \sigma) &= \mathrm{tr}((Z_r * \phi) I_\theta \mid i_{P_r}^{G_r}(\sigma)) \\
&= Z_r(i_{P_r}^{G_r}(\sigma)) \mathrm{tr}(\phi I_\theta \mid i_{P_r}^{G_r}(\sigma)) \\
&= (Z_r)_{P_r}(\sigma) \mathrm{tr}(\phi_{P_r} I_\theta^M \mid \sigma) \\
&= \mathrm{tr}(((Z_r)_{P_r} * \phi_{P_r}) I_\theta^M \mid \sigma).
\end{aligned}$$

□

将上述引理与等式（6.2.9）结合，得到下列等式：

$$\mathrm{TO}_{\delta\theta}^{G_r}(Z_r * e_{\rho_r}) = |D_{G/M}(\gamma)|^{-1/2} \sum_{w \in {}^P W} \mathrm{TO}_{\delta\theta}^{M_r}((Z_r)_{P_r} * e_{w\rho_{M_r}}). \tag{6.2.10}$$

取 $r = 1$ 并结合等式（5.4.1.4），可得下列等式：

$$\mathrm{O}_\gamma^G(b_r(Z_r) * e_\rho) = |D_{G/M}(\gamma)|^{-1/2} \sum_{w \in {}^P W} \mathrm{O}_\gamma^M(b_r((Z_r)_{P_r}) * e_{w\rho_M}). \tag{6.2.11}$$

比较上述两个等式可知，要证明 $Z_r * e_{\rho_r}$ 和 $b_r(Z_r) * e_\rho$ 相伴，只需证明 $e_{w\rho_{M_r}}$ 和 $e_{w\rho_M}$的基变换基本引理。因此，我们可以将情形归约到椭圆元素。

6.3 定理6.2.3的证明

在本小节中，我们将证明定理6.2.3 对所有非分歧群和所有主块均成立。我们将直接使用前面各节中的定义和记号。

6.3.1 分裂群的证明

我们从分裂群开始。假设 G 是分裂的。首先，考虑 $P = B = TU$ 的情形。在此假设下， w 可以是韦伊群 W 中的任意元素。对于 $(I \cap {}^{w^{-1}}\bar{U})/(J \cap {}^{w^{-1}}\bar{U})$ 的任意代表元 u，我们可以将 u 写成如下形式

$$u = \prod_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}(a_i),$$

其中每个根 $\alpha_i \in {}^{w^{-1}}\Phi^-$，并且当 i 增大时，这些根按照相对于由 B 确定的单根的高度非递增排列。我们还可以假设每个 $u_{\alpha_i}(a_i)$ 都属于 I，这意味着当 α_i 为正时 $a_i \in \mathfrak{O}$ ，而当 α_i 为负时 $a_i \in \mathfrak{p}$ 。令 $b_\alpha = \mathrm{cond}(\alpha)$ 和 $c_i = \mathrm{val}(a_i)$。注意， $f(\alpha) + f(-\alpha) = b_\alpha$。由于我们假设 $u \notin J \cap {}^{w^{-1}}\bar{U}$，因此可以找到 i 使得 $c_i < f(\alpha_i)$。所以， $\max_i\{b_{\alpha_i} - 1 - c_i\} > 0$。令 $c_u = \max_i\{b_{\alpha_i} - 1 - c_i\}$。我们选取一个根 $\alpha_k \in \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，使得 $b_{\alpha_k} - c_k - 1 = c_u$，且其系数之和在所有可能的选择中最小（若有多个选择，就选最右边的那个）。对于任意正整数 c，定义以下两个集合：

$$\mathcal{U}_c := \{u_\alpha(a_\alpha) | \alpha \in \Phi, \mathrm{val}(a_\alpha) \geq \max\{c, f(\alpha)\}\};$$

$$\mathcal{T}_c := \{\alpha^\vee(1+b) | \alpha \in \Phi, \mathrm{val}(b) \geq \max\{\mathrm{cond}(\alpha), c\}\}.$$

将 $\mathcal{U}_c$ 中来自 B-正根（分别来自 B-负根）的所有元素记为 $\mathcal{U}_c^+$（分别记为 $\mathcal{U}_c^-$）。根据定义可知，只要 $c \geq c_u$， $\mathcal{U}_c$ 和 $\mathcal{T}_c$ 都属于 $\ker(\rho)$。我们有以下引理，将在整个小节中使用：

引理 6.3.1.1. 我们有以下结论：

(a) 对于任意 $u_\alpha(a_\alpha) \in \mathcal{U}_c$ 以及任意满足 $c \geq c_u$ 和 $\alpha \neq -\alpha_p$的元素 $u_{\alpha_p}(a_p)$，交换子$[u_\alpha(a_\alpha)^{-1}, u_{\alpha_p}(a_p)^{-1}]$ 可以写成 $\mathcal{U}_c$中元素的乘积。此外，若 α 和 α_p 的符号相同，则乘积中出现的项也应具有相同的符号。

(b) 对于任意 $u_\alpha(a_\alpha) \in \mathcal{U}_{c_u}$ 以及任意满足 $b_{\alpha_p} - c_p - 1 < c_u$ 和 $\alpha = -\alpha_p$的元素 $u_{\alpha_p}(a_p)$，交换子 $[u_\alpha(a_\alpha)^{-1}, u_{\alpha_p}(a_p)^{-1}]$ 可以写成 $\mathcal{U}_{c_u}$ 和 $\mathcal{T}_{c_u}$中元素的乘积。此外，若对于 $c > c_u$，我们有 $u_\alpha(a_\alpha) \in \mathcal{U}_c$，则可以去掉限制 $b_{\alpha_p} - c_p - 1 < c_u$，交换子 $[u_{\alpha_i}(a_i)^{-1}, u_\alpha(a_\alpha)]$ 可以写成 $\mathcal{U}_c$ 和 $\mathcal{T}_c$中元素的乘积。

(c) 对于任意满足 $c \geq c_u$ 的 $t = \alpha^\vee(1+b) \in \mathcal{T}_c$，以及任意元素 $u_{\alpha_p}(a_p)$，交换子 $[t^{-1}, u_{\alpha_i}(a_i)^{-1}]$属于 $\mathcal{U}_c$。

在证明中，我们将使用以下三个交换子关系（第一个出自 [[Roc98]§2]，另外两个很容易验证）：

(1) 对于满足 $\alpha \neq -\beta$ 的任意根 $\alpha, \beta \in \Phi$ 和 $a_\alpha, a_\beta \in F$，有

$$[u_\alpha(a_\alpha), u_\beta(a_\beta)] = \prod_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha+j\beta\in\Phi}} u_{i\alpha+j\beta}(C_{\alpha,\beta;i,j}a_\alpha^i a_\beta^j) \tag{6.3.1.1}$$

对于某些整数 $C_{\alpha,\beta;i,j}$。

(2) 对于任意根 $\alpha \in \Phi$ 和任意 $a_\alpha, a_{-\alpha} \in F$，有

$$[u_\alpha(a_\alpha), u_{-\alpha}(a_{-\alpha})] = u_\alpha(\frac{-a_\alpha^2 a_{-\alpha}}{1-a_\alpha a_{-\alpha}})(-\alpha^\vee)((1-a_\alpha a_{-\alpha}))u_{-\alpha}(\frac{-a_\alpha a_{-\alpha}^2}{1-a_\alpha a_{-\alpha}}). \tag{6.3.1.2}$$

(3) 对于任意元素 $t = \alpha^\vee(1+b)$，其中 $\alpha \in \Phi$ 且 $b \in \mathfrak{p}$，以及任意根 $\beta \in \Phi$ 和 $a_\beta \in F$，有

$$[t, u_\beta(a_\beta)] = u_\beta(((1+b)^{\langle\alpha^\vee,\beta\rangle} - 1)a_\beta). \tag{6.3.1.3}$$

现在，让我们开始证明：

证明。 对于 (a)，由公式 (6.3.1.1)，我们可以将 $[u_{\alpha_p}(a_p)^{-1}, u_\alpha(a_\alpha)^{-1}]$ 写成若干形如 $u_{i\alpha+j\alpha_p}(C_{i,j;\alpha,\alpha_p}a_\alpha^i a_p^j)$ 的元素的乘积，其中相关正整数为 i, j 且满足 $i\alpha + j\alpha_p \in \Phi$。固定 i, j，并将$i\alpha + j\alpha_p$ 记作 α'，将 $C_{i,j;\alpha,\alpha_p}a_\alpha^i a_p^j$ 记作 $a_{\alpha'}$。我们对赋值作如下计算：

$$\mathrm{val}(a_{\alpha'}) \geq \mathrm{val}(a_\alpha) + \mathrm{val}(a_p) \geq \max\{b_{\alpha_p} - 1, c, f(\alpha)\}.$$

注意，只有当 α_p为负且 $b_{\alpha_p} = 1$时，才有 $b_{\alpha_p} - 1 \leq f(\alpha_p)$，这说明 $f(\alpha_p) = 1$。但是，如果α_p 为负，我们要求 $\mathrm{val}(a_p) \geq 1$。因此，$\mathrm{val}(a_\alpha) + \mathrm{val}(a_p) \geq f(\alpha_p)$，从而得到 $\mathrm{val}(a_{\alpha'}) \geq \max\{f(\alpha_p), f(\alpha)\}$。根据定义，我们必须有 $b_{\alpha'} \leq \max\{b_\alpha, b_{\alpha_p}\}$。如果 α和 α_p的符号相同，那么 α'的符号也必须相同，且 $f(\alpha') \leq \max\{f(\alpha), f(\alpha_p)\}$。因此，$\mathrm{val}(a_{\alpha'}) \geq \max\{c, f(\alpha')\}$，这说明 $u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) \in \mathcal{U}_c$。如果 α_p为正且 α为负，我们得到 $f(\alpha)' \leq \max\{f(-\alpha_p), f(\alpha)\}$。注意，若 $b_{\alpha_p} - 1 < f(-\alpha_p)$，则必有 $b_{\alpha_p} = 1$ 且 $\mathrm{val}(a_p) = 0$。在此条件下，$f(-\alpha_p) = 1$，并且显然 $f(\alpha)' \leq \max\{f(-\alpha_p), f(\alpha)\} = f(\alpha)$。这意味着 $\mathrm{val}(a_{\alpha'}) \geq f(\alpha')$ 且 $u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) \in \mathcal{U}_c$。如果 α为正且 α_p为负，则有 $f(\alpha') \leq \max\{f(\alpha_p), f(\alpha) + 1\}$。注意，$\mathrm{val}(a_p) \geq 1$，因此 $\mathrm{val}(a_p) + \mathrm{val}(a_\alpha) \geq f(\alpha) + 1$。所以，$\mathrm{val}(a_{\alpha'}) \geq \max\{f(\alpha_p), c, f(\alpha) + 1\} \geq \max\{c, f(\alpha')\}$，这说明 $u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) \in \mathcal{U}_c$。总之，$u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) \in \mathcal{U}_c$，(a) 的证明至此完成。

对于 (b) 部分，我们直接应用公式 (6.3.1.2)。根据假设，我们有 $\mathrm{val}(a_\alpha a_p) \geq c + c_p \geq \max\{c, b_{\alpha_p}\}$。因此，元素 $t = (-\alpha^\vee)(1 - a_\alpha a_p)$ 属于 $\mathcal{T}_c$。根据前一段中的计算，我们有 $\mathrm{val}(a_\alpha^2 a_p) \geq \max\{c, f(\alpha)\}$，并且 $\mathrm{val}(a_\alpha a_p^2) \geq \max\{c, f(\alpha_p)\}$。这就完成了 (b) 部分的证明。

对于 (c) 部分，我们直接使用公式 (6.3.1.3)。注意到

$$\mathrm{val}(((1+b)^{\langle\alpha^\vee,\alpha_p\rangle} - 1)a_p) \geq \mathrm{val}(b) + \mathrm{val}(a_p) \geq c + c_p \geq \max\{c, f(\alpha_p)\}.$$

这就完成了 (c) 部分的证明。 □

我们回到定理 6.2.3 的证明。回想一下，我们已经选定了一个根 α_k。我们作出如下断言：

断言 1. 我们可以假设 $c_k < f(\alpha_k)$。

证明。 若 $c_k \geq f(\alpha_k)$，我们将证明可以从 u 的表达式中去掉这一项。注意， $c_u = b_{\alpha_k} - f(\alpha_k) - 1 = f(-\alpha_k) - 1 \leq f(\alpha_k) \leq c_k$。因此， $u_{\alpha_k}(a_k) \in \mathcal{U}_{c_u}$。

根据 α_k 的定义，我们可以看出，对于任意 $i > p$， $b_{\alpha_i} - c_i - 1 < c_u$。由定理 6.3.1.1，我们可以将交换子 $[u_{\alpha_k}(a_k)^{-1}, (\prod_{i=k+1}^{n} u_{\alpha_i}(a_i))^{-1}]$ 写成 $\mathcal{U}_{c_u}$ 和 $\mathcal{T}_{c_u}$中的一个乘积，而它属于 $\ker(\rho)$。因此，对于任意满足 $u' \in \bar{U}$ 的 $u^{-1}u'u \in J$，我们有

$$\rho(u^{-1}u'u) = \rho((\prod_{1\leq i\leq n, i\neq k} u_{\alpha_i}(a_i))^{-1}u'(\prod_{1\leq i\leq n, i\neq k} u_{\alpha_i}(a_i)).$$

我们成功消去了项 $u_{\alpha_k}(a_k)$，命题得证。

□

从现在起，我们假设 u满足命题 1。我们将对 n作归纳法，证明对于所有这样的 u，若 $u \notin J \cap {}^{w^{-1}}\bar{U}$，则可以选取一个形如 $u' = u_{-\alpha_k}(b) \in {}^{w^{-1}}U$的元素，其中 $b \in \mathfrak{p}^{c_u}$，使得 $\rho(u^{-1}u'u) \neq 1$。注意到

$$c_u \geq b_{\alpha_k} - 1 - (f(\alpha_k) - 1) = b_{\alpha_k} - f(\alpha_k) = f(-\alpha_k). \tag{6.3.1.4}$$

这意味着 $u' \in \mathcal{U}_{c_u}$。

对于 $n = 1$，我们可以写成 $u = u_{\alpha_1}(a_1)$，其中 $c_1 < f(\alpha_1)$。根据 $\mathrm{cond}(\alpha)$ 的定义，我们可以找到一个元素 $b \in \mathfrak{p}^{b_{\alpha_1}-1-c_1} = \mathfrak{p}^{c_u}$，使得 ${}^{0}\chi \circ \alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1}) \neq 1$。取 $u' = u_{-\alpha_1}(b)$。于是得到以下等式：

$$u^{-1}u'u = u_{\alpha_1}(-a_1)u_{-\alpha_1}(b)u_{\alpha_1}(a_1) = u_{\alpha_1}(\frac{-a_1^2 b}{1 + a_1 b})\alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1})u_{-\alpha_1}(\frac{b}{1 + ab}). \tag{6.3.1.5}$$

等式（6.3.1.4）告诉我们，$\mathrm{val}(b) \geq f(-\alpha_1)$。因此，$u_{\alpha_1}(\frac{-a_1^2 b}{1+a_1 b})$ 和$u_{-\alpha_1}(\frac{b}{1+ab})$都属于$\mathcal{U}_{c_u}$，并且 $\rho(u^{-1}u'u) = \rho(\alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1})) = {}^{0}\chi \circ \alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1}) \neq 1$。

对于 $n - 1$，假设该陈述正确。那么对于 n，令 $u = \prod_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}(a_i)$ 和 $u_0 = \prod_{i=2}^{n} u_{\alpha_i}(a_i)$。我们有三种情况：

情况 1。 $\alpha_k = \alpha_1$：对于这种情况，我们可以看出，对任意 $i > 1$，$c_u > b_{\alpha_i} - 1 - c_i$。按照情况 $n = 1$ 中的计算，我们可以找到 $u' = u_{-\alpha_1}(b)$，其中 $b \in \mathfrak{p}^{c_u}$，使得 $\rho(u_{\alpha_1}(-a_1)u'u_{\alpha_1}(a_1)) \neq 1$。注意， $u_{\alpha_1}(\frac{-a_1^2 b}{1+a_1 b})$ 和 $u_{-\alpha_1}(\frac{b}{1+ab})$ 都属于 $\mathcal{U}_{c_u}$。

根据定理 6.3.1.1，我们有

$$\rho(u^{-1}u'u) = \rho(u_0^{-1}\alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1})u_0).$$

我们有 $u_{\alpha_2}(a_2)^{-1}\alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1})u_{\alpha_2}(a_2) = \alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1}) \cdot [\alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1})^{-1}, u_{\alpha_2}(a_2)^{-1}]$. 注意，与定理 6.3.1.1(c) 的证明中一样，$\mathrm{val}(a_1 a_2 b) \geq \mathrm{val}(b) + \mathrm{val}(a_2) \geq c_u - 1 + c_2 \geq b_{\alpha_2} - 1$。这说明 $[\alpha_1^{\vee}((1 + a_1 b)^{-1})^{-1}, u_{\alpha_2}(a_2)^{-1}]$ 也属于 $\mathcal{U}_{c_u}$。再次根据定理 6.3.1.1，我们可以得到

$$\rho(u_0^{-1}u'u_0) = \rho((\prod_{i=3}^{n} u_{\alpha_i}(a_i))^{-1}u'\prod_{i=3}^{n} u_{\alpha_i}(a_i)).$$

出于同样的原因，我们可以去除所有由 $u_{\alpha_i}(a_i)$ 对 $2 \leq i \leq n$ 的共轭作用。因此，我们有

$$\rho(u^{-1}u'u) = \rho(u_{\alpha_1}(-a_1)u'u_{\alpha_1}(a_1)) \neq 1.$$

该陈述对 n 成立。

情形 2. $\alpha_k \neq \alpha_1$ 和 α_k 为正：在此情形下，元素 u_0 也满足断言 1，且 $c_u = c_{u_0}$。根据归纳假设，我们可以选取 $u' = u_{-\alpha_k}(b)$，其中 $b \in \mathfrak{p}^{c_u} = \mathfrak{p}^{c_{u_0}}$，使得 $\rho(u_0^{-1}u'u_0) \neq 1$。注意，我们为 α_k 选取的 u_0 与为 α_k 选取的 u相同。

考虑元素 $\tilde{u} = [u'^{-1}, u_{\alpha_1}(a_1)^{-1}] = [u_{\alpha_k}(-b)\ u_{\alpha_1}(-a_1)]$。根据定理 6.3.1.1(a)， $\tilde{u}$ 可以写成 $\mathcal{U}_{c_u}$中的若干元素的乘积。如果 $\tilde{u} = 1$，则有 $u^{-1}u'u = u_0^{-1}u'u_0$，所以该陈述

对 n 成立。否则，我们可以找到正整数 x,y，使得 $\alpha' := x\alpha_i - y\alpha_k$ 是一个根。令$u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) := u_{\alpha'}(C_{\alpha_1,-\alpha_k;x,y}a_1^x b^y)$。如果 $y=1$, α' 也将是一个正根，因此 $u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) \in \mathcal{U}_{c_u}^+$。假设对于某个正整数 $l > k$, $\alpha_l \in \Phi^+$ 且 $\alpha_{l+1} \in \Phi^-$。根据定理 6.3.1.1(a)，交换子$[(\prod_{i=2}^{l} u_{\alpha_i}(a_i))^{-1}, u_{\alpha'}(a_{\alpha'})^{-1}]$ 可以写成 $\mathcal{U}_{c_u}^+$中的若干元素的乘积。根据我们对 α_k的选择，对于任意 $i \geq l+1$，有 $c_u > b_{\alpha_i} - 1 - c_i$。结合这些结论再次应用定理 6.3.1.1，我们得出交换子 $[u_0^{-1}, u_{\alpha'}(a_{\alpha'})^{-1}]$ 是 $\mathcal{U}_{c_u}$ 和 $\mathcal{T}_{c_u}$中的元素的乘积。

若 $y \geq 2$, $u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) \in \mathcal{U}_{2c_u}$。根据定理 6.3.1.1，我们可以将 $[u_{\alpha'}(a_{\alpha'})^{-1}, u_0^{-1}]$ 写成 $\mathcal{U}_{2c_u} \subset \mathcal{U}_{c_u}$ 和 $\mathcal{T}_{2c_u} \subset \mathcal{T}_{c_u}$中元素的乘积。由此可得，交换子$[\tilde{u}^{-1}, u_0^{-1}]$ 是 $\mathcal{U}_{c_u}$中元素的乘积。因此，$\rho(u^{-1}u'u) = \rho(u_0^{-1}u'u_0) \neq 1$，且该结论对 n 成立。

情形 3。 $\alpha_k \neq \alpha_1$ 且 α_k 为负：在此情形下，元素 u_0 也满足断言 1 以及$c_u = c_{u_0}$。根据归纳假设，我们可以选取 $u' = u_{-\alpha_k}(b)$，其中 $b \in \mathfrak{p}^{c_u} = \mathfrak{p}^{c_{u_0}}$，使得$\rho(u_0^{-1}u'u_0) \neq 1$，并且我们为 α_k 所选取的 u 与为 α_k 所选取的 u_0相同。注意，对于任意$i > k$， $c_u > b_{\alpha_i} - 1 - c_i$。

我们将沿用前一种情形中的记号。设 $\tilde{u} = [u_{\alpha_1}(a_1)^{-1}, u'^{-1}]$。若 $\tilde{u} = 1$，则可得 $u^{-1}u'u = u_0^{-1}u'u_0$, 且该结论对 n 成立。否则，我们选取正整数 x,y，使得 $\alpha' := x\alpha_i - y\alpha_k$ 是一个根。令 $u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) := u_{\alpha'}(C_{\alpha_1,-\alpha_k;x,y}a_1^x b^y)$。注意， $-\alpha_k$ 为正，且由定理 6.3.1.1(a)， $u_{\alpha'}(a_{\alpha'}) \in \mathcal{U}_{c_u}^+$。假设根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 为正，而 $\alpha_{l+1}, \cdots, \alpha_n$ 为负。由于 α_k 为负，我们有 $k > l$。令 $u_+ = \prod_{i=2}^{l} u_{\alpha_i}(a_i)$ 和 $u_- = \prod_{i=l+1}^{n} u_{\alpha_i}(a_i)$。同样，由定理 6.3.1.1(a)， $[u_+^{-1}, u_{\alpha'}(a_{\alpha'})^{-1}]$ 可写成 $\mathcal{U}_{c_u}^+$ 中元素的乘积。我们从该乘积中选取一项，并将其记为 $u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})$。若 α_+ 的系数之和严格大于 $-\alpha_k$ 的系数之和，则可得 $\alpha_i \neq -\alpha_+$ 对 $l+1 \leq i \leq k$ 成立这一事实。若 $u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})$ 与 $\prod_{i=l+1}^{k} u_{\alpha_i}(a_i)$ 可交换，则有以下等式：

$$[u_-^{-1}, u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})^{-1}] = [(\prod_{i=k+1}^{n} u_{\alpha_i})^{-1}, u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})^{-1}].$$

注意，对于 $i \geq k+1$, $c_u + c_i \geq b_{\alpha_i}$。定理 6.3.1.1 告诉我们， $[u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})^{-1}, (\prod_{i=k+1}^{n} u_{\alpha_i})^{-1}]$ 是 $\mathcal{U}_{c_u}$ 中元素的乘积。若 $u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})$ 不与 $\prod_{i=l+1}^{k} u_{\alpha_i}(a_i)$ 交换，则将满足 $u_{\alpha_i}(a_i)$ 不与 $u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})$ 交换的最小i 记为 m。由此可见， $u_{\alpha_m}(a_m)$ 与 $u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})$ 的交换子可以写成 $\mathcal{U}_{c_u+1}$ 中元素的乘积（这是因为 $c_i \geq 1$）。根据定理 6.3.1.1， $\mathcal{U}_{c_u+1}$ 中一个元素与 $u_{\alpha_i}(a_i)$ 的交换子可以写成 $\mathcal{U}_{c_u+1}$ 和 $\mathcal{T}_{c_u+1}$ 中元素的乘积，而 $\mathcal{T}_{c_u+1}$ 中一个元素与 $u_{\alpha_i}(a_i)$ 的交换子属于 $\mathcal{U}_{c_u+1}$。因此，$[u_-^{-1}, u_{\alpha_+}(a_{\alpha_+})^{-1}] \in \ker(\rho)$，并且有 $\rho(u^{-1}u'u) = \rho(u_0^{-1}u'u_0) \neq 1$。该结论对 n 成立。

如果 α_+ 的系数之和等于 $-\alpha_k$的系数之和，我们可以得到 α_1 是负的。结合 u' 与 $u_{\alpha_1}(a_1)$不对易这一事实，我们可以将其化归为上述情形，因此该陈述对 n成立。

总之，对于任意 $u \in (I \cap {}^{w^{-1}}\bar{U})\backslash(J \cap {}^{w^{-1}}\bar{U})$，我们可以找到一个元素 $u' = u_{-\alpha_k}(b) \in {}^{w^{-1}}U$使得 $\rho(u^{-1}u'u) \neq 1$。关于分裂群的定理 6.2.3 的证明以及 $P = B$ 已完成。

如果 P不是 B，那么我们仍可将 u 写成 $u = \prod_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}(a_i)$，其中每个 $u_{\alpha_i}(a_i) \in {}^{w^{-1}}\bar{N}$。我们选取的 u'属于 ${}^{w^{-1}}N$。因此，定理 6.2.3 对于一般的抛物子群也成立 P。分裂群的证明已完成。

6.3.2 非分歧群的证明

接下来，我们证明定理 6.2.3 在非分歧群的情形。我们仍然先处理 $P = B = TU$。因此， w 可以是韦伊群 W中的任意元素。将相对根系记为 Φ_F，绝对根系记为 Φ_E，并令 h 为 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 的一个生成元。定义 Res 为从 $\Phi_E \to \Phi_F$出发的限制映射。令 $|\mathrm{Gal}(E/F)| = e$。令 (J_E, ρ_E) 表示我们为主块 $\mathfrak{s}_E = (T(E)\ \chi_E)^{G(E)}$。

对于任意 $u \in (I \cap {}^{w^{-1}}\bar{U})\backslash(J \cap {}^{w^{-1}}\bar{U})$，我们需要找到一个元素 $u' \in {}^{w^{-1}}U$，使得 $\rho(u^{-1}u'u) \neq 1$。根据前一节，若将 u 视为 $I_E \cap {}^{w^{-1}}\bar{U}(E)$ 中的一个元素，并写出满足断言 1 且具有 $\alpha_i \in \Phi_E$ 的 $u = \prod_{i=1}^{n} u_{\alpha_i}(a_i)$, 则我们可以找到 $u'_E = u_{-\alpha_k}(b) \in {}^{w^{-1}}U_E$，它具有 $\alpha_k \in \Phi_E$和 $b \in \mathfrak{p}_E^{c_u}$，使得 $\rho_E(u^{-1}u'_E u) \neq 1$。将 $\mathrm{Res}(-\alpha_k)$ 记为 $-\alpha_{k,\ F}$。

对于任意 $g \in G(E)$，令 $N_E(g) = \prod_{i=1}^{e} h^i(g)$。定义

$$U_\alpha^j = \prod_{\beta \in \Phi_E, \mathrm{Res}(\beta)=\alpha} u_\beta(\mathfrak{p}_E^j)$$

对于正整数 j 和 $\alpha \in \Phi_F$。由于$-j\alpha_{k,F}$对于任何 $j \geq 3$都不可能是相对根，根据方程（6.3.1.1），我们可以将 $u^0 := h(N_E(u'_E)) \cdot N_E(u'_E)^{-1}$写成如下形式元素的乘积：$u_\beta(a_\beta)$，其中 $\beta \in \Phi_E$、$\mathrm{Res}(\beta) = -2\alpha_{k,F}$ 且 $a_\beta \in \mathfrak{p}_E^{2c_u}$。因此，$h(N_E(u'_E)) \cdot N_E(u'_E)^{-1} \in U_{-2\alpha_{k,F}}^{2c_u}$。同理，群 $U_{-2\alpha_{k,F}}^{2c_u}$ 是阿贝尔群。我们需要以下引理：

引理 6.3.2.1。$U_{-2\alpha_{k的}F}^{2c_u}$ 的第一伽罗瓦上同调是平凡的，即

$$H^1(\mathrm{Gal}(E/F), U_{-2\alpha_{k,F}}^{2c_u}) = 1.$$

证明。我们只需考虑一个伽罗瓦轨道。选取 $\beta_1 \in \Phi_E$，使得 $\mathrm{Res}(\beta_1) = -2\alpha_{k,F}$。用 H 表示 β_1 在 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 中的稳定子。令 $|H| = e_1$ 和 $e_2 = e/e_1$。因此，h^{e_2} 是 H 的生成元。记为 h_1。我们知道，$U_{-2\alpha_{k,F}}^{2c_u}$同构于 $\mathrm{Ind}_H^{\mathrm{Gal}(E/F)} u_{\beta_1}(\mathfrak{p}_E^{2c_u})$，作为 $\mathrm{Gal}(E/F)$-模。由 Shapiro 引理，

$$H^1(\mathrm{Gal}(E/F), U_{-2\alpha_{k,F}}^{2c_u}) = H^1(H, u_{\beta_1}(\mathfrak{p}_E^{2c_u})).$$

令 $E' = E^H$。H 在 u_{β_1} $d_{\beta_1} h_1$ a u_{β_1} $d_{\beta_1} \in \mathfrak{O}_E^\times$ $h_1^{e_1}$ u_{β_1} $\mathfrak{p}_E^{2c_u}$ a $=$ $(\mathfrak{p}_E^{2c_u})$ 上的作用如下：对任意 $a \in \mathfrak{p}_E^{2c_u}$，$h_1 u_{\beta_1}(\,)(\,(\,))$，其中某个常数为 。由于 在 ( ) 上的作用是恒等作用，我们得到$\prod_{i=1}^{e_1} h_1^i(d_{\beta_1}) = 1$。注意，这是从 E 到 E' 的范数映射。由希尔伯特第90定理，我们可以找到一个元素 $d \in \mathfrak{O}_{E'}^\times$，使得 $d_{\beta_1} = h_1(d)d^{-1}$。映射 $a \to da$ 诱导出一个从 $u_{\beta_1}(\mathfrak{p}_E^{2c_u})$ 到 $\mathfrak{p}_E^{2c_u}$ 的 H-模同构。同样，由希尔伯特第90定理，$H^1(H,\ \mathfrak{p}_E^{2c_u}) = 1$。证明至此完成。

□

注意到 $N_E(u^0) = 1$。由上述引理可知，我们可以找到 $u_1 \in U_{-2\alpha_{k,F}}^{2c_u}$ 使得 $u^0 = u_1 h(u_1)^{-1}$。因此，$h(N_E(u'_E)u_1) = N_E(u'_E)u_1$，这说明 $N_E(u'_E)u_1 \in {}^{w^{-1}}U_E)^{\mathrm{Gal}(E/F)} = {}^{w^{-1}}U$。注意到 $u_1 \in \mathcal{U}_{2c_u}$。令 $u' = N_E(u'_E)u_1$和 $u_2 = u^{-1}u_1 u = u_1[u_1^{-1}, u^{-1}]$。我们有

$$u^{-1}u'u = u^{-1}N_E(u'_E)uu_2 = N_E(u^{-1}u'_E u)u_2. \tag{6.3.2.1}$$

由定理 6.3.1.1，我们可以将 u_2 写成 $\mathcal{U}_{2c_u} \subset \mathcal{U}_{c_u}$ 和 $\mathcal{T}_{2c_u} \subset \mathcal{T}_{c_u}$中若干元素的乘积。此外，$u^{-1}u'_E u$可以写成 $u^- t u^+$的形式，其中 $t \in T(\mathfrak{O}_E)$、$u^- \in J_E \cap \bar{U}(E)$ 和 $u^+ \in J_E \cap U(E)$。¯可以看出，$J_E \cap U(E)$ 和 $J_E \cap U(E)$ 都是 $\mathrm{Gal}(E/F)$-稳定的，且由 $T(\mathfrak{O}_E)$ 规范化。因此，我们有

$$N_E(u^{-1}u'_E u) = N_E(u^- t u^+) = \prod_{i=1}^{e} h^i(u^- t u^+) = N_E(t) \cdot u_3,$$

¯其中，u_3可以写成 $J_E \cap U(E)$和 $J_E \cap U(E)$中元素的乘积。公式$\rho_E(u^{-1}u'_E u) \neq 1$ 蕴含 ${}^0\chi(N_E(t)) \neq 1$。综上所述，我们可以写出 $u^{-1}u'u = N_E(t) \cdot u_3 u_2$。由于 $u^{-1}u'u$ 和 $N_E(t)$都是 $\mathrm{Gal}(E/F)$-不变的，因此 $u_3 u_2$ 也是 $\mathrm{Gal}(E/F)$-不变的。

令 $U_f = \langle u_\alpha(\mathfrak{p}_E^{f(\alpha)}) :\ \alpha \in \Phi_E \rangle$。进一步，令 $U_f^- = U_f \cap \bar{U}(E)$和 $U_f^+ = U_f \cap U(E)$。由 [Roc98, 引理 3。2], 可得

$$U_f = U_f^{-\,0}T_f U_f^+,$$

其中 ${}^0T_f = \prod_{\alpha \in \Phi_E} \alpha^\vee(1 + \mathfrak{p}_E^{b_\alpha})$。容易看出 $U_f \in \ker(\rho_E)$。此外，由于上述等式是一个双射，我们有 $(U_f)^h = (U_f^-)^h({}^0T_f)^h(U_f^+)^h$。

注意到 $\mathcal{U}_{c_u}$和 $\mathcal{T}_{c_u}$都包含于 U_f中。这意味着 $u_3 u_2 \in U_f$。我们可以将 $u_3 u_2$写为 $u_f^- t_f u_f^+$，其中 $u_f^- \in U_f^-$、$t_f \in {}^0T_f$和 $u_f^+ \in U_f^+$。由于 $u_3 u_2$是 $\mathrm{Gal}(E/F)$-不变的，我们还可以要求 $u_f^- \in (U_f^-)^h$、$t_f \in ({}^0T_f)^h$和 $u_f^+ \in (U_f^+)^h$。因此，$\rho(u^{-1}u'u) = \rho(N_E(t) \cdot t_f)$。我们需要以下引理：

引理 6.3.2.2. 范数映射 $N_E :\ {}^0T_f \to ({}^0T_f)^h$ 是满射。

证明。首先，注意到 f 在 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 下稳定，且 ${}^0T_f$ 是阿贝尔群。伽罗瓦作用在 ${}^0T_f$ 上的形式如下：

$$h(\alpha^\vee(1+a)) = (h(\alpha))^\vee(1+h(a)).$$

因此，我们只需考虑根的一个伽罗瓦轨道。

固定一个根 $\alpha \in \Phi_E$。将 α 在 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 中的稳定子记为 H_α。令 $|H_\alpha| = e_3$，且令 $e_4 = e/e_3$。因此，$h_\alpha := h^{e_4}$ 是 H_α 的生成元。令 $E_\alpha = E^{H_\alpha}$。令 $t_\alpha = \prod_{i=1}^{e_4}(h^i\alpha)^\vee((1+x_i))$ 为 $\mathrm{Gal}(E/F)$-不变的。这要求 $h(x_i) = x_{i+1}$（定义 $x_{e_4+1} = x_1$）。因此，$h^{e_4}(x_1) = x_1$，这表明 $x_1 \in 1+\mathfrak{p}_{E_\alpha}^{b_\alpha}$。由于从 $1+\mathfrak{p}_E^{b_\alpha}$ 到 $1+\mathfrak{p}_{E_\alpha}^{b_\alpha}$ 的范数映射是满射的，我们可以选取一个元素 $y \in \mathfrak{p}_E^{b_\alpha}$，使得 $\prod_{i=1}^{e_3} h_\alpha^i(y) = 1+x_1$。因此，$t_\alpha = N_E(\alpha^\vee(1+y))$。证明完毕。 □

由上述引理，我们可以找到 $t'_f \in {}^0T_f$，使得 $N_E(t'_f) = t_f$。因此，$\rho(t_f) = \rho(N_E(t'_f)) = \rho_E(t'_f) = 1$，并且我们有 $\rho(u^{-1}u'u) = \rho(N_E(t)\cdot t_f) = \rho(N_E(t)) \neq 1$。这就证明了当 $P = B$ 时，非分歧群的定理 6.2.3。对于一般的标准抛物子群 $P = MN$，我们仍可将 u 写为 $u = \prod_{i=1}^n u_{\alpha_i}(a_i)$，其中每个 $u_{\alpha_i}(a_i) \in {}^{w^{-1}}\bar{N}(E)$。我们在上述证明中找到的 u' 属于 $({}^{w^{-1}}N(E))^h = {}^{w^{-1}}N$。定理 6.2.3 的证明至此完成。

7 消失命题与归约步骤

7.1 消失命题

引理 7.1.1。设 $\phi \in \mathcal{Z}(G_r, \rho_r)$ 以及 $f = b_r\phi \in \mathcal{Z}(G,\rho)$。若 γ 不是来自 G_r 的范数，则 $\mathrm{O}\gamma(f) = 0$。

我们基本上沿用 [Hai12，§7.1]中的证明。等式（6.2.10）和等式（6.2.11）帮助我们将问题归约到 γ 是 G 中的一个椭圆元素的情形。对于典范映射 $p: G_{sc} \to G$ 以及阿贝尔群

$$\mathbf{H}^0_{ab}(F,G) = G(F)/p(G_{sc}(F)),$$

根据 [LBC99，命题 2.5，3]，一个椭圆元素是来自 G_r 的范数，当且仅当其在 $\mathbf{H}^0_{ab}(F,G)$ 中的像是范数。现在，下面的引理即可完成证明：

引理 7.1.2。设 $f = b_r\phi \in \mathcal{Z}(G,\rho)$。设 $x \in G(F)$ 为任意一个元素，使得对于群 $\mathbf{H}^0_{ab}(F,G)$ 上的某个特征 η（其在范数上是平凡的），有 $\eta(x) \neq 1$。则 $f(x) = 0$。

证明。通过拉回，我们可以将 η 视为 $G(F)$上的一个特征。容易看出，η 实际上是一个非分歧特征。这意味着 η 在 J上是平凡的。此外，η 在环面$T(F)$上的限制也是一个非分歧特征。因此，$f\eta \in \mathcal{H}(G,\rho)$。

接下来，我们将考察 $f\eta$ 在 $i_B^G(\chi)^\rho$上的作用，其中 χ 是 ${}^0\chi$的任意延拓。我们任取一个函数 $h \in i_B^G(\chi)^\rho$。可以看出，

$$\begin{aligned}(f\eta)\bullet h(g_0) &= \int_G h(g)(f\eta)^\vee(g^{-1}g_0)\,dg \\ &= \int_G h(g)(f\eta)(g_0^{-1}g)\,dg \\ &= \eta(g_0)^{-1}\,(f\bullet(\eta h))(g_0)\end{aligned}$$

容易看出，函数 ηh 属于空间 $i_B^G(\eta\chi)^\rho$。由于 $f \in \mathcal{Z}(G,\rho)$，我们有

$$(f\bullet(\eta h))(g_0) = \beta(f)(\eta\chi)\cdot(\eta h)(g_0).$$

注意，$\beta(f)(\eta\chi)$是一个与 g_0无关的常数。因此我们得到

$$(f\eta)\bullet h(g_0) = \beta(f)(\eta\chi)\cdot\eta(g_0)^{-1}(\eta h)(g_0) = \beta(f)(\eta\chi)\cdot h(g_0).$$

因此，$f\eta$在 $i_B^G(\chi)^\rho$上的作用与 f在 $i_B^G(\eta\chi)^\rho$上的作用具有相同的标量。这意味着 $f\eta \in \mathcal{Z}(G,\rho)$。然而，这个标量与 ϕ在 $i_{B_r}^{G_r}(\eta_r\chi_r)^{\rho_r} = i_{B_r}^{G_r}(\chi_r)^{\rho_r}$上的作用相同（因为 η_r是平凡的）。这与 f 作用于 $i_B^G(\chi)^\rho$时的标量相同。因此，我们有 $f\eta = f$，特别是

$$f(x)(\eta(x)-1) = 0.$$

由于 $\eta(x) - 1 \neq 0$，我们有 $f(x) = 0$。

□

7.2 约化步骤

本节中，我们计划提出若干约化步骤。我们应当指出，本节将处理 $\mathcal{Z}(G_r, \rho_r)$ 中的所有函数，而不仅仅是形如 $Z_r * e_{\rho_r}$ 的函数。

根据定理 7.1.1，我们可以假设 $\gamma = \mathcal{N}(\delta)$ 是某个 θ-半单元素，且属于 G_r。我们主要遵循 [Hai09，§5.4]，，并作了一些修改：

(a) 我们可以假设 $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$。理论可推广如下：

回顾一下， G在 E 上分裂，其中 E/F 是一个有限非分歧扩张。取一个有限非分歧扩张 F'/F，使得 F'包含 F_r和 E。考虑如下 z-群的 F-延拓

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow H \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1, \tag{7.2.1}$$

其中 Z是若干个 $R_{F'/F}\mathbb{G}_m$的有限乘积，且 H是定义在 F 上的非分歧约化群，使得 $H_{\mathrm{der}} = H_{\mathrm{sc}}$。回顾一下， Z 在 H 中是中心的，并且由于 Z的高阶伽罗瓦上同调平凡， p 在 F-点和 F_r-点上满射。与前引文献中一样，范数同态诱导一个满射 $N: {}^0Z(F_r) \to {}^0Z(F)$。

令 $\lambda: Z(F) \to \mathbb{C}^\times$ 表示一个光滑特征，并且对于 $f \in C_c^\infty(H(F))$，设

$$f_\lambda(h) = \int_{Z(F)} f(hz)\lambda^{-1}(z)\, dz,$$

其中 dz是 $Z(F)$ 上的哈尔测度，使得 ${}^0Z(F)$ 的测度为 1。令 $\lambda N = \lambda \circ N$为 $Z(F_r)$ 上的一个特征。类似地，我们可以为所有 $\phi \in C_c^\infty(H(F_r))$ 定义 $\phi_{\lambda N}$。注意，对于所有这类函数，在所有 (θ)-半单元素处，（扭曲）轨道积分均存在。记 $\lambda = 1$ 为平凡 $\bar{}$ $\bar{}$特征，并将函数 f_1（分别为 ϕ_{1N}）视为$C_c^\infty(G(F))$（分别为 $C_c^\infty(G(F_r))$）中的元素时，记作 f（分别为 ϕ）。

令 $T_H = p^{-1}(T)$ 为 H 中的一个极大环面。对于固定的 ${}^0T$ 上的特征 ${}^0\chi$，我们定义 ${}^0T_H$ 上的特征 ${}^0\chi_H$，使得 ${}^0\chi_H = {}^0\chi \circ p$。因此，该特征在 ${}^0Z(F)$ 上平凡。由于 H 和 G 具有相同的伴随群，它们具有相同的根数据。令 (J, ρ) 和 (J_H, ρ_H) 分别为与 Bernstein 块 $\mathfrak{s} = ({}^0T, {}^0\chi)$ 和 $\mathfrak{s}_H = ({}^0T_H, {}^0\chi_H)$ 对应的类型。那么我们有以下两个等式：

$$p(J_H) = J \tag{7.2.2}$$

$$\rho_H = \rho \circ p \tag{7.2.3}$$

同样，对于 (J_r, ρ_r) 和 (J_{H_r}, ρ_{H_r})，我们也有相同的结论。

我们有如下引理：

引理 7.2.1. *[[Hai12], 引理 7.2.1]* 设 $\phi \in C_c^\infty(H(F_r))$ 且 $f \in C_c^\infty(H(F))$。我们有以下结论：

(1) 对任意 λ，函数 ϕ, f 相伴，当且仅当 $\phi_{\lambda N}, f_\lambda$ 相伴。

(2) 假设 $\phi \in \mathcal{H}(G_r, K, \tilde{\rho})$（分别为 $f \in \mathcal{H}(G, K, \rho)$）一个紧开子群和特征 $\tilde{\rho}: K \to \mathbb{C}^\times$（分别为 $K \subset G$ 和 $\rho: K \to \mathbb{C}^\times$），使得

- $N(\tilde{K} \cap Z(F_r)) = K \cap Z(F)$,
- $\tilde{K} \supset (1-\theta)(Z(F_r))$, *and*
- $\tilde{\rho}|_{\tilde{K}\cap Z(F_r)} = \rho \circ N|_{\tilde{K}\cap Z(F_r)}$.

那么在 *(1)* 中，我们只需考虑满足以下条件的特征 λ

$$\lambda|_{K\cap Z(F)} = \rho^{-1}|_{K\cap Z(F)}.$$

(3) 如果 $\phi \in \mathcal{H}(H_r, \rho_{H_r})$ 和 $f \in \mathcal{H}(H, \rho_H)$，那么在 *(1)* 中我们只需考虑满足 $\lambda|_{{}^0Z(F)} = {}^0\chi^{-1}|_{{}^0Z(F)}$ 的特征λ。

$\bar{}$ $\bar{}$*(4)* 一对 ϕ_1, f_1 相伴，当且仅当 ϕ, f 相伴。

证明。 详见 [Hai09，引理 5.3。1] 详见前引文献。请注意，前引文献中只考虑了零深度特征，但同样的论证无需任何修改即可推广到正深度特征。

□

我们还需要一个引理：

引理 7.2.2 ([Hai12，引理 7.2。2])。 映射 $\phi \to \phi$ 确定了一个从 $\mathcal{Z}(H_r, \rho_{H_r})$ 到 $\mathcal{Z}(G_r, \rho_r)$的满射同态。此外，该映射与基变换同态相容，具体而言：

$$b_r(\bar{\phi}) = \overline{b_r(\phi)} \tag{7.2.4}$$

证明。 由等式 (7.2.2) 和等式 (7.2.3) 可知 $\phi \in \mathcal{H}(G_r, \rho_r)$ 以及 $f \in \mathcal{H}(G, \rho)$。证明的其余部分基本与 [[Hai09], 引理 5.3。2]相同。我们使用同构 β： $\mathbb{C}[\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(G, \rho)$，而不是 Bernstein 同构。映射 p 诱导出一个态射 p^*： $\mathfrak{X}_s \to \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}_H}$ 如下：

$$p^* : \mathfrak{X}_s \to \mathfrak{X}_{\mathfrak{s}_H}$$
$$(T, \chi)_G \to (T_H, \chi \circ p)_H$$

其中， χ是一个光滑特征，它延拓了${}^0\chi$的某个 $W(F)$-共轭。注意， p^*是单射。那么，映射 $\phi \to \phi$ 是由 p^*诱导的从$\mathbb{C}[\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}_H}]$ 到 $\mathbb{C}[\mathfrak{X}_{\mathfrak{s}}]$ 的满射态射，也记作 p_*。显然，态射 p^* 与 N_r^* 相容；后者定义于第 5.4.1 节。因此，映射 $\phi \to \phi$确定了一个从 $\mathcal{Z}(H_r, \rho_{H_r})$到 $\mathcal{Z}(G_r, \rho_r)$的满同态，且与基变换同态相容。

□

由以上两个引理可知，关于 H 的基本引理蕴含关于 G的基本引理。

（b）我们不妨假设 γ 是椭圆的（见第6节）。

（c）我们不妨假设 γ 是正则的。证明见 [[Clo90], 命题 7。2]。

(d) 我们可以假设 G 满足以下条件： $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ 和 Z（G）是一个诱导环面。我们在假设 (a)-(c) 下进行论证。证明推广如下：

构造如下正合列

$$1 \to G \to G' \to Q \to 1$$

如 [Clo90, §6.1] 所示。这里 G' 和 G 是非分歧群，并满足 $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}} = G'_{\mathrm{der}} = G'_{\mathrm{sc}}$，且 Z（G'）是一个诱导环面。注意，这个正合列在 F-点上并不正合，但第一个映射在 F-点上是单射。令 T' 为 G' 中与 $T \subset G$ 对应的极大环面。由于 G 和 G' 的有限 Weyl 群同构，我们可以将 G 的扩张仿射 Weyl 群 $\widetilde{W}_{{}^0\chi}$ 嵌入 G' 的扩张仿射 Weyl 群 W' 中。因此，我们可以将 $\widetilde{W}_{{}^0\chi} \backslash {}^0T$ 嵌入 $\widetilde{W}_{{}^0\chi} \backslash {}^0T'$。于是，我们可以任取一个 ${}^0T'$ 的 $\widetilde{W}_{{}^0\chi}$-不变特征${}^0\chi'$，使其延拓 ${}^0\chi$。将与 ${}^0\chi'$ 对应的 Bernstein 块记为 $\mathfrak{s}' = ({}^0T', {}^0\chi')$，并令 (J', ρ') 表示与 $\mathfrak{s}'$ 对应的类型。从正合列的构造可知， $J' = J \cdot {}^0T'$ 和 $\rho'|J = \rho$。选取 $W_{{}^0\chi}$ 在 G 中的一组代表元 $\{n_w\}_{w \in \widetilde{W}_{{}^0\chi}}$。由于特征 ${}^0\chi'$ 是 $W_{{}^0\chi}$-不变的，我们可知 $W_{{}^0\chi} \subset W'_{{}^0\chi'}$。令 1_{n_w}（分别为 $1'_{n_w}$）表示 $\mathcal{H}(G, \rho)$（分别为 $\mathcal{H}(G', \rho')$）中支集为 Jn_wJ（分别为 $J'n_wJ'$），且在点 n_w 处取值为 1 的函数。注意，集合 $\{1_{n_w} \mid w \in W_{{}^0\chi}\}$ 构成了 $\mathcal{H}(G, \rho)$ 的一组基。我们定义线性变换 L： $\mathcal{H}(G, \rho) \to \mathcal{H}(G', \rho')$ 如下：

$$L : \mathcal{H}(G, \rho) \to \mathcal{H}(G', \rho')$$
$$1_{n_w} \to 1'_{n_w}$$

注意，这是一个线性变换；对于任意函数 $f \in \mathcal{H}(G, \rho)$，都有 $L(f)|_G = f$。此外，Supp($L(f)$) $\subset G(F) \cdot {}^0T'$。类似地，我们可以定义一个从$\mathcal{H}(G_r, \rho_r)$ 到 $\mathcal{H}(G'_r, \rho'_r)$ 的线性变换，也记作 L。我们有以下引理：

引理 7.2.3. 线性变换 L 确定了一个从 $\mathcal{Z}(G_r, \rho_r)$到 $\mathcal{Z}(G'_r, \rho'_r)$ 的代数同态，它与基变换同态相容，具体而言：

$$b_r(L(\phi)) = L(b_r(\phi))$$

对任意 $\phi \in \mathcal{Z}(G_r, \rho_r)$。

证明。 我们仍将使用同构 $\beta\colon \mathbb{C}[\mathfrak{X}_s] \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(G, \rho)$，将伯恩斯坦中心中的元素视为伯恩斯坦簇上的正则函数。证明将在 F 层面上进行，同样的论证也适用于 F_r 层面。

任取一个在 $T'(F)$ 上延拓 ${}^0\chi'$ 的特征 χ'，并令 $\chi = \chi'|_{T(F)}$ 为在$T(F)$ 上延拓 ${}^0\chi$ 的特征。任取一个函数 $h \in (i_{B'}^{G'}\chi')^{\rho'}$，对于任意 $f \in \mathcal{Z}(G, \rho)$，我们要计算 $L(f)$ 对 h 的作用。

由定理 4.3.1.1，我们有 $G'(F) = T'(F) \cdot G'_{\mathrm{der}}(F) = T'(F) \cdot G_{\mathrm{der}}(F) = T'(F) \cdot G(F)$。因此，我们只需计算对于 $g_0 \in G(F)$，$(L(f) \bullet h)(g_0)$ 的值。我们有

$$\begin{aligned}
(L(f) \bullet h)(g_0) &= \int_{G'(F)} h(g')(L(f))^\vee(g'^{-1}g_0)\,\mathrm{d}g' && (7.2.5)\\
&= \int_{G'(F)} h(g')(L(f))(g_0^{-1}g')\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_{G'(F)} (L(f))(g')h(g_0g')\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_{G(F)\cdot {}^0T'} (L(f))(g')h(g_0g')\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_{G(F)}\int_{{}^0T'} (L(f))(gt)h(g_0gt)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}g && (7.2.6)\\
&= \int_{G(F)} (L(f))(g)h(g_0g)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_{G(F)} f(g)h(g_0g)\,\mathrm{d}g \\
&= (f \bullet h|_{G(F)})(g_0) && (7.2.7)
\end{aligned}$$

这里，在等式 (7.2.5) 中，我们使用的哈尔测度是 $\mathrm{vol}(J') = 1$；在等式 (7.2.6) 中，我们使用富比尼定理，而所用的哈尔测度分别是 $\mathrm{vol}({}^0T') = 1$ 和 $\mathrm{vol}(J) =$1。对于等式 (7.2.7)，我们可以看到 $h|_{G(F)} \in (i_B^G\chi)^\rho$。由此可知，$L(f)$ 在 $(i_{B'}^{G'}\chi')^{\rho'}$ 上的作用，与 f 在 $(i_B^G\chi)^\rho$上的作用是由同一标量给出的。因此，由 L 诱导的作用对应于态射 $R\colon \mathfrak{X}_{s'} \to \mathfrak{X}_s$，它是通过限制到 $T(F)$定义的。由此，L 与基变换同态相容，证明完成。

□

我们还需要一个引理：

引理 7.2.4. 假设 δ 是 θ-正则的。令 T_r 表示 δ的 θ-中心化子。存在一个常数 C_{T_r}，它只依赖于椭圆环面 T_r；使得对于任意满足椭圆$\widetilde{\ }$范数在 T中正则的 $\delta \in G_r$，以及任意 $w \in W_{r,{}^0\chi_r}$，我们有

$$\mathrm{SO}_{\delta\theta}^{G_r}(1_{n_w}) = C_{T_r}\mathrm{SO}_{\delta\theta}^{G'_r}(1'_{n_w}). \tag{7.2.8}$$

证明。 参见 [Hai12，§7。4] 详情见前引文献。证明过程完全相同。 □

根据 [Hai12，§7.4], 之所以 C_{T_r} 可能不为1，是因为我们改变了扭曲轨道积分的定义。对于扭曲情形，由新定义得到的轨道积分将是$\mathrm{vol}(A_G(F)\backslash G^\circ_{\delta\theta}) = \mathrm{vol}(A_G(F)\backslash T_r^\circ)$与原定义下的轨道积分相乘。类似地，对于非扭情形，该常数将为$\mathrm{vol}(A_G(F)\backslash G^\circ_\gamma) = \mathrm{vol}(A_G(F)\backslash T^\circ)$。

注意，在我们原来的定义中，我们选取相容测度 T_r°与 T°，它们是F-同构的（因为环面是交换的）。因此，这两个体积必定相同。这就迫使常数 C_{T_r} 必须与常数 C_T相同。因此，由定理 7.2.3 与定理7.2.4，关于 G' 的基本引理蕴含关于 G的基本引理。

（e）我们可以假设 γ 是强正则椭圆的。这一点在 [[Clo90], 第 29 页中有解释。 2].

（f）根据定理 7.2.1，我们只需考虑形如 $\phi_{\lambda N}$ 以及（$b\phi$）$_\lambda$的函数，其中 λ 是 Z（F）上的一个特征，使得 $\lambda|_{^0Z\ (F)} = {}^0\chi^{-1}|_{^0Z\ (F)}$。

结论：我们可以假设 $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$，且 G 的中心是一个诱导环面，而 γ 是一个作为范数的强正则椭圆半单元素。此外，我们考虑一对（$\phi_{\lambda N}$，（$b\phi$）$_\lambda$）的轨道积分匹配，其中 λ是 Z（F）上的一个特征，使得 $\lambda|_{^0Z\ (F)} = {}^0\chi^{-1}|_{^0Z\ (F)}$。

注 7.2.5。 与 *[Hai12],* 中的断言相反，我们无法约化到伴随情形；相反，约化过程在当前情形停止。

8 Labesse 的初等函数

8.1 定义

我们将构造适用于我们情形的 Labesse（扭曲）初等函数，主要遵循[Hai12，§8]。我们保留以下假设： G 是定义在 F上的非分歧群。

回顾一下， A表示 $G(F)$中的极大分裂环面， $T = C_G(A)$表示一个极大环面，而 $B = TU$表示 G 的一个 Borel 子群。令 A_r 表示 T_r中的极大 F_r-分裂环面。因此，我们定义了 $X_*(A_r)_{\mathbb{R}}$ 和 $X_*(A)_{\mathbb{R}}$中的支配 Weyl 室。令 ρ 表示 G的 B-正绝对根的半和。回顾一下， q 表示 F的剩余域的基数。

固定域 F 的一个一致化元 ϖ 。考虑一个正则支配余特征 $\nu \in X_*(A^r)$，并令$u = \nu(\varpi) \in T(F_r)$。令 $\tau = N(\nu)$为 $X_*(A)$中的一个正则支配余特征，并令 $t = \tau(\varpi) \in T(F)$。于是 $t = N(u)$。

按照 [Hai12，§8.1], 我们可以将 Levi 子群 $M_{u\theta}$（分别将抛物子群 $P_{u\theta}$）刻画为满足以下条件的元素集合 $g \in G$ 使得（$u\theta$）$^n g$（$u\theta$）$^{-n}$ 在 n 遍历所有整数（分别遍历所有正整数）时保持有界。由于 ν 和 $t\tau$ 是支配的， $M_{u\theta} = M_t = T$ 且 $P_{u\theta} = P_t = B$。

任取一个 F-Levi 子群 M，并令 G_r（分别令 M_r）表示 G（分别表示 M）的 F_r-点。定义 $G_r \times M_r$ 上的左 M_r作用如下： $m_1(g,\ m) = (m_1 g,\ m_1 m\theta(m_1)^{-1})$。令 $[g, m]$ 表示 $(g,\ m)$ 在商空间 $M_r\backslash G_r \times M_r$ 中的等价类。与前引文献中一样，存在一个 p-进解析流形之间的自然态射

$$\begin{aligned} M_r\backslash G_r \times M_r &\to G_r \\ [g, m] &\to g^{-1} m\theta(g) \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

该态射具有一般点处为一一对应的性质，且其在点 $[g, m]$ 处的雅可比行列式的归一化绝对值为$|D_{G(F)\ /M\ (F)}(\mathscr{N}(m))|_F$。

我们将这一结果应用于 Levi 子群 $M_{u\theta} = T$。这里，我们只关心紧开子集 $J_r \times {}^0T_r u \subset G_r \times T_r$ 对 $J_r \cap T_r = {}^0T_r$ 的商。 ${}^0T_r$ 在 $J_r \times {}^0T_r u$ 上的作用，是将上述定义的 T_r 在 $G_r \times T_r$ 上的作用限制而得。映射

$$\begin{aligned} {}^0T_r\backslash J_r \times {}^0T_r u &\to G_r \\ [k, mu] &\to k^{-1} mu\theta(k) \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

是单射，且其雅可比行列式的绝对值处处等于非零数

$$|\mathrm{Jac}_{[k,mu]}|_F = \delta_{B_r}^{-1}(u) = q^{r\langle 2\rho,\nu\rangle}.$$

因此，其像是一个紧开子集，体积为 $\delta_{B_r}^{-1}(u) \cdot \mathrm{vol}(J_r)$。我们将此集合记为 $\mathscr{J}_u$。

定义 8.1.1。 我们定义初等函数 $\phi^{u,\ \chi_r}$ 在 G_r 上于 $\mathscr{J}_u$之外取零值，并在 $\mathscr{J}_u$ 上的取值为

$$\phi^{u,\chi_r}(k^{-1} mu\theta(k)) = \chi_r^{-1}(m)$$

对于 $k \in J_r$ 和 $m \in {}^0T_r$。

为了证明 ϕ^{u,χ_r} 定义良好，假设

$$k_1^{-1}mu\theta(k_1) = k_2^{-1}mu\theta(k_2),$$

对于 k_1， $k_2 \in J_r$ 和 m_1， $m_2 \in {}^0T_r$。我们需要如下引理，见 [Hai12，引理 8.1。2]:

引理 8.1.2。设 $g_1, g_2 \in G(\bar{F})$ 且 $m_1, m_2 \in {}^0T_r$。将 θ 扩展为 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 的一个元素，并 $^-$仍用符号 θ 表示其在 $G(F)$上诱导的自同构。我们有以下结论：

(1) 若 $g_1^{-1}m_1u\theta(g_1) = g_2^{-1}m_2u\theta(g_2)$，则 $g_1 \in T(\bar{F})g_2$。

(2) m_1u 的 θ-中心化子为 $T(F)$；因此 m_1u 是强 θ-正则的。

(3) 若 $g_1 \in G_r$ 和 $g_1^{-1}mu\theta(g_1)$ 属于 ϕ^{u,χ_r} 的支集，则 $g_1 \in T_rJ_r$。

证明。前引文献中针对零深度特征给出的证明对正深度特征同样适用，无需任何改动。 □

由上述引理我们可以推出， $k = k_2k_1^{-1} \in T_r$。因此它属于 ${}^0T_r$，并且与 u交换，所以我们有

$$m_1k\theta(k^{-1}) = m_2$$

这意味着 $\chi_r(m_1) = \chi_r(m_2)$。这表明函数 ϕ^{u,χ_r} 是良定义的 .

设 $r = 1$ （从而 θ =恒等且 $u = t$），我们可以得到 $G(F)$上类似的光滑紧支撑函数$f^{t,\chi}$。

引理 8.1.3。函数 ϕ^{u,χ_r} 属于 $\mathcal{H}(G_r, \rho_r)$。

证明。首先我们需要证明 ϕ^{u,χ_r} 的支集是 $\mathscr{J}_u = J_ruJ_r$：考虑上文定义的映射 h： ${}^0T_r\backslash J_r \times {}^0T_ru \to G_r$。我们希望证明其像恰好是 J_ruJ_r。由方程（8.1.2）附近的讨论可以看出，该映射是单射。为证明该映射是满射，我们只需证明像的体积等于 J_ruJ_r的体积。由于该映射的雅可比行列式为 $\delta_{B_r}^{-1}(u)$，像的体积恰好是 $\delta_{B_r}^{-1}(u)\cdot\mathrm{vol}(J_r)$。另一方面， J_ruJ_r的体积为$\mathrm{vol}(J_r)\cdot\mathrm{Card}(J_{r,u}\backslash J_r)$，其中$J_{r,u} = J_r \cap uJ_ru^{-1}$。由于 J_r 是具有Iwahori分解的群，且 u 是环面 T_r中的一个元素，我们可以看到$J_{r,u}$ 是 J_r 的一个具有Iwahori分解的开紧子群

$$J_{r,u} = u(\bar{U} \cap J_r)u^{-1} \cdot {}^0T_r \cdot (J_r \cap U).$$

根据模函数的定义，体积就是 $\delta_{B_r}^{-1}(u)$。因此我们证明支集恰好是 $\mathscr{J}_u = J_ruJ_r$。

接下来，我们需要证明，对于任意 $j \in J_r$，$\phi^{u,\chi_r}(jg) = \rho_r(j)\phi^{u,\chi_r}(g)$（右乘的对应结论也可类似证明）。我们将这部分分为两步：根群部分和环面部分。我们先从根群部分开始。

回忆一下，$U_{f_{\mathfrak{s}_r}}$ 表示由其中所有根群生成的 J_r 的子群（见第4.1节）。这里我们省略下标 $\mathfrak{s}_r$，仅记作 U_{f_r}。容易看出， U_{f_r} 是 J_r的正规子群，并且 ρ_r 在 U_{f_r}上平凡。此外， U_{f_r} 具有 Iwahori分解（详见 [Roc98，引理 3.2] ）。因此，我们只需验证左 U_{f_r}-不变性 ϕ^{u,χ_r}。利用 U_{f_r}在 J_r中的正规性，只需证明一个形如以下的恒等式

$$k_1^{-1}u'm_1u\theta(k_1) = k_2^{-1}m_2u\theta(k_2) \tag{8.1.3}$$

由 $u' \in U_{f_r}$、 k_1， $k_2 \in J_r$ 和 m_1， $m_2 \in {}^0T_r$ 可推出

$$\chi_r(m_1) = \chi_r(m_2). \tag{8.1.4}$$

令 $k = k_2k_1^{-1}$。则方程（8.1.3）给出

$$m_2^{-1}ku'm_1 = u\theta(k)u^{-1} \tag{8.1.5}$$

现在根据 Iwahori分解将 $k \in J_r$ 写为

$$k = k_- \cdot k_0 \cdot k_+ \in (J_r \cap \bar{U}) \cdot {}^0T_r \cdot (J_r \cap U)$$

由于 $J_r \cap \bar{U} = U_{f_r} \cap \bar{U}$、$J_r \cap U = U_{f_r} \cap U$ 和 $U_{f_r} \cap {}^0T_r$ 同时规范化 $U_{f_r} \cap \bar{U}$ 和 $U_{f_r} \cap U$，k 和 k'_u 的环面部分只相差 $U_{f_r} \cap {}^0T_r$ 中的一个元素。换言之，我们可以找到合适的元素 $u'_- \in U_{f_r} \cap \bar{U}$、$u'_0 \in U_{f_r} \cap {}^0T_r$ 和 $u'_+ \in U_{f_r} \cap U$，使得

$$ku' = k_-u'_- \cdot k_0u'_0 \cdot k_+u'_+.$$

因此，方程（8.1.5）可以写成以下形式

$$m_2^{-1}(k_-u'_-)m_2 \cdot m_2^{-1}(k_0u'_0)m_1 \cdot m_1^{-1}(k_+u'_+)m_1 = u\theta(k_-)u^{-1} \cdot \theta(k_0) \cdot u\theta(k_+)u^{-1}$$

由 Iwahori分解的唯一性可知

$$m_2^{-1}(k_0u'_0)m_1 = \theta(k_0).$$

因此，$\chi_r(m_1) = \chi_r(m_2)$，这是因为 u'_0 属于 χ_r 的核，由此证明了 U_{f_r}-双不变性。

第二步是考虑环面部分的作用。换言之，我们需要证明，对于上述的 k_1，k_2，m_1，m_2，以及任意的 $m_0 \in {}^0T_r$，若它们满足

$$m_0k_1^{-1}m_1u\theta(k_1) = k_2^{-1}m_2u\theta(k_2), \tag{8.1.6}$$

那么 $\chi_r(m_2) = \chi_r(m_0m_1)$。注意到 ${}^0T_r$ 正规化所有根群，因此我们可以将 $k_1m_0k_1^{-1} = u'm_0$写成某个 $u' \in U_{f_r}$的形式。因此，我们可以将方程（8.1.6）改写为

$$k_1^{-1}u'm_0m_1u\theta(k_1) = k_2^{-1}m_2u\theta(k_2)$$

现在，将上述论证应用于此，可得 $\chi_r(m_2) = \chi_r(m_0m_1)$。证明完成。 □

8.2 轨道积分

本部分将计算 ϕ^{u,χ_r} 的轨道积分，最终证明对于所有 u，ϕ^{u,χ_r} 和 $f^{t,\chi}$ 相伴。

将 dg 上的哈尔测度（分别将 ds 上的哈尔测度）归一化，使得 J_r（分别是 ${}^0T_r$）的测度为 1。据此定义 $T(F)\backslash G(E)$ 上的商测度 $d\bar{g}$（分别定义 $T(F)\backslash T(E)$ 上的商测度 $d\bar{s}$）。关于 ϕ^{u,χ_r} 的轨道积分，我们有以下重要命题:

命题 8.2.1 ([Hai12，命题 8.3。1])。以下陈述成立：*(a)* 对于 $\delta \in G_r$，$\mathrm{TO}_{\delta\theta}(\phi^{u,\chi_r})$ 非零，当且仅当 δ 在 G_r 中与某个形如 mu、$m \in {}^0T_r$ 的元素 θ-共轭。对于这样的 m，我们有

$$\mathrm{TO}_{mu\theta}(\phi^{u,\chi_r}) = \chi_r^{-1}(m). \tag{8.2.1}$$

(b) 对于 $\gamma \in G(F)$，$\mathrm{O}\gamma(f^{t,\chi})$ 非零，当且仅当 γ在 $G(F)$ 中与形如 m_0t, $m_0 \in {}^0T$ 的某个元素共轭。对于这样的 m_0，我们有

$$\mathrm{O}_{m_0t}(f_{t,\chi}) = \chi^{-1}(m_0). \tag{8.2.2}$$

证明。只需证明 (1)。若 $\mathrm{TO}_{\delta\theta}(\phi^{u,\chi_r}) \neq 0$，则 δ 在 G_r 下与形如 mu 的某个元素 θ-共轭，其中 $m \in {}^0T_r$。因此，只需将 δ 替换为 mu。根据定理 8.1.2，我们有 $G^\circ_{\delta\theta}(F) = G^\circ_{mu\theta}(F) = T(F)$。现在，若 $g \in G_r$满足 $g^{-1}mu\theta(g) \in$支集(ϕ^{u,χ_r})，则再次由定理 8.1.2 可得 $g \in T_rJ_r$。因此，使用我们选定的哈尔测度，我们有如下等式

$$\begin{aligned}\int_{T(F)\backslash G_r} \phi^{u,\chi_r}(g^{-1}mu\theta(g))d\bar{g} &= \int_{T(F)\backslash T_r} \phi^{u,\chi_r}(s^{-1}mu\theta(s))d\bar{s} \\ &= \int_{T(F)\backslash T_r} \phi^{1,\chi_r}_{T_r}(s^{-1}m\theta(s))d\bar{s}\end{aligned} \tag{8.2.3}$$

其中，$\phi^{1,\chi_r}_{T_r}$表示与 $u = 1$ 相伴的 T_r 上的初等函数。这恰好是 ${}^0T_r$ 的特征函数 $1_{{}^0T_r}$ 乘以特征 χ_r^{-1}。因此我们已经证明

$$\mathrm{TO}^{G_r}_{mu\theta}(\phi^{u,\chi_r}) = \chi_r^{-1}(m)\mathrm{TO}^{T_r}_{m\theta}(1_{{}^0T_r}).$$

利用这一事实：

$$H^1(F_r/F, {}^0T_r)) = 0, \tag{8.2.4}$$

（见 [Hai12，引理 8.2。1] 详见）可知 $\mathrm{TO}^{T_r}_{m\theta}(1_{{}^0T_r})$ ＝体积$_{d\bar{s}}$（T（F）$\backslash T$（F）${}^0T_r$）。根据我们对测度的选择，该体积等于 1。证明完毕。 □

引理 8.2.2。有以下结论。

(1) 令 $m_0, m_0' \in {}^0T$。那么 $m_0 t$ 和 $m_0' t$ 在 G 中稳定共轭，当且仅当 $m_0 = m_0'$.

(2) 设 $m, m' \in {}^0T_r$。那么 mu 和 $m'u$ 在 G_r 中稳定 θ-共轭，当且仅当它们由 ${}^0T_r$中的某个元素 θ-共轭。

证明。见 [[Hai12],引理 8.3。2]。 □

推论 8.2.3。对于每个 $\delta \in G_r$，$\mathrm{SO}_{\delta\theta}(\phi^{u,\chi_r}) = \mathrm{TO}_{mu\theta}(\phi^{u,\chi_r})$，其中 mu，$m \in {}^0T_r$ 是任意一个这种形式的元素，且与 δ 稳定 θ-共轭。

证明。如果 δ 不与任何形如 mu-共轭 $m \in {}^0T_r$，那么两边都为零。否则，只需令 $\delta = mu$。根据定理 8.2.2，这将是稳定轨道积分中唯一出现的一项。

□

定理 8.2.4。函数 ϕ^{u,χ_r} 和 $f^{t,\chi}$ 相伴。

证明。首先，我们需要证明，对于任意一个 $\gamma \in G$ 非范数的元素，其稳定轨道积分 $\mathrm{SO}_\gamma(f^{t,\chi}) = 0$。这是因为，如果稳定轨道积分非零，那么根据定理 8.2.2，我们可以假设γ与某个形如 $m_0 t$的元素稳定共轭，其中 $m \in {}^0T$。我们已经知道 $t = N(u)$ 是一个范数，并且范数映射 $N: {}^0T_r \to {}^0T$ 是满射，因此存在 $m \in {}^0T_r$ 使得 $N(m) = m_0$。所以 γ 是一个范数，这与我们的假设矛盾。

接下来，我们可以假设 $\gamma = N(\delta)$ 是某个元素的范数 $\delta \in G_r$。如果 $\mathrm{SO}_{\delta\theta}(\phi^{u,\chi_r}) \neq 0$，那么$\delta$ 必定与 θ-共轭于形如 mu的元素，其中 $m \in {}^0T_r$；根据定理 8.2.1 和定理 8.2.3，我们得到以下等式：

$$\mathrm{SO}_{\delta\theta}(\phi^{u,\chi_r}) = \mathrm{TO}_{mu\theta}(\phi^{u,\chi_r}) = \chi_r^{-1}(m). \tag{8.2.5}$$

令 $m_0 = N(m)$。我们可以看到，γ 与元素 $m_0 t$稳定共轭，出于同样的原因，我们得到

$$\mathrm{SO}_\gamma(f^{t,\chi}) = \mathrm{O}_{m_0 t}(f^{t,\chi}) = \chi^{-1}(m_0), \tag{8.2.6}$$

这与式（8.2.5）一致。

如果 $\mathrm{SO}_{\delta\theta}(\phi^{u,\chi_r}) = 0$，那么 δ 不稳定地与任何形如 mu、其中带有 $m \in {}^0T_r$ 的元素进行 θ-共轭。但这将导致 $\gamma = N(\delta)$ 不稳定地与任何形如 $m_0 t$、其中带有 $m_0 \in {}^0T$ 的元素共轭。这是因为，如果 γ 与 $m_0 t$ 稳定共轭，那么运用第一步中的相同推理，我们可以看到 $\mathrm{SO}_{\delta\theta}(\phi^{u,\chi_r}) \neq 0$，这与我们的假设矛盾。因此，$\mathrm{SO}_\gamma(\phi_{t,\chi}) = 0$，证明完毕。 □

8.3 确定集合 $\mathfrak{R}_{0\chi_r}(G_r)$ 的一种重要方法

令 $\mathfrak{R}_{0\chi_r}(G_r)$ 表示 $\mathfrak{R}(G_r)$ 中对应于 Bernstein 块 $\mathfrak{s}_r = ({}^0T_r, {}^0\chi_r)$ 的子范畴。令 Π 为 G_r 的一个 θ- 稳定可容许表示，并固定一个交织算子 $I_\theta: \Pi \xrightarrow{\sim} \Pi^\theta$。令 $\Theta_{\Pi\theta}$ 表示 Harish-Chandra 的局部可积函数，它表示泛函 $\phi \mapsto \langle$迹 $\Pi I_\theta, \phi\rangle$，其中 $\phi \in C_c^\infty(G_r)$。这意味着

$$\langle \mathrm{trace}\ \Pi I_\theta, \phi\rangle = \int_{G_r} \Theta_{\Pi\theta}(g)\phi(g)\, dg.$$

我们希望计算 $\phi = \phi^{u,\ {}^0\chi_r}$ 的这个迹。令 $d\bar{k}$ 表示 $d\bar{g}$ 先前所记的 ${}^0T_r\backslash J_r$ 上的商测度。换元公式给出

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{trace} \Pi I_\theta, \phi^{u,{}^0\chi_r}\rangle &= \int_{{}^0T_r\backslash J_r}\int_{{}^0T_r} |\mathrm{Jac}_{[k,mu]}|_F \cdot \Theta_{\Pi\theta}(k^{-1}mu\theta(k))\cdot \phi^{u,{}^0\chi_r}(k^{-1}mu\theta(k))\, dmd\bar{k}\\ &= q^{r\langle 2\rho,\nu\rangle}\int_{{}^0T_r}\Theta_{\Pi\theta}(mu){}^0\chi_r^{-1}(m)\, dm\\ &= q^{r\langle 2\rho,\nu\rangle}\int_{{}^0T_r}\Theta_{\Pi_U\theta}(mu){}^0\chi_r^{-1}(m)\, dm. \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

这里 Π_U是对应于 ΠBorel 子群 $B = TU$的 Jacquet模，而我们所用的等式$\Theta_{\Pi\theta}(mu) = \Theta_{\Pi_N\theta}(mu)$ 是由 [Rog88] 给出的 [Cas77]定理的扭曲版本。

引理 8.3.1。假设 Π 是 G_r的一个不可约 θ-稳定表示。若 $\langle$迹 $\Pi I_\theta, \phi^{u,{}^0\chi_r}\rangle \neq 0$，则 Π 属于子范畴 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r}(G_r)$。

证明。等式（8.3.1）中最后一个公式不为零，这表明 $\Pi_U^{{}^0\chi_r} \neq 0$。回顾一下，我们构造的类型（$J_r, \rho_r$）是（$G_r$-cover of $({}^0T_r, {}^0\chi_r)$（见第 4.2节）。于是，由同构

$$\Pi^{\rho_r} \xrightarrow{\sim} \Pi_U^{{}^0\chi_r},$$

（参见 [Roc98，备注 7。8] 详情见此处）我们知道 $\Pi^{\rho_r} \neq 0$，这意味着 $\Pi \in \mathfrak{R}_{{}^0\chi_r}(G_r)$，根据类型的定义。□

8.4 初等函数的迹的计算

在本小节中，我们用 W （分别用 W_r）表示 G 中最大 F-分裂环面 A （分别为 F_r-分裂环面 A_r）所相伴的相对Weyl群。

对于 G_r 的任意不可约 θ-稳定表示 Π，以及交织算子 I_θ，我们将计算迹

$$\langle \operatorname{trace} \Pi I_\theta, \phi^{u,{}^0\chi_r}\rangle.$$

由定理 8.3.1，我们可以假设 Π 属于子范畴 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r}(G_r)$。设 Π的超尖支撑为 $(T_r, \xi')^{G_r}$，其中 ξ'是 W_r-共轭的 ${}^0\chi_r$ 的一个延拓。

令 Ξ 表示 T_r 上的特征集，其中的特征延拓了某个 ${}^0\chi_r$ 的 W_r-共轭。因此，Ξ 包含 $W_r\xi'$。令 $\Xi({}^0\chi_r) \subset \Xi$ 表示那些在 ${}^0T_r$ 上的限制恰为 ${}^0\chi_r$ 的特征。令 Ξ^θ （分别令 $\Xi({}^0\chi_r)^\theta$）表示 Ξ （分别表示 $\Xi({}^0\chi_r)$）中由 θ 固定的元素子集。从现在起，ξ' 表示 Ξ 中任意一个元素，而不只是与 Π 相伴的那个元素。

接下来，我们固定与 Π 相关的其他记号。令 Π_U 表示 Π 关于 U_r 的 Jacquet模。由于 $(\Pi^\theta)_U = (\Pi_U)^\theta$，交织算子在 Jacquet模上诱导出一个交织算子，我们仍用 θ 表示它。回忆一下，Π_U 是.....的一个子商

$$(i_{B_r}^{G_r}(\xi'))_U = \delta_{B_r}^{1/2}\bigoplus_{w\in W_r}\mathbb{C}_{w\xi'},$$

其中 $\mathbb{C}_{w\xi'}$ 是 T_r 的一维表示，对应于特征 ${}^w\xi'$。因此，存在一个良定义的子集 $\Xi(\Pi) \subset \Xi$ 和正重数 $a_{\xi',\ \Pi} =: a_{\xi'}$，使得对于 $\xi' \in \Xi(\Pi)$，作为 T_r-表示，

$$\Pi_U = \delta_{B_r}^{1/2}\bigoplus_{\xi'\in\Xi(\Pi)}\mathbb{C}_{\xi'}^{a_{\xi'}}. \tag{8.4.1}$$

由于 Π_U^θ 是 θ-稳定的，我们可以看出集合 $\Xi(\Pi)$ 在 θ 的作用下保持不变。

此外，我们定义 $\Xi(\Pi)^\theta := \Xi^\theta \cap \Xi(\Pi)$ 以及 $\Xi(\Pi,\ {}^0\chi_r)^\theta := \Xi({}^0\chi_r)^\theta \cap \Xi(\Pi)$。对于 $\xi' \in \Xi^\theta$，我们定义

$$\operatorname{tr}(I_\theta, \Pi, \xi') := \langle \operatorname{trace} I_\theta; \delta_{B_r}^{1/2}\mathbb{C}_{\xi'}^{a_{\xi'}}\rangle,$$

线性变换 I_θ 在子空间 $\mathbb{C}_{\xi'}^{a_{\xi'}}$ 上的迹（因为 ξ' 是 θ-不变的）。

最后，对于任意 $\xi' \in \Xi({}^0\chi_r)$，我们将 η' 定义为 ξ'的非分歧部分。也就是说，由于我们已经固定了一致化元 $\varpi \in F_r$，每个元素 $t \in T_r$ 都可以唯一地写成 $t = t_0\cdot t'$的形式，其中$t_0 \in {}^0T_r$ 且 $t' = \tau(\varpi)$，这里的余特征为 $\tau \in X_*(A_r)$。并且，对于如上所述的 t，t_0，我们定义 $\eta'(t) = \xi'(t)/{}^0\chi_r(t_0)$。

命题 8.4.1. 沿用上述记号，我们有

$$\langle \operatorname{trace} \Pi I_\theta, \phi^{u,{}^0\chi_r} \rangle = \delta_{B_r}^{-1/2}(u) \sum_{\xi' \in \Xi(\Pi,{}^0\chi_r)^\theta} \eta'(u)\, \operatorname{tr}(I_\theta, \Pi, \xi'). \tag{8.4.2}$$

证明。 我们将该积分按方程（8.3.1）改写。将其与方程（8.4.1）结合，我们得到如下形式：

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{trace} \Pi I_\theta, \phi^{u,{}^0\chi_r} \rangle &= \delta_{B_r}^{-1}(u) \int_{{}^0T_r} \Theta_{\Pi_U\theta}(mu)\, {}^0\chi_r{}^{-1}(m)\, dm \\ &= \delta_{B_r}^{-1}(u) \int_{{}^0T_r} {}^0\chi_r{}^{-1}(m) \langle \operatorname{trace} \Pi_U(mu) I_\theta \,;\, \delta_{B_r}^{1/2} \bigoplus_{\xi' \in \Xi(\Pi)} \mathbb{C}_{\xi'}^{a_{\xi'}} \rangle\, dm\end{aligned}$$

分量 $\delta_{B_r}^{1/2}\mathbb{C}_{\xi'}^{a_{\xi'}}$ 仅当 $\xi' \in \Xi(\Pi)^\theta$ 时才能对迹有贡献，并且在这种情况下 $\Pi_U I_\theta$ 保持该分量。因此，我们可以将积分写成如下形式：

$$\delta_{B_r}^{-1}(u) \sum_{\xi' \in \Xi(\Pi)^\theta} \int_{{}^0T_r} {}^0\chi_r{}^{-1}(m) \langle \operatorname{trace} \Pi_U(mu) I_\theta \,;\, \delta_{B_r}^{1/2} \mathbb{C}_{\xi'}^{a_{\xi'}} \rangle\, dm \tag{8.4.3}$$

对每个分量 $\delta_{B_r}^{1/2}\mathbb{C}_{\xi'}^{a_{\xi'}}$， $\Pi_U(mu)$ 以标量作用

$$\delta_{B_r}^{1/2}(mu)\, \xi'(mu) = \delta_{B_r}^{1/2}(u) \xi'(m) \eta'(u).$$

因此方程（8.4.3）可以写成

$$\delta_{B_r}^{-1/2}(u) \sum_{\xi' \in \Xi(\Pi)^\theta} \eta'(u)\, \operatorname{tr}(I_\theta, \Pi, \xi') \int_{{}^0T_r} {}^0\chi_r{}^{-1}(m) \xi'(m)\, dm$$

并且右边的积分非零（且等于 1）当且仅当 ξ' 在 ${}^0T_r$ 上的限制恰好是 ${}^0\chi_r$，这意味着 $\xi' \in \Xi(\Pi, {}^0\chi_r)^\theta$。证明完成。 □

我们还将需要如下结果。回顾幂等元 $e_{\rho_r} \in \mathcal{H}(G_r, \rho_r)$ 被定义为具有支集 J，并在 $k \in J_r$ 处取值 $\rho_r(k)^{-1}$。

引理 8.4.2. 采用上述记号，我们有

$$\sum_{\xi' \in \Xi(\Pi,{}^0\chi_r)^\theta} \operatorname{tr}(I_\theta, \Pi, \xi') = \langle \operatorname{trace} \Pi I_\theta, e_{\rho_r} \rangle. \tag{8.4.4}$$

证明. 右边可以写成

$$\int_{J_r} \langle \operatorname{trace} \Pi(g) I_\theta,\ \Pi^{\rho_r} \rangle\, e_{\rho_r}(g)\, dg = \langle \operatorname{trace}\, I_\theta, \Pi^{\rho_r} \rangle.$$

由同构 $\Pi^{\rho_r} \xrightarrow{\sim} \Pi_U^{{}^0\chi_r}$和方程（8.4.1），这可以写成

$$\langle \operatorname{trace}\, I_\theta, \delta_{B_r}^{1/2} \bigoplus_{\xi' \in \Xi(\Pi,{}^0\chi_r)^\theta} \mathbb{C}_{\xi'}^{a_{\xi'}} \rangle,$$

这就是方程（8.4.4）的左边。 □

推论 8.4.3. 我们有

$$\langle \operatorname{trace} \Pi I_\theta, \phi^{u,{}^0\chi_r} \rangle|_{u=1} = \langle \operatorname{trace} \Pi I_\theta, e_{\rho_r} \rangle. \tag{8.4.5}$$

特别地，如果 $r = 1$，则有

$$\sum_{\xi \in \Xi(\pi,{}^0\chi)} a_{\xi,\pi} = \langle \operatorname{trace}\, \pi, e_\rho \rangle. \tag{8.4.6}$$

8.5 适配于 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r\text{的}\lambda N}(G_r)$ Labesse 初等函数

在本小节中，我们将构造适用于范畴$\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\ \lambda N}(G_r)$ 的 Labesse 初等函数。

首先，我们应定义范畴 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\lambda N}(G_r)$。设 $\lambda\colon Z(F) \to \mathbb{C}^\times$ 表示中心 $Z(F)$ 上的一个特征，并满足如下性质：$\lambda|_{{}^0Z(F)} = {}^0\chi^{-1}|_{{}^0Z(F)}$，如定理 7.2.1 所述。接着，我们将 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\lambda N}(G_r)$ 定义为 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r}(G_r)$ 的子范畴，它由所有满足以下条件的表示 $(\pi, V) \in \mathfrak{R}_{{}^0\chi_r}(G_r)$ 组成：对于任意 $z \in Z(F_r)$ 和 $v \in V$，均有 $\pi(z)v = \lambda^{-1}N(z)v$。类似地，我们可以将 Hecke 代数$\mathcal{H}_{\lambda N}(G_r, \rho_r)$ 定义为由满足以下条件的函数 $\phi \in C^\infty(G_r)$ 组成的集合：

(1) 对任意 $j_1, j_2 \in J_r$，$\phi(j_1 g j_2) = \rho_r^{-1}(j_1)\phi(g)\rho_r^{-1}(j_2)$;
(2) 对任意 $z \in Z(F_r)$，$\phi(zg) = \lambda N(z)\phi(g)$；(3)
$\mathrm{supp}(\phi)$ 在模 $Z(F_r)$ 意义下是紧的。

容易看出，对于任意函数 $\phi \in \mathcal{H}(G_r, \rho_r)$，都有 $\phi_{\lambda N} \in \mathcal{H}_{\lambda N}(G_r, \rho_r)$。

对于任意函数 $\phi \in \mathcal{H}_{\lambda N}(G_r, \rho_r)$ 以及任意表示 $(\pi, V) \in \mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\ \lambda N}(G_r)$，我们可以在 V 上定义作用 $\pi(\phi)$ 如下：

$$\pi(\phi)v = \int_{G_r/Z(F_r)} \pi(g)\phi(g)v \,\mathrm{d}g. \tag{8.5.1}$$

这一定义良好，且积分收敛。我们有如下重要引理：

引理 8.5.1. 设 $\phi \in \mathcal{H}(G_r, \rho_r)$。对于任意 $(\pi, V) \in \mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\ \lambda N}(G_r)$，有

$$\pi(\phi)v = \pi(\phi_{\lambda N})v$$

对任意 $v \in V$。

证明。

$$\begin{aligned}
\pi(\phi_{\lambda N})v &= \int_{G_r/Z(F_r)} \phi_{\lambda N}(g)\pi(g)v \,\mathrm{d}g \\
&= \int_{G_r/Z(F_r)} \int_{Z(F_r)} \phi(gz)\lambda^{-1}(z)\pi(g)v \,\mathrm{d}z\mathrm{d}g \\
&= \int_{G_r/Z(F_r)} \int_{Z(F_r)} \phi(gz)\pi(gz)v \,\mathrm{d}z\mathrm{d}g \\
&= \int_{G_r} \phi(g)\pi(g)v \,\mathrm{d}g \\
&= \pi(\phi)v.
\end{aligned}$$

□

我们立即得到一个推论：

推论 8.5.2. 对任意 θ-稳定的可容许表示 $(\Pi, V) \in \mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\lambda N}(G_r)$ 以及任意 $\phi \in \mathcal{H}(G_r, \rho_r)$，我们有

$$\langle \mathrm{trace}\ \Pi I_\theta, \phi\rangle = \langle \mathrm{trace}\ \Pi I_\theta, \phi_{\lambda N}\rangle. \tag{8.5.2}$$

现在我们可以把适应于 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\lambda N}(G_r)$ 的 Labesse 初等函数定义为所有形如 $\phi^u_{,\lambda N}{}^{{}^0\chi_r}$ 的函数（以及当 $r = 1$, $f^t_{,\lambda}{}^{{}^0\chi}$ 时）。定义 $\Xi_{\lambda N} \subset \Xi$ 为那些限制到中心 $Z(F_r)$ 为 $\lambda^{-1}N$ 的函数，以及 $\Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r) = \Xi({}^0\chi_r) \cap \Xi_{\lambda N}$。注意，对任意不可约表示 $\Pi \in \mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\lambda N}(G_r)$，其超尖支撑必具有形式 $(T_r, \xi')_{G_r}$，其中 $\xi' \in \Xi_{\lambda N}$。因此，${}^w\xi' \in \Xi_{\lambda N}$ 对任意 $w \in W_r$。将此与公式 (8.4.1) 相结合，我们可以看出 $\Xi(\Pi) \subset \Xi_{\lambda N}$。因此，若将 $\phi^u_{,}{}^{{}^0\chi_r}$ 替换为 $\phi^u_{,\lambda N}{}^{{}^0\chi_r}$，则第 8.4 节中的所有讨论均成立。

引理 8.5.3. 函数 $\phi^u_{,\lambda N}{}^{{}^0\chi_r}$和 $f^t_{,\lambda}{}^{{}^0\chi}$ 相伴。

证明。 这直接由定理 7.2.1 和定理 8.2.4得出。 □

9 强正则椭圆情形的证明

9.1 适配于 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\lambda_N}(G_r)$ 的局部数据

在本小节中，我们假设 G 是 F 上任意一个中心为诱导环面的非分歧群，且满足 $G_{\mathrm{sc}} = G_{\mathrm{der}}$。令 $\mathrm{Irr}_{{}^0\chi,\ \lambda}(G)$（分别地，$\mathrm{Irr}^{\theta}_{{}^0\chi_r,\ \lambda_N}(G_r)$）表示 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi,\ \lambda}(G)$（分别地，$\mathfrak{R}_{{}^0\chi_r,\ \lambda_N}(G_r)$）中的不可约（分别地，不可约且$\theta$-稳定的）容许表示集。

按照 [Jia, §11], 我们将适配于 $\mathfrak{R}_{{}^0\chi,\lambda}(G)$ 的局部数据定义为由数据 (a)、(b) 和 (c) 组成，并满足条件 (1) 和 (2)，具体如下：

(a) 一个指标集 $\mathscr{I}$（可能是无限的）；

(b) 一组复数 $a_i(\pi)$，对应于 $i \in \mathscr{I}$ 和 $\pi \in$ 不可约表示集$_{{}^0\chi,\ \lambda}(G)$);

(c) 一组复数 $b_i(\Pi)$，对应于 $i \in \mathscr{I}$ 和 $\Pi \in$ 不可约表示集$^{\theta}_{{}^0\chi_r,\ \lambda_N}(G_r)$。

(1) 固定 i 时，常数 $a_i(\pi)$ 和 $b_i(\Pi)$ 除了对无限多个 π 和 Π 外，均为零。

(2) 对于 $\phi \in \mathcal{H}_{\lambda_N}(G_r,\ \rho_r)$ 和 $f \in \mathcal{H}_{\lambda}(G,\ \rho)$，以下两个陈述等价：

(A) 对所有 i，我们都有

$$\sum_{\pi \in \mathrm{Irr}_{{}^0\chi,\lambda}(G))} a_i(\pi)\ \langle \mathrm{trace}\ \pi, f\rangle = \sum_{\Pi \in \mathrm{Irr}^{\theta}_{{}^0\chi_r,\lambda_N}(G_r)} b_i(\Pi)\ \langle \mathrm{trace}\ \Pi I_\theta, \phi\rangle;$$

（B）对于所有强正则椭圆半单范数 $\gamma = \mathscr{N}(\delta)$，我们有

$$\mathrm{SO}_\gamma(f) = \mathrm{SO}_{\delta\theta}(\phi).$$

因此，利用局部数据，我们可以将问题从计算轨道积分转变为计算迹。

注 9.1.1. 关于交织算子 I_θ，有一点需要说明：它们是来自全局（阿代尔）层面上规范定义的交织算子的局部交织算子。但从全局到局部的过程涉及一些选择，因此这里的 I_θ 并非规范定义。不过，由于 Π不可约，I_θ 在相差一个标量的意义下是确定的，而这个标量可以吸收到系数 $b(\Pi)$中。因此，我们可以任意选取I_θ 的规范化方式。

9.2 证明结束

我们沿用第7.2节中的所有假设。固定 $\phi \in \mathcal{Z}(G_r, \rho_r)$ 和 $f = b\phi \in \mathcal{Z}(G, \rho)$。我们证明，对于满足 $\lambda|_{{}^0Z(F)} = {}^0\chi^{-1}|_{{}^0Z(F)}$ 的所有特征 λ： $Z(F) \to \mathbb{C}^\times$，函数 ϕ_{λ_N} 和 f_λ 相伴。

根据前几节的讨论，我们可以假设 γ 是一个强正则椭圆半单范数，记作 $\gamma = \mathscr{N}(\delta)$。为了验证恒等式 $\mathrm{SO}_{\delta\theta}(\phi_{\lambda_N}) = \mathrm{SO}\gamma(f_\lambda)$，我们采用 Labesse 的方法：使用相伴的初等函数 $\phi^u_{,\ {}^0_{\lambda_N}\chi_r}$和 $f^t_{,\ {}^0_\lambda\chi}$，当 u 遍历时，给出足够多的特征恒等式，从而在一对 ϕ_{λ_N}，f_λ的局部数据中确立 (2)(A)。

我们需要证明，对于每个 i，上面的 (2)(A) 中的恒等式都成立。固定 i 并在记号中省略它后，我们需要证明

$$\sum_\pi a(\pi)\ \langle \mathrm{trace}\ \pi, f_\lambda\rangle = \sum_\Pi b(\Pi)\ \langle \mathrm{trace}\ \Pi I_\theta, \phi_{\lambda_N}\rangle. \tag{9.2.1}$$

由于我们已经知道，上一节构造的 Labesse 初等函数是相伴的，忽略特征 ${}^0\chi$（分别为 ${}^0\chi_r$）后，便得到以下等式

$$\sum_\pi a(\pi)\ \langle \mathrm{trace}\ \pi, f^t_\lambda\rangle = \sum_\Pi b(\Pi)\ \langle \mathrm{trace}\ \Pi I_\theta, \phi^u_{\lambda_N}\rangle. \tag{9.2.2}$$

在8.4.1 在 $r=1$ 的情形下，利用定理写出左端：

$$\sum_{\pi} a(\pi)\langle \operatorname{trace}\pi, f_\lambda^t\rangle = \delta_B^{-1/2}(t) \sum_{\xi_0\in \Xi_\lambda({}^0\chi)/W_{0_\chi}} \sum_{\pi\in i_B^G(\xi_0)} a(\pi) \sum_{\xi\in\Xi(\pi,{}^0\chi)} \eta(t)\cdot a_{\xi,\pi}. \tag{9.2.3}$$

这里 ξ_0 遍历 W_{0_χ}-轨道在集合 $\Xi_\lambda({}^0\chi)$上的任意一组代表元，该集合由$T(F)$上延拓 ${}^0\chi$的特征组成。由于 $\eta(t)=\eta_r(u)$，方程（9.2.3）是在 $u=\nu(\varpi)$上取值的范数特征的线性组合。

对于右端，我们同样可以将其写成特征的线性组合，并且也希望把范数部分与非范数部分分离开来。我们需要如下引理：

引理 9.2.1 ([Hai12], 引理 9.2.1)。 若 ξ_1', $\xi_2'\in\Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r)^\theta$ 彼此 W_{0_χ}-共轭，则其中一个是范数当且仅当另一个也是。

证明。 若 ξ_1' 与 ξ_2' 是 W_{0_χ} 共轭的，我们可以假设 $\xi_1'={}^n\xi_2'$，其中 $n\in N_GT(F)$是元素$w\in W_{0_\chi}$的一个代表元。我们只需证明一个方向。若 ξ_2' 是范数，我们可以对某个特征 $\chi\in\Xi_\lambda({}^0\chi)$假设$\xi_2'=\chi_r$。因此，对任意 $a\in T_r$，我们有

$$\xi_1'(a)=\xi_2'(n^{-1}an)=\chi(N(n^{-1}an))=\chi(n^{-1}N(a)n)=({}^n\chi)_r(a),$$

这表明 ξ_1' 也是一个范数。

□

由上述引理，我们可以将右边改写如下：

$$\sum_{\Pi} b(\Pi)\,\langle \operatorname{trace}\Pi I_\theta, \phi_{\lambda N}^u\rangle = \delta_{B_r}^{-1/2}(u) \sum_{\xi_0'\in\Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r)^\theta/W_{0_\chi}} \sum_{\substack{\Pi \text{ s.t.}\\ W_{0_\chi}\xi_0'\cap\Xi(\Pi,{}^0\chi_r)^\theta\neq\varnothing}} b(\Pi) \sum_{\substack{\xi'\in\\ W_{0_\chi}\xi_0'\cap\Xi(\Pi,{}^0\chi_r)^\theta}} \eta'(u)\cdot \operatorname{tr}(I_\theta,\Pi,\xi'). \tag{9.2.4}$$

这是因为，若 $\Pi\in i_{B_r}^{G_r}(\xi')$，其中 $\xi'\in\Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r)$ 是 T_r 的一个非 θ-不变特征，那么集合 $W_{0_\chi}\xi'$ 中的所有特征都不会是 θ-不变的。因此，$W_{0_\chi}\xi'\cap\Xi(\Pi,{}^0\chi_r)^\theta=\varnothing$。

令 $(9.4)_n$ (分别为 $(9.4)_{nn}$) 表示 (9.4) 中由那些 ξ_0' 为范数（分别为非范数）的项所作的贡献。由定理 9.2.1，所有（分别没有）项 $\eta'(u)$ 出现在 $(9.4)_n$ 中（分别出现在 $(9.4)_{nn}$ 中）都是（分别不是）范数。

现在我们将恒等式的两边分别视为

$$(9.3)=(9.4)_n+(9.4)_{nn} \tag{9.2.5}$$

作为正则占优 $\nu\in X_*(A^r)$ 上特征的线性组合。特征的线性无关性表明，$X_*(A^r)$ 上任意非空的互异特征集合在 $\mathbb{C}$ 上线性无关。证明表明，它们在正则占优余特征上的限制仍然线性无关。等式 (9.2.5) 对所有正则占优 ν 均成立，因此根据这一线性无关性结论，它必定对 $\nu=0$ 成立，也就是说，对 $u=1$ 成立。用显而易见的记号表示，这意味着我们有两个恒等式：

$$(9.3)|_{t=1}=(9.4)_n|_{u=1}; \tag{9.2.6}$$

$$0=(9.4)_{nn}|_{u=1}. \tag{9.2.7}$$

事实上，线性无关性给出了更强的结论：每个 $\xi_0'\in\Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r)^\theta/W_{0_\chi}$对上述方程的贡献满足相应的恒等式。也就是说，由来自以下特征的 η 组成的部分——这些特征与范数映射复合后在 T_r 上的取值相同——应当相同。因此，结合定理 8.4.3，我们得到以下引理：

引理 9.2.2。 对于每个 $\xi_0' \in \Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r)^\theta/W_{0\chi}$，我们有

$$\sum_{\substack{\xi_0 \in \Xi_\lambda({}^0\chi)/W_{0\chi} \\ \text{s.t. } \xi_{0r} = \xi_0'}} \sum_{\pi \in i_B^G(\xi_0)} a(\pi)\langle \operatorname{trace} \pi, e_\rho \rangle = \sum_{\substack{\Pi \text{ s.t.} \\ W_{0\chi}\xi_0' \cap \Xi(\Pi, {}^0\chi_r)^\theta \neq \varnothing}} b(\Pi) \sum_{\substack{\xi' \in \\ W_{0\chi}\xi_0' \cap \Xi(\Pi, {}^0\chi_r)^\theta}} \operatorname{tr}(I_\theta, \Pi, \xi'). \tag{9.2.8}$$

注意，如果 ξ_0' 不是一个范数，那么方程（9.2.8）的左端为零；根据线性无关论证，右端也应为零。

接下来，我们固定任意一个 $\xi_0' \in \Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r)^\theta$，并对 $W_{0\chi}$ 在 $W_{0\chi_r}\xi_0' \cap \Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r)^\theta$ 中的轨道求和。注意，根据定理 8.4.2，右端将会简化（所有非范数 $W_{0\chi}$-轨道对方程（9.2.8）的贡献均为零）。因此，我们得到

$$\sum_{\substack{\xi_0 \in \Xi_\lambda(\chi)/W_{0\chi} \\ \text{s.t. } \xi_{0r} \in W_{0\chi_r}\xi_0'}} \sum_{\pi \in i_B^G(\xi_0)} a(\pi)\langle \operatorname{trace} \pi, e_\rho \rangle = \sum_{\Pi \in i_{B_r}^{G_r}(\xi_0')} b(\Pi)\langle \operatorname{trace} \Pi I_\theta, e_{\rho_r} \rangle. \tag{9.2.9}$$

如果 $W_{0\chi_r}$-轨道中不含范数，那么左端和右端都为零 ro.

根据基变换同态的定义，我们可以看到， f 在 $i_B^G(\xi_0)^\rho$ 上的作用与 ϕ 在 $i_{B_r}^{G_r}(\xi_0')^{\rho_r}$ 上的作用由同一个标量给出。根据定理 8.5.1，我们可以看到，对于作用 f_λ 和 $\phi_{\lambda N}$，这些标量仍然相同。将这个标量乘到方程（9.2.9）的两边，我们得到一个类似的方程，只是其中的 e_{ρ_r}（分别为 e_ρ）被 $\phi_{\lambda N}$（分别为 f_λ）取代。对所有 $\xi_0' \in \Xi_{\lambda N}({}^0\chi_r)/W_{0\chi_r}$ 求和，我们得到所需的方程（9.2.1）。证明完毕。

我们得到如下直接推论：

推论 9.2.3. 假设 G 满足局部 *Langlands* 对应 + (参见 *[Hai14, §5.2]*)。令 (τ, V) 表示在 ${}^LG$ 上的有限维代数表示，并令 Z_V 为相应的元素，它属于 $\mathfrak{Z}^{\mathrm{st}}(G_r)$，其定义见定理 *5.3.2.2*。则这两个函数 $Z_V * e_{\rho_r}$ 和 $b'(Z_V) * e_\rho$ 相伴。

参考文献

[AR00] Jeffrey D Adler 和 Alan Roche。“ p进群的一个交织结果”。载于：《加拿大数学杂志》52.3（2000），第449–467页。[Bor79] Armand Borel。“自守 L函数”。载于：纯数学研讨会论文集，第33卷，第2册，1979年，第27–61页。[BZ77] J. N. Bernstein 和 A. V. Zelevinsky。“约化 p 进群的诱导表示”。´载于：《科学年鉴·高等师范学校》10卷，1977年，第441–472页。[Cas77] William Casselman。“特征与 Jacquet模”。载于：《数学年刊》230（1977），第101–105页。[Clo90] Laurent Clozel。“稳定基变换的基本引理”。载于：《杜克数学杂志》61.1（1990），第255–302页。[Fin21a] Jessica Fintzen。“ p进群中的驯分歧环面与良半单元素”。载于：《国际数学研究通知》2021.19（2021），第14882–14904页。[Fin21b] Jessica Fintzen。“驯分歧 p进群的类型”。载于：《数学年刊》193.1（2021），第303–346页。[Fin22] Jessica Fintzen。“非定义特征下的驯分歧尖点表示”。载于：《密歇根数学杂志》72（2022），第331–342页。[Fin25] Jessica Fintzen。《超尖点表示：构造、分类与特征》。2025年。arXiv：2510.12883 [math.RT]。

[Hai] Thomas J Haines。“关于零深度主系列的 Hecke 代数同构与类型”。载于：www. math. umd. edu/tjh（）。[Hai09] Thomas J. Haines。“抛物子 Hecke 代数中中心元的基变换基本引理”。载于：《杜克数学杂志》149.3（2009），第569–643页。[Hai12] Thomas J Haines。“零深度主系列块伯恩斯坦中心的基变换”。载于：《高等师范学校科学年鉴》。第45卷，第5册，2012年，第681–718页。[Hai14] Thomas J Haines。“稳定伯恩斯坦中心与志村簇的测试函数”。载于：《自守形式与伽罗瓦表示》2（2014），第118–186页。[Jia] Weimin Jiang。“局部函数域上零深度赫克代数中中心元的基变换基本引理”。编写中（）。[Kot82] Robert E. Kottwitz。“约化群中的有理共轭类”。载于：《杜克数学杂志》49.4（1982），第785–806页。[Kot86] Robert E Kottwitz。“赫克代数单位元的基变换”。载于：《组合数学》60.2（1986），第237–250页。[Kot92] Robert E Kottwitz。“关于与某些简单志村簇相关的 λ进表示”。载于：《数学发明》108.1（1992），第653–665页。[KR00] Robert E Kottwitz 和 Jonathan D Rogawski。“不变迹公式中的分布支集包含于特征上”。载于：《加拿大数学杂志》52.4（2000），第804–814页。[KV12] David Kazhdan 和 Yakov Varshavsky。“关于德利涅–吕斯蒂格函数的端oscopy传递”。载于：《杜克数学杂志》161.4（2012），第675–732页。[KY17] Ju-Lee Kim 和 Jiu-Kang Yu。“驯类型的构造”。载于：《表示论、数论与不变理论：为纪念 Roger Howe 七十寿辰》（2017），第337–357页。[Lab90] J.-P. Labesse。“稳定基变换的初等函数与基本引理”。载于：《杜克数学杂志》61.2（1990），第519–530页。[Lau96] G´erard Laumon。《德林费尔德模簇的上同调，第一部分：几何、点计数与局部调和分析》。剑桥大学出版社，1996年。[LBC99] Jean-Pierre Labesse、Lawrence Breen 和 Laurent Clozel。《上同调、稳定化与基变换》。第257卷。法国数学会，1999年。[Roc98] Alan Roche。“分裂约化p进群主系列表示的类型与赫克代数”。载于：《高等师范学校科学年鉴》。第31卷，第3册。Elsevier，1998年，第361–413页。[Rog88] JD Rogawski。“扭曲情形下的迹帕莱-维纳定理”。载于：《美国数学会汇刊》309.1（1988），第215–229页。[Sch13] Peter Scholze。“针对某些简单志村簇的朗兰兹–科特维茨方法”。载于：《数学发明》192.3（2013），第627–661页。[Van 72] G Van Dijk。“ p进群某些诱导特征的计算”。载于：《数学年刊》199.4（1972），第229–240页。[Yu01] Jiu-Kang Yu。“驯超尖点表示的构造”。载于：《美国数学会杂志》14.3（2001），第579–622页。