无限维李群

Karl-Hermann Neeb、Helge Gl¨ockner

2026年1月2日版本

arXiv:2602.12362v1 [math.FA] 12 Feb 2026

目录

0 引言 .1

第一部分 局部凸空间上的分析学

---

1 局部凸空间中的微分学 .19

1.1 局部凸空间中的曲线与积分.20 1.2 C^1-映射的微分学.30 1.3 高阶可微性.37 1.4 非开域上的微分学.51 1.5 利普希茨连续性及相关主题.62 1.6 泰勒展开与齐次多项式.68 1.7 C^k-函数空间及其间的映射 . . . . . 85 1.8 第 1 章附录 .118 1.9 第 1 章注释与评述 .122

2 微分学的进一步技巧.127

2.1 复解析映射.127 2.2 实解析映射.144 2.3 赋范空间上的微分学.151 2.4 局部凸空间中的微分方程.187 2.5 流形上的微分方程.213 2.6 可度量空间上的微积分.227 2.7 Silva 空间上的微积分.233 2.8 局部凸直和上的微分学 234 2.9 第2章的注释与评述.235

3 无穷维流形基础理论 .241

3.1 以局部凸空间为模型的流形.241 3.2 C^r-流形之间的映射.248 3.3 切丛与切映射.254 3.4 流形上的向量场李代数.269 3.5 带边界流形及其推广.278 3.6 微分形式.292 3.7 向量丛与主丛.307

3.8 喷射、局部加法与管状邻域.320 3.9 附录：李代数上同调.331 3.10 第3章注释与评论.335

4 无穷维流形的基本构造. 3374
.1 .338 4.2 紧流形上的映射流形.366 4.3 流形的细盒空间上的映射流形 . . . . . 4.4 空间流形的细盒.370 4.4 非紧流形上的映射流形 . . . . . 372 4.5 有限维流形的直接极限.377 4.6 第 4 章的注释与评论.382

第二部分 一般李理论

---

5 局部凸李群 .387
5.1 李群及其李代数.388 5.1.1 李群的定义.388 5.1.2 李群的李代数. 390 5.2 伴随作用与半直积.396 5.2.1 伴随表示.397 5.2.2 半直积.400 5.3 在群上构造李群结构.404 5.3.1 从局部数据构造李群.404 5.3.2 李群的覆盖.406 5.4 映射群与微分同胚群.412 5.5 Maurer–Cartan形式. 415 5.5.1 对数导数.416 5.5.2 李群同态.419 5.6 李群的指数函数.422 5.6.1 指数映射的一些例子.422 5.6.2 指数映射的自然性.427 5.6.3 具有指数映射的阿贝尔李群 . . . . . 429 5.6.4 指数函数的导数 431 5.7 第5章的注释与评论.440

6 正则李群.443
6.1 正则性与基本定理.444 6.1.1 正则李群.444 6.1.2 基本定理.447 6.2 关于李代数值 1-形式的更多内容.454 6.3 群与李代数中的路径.457 6.4 建立李群正则性的工具.460 6.5 第 6 章的注释与评论.469

7 局部指数李群.471
7.1 局部指数李群的例子.471 7.1.1 局部指数李群.472 7.1.2 一些指数李群.474 7.2 局部指数李群同态.480 7.2.1 自动光滑性.480 7.2.2 积分李代数态射.484 7.2.3 局部 k-指数李群.486 7.2.4 带李代数的拓扑群.487 7.3 Baker–Campbell–Dynkin–Hausdorff公式.491 7.3.1 指数幂零李群.491 7.3.2 BCH 乘法的结合性.494 7.3.3 原幂零李代数.497 7.4 第7章的注释与评论.502

8 李群局部理论 .505
8.1 局部李群.505 8.1.1 局部李群及其李代数.506 8.1.2 Maurer–Cartan形式及其应用 . . . . . 511 8.1.3 局部李群上的等变微分形式 . . . . 513 8.2 指数局部李群 .514 8.2.1 基本事实与若干例子 .515 8.2.2 局部群同态.517 8.3 局部指数李代数.525 8.4 豪斯多夫级数与局部指数李代数 532 8.4.1 巴拿赫–李代数.532 8.4.2 局部指数李代数.535

9 李群的子群与商群.5439
.1 Sub群 o f 属 l Li 544
李群.9.1.1 子群的微分李代数.544 9.1.2 初始李子群.547 9.1.3 李子群.551 9.1.4 李群的商群.552 9.2 局部指数积分子群.555 9.2.1 积分子群.555 9.2.2 可分性与子群的李代数.560 9.2.3 积分子群的初始性.562 9.2.4 李群中的无限维环面.563 9.3 局部指数子群.566 9.3.1 局部指数子群及其李代数 . . . . . 567 9.3.2 局部紧子群.571 9.3.3 换位子群.575 9.3.4 闭子群的始性.576 9.3.5 局部指数群的小子群 577

9.4 局部指数李群的商.579 9.4.1 商群.579 9.4.2 商李代数的可积性.
582 9.5 李群扩张的正则性.585 9.5.1 初始李子群的正则性.585 9.5.2 正则性是一种扩张性质.586 9.5.3 正则李群上群作用的光滑性 588
9.6 第9章注释与评述.592

第 10 章 连续逆代数与线性李群.... 595
10.1 连续逆代数的基本事实.596 10.2 映射代数与芽代数.601 10.3 连续逆代数上的矩阵代数.610 10.4 代数子群.612 10.5 光滑向量 cia.616
10.6 单位群的正则性.620 10.6.1 充分条件.620 10.6.2 关于局部 m-凸性的 Turpin 定理 622 10.6.3 交换连续逆代数的完备化.624
10.6.4 光滑向量代数的正则性.626 10.7 附录：连续逆代数的谱理论.
629 10.7.1 谱演算.629 10.7.2 指数函数和对数函数.633 10.8 第 10 章的注释与评论.639

11 映射群 .641
11.1 紧流形上的映射群.641 11.2 李群的盒积.647 11.3 非紧流形上的映射群.652 11.4 主丛的规范群.654

12 直极限李群 .655
12.1 有限维李群的直极限.655 12.2 关于局部有限维李群的进一步事实
664 12.3 无限维李群的直极限.665 12.4 第 12 章的开放问题.669 12.5 第 12 章的注释与评论.669

13 微分同胚群.671
13.1 紧流形的微分同胚群.671 13.2 非紧流形的微分同胚群.676 13.3 Diff($\mathbb{S}^1$) 不是局部指数的.677 13.4 李变换群.679 13.4.1 光滑李群作用.
679 13.4.2 作为自同构群的微分同胚群 . . 682

13.4.3 微分形式的自同构群.683 13.4.4 巴拿赫对称空间的自同构群 . . . 684 13.4.5 奇点的自同构群.684 13.5 流形上的圆群作用.686 13.6 第 13 章注释与评论.688

14 无限维李群的同伦群 69114

.1 同伦群.691 14.1.1 同伦群.692 14.1.2 直极限.699 14.1.3 Palais 定理692 弱同伦等价 . . . . . 701 14.2 有限维李群.707 14.3 微分同胚群.710 14.3.1 球面与球.710 14.3.2 球面与区间的乘积.711 14.4 希尔伯特空间上的算子群.712 14.4.1 Kuiper 定理.713 14.4.2 Kuiper 定理的应用. 715 14.5 直极限群.719 14.5.1 有限维矩阵群的直极限 . . . . . 719 14.5.2 $GL_\infty(\mathcal{A})$ 的巴拿赫–李完备化.722 14.6 Schatten 理想的合同子群. 724 14.7 连续映射的光滑逼近.726 14.7.1 一般逼近结果.726 14.7.2 紧流形上的映射群.728 14.7.3 紧支撑函数群.729 14.7.4 全纯映射群.736 14.8 具体映射群.737 14.8.1 连通分支群.737 14.8.2 通过悬挂约化.741 14.8.3 通过收缩约化.742 14.8.4 闭可定向曲面.745 14.8.5 带边界的可定向曲面.747 14.8.6 闭不可定向曲面.748 14.8.7 带边界的不可定向曲面.750 14.9 第14章注释与评论.757

第15章 选讲专题.759

15.1 幂零李群与可解李群.760 15.1.1 用李代数刻画.760 15.1.2 可解李群的正则性.764 15.2 多项式李群.769 15.2.1 二项式多项式函数.771 15.2.2 构造单参数群.772 15.3 形式李群.776

15.3.1 形式映射.777 15.3.2 形式李群.778 15.3.3 形式向量场的形式积分曲线.781 15.3.4 单参数群.787 15.4 李群扩张的一些结果.789 15.4.1 李群扩张的指数映射.790 15.4.2 相对基本定理.792 15.4.3 具有光滑全局截面的阿贝尔扩张 . . . . . 796 15.4.4 局部指数李代数的广义中心扩张.800 15.5 局部指数李代数的可扩张性.807 15.5.1 李群的路径群.808 15.5.2 路径李代数的可扩张性.809 15.5.3 周期群.811 15.5.4 非麦基完备代数的周期群 819 15.6 可积性.828 15.6.1 解析群.828 15.6.2 向量场李代数.829 15.6.3 线性算子的可积性.831 15.7 BCH–李群.838 15.8 具有正则指数函数的李代数.842 15.8.1 可解巴拿赫–李代数.843 15.8.2 准幂零巴拿赫李代数.847 15.8.3 指数型前有限李代数.851 15.9 半直积的局部指数性.853

A 点集拓扑工具.857

A.1 网.857 A.2 始拓扑；直积.859 A.3 终拓扑和商映射.861 A.4 紧致性和局部紧空间.862 A.5 仿紧性.864 A.6 紧开拓扑.870 A.7 拓扑空间的归纳极限.883 A.8 附录 A 的注释与评论.894

B 关于局部凸空间的基本事实 .895

B.1 基本定义与初步性质.895 B.2 线性映射的连续性与开性.899 B.3 向量子空间、商与直积.900 B.4 零的邻域与连续半范数.901 B.5 线性泛函与 Hahn–Banach 定理.907 B.6 完备性与序列完备性.913 B.7 局部凸空间的完备化.917 B.8 线性映射的连续延拓.917

B.9 有界集与弱拓扑.920 B.10 自反空间与桶空间.928 B.11 等度连续性、双线性与多重线性映射.930 B.12 射影极限.937 B.13 直和与局部凸归纳极限.941 B.14 附录 B 注释与评论.955

C 拓扑群 .957
C.1 由局部数据导出的群拓扑.957 C.2 拓扑群的局部同态延拓 959

D 非李群中的光滑映射.963
D.1 微分同胚群中的光滑映射.964 D.2 到一般线性群的光滑映射.977 D.3 到李群的光滑映射.994 D.4 逆映射的自动光滑性.996 D.5 向量场的局部指数李代数.1003

参考文献.1009

0 引言

对称性在自然科学和整个数学领域中都发挥着核心作用。在数学中，抽象对称性由群来表示。如果从动力学角度看待对称性，即考察一个系统随时间参数演变的过程，那么它们就对应于单参数群。研究依赖多个参数的对称性，便引出了李群的概念。本专著的核心主题是无限维李群理论，即研究依赖无限多个参数的对称性。此类对称性可以从无穷小、局部或整体层面加以研究，分别对应于李代数、局部李群或全局李群。

有限维李理论由Marius Sophus Lie 和 Friedrich Engel于19世纪末创立，他们证明了在有限维情形下，局部理论与无穷小理论等价（[Lie80, Lie95, LE93]）。整体理论则要等到20世纪初，拓扑空间和光滑流形的语言得到充分发展后才得以建立。有限维理论的一个关键特点是，有限性条件使得我们能够建立一套完整的有限维李群结构理论，其中包括李维分解以及半单李群的精细结构。关于有限维李群理论，可参阅 [HiNe12] 。

在无限维情形下，从无穷小层次过渡到局部层次，再从局部层次过渡到整体层次，并非总是可行，因此该理论分为三个截然不同的层次。关于无限维李理论的文献中，很大一部分只研究李代数（无穷小层次）、其结构及其表示。不过，只有某些特殊类别的群，例如 Kac–Moody群或某些直极限群，才能通过纯代数方法结合有限维李理论来研究 [Kum02, Ma18]。李理论的代数方面与数理物理中的许多应用密切相关：无穷小方法便于计算，但要理解几何和拓扑现象，则需要整体视角。

在这部专著中，我们着重探讨无限维李理论的局部与整体层面，以及从

无穷小层面过渡到局部层面，再由此过渡到整体层面所需的机制。我们的方法基于一种既简单又一般的李群概念：

一个**李群** 是一个光滑流形，并赋有群结构，使得乘法和求逆都是光滑映射。

与有限维理论相比，主要区别在于流形的概念：我们考虑的流形以（不一定完备的）局部凸空间为模型。采用这种一般视角研究李群颇有裨益，因为这使我们能够统一讨论该理论的所有基本方面。虽然我们简单地称它们为李群，但更具体的术语是局部凸李群。根据模型空间的类型，我们尤其得到有限维、巴拿赫–、Fr´echet–、LF–和西尔瓦–李群等类。

还有一些较弱的李群和无限维流形概念。其中一种基于 Frölicher, Kriegl and Michor（[FB66, Mi84, FK88, KM97]）所发展的整体分析“便利框架”。在 Fr´echet 流形的背景下，这一框架与我们的框架并无不同；但对于更一般的模型空间，它提供了一种光滑映射的概念，而这种映射不蕴含连续性，因此会导出并非拓扑群的“李群”。另一种方法基于 J.-M. Souriau提出的微分学空间概念，可用于在微分几何背景下研究诸如 $\mathbb{R}$ 被非离散子群取商所得的空间 [So84, So85, DI85, Lk92]（参见 [HeMa02] 关于其在微分同胚群中的应用）。这种方法的优点是，微分学空间的范畴是笛卡尔闭的，而且任何微分学空间的商都带有自然的微分学结构；然而，由此带来的结果是，微分学结构相当弱。这种令人难以置信的自由度使得区分正则对象与非正则对象更加困难。

在此背景下，我们还提及较新的半李群概念（[KMR16], [MNe18], [BHM25]）：它是一个带有光滑巴拿赫流形结构的拓扑群，且只有左乘是光滑的。这一概念涵盖了 C^k-微分同胚群，它们在几何分析中发挥着重要作用（参见 [AK98], [EMi99]）。其主要特点是能够保留定量信息，并为扰动理论提供一个背景。

为展示无限维李群的多样性，我们简要讨论几类无限维李群，它们促使人们为相关的局部凸空间类发展相应的微积分：

- 线性李群
- 映射群
- 直极限群
- 微分同胚群

线性李群。在有限维李理论中，研究李群的一种自然方法是通过矩阵群，即一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 中可逆实 $n \times n$矩阵所构成的子群。由于每个有限维（结合）代数都可以嵌入矩阵代数，因此这等价于考察单位群的子群

$$\mathcal{A}^\times := \{a \in \mathcal{A} \colon (\exists b \in \mathcal{A})\ ab = ba = \mathbf{1}\}$$

有限维含幺结合代数 $\mathcal{A}$。这种方法的优点是，可以直接通过指数级数定义指数映射，从而绕过若干关于李群的较深结果 [HiNe12]。这种方法在巴拿赫–李群的语境中也相当有效。在这里，线性李群是巴拿赫代数的单位群的子群，但对于许多无限维李理论的应用而言，这一框架过于狭窄。

对于局部凸空间，考虑局部凸空间 V 上的含幺代数 $\mathcal{A} := \mathcal{L}(V)$（由 V 上的连续线性自同态构成）是很自然的。若 V 不是巴拿赫空间，其单位群 $\mathrm{GL}(V)$ 不具有自然李群结构。特别是，它在任何向量拓扑下都不是开集（参见 [Ms63]）：如果 $A \in \mathcal{L}(V)$ 的谱无界，那么就存在一个序列 $t_n \to 0$，使得没有算子 $\mathbf{1} + t_n A$ 属于 $\mathrm{GL}(V)$。因此，我们需要一类性质优于 $\mathcal{L}(V)$ 的代数。对于无限维李理论而言，最自然的代数类是连续逆代数（cia）。这类代数是含幺局部凸代数 $\mathcal{A}$，其乘法连续，且单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是开集，求逆是连续映射 $\mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}$。连续逆代数的典型例子包括：

•含幺巴拿赫代数：*Neumann* 级数 $(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ 对于 $\|x\| < 1$ 的收敛意味着 $\mathcal{A}^\times$ 是开集，且求逆是连续的。

• 对于紧致有限维光滑流形 M，光滑函数代数 $C^\infty(M, \mathbb{C})$ 是一个含幺的 Fr´echet 连续逆代数。若 M是非紧致且 σ-紧的，则 $C_c^\infty(M, \mathbb{C})$ 是一个不可度量化的 LF 空间，且没有代数单位元。相应的含幺扩张是一个连续逆代数。

• 对于紧子集 $K \subseteq \mathbb{C}^n$，定义在 K 的某个邻域上的全纯函数芽代数 $\mathcal{O}(K)$ 是一个连续逆代数，也是一个西尔瓦空间，即由带有紧连接映射的巴拿赫代数组成的直接极限。

连续逆代数 $\mathcal{A}$ 的单位群 $\mathcal{A}^\times$ 在赋予其作为开子集的自然流形结构后是一个李群；特别地，这也适用于 $M_n(\mathcal{A})$ 的单位群一般线性群 $_n(\mathcal{A})$。我们将这些群的“李子群”视为线性李群。大多数经典李群都定义为某些矩阵的中心化子，或定义为某个自同构群的不动点集。所有这些构造都可以自然地推广到元素属于连续逆代数的矩阵。

映射群。在巴拿赫空间微积分的背景下，李群的映射群可以如下构造。对于紧空间 X 和巴拿赫–李群 K，连续映射构成的群 $C(X,\ K)$ 是一个巴拿赫–李群，其李代数为 $C(X,\ \mathfrak{k})$，其中 $\mathfrak{k} := \mathbf{L}(K)$ 是 K 的李代数。

在局部凸李群这一更广阔的背景下，对于每个具有李代数 $\mathfrak{k}$ 的李群 K 和一个 σ-紧致光滑有限维流形 M，也可以在群 $C_c^\infty(M,K)$ 上赋予李群结构，该群由从 M 到 K 的紧支集光滑映射构成，其李代数为 $C_c^\infty(M,\mathfrak{k})$。若 M 紧致且 K 有限维，则后者是弗雷歇空间；但若 M 非紧致，则模型空间只是LF空间。

从连续映射转向光滑映射，特别是受到光滑函数代数上存在导子的推动。具体而言，我们可以构造李群的半直积，例如

$$C^\infty(M,K) \rtimes \mathrm{Diff}(M),$$

它通过丛自同构作用于平凡丛 $M \times K \to M$。在巴拿赫–李群的 C^0背景下，没有与之对应的李群类比。

直极限群。从有限维群得到无限维群的一种方法，是考虑由有限维李群组成的序列 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 及态射 $\varphi_n\colon G_n \to G_{n+1}$，从而可以定义直极限群 $G := \varinjlim G_n$，其表示对应于群 G_n 的表示的相容序列。我们将看到，直极限群 G 总是可以赋予自然李群结构（第 12 章）。其李代数 $\mathbf{L}(G)$ 是可数维直接极限空间 $\varinjlim \mathbf{L}(G_n)$，并赋予最细局部凸拓扑。这提供了一类有趣的无限维李群，它们仍与有限维群相当接近，并且具有非常丰富的表示论（[DiPe99, NRW01, Wol05]）。

微分同胚群。 许多无限维群自然地源自流形上的几何结构或其他结构，并构成这些结构的自同构群。在 Felix Klein的埃尔朗根纲领 [中，几何结构甚至是根据其自同构群来定义的。对于一个 σ紧致有限维光滑流形 M，从其可微结构出发，其自同构群就是全体微分同胚构成的群 $\mathrm{Diff}(M)$。为了赋予该群流形结构，我们先假设 M 是紧的。此时，$\mathrm{Diff}(M)$具有自然的李群结构，其模型空间是 $\mathcal{V}(M)$ 上的（光滑）向量场空间，这也是该群的李代数（[Les67、Omo70、EM69、EM70、Gu77、Mr80、Ham82]）。于是，光滑左作用 $G \times M \to M$ 对应于李群同态 $G \to \mathrm{Diff}(M)$。对于 $G = \mathbb{R}$，我们尤其得到一个众所周知的对应关系： M上的光滑流、 M上的光滑向量场，以及 $\mathrm{Diff}(M)$ 的单参数群彼此对应。其他重要的微分同胚群还包括以下子群

保持体积形式 μ、辛结构 ω或接触形式 α 不变的 Diff(M) 子群（参见 [KM97]）。

如果 M 不是紧的，那么仍然可以将 Diff(M)构造成李群，但此时它必须以由紧支撑光滑向量场构成的李代数 $\mathcal{V}_c(M)$为模型，并赋予其自然的 LF 结构（参见 [Mr80、Mil82、Gl03c]）。这样做的缺点是，由非紧支撑向量场生成的光滑流会定义一个不连续的同态 $\mathbb{R} \to$ Diff(M)。对于这种李群结构，由所有在紧集之外与 id_M 一致的微分同胚构成的正规子群 Diff$_c$(M)是 Diff(M)的开子群。

性质不同、但同样是局部凸李群的还有形式微分同胚群，Lew39]、Sternberg [St61] 和Kuranishi [Kur59], 对此进行了研究；还有由 $\mathbb{R}^n$ 固定 0 的光滑和解析微分同胚芽构成的群（[RK97、Rob02]），以及由 $\mathbb{C}^n$固定 0 的双全纯映射芽构成的群（ [Pis76 、 Pis77 、 Pis79] ）。

与无限维酉群的相似之处。非紧流形的情形，与我们在酉群表示理论中遇到的情形相似。设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维复希尔伯特空间，U($\mathcal{H}$)是它的酉群。这个群有两种自然拓扑。U($\mathcal{H}$)上的范数拓扑继承自巴拿赫代数$\mathcal{L}(\mathcal{H})$，使其成为一个巴拿赫–李群 U($\mathcal{H}$)$_n$，但这种拓扑相当精细。强算子拓扑（即逐点收敛拓扑）使 U($\mathcal{H}$)成为拓扑群 U($\mathcal{H}$)$_s$，其单参数群由（无界）自伴算子生成。若 M 是非紧的，那么微分同胚群也存在显著的类比：“ 非李群 ” Diff(M) 对应于拓扑群 U($\mathcal{H}$)$_s$，M 上的光滑向量场对应于自伴算子，而支集的紧致性则对应于有界性。因此，Diff$_c$(M)上的李群结构可与 U($\mathcal{H}$)$_n$上的李群结构相比较。

无限维中的微分同胚。我们已经在上文看到，对于非紧致光滑流形 M，其微分同胚群 Diff(M) 不具有自然的李群结构。然而，即使 M 是无穷维流形，我们仍然可以定义从 $N \to$ 到 Diff(M) 的“光滑”映射f，其中 N 是光滑流形，方法是要求相应的映射

$$N \times M \to M^2, \quad (n, m) \mapsto (f(n)(m), f(n)^{-1}(m))$$

是光滑的。那么，李群 G 在 M 上的光滑作用就是一个光滑同态 $G \to$ Diff(M)。这种将“自变量移到左边”的技巧，是便利微积分 [KM97]中许多构造的基础。我们发现，在许多情境下，这一技巧都很有用，可作为将李理论论证的基本方法应用于 Diff(M) 这样的“非李群”，或应用于局部

凸空间。

本书内容。 对这些李群类别的讨论表明，局部凸李群的类型迥异：巴拿赫–李群、微分同胚群（以 Fr´echet 空间和 LF 空间为模型）、芽群（以西尔瓦空间为模型）以及形式群（以 Fr´echet 空间为模型，例如 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$）。在发展相应的分析工具时，必须考虑到这种多样性。因此，本专著分为两部分：A部分讨论局部凸空间上的分析学，B部分讨论无限维李群。

A部分 由四章组成。前两章介绍微分学的基础及更具体的方面，第三章介绍以局部凸空间为模型的流形，第四章则描述映射流形、盒积和归纳极限等构造。

在第1章中，我们阐述了在局部凸空间 E 上进行微分学的框架。这种方法十分自然：以方向导数取代有限维微积分中熟悉的偏导数，并要求其关于点和方向都连续。设 E 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为开集，且 $f\colon U \to F$ 是一个映射。那么， 的导数在 x 沿方向 h 定义为

$$df(x,h) := (D_h f)(x) := \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} f(x+th) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))$$

只要它存在。函数 f 在 x 处称为可微，如果对所有 $h \in E$， $df(x,h)$ 都存在。如果它在 U 的所有点处都可微，且 $df\colon U \times E \to F$ 是连续映射，则称其为连续可微（或 C^1）。我们称 f 为 C^k-映射， $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，如果它是连续的，且迭代方向导数

$$d^{(j)}f(x,h_1,\dots,h_j) := (D_{h_j}\cdots D_{h_1}f)(x)$$

对所有整数 $1 \le j \le k$、 $x \in U$ 和 $h_1, \dots\dots, h_j \in E$，以及所有映射 $d^{(j)}f\colon U \times E^j \to F$ 都存在，并且都是连续映射。按照惯例， C^∞-映射称为光滑。局部凸空间中的微分学这一方法可追溯至Andrée Bastiani [Ba64]。

我们既不假设 E 的 F完备，也不把讨论局限于定义在开子集上的映射，而是发展定义在具有稠密内部的“局部凸”子集上的微分学；在这里，可微性意味着映射 $d^{(j)}f$ 连续延拓到边界。由此，我们可以讨论定义在紧区间、正方形和单形上的光滑映射。在无限维情形下，我们会遇到许多微积分经典结果的类似版本，例如微积分基本定理、链式法则和泰勒定理。作为无限维李理论中许多重要构造的预备知识，我们还将讨论空间间典型的C^k-函数映射的连续性和可微性。

在第2章中，我们将讨论无穷维微积分的其他概念和工具，这些内容与特定的例子和应用相关，例如实解析和复解析映射、常微分方程，以及可度量化空间、Silva 空间和局部凸直和上的微积分的具体内容。

第1章和第2章也可能对数学的其他分支有所助益，例如动力系统或几何学，而不仅限于李理论。它们为无穷维微分学的应用奠定了广泛的基础。

在第3章中，我们转而讨论以局部凸空间为模型的流形及其相关基本概念：流形之间的光滑映射（以及 C^r-映射）、切映射、光滑向量场的李代数和微分形式。我们还通过讨论向量丛、主丛、喷射和局部加法，为无穷维流形的基本构造做准备。

在第 4 章中，我们构造了几大类无限维流形。特别地，对于每个紧致光滑流形 M 和仿紧有限维光滑流形 N，我们将 $C^k(M,N)$这一由 M 上的 N值 C^k-映射组成的集合赋予光滑流形结构。更一般地， N 可以是任何具有局部加法的光滑流形。这一构造对无限维李理论至关重要：首先，对于每个李群 K，我们都能在 $C^k(M,K)$上得到李群结构。其次， M的光滑微分同胚群 $\mathrm{Diff}(M)$ 是 $C^\infty(M,M)$的开子集，而作为开子集的光滑流形结构使其成为李群。作为起点，对于任意的 C^k-流形 M和以局部凸空间为模型的 N，我们在 $C^k(M,N)$上定义一种拓扑。若 $N:=F$ 是局部凸空间，则后者拓扑使 $C^k(M,F)$成为局部凸空间。同样，对于给定的向量丛 $E\to M$，取$N:=E$，则 C^k-截面子集 $\Gamma_{C^k}(E)\subseteq C^k(M,E)$上的诱导拓扑是局部凸向量拓扑。我们还研究这类映射空间或截面空间之间非线性映射的可微性。特别地，我们得到流形乘积上的函数空间的指数律。在此基础上，我们进行以下构造：

流形的细盒积。 对于任意序列 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的光滑流形，我们在笛卡尔积上构造一种光滑流形结构

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n,$$

并赋予其一种比乘积拓扑更精细的拓扑。这类流形称为细盒积。记作 $\prod^{\mathrm{fb}}_{n\in\mathbb{N}} M_n$。 注意， $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ 上的乘积拓扑与任何流形结构都不相容，因为该空间不是局部可缩的。

非紧流形上的映射流形。对于每个 σ紧致有限维光滑流形 M 以及容许局部加法的光滑流形 N，我们证明映射的像

$$\rho\colon C^k(M,N)\to\prod_{n\in\mathbb{N}}^{\mathrm{fb}}C^k(M_n,N),\quad f\mapsto(f|_{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$$

对于 M的每个由紧致满子流形 M_n组成的局部有限覆盖（M_n）$_{n\in\mathbb{N}}$，都是细盒积的子流形。我们赋予 C^k（M，N）光滑流形结构，使得 ρ 成为到其像上的 C^∞-微分同胚。

有限维流形的直接极限。 对于每个递增序列，我们在并集 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}M_n$ 上构造一种自然的光滑流形结构

$$M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots$$

由有限维 C^∞流形组成，并且所有包含映射 $M_n\to M_{n+1}$都是光滑浸入。

B部分 关于李群的内容由十一章组成。第5章介绍局部凸李群及其基本结构特征。其余各章讨论李群的重要性质，例如正则性（第6章）和局部指数性（第7章）。接下来，第8章讨论局部李理论，第9章讨论子群与商群。第10至13章讨论上述四类重要的李群：线性李群、映射群、直极限李群和微分同胚群。第14章研究各种类无限维李群的同伦群。最后的第15章由若干较短的章节组成，讨论一些更为专门的主题。

与有限维情形一样，李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}=\mathbf{L}(G)$等同于单位元 e处的切空间 $T_e(G)$，其中李括号是通过与左不变向量场空间的等同而得到的。这使得 $\mathbf{L}(G)$成为一个局部凸拓扑李代数。将李群的态射 φ 对应到其切映射$\mathbf{L}(\varphi):=T_e(\varphi)$，我们便得到从局部凸李群范畴到局部凸拓扑李代数范畴的李函子 $\mathbf{L}$。李理论的核心现在在于确定李函子遗忘了多少信息，以及在群层面上有多少信息可以由它重构出来。

作为一般原则，有限维李理论中所有仅需“微分”的构造都可以推广到无限维背景，但一旦涉及积分过程以及微分方程的解，就必须细化公理化框架。例如，在有限维情形和巴拿赫空间背景中，指数映射是一个重要工具，但由于局部凸流形上的向量场未必具有积分曲线，因此不存在保证光滑指数映射（即一个光滑函数）之存在性的一般定理

$$\exp_G\colon\mathbf{L}(G)\to G$$

使得曲线 $\gamma_x(t):=\operatorname{Exp}_G(tx)$ 是同态（$\mathbb{R}$，$+$）$\to G$且 $\gamma_x'(0)=x$。因此，指数函数的存在性必须

被视为一项额外要求。更强的要求是正则性，这意味着，对于每条光滑曲线 $\xi\colon [0,1] \to \mathbf{L}(G)$，初值问题

$$\gamma'(t) = \gamma(t).\xi(t) := T_e(\lambda_{\gamma(t)})\xi(t), \quad \gamma(0) = e$$

有一个解 $\gamma_\xi\colon [0,1] \to G$ 并且 $\gamma_\xi(1)$ 光滑地依赖于 ξ。第 6 章讨论的正则性是一项自然的假设，它提供了许多将无穷小层面的结果推广到整体层面的方法。这一正则性概念由 Milnor [Mil84] 提出。它弱于 μ 等人引入的正则性（参见 [KYM85] 的综述），但对于基本的李理论应用而言仍然足够强。目前，我们不知道有任何以完备空间为模型的非正则李群。对于下文讨论的所有主要具体类别，都可以证明其正则性；但目前还没有一般性定理断言每个具有完备模型空间的局部凸李群都是正则的，甚至也没有定理断言它存在指数函数。证明或否定这样的定理，是该理论中的一个基本公开问题。

一种与正则性性质不同、且可用于发展深刻李理论的假设是，G 是局部指数的，也就是说，它具有一个在 0 处为局部微分同胚的指数函数。具有这一性质的群将在第7章中研究。更强的假设是，G 是解析的，且指数函数是在 0 处为解析局部微分同胚。具有这一性质的群称为*BCH–* 李群，因为在典范局部坐标中，局部乘法由贝克–坎贝尔–豪斯多夫（BCH）级数给出

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}[x,[x,y]] + \frac{1}{12}[y,[y,x]] + \dots$$

这个类尤其包含所有巴拿赫–李群。

对于任意局部指数李群，群 G的许多信息已经包含在由 BCH 级数在适当的开零邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$上定义的局部乘法中。由此得到的结构是一个局部指数局部李群，因为直线 $(-\varepsilon,\varepsilon) \to U, t \mapsto tx$是局部单参数群。这促使我们在第 8 章讨论局部李群，以及与局部指数李代数相关的特殊类别。

在第 9 章中，我们将转向研究李群的子群。即使在有限维李理论中，这也是一个相当微妙的领域。在有限维李群 G 中，基本上要考虑两类子群：性质最好的一类是李子群。它们是闭子群$H \subseteq G$；它们自动成为嵌入子流形，且陪集空间G/H 具有自然流形结构。积分子群 $H = \langle$由李子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 的指数像生成。这些子群也具有典范李群结构，使得包含映射$\iota_H\colon H \to G$ 是浸入，但通常不是嵌入。一种统一的

图景可由这样一个定理得到：有限维李群的**每个** 子群 H 都具有唯一的李群结构，使得包含映射 ι_H 定义了一个初始子流形。根据山边定理， H 作为 G的拓扑子空间的道路连通性，等价于相应李群 H ([HiNe12]) 的连通性。

这些极其强大的结果大多在无限维背景下失效，首先是山边定理，它在很大程度上依赖于布劳威尔不动点定理。无限维李群 H 中存在弧连通的子群 G，但其中所有光滑弧都是常数弧。它们还具有一种典范的初始流形结构，但这种结构对应于离散拓扑。同样，子群的闭性一般并不意味着存在子流形结构。从某种意义上说，这些缺陷具有典型性：在无限维背景下，拓扑要求并不足够，还必须考虑将光滑结构纳入考量的性质。这引出了范畴概念初始李子群 以及分裂李子群的概念；后者刻画了这样的子群 H： G/H 具有自然流形结构，且右乘使 G 成为一个 H主丛。

除了这些“坏消息”之外，也有一些好消息，即关于巴拿赫–李群子群的许多结果都可以推广到局部指数李群。首先，局部指数李群的李代数 $\mathfrak{g}$中的局部指数子代数 $\mathfrak{h}$ 生成积分子群（积分子群定理），而且已有很好的判据可用于判断积分子群是否为初始李子群。有限维情形下“闭子群是李群”这一结果仍然成立，其形式是：局部指数李群的局部紧子群是李子群；但局部紧致性意味着这些子群是有限维的。

我们不再深入探讨第 10 至 13 章中关于线性李群、映射群、归纳极限李群和微分同胚群的内容。

第14章讨论无限维李群的拓扑。对于李群 G，最重要的拓扑信息包含在前三个同伦群中： $\pi_0(G)$（连通分支群）、$\pi_1(G)$（基本群）和第二同伦群 $\pi_2(G)$）。 $\pi_0(G)$的重要性显而易见，因为我们常常需要知道一个具体给定的群是否连通，而李代数的影响也不会超出单位连通分支。基本群的信息对于将李代数同态积分为群同态至关重要，因此对表示论也特别重要（定理 6.1.16）。它也出现在满足 Maurer–Cartan 方程的1-形式的积分中（定理 6.1.13）。人们关注 $\pi_2(G)$，是因为这个群对于李代数的可扩张性以及 G 的扩张（第15.5.3小节）起着关键作用。在介绍高阶同伦群及其计算的一些技巧（例如适当的长正合 homotopy 序列）之后，我们简要回顾关于同伦的若干重要结果

有限维李群和微分同胚群的同伦群。本章的核心内容讨论希尔伯特空间上各种类型的算子群、归纳极限群和映射群。

篇幅较长的最后一章第15章由若干较小的节组成，讨论更为专门的主题。这里不作详细展开，只强调本章讨论的一个特别重要的主题，即给定李代数时李群的存在性。如果存在一个局部指数李群 G ，使得 $\mathfrak{g}$ 可扩张，且其 $= \mathfrak{g}$为$\mathbf{L}(G)$，我们就称局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{g}$ 可扩张。根据李第三定理，每个有限维李代数都可扩张；而 van Est 和 Korthagen 在20世纪60年代给出的例子表明，并非每个巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 都可扩张。障碍在于中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 的子群 $\Gamma(\mathfrak{g})$（即周期群）不是离散的。第15.5节将这一判据推广到局部指数李群。由于李代数 $\mathfrak{g}$ 的局部指数性已经蕴含存在一个李代数为 $\mathfrak{g}$的局部群 $(U,\ *) \subseteq \mathfrak{g}$ ，因此这一结果处理的是从局部到整体的过渡问题；利用适当的路径群和环群，可以通过拓扑学中广为人知的构造来解决这一问题。要为更一般的局部凸李代数建立判据，以确定它们是否对应于局部或整体李群，则要困难得多。

为了使本书更加自成一体，我们收入了关于点集拓扑（附录 A）和局部凸空间（附录 B）的长篇附录、关于拓扑群的短篇附录（附录 C），以及附录 D“取值于非李群的光滑映射”，讨论取值于无穷维流形微分同胚群的映射。

一些历史。 为了展现局部凸李群理论的发展脉络，我们简要回顾无限维李理论的历史发展。无限维李代数，例如向量场李代数，从李理论创立之初便已存在；当时， SophusLie 开始研究由有限维向量场李代数“生成”的（局部）李群 [Lie80]。有限维李群的整体理论于 19 世纪末开始发展，主要由 É. Cartan关于对称空间的研究推动 [CaE98]。首个整体理论论述由 Mayer 和Thomas [给出，其中包括对具有给定李代数的所有连通群及其积分子群的描述35]MaTh35]。与李代数结构理论结合后，该理论于 20 世纪中叶臻于成熟，并见于 Chevalley [Ch46]）和Hochschild [Ho65] 的经典著作（另见 Pontrjagin [Po39] ，这是一本较早的教材，处于拓扑群与李群的交界处）。

早在 Sophus Lie的工作中，无限维群就以 $\mathbb{R}^n$ [李95]中开域的（局部）微分同胚群的形式出现。后来，

E. Cartan 对某些类型的无限维李代数，以及保持流形上几何结构（如辛形式、切触形式或体积形式）的微分同胚群，进行了更为系统的研究[CaE04]。20世纪20年代量子力学的出现，使人们需要理解希尔伯特空间上的算子群的结构，这是一类相当不同的无限维群（参见 [De32]）。

将无限维群视为光滑流形并建立相关理论的最初尝试，由 Birkhoff 于 [Bir36, Bir38], 中作出。他在那里发展了巴拿赫–李群（分别是巴拿赫–李代数）的局部李理论（另见 [MiE37] ，其中初步探讨了将李的局部变换群理论推广到巴拿赫情形）。特别是，他证明了局部C^1巴拿赫–李群具有指数坐标，由此得到解析的局部李群结构；他还证明了连续同态是解析的，并且对于每个巴拿赫–李代数，BCH 级数都定义了一种解析的局部群结构。他还定义了局部群的李代数，推导出其函子性，并建立了闭子代数／理想与相应局部子群之间的对应关系。即使是乘积积分——它们在现代理论中发挥着核心作用——也出现在他的著作中，作为左不变微分方程的解。巴拿赫–李群的局部理论后来由 Dynkin [Dy47, Dy53]继续发展；他进一步发展了 BCH 级数的代数理论。 Laugwitz[Lau55, Lau56]则从微分几何视角加以发展，其思想与局部指数李群理论十分接近。用现代术语来说，他运用了 Maurer–Cartan形式以及巴拿赫空间上（偏）微分方程的可积条件；这些方法由 Michal和 Elconin [MiE37, MicA48] 发展而来，用以从 Maurer–Cartan形式推导出局部群结构的存在性，而该形式又由李括号得到。在有限维情形，这一策略源自 F. Schur[ScF90a] ，与 Lie最初的方法也十分接近。在 [Lau55]中， Laugwitz特别证明了巴拿赫–李群的中心以及任意局部紧子群都是巴拿赫–李子群。无限多个参数的形式李群则由 Ritt 早在几年前 [Ri50]提出。

巴拿赫–李群的整体理论始于20世纪60年代初，当时Maissen发表了论文 [Ms62]，其中包含了李函子整体层面的首批基本结果，例如闭李子代数存在积分子群，以及单连通群的李代数同态具有可积性。后来， van Est 和 Korthagen 研究了巴拿赫–李代数的可积性问题，并发现了第一个不可积巴拿赫–李代数的例子 [EK64]。基于 Kuiper 定理（无穷维希尔伯特空间的酉群是可缩的）[Ku65]，， Douady 和 Lazard后来构造了更简单的例子[DL66]。 Bourbaki的《李群与李代数》第2章和第3章尤其包含了巴拿赫–李群与李代数的基本局部理论，以及一些整体性质 [Bou89]。 K.H. Hofmann 的《拓

扑群视角下的主题讲义》 [Hof68],是研究巴拿赫–李理论者的重要资料来源（另见 [Hof72, Hof75]）；其中大部分内容已发表于 [HoM98]。

在 20 世纪 70 年代，Dahlia Fleishman 将 Chevalley 对黎曼对称空间的分类推广到了与某类希尔伯特–李代数相关的希尔伯特流形，这类代数称为 L^*-代数；他还研究了与 Schatten 理想相关的不同类别的算子群。另一个通过结构理论方法可以取得相当大进展的领域，是巴拿赫空间中有界对称域的理论，以及相关的（赋范）对称空间理论，这些理论由 Kaup 和 Upmeier 发展起来（参见 [Ka81、Ka83、Up85]）。关于 Loos [Lo69], 意义下更一般的巴拿赫对称空间理论——它将所有有限维对称空间（而不仅仅是黎曼对称空间）纳入其中——请参见 [Ne02c] 和 [Kl11、Kl12] （相应的基础微分几何也可参见 [La99] ）。在辛几何，即哈密顿流的背景下，巴拿赫流形由 Marsden [Mar67],引入，Weinstein 在这一背景下证明了达布定理 [Wei69]。 Schmid的专著 [Sch87] 是一本介绍无限维哈密顿系统的优秀入门读物。关于巴拿赫–K¨ahler 流形及其与表示理论联系的较新成果，请参见 [Ne04b、Bel06] ；关于巴拿赫–泊松流形，则可参见 Ratiu、 Odzijewicz 和 Beltita （[RO03、RO04], [BR05、BR07]）。关于巴拿赫空间背景之外的泊松流形，一些相关思想可见于 [NTS15]。

尽管 Birkhoff 早已意识到，他的理论涵盖巴拿赫空间上的算子群，却不包括微分同胚群，但直到 30 年后，以（完备）局部凸空间为模型的无限维李群才首次出现。这发生在 Leslie [Les67] 和 Omori [Omo70]关于紧流形 M上的微分同胚群 Diff(M) 的李群结构的研究中。随后， Omori 在强 ILB–李群[Omo74]的背景下进一步发展了这一理论。 [Omo74] 很大一部分内容致力于为各种类型的微分同胚群构造强 ILB–李群结构。20 世纪 80 年代，通过对这类群提出并证明附加的正则性条件，这一理论得到了大幅完善 [OMY82, OMY83a, KYM85]。

Pisanelli 在 [Pis76、Pis77、Pis79], 中研究了另一类李群，即由固定 0 的 $\mathbb{C}^n$双全纯映射芽构成的群 Gh$_n$($\mathbb{C}$)。该群具有西尔瓦–李群的结构，是最早在李理论背景下得到系统研究的非 Fr´echet–李群之一（另见 [Da11]）。在 [BCR81]、 Boseck、 Czichowski 和 Rudolph从拓扑群的视角研究了无限维李群。他们采用的无限维流形概念与本文相同，但采用了更强的李群概念。这为定义在非紧流形上的映射群提供了一个自然框架，这类流形以快速衰减函数空间为模型（另见 [Nik15、Wa12]）。

在讲义 [Mil84]中， Milnor 概述了一个以序列完备局部凸空间为模型的李群一般理论，其中已经包含了若干重要基石。这篇论文以及更早的预印本 [Mil82]对无限维李理论的发展产生了深远影响。两者都精确表述了若干问题，其中一些至今已经解决，另一些仍未解决；下文将对此作更详细的介绍（关于其中一些问题的综述，见 [Gl06b] ）。

20 世纪 80 年代中期，光滑映射群，尤其是光滑环路群，因其与 Kac–Moody理论、拓扑和弦理论密切相关而广受欢迎（参见 [PS86], [Mick87, Mick89]）。20世纪90年代，人们对有限维李群的直极限兴趣渐浓（参见 [NRW91, NRW93, NRW94, NRW01]）。这类群自然出现在李代数的结构与表示论中（参见 [Ne98, Ne01b], [DiPe99], [NRW01], [NS01], [Wol05]）。这些群的李理论在 [Gl05c] 中得到了定型。

我们对以（可能是无限维）流形的微分同胚群为值域的映射之光滑性的讨论，受到微分学方法的启发。特别是，我们将在附录 D 中看到，在某种程度上，可以用微分方法处理那些不具有李群结构的群，例如非紧致流形的微分同胚群，或局部凸空间的线性自同构群；这也为流形上的光滑作用和光滑线性表示提供了自然的框架。

在这部专著中，我们介绍了自己对局部凸李群李理论若干方面现状的个人看法。我们不得不有所取舍，因此无法涉及许多有趣的方向，例如Olver 在其精彩著作 [Olv93] 中阐述的微分方程对称性的现代理论，以及特定微分同胚群的精细结构与几何，例如辛流形$(M,\ \omega)$的辛同胚群 Diff$(M,\ \omega)$（[Ban97、MDS98、Pol01] 是这一主题的教科书）。我们不深入讨论（酉）表示理论（参见 [AHM93、Is96、DP03、Pic00a、Pic00b、Ki05、Ne14、Ne17、NSZ17]）及其与物理学的联系；这些内容在 Goldin[Go04]和 Schmid [Sch04]的综述中有很好的介绍。其他主题也仅作简要提及，例如在几何分析中发挥重要作用的微分同胚群的 ILB 和 ILH理论（参见 [AK98、EMi99]），以及零阶可逆傅里叶积分算子群；该群的李群性质是 Omori及其合作者一系列论文的主要研究目标（参见 [OMY80、MOK85]）。 [ARS85、ARS86a、ARS86b]介绍了研究这些群的另一种方法。关于非紧流形（具有有界几何）上的微分同胚群和傅里叶积分算子， Eichhorn 和 Schmid [ES96、ES01]取得了非常有趣的结果。我们也不讨论 Fr´echet 齐性空间上的黎曼度量

和形状理论（[MM13、BBM14、BBM16]），或较新的粗几何主题（[Ro13、Ro18], [ADM20]）。最后但同样重要的是，我们提及 Diez 和 Rudolph [DR19]在无限维背景下关于切片存在性的出色结果。

记号。下文中，我们用记号 $\mathbb{K}$ 表示实数域和复数域 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$，且所有向量空间均为实或复向量空间。对于两个拓扑向量空间 V，W，我们用 $\mathcal{L}(V, W)$ 表示连续线性算子 $V \to W$ 的空间，并定义 $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$。

第一部分

局部凸空间上的分析学

1 局部凸空间中的微分学

本章将介绍我们在局部凸拓扑向量空间中进行微分学研究的框架。我们采用的方法非常自然：用方向导数替代有限维微分学中熟知的偏导数，并要求方向导数关于点和方向都是连续的。我们不把注意力局限于满足特定完备性条件的局部凸空间，而是研究任意的局部凸空间。此外，我们不仅考虑局部凸空间开子集上的映射，还将针对具有稠密内部的某些“局部凸”子集上的映射发展微分学。这使我们能够讨论紧区间、正方形和单形上的光滑映射；这些对象将在无限维李理论的发展中发挥作用。

随着本章的展开，我们将遇到无限维情形下微分学中许多经典结果的类似结论，例如微积分基本定理、链式法则和泰勒定理。作为无限维李理论中许多重要构造的前提（例如，在无限维李群 G中的连续路径群 $C([0,1],G)$ 上构造李群结构），我们还将讨论连续函数空间（以及 C^k-函数空间之间的典型映射的连续性和可微性。

本章汇集了微分学的核心结果，这些结果是后续介绍无限维李群的先决条件。第 1.1–1.6 节包含必要的基础内容，完全可以连贯地阅读（或讲授）。第 1.7 节中的结果对李理论也至关重要，但要到后续阶段才会用到；需要时再查阅即可。微分学中更具体的结果，只有在讨论某些例子或具有特定性质的李群（如解析李群）时才有用，因此将其放在第2章中。

字母 $\mathbb{K}$ 始终表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。除非另有说明，所有向量空间都是 $\mathbb{K}$-向量空间，所有线性映射都是 $\mathbb{K}$-线性的。

第1章的预备知识。读者应熟悉有关局部凸拓扑向量空间的基本事实，这些内容（连同证明）汇编于附录 B 中。此外，还会用到一些点集拓扑的基本事实，例如华莱士引理 A.4.3。

第 1.7 节假定读者掌握紧开拓扑的基本事实（附录 A.6 中对此有所回顾）。

1.1 局部凸空间中的曲线与积分

在讨论局部凸空间子集之间的可微映射之前，我们先讨论较简单的特殊情形——曲线（这也是一般情形的重要预备知识）。

定义 1.1.1。设 E 是一个局部凸空间。区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续映射$\gamma\colon I \to E$ 称为 C^0-曲线。如果 I 非退化，[1]那么 C^0-曲线 $\gamma\colon I \to E$ 称为 C^1-曲线，如果极限

$$\gamma'(t) := \lim_{s\to 0} \tfrac{1}{s}(\gamma(t+s) - \gamma(t)) \tag{1.1}$$

对所有 $t \in I$都存在，且 $\gamma'\colon I \to E, t \mapsto \gamma'(t)$ 连续。[2] 我们也记作$\gamma^{(1)} := \gamma'$。设 $\gamma^{(0)} := \gamma$。递归地，给定 $k \in \mathbb{N}$，若 γ是一个 C^{k-1}-曲线且 $\gamma^{(k-1)}$ 是一个 C^1-曲线，则称 γ 为 C^k-曲线；我们定义 $\gamma^{(k)} :=(\gamma^{(k-1)})'$。如果对每个 $k \in \mathbb{N}$， γ 都是C^k，则称曲线 γ 为 C^∞ 或光滑。有时我们也写作 $\frac{d^k\gamma}{dt^k}(t) := \gamma^{(k)}(t)$ 或 $\frac{d^k}{dt^k}\big|_{t=t_0}\gamma(t) := \gamma^{(k)}(t_0)$。

注释 1.1.2. 显然（通过平凡的归纳法）， γ 是一个 C^k曲线，当且仅当 γ 是一个 C^1曲线且 γ' 是一个 C^{k-1}曲线。此外， $\gamma^{(k)} =(\gamma')^{(k-1)}$。

注释 1.1.3. 对于映射 $\gamma\colon I \to E$，在 t 处导数（1.1）的存在意味着 γ 在 t处连续，因为

$$\gamma(t+s) - \gamma(t) = s\,\frac{\gamma(t+s)-\gamma(t)}{s} \to 0 \cdot \gamma'(t) = 0 \ \text{ as } \ s \to 0.$$

关于局部凸空间中曲线的许多结果，都可以通过应用连续线性泛函，归结为关于实值函数的众所周知的事实。下面这个简单的引理有助于这一过程。

引理 1.1.4. 如果 E 和 F 是局部凸空间， $\lambda\colon E \to F$ 是一个连续线性映射，且 $\gamma\colon I \to E$ 是一条 C^1 曲线，那么 $\lambda \circ \gamma$ 也是一条 C^1 曲线，并且

$$(\lambda \circ \gamma)' = \lambda \circ \gamma'. \tag{1.2}$$

证明. 对于满足 $t + s \in I$的 $t \in I$ 和 $0 \neq s \in \mathbb{R}$，利用 λ的线性和连续性，我们得到

[1] 也就是说， I 包含多个元素。因此，今后我们总是假设这一点。[2] 因此，我们要求对每个满足以下条件的序列 $s_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$， $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n}(\gamma(t+s_n) - \gamma(t))$ 均存在：对每个 n， $t + s_n \in I$，且 $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$。

$$\lim_{s\to 0}\ \frac{1}{s}(\lambda(\gamma(t+s))-\lambda(\gamma(t)))=\lim_{s\to 0}\ \lambda\left(\frac{1}{s}(\gamma(t+s)-\gamma(t))\right)$$
$$=\lambda\left(\lim_{s\to 0}\ \frac{1}{s}(\gamma(t+s)-\gamma(t))\right)=\lambda(\gamma'(t))\,.$$

由于 $\lambda\circ\gamma'$ 连续，$\lambda\circ\gamma$ 是 C^1，且具有所述导数。 □

我们要证明微积分基本定理（其中一半）：

命题 1.1.5（微积分基本定理：第一部分）。设 $\gamma\colon I\to E$ 是局部凸空间 E 中的一条 C^1-曲线，且 $a,b\in I$。则

$$\gamma(b)-\gamma(a)\ =\ \int_a^b\gamma'(t)\,dt\,.$$

此处使用以下术语和记号：

定义 1.1.6。设 $\gamma\colon I\to E$ 是局部凸 $\mathbb{K}$向量空间 E中的一条 C^0-曲线，且 a, $b\in I$。如果存在一个元素 $z\in E$ 使得

$$\lambda(z)\ =\ \int_a^b\lambda(\gamma(t))\,dt\quad\text{for all }\lambda\in E',$$

那么 $z\in E$ 称为 γ 从 a 到 b的弱积分，记作

$$\int_a^b\gamma(t)\,dt\ :=\ z\,.$$

注记 1.1.7。注意，定义 1.1.6 中的元素 $z\in E$ 若存在则唯一确定，因为由所有连续线性泛函构成的对偶空间 E' 可根据 Hahn–Banach 定理（定理 B.5.6）分离空间 E 中的点。

命题的证明 1.1.5。设 $\lambda\in E'$。根据引理 1.1.4，$\lambda\circ\gamma\colon\ I\to\mathbb{K}$ 是一条 C^1 曲线，并且 $(\lambda\circ\gamma)'=\lambda\circ\gamma'$。由标准微积分基本定理可得

$$\lambda(\gamma(b)-\gamma(a))=\lambda(\gamma(b))-\lambda(\gamma(a))=\int_a^b(\lambda\circ\gamma)'(t)\,dt=\int_a^b\lambda(\gamma'(t))\,dt\,.$$

因此，$z=\gamma(b)-\gamma(a)$ 满足弱积分$\int_a^b\gamma'(t)\,dt$的定义性质，证毕。□

注记 1.1.8。我们对弱积分的存在性作一些简单的观察。其他基本事实汇总于习题 1.1.2 和 1.2.3(d) 中。

(a) 若 $\gamma\colon I\to E$和 $\eta\colon I\to E$从 a到 b的弱积分存在，且$s\in\mathbb{K}$，则 $\gamma+s\eta$ 的弱积分也存在，并且

$$\int_a^b (\gamma(t) + s\eta(t))\,dt = \int_a^b \gamma(t)\,dt + s\int_a^b \eta(t)\,dt\,. \tag{1.3}$$

事实上，很容易验证，(1.3) 的右端满足弱积分 $\int_a^b(\gamma(t) + s\eta(t))\,dt$ 的定义性质。
(b) 若 $\gamma\colon I \to E$ 是常数，设为 $\gamma(t) = K$，则 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 存在，且等于 $K\cdot(b-a)$。事实上，容易验证 $K\cdot(b-a)$ 满足 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 的定义性质。

(c) 若 $\gamma\colon I \to E$ 是复局部凸空间 E 中的一条 C^0-曲线，并且 $z := \int_a^b \gamma(t)\,dt$ 在将 E 视为实向量空间时存在，那么在将 E 视为复向量空间时，z 也是 γ 从 a 到 b 的弱积分。为验证这一点，令 $\lambda\colon E \to \mathbb{C}$ 为连续复线性泛函。那么

$$\lambda(x) = \operatorname{Re}(\lambda(x)) + i\,\operatorname{Im}(\lambda(x)) = \operatorname{Re}(\lambda(x)) - i\,\operatorname{Re}(\lambda(ix)) = \rho(x) - i\sigma(x)\,,$$

其中 $\rho\colon E \to \mathbb{R}$, $\rho(x) := \operatorname{Re}(\lambda(x))$ 和 $\sigma\colon E \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) := \operatorname{Re}(\lambda(ix))$ 是连续实线性泛函。因此（如所需）

$$\begin{aligned}\lambda(z) = \rho(z) - i\sigma(z) &= \int_a^b \rho(\gamma(t))\,dt - i\int_a^b \sigma(\gamma(t))\,dt\\ &= \int_a^b (\rho(\gamma(t)) - i\sigma(\gamma(t)))\,dt = \int_a^b \lambda(\gamma(t))\,dt\,.\end{aligned}$$

现在，我们将估计 $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le |b-a|\cdot\sup\{|f(t)|$ 推广到连续实值函数的黎曼积分。

引理 1.1.9. 设 $a \le b$ 为实数，且 $\gamma\colon [a,b] \to E$ 是局部凸空间 E中的连续曲线。若弱积分 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 存在，则

$$\left\|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right\|_p \;\le\; \int_a^b \|\gamma(t)\|_p\,dt \;\le\; (b-a)\cdot\max\{\|\gamma(t)\|_p\colon t\in[a,b]\}$$

对 E上的每个连续半范数 $\|\cdot\|_p$，
证明。 不妨设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。令 $z := \int_a^b \gamma(t)\,dt$。由 Hahn–Banach 延拓定理（推论 B.5.12），存在 $\lambda \in E'$ 使得

$$|\lambda(x)| \le \|x\|_p \text{ for all } x \in E \text{ and } \lambda(z) = \|z\|_p.$$

因此

$$\left\|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right\|_p = \lambda(z) = \int_a^b \lambda(\gamma(t))\,dt \le \int_a^b |\lambda(\gamma(t))|\,dt \le \int_a^b \|\gamma(t)\|_p\,dt,$$

由此可得这些断言。 □

下面的引理很容易看出，弱积分连续依赖于参数。

引理 1.1.10. 设 P 和 X 是拓扑空间，$K \subseteq X$ 是紧的，F 是拓扑向量空间。设 $f\colon P \times X \to F$ 是连续映射，$U \subseteq F$ 是一个0-邻域，且 $p \in P$。那么存在 p 的一个开邻域 $Q \subseteq P$ 以及一个包含 K 的开子集 $Y \subseteq X$，使得

$$f(q,y) - f(p,y) \in U \quad \textit{for all } q \in Q \textit{ and } y \in Y.$$

证明. 设 $p \in P$。映射 $g\colon P \times X \to F$, $g(q,y) := f(q,y) - f(p,y)$ 是连续的，并且对每个 $y \in X$，$g(p,y) = 0$。因此，$g^{-1}(U)$ 是 $P \times X$ 的一个开子集，且包含 $\{p\} \times K$。由于 $\{p\}$ 和 K 是紧的，华莱士引理 A.4.3 给出开子集 $Q \subseteq P$ 和 $Y \subseteq X$，使得

$$\{p\} \times K \subseteq Q \times Y \subseteq g^{-1}(U).$$

那么 $f(q,y) - f(p,y) = g(q,y) \in U$ 对所有 $q \in Q$ 和 $y \in Y$ 都成立。 □

引理 1.1.11（参数依赖积分的连续性）。设 P 是一个拓扑空间，$a < b$ 是实数。设 $f\colon P \times [a,b] \to E$ 是到局部凸空间 E 的连续映射。如果弱积分

$$g(p) := \int_a^b f(p,t)\,dt$$

对每个 $p \in P$ 都存在于 E 中，那么 $g\colon P \to E$ 是连续的。

证明。为证明其在 $p \in P$ 处连续，取 E 上的连续半范数 $\|\cdot\|_s$ 以及 $\varepsilon > 0$。根据引理 1.1.10，存在 p 的一个邻域 $Q \subseteq P$，使得

$$\|f(q,t) - f(p,t)\|_s \le \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{for all } q \in Q \text{ and } t \in [a,b].$$

利用引理 1.1.9，我们可推出

$$\begin{aligned}\|g(q) - g(p)\|_s = \left\| \int_a^b (f(q,t) - f(p,t))\,dt \right\|_s &\le \int_a^b \|f(q,t) - f(p,t)\|_s\,dt \\ &\le (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} \le \varepsilon.\end{aligned}$$

因此 g 在 p 处连续。 □

现在我们来表述微积分基本定理的第二部分。关于确保弱积分存在性的判据，见命题 1.1.15。

命题 1.1.12（基本定理的第二部分）。设$\gamma\colon\ I \to E$ 是一个 C^0-曲线，$a \in I$，并假设弱积分

$$\eta(t) := \int_a^t \gamma(s)\,ds$$

对所有 $t \in I$ 都存在。于是 $\eta\colon\ I \to E$ 是 E 中的一条 C^1-曲线，并且 $\eta' = \gamma$。

证明。设 $t_0 \in I$ 和 $t \in I - t_0$ 满足 $t \neq 0$。那么

$$\begin{aligned}\frac{\eta(t_0+t)-\eta(t_0)}{t} &= \frac{1}{t}\left(\int_a^{t_0+t}\gamma(s)\,ds - \int_a^{t_0}\gamma(s)\,ds\right)\\ &= \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}\gamma(s)\,ds = \int_0^1 \gamma(t_0+rt)\,dr, \qquad (1.4)\end{aligned}$$

利用习题 1.1.2(e) 合并积分，再结合 $s = t_0 + rt$、$ds = t\,dr$ 使用换元法则（见习题 1.1.2(d)）。注意，最终的被积函数对于 $t = 0$ 也有意义，并定义了一个连续映射

$$f\colon (I - t_0) \times [0,1] \to E, \quad f(t,r) := \gamma(t_0 + rt).$$

由于 $f(0,\ r) = \gamma(t_0)$ 与 r 无关，弱积分 $\int_0^1 f(t,\ r)\ dr$ 对 $t = 0$ 也存在，此时其值为 $\gamma(t_0)$。因此

$$\frac{\eta(t_0+t)-\eta(t_0)}{t} = \int_0^1 f(t,r)\,dr \to \int_0^1 f(0,r)\,dr = \gamma(t_0) \text{ as } t \to 0,$$

由命题 1.1.11。因此 $\eta' = \gamma$，它是一个连续映射。由于 η 是连续的（见注释 1.1.3），我们得到 η 是一个 C^1-曲线。□

我们还可以交换弱积分与一致极限。

定义 1.1.13。设 X 为一个集合，E 为一个局部凸空间。若映射序列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 从 $\gamma_n\colon\ X \to E$ 一致收敛到映射 $\gamma\colon\ X \to E$，则称其一致收敛；如果对 E 上的每个连续半范数 $\|\cdot\|_p$，

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{\|\gamma_n(x) - \gamma(x)\|_p\colon\ x \in X\right\} = 0\,.$$

引理 1.1.14. 设 E 是一个局部凸空间，$a \le b$ 是实数，且$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 C^0-曲线组成的序列 $\gamma_n\colon\ [a,b] \to E$，它一致地收敛于一条 C^0-曲线 $\gamma\colon$ $[a,b] \to E$。如果弱积分 $\int_a^b \gamma_n(t)\ dt$ 和 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$在 E中存在，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \gamma_n(t)\,dt = \int_a^b \gamma(t)\,dt\,. \qquad (1.5)$$

证明。 设 $\|\cdot\|_p$ 是 E上的一个连续半范数。那么

$$\Big\|\int_a^b \gamma_n(t)\,dt - \int_a^b \gamma(t)\,dt\Big\|_p = \Big\|\int_a^b (\gamma_n(t)-\gamma(t))\,dt\Big\|_p \\ \leq (b-a)\,\sup\{\|\gamma_n(t)-\gamma(t)\|_p \colon t\in[a,b]\}$$

当 $n\to\infty$ 时趋于 0，利用引理 1.1.9 和一致收敛性。 □

自然会问，满足什么条件才能保证弱积分存在。事实证明，在序列完备局部凸空间（如定义 B.6.1(b) 所述）中，弱积分总是存在的。值得注意的是，在完备局部凸空间中（见定义 B.6.1(d)），弱积分也总是存在。

命题 1.1.15。设 E 是序列完备局部凸空间，$\gamma\colon\ [a,b]\to E$ 是一条 C^0-曲线。那么弱积分 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 存在于 E 中。

证明。 利用 E 的序列完备性，可以将弱积分构造为一个黎曼和序列的极限（与实值函数的情形一样）。详情可参见第 1.8 节，即第 1 章的附录（引理 1.8.4 之后）。□

注记 1.1.16。回顾命题 B.7.2，任意局部凸空间 E 都可以完备化。这一点非常有用，因为根据命题 1.1.15，C^0-曲线 $\gamma\colon\ [a,b]\to E$ 的弱积分 $z:=\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 总是在完备化 $\widetilde{E}$ 中存在。将 E 视为 E 的向量子空间。正如我们将在习题 1.1.3(b) 中看到的，$w:=\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 在 E 中的弱积分存在，当且仅当 $z\in E$，此时 $z=w$。这往往使我们能够分两步讨论一个关于取值于 E 的映射 f 的问题：首先，将 f 视为到 E 的映射，在那里弱积分是存在的，并在那里解决问题。接下来，验证所有相关的弱积分都属于 E，并验证作为到 E 的映射 f，原问题也得到了解决。

在许多场合，序列完备性可以用较弱的完备性性质“麦基完备性”来替代，下面我们回顾这一概念。

定义 1.1.17。设 E 是一个局部凸空间。

(a) 设 $a<b$ 为实数。若映射 $\gamma\colon\ [a,b]\to E$ 满足集合

$$\Big\{\frac{\gamma(s)-\gamma(t)}{s-t}\colon s,t\in[a,b],\ s\neq t\Big\}$$

在 E 中有界，则称 γ 为利普希茨曲线。因此，γ 是利普希茨曲线，当且仅当对于 E 上的每个连续半范数 $\|\cdot\|_p$，都存在 $L\in[0,\infty[$ 使得

$$\|\gamma(s)-\gamma(t)\|_p\ \leq\ L\,|s-t| \quad \text{for all } s,t\in[a,b].$$

特别是，每条利普希茨曲线都是连续的。

(b) 如果对所有实数 $a < b$ 和利普希茨曲线 $\gamma\colon [a,b] \to E$，弱积分 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 都存在于 E 中，则称空间 E 麦基完备 [3]。

注 1.1.18。(a) 每个序列完备局部凸空间都是麦基完备的。事实上，根据命题 1.1.15，若 E 是序列完备的，则对每个 C^0-曲线 $\gamma\colon [a,b] \to E$，弱积分 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 在 E 中存在。因此，对每个利普希茨曲线 $\gamma\colon [a,b] \to E$，$\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 当然存在，故 E 是麦基完备的。

(b) 利用命题 1.1.5 和引理 1.1.9，很容易看出，在紧区间上的每个 C^1-曲线都是利普希茨曲线（习题 1.1.12）。

(c) 在麦基完备性的定义中，用固定 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的 C^k-曲线替代利普希茨曲线，可得到一个等价性质（参见 [KM97, Thm.2.14]）。利普希茨曲线的一个优点是：局部凸空间 E 中的曲线 $\gamma\colon [a,b] \to E$，若其像包含于向量子空间 $E_0 \subseteq E$，则它是 E 中的利普希茨曲线，当且仅当它是 E_0 中的利普希茨曲线（参见引理 B.9.3）。如果 γ 的像也包含于 E_0，那么所有差商都会自动落在 E_0 中；但相应的微商涉及极限，这些极限可能存在于 E 中，却不存在于 E_0 中。例子表明，像包含于向量子空间 $E_0 \subseteq E$ 的 E 中的 C^1-曲线 γ，不一定是 E_0 中的 C^1-曲线（见练习 1.1.6）。我们只会用到利普希茨曲线一次，用以证明命题 2.1.6 中的蕴含“(e)⇒(a)”。

(d) 麦基完备性确保了某些特别重要的弱积分的存在性。值得注意的是，正如我们将在第 2.1 节看到的，弱积分的存在大大简化了复解析函数理论在麦基完备局部凸空间上的研究。

(e) 可以证明，局部凸空间 E 是麦基完备的，当且仅当每个麦基–柯西序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 E 中收敛；也就是说，对于每个这样的序列，都存在一个有界子集 $B \subseteq E$ 和一个族 $(r_{k,\ell})_{k,\ell\in\mathbb{N}}$ 实数 $r_{k,\ell} \geq 0$，使得 $x_k - x_\ell \in r_{k,\ell}B$ 对所有 $k,\ell \in \mathbb{N}$ 都成立，并且当 $k,\ell \to \infty$ 均趋于 $r_{k,\ell} \to 0$ 时，$\varepsilon > 0$ 也趋于 $N \in \mathbb{N}$，其含义是：对每个 $\varepsilon > 0$，我们都能找到 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $k,\ell \geq N$，$r_{k,\ell} \leq \varepsilon$ 都成立（参见 [KM97，第 2.2 引理和第 2.14], 定理，其中列出了麦基完备性的多种等价刻画。关于更多刻画，参见 [GE92，A.2] 定理）。

(f) 在本章的附录中，我们证明了，Mackey完备性还保证了 C^1-映射在高维单纯形上的弱积分的存在性（命题 1.8.8）。只有在命题 1.3.23 之后才应阅读该论证。另见 [BG14] 和 [NSZ14]，其中讨论了高维（或更一般）集合上弱积分的参数依赖性。

[3] Mackey 完备局部凸空间在文献中也称为“方便空间”、“c^∞-完备”或“局部完备”。

(g) 如果局部凸空间 E 对每条 C^0-曲线 $\gamma\colon [0,1]\to E$，其弱积分 $\int_0^1 \gamma(t)\,dt$ 在 E 中存在，则称其为 积分完备。每个序列完备的局部凸空间都是积分完备的；每个积分完备的局部凸空间都是 Mackey完备的。已知，局部凸空间 E 是积分完备的，当且仅当它具有度量凸紧性，即对于每个可度量化紧子集 $K\subseteq E$ ([Wz12], 参见 [Voi92])，闭凸包 $\operatorname{conv}(\overline{K})$ 都是紧的。参见 [GE92，第 A.3] 题，其中给出了一个不是积分完备的 Mackey完备局部凸空间。

第 1.1 节习题

习题 1.1.1.证明：C^0-曲线的弱积分

$$\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$$

由 $\int_a^b \gamma(t)\,dt=\big(\int_a^b \gamma_1(t)\,dt,\dots,\int_a^b \gamma_n(t)\,dt\big)$给出，其中 $\int_a^b \gamma_j(t)\,dt\in\mathbb{R}$ 是通常的黎曼积分。

习题 1.1.2. 设 E 是一个局部凸空间，$\gamma,\eta\colon I\to E$ 是 C^0-曲线，$a,b,c\in I$，$t_0\in\mathbb{R}$ 和 $r\in\mathbb{K}$。假设右端的弱积分存在，推导出左端的弱积分存在，且等式成立：

(a) $\int_a^b(\gamma(t)+r\eta(t))\,dt=\int_a^b\gamma(t)\,dt+r\int_a^b\eta(t)\,dt$; (b) $\int_a^b\gamma(t)\,dt=\int_{a-t_0}^{b-t_0}\gamma(s+t_0)\,ds$. (c) $\int_b^a\gamma(t)\,dt=-\int_a^b\gamma(t)\,dt$; (d) $\int_\alpha^\beta\gamma(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=\int_a^b\gamma(s)\,ds$，其中 $\varphi\colon[\alpha,\beta]\to I$ 是一个 C^1-函数，满足 $\varphi(\alpha)=a$ 且 $\varphi(\beta)=b$（换元法则）。

在 (b)、(c) 和 (d) 中，还要证明右端积分的存在性蕴含左端积分的存在性。最后，证明如果下列弱积分中任意两个在 E 中存在，那么第三个也存在，且等式成立：

(e) $\int_a^c\gamma(t)\,dt=\int_a^b\gamma(t)\,dt+\int_b^c\gamma(t)\,dt.$

习题 1.1.3。设 E 是一个局部凸空间，$\gamma\colon I\to E$ 是一个 C^0-曲线，且 $a,b\in I$。

(a) 证明：若弱积分 $z:=\int_a^b\gamma(t)\,dt$ 在 E 中存在，且 $\alpha\colon E\to F$ 是到局部凸空间 F 的连续线性映射，那么 $\alpha(z)$ 是 $\alpha\circ\gamma$ 从 a 到 b的弱积分。(b) 若 $Y\subseteq E$ 是一个向量子空间，满足 $\gamma(I)\subseteq Y$，且 y 是 Y中的一个元素，证明：$y=\int_a^b\gamma|^Y(t)\,dt$ 在 Y 中（赋予由 E诱导的拓扑）成立，当且仅当 $y=\int_a^b\gamma(t)\,dt$ 在 E中成立。[回顾一下，根据哈恩–巴拿赫延拓定理，每个连续线性泛函 $\lambda\in Y'$ 都可以延拓为 E上的连续线性泛函。]

(c) 设 E 的完备化为 $\widetilde{E}$，且 $E \subseteq \widetilde{E}$。设 $w := \int_a^b \gamma(t)\,dt$ 是 γ 在 $\widetilde{E}$ 中的弱积分（即 $\kappa \circ \gamma$的弱积分，其中 $\kappa\colon E \to \widetilde{E}$ 是包含映射）。证明：弱积分 $z := \int_a^b \gamma(t)\,dt$ 在 E 中存在，当且仅当 $w \in E$；在此情形下，$z = w$。

(d) 现在令 $a < b$，并假设 $z := \int_a^b \gamma(t)\,dt$ 在 E中存在。设 $A \subseteq E$ 是一个闭凸集，使得 $\gamma([a,b]) \subseteq A$。由于 z与 $\widetilde{E}$中的弱积分一致，命题 1.1.15 的证明给出一个黎曼和序列 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它在 $\widetilde{E}$ 中收敛到 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$，因此也在 E中收敛。证明对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $S_n \in (b-a)A$，并由此推出 $\int_a^b \gamma(t)\,dt \in (b-a)A$。

练习 1.1.4. 证明：若 $\gamma\colon I \to E$ 是局部凸空间 E中的一条 C^1-曲线，且 $E_0 \subseteq E$ 是一个闭向量子空间，使得 $\gamma(I) \subseteq E_0$，那么将 γ 视为取值于 E_0的曲线时，它也是 C^1。若 E_0 不一定是闭的，但 $\gamma(I) \subseteq E_0$ 且 $\gamma'(I) \subseteq E_0$，同样的结论仍成立。

练习 1.1.5. 设 E 是一个局部凸空间，$a < b$ 且 $\gamma\colon [a,b] \to E$ 是一条连续曲线，并且弱积分 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 在 E 中存在。设 $\Lambda \subseteq E'$ 是一组能够分离 E 中点的连续线性泛函，即对所有 $x \neq y$，在 E 中都存在 $\lambda \in \Lambda$，使得 $\lambda(x) \neq \lambda(y)$。设 $z \in E$ 是一个元素，满足

$$\lambda(z) = \int_a^b \lambda(\gamma(t))\,dt \quad \text{for all } \lambda \in \Lambda.$$

证明 $z = \int_a^b \gamma(t)\,dt$。

练习 1.1.6. 设 $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，赋予乘积拓扑；设 $E_0 := \ell^\infty \subseteq E$ 是有界实数列空间，赋予由 E 诱导的拓扑。考虑 $\gamma\colon \mathbb{R} \to E$, $\gamma(t) := (\cos(kt))_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\eta\colon \mathbb{R} \to E$, $\eta(t) := (\sin(kt))_{k\in\mathbb{N}}$。由于 E 赋予了乘积拓扑，γ 和 η 是连续的。

(a) 由于 E 是完备的，对每个 $t \in \mathbb{R}$，弱积分 $\int_0^t \gamma(s)\,ds$ 都存在于 E 中。利用连续线性点值泛函 $\varepsilon_k\colon E \to \mathbb{R}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x_k$，根据练习 1.1.5 推得 $\eta(t) = \int_0^t \gamma(s)\,ds$。(b) 推得 η 是 E 中的一条 C^1 曲线，其中 $\eta' = \gamma$。(c) 证明，尽管 $\eta(\mathbb{R}) \subseteq E_0$，余限制 $\eta|^{E_0}\colon \mathbb{R} \to E_0$ 并不是 E_0 中的一条 C^1 曲线。

习题 1.1.7. 给定 $0 < p < 1$，令 $L^p[0,1]$ 为由可测函数 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 的等价类 $[\gamma]$ 构成的拓扑向量空间，使得

$$\int_0^1 |\gamma(s)|^p\,ds < \infty,$$

模去几乎处处为零的函数。$L^p[0,1]$ 上的拓扑由以下度量诱导：

$$d\colon L^p[0,1] \times L^p[0,1] \to [0,\infty[, \quad d([\gamma],[\eta]) := \int_0^1 |\gamma(s) - \eta(s)|^p\,ds.$$

利用示性函数，我们定义一条曲线

$$\beta\colon [0,1] \to L^p[0,1], \qquad \beta(t) := [\mathbf{1}_{[0,t[}].$$

证明 β 在每一点都是单射且可微，并且对每个 $t \in [0,1]$，都有 $\beta'(t) = 0$。由此推出 $L^p[0,1]$ 不是局部凸的。

练习 1.1.8. 设 $\mathcal{A}$ 是一个局部凸含幺结合拓扑代数（参见定义 B.11.5），且 $\gamma\colon I \to \mathcal{A}$ 是一条 C^1曲线。假设 $\gamma(I)$包含于可逆元集合 $\mathcal{A}^\times \subseteq \mathcal{A}$，并且求逆映射 $\iota\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}$, $x \mapsto x^{-1}$ 是连续的。证明

$$\eta := \iota \circ \gamma\colon I \to \mathcal{A}, \quad t \mapsto \gamma(t)^{-1}$$

即 C^1，其中对于所有 $t \in I$，有 $\eta'(t) = -\gamma(t)^{-1}\gamma'(t)\gamma(t)$。[提示：写出

$$\frac{\gamma(t+s)^{-1} - \gamma(t)^{-1}}{s} = -\gamma(t+s)^{-1}\left(\frac{\gamma(t+s)-\gamma(t)}{s}\right)\gamma(t)^{-1}$$

对于满足 $t + s \in I$]的 $t \in I$ 和 $0 \neq s \in \mathbb{R}$。

练习 1.1.9。设 F 为局部凸空间，X 为拓扑空间，$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为映射序列 $\gamma_n\colon X \to F$，且 $\gamma\colon X \to F$ 为映射。证明以下结论：

(a) 如果每个 γ_n 都连续且 $\gamma_n \to \gamma$ 一致地，则 γ 也连续。(b) 如果 X 可度量化，那么映射 $f\colon X \to Y$ 到拓扑空间 Y 连续，当且仅当对于每个紧子集 $K \subseteq X$，$f|_K$ 都连续（即，X 是所谓的“k-空间”）。[4] 提示：收敛序列中的元素连同其极限构成一个紧集。(c) 如果 X 可度量化，每个 γ_n 都连续，并且对于每个紧子集 $K \subseteq X$，$\gamma_n|_K$ 一致地收敛到 $\gamma|_K$，那么 γ 连续。

练习 1.1.10. 设 E_1、E_2 和 F 是局部凸空间，$\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$ 是连续双线性映射，且 $W \subseteq F$ 是一个零邻域。

(a) 注意到存在零邻域 $U_1 \subseteq E_1$ 和 $U_2 \subseteq E_2$，使得 $\beta(U_1 \times U_2) \subseteq W$。对于每个 $r > 0$，求一个零邻域 $V \subseteq E_1$，使得 $\beta(V \times rU_2) \subseteq W$。(b) 证明，对于每个有界子集 $B \subseteq E_2$，都存在一个零邻域 $V \subseteq E_1$，使得 $\beta(V \times B) \subseteq W$。

练习 1.1.11. 设 E 是一个局部凸空间，且 $I = [a, b]$。

(a) 验证，$\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 的定义可以推广到这样的情形：$\gamma\colon I \to E$ 仅仅是“弱连续”的，即对于每个 $\lambda \in E'$，$\lambda \circ \gamma\colon I \to \mathbb{K}$ 都是连续的。此外，估计

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)\,dt \right\|_p \leq (b-a)\sup\{\|\gamma(t)\|_p\colon t \in [a,b]\}$$

（参见引理 1.1.9）对 E 上的每个连续半范数 $\|\cdot\|_p$ 仍然成立。

(b) 设 P 是一个拓扑空间，$\alpha\colon P \times I \to \mathbb{K}$ 是一个连续函数，$\beta\colon I \to E$ 是一个弱连续映射。记 E_w 为 E，并赋予弱拓扑（见定义 B.9.6）。则 $\beta(I)$ 在 E_w 中是紧的，因而在 E_w 中有界；根据 Mackey 定理（定理 B.9.8），进而在 E 中有界。我们假设，对于每个 $p \in P$，弱积分 $g(p) := \int_a^b \alpha(p, t)\,\beta(t)\,dt$ 在 E 中存在。利用习题 1.1.10(b)，证明 $g\colon P \to E$ 是连续的。

[4] 参见 A.6.15，以及习题 A.6.2。

习题 1.1.12。 证明：在紧区间上，每条 C^1-曲线 $\gamma\colon\ [a,b] \to E$ 都是利普希茨的。

习题 1.1.13. (a) 在定义 1.1.13 中用有向集 $(A, \preceq)$ 替换 $\mathbb{N}$，便可得到函数网的一致收敛概念。证明：将序列替换为网后，引理 1.1.14 和练习 1.1.9 的结论仍然成立。

(b) 设 $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是局部凸空间 E 中的一网 C^1-曲线 $\gamma_\alpha\colon [a,b] \to E$，满足 $\gamma_\alpha \to \gamma$ 和 $\gamma'_\alpha \to \eta$，其中 $\gamma, \eta\colon [a,b] \to E$ 是某些连续曲线。证明 γ 是一条 C^1-曲线，且 $\gamma' = \eta$。[对于 $x \in [a,b]$，由命题 1.1.5 可得 $\gamma_\alpha(x) = \gamma_\alpha(a) + \int_a^x \gamma'_\alpha(t)\,dt$，对所有 $\alpha \in A$ 均成立。γ 利用 (a)，取极限可得 $\gamma\ a\ + \int_a^x \eta\ t\ dt$ $1\ 1\ 12]$ $(\ )\ (\ )\ (\ )$。断言现由命题.....得证。

1.2 微分学： C^1-映射

现在我们讨论局部凸空间开子集上的 C^1-映射。

定义 1.2.1。设 E 和 F 为局部凸 $\mathbb{K}$-向量空间，$f\colon\ U \to F$ 是定义在开子集 $U \subseteq E$上的映射。 f的导数在 $x \in U$ 沿方向 $y \in E$ 定义为

$$df(x,y) \ :=\ (D_y f)(x) \ :=\ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x+ty) - f(x)\Big),$$

只要该极限存在。[5] 如果 f连续、对所有 $(x,y) \in U \times E$，方向导数 $df(x,y)$ 都存在，并且由此得到的映射 $df\colon\ U \times E \to F$连续，我们就称 f 为 $C^1_{\mathbb{K}}$ （若 $\mathbb{K}$ 已知，则简称为 C^1）。在后续章节中，我们也将写作 $df(x)(y) := df(x,y)$。

例 1.2.2。若 $\lambda\colon\ E \to F$ 是局部凸空间 E与 F之间的连续线性映射，则 λ 是 C^1。事实上，对所有 $x, y \in E$和 $t \in \mathbb{K}^\times$，利用 λ的线性性，我们得到

$$\frac{1}{t}\big(\lambda(x+ty) - \lambda(x)\big) \ =\ \lambda(y)\,,$$

其收敛于 $\lambda(y)$，当 $t \to 0$ 时。因此，方向导数 $d\lambda(x,\ y)$ 存在，并且由下式给出

$$d\lambda(x,y) \ =\ \lambda(y) \qquad \text{for all } x, y \in E. \tag{1.6}$$

由于映射 $d\lambda$ 连续， λ 是 C^1。为后文使用，注意 $d\lambda\colon\ E\times E \to F$ 也是一个连续线性映射。

[5] 这里 $0 \neq t \in \mathbb{K}$ 使得 $x + ty \in U$。

例 1.2.3. 设 E_1, E_2, F是局部凸空间，且 $\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$是连续双线性映射。那么 β 是 C^1，并且

$$d\beta((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \;=\; \beta(x_1,y_2)+\beta(y_1,x_2) \tag{1.7}$$

对所有 $x_1,\ y_1 \in E_1$ 和 $x_2,\ y_2 \in E_2$，因为

$$\frac{1}{t}\big(\beta(x_1+ty_1,x_2+ty_2)-\beta(x_1,x_2)\big) \;=\; \beta(x_1,y_2)+\beta(y_1,x_2)+t\beta(y_1,y_2)$$

当 $t\to 0$ 时收敛到 (1.7)，且 $d\beta$ 是连续的。类似的论证表明，每个连续的 n-线性映射 $\beta\colon E_1\times\cdots\times E_n \to F$都是 C^1，其中

$$d\beta((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \;=\; \beta(y_1,x_2,\dots,x_n)+\cdots+\beta(x_1,\dots,x_{n-1},y_n)\,.$$

我们来验证 $df(x,\ \cdot)\colon E\to F$是齐次的。

引理 1.2.4。设 $f\colon E\supseteq U\to F$ 是一个 C^1-映射。那么

$$df(x,sy) \;=\; s\,df(x,y) \tag{1.8}$$

对所有 $x\in U$、 $y\in E$ 和 $s\in\mathbb{K}$。

证明。由于 $df(x,\ 0y) \;=\; df(x,\ 0) \;=\; 0 \;=\; 0df(x,\ y)$，我们不妨假设$s\neq 0$。于是

$$\begin{aligned} df(x,sy) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x+tsy)-f(x)\big) = s\lim_{t\to 0}\frac{1}{ts}\big(f(x+tsy)-f(x)\big)\\ &= sdf(x,y). \end{aligned}$$

□

类似的论证表明：

引理 1.2.5。开区间 $I\subseteq\mathbb{R}$ 上的一个 C^0-曲线 $\gamma\colon\ I\to E$ 是 C^1-曲线，当且仅当 γ 是一个 C^1-映射。在这种情况下，

$$d\gamma(s,r) \;=\; r\,\gamma'(s) \quad \textit{for all } s\in I \textit{ and } r\in\mathbb{R}. \tag{1.9}$$

证明。设 γ 是一个 C^1-曲线。若我们能证明 (1.9)，那么 γ 将是 C^1。但 (1.9) 可仿照引理 1.2.4 的证明来证明：设 $s\in I, r\in\mathbb{R}$。由于平凡地有 $d\gamma(s,\ 0)=0$，我们不妨假设 $r\neq 0$。于是

$$\frac{1}{t}\big(\gamma(s+tr)-\gamma(s)\big) \;=\; r\Big(\frac{1}{tr}\big(\gamma(s+tr)-\gamma(s)\big)\Big)\to r\gamma'(s)$$

如 $t\to 0$ （因为这意味着 $tr\to 0$），从而 $d\gamma(s,\ r) \;=r\gamma'(s)$，得证。

反过来，如果 γ 作为映射是 C^1，那么 C^0曲线 γ 在每个$s\in I$ 处都是可微的，且

$$\gamma'(s)=\lim_{t\to 0}\frac{\gamma(s+t)-\gamma(s)}{t}=d\gamma(s,1).$$

由于 $d\gamma(s,1)$ 关于 s 连续，我们推知 γ 是一条 C^1-曲线。 □

中值定理可以推广到局部凸空间之间的映射：

命题 1.2.6（中值定理）。设 E 和 F 为局部凸空间，且 $f\colon U \to F$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 C^1-映射。那么

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df(x + t(y-x), y-x)\, dt \tag{1.10}$$

对于所有满足 U 包含 $[x,y] := \{x + t(y-x) : t \in [0,1]\}$ 的 x、$y \in U$，即连接 x 和 y 的线段。

证明。由于 f 存在所有方向导数，我们看到 $\gamma\colon [0,1] \to F$、$\gamma(t) := f(x + t(y-x))$ 在每个 $t \in [0,1]$ 处都是可微的，其导数为

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x + t(y-x) + s(y-x)) - f(x + t(y-x))}{s}$$
$$= df(x + t(y-x), y-x)\,.$$

前述公式表明 $\gamma'\colon I \to F$ 是连续的，因此 γ' 是一条 C^1-曲线。由于 $\gamma'(t) = df(x + t(y-x), y-x)$，利用基本定理（命题 1.1.5）计算 $\gamma(1) - \gamma(0)$，我们得到（1.10）。□

习题 1.1.7 表明，值域 F 的局部凸性对于 C^1-映射的以下性质至关重要。

引理 1.2.7. 设 E 和 F 是局部凸空间，且 $f\colon U \to F$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 C^1-映射。若 $df = 0$，则 f 是局部常值的。

证明。给定 $x \in U$，设 V 是 U 中 x 的一个凸邻域。对每个 $y \in V$，我们得到

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df(x + t(y-x),\, y-x)\, dt = 0\,,$$

根据命题 1.2.6 以及 $df = 0$ 这一事实。因此 $f|_V$ 是常数。 □

命题 1.2.8（偏微分法则）。设 E_1、E_2 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E_1 \times E_2$ 是一个开子集，且 $f\colon U \to F$ 是连续映射。那么，当且仅当以下极限

$$d_1 f(x_1, x_2, h_1) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_1 + th_1, x_2) - f(x_1, x_2)\big)$$

and

$$d_2 f(x_1, x_2, h_2) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_1, x_2 + th_2) - f(x_1, x_2)\big)$$

对所有 $(x_1, x_2) \in U$、$h_1 \in E_1$ 和 $h_2 \in E_2$ 都存在，并定义连续映射 $d_j f\colon U \times E_j \to F$（对 $j \in \{1,2\}$）时，是。在这种情况下，我们有

$$df(x_1, x_2, h_1, h_2) = d_1 f(x_1, x_2, h_1) + d_2 f(x_1, x_2, h_2) \tag{1.11}$$

对于所有（x_1、x_2）$\in U$ 以及 $h_1 \in E_1$、$h_2 \in E_2$。

证明。显然，若 f 是 C^1，则 $d_1 f$ 和 $d_2 f$ 存在；它们由下式给出

$$d_1 f(x_1, x_2, h_1) = df(x_1, x_2, h_1, 0) \quad \text{for } (x_1, x_2) \in U,\ h_1 \in E_1 \tag{1.12}$$

and

$$d_2 f(x_1, x_2, h_2) = df(x_1, x_2, 0, h_2) \quad \text{for } (x_1, x_2) \in U,\ h_2 \in E_2. \tag{1.13}$$

反过来，假设 $d_1 f$ 和 $d_2 f$ 存在。给定 $x = (x_1, x_2) \in U$ 和 $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $x + \mathbb{D}_\varepsilon h_1 \times \mathbb{D}_\varepsilon h_2 \subseteq U$，其中$\mathbb{D}_\varepsilon := \{z \in \mathbb{K}: |z| \le \varepsilon\}$。那么对每个 $0 \neq t \in \mathbb{D}_\varepsilon$都有 $x + [0,1]th_1 \times [0,1]th_2 \subseteq U$。我们可以写成

$$\begin{aligned}&\frac{f((x_1, x_2) + t(h_1, h_2)) - f(x_1, x_2)}{t}\\ &\quad = \frac{f(x_1 + th_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{t} + \frac{f(x_1 + th_1, x_2 + th_2) - f(x_1 + th_1, x_2)}{t}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

(1.14) 中的第一个直和项收敛到 $d_1 f(x_1, x_2, h_1)$，当 $t \to 0$ 时，这是由偏微分的定义得出的。(1.14) 中的第二个直和项可以写成弱积分，

$$\frac{f(x_1 + th_1, x_2 + th_2) - f(x_1 + th_1, x_2)}{t} = \int_0^1 d_2 f(x_1 + th_1, x_2 + sth_2, h_2) ds, \tag{1.15}$$

因为我们可以对 f （固定第一个自变量）应用命题 1.2.6（以及引理 1.2.4）；根据假设，C^1 。注意，(1.15) 中的积分对于 $t = 0$ 也有意义（此时被积函数为常数），因而定义了一个关于 t 的函数 $I_2 \colon \mathbb{D}_\varepsilon \to F$。映射

$$\mathbb{D}_\varepsilon \times [0,1] \to F,\ (t, s) \mapsto d_2 f(x_1 + th_1, x_2 + sth_2, h_2)$$

由于其连续，我们由引理 1.1.11 得出 I_2 连续。因此，(1.14) 的右端当 $t \to 0$ 时收敛，其极限为

$$d_1 f(x_1, x_2, h_1) + I_2(0) = d_1 f(x_1, x_2, h_1) + d_2 f(x_1, x_2, h_2).$$

因此，df 存在，其表达式由 (1.11) 的右端给出，故其连续，由此可知 f 是 C^1。□

注 1.2.9. 命题 1.2.8 中的映射 $d_1 f \colon U \times E_1 \to F$ 和 $d_2 f \colon U \times E_2 \to F$分别称为 f的第一和第二偏微分。与有限维分析中通常计算偏导数比直接求出 $f'(x)$ 更容易一样，“偏微分法则”(1.11) 是计算乘积空间上复杂映射的 df 的宝贵工具（因为通常不难看出偏微分是什么）。我们将会遇到各种例子。

以下对 C^1-映射的刻画将使链式法则的证明变得平凡。

引理 1.2.10。设 E 和 F 为局部凸 $\mathbb{K}$-向量空间，$U \subseteq E$ 为一个开子集，且 $f\colon U \to F$ 为一个连续映射。则 f 是 C^1 的，当且仅当方向差商

$$\frac{1}{t}\big(f(x+ty)-f(x)\big),$$

对于所有满足 $x+ty \in U$ 的 $(x, y, t) \in U \times E \times \mathbb{K}^\times$ 都有意义，并且可连续延拓到 $t=0$。更确切地说，f 是 C^1 的，当且仅当存在一个连续映射 $f^{[1]}\colon U^{[1]} \to F$，定义在

$$U^{[1]} := \{(x,y,t) \in U \times E \times \mathbb{K} \colon x+ty \in U\} \tag{1.16}$$

使得

$$f^{[1]}(x,y,t) = \frac{1}{t}\big(f(x+ty)-f(x)\big)$$

对所有满足 $t \neq 0$ 的 $(x, y, t) \in U^{[1]}$。

证明。如果 $f^{[1]}$ 存在，那么

$$df(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x+ty)-f(x)\big) = \lim_{t\to 0} f^{[1]}(x,y,t) = f^{[1]}(x,y,0)$$

对每个 $(x, y) \in U \times E$ 都存在，并定义了一个连续映射 $U \times E \to F$，因为 $f^{[1]}$ 是连续的。因此，f 是 C^1，其中

$$df(x,y) = f^{[1]}(x,y,0) \qquad \text{for all } (x,y) \in U \times E. \tag{1.17}$$

反过来，如果 f 是 C^1，我们定义

$$f^{[1]}\colon U^{[1]} \to F, \qquad f^{[1]}(x,y,t) := \begin{cases} \frac{1}{t}\big(f(x+ty)-f(x)\big) & \text{if } t \neq 0; \\ df(x,y) & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

那么 $f^{[1]}$ 是连续的。事实上，由于 f 是连续的，映射 $f^{[1]}$ 在每个满足 $t_0 \neq 0$ 的 $(x_0, y_0, t_0) \in U^{[1]}$ 处连续。给定 $(x_0, y_0) \in U \times E$，存在 $\varepsilon > 0$ 以及 x_0 的邻域 X 和 y_0 的邻域 Y，它们在 E 中满足 $X + \mathbb{D}_\varepsilon Y \subseteq U$，其中 $\mathbb{D}_\varepsilon := \{t \in \mathbb{K} \colon |t| \leq \varepsilon\}$。那么 $Q := X \times Y \times \mathbb{D}_\varepsilon \subseteq U^{[1]}$。此外，对所有 $(x, y, t) \in Q$，都有 $[x, x+ty] \subseteq U$；事实上，对所有 $s \in [0,1]$，当 $(x, y, st) \in X \times Y \times \mathbb{D}_\varepsilon$ 时，$x + sty \in U$。利用命题 1.2.6 和引理 1.2.4，我们得到

$$f^{[1]}(x,y,t) = \int_0^1 df(x+sty, y)\, ds \tag{1.18}$$

对于所有满足 $(x, y, t) \in Q$ $t \neq 0$ 的，若另一方面 $t = 0$，则 (1.18) 也成立，因为被积函数是常值函数 $s \mapsto df(x, y)$。映射 $Q \times [0,1] \to F$，$(x, y, t, s) \mapsto df(x + sty, y)$ 是连续的，由引理 1.1.11 可知，(1.18) 的右端关于 $(x, y, t) \in Q$ 连续，因此特别地，$f^{[1]}$ 在 $(x_0, y_0, 0)$ 处连续。因此，$f^{[1]}$ 在每一点处都连续，故为连续函数。□

引理 1.2.11. 若 $f\colon E \supseteq U \to F$ 是 C^1，则对每个 $x \in U$，$f'(x) := df(x,\cdot)\colon E \to F$ 是连续线性映射。

证明。 映射 $f'(x)\colon E \to F$连续，因为它是 df 的部分映射。我们已在引理 1.2.4 中验证，$f'(x)$ 是齐次的。

可加性：给定 $x \in U$ 和 $y_1, y_2 \in E$，存在 $\varepsilon > 0$，使得 $x + \mathbb{D}_\varepsilon y_1 + \mathbb{D}_\varepsilon y_2 \subseteq U$。对于每个 $0 \neq t \in \mathbb{D}_\varepsilon$，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{f(x+t(y_1+y_2))-f(x)}{t}&\\ = \frac{f(x+ty_1)-f(x)}{t} &+ \frac{f(x+ty_1+ty_2)-f(x+ty_1)}{t}\\ = f^{[1]}(x,y_1,t) &+ f^{[1]}(x+ty_1,y_2,t)\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

(1.19) 最后一行中的项对 $t=0$ 也有意义，并且由 $f^{[1]}$ 的连续性可知，它关于 $t \in \mathbb{D}_\varepsilon$ 连续。(1.19) 第一行中差商的极限 $df(x, y_1+y_2)$ 与最后一行在$t \to 0$时的极限一致，即与 $f^{[1]}(x, y_1, 0) + f^{[1]}(x, y_2, 0) = df(x, y_1) + df(x, y_2)$ 一致。□

注 1.2.12. </style}前面的 f' 定义使得 f 时 $f'(t)$ 有双重含义：$I \to F$ 是一条 C^1-曲线，对应于线性同构

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \to F\,, \quad \alpha \mapsto \alpha(1)$$

其逆映射为 $x \mapsto (\mathbb{R} \ni s \mapsto sx)$（其中 $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 F 的线性映射空间）。事实上，$f'(t)$ 或表示导数 $f(1)(t)$（如定义 1.1.1 中所述），或表示 $df(t,\cdot)$（如引理 1.2.11 中所述）。这里，线性映射 $df(t,\cdot)\colon \mathbb{R} \to F$ 由 $df(t, s) = sf^{(1)}(t)$ 确定（见 (1.9)）；反过来，可以从 $df(t,\cdot)$ 中恢复 $f(1)(t)$，即 $f(1)(t) = df(t, 1)$。根据上下文，总能明确 $f'(t)$ 指的是哪种含义。

命题 1.2.13（链式法则）。设 E、F 和 G 为局部凸空间，$U \subseteq E$、$V \subseteq F$ 为开子集，且 $f\colon U \to F$、$g\colon V \to G$ 为 C^1-映射，其中 $f(U) \subseteq V$。则复合映射 $g \circ f\colon U \to G$ 是 C^1，并且

$$d(g\circ f)(x,y) \;=\; dg(f(x), df(x,y)) \quad \textit{for all } (x,y) \in U \times E, \tag{1.20}$$

也就是说，

$$(g\circ f)'(x) \;=\; g'(f(x)) \circ f'(x) \quad \textit{for all } x \in U. \tag{1.21}$$

证明。 对于每个满足 $t \neq 0$ 的 $(x, y, t) \in U^{[1]}$，我们计算

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x+ty))-g(f(x))}{t} &= \frac{g\big(f(x)+t\,\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\big)-g(f(x))}{t}\\ &= g^{[1]}(f(x), f^{[1]}(x,y,t), t)\,, \end{aligned} \tag{1.22}$$

其中 $f^{[1]}$ 和 $g^{[1]}$ 如引理 1.2.10 所述。函数 $h\colon U^{[1]} \to G, h(x,y,t) := g^{[1]}(f(x)\ f^{[1]}(x,y,t)\ t)$ 是连续的，并将 (1.22) 的右端延拓。因此，引理 1.2.10 表明 $g \circ f$ 是 C^1，其中

$$(g \circ f)^{[1]}(x,y,t) \;=\; g^{[1]}(f(x), f^{[1]}(x,y,t), t) \quad \text{for all } (x,y,t) \in U^{[1]}. \tag{1.23}$$

In particular, $d(g \circ f)(x,y) = (g \circ f)^{[1]}(x,y,0) = dg(f(x), df(x,y))$. □

第 1.2 节习题

习题 1.2.1. 证明每个连续 n-线性映射 β 都是 C^1，并且 $d\beta$ 具有例 1.2.3 中所断言的形式。

习题 1.2.2. 设 E 与 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为开集，且 $f\colon U \to F$ 为一个映射，使得对所有 $(x,y) \in U \times E$，方向导数 $df(x,y)$ 存在，并且 $df\colon U \times E \to F$ 连续。注意中值定理的结论仍然成立，并由此推出 f 连续（因而 C^1）。

习题 1.2.3. (a)（乘积法则）。设 $\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$ 为局部凸空间之间的连续双线性映射，且 $\gamma_1\colon I \to E_1$ 以及 $\gamma_2\colon I \to E_2$ 为定义在开区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的 C^1-曲线。证明

$$\gamma\colon I \to F, \quad \gamma(t) := \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

是一个 C^1 曲线，且 $\gamma'(t) = \beta(\gamma_1'(t)\ \gamma_2(t)) + \beta(\gamma_1(t)\ \gamma_2'(t))$。
(b) 若 $\gamma := \beta \circ (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$，且 $\gamma_k\colon I \to E_k$ 是 C^1 曲线，而 $\beta\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ 是连续的 n-线性映射，则以同样的方法进行。
(c) 设 $\mathcal{A}$ 是局部凸含幺结合拓扑代数（见定义 B.11.5），$\gamma\colon I \to \mathcal{A}$ 是一个 C^1 曲线，且 $n \in \mathbb{N}$。求 $\eta\colon I \to \mathcal{A}$ 时的 $\eta'(t)$，其中 $\eta(t) := (\gamma(t))^n$。何时该公式可按预期简化?

(d)（分部积分）。在 (a) 的情形下，证明对于给定的 $a, b \in I$，弱积分 $\int_a^b \beta(\gamma_1(t)\ \gamma_2'(t))\, dt$ 在 F 中存在，当且仅当弱积分 $\int_a^b \beta(\gamma_1'(t)\ \gamma_2(t))\ dt$ 在 F 中存在。在此情形下，[6]

$$\int_a^b \beta(\gamma_1(t), \gamma_2'(t))\, dt = \big[\beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\big]_a^b - \int_a^b \beta(\gamma_1'(t), \gamma_2(t))\, dt.$$

[I 的开性与 (a)–(d) 无关（参见命题 1.4.10 和引理 1.4.13）]。

习题 1.2.4. 设 E、F 和 G 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$ 为开子集。设 $f\colon U \to F$ 为映射，满足 $f(U) \subseteq V$，并设 $g\colon V \to G$ 为 C^1-映射。给定 $x \in U$ 和 $y \in E$。证明：如果 f 在 x 处的方向导数 $df(x,y) = (D_y f)(x)$ 存在，那么 $d(g \circ f)(x,y)$ 存在，且等于 $d(g \circ f)(x,y) = dg(f(x)\ df(x,y))$。

[$0 \neq t \in \mathbb{K}$ $x + ty \in U$ $g\ f\ x + ty\ -g\ f\ x\ /t\ =$ 对于这样的，我们有 $(((\,))\,((\,))\,((\,)$
$g^{[1]}\ f\ x\ ,\ f\ x+ty\ -f\ x\ /t\ t$ $g^{[1]}\ f\ x\ \ df\ x\ y\ ,0\ \ t \to 0\,]$
$(()())$,), 它收敛到 $(()(,))$, 当 时。

[6] 通常，$[f(t)]_a^b := f(b) - f(a)$。

习题 1.2.5. 设 E、 F 和 G 是局部凸空间，且 $U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$ 是开子集。设 $f\colon U \to F$ 是一个映射，使得 $f(U) \subseteq V$，它是一个连续仿射线性映射的限制。设 $x \in U$、 $y \in E$ 和 $g\colon V \to G$ 是一个映射，其方向导数 $dg(f(x)\ df(x,\ y))$ 存在。证明方向导数 $d(g \circ f)(x,\ y)$ 存在，并且等于 $dg(f(x)\ df(x,\ y))$。

[由仿射线性性， $f(x+ty) = f(x)+tdf(x,\ y)$。因此 $(g(f(x+ty)) - g(f(x)))/t = (g(f(x) + tdf(x,\ y)) - g(f(x))/t$。]

习题 1.2.6. 给定 $\mathbb{R}^k$ 上的一个范数，上确界范数使 $C([0,1],\ \mathbb{R}^k)$ 成为一个巴拿赫空间。

(a) 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续，且 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是连续函数 $\gamma_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 的一致收敛序列，其极限为 γ。利用 f 在每个紧区间上一致连续这一点，推出 $f \circ \gamma_n \to f \circ \gamma$ 一致收敛。因此 $\varphi := C([0,1],\ f)\colon C([0,1],\ \mathbb{R}) \to C([0,1],\ \mathbb{R})$，$\varphi(\gamma) := f \circ \gamma$ 连续。

我们希望证明，如果 f 是 C^1，那么 φ 就是 C^1。为此，令 $\gamma,\ \eta \in C([0,1],\ \mathbb{R})$。

(b) 假设

$$d\varphi(\gamma,\eta) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\varphi(\gamma+t\eta) - \varphi(\gamma)\big) \tag{1.24}$$

$_x$ 存在。对于每个 $x \in [0,1]$，点求值 $\mathrm{ev}_x\colon C([0,1],\ \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \zeta \mapsto \zeta(x)$ 是连续线性的。对等式 (1.24) 两边应用 ev_x，并以此方式找出 $d\varphi(\gamma,\ \eta)$ 的唯一可能候选者 $\kappa(\gamma,\ \eta)$。

(c) 证明 κ 是连续的。(d) 应用点求值，验证 $\frac{f_{(\gamma+t\eta)-f\ \gamma}}{t} = \int_0^1 \kappa^{()}(\gamma + st\eta,\ \eta)\,ds$。(e) 证明 (b) 中的 $\kappa(\gamma,\ \eta)$ 确实是方向导数 $d\varphi(\gamma,\ \eta)$，并推导出 φ 是 C^1。

1.3 高阶可微性

高阶可微性是递归地定义的。

定义 1.3.1. 设 E 与 F 为局部凸空间， $U \subseteq E$ 为开子集，且 $f\colon U \to F$ 为映射。若 f 连续，则我们也称 f 为 C^0。设 $k \in \mathbb{N}$。我们称 f 为 C^k-映射，如果 f 是 C^1 且

$$df\colon U \times E \to F$$

在开子集 $U \times E \subseteq E \times E$ 上是 C^{k-1}。如果对于每个 $k \in \mathbb{N}$， f 都是 C^k，我们就称 f 是 C^∞ 或光滑的。如果要强调基域 $\mathbb{K}$，我们也称其为 $C^k_{\mathbb{K}}$-映射。

例 1.3.2. 局部凸空间之间的每个连续线性映射 $\lambda\colon E \to F$ 都是光滑的。事实上，由例 1.2.3 可知， λ 是 C^1，其中 $d\lambda$ 是连续线性映射。给定 $k \in \mathbb{N}$，映射 $d\lambda$ 由归纳法可知是 C^{k-1}，因此 λ 是 C^k。

引理 1.3.3（到积的映射）。设 E 是一个局部凸空间，$(F_j)_{j\in J}$ 是一个局部凸空间族，$f\colon U\to\prod_{j\in J}F_j =: F$ 是定义在开子集 $U\subseteq E$ 上的映射，且 $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。设 $f_j := \mathrm{pr}_j\circ f\colon U\to F_j$，其中 $j\in J$，而 $\mathrm{pr}_j\colon F\to F_j$ 是到第 j 个分量上的投影。那么 f 是 C^r 当且仅当对每个 $j\in J$，f_j 是 C^r。在这种情况下，

$$df(x,y) \;=\; \big(df_j(x,y)\big)_{j\in J} \quad \text{for all } x\in U \text{ and } y\in E. \tag{1.25}$$

证明。假设每个 f_j 都是 C^r；为了证明 f 是 C^r，我们不妨假设r 是有限的，并使用归纳法。若 $r=1$、$x\in U$ 和 $y\in E$，则

$$\tfrac{1}{t}\big(f(x+ty)-f(x)\big) \;=\; \big(\tfrac{1}{t}(f_j(x+ty)-f_j(x))\big)_{j\in J} \tag{1.26}$$

对于每个满足 $x+ty\in U$的 $t\in\mathbb{K}^\times$。对于每个 $j\in J$，第 j个分量$\frac{1}{t}\big(f_j($ $x+ty)-f_j(x)\big)$ 收敛到 $df_j(x,y)$，当 $t\to 0$时。因此，(1.26) 中的差商收敛，其极限为 $df(x,y)$，如 (1.25) 所述。由于对每个 $j\in J$，$\mathrm{pr}_j\circ df = df_j$ 都是连续的，我们得出 $df\colon U\times E\to F$是连续的。因此，f 是 C^1。由于对每个 $j\in J$，$\mathrm{pr}_j\circ df = df_j$ 都是 C^{r-1}，根据归纳假设，映射 df 是 C^{r-1}。因此，f 是 C^r。

反过来，如果 f 是 C^r，那么由链式法则（命题 1.2.13），$f_j=\mathrm{pr}_j\circ f$ 是 C^1，其中 $df_j=\mathrm{pr}_j\circ df$（利用了 pr_j 是连续线性的）。如果 $r\geq 2$，那么由归纳假设（因为 df 是 C^{r-1}），$df_j=\mathrm{pr}_j\circ df$ 是 C^{r-1}，因此 f_j 是 C^r。□

命题 1.3.4。设 E、F 和 G 是局部凸空间，$U\subseteq E$ 和$V\subseteq F$是开子集，$k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 和 $f\colon U\to F$以及 $g\colon V\to G$是C^k-映射。若 $f(U)\subseteq V$，则 $g\circ f\colon U\to G$ 也是 C^k。

证明。只需证明该断言对 $k\in\mathbb{N}$成立。证明采用归纳法。命题 1.2.13（链式法则）已证明了 $k=1$ 的情形，因此我们可以假设 $k\geq 2$，且将 k 替换为$k-1$时该断言成立。由命题 1.2.13，$g\circ f$是 C^1，并且对所有 (x,y) $\in U\times E$，都有 $d(g\circ f)(x,y) = dg(f(x)\ df(x,y))$。因此

$$d(g\circ f) \;=\; dg\circ(f\circ\mathrm{pr}_1, df)\,, \tag{1.27}$$

其中 $\mathrm{pr}_1\colon U\times E\to U$，$\mathrm{pr}_1(x,y) := x$是 C^∞作为连续线性映射的限制（例 1.3.2）。根据归纳法，$f\circ\mathrm{pr}_1$ 是 C^{k-1}，因此根据引理 1.3.3，$(f\circ\mathrm{pr}_1,\ df)$ 也是如此。将归纳假设应用于（1.27）中的复合，我们看到 $d(g\circ f)$ 是 C^{k-1}。因此，$g\circ f$是 C^k。□

例 1.3.5。每个连续的 n-线性映射 $\beta\colon E_1\times\cdots\times E_n\to F$在局部凸空间之间都是光滑的。

事实上，根据例 1.2.3，映射 β 是 C^1，并且

$$d\beta \;=\; \sum_{j=1}^{n}\beta\circ\lambda_j\,, \tag{1.28}$$

其中 $\lambda_j\colon (E_1\times\cdots\times E_n)^2\to E_1\times\cdots\times E_n$,

$$\lambda_j(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) := (x_1,\dots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\dots,x_n)$$

是连续线性的，因而光滑（例 1.3.2）。若 β 为 C^k，利用命题 1.3.4，我们由 (1.28) 推得 $d\beta$ 为 C^k，从而 β 为 C^{k+1}。

现在我们给出拓扑代数（如定义 B.11.5 中所述）的一个应用。

命题 1.3.6. 设 $\mathcal{A}$ 为局部凸含幺结合拓扑代数，使得求逆映射 $\iota\colon \mathcal{A}^\times\to\mathcal{A}$, $\iota(x):=x^{-1}$ 连续。设 E 为局部凸空间，且 $f\colon U\to\mathcal{A}$ 为开子集 $U\subseteq E$ 上的 C^k-映射，使得 $f(U)\subseteq\mathcal{A}^\times$。则 $\iota\circ f\colon U\to\mathcal{A}$, $x\mapsto f(x)^{-1}$ 为 C^k。

证明. 设 f 为 C^k，其中 $k\in\mathbb{N}$。令 $x\in U$, $y\in E$。利用

$$b^{-1}-a^{-1}=b^{-1}(a-b)a^{-1}\ \text{ for all } a,b\in\mathcal{A}^\times, \tag{1.29}$$

对于所有满足 $x+ty\in U$ 的 $0\neq t\in\mathbb{K}$，我们得到:

$$\frac{1}{t}\big(f(x+ty)^{-1}-f(x)^{-1}\big) \;=\; -f(x+ty)^{-1}\,\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\,f(x)^{-1}.$$

由于代数乘法是连续的，右端收敛到 $-f(x)^{-1}df(x,\ y)f(x)^{-1}$，当 $t\to 0$ 时。因此， $d(\iota\circ f)(x,\ y)$ 存在，且由下式给出

$$d(\iota\circ f)(x,y)=-f(x)^{-1}df(x,y)f(x)^{-1}=-\tau\big(\iota(f(x)),df(x,y),\iota(f(x))\big), \tag{1.30}$$

其中 $\tau\colon\ \mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, $\tau(a,\ b,\ c):=abc$ 是连续三线性的，因而是光滑的（例 1.3.5）。由（1.30）， $d(\iota\circ f)$ 是连续的，因此 $\iota\circ f$ 是 C^1。现在我们假设 $\iota\circ f$ 是 C^{k-1}，这是归纳法的假设。于是（1.30）表明， $d(\iota\circ f)$ 是 C^{k-1}，因为它是 C^{k-1}-映射的复合（见命题 1.3.4 和引理 1.3.3）。由于 $\iota\circ f$ 是 C^1，且 $d(\iota\circ f)$ 是 C^{k-1}，映射 $\iota\circ f$ 是 C^k。□

定义 1.3.7。局部凸、含幺的结合拓扑 $\mathbb{K}$代数$\mathcal{A}$ 称为连续逆代数 （或 cia），如果其单位群 $\mathcal{A}^\times$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开集，并且求逆映射 $\iota\colon\ \mathcal{A}^\times\to\mathcal{A}$, $\iota(x):=x^{-1}$ 是连续的。

例如，每个含幺巴拿赫代数都是连续逆代数（习题 1.3.9）。更多例子将在第 10 章讨论。

推论 1.3.8。如果 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数，那么求逆映射 $\iota\colon\ \mathcal{A}^\times\to\mathcal{A}$ 是光滑的，并且

$$d\iota(x,y)\;=\;-x^{-1}yx^{-1}\qquad \textit{for all } (x,y)\in\mathcal{A}^\times\times\mathcal{A}\,. \tag{1.31}$$

证明。 将命题 1.3.6 应用于 $f\colon\ \mathcal{A}^\times\to\mathcal{A}$, $f(x)\colon=x$，我们看到$\iota=\iota\circ f$ 是光滑的。 $d\iota$ 的公式由（1.30）推出。□

注 1.3.9。连续逆代数 $\mathcal{A}$ 中的代数乘法 $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是连续双线性的，因而也是光滑的，群乘法 $\mathcal{A}^\times \times \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times$ 同样是光滑的。因此，由于乘法和求逆都是光滑的，$\mathcal{A}^\times$ 是一个 $\mathbb{K}$-李群（按照第5章中的术语）。

命题 1.3.10.设 E 和 F 为局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间，$f\colon U \to F$ 是定义在开子集 $U \subseteq E$ 上的连续映射，且$r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么，$f$ 是 C^r，当且仅当对所有满足 、、E 和 F 、.....、 $\mathbb{K}$ 的情形，迭代方向导数

$$d^{(k)}f(x, y_1, \ldots, y_k) := (D_{y_k} \cdots D_{y_1} f)(x)$$

存在，并定义连续映射 $d^{(k)}f\colon U \times E^k \to F$。

因此，$d^{(1)}f = df$尤其成立。我们记 $d^{(0)}f := f$。

定义 1.3.11。 $d^{(k)}f$称为 k阶微分，属于 f。

下面的引理将帮助我们证明命题 1.3.10。

引理 1.3.12。设 E、 F 为局部凸空间，$\ell \in \mathbb{N}$ 以及 $(W_j)_{1 \le j \le \ell}$ 为局部凸空间族 W_j，其中 $j \in \{1, \ldots, \ell\}$。简记 $W := W_1 \times \cdots \times W_\ell$。设 $U \subseteq E$ 为开子集，$r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，并且

$$f\colon U \times W \to F$$

为满足下列条件的连续映射：

$$f(x, \cdot)\colon W_1 \times \cdots \times W_\ell \to F$$

对每个 $x \in U$，它是 ℓ-线性的，且迭代方向导数

$$d_1^{(k)} f(x, w, y_1, \ldots, y_k) := (D_{(y_k,0)} \cdots D_{(y_1,0)} f)(x, w)$$

对所有满足 $k \le r$、 $x \in U$、 $w \in W$ 以及 y_1、.....、 $y_k \in E$ 的 $k \in \mathbb{N}$ 都存在，并且

$$d_1^{(k)} f\colon U \times W \times E^k \to F$$

是连续的。那么 f 是一个 C^r-映射。

证明。我们可以假设 $r < \infty$；证明对 $r \in \mathbb{N}$ 使用归纳法。若$r = 1$，则根据假设，$d_1 f$存在且连续。由于 $f(x, \cdot)$ 是 ℓ-线性且连续的，因此对所有 $x \in U$， $d_2 f(x, w, h)$ 也存在，$w = (w_1, \ldots, w_\ell) \in W$且 $h = (h_1, \ldots, h_\ell) \in W$，并由下式给出

$$d_2 f(x, w, h) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, w_1, \ldots, w_{j-1}, h_j, w_{j+1}, \ldots, w_\ell) \tag{1.32}$$

（见例 1.3.5）。因此

$$d_2 f = \sum_{j=1}^{\ell} f \circ (\mathrm{id}_U \times \lambda_j) \tag{1.33}$$

配上连续线性函数

$$\lambda_j \colon W \times W \to W, \quad (w,h) \mapsto (w_1, \ldots, w_{j-1}, h_j, w_{j+1}, \ldots, w_\ell).$$

由于映射 $\mathrm{id}_U \times \lambda_j$ 都是连续的，由 (1.33) 可得 $d_2 f$ 连续。因此，根据偏微分法则（命题 1.2.8），f 是 C^1，其中

$$\begin{aligned} df(x,w,y,h) &= d_1 f(x,w,y) + d_2 f(x,w,h) \\ &= d_1 f(x,w,y) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, \lambda_j(w,h)). \end{aligned} \tag{1.34}$$

若 $r \geq 2$，则由归纳假设，f 是 C^{r-1}。由于

$$\mathrm{id}_U \times \lambda_j = (\mathrm{pr}_1, \lambda_j \circ \mathrm{pr}_2)$$

是光滑的（其中 pr_1 和 pr_2 分别是从 $U \times W$ 到 U 和 W 的投影），由命题 1.3.4 可得，(1.34) 中的每个直和项 $f \circ (\mathrm{id}_U \times \lambda_j)$ 都是 C^{r-1}。现在

$$d_1 f(x,w,y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (f(x+ty, w) - f(x,w))$$

作为具有此性质的函数的逐点极限，它关于 $w =$ 是 ℓ-线性的（w_1，……，w_ℓ）。此外，$d_1 f(x,\ w,\ y) = d(f(\cdot,\ w))(x,\ y)$ 关于 y 是线性的。因此

$$d_1 f \colon U \times (W_1 \times \cdots \times W_\ell \times E) \to F$$

是一个连续函数，使得对每个 $x \in U$，$d_1 f(x, \cdot)$ 都是 $(\ell+1)$-线性的，

$$d_1^{(k)}(d_1 f)(x, (w,y), y_1, \ldots, y_k) = d_1^{(k+1)} f(x, w, y, y_1, \ldots, y_k) \tag{1.35}$$

对所有满足 $k \leq r-1$，$x \in U$，$(w,y) \in W \times E$ 和 $y_1, \ldots, y_k \in E$ 的 $k \in \mathbb{N}$，它都存在，并且 $d_1^{(k)}(d_1 f)$ 是连续的（这从 (1.35) 显然可知）。根据归纳假设，$d_1 f$ 是 C^{r-1}。由于连续线性映射是 C^∞，由命题 1.3.4 可推出

$$U \times W \times E \times W \to F, \quad (x,w,y,h) \mapsto d_1 f(x,w,y)$$

是 C^{r-1}。由于所有直和项都是 C^{r-1}，因此由 (1.34) 可得 df 是 C^{r-1}。于是 f 是 C^r，归纳证明得以完成。□

命题 1.3.10 的证明。我们可以假设 $r < \infty$。首先通过对 $r \in \mathbb{N}$作归纳，证明若 f 是 C^r，则直至 r 阶的高阶微分存在且连续。若 $r = 1$，则 $d^{(1)}f = df$ 存在且连续。若 $r \geq 2$，则 df 是 C^{r-1}，因此 df 具有连续的高阶微分$d^{(k)}(df)$，对所有满足 $k \leq r-1$的 $k \in \mathbb{N}$均成立。若 $k \in \{2, \ldots, r\}$、 $x \in U$和$y_1, \ldots, y_k \in E$，则

$$(D_{y_k} \cdots D_{y_1} f)(x) = D_{y_k} \cdots D_{y_2}(df(\cdot, y_1))(x) = (D_{(y_k,0)} \cdots D_{(y_2,0)}(df))(x, y_1)$$

因此

$$d^{(k)}f(x, y_1, \ldots, y_k) = d^{(k-1)}(df)((x, y_1), (y_2, 0), \ldots, (y_k, 0)), \tag{1.36}$$

它是关于 $(x, y_1, \ldots, y_k) \in U \times E^k$ 的连续 F 值函数。

反过来，假设 f 是连续的，并且直到 $r \in \mathbb{N}$ 阶的高阶连续微分均存在。我们通过对 $r \in \mathbb{N}$ 使用归纳法，证明 f 是 C^r。若 $r = 1$，则 f 连续，且 $df = d^{(1)}f$ 存在并连续，因此 f 是 C^1。若 $r \geq 2$，则根据归纳法的基础情形，f 是 C^1，并且

$$df : U \times E \to F$$

是一个连续函数，对其第二个变量呈线性，且满足

$$d_1^{(k)}(df) = d^{(k+1)}f$$

存在且连续，对所有满足 $k \leq r-1$ 的 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。因此 df 是 C^{r-1}（由引理 1.3.12），从而 f 是 C^r。□

注记 1.3.13。我们指出，

$$d^{(k)}f : U \times E^k \to F$$

若 f，则是一个 C^{r-k}-映射：$U \to F$ 在带有 $r \in \mathbb{N}$ 的开子集 $U \subseteq E$ 上是一个 C^r-映射，并且 $k \in \{1, \ldots, r\}$。

[根据 C^r-映射的递归定义，df 是 C^{r-1}，因此当 $k = 1$ 时断言成立。于是，若 $k \geq 2$，由归纳法可知 $d^{(k-1)}(df)$ 是 $C^{r-1-(k-1)} = C^{r-k}$。由于

$$d^{(k)}f(x, y_1, \ldots, y_k) = d^{(k-1)}(df)((x, y_1), (y_2, 0), \ldots, (y_k, 0))$$

由 (1.36)，结合命题 1.3.4，我们得出 $d^{(k)}f$ 是 C^{r-k}。]

注记 1.3.14。在引理 1.3.3 的情形下，我们有

$$d^{(k)}f = (d^{(k)}f_j)_{j \in J}$$

对于所有满足 $k \leq r$ 的 $k \in \mathbb{N}$。事实上，该引理涵盖了 $k = 1$ 这种情况。根据归纳法，我们有

$$d^{(k)}(df) = (d^{(k)}(df_j))_{j\in J}$$

对于每个满足 $k \le r-1$ 的 $k \in \mathbb{N}$，因此

$$\begin{aligned} d^{(k+1)}f(x, y_1, \dots, y_{k+1}) &= d^{(k)}(df)((x, y_1), (y_2, 0), \dots, (y_{k+1}, 0)) \\ &= (d^{(k)}(df_j)((x, y_1), (y_2, 0), \dots, (y_{k+1}, 0)))_{j\in J} \\ &= (d^{(k+1)}f_j(x, y_1, \dots, y_{k+1}))_{j\in J}, \end{aligned}$$

由此完成了归纳论证。

接下来，我们的目标是将赫尔曼·阿曼杜斯·施瓦茨定理推广到 C^k-映射。下面这个关于含参积分可微性的引理将在证明中发挥作用。

引理1.3.15。设 E 是一个局部凸空间，$U \subseteq \mathbb{K}$ 是一个凸开子集，$t_0 \in U$ 和 $f\colon\ U \times [a,b] \to E$ 是连续函数，其中 $a < b$。假设偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) := (D_{(1,0)}f)(t,s)$$

存在，且是一个从 $(t,s) \in U \times [a,b]$ 到 E 的连续函数。此外，假设弱积分

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, s)\, ds \tag{1.37}$$

在 E 中存在，弱积分 $\gamma(t) \colon = \int_a^b f(t,s)\, ds$ 对所有 $t \in U$ 均存在。那么 $\gamma\colon U \to E$ 在 t_0 处可微，且 $\gamma'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, s)\, ds$。 —

证明。对于 $0 \neq r \in U - t_0$，我们有

$$\begin{aligned} \Delta_r := \frac{\gamma(t_0+r) - \gamma(t_0)}{r} &= \int_a^b \frac{f(t_0+r, s) - f(t_0, s)}{r}\, ds \\ &= \int_a^b \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta r, s)\, d\theta\, ds \end{aligned}$$

由中值定理（应用于函数 $f(\cdot,\ s)$）。[7] 对于 $r = 0$，内层积分也存在，并且等于其被积函数 $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\ s)$ 的值，该值与 θ 无关。因此，外层积分 Δ_0 也存在，并且等于 (1.37)。根据引理 1.1.11，依赖于参数的积分 $U - t_0 \to E$，$r \mapsto \Delta_r$ 连续。由此可得 $\gamma'(t_0) = \lim_{r\to 0} \Delta_r = \Delta_0$ 存在，并且等于 (1.37)。 □

请注意，在下述引理中，f 不必是 C^2（因为这里既不要求 $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ 的存在性，也不要求它们的连续性）。

[7] 若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，请参见引理 2.1.1，并参阅 $k = 1$ 了解更多详情。

引理 1.3.16。设 E 为一个局部凸空间，$U \subseteq \mathbb{K}^2$ 为一个开子集，且 $f\colon U \to E$，$(s、t) \mapsto f(s、t)$ 为一个连续函数，使得其偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial s}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} \quad and \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$$

存在且是从 U 到 E的连续函数。那么 $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$ 也存在，并且与$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}$一致。

证明。若 $(s,t) \in U$，则存在 $\varepsilon > 0$，使得对所有满足$|r| < \varepsilon$的 $r \in \mathbb{K}$，都有 $(s, t+r) \in U$。对于 $r \neq 0$，我们有

$$\frac{f(s,t+r) - f(s,t)}{r} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(s, t+\theta r)\, d\theta \tag{1.38}$$

根据中值定理。将式(1.38)两边视为$\widetilde{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$在 E 上的完备化 E 中的元素，并取 $E \subseteq E$ 以确保弱积分的存在，引理1.3.15使我们能够在积分号下求导；于是得到

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial s}(s,t+r) - \frac{\partial f}{\partial s}(s,t)}{r} = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(s, t+\theta r)\, d\theta. \tag{1.39}$$

由于左端属于 E，右端也属于该空间，因此弱积分也存在于 E中。对于 $r = 0$，右端的被积函数与 θ无关，因此在这种情况下，弱积分也存在于 E 中。现在，式(1.39)的右端当$r \to 0$时收敛到 $\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(s,t)\, d\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(s,t)$。因此左端也收敛，这表明 $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(s,t)$ 存在，并且与右端的极限 $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(s,t)$ 一致。□

依次交换相邻的方向导数，我们很容易推得：

命题 1.3.17（施瓦茨定理）。设 E 和 F 是局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间，$U \subseteq E$ 是一个开子集，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $f\colon U \to F$ 是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-映射。设 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \leq r$。那么

$$d^{(k)} f(x, \cdot)\colon E^k \to F$$

对于每个 $x \in U$，它都是连续的对称 k-线性映射。

证明。首先我们注意到，$d^{(k)}f(x,\cdot)$作为$d^{(k)}f$的部分映射是连续的。根据引理 1.2.11，$d^{(k)}f(x, y_1, \ldots, y_k) = d(d^{(k-1)}f(\cdot, y_1, \ldots, y_{k-1}))(x, y_k)$关于 y_k是线性的。因此，如果我们能证明$d^{(k)}f(x,\cdot)$是对称的，那么 $d^{(k)}f(x,\cdot)$就是 k-线性的。我们对此关于 k使用归纳法。如果 $k = 2$，那么

$$\begin{aligned} d^{(2)} f(x, y_1, y_2) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\Big|_{s=t=0} f(x + t y_1 + s y_2) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{s=t=0} f(x + t y_1 + s y_2) \\ &= d^{(2)} f(x, y_2, y_1) \end{aligned}$$

根据引理 1.3.16。如果 $k>2$，那么

$$\begin{aligned} d^{(k)}f(x,y_1,\dots,y_{k-2},y_k,y_{k-1}) &= (D_{y_{k-1}}D_{y_k})(d^{(k-2)}f(\cdot,y_1,\dots,y_{k-2}))(x)\\ &= (D_{y_k}D_{y_{k-1}})(d^{(k-2)}f(\cdot,y_1,\dots,y_{k-2}))(x)\\ &= d^{(k)}f(x,y_1,\dots,y_k) \end{aligned}$$

根据刚才讨论的情形，并利用 $d^{(k-2)}f(\cdot,y_1,\dots,y_{k-2})$ 是 C^2。由归纳假设，对于某个 $j\in\{1,\dots,k-2\}$，交换 y_j 和 y_{j+1} 后，$d^{(k-1)}f(x,y_1,\dots,y_{k-1})$ 不变。应用 D_{y_k}，我们发现 $d^{(k)}f(x,y_1,\dots,y_k)$ 也保持不变。由于 $\{1,\dots,k\}$ 的每个置换 π 都可以写成相邻数的对换的乘积，我们由此推得 $d^{(k)}f(x,y_{\pi(1)},\dots,y_{\pi(k)})=d^{(k)}f(x,y_1,\dots,y_k)$。□

我们提及，复合的高阶微分 $d^{(k)}(g\circ f)$ 有一个简单的显式公式，可用 f 和 g 的高阶微分表示。为表述该公式，对于 $k\in\mathbb{N}$ 和 $j\in\{1,\dots,k\}$，我们将 $P_{k,j}$ 记作集合 $\{1,\dots,k\}$ 的所有划分 $P=\{I_1,\dots,I_j\}$ 所构成的集合，其中划分为 j 个非空且两两不相交的子集I_1，……，$I_j\subseteq\{1,\dots,k\}$。因此，$I_a\cap I_b=\emptyset$ 若 $a\neq b$ 且 $\{1,\dots,k\}=\bigcup_{a=1}^{j}I_a$。我们将 $|I_a|$ 记作集合 I_a 的元素个数。若 E 是一个向量空间，$y=(y_1,\dots,y_k)\in E^k$，且 $I\subseteq\{1,\dots,k\}$ 是一个非空子集，设为 $I=\{i_1,\dots,i_\ell\}$，其中 $i_1<\cdots<i_\ell$，则我们简记

$$y_I:=(y_{i_1},\dots,y_{i_\ell})\in E^\ell.$$

定理 1.3.18（法`阿·迪布鲁诺公式）。设 E、F 和 H 是局部凸空间，$U\subseteq E$ 和 $V\subseteq F$ 是开集，$k\in\mathbb{N}$ 和 $f\colon U\to V\subseteq F$、$g\colon V\to H$ 是 C^k-映射。那么

$$d^{(k)}(g\circ f)(x,y)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{P\in P_{k,j}}d^{(j)}g\big(f(x),d^{(|I_1|)}f(x,y_{I_1}),\dots,d^{(|I_j|)}f(x,y_{I_j})\big)$$

对所有 $x\in U$ 和 $y=(y_1,\dots,y_k)\in E^k$，其中 $P=\{I_1,\dots,I_j\}$，且右端有定义，不依赖于 I_1、…、I_j 的顺序。

证明。法`阿·迪布鲁诺公式的右端有定义，因为对于每个 $j\in\{1,\dots,k\}$，j-线性映射 $d^{(j)}g(f(x)\ \cdot)$ 是对称的。对于$k=1$，由链式法则可得 $d(g\circ f)(x,y)=dg(f(x)\ df(x,y))$，其形式正是所需的（因为 $P_{1,1}$ 是单点集且只包含 $P=\{\{1\}\}$）。现在假设 f 和 g 是 C^{k+1}，并假设 $d^{(k)}(g\circ f)$ 具有所述形式。若 $y=(y_1,\dots,y_k)\in E^k$ 且 $y_{k+1}\in E$，我们对 $x\in U$ 求和项求微分

$$d^{(j)}g(f(x),d^{(|I_1|)}f(x,y_{I_1}),\dots,d^{(|I_j|)}f(x,y_{I_j}))$$

以 $P=\{I_1,\dots,I_j\}\in P_{k,j}$ 为指标，在 x 处沿 y_{k+1} 方向。根据偏微分法则（命题 1.2.8）、链式法则（命题 1.2.13）以及公式 (1.25) 和 (1.28)，我们得到由 $j+1$ 项组成的和，即

$$d^{(j)}g\big(f(x), d^{(|I_1|)}f(x, y_{I_1}), \dots, d^{(|I_{a-1}|)}f(x, y_{I_{a-1}}), d^{(|I_a|+1)}f(x, y_{I_a}, y_{k+1}),$$
$$d^{(|I_{a+1}|)}f(x, y_{I_{a+1}}), \dots d^{(|I_j|)}f(x, y_{I_j})\big)$$

对于 $a \in \{1, \dots, j\}$ 和

$$d^{(j+1)}g\big(f(x), d^{(|I_1|)}f(x, y_{I_1}), \dots, d^{(|I_j|)}f(x, y_{I_j}), d^{(1)}f(x, y_{k+1})\big).$$

注意，$P = \{I_1, \dots, I_j\} \in P_{k,j}$给出由 $\{1, \dots, k+1\}$的 $j+1$ 个两两互异的划分构成的集合 P'，即

$$\{I_1, \dots, I_{a-1}, I_a \cup \{k+1\}, I_{a+1}, \dots, I_j\} \in P_{k+1,j}$$

对于 $a \in \{1, \dots, j\}$ 与$P \cup \{\{k+1\}\} \in P_{k+1,j+1}$。显然，若 Q 是 $\{1, \dots, k\}$ 的一个划分且满足 $Q \neq P$，则 $P' \cap Q' = \emptyset$。此外，$\{1, \dots, k+1\}$ 的每一个划分都是某个 $j \in \{1, \dots, k\}$ 与$P \in P_{k,j}$所对应的 P' 中的元素。因此，前述直和项恰好就是其中的直和项

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{P \in P_{k+1,j}} d^{(j)}g\big(f(x), d^{(|I_1|)}f(x, y_{I_1}), \dots, d^{(|I_j|)}f(x, y_{I_j})\big),$$

从而完成证明。 □

现在记录一些简单但非常有用的观察结果。

回顾一下，拓扑空间 X 的子集 $A \subseteq X$ 称为序列闭的，如果对其中每个在 X 中收敛的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，都有 $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$。我们主要在闭向量子空间的情形下使用以下引理，但证明中只需要序列闭性。

引理 1.3.19. 设 E 和 F 是局部凸空间，$F_0 \subseteq F$ 是序列闭向量子空间，$U \subseteq E$ 是开子集，$f\colon U \to F$ 是映射，满足 $f(U) \subseteq F_0$。设 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么，$f$ 是 C^k 当且仅当余限制 $f|^{F_0}\colon U \to F_0$ 是 C^k。

证明。如果 $f|^{F_0}$ 是 C^k，那么 $f = \lambda \circ f|^{F_0}$ 也是 C^k，因为包含映射 $\lambda\colon F_0 \to F$ 连续线性，因而 C^k。为证明逆命题，我们可以假设 k 是有限的，并使用归纳法。

若 f 是 C^1，给定 $x \in U$ 和 $y \in E$，我们选取 $\mathbb{K}^\times$ 中的一个序列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得当 $n \to \infty$ 时 $t_n \to 0$，并且对每个 n都有 $x + t_n y \in U$。于是

$$df(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\big(f(x + t_n y) - f(x)\big) \in F_0,$$

由于每个差商都包含于 F_0 中，且 F_0 在 F中按序列闭。由此立即可得，$\frac{1}{t}(f(x + ty) - f(x)) \to df(x, y)$ 属于 F_0。由于映射 $(df)|^{F_0}$是连续的，我们推得 $f|^{F_0}$是 C^1，且$d(f|^{F_0}) = (df)|^{F_0}$。

如果 f是 C^k, $d(f|^{F_0}) = (df)|^{F_0}$，那么通过归纳法可得 C^{k-1}，因此 f是 C^k。 □

下面的引理讨论到局部凸空间的射影极限的映射（参见定义 B.12.1）。我们将经常把它用作工具。

引理 1.3.20。设 E 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为一个开子集，$f\colon U \to F$ 为一个映射，并且 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。假设对于由局部凸空间和连续线性映射 $q_{ij}\colon F_j \to F_i$ 构成的射影系统 $((F_i)_{i\in I}, (q_{ij})^{i\le j})$，$F = \varprojlim F_j$，其极限映射为 $q_i\colon F \to F_i$。则 f 是 C^k 的，当且仅当对于每个 $i \in I$，$q_i \circ f\colon U \to F_i$ 是 C^k 的。

证明。如果 f 是 C^k 的，那么 $q_i \circ f$ 也是如此，因为极限映射 q_i 是连续线性映射，因而是光滑的。为证明逆向结论，不妨设 F 实现为 $\prod_{i\in I} F_i =$ 的一个闭向量子空间：P 和 $q_i = \mathrm{pr}_i|_F$。如果对每个 $i \in I$，$q_i \circ f = \mathrm{pr}_i \circ f$ 是 C^k 的，那么作为映射到 P 的映射，f 是 C^k 的（由引理 1.3.3），因而根据引理 1.3.19，作为映射到 F 的映射，C^k 也是如此。□

读者或许可以查阅附录 A.3，了解商映射的定义和基本性质，以及命题 B.3.1(c)。

引理 1.3.21。设 E 和 F 为局部凸空间，N 为 E 的闭向量子空间，且 $q\colon E \to E/N =: E_1$ 为商映射。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $f_1\colon U_1 \to F$ 为定义在开子集 $U_1 \subseteq E_1$ 上的映射。设 $U \subseteq E$ 为一个开子集，满足 q $=$ $f_1 \circ q|_U^{U_1}$ $U \to F$ C^k $(U) = U_1$。那么，f_1 是 C^k 当且仅当 f：：是。

证明。连续线性映射 q 是光滑的，因此若 f_1 是光滑的，则 f 也将是 C^k。反过来，我们可以假设 $k \in \mathbb{N}_0$；证明采用归纳法。

情形 $k = 0$。映射 $q|_U^{U_1}\colon U \to U_1$ 是连续开满射，因而是商映射。因此，若 $f = f_1 \circ q|_U^{U_1}$ 连续，则 f_1 也连续。

归纳步骤。假设对于某个 $k \ge 1$，f 是 C^k。给定 $x_1 \in U_1$ 和 $y_1 \in E_1$，我们找到 $x \in U$ 和 $y \in E$，使得 $q(x) = x_1$ 且 $q(y) = y_1$。对于满足 $x + ty \in U$ 的 $t \in \mathbb{K}^\times$，我们有 $x_1 + ty_1 = q(x + ty) \in U_1$ 且

$$\frac{1}{t}\big(f_1(x_1 + ty_1) - f_1(x_1)\big) = \frac{1}{t}\big(f(x + ty) - f(x)\big).$$

由于右端在 $t \to 0$ 时收敛到 $df(x, y)$，我们看到 $df_1(x_1, y_1)$ 存在，并且 $df_1(q(x)\ q(y)) = df(x, y)$。由于 $q \times q\colon E \times E \to E_1 \times E_1$ 是一个商映射，且 $(q \times q)(U \times E) = U_1 \times E_1$，前面的公式使我们能够将归纳假设应用于 df_1：因此 df_1 是 C^{k-1}，从而 f_1 是 C^k。□

注记 1.3.22。(a) 请注意，引理 1.3.21 并不要求 N 在 E 中可补（即定义 B.3.2 所述的意义）；如果 N 可补，那么该断言就是平凡的。尽管希尔伯特空间 E 的每个闭向量子空间 N 都可由其正交补 $N^\perp$ 补足：$= \{x \in E\colon (\forall y \in N)\ \langle x, y\rangle = 0\}$，但对于更一般的巴拿赫空间，这

一结论不再成立。例如， $c_0(\mathbb{N},\ \mathbb{R})$ 在 $\ell^\infty(\mathbb{N},\ \mathbb{R})$ 中不可补（参见 [Wer95，定理 IV.6.5]）。

(b) 若 $N \subseteq E$ 不可补，则商映射 $q\colon E \to E/N$ 在 0 附近不存在局部 C^1-截面（即存在一个映射 $\sigma\colon U \to E$，其定义在开零邻域 $U \subseteq E/N$ 上，且满足 $q \circ \sigma = \mathrm{id}_U$）。事实上，否则线性映射 $\sigma'(0)\colon E/N \to E$ 的像将是 N 在 E 中的一个补空间。尽管如此，若 E 是一个 Fr´echet 空间，则 $q\colon E \to E/N$ 总是存在一个连续 整体截面 $\sigma\colon E/N \to E$，因此它是一个拓扑 N-主丛；这由迈克尔选择定理可得（巴拿赫情形见 [MicE59]，一般结果见 [Bou87，第 II 章，第 4.7 节，命题 12]）。

含参积分可以按预期求导。下一个结果（主要将在第 2.1 节中用于研究复解析映射）可由引理1.3.15通过直接归纳法得出。

命题 1.3.23（积分号下求导）。设 E和 F 是局部凸空间， $U \subseteq E$ 是一个开子集， $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，a、 $b \in I$、 $k \in \mathbb{N}$和 $f\colon\ U \times I \to F$是一个映射，使得对每个 $t \in I$， $f(\cdot, t)\colon U \to F$都是 C^k的。我们假设这些映射

$$d_1^{(j)} f\colon U \times I \times E^j \to F\,, \quad d_1^{(j)} f(x,t,y) := d^{(j)} f(\cdot,t)(x,y) \tag{1.40}$$

对每个 $j \le k$都是连续的，并且假设弱积分

$$g(x) \ := \ \int_a^b f(x,t)\,dt \quad \textit{exists in } F$$

对每个 $x \in U$都成立，以及弱积分

$$\int_a^b d_1^{(j)} f(x,t,y)\,dt, \quad \textit{for all } j \le k,\ x \in U \ \textit{and}\ y \in E^j.$$

那么 $g\colon\ U \to F$ 是一个 C^k-映射，并且

$$d^{(j)} g(x,y) \ = \ \int_a^b d_1^{(j)} f(x,t,y)\,dt \quad \textit{for all } \ j \le k,\ x \in U \ \textit{and}\ y \in E^j. \tag{1.41}$$

注1.3.24。请注意，在命题 1.3.23 的情形下， $f(\cdot,\ t)\colon U \to F$是 C^k的，并且 (1.40) 中的映射是连续的，以下情况除外:

(a) $I \subseteq \mathbb{R}$ 是开集， $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 且映射 $f\colon\ U \times I \to F$是 C^k；则

$$d_1^{(j)} f(x,t,y_1,\ldots,y_j) \ = \ d^{(j)} f((x,t),(y_1,0),\ldots,(y_j,0))$$

对于所有 $j \le k$、 $x \in U$和 $y_1,\ldots,y_j \in E$。

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$与 $f = h|_{U\times I}$，对于一个 $C^k_{\mathbb{C}}$-映射 $h\colon\ U \times W \to F$，其中 $W \subseteq \mathbb{C}$是一个开子集，使得 $I \subseteq W$。则

$$d_1^{(j)} f(x,t,y_1,\dots,y_j) \;=\; d^{(j)} h\big((x,t),\,(y_1,0),\,\dots,\,(y_j,0)\big)\,.$$

(c) $f(x,\ t) \;=\; \beta(c(t),\,h(x,\ t))$，其中 X 与 Y 是局部凸空间，$c\colon\ I \to X$ 是连续映射，$\beta\colon\ X \times Y \to F$ 是连续双线性的，且 $h\colon\ U \times W \to Y$ 是一个 C^k-映射，其中 W 是 $\mathbb{C}$ 的开子集，当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时满足 $I \subseteq W$，相应地，当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时 $W = I$ 在 $\mathbb{R}$ 中为开。则

$$d_1^{(j)} f(x,t,y_1,\dots,y_j) \;=\; \beta\Big(c(t),\,d^{(j)} h\big((x,t),\,(y_1,0),\,\dots,\,(y_j,0)\big)\Big)\,.$$

如果 F 是序列完备的，命题 1.3.23 尤其容易应用，因为此时弱积分会自动存在（由命题 1.1.15 可知）。

第 1.3 节习题

习题 1.3.1. 设 $\lambda\colon\ E \to F$ 是一个连续线性映射，$\beta\colon\ E_1 \times E_2 \to F$ 是一个连续双线性映射，其中 E、E_1、E_2 和 F 是局部凸空间。利用上文给出的 $d\lambda$ 和 $d\beta$ 的公式，计算下列各式：

(a) $d_{(2)}\lambda$，最后求出所有 $k \geq 2$ 对应的 $d^{(k)}\lambda$。(b) $d_{(2)}\beta$、$d^{(3)}\beta$，最后求出所有 $k \geq 2$ 对应的 $d_{(k)}\beta$。

习题 1.3.2. 设 $f\colon\ U \to \mathbb{R}$ 是定义在开子集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函数，且 $k \in \mathbb{N}$。用归纳法证明，f 按照定义 1.3.1 的意义是 C^k，当且仅当 f 的所有不超过 k 阶的偏导数都存在且连续。在这种情况下，

$$d^{(k)} f(x,y_1,\dots,y_k) \;=\; \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} y_{1,j_1} \cdots y_{k,j_k}\, \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}}(x)$$

对所有 $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$ 和 $y_i = (y_{i,1},\dots,y_{i,n}) \in \mathbb{R}^n$ 对 $i = 1,\dots,k$。值域 $\mathbb{R}$ 能否替换为任意局部凸空间?

习题 1.3.3. 设 E 和 F 是局部凸空间，$F_0 \subseteq F$ 是一个向量子空间，且 $f\colon\ U \to F$ 是定义在开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 C^k-映射，并满足对所有满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}_0$，都有 $\operatorname{im}(d^{(j)} f) \subseteq F_0$。利用命题 1.3.10 的刻画，证明余限制 $f|^{F_0}\colon\ U \to F_0$ 是 C^k，其中对所有满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}$，都有 $d^{(j)}(f|^{F_0}) = (d^{(j)} f)|^{F_0}$。

习题 1.3.4. 设 E 和 F 是局部凸空间，$f\colon\ U \to F$ 是定义在开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 C^k-映射，其中 $k \in \mathbb{N}$，且 $x \in U$，$y_1,\dots,y_k \in E$。存在一个开零邻域 $V \subseteq \mathbb{K}^k$，使得对所有 $z = (z_1,\dots,z_k) \in V$，都有 $s(z)\colon = x + z_1 y_1 + \cdots + z_k y_k \in U$。验证 $h\colon\ V \to F$，$h(z) := f(s(z))$ 是 C^k，且对所有 $j \in \{1,\dots,k\}$ 和 $i_1, \dots, i_j \in \{1,\dots,k\}$ 都有 $\frac{\partial^j h}{\partial z_{i_j} \cdots \partial z_{i_1}}(z) = d^{(j)} f(s(z))(y_{i_1},\dots,y_{i_j})$。特别是，

$$\frac{\partial^k h}{\partial z_k \cdots \partial z_1}(0) \;=\; d^{(k)} f(x,y_1,\dots,y_k)\,. \tag{1.42}$$

练习 1.3.5. 设 E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个开子集，$f\colon\ U \to F$ 是一个映射，且 $(U_i)_{i \in I}$ 是 U 的一个开覆盖（即 U 的开子集 U_i 组成的一个族，其并为 U）。证明：f 是 C^k 当且仅当对于每个 $i \in I$，$f|_{U_i}$ 是 C^k。因此，具有 C^k 是一种局部性质。

练习 1.3.6. 设 E_1、 E_2、 F_1 和 F_2 是局部凸空间， $U_1 \subseteq E_1$ 和 $U_2 \subseteq E_2$ 是开子集，且 $f_1\colon U_1 \to F_1$、 $f_2\colon U_2 \to F_2$ 是 C^k 映射。证明： $f_1 \times f_2\colon U_1 \times U_2 \to F_1 \times F_2$， $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1)\ f_2(x_2))$ 是 C^k。

练习 1.3.7. 给定 $m \in \mathbb{N}$，设 $W_1, \ldots, W_m$ 和 F 为局部凸空间，且 $\beta\colon W_1 \times \cdots \times W_m \to F$ 是一个连续的 m-线性映射。对于 $j \in \mathbb{N}$，令 $\Theta_{m,j}$ 为所有满足以下条件的函数集合

$$\theta\colon \{1, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, j\}$$

使得对所有 $i \in \{1, \quad, j\}$， $\theta^{-1}(i)$ 都是单点集。证明

$$d^{(j)}\beta(y_0, \ldots, y_j) = \sum_{\theta \in \Theta_{m,j}} \beta(y_{\theta(1),1}, \ldots, y_{\theta(m),m})$$

对所有 $j \in \mathbb{N}$ 和 $y_0, \ldots, y_j \in W_1 \times \cdots \times W_m$，其中 $y_i = (y_{i,1}, \ldots, y_{i,m})$，且 $y_{i,a} \in W_a$ 对于 $i \in \{0, \ldots, j\}$ 和 $a \in \{1, \ldots, m\}$ 成立。特别地， $\Theta_{m,j} = \emptyset$，因此对所有 $j > m$， $d^{(j)}\beta = 0$。

习题 1.3.8. 设 $E_1, E_2, \ldots, E_k, E$ 和 F 都是拓扑向量空间。

(a) 利用对所有 $x_1, y_1 \in E_1, x_2, y_2 \in E_2$，都有 $\beta(y_1, y_2) - \beta(x_1, x_2) = \beta(y_1 - x_1, y_2) + \beta(x_1, y_2 - x_2)$，证明双线性映射 $\beta\colon E_1 \times E_2 \to F$ 连续，当且仅当它在 $(0, 0)$ 处连续。（进一步提示：利用每个零邻域都是吸收的，并且对所有 $(z_1, z_2) \in E_1 \times E_2$，都有 $\beta(tz_1, z_2) = \beta(z_1, tz_2)$。）

(b) 证明 k-线性映射 $\beta\colon E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ 连续，当且仅当它在 0 处连续。(c) 现在假设 $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \ldots, (E_k, \|\cdot\|_{E_k})$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 都是赋范空间。证明 k-线性映射 $\beta\colon E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ 连续，当且仅当

$$\|\beta\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|\beta(x_1, \ldots, x_k)\|_F\colon x_j \in E_j,\ \|x_j\|_{E_j} \leq 1\} < \infty.$$

那么， $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 是空间 $\mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F)$ 上的一个范数；该空间由从 $E_1 \times \cdots \times E_k$ 到 F 的所有连续 k-线性映射构成，并且

$$\|\beta(x_1, \ldots, x_k)\|_F \leq \|\beta\|_{\mathrm{op}} \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_k\|_{E_k}$$

对所有 $\beta \in \mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F)$ 和 $x_j \in E_j$ 均成立（参见引理 B.11.3）。

习题 1.3.9。每个含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ （如注 B.11.6 所述）都是连续逆代数：

(a) 证明乘法是连续的。因此， $\mathcal{A}$ 是一个拓扑代数。(b) 证明“Neumann 级数” $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ （其名称源自 Carl Gottfried Neumann）在 $B_1^{\mathcal{A}}(0)$ 上一致收敛，从而 $f\colon B_1^{\mathcal{A}}(0) \to \mathcal{A}$, $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ 是连续的。计算 $f(x)(\mathbf{1} - x)$ 和 $(\mathbf{1} - x)f(x)$。推导出 $\mathbf{1} - x \in \mathcal{A}^\times$，并且

$$(\mathbf{1} - x)^{-1} = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{for all } x \in B_1^{\mathcal{A}}(0). \tag{1.43}$$

因此 $B_1^{\mathcal{A}}(\mathbf{1}) \subseteq \mathcal{A}^\times$ 和 $\iota\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}$, $\iota(x) := x^{-1}$ 在 $B_1^{\mathcal{A}}(\mathbf{1})$ 上连续。由此容易得出， $\mathcal{A}^\times$ 是开集且 ι 连续（见引理 2.2.14）。

(c) 利用 (1.43)，证明对于所有 $x \in B_1^{\mathcal{A}}(0)$， $\|(\mathbf{1} - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}$。

习题 1.3.10. 设 E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 为开集，且对于 $x \in U$，$k \in \mathbb{N}$ 和 $A_x\colon F \to F$ 是拓扑向量空间的同构，使得

$$f\colon U \times F \to F, \quad f(x,y) := A_x(y)$$

是 C^k $g\ U \times F \to F\ g\ x\ y\ =\ A_x\ ^{-1}\ y$ g C^k。证明：若 : , (,) : ( ) ( ) 连续，则 [1 29 1 3 6] 是 reuse (.)，并采用命题 . . . 证明中的其他思路。

1.4 非开域上的微分学

除曲线的情形外，到目前为止我们只考虑了开域上的 C^k-映射。本节将拓展这一理论，并在局部凸空间 E 的适当（但不一定是开）子集上定义和研究 C^k-映射。特别是，我们的方法涵盖立方体上的 C^k-映射

$$[0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n,$$

半空间

$$\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty[\subseteq \mathbb{R}^n,$$

以及类似集合。这对无限维李理论至关重要。例如，我们关于“正则”李群（无限维李群中一类性质良好的群）的讨论将涉及 $[0,1]$ 和 $[0,1]^2$ 上的映射。此外，闭半空间的开子集上的映射也很重要，因为“带边界流形”是以这类集合为模型的。

更准确地说，我们考虑映射 $f\colon\ U \to F$ 到局部凸空间 F，其定义在具有稠密内部的局部凸子集 $U \subseteq E$ 上。关键在于，这类映射仍然适用某种形式的中值定理。因此，链式法则及其他基本事实基本上都可以像在开域情形下那样得到证明。我们先定义并讨论这种新类型的定义域，然后再转向定义在其上的函数。

定义 1.4.1. 设 E 是一个局部凸空间。若子集 $U \subseteq E$ 中的每个点 $x \in U$ 在 U 中都有一个凸邻域 V，则称 $U \subseteq E$ **局部凸**。

注 1.4.2.例如，E 的每个凸子集都是局部凸的，任何开子集也都是如此。此外，有限多个局部凸子集的交仍是局部凸的。例如，对于任意凸子集 $C \subseteq E$ 和开子集 $U \subseteq E$，$C \cap U$ 都是局部凸的。特别地，$\mathbb{R}^n$ 中闭半空间的每个（相对）开子集都是局部凸的。我们指出，每个连通、闭且局部凸的子集 $U \subseteq E$ 都是凸的（见习题 1.4.1）。

注 1.4.3。在定义 1.4.1 中，我们总可以使 V 在 U 中是开集。事实上，由于 E 是局部凸的，在 E 中存在 x 的开凸邻域 W，使得 $U \cap W \subseteq V$。于是 $U \cap W = V \cap W$ 是 U 中 x 的凸开邻域。取充分小的 W，我们实际上可以看到，x 的每个邻域 $P \subseteq U$ 都包含一个开凸邻域。

如果 E 是局部凸空间，我们用 U^0 表示子集 $U \subseteq E$ 的内部（相对于 E）。如果 U^0 在 U 中稠密，我们就说 U 具有稠密内部。

定义 1.4.4. 设 E 和 F 是局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间，$U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集。若映射 $f\colon U \to F$ 连续，$f|_{U^0}$ 是 C^1，且 $d(f|_{U^0})\colon U^0 \times E \to F$ 可延拓为一个（必然唯一的）连续映射，则称其为 C^1

$$df\colon U \times E \to F.$$

若 f 连续，我们称 f 为 C^0。若 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \geq 2$，则当 f 是 C^1 且 df 是 C^{k-1} 时，我们称 f 为 C^k（注意，$U \times E$ 是 $E \times E$ 中的一个具有稠密内部的局部凸子集）。若对所有 $k \in \mathbb{N}_0$，f 都是 C^k，则称 f 为光滑的，或称其为 C^∞。

引理 1.4.5. 设 E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么，$f$ 是 C^k 当且仅当 $f|_{U^0}$ 是 C^k，并且 $d^{(j)}(f|_{U^0})$ 存在一个（必然唯一）连续延拓

$$d^{(j)}f\colon U \times E^j \to F$$

对所有满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}$。

证明。我们可以假设 $k \in \mathbb{N}$。若 $k = 1$，则由定义可得结论。对于 $k \geq 2$，我们现在证明第二个条件的必要性（充分性将在命题 1.4.10 之后证明）。为此，假设 f 是 C^k。那么 $f|_{U^0}$ 是具有 $d(f|_{U_0})$ 的 C^1，是一个 C^{k-1}-映射，因此 $f|_{U^0}$ 是 C^k。由于 f 尤其是 C^{k-1}，由归纳法可知，存在 $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ 的连续延拓 $d^{(j)}f$。此外，df 是 C^{k-1}，因此（由归纳法）存在 $d^{(k-1)}(df|_{U^0 \times E})$ 的连续延拓 $d^{(k-1)}(df)$。回想一下

$$d^{(k)}(f|_{U^0})(x, y_1, \ldots, y_k) = d^{(k-1)}(d(f|_{U^0}))((x, y_1), (y_2, 0), \ldots, (y_k, 0))$$

对所有 $x \in U^0$ 和 $y_1, \ldots, y_k \in E$，我们得到 $d^{(k)}f\colon U \times E^k \to F$，

$$(x, y_1, \ldots, y_k) \mapsto d^{(k-1)}(df)((x, y_1), (y_2, 0), \ldots, (y_k, 0))$$

是 $d^{(k)}(f|_{U^0})$ 的连续延拓。 □

到乘积的映射是 C^r 当且仅当其每个分量也如此。

引理 1.4.6（到积的映射）。 设 E 为一个局部凸空间，$(F_j)_{j \in J}$ 为一个局部凸空间族，且 $f\colon U \to \prod_{j \in J} F_j =: F$ 是定义在具有稠密内部的局部凸子集 $U \subseteq E$ 上的映射。对 $j \in J$，令 $\mathrm{pr}_j\colon F \to F_j$ 为到第 j 个分量的投影。设 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么，$f$ 是 C^r 的，当且仅当对每个 $j \in J$，$f_j := \mathrm{pr}_j \circ f\colon U \to F_j$ 是 C^r。在这种情况下，我们有

$$d^{(k)}f = (d^{(k)}f_j)_{j \in J} \text{ for all } k \in \mathbb{N} \text{ such that } k \leq r. \tag{1.44}$$

证明。我们不妨假设 r 是有限的。如果每个 f_j 都是 C^r，那么 $f=(f_j)_{j\in J}$是连续的。此外，$f_j|_{U^0}$ 是 C^r，因此由引理 1.3.3，$f|_{U^0}=(f_j|_{U^0})_{j\in J}$ 是 C^r，其中

$$d(f|_{U^0})=(d(f_j|_{U^0}))_{j\in J}=((df_j)|_{U^0\times E})_{j\in J}.$$

由于连续映射 $df:=(df_j)_{j\in J}$ 延拓到 $d(f|_{U^0})$，我们看到 f 是 C^1。若 $r\geq 2$，则 $df=(d(f_j))_{j\in J}$ 由归纳法可知是 C^{r-1}，因此 f 是 C^r。

反之，若 f 是 C^r，则每个 f_j 都连续。此外，$f|_{U^0}$ 是 C^1，因此 $f_j|_{U^0}$ 是 C^1。由于 $(df)|_{U^0\times E}=d(f|_{U^0})=(d(f_j|_{U^0}))_{j\in J}$ 由引理 1.3.3 可知，我们看到连续映射 $\mathrm{pr}_j\circ df$ 延拓到 $d(f_j|_{U^0})$。因此 f_j 是 C^1，并且

$$df=(df_j)_{j\in J}. \tag{1.45}$$

由于 df 是 C^{r-1}，我们由 (1.45) 和归纳假设推出 df_j 是 C^{r-1}。因此 f_j 是 C^r。□

引理 1.4.7。若 E 和 F 是局部凸空间，$U\subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$r\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 且 $f\colon U\to F$ 是一个 C^r-映射，则

$$d^{(k)}f(x,\cdot)\colon E^k\to F$$

对每个满足 $k\leq r$ 和 $x\in U$ 的 $k\in\mathbb{N}$，它都是连续的对称 k-线性映射。

证明。由于 $d^{(k)}f$ 是连续的，$d^{(k)}f(x,\cdot)$ 也连续。由于 U^0 在 U 中稠密，并且对每个 $y\in E^k$，$d^{(k)}f(\cdot,y)$ 都是连续的，因此当 $x\in U$ 时，$d^{(k)}f(x,\cdot)$ 的多线性和对称性可由 $x\in U^0$ 的相应性质推出。下面更详细地说明 $d^{(k)}(x,y_1,\ldots,y_k)$ 关于 y_1 的线性；其他性质也可用类似方式证明。设 $y_j\in E_j$，其中 $j\in\{1,\ldots,k\}$、$z_1\in E_1$ 且 $t\in\mathbb{K}$。那么

$$\begin{aligned} &x\mapsto d^{(k)}f(x,y_1+tz_1,y_2,\ldots,y_k) \qquad \text{and}\\ &x\mapsto d^{(k)}f(x,y_1,\ldots,y_k)+td^{(k)}f(x,z_1,y_2,\ldots,y_k)\end{aligned}$$

是从 U 到豪斯多夫空间 F 的连续函数，它们在 U 的稠密子集 U^0 上相等。因此，这两个函数处处相等，于是 $d^{(k)}f(x,\ y_1+tz_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)=d^{(k)}f(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)+td^{(k)}f(x,\ z_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)$ 对所有 $x\in U$ 都成立。□

中值定理对于稠密内部的局部凸子集上的映射仍然成立，这一点至关重要。

命题 1.4.8。设 E 和 F 是局部凸空间，且 $f\colon U\to F$ 是定义在具有稠密内部的局部凸子集 $U\subseteq E$ 上的一个 C^1-映射。那么

$$f(y)-f(x)\ =\ \int_0^1 df(x+t(y-x),y-x)\,dt \tag{1.46}$$

对于所有满足 U 包含线段 $[x,y]$ 的 x、$y\in U$。

证明。 我们先考虑特殊情形： U 是 E的一个凸子集，其内部非空（因此根据引理 B.1.3(c)，它在 U中稠密）。我们~选择 F 的一个完备化 F，使其满足 $F \subseteq F$。根据关于参数依赖积分的引理 1.1.11，函数

$$h\colon U \times U \to \widetilde{F}, \quad h(u,v) := \int_0^1 df(u + t(v-u), v-u)\, dt$$

是连续的。根据命题 1.2.6，对于所有$u, v \in U^0$，我们有 $h(u,v) = f(v) - f(u)$。由于 $U^0 \times U^0$ 在 $U \times U$ 中稠密，且 h 和映射 $(u,v) \mapsto f(v) - f(u)$ 都是连续的，我们推出对于所有 $u, v \in U$， $h(u,v) = f(v) - f(u)$。特别地， $h(u,v) \in F$，且 (1.46) 对所有 x, $y \in U$ 都成立。

一般情形：设 $U \subseteq E$ 如命题中所述，并令 $x, y \in U$ 使得 $[x,y] \subseteq U$。每个 $z \in [x,y]$ 在 U 中都有一个凸开邻域。由紧致性论证可得 $[0,1]$ 的一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$，使得令 $z_j := x + t_j(y-x)$ 后，对于某个 U 中的开凸子集 V_j，有 $[z_j, z_{j+1}] \subseteq V_j$。由于 U 具有稠密内部，因此每个 V_j 也具有稠密内部。根据前面已经处理的特殊情形，

$$f(z_{j+1}) - f(z_j) = \int_0^1 df(z_j + s(z_{j+1} - z_j), z_{j+1} - z_j)\, ds \tag{1.47}$$

对每个 j。将 (1.47) 中的 $z_{j+1} - z_j = (t_{j+1} - t_j)(y-x)$ 重新写为

$$\begin{aligned} f(z_{j+1}) - f(z_j) &= (t_{j+1} - t_j) \int_0^1 df\big(x + (t_j + s(t_{j+1} - t_j))\,(y-x),\, y-x\big) ds \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} df(x + t(y-x), y-x)\, dt\,, \end{aligned}$$

其中我们使用代换 $t = t_j + s(t_{j+1} - t_j)$ 得到最后一行（换元法则见习题 1.1.2(d)），并使用了引理 1.4.7 中的齐性。由于

$$f(y) - f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (f(z_{j+1}) - f(z_j)),$$

现在我们得到 (1.46)。 □

引理 1.4.9。 设 E, F 是局部凸 $\mathbb{K}$-向量空间， $U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸集，且 $f\colon U \to F$ 是连续映射。那么 f 是 C^1 当且仅当存在连续映射 $f^{[1]}\colon U^{[1]} \to F$，定义在

$$U^{[1]} := \{(x,y,t) \in U \times E \times \mathbb{K} \colon x + ty \in U\} \tag{1.48}$$

使得

$$f^{[1]}(x,y,t) = \frac{1}{t}\big(f(x+ty) - f(x)\big)$$

对于所有$(x, y, t) \in U^{[1]}$使得 $t \neq 0$。

证明。 若存在 $f^{[1]}$，则其在 $(U^0)^{[1]}$ 上的限制是一个连续映射 $(f|_{U^0})^{[1]}$，它延拓了 $f|_{U^0}$ 的有向差商。因此，根据引理 1.2.10， $f|_{U^0}$ 是 C^1，其中

$$df(x,y) = f^{[1]}(x,y,0) \tag{1.49}$$

对所有 $(x,\ y) \in U^0 \times E$。由于 (1.49) 可用于定义一个连续函数$df\colon\ U \times E \to F$，它延拓了 $df|_{U^0}$，因此我们看到 f 是 C^1。

反过来，如果 f 是 C^1，我们定义

$$f^{[1]}\colon U^{[1]} \to F\,, \qquad f^{[1]}(x,y,t) \ := \begin{cases} \frac{1}{t}\big(f(x+ty) - f(x)\big) & \text{if } t \neq 0; \\ df(x,y) & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

那么 $f^{[1]}$ 是连续的。事实上，由于 f 是连续的，映射 $f^{[1]}$ 在满足 $t_0 \neq 0$ 的每个 $(x_0,y_0,t_0) \in U^{[1]}$ 处连续。给定 $(x_0,y_0) \in U \times E$，存在 x_0 在 U 中的一个凸邻域 V。令 W 为 x_0 在 E 中的一个邻域，使得 $W \cap U \subseteq V$。存在 x_0 的邻域 X 和 y_0 在 E 中的邻域 Y，以及 $\varepsilon > 0$，使得 $X + \mathbb{D}_\varepsilon Y \subseteq W$，其中 $\mathbb{D}_\varepsilon := \{t \in \mathbb{K}\colon |t| \leq \varepsilon\}$。于是 $X \subseteq X + \mathbb{D}_\varepsilon Y \subseteq W$ 且 $(X + \mathbb{D}_\varepsilon Y) \cap U \subseteq W \cap U \subseteq V$。因此，对于邻域 $Q := U^{[1]} \cap (X \times Y \times \mathbb{D}_\varepsilon)$ 中的每个 (x,y,t)，该邻域是 $U^{[1]}$ 中 $(x_0,y_0,0)$ 的邻域，我们有 $x, x+ty \in (X + \mathbb{D}_\varepsilon Y) \cap U \subseteq V$，从而有 $[x, x+ty] \subseteq V$，因为 V 是凸的。现在可以逐字照搬 (1.18) 以及引理 1.2.10 证明的其余部分。□

因此，对于定义在具有稠密内部的局部凸子集上的映射，链式法则仍然成立：

命题 1.4.10. 设 E, F, G 是局部凸空间， $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ 是具有稠密内部的局部凸集，且 $f\colon\ U \to F$, $g\colon\ V \to G$ 是 C^k-映射，使得 $f(U) \subseteq V$，其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么 $g \circ f\colon\ U \to G$ 也是 C^k，并且

$$d(g \circ f)(x,y) = dg(f(x), df(x,y)) \ \textit{ for all } (x,y) \in U \times E.$$

证明。 不妨设 $k \in \mathbb{N}$，并进行归纳。情形$k = 1$ 可仿照命题 1.2.13 证明，其中用引理 1.4.9 代替引理 1.2.10。归纳步骤可仿照命题 1.3.4 的证明进行，其中用引理 1.4.6 代替引理 1.3.3。□

命题 1.4.11（偏微分法则）。设 E_1、 E_2 和 F 为局部凸空间， $U \subseteq E_1 \times E_2$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 $f\colon\ U \to F$ 为连续映射。那么， f 是 C^1 当且仅当对

$$d_1 f(x_1,x_2,h_1) \ := \ \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_1 + th_1, x_2) - f(x_1,x_2)\big)$$

and

$$d_2 f(x_1,x_2,h_2) \ := \ \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_1, x_2 + th_2) - f(x_1,x_2)\big)$$

所有 $(x_1, x_2) \in U^0$、 $h_1 \in E_1$ 和 $h_2 \in E_2$，相应的极限均存在，并且可延拓为连续映射 $d_j f\colon U \times E_j \to F$（对于 $j \in \{1,2\}$）。此时有

$$df(x_1, x_2, h_1, h_2) = d_1 f(x_1, x_2, h_1) + d_2 f(x_1, x_2, h_2) \tag{1.50}$$

对所有 $(x_1, x_2) \in U$ 以及 $h_1 \in E_1, h_2 \in E_2$。

证明。 如果 f 是 C^1，那么命题中所述的极限存在；此外，(1.12) 和 (1.13) 分别定义了连续延拓 $d_1 f$ 和 $d_2 f$，且 (1.50) 成立。反之，如果极限和连续延拓 $d_1 f$ 和 $d_2 f$存在，那么 $f|_{U^0}$ 是 C^1 且

$$d(f|_{U^0})(x_1, x_2, h_1, h_2) = d_1 f(x_1, x_2, h_1) + d_2 f(x_1, x_2, h_2)$$

对所有 $(x_1, x_2) \in U^0$ 以及 $h_1 \in E_1, h_2 \in E_2$，由命题 1.2.8 可知。因此，若我们通过 (1.50) 定义 $df\colon U \times (E_1 \times E_2) \to F$，则 df 连续，且延拓了$d(f|_{U^0})$。因此 f 是 C^1，且 (1.50) 成立。□

注 1.4.12. 关于在第二个变量中 ℓ-线性的映射 $f\colon U \times (W_1 \times \cdots \times W_\ell) \to F$ 的引理 1.3.12 可推广到 $U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸集的情形。

事实上，在这种情况下，对所有 (x, w, h)，$d_2 f(x, w, h)$ 都存在，并由 (1.32) 给出，而 (1.33) 则给出了连续延拓 $d_2 f$。现在用引理 1.4.11 代替引理 1.2.8，可知 f 是 C^1，且 (1.34) 成立。与引理 1.3.12 的证明一样，我们可知映射 $d_1 f(x, \cdot)$ 对稠密子集 $U^0 \subseteq U$ 中的所有x 均为 ℓ-线性的，因此由 $d_1 f$ 的连续性，对所有 $x \in U$ 也成立（参见引理 1.4.7 的证明）。将命题 1.3.4 替换为命题 1.4.10 后，引理 1.3.12 证明的其余部分仍然适用。

引理 1.4.5 的证明，完毕。设 $k \geq 2$，并假设对于 $j \in \{1, \ldots, k\}$，连续延拓 $d^{(j)} f$存在。那么，根据归纳法的基例，f是 C^1。连续映射 $df\colon U \times E \to F$ 关于第二个变量是线性的，并且存在连续微分 $d_{(j)1}(df)$，对 $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ 均成立。因此，df 是 C^{k-1}（见注 1.4.12），从而 f 是 C^k。□

我们的 C^k-映射概念与曲线的术语相容：

引理 1.4.13。设 E 是一个局部凸空间，$k \in \mathbb{N}$ 和 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是非退化区间。那么，映射 $\gamma\colon I \to E$ 是一个 C^k-曲线（如定义 1.1.1中所述），当且仅当 γ 是定义1.4.4意义下的 C^k-映射。在这种情况下，

$$d\gamma(s, r) = r\,\gamma'(s) \quad \textit{for all } s \in I \textit{ and } r \in \mathbb{R}. \tag{1.51}$$

证明。设 γ 是一条 C^1-曲线。根据引理 1.2.5，$\gamma|_{I_0}$ 是一个 C^1-映射，并且对于所有 $(s, r) \in I^0 \times \mathbb{R}$，有 $d(\gamma|_{I^0})(s, r) = r\gamma'(s)$。由于连续映射 $I \times \mathbb{R} \to F$，$(s, r) \mapsto r\gamma'(s)$ 延拓为 $d(\gamma|_{I^0})$，我们看到 γ 是一个 C^1-映射，且 (1.51) 成立。

反之，假设映射 γ 是 C^1。对于每个 $s \in I$ 和 $0 \neq t \in I - s$，我们有 $s + [0,1]t \subseteq I$，因此

$$\frac{\gamma(s+t) - \gamma(s)}{t} \;=\; \int_0^1 d\gamma(s + rt, 1)\, dr$$

由命题 1.4.8 和引理 1.4.7 可得。映射 $h\colon (I - s) \times [0,1] \to E, h(t,r) := d\gamma(s + rt, 1)$ 连续。由引理 1.1.11 可知，映射 $g\colon I - s \to E,\ g(t) := \int_0^1 h(t,r)\, dr$ 连续（注意，对于 $t = 0$，弱积分也存在，因为 $h(0,\cdot)$ 是常数）。因此，$\frac{1}{t}(\gamma(s+t) - \gamma(s)) = g(t) \to g(0) = h(0,0) = d\gamma(s,1)$，因为 $t \to 0$，这意味着 $\gamma'(s)$ 存在，且由 $\gamma'(s) = d\gamma(s,1)$ 给出，因而连续。于是 γ 是一个 C^1-曲线。□

下面的引理将用于拼接微分方程的解（例如，参见注 2.4.5(a)）。在第 2.6 节中，它还将帮助我们为某些无限多边形找到光滑参数化。

引理 1.4.14. 设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，$t_0 \in I$、$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $\gamma\colon I \to E$ 是到局部凸空间 E 的连续映射，使得 $\gamma|_{I \setminus \{t_0\}}$ 是 C^k，并且对于所有满足 $j \leq k$ 的 $t \neq t_0$，极限 $\lambda_j := \lim_{t \to t_0} \gamma^{(j)}(t)$ 都存在。那么 γ 是 C^k，且对于所有满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}$，都有 $\gamma^{(j)}(t_0) = \lambda_j$。

证明。假设 t_0 是 I 的内点（排除的情形类似且更简单）。不妨设 $k < \infty$，并用归纳法进行证明。情形 $k = 1$：根据假设，$\eta := \gamma|_{I \cap [t_0, \infty[}$ 是定义 1.4.4 意义下的 C^1-映射，因而是 C^1-曲线（引理 1.4.13）。于是 $\eta'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \gamma'(t) = \lambda_1$。同理，$\zeta := \gamma|_{I \cap]-\infty, t_0]}$ 是一条 C^1-曲线，且满足 $\zeta'(t_0) = \lambda_1$。由于 γ 在 t_0 处的左单侧导数和右单侧导数都存在且值相同，均为 λ_1，因此导数 $\gamma'(t_0)$ 存在，且等于 λ_1。因此 γ' 连续，从而 γ 是 C^1。归纳步骤：设 $k > 1$，并假设将 k 替换为 $k-1$ 时断言成立。根据情形 $k = 1$，γ 是 C^1，且 $\gamma'(t_0) = \lambda_1$。对于 $j \in \{1, \ldots, k-1\}$，将 γ 替换为 γ'、将 λ_j 替换为 λ_{j+1}，即可应用归纳假设。因此 γ' 是 C^{k-1}（由此 γ 是 C^k），并且对于所有 $j \in \{1, \ldots, k-1\}$，都有 $\gamma^{(j+1)}(t_0) = (\gamma')^{(j)}(t_0) = \lambda_{j+1}$，归纳证明至此完成。□

注 1.4.15. 开域上微积分的许多结果可以直接推广到具有稠密内部的局部凸域，或者只需明确写出一个显然的连续延拓候选。例如：

(a) 引理 1.2.7 中关于局部常数 C^1-函数的刻画，在 $U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集时仍然成立（证明可以逐字重复）。

(b) 命题 1.3.23（关于积分号下求导）的结论仍然成立，即使 $U \subseteq E$ 只是具有稠密内部的局部凸子集。事实上，(1.41) 描述了 $g|_{U^0}$ 的高阶微分；

由于 (1.41) 右端的积分给出了 $U \times E^j \to F$ 的连续延拓，故由引理 1.4.5 可知 g 是 C^k。

(c) Fa`a di Bruno 公式（如定理 1.3.18）在 U 和 V仅为具有稠密内部的局部凸子集时仍然成立（因为该公式对 $(x,y) \in U^0 \times E^k$ 成立，且其右端给出了到整个 $U \times E^k$上的连续延拓，而该延拓必与 $d^{(k)}(g \circ f)$一致）。

下面给出引理 1.3.19 的一个类似结论。

引理 1.4.16. 设 E 和 F 为局部凸空间，$f\colon U \to F$ 为定义在具有稠密内部的局部凸子集 $U \subseteq E$ 上的映射，$F_0 \subseteq F$ 为序列闭向量子空间，且 $f(U) \subseteq F_0$，并且 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么，$f$是 C^k，当且仅当其余限制 $f|^{F_0}\colon U \to F_0$ 是 C^k。

证明。如果 $f|^{F_0}$是 C^k，那么 $f = \lambda \circ f|^{F_0}$也是 C^k，包含映射 $\lambda\colon F_0 \to F$是连续线性的，因而是 C^k。反之，如果 f是 C^k，那么根据引理 1.3.19，$f|^{F_0}_{U^0}$是 C^k，其中 $d^{(j)}(f|^{F_0}_{U^0}) = (d^{(j)}(f|_{U^0}))|^{F_0}$对所有满足 $j \leq k$的 $j \in \mathbb{N}$均成立。给定 $(x,y) \in U \times E^j$，我们取 $V \subseteq U$的一个凸邻域 x。由于 U^0在 U中稠密，因此有 $V^0 \neq \emptyset$。令 $z \in V^0$。于是

$$x_n := z + (1 - 2^{-n})(x - z) \in V^0 \subseteq U^0$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ （参见引理 B.1.3(b) 的证明），从而

$$d^{(j)} f(x,y) \;=\; \lim_{n\to\infty} d^{(j)} f(x_n, y) \;\in\; F_0$$

由于 $d^{(j)}f(x_n,y) \in F_0$对每个 n均成立，并且 F_0是序列闭的。因此，$d^{(j)}f$的值属于 F_0，从而 $(d^{(j)}f)|^{F_0}$是 $d^{(j)}(f|^{F_0}_{U^0})$ 的一个连续延拓。因此，$f|^{F_0}$是 C^k。□

本节的其余部分汇集了更为专门的辅助结果；我们建议以后仅在正文中实际用到这些结果时再阅读它们。

下一条引理将实可微性与复可微性联系起来。我们将在引理 1.4.18 与 1.4.19 的证明中，以及第 1.7 节中把它用作工具。这一主题将在命题 2.1.6、推论 2.1.9 和定理 2.1.12 中继续讨论。关于复可微映射的更全面讨论，见第 2.1 节。

引理 1.4.17.设 E 与 F 为复局部凸空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。则映射$f\colon U \to F$为 $C^k_{\mathbb{C}}$，当且仅当 f 为 $C^k_{\mathbb{R}}$，并且对每个 $x \in U$，$df(x,\cdot)\colon E \to F$ 是复线性的。

证明。从定义可知，每个 $C^k_{\mathbb{C}}$-映射 f 都是 $C^k_{\mathbb{R}}$，且具有相同的微分 $d^{(j)}f$，其中 $j \in \mathbb{N}_0$ 满足 $j \leq k$。特别地，根据引理 1.4.7，$df(x,\cdot)$ 是复线性的。

反过来，假设 f 是 $C^k_{\mathbb{R}}$，并且对每个 $x \in U$， $df(x,\cdot)$ 都是 $\mathbb{C}$-线性的。接着，简单的归纳法表明，对于所有如前所述的 j， $d^{(j)}f(x,y_1,\dots,y_j)$ 关于 y_1 都是 $\mathbb{C}$-线性的；而且 $x \in U$ 和 $y_1,\dots,y_j \in E$ 也是如此（因为它们是关于 y_1 为 $\mathbb{C}$-线性的差商的极限）。由于 $d^{(j)}f(x,\cdot)\colon E^j \to F$ 是对称的，我们推得 $d^{(j)}f(x,\cdot)$ 是复 j-线性的。接下来只需证明

$$d^{(j)}f(x,y_1,\dots,y_j) = D_{y_j}(d^{(j-1)}f(\cdot,y_1,\dots,y_{j-1}))(x)$$

作为复方向导数，对所有 $x \in U^0$ 和 $y_1, \dots, y_j \in E$ 均成立。对于某个 $r > 0$，我们有 $x + \mathbb{D}_r y_j \subseteq U$。由中值定理，

$$\begin{aligned}\Delta_z &:= \frac{d^{(j-1)}f(x+zy_j,y_1,\dots y_{j-1}) - d^{(j-1)}f(x,y_1,\dots,y_{j-1})}{z}\\ &= \frac{1}{z}\int_0^1 d^{(j)}f(x+tzy_j,y_1,\dots,y_{j-1},zy_j)\,dt\end{aligned}$$

对于 $z \in \mathbb{D}_r \setminus \{0\}$。由于 $d^{(j)}f$ 关于其最后一个参数具有 $\mathbb{C}$-线性，z 相消。因此

$$\Delta_z = \int_0^1 d^{(j)}f(x+tzy_j,y_1,\dots,y_j)\,dt,$$

根据积分对参数的连续依赖性（引理 1.1.11），当 $z \to 0$ 时，它收敛到 $\int_0^1 d^{(j)}f(x, y_1, \dots, y_j)\,dt = d^{(j)}f(x, y_1, \dots, y_j)$。□

我们来检验，在某些情况下，C^k-性质是否在取极限时得以保留。这将在引理 1.7.18 的证明中用到。

引理 1.4.18。设 X 为拓扑空间，$x_0 \in X$ 为聚点，[8] E 和 F 为局部凸空间，$V \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $f\colon X \times V \to F$ 为连续映射。对于 $x \in X$，简记 $f_x := f(x,\cdot)\colon V \to F$。假设

(a) 对于每个 $x \in X \setminus \{x_0\}$，映射 f_x 是 C^k；并且(b) 对于每个满足 $j \le k$ 的 $j \in \mathbb{N}$，存在连续映射 $g_j\colon X \times V \times E^j \to F$，使得对于所有 $x \in X \setminus \{x_0\}$、$y \in V$ 和 $w \in E^j$，$g_j(x,y,w) = d^{(j)}(f_x)(y,w)$ 成立。

那么 f_{x_0} 也是 C^k，并且对于所有满足 $j \le k$ 的 $j \in \mathbb{N}$，$d^{(j)}(f_{x_0}) = g_j(x_0,\cdot)$。

证明。如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，且该断言在实数情形下成立，那么 f_{x_0} 是 $C^k_{\mathbb{R}}$，并且 $d(f_{x_0})(y, w) = g_1(x_0, y, w)$ 在 $w \in E$ 上是复线性的（因为它是当 $x \to x_0$ 且满足 $x \in X \setminus \{x_0\}$ 时，$g_1(x, y, w) = d(f_x)(y, w)$ 的极限）。因此，根据引理 1.4.17，f_{x_0} 是 $C^k_{\mathbb{C}}$。

因此，我们现在可以假设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。我们还可以假设 $k \in \mathbb{N}$，并通过归纳法继续。如果 $k = 1$、$y \in V^0$ 且 $w \in E$，则存在 $r > 0$ 使得 $y +]-r, r[\, w \subseteq V^0$。令 $\widetilde{F}$ 为 F 的一个完备化，且满足 $F \subseteq \widetilde{F}$。该映射

[8] 因此，对于 x_0 的每个邻域 $U \subseteq X$，$U \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$。

$$h_1\colon X\times]-r,r[\to \widetilde{F},\quad (x,t)\mapsto f(x,y)+\int_0^1 g_1(x,y+stw,tw)\,ds$$

根据引理 1.1.11，该映射是连续的。此外

$$h_2\colon X\times]-r,r[\to \widetilde{F},\quad (x,t)\mapsto f(x,y+tw)$$

是连续的。现在，根据中值定理，对所有 $x\in X\setminus\{x_0\}$ and $t\in]-r,r[$，有 $h_1(x,t)=h_2(x,t)$。由于 $(X\setminus\{x_0\})\times]-r,r[$ 在 $X\times]-r,r[$ 中稠密，这意味着 $h_1=h_2$。因此

$$\begin{aligned} f_{x_0}(y+tw) &= f(x_0,y)+\int_0^1 g_1(x_0,y+stw,tw)\,ds\\ &= f(x_0,y)+\int_0^t g_1(x_0,y+\tau w,w)\,d\tau, \end{aligned}$$

其中我们代入了 $\tau=st$。基本定理（命题 1.1.12）的第二部分现在表明，$]-r,r[\to F,\ t\mapsto f_{x_0}(y+tw)$ 是 C^1，且 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} f_{x_0}(y+tw)=g_1(x_0,y,w)$。特别地，$d(f_{x_0})(y,w)$ 存在，并且与 $g_1(x_0,y,w)$ 一致。由于 g_1 连续，结论得证。

若 $k\geq 2$，且将 $k-1$ 替换为 k 后命题成立，则对函数应用相同的论证

$$d^{(k-1)}(f_x)(y,w_1,\ldots,w_{k-1})=g_{k-1}(x,y,w_1,\ldots,w_{k-1})$$

$x\in X$ 与 $y\in V^0$ 的（固定 w_1、.....、$w_{k-1}\in E$）函数，以此可知，对每个 $w_k\in E$，方向导数 $d^{(k)}(f_{x_0})(y$、w_1、.....、$w_k)$ 都存在，且等于 $g_k(x_0$、y、w_1、.....、$w_k)$。由于 g_k 连续，命题得证。□

下一个引理只会用到一次（在命题 2.3.17 的证明中）。

引理 1.4.19. 设 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 是向量空间 F 上的两个拓扑，使其成为局部凸空间，并且 $\mathcal{O}_1\subseteq\mathcal{O}_2$，且 $(F,\mathcal{O}_2)$ 序列完备(或积分完备)。

(a) 设 $\gamma\colon [a,b]\to(F,\mathcal{O}_1)$ 是一条 C^1-曲线，且 γ' 作为映射 $[a,b]\to(F,\mathcal{O}_2)$ 连续。那么 γ 作为映射到 $(F,\mathcal{O}_2)$ 也连续，且导数相同。*(b)* 设 E 是局部凸空间，$U\subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$k\in\mathbb{N}$，且 $f\colon U\to(F,\mathcal{O}_1)$ 是一个 C^k-映射，作为映射到 $(F,\mathcal{O}_2)$ 连续。若 $d^{(k)}f$ 作为映射到 $(F,\mathcal{O}_2)$ 连续，则 f 作为映射到 $(F,\mathcal{O}_2)$ 连续。

证明。 (a) 设 $x\in[a,b]$。由于 γ' 作为到 $(F,\mathcal{O}_2)$ 的映射是连续的，且 $(F,\mathcal{O}_2)$ 是积分完备的，弱积分

$$\eta(x):=\int_a^x \gamma'(t)\,dt$$

存在于 $(F,\mathcal{O}_2)$ 中。元素 $z:=\gamma(x)-\gamma(a)$ 满足 $\lambda(z)=\int_a^x\lambda(\gamma'(t))\,dt$，对所有 $\lambda\in(F,\mathcal{O}_1)'$ 均成立，由命题 1.1.5 可知。由于 $(F,\mathcal{O}_1)'$ 是 $(F,\mathcal{O}_2)'$ 的子集，我们有 $\lambda(\eta(t))=\int_a^x\lambda(\gamma'(t))\,dt$，对所有 $\lambda\in(F,\mathcal{O}_1)'$ 均成立。由于 $(F,\mathcal{O}_1)'$ 在 F 上分离点，我们推知 $z=\eta(t)$（见练习 1.1.5）。因此 $\gamma(x)=\gamma(a)+\eta(x)$。现在，根据命题 1.1.12，$\eta$ 作为到 $(F,\mathcal{O}_2)$ 的映射是 C^1，其中 $\eta'=\gamma'$。因此，$\gamma=\gamma(a)+\eta$ 作为到 $(F,\mathcal{O}_2)$ 的映射是 C^1，其中 $\frac{d}{dt}(\gamma(a)+\eta)=\eta'=\gamma'$。 —

(b) 将 g 写作 f，视为一个映射到 $(F,\mathcal{O}_2)$ 的映射。于是 $f=\lambda\circ g$，其中连续线性映射 $\lambda\colon(F,\mathcal{O}_2)\to(F,\mathcal{O}_1)$，$y\mapsto y$，因此

$$d^{(k-1)}f=\lambda\circ d^{(k-1)}g=d^{(k-1)}g, \tag{1.52}$$

根据链式法则。如果 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，并且我们可以证明 g 是 $C^k_{\mathbb{R}}$，那么对于所有 $x\in U$，$dg(x,\cdot)=df(x,\cdot)$ 都将是复线性的，因此根据引理 1.4.17，g 将是 $C^k_{\mathbb{C}}$。因此，我们现在可以假设 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$。只需证明对于 $x\in U^0$ 和 $y_1,\dots,y_k\in E$，$d^{(k)}g(x,y_1,\dots,y_k)$ 存在，且与 $d^{(k)}f(x,y_1,\dots,y_k)$ 一致；那么 $d^{(k)}g:=d^{(k)}f\colon U\times E^k\to(F,\mathcal{O}_2)$ 将是一个连续延拓，因此 g 将是 C^k。存在 $r>0$ 使得$x+[-r,r]y_k\subseteq U$。于是 $\gamma\colon[-r,r]\to(F,\mathcal{O}_1)$，

$$t\mapsto d^{(k-1)}g(x+ty_k,y_1,\dots,y_{k-1})=d^{(k-1)}f(x+ty_k,y_1,\dots,y_{k-1})$$

是一条 C^1-曲线，注意到 $\gamma'(t)=d^{(k)}f(x+ty_k,\ y_1,\ \dots\dots,\ y_k)$。由于 $d^{(k)}f$作为到 $(F,\ \mathcal{O}_2)$ 的映射是连续的，因此 γ' 也是如此。由此，(a) 表明 γ 作为到 $(F,\ \mathcal{O}_2)$ 的映射是 C^1。特别地，

$$d^{(k)}g(x,y_1,\dots,y_k)=\gamma'(0)$$

存在于 $(F,\ \mathcal{O}_2)$ 中，并且与 $d^{(k)}f(x,\ y_1,\ \dots\dots,\ y_k)$ 重合。 □

第1.4节习题

习题 1.4.1. 设 E 是一个局部凸空间，$A\subseteq E$ 是一个闭、连通的局部凸集。证明 A 是凸集，步骤如下：

(a) 先取 $E=\mathbb{R}^2$，并假设 $[0,e_1]\cup[0,e_2]\subseteq A$，其中 $e_1=(1,0)$、$e_2=(0,1)$，且 $[u,v]$ 是连接 u 与 $v\in E$ 的线段。证明，对于每个满足 $[\theta e_1,e_2]\subseteq A$ 的 $\theta\in[0,1[$，存在 $\varepsilon\in\,]0,\ 1-\theta]$，使得$[(\theta+r)e_1$，其中 $r\in[0,\varepsilon]$。证明 $\{\theta\in[0,1]\colon[\theta e_1,e_2]\subseteq A\}=:T$ 在 $\mathbb{R}$ 中是闭集。由此推出 $1\in T$，进而得到 $[e_1,e_2]\subseteq A$。(b) 给定 $x\in E$，令 $S_x:=\{y\in A\colon[x,y]\subseteq A\}$。证明 S_x 是闭集。利用 (a) 证明 S_x 是凸集。取满足 $S_x\cap S_z\neq\emptyset$ 的 x、$z\in A$。利用 (a) 证明 $z\in S_x$，事实上 $S_x=S_z$。由此推出，对每个 $x\in A$，都有 $A=S_x$。

练习 1.4.2。 设 I 是一个非退化区间，$\beta\colon E_1\times E_2\to F$ 是局部凸空间之间的连续双线性映射，$n\in\mathbb{N}_0$ 且 $\gamma_1\colon I\to E_1$ 以及 $\gamma_2\colon I\to E_2$ 是 C^n-曲线。证明莱布尼茨法则：

$$\frac{d^n}{dt^n}\,\beta(\gamma_1(t),\gamma_2(t))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta(\gamma_1^{(k)}(t),\gamma_2^{(n-k)}(t)).$$

练习 1.4.3。 证明，若 β 仅为序列连续，则练习 1.4.2 的结论仍然成立（关于此类映射，可参见推论 B.11.15、推论 B.11.16 和例 B.11.14）。

习题 1.4.4. 设 E 是一个有限维 $\mathbb{K}$-向量空间，其基为 $v_1, \ldots, v_n$，且 F 是一个局部凸空间。证明，对于每个 C^1-映射 $f\colon U \to F$，若其定义在具有稠密内部的局部凸子集 $U \subseteq E$ 上，则映射 $f'\colon U \to \mathcal{L}(E,F)_b, x \mapsto f'(x)$ 是连续的。

[利用习题 B.9.4 中给出的局部凸空间同构 $\Phi\colon \mathcal{L}(E,F)_b \to F^n$，我们有 $(\Phi \circ f')(x) = (df(x, v_j))_{j\in\{1,\ldots,n\}}$.]

习题 1.4.5. 设 E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且 $f\colon U \to F$ 是一个 C^1- 映射。设 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，$t \in I$ 和 $\gamma\colon I \to U$ 是一个映射，该映射在 t 处可微，意义如下：

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to t} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t}$$

（其中 $s \in I \setminus \{t\}$ 存在于 F）. 利用这一点

$$\frac{f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))}{s - t} = f^{[1]}\left(\gamma(t), \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t}, s - t\right)$$

对于 $s \in I \setminus \{t\}$，推出 $f \circ \gamma\colon I \to F$ 在 t 处可微，并且 $(f \circ \gamma)'(t)$ $= df(\gamma(t))(\gamma'(t))$。

习题 1.4.6。 (a) 考虑映射 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$。那么 $[1, 4] \subseteq \mathbb{R}$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集；证明 $f^{-1}([1, 4])$ 不是局部凸的。

(b) 设 $\alpha\colon E \to F$ 是局部凸空间之间的连续线性映射，且 $Q \subseteq F$ 是一个局部凸子集。证明 $\alpha^{-1}(Q)$ 是局部凸的。[给定 $x \in \alpha^{-1}(Q)$，取一个凸的 x-邻域 $P \subseteq F$，使得 $Q \cap P$ 是凸的。则 $\alpha^{-1}(P \cap Q) = \alpha^{-1}(Q) \cap \alpha^{-1}(P)$ 是凸的，并且是 $\alpha^{-1}(Q)$ 中的一个 x-邻域。]

(c) 考虑连续线性映射 $\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 0)$。圆盘 $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ 是 $E := \mathbb{R}^2$ 的局部凸子集，且具有稠密内部。证明局部凸集 $\lambda^{-1}(K)$ 的内部为空。此外，交集 $K \cap F$ 与闭向量子空间 $F := \{0\} \times \mathbb{R}$ 的交在 F 中内部为空。

1.5 利普希茨连续性及相关主题

利普希茨连续性和利普希茨条件在微分学中起着重要作用，例如在研究不动点及其参数依赖性时、在反函数定理相关问题中，以及在常微分方程理论中。本节首先记录一些关于函数的利普希茨常数与其导数的算子范数之间关系的简单基本事实（引理 1.5.3）。随后，我们介绍局部凸空间子集之间的利普希茨映射，并证明若干更专门的结果，初次阅读时可以略过。

定义 1.5.1. 度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 之间的映射 $f\colon X \to Y$ 称为（全局）利普希茨 映射，如果存在 $L \in [0, \infty[$（一个所谓的利普希茨常数）使得

$$d_Y(f(x), f(y)) \le L\, d_X(x, y) \quad \text{for all } x, y \in X. \tag{1.53}$$

后者成立当且仅当

$$\operatorname{Lip}(f) := \sup \left\{ \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} \colon x, y \in X \text{ with } x \neq y \right\} \in [0, \infty]$$

有限，并且在此情形下，$\operatorname{Lip}(f)$ 是最小的利普希茨常数。映射 f 称为局部利普希茨映射，如果每个 $x_0 \in X$ 都有一个邻域 $U \subseteq X$，使得 $f|_U$ 是利普希茨映射。

每个利普希茨映射都是连续的，因此每个局部利普希茨映射也都是连续的。

注 1.5.2。我们最感兴趣的是这样的特殊情形：X 和 Y 分别是赋范空间 $(E, \|\cdot\|_E)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 的子集，$d_X(x, y) := \|y - x\|_E$ 对 $x, y \in X$ 成立，而 d_Y 则用 $\|\cdot\|_F$ 类似地定义。于是 (1.53) 变为

$$\|f(y) - f(x)\|_F \le L\|y - x\|_E \quad \text{for all } x, y \in X,$$

而 $\operatorname{Lip}(f)$ 是对满足 $x, y \in X$ 的 $\frac{\|f(y) - f(x)\|_F}{\|y - x\|_E}$ 取上确界。

下面的引理对于微分学至关重要。

引理 1.5.3. 设 $(E, \|\cdot\|_E)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间，且 $f\colon U \to F$ 是定义在具有稠密内部的局部凸子集 $U \subseteq E$ 上的映射。

(a) 若对某些 $x \in U^0$ 和 $y \in E$，方向导数 $df(x, y) = (D_y f)(x)$ 存在，则 $\|df(x, y)\|_F \le \operatorname{Lip}(f)\|y\|_E$.(b) 若 f 是 C^1，则对于所有 $x \in U$，$\|f'(x)\|_{\mathrm{op}} \le \operatorname{Lip}(f)$。(c) 若 f 是 C^1 且 U 是凸的，则

$$\operatorname{Lip}(f) = \sup\{\|f'(x)\|_{\mathrm{op}} \colon x \in U\}. \tag{1.54}$$

(d) 若 f 是 C^1，则 f 是局部利普希茨的。

证明。(a) 对于足够小的 $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$，我们有 $x + ty \in U$，并且

$$\|f(x + ty) - f(x)\|_F \le \operatorname{Lip}(f)\|ty\|_E = |t| \operatorname{Lip}(f)\|y\|_E$$

意味着

$$\|df(x, y)\|_F = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|}\|f(x + ty) - f(x)\|_F \le \operatorname{Lip}(f)\|y\|_E.$$

要证明 (b)，我们必须证明对于所有 $x \in U$ 和 $y \in B_1^E(0)$，$\|df(x,\ y)\|_F \le \operatorname{Lip}(f)$。由于 df 连续，且 U^0 在 U 中稠密，因此只需对 $x \in U^0$ 给出估计，而这已在 (a) 中证明。

(c) (1.54) 中的不等式“≥”由 (b) 得出。对于反向不等式，排除一个平凡情形后，我们可以假设 $L := \sup\{\|f'(x)\|_{\mathrm{op}} : x \in U\} < \infty$。那么 $\mathrm{Lip}(f) \leq L$，因为

$$\begin{aligned}\|f(y) - f(x)\|_F &= \left\| \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)\, dt \right\|_F \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x + t(y-x))\|_{\mathrm{op}} \|y-x\|_E \, dt \leq L\|y-x\|_E\end{aligned}$$

对所有 $x, y \in U$，利用中值定理（命题 1.4.8）。

(d) 给定 $x_0 \in U$，我们有 $df(x_0, 0) = 0$。由于 df 连续，我们可以找到一个凸的 x_0- 邻域 $U_0 \subseteq U$ 和 $\varepsilon > 0$，使得 $df(U_0 \times B_\varepsilon^E(0)) \subseteq B_1^F(0)$。因此，根据引理 B.11.1，对所有 $x \in U_0$，都有 $\|f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{\varepsilon}$；于是由 (c) 得 $\mathrm{Lip}(f|_{U_0}) \leq \frac{1}{\varepsilon}$。□

局部凸空间子集之间的映射也可能有类似的结果。

定义 1.5.4。设 E 和 F 是局部凸空间，$f\colon X \to F$ 是定义在子集 $X \subseteq E$ 上的函数。

(a) 我们称 f 是（全局）利普希茨的，如果对 F 上的每个连续半范数 p，都存在 E 上的连续半范数 q 和 $L \in [0, \infty[$，使得

$$p(f(y) - f(x)) \leq L\, q(y-x) \ \text{ for all } x, y \in X. \tag{1.55}$$

(b) 我们称 f 是局部利普希茨的，如果每个 $x_0 \in X$ 在 X 中都有一个邻域 U，使得 $f|_U$ 是利普希茨的。

(c) 设 p 是 F 上的连续半范数，q 是 E 上的连续半范数。若存在 $x, y \in X$，使得 $q(y-x) = 0$ 且 $p(f(y) - f(x)) \neq 0$，则定义 $\mathrm{Lip}_{p,q}(f) := \infty$。若对所有 $x, y \in X$，$q(y-x) = 0$ 蕴含 $p(f(y) - f(x)) = 0$，则定义

$$\mathrm{Lip}_{p,q}(f) := \sup\left\{ \frac{p(f(y) - f(x))}{q(y-x)} : x, y \in X \text{ with } q(y-x) \neq 0 \right\} \in [0, \infty].$$

注记 1.5.5. (a) 定义 1.5.4 中的映射 f 是利普希茨的，当且仅当对 F 上的每个连续半范数 p，都存在 E 上的连续半范数 q，使得 $\mathrm{Lip}_{p,q}(f) < \infty$。对于这样的 p 和 q，

$$p(f(y) - f(x)) \leq \mathrm{Lip}_{p,q}(f)\, q(y-x) \quad \text{for all } x, y \in X,$$

而 $\mathrm{Lip}_{p,\,q}(f)$ 是式 (1.55) 中 L 的最小选择。

(b) 每个利普希茨映射都是连续的，因此每个局部利普希茨映射也是连续的。

(c) 如果 $(E, \|\cdot\|)$ 是定义 1.5.4 中的赋范空间，那么 f 的利普希茨连续性意味着：对于 F 上的每个连续半范数 p，都存在 $L \geq 0$，使得

$$p(f(y)-f(x)) \le L\|y-x\| \quad \text{for all } x,y \in X$$

（参见习题 B.9.2）。

(d) 若 p 是局部凸空间 F 上的连续半范数，令 $\alpha_p\colon F \to F_p, x \mapsto x + p^{-1}(\{0\})$ 为到相应赋范空间 $(F_p, \|\cdot\|_p)$ 的典范映射，如 B.4.2 所述。根据定义，对所有 $x \in F$，$\|\alpha_p(x)\|_p = p(x)$。因此，定义 1.5.4 中的映射 f 是利普希茨的，当且仅当对 F 上的每个连续半范数 p，$\alpha_p \circ f\colon X \to (F_p, \|\cdot\|_p)$ 都是利普希茨的。

(e) 定义 1.5.4 及前述注释 (a)–(d) 同样适用于 F（以及 E）不一定是豪斯多夫的情形。这对于注 1.5.12(a) 所提供的更精细信息很有用。

接下来的两个引理将在第 1 章附录中用于证明高维集合上函数的弱积分的存在性。

引理 1.5.6。设 K 是有限维赋范空间 $(E, \|\cdot\|_E)$ 中的一个具有非空内部的紧凸子集，且 $f\colon K \to F$ 是到局部凸空间 F 的一个 C^1-映射。那么 f 是利普希茨的。

证明。 根据注 1.5.5(c)，不妨设 $(F, \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间。由于根据习题 1.4.4，$f'\colon K \to (\mathcal{L}(E,F)\ \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ 是连续的，因此我们有

$$\|f'\|_\infty := \sup\{\|f'(x)\|_{\mathrm{op}}\colon x \in K\} < \infty$$

并由引理 1.5.3(c) 推得 $\mathrm{Lip}(f) = \|f'\|_\infty < \infty$。 □

将赋范空间子集上的函数情形（如注 1.5.5(b)）加以推广，给定一个度量空间 (X,d)，若函数 $f\colon X \to F$ 到局部凸空间 F 满足：对于 F 上的每个连续半范数 p，都存在 $L \ge 0$，使得对所有 $x,y \in X$，均有 $p(f(y) - f(x)) \le L\, d(x,y)$，则称其为利普希茨函数。

若 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 为度量空间，我们将在 $X \times Y$ 上使用最大度量，由 $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \max\{d_X(x_1,x_2),\ d_Y(y_1,y_2)\}$ 对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ 给出。

引理 1.5.7. 设 (X,d) 为度量空间，$a < b$ 为实数，且 $f\colon X \times [a,b] \to F$ 为到局部凸空间 F 的利普希茨映射，使得弱积分

$$g(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$$

对每个 $x \in X$ 在 F 中存在。则 $g\colon X \to F,\ x \mapsto g(x)$ 亦为利普希茨的。

证明. 对 F 上的每个连续半范数 p，存在 $L \in [0,\infty[$ 使得

$$p(f(x_2,t_2) - f(x_1,t_1)) \le L \max\{d(x_1,x_2), |t_2 - t_1|\}$$

对所有 $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in X \times [a,b]$。因此

$$p(g(x_2)-g(x_1)) \le \int_a^b p(f(x_2,t)-f(x_1,t))\,dt \le L(b-a)d(x_1,x_2)$$

对所有 $x_1, x_2 \in X$ （根据引理 1.1.9），这表明 g 是利普希茨的。 □

下面的引理将在引理 2.1.20 的证明中使用，以确立局部凸直极限的子集上某些非线性映射的连续性。引理 1.5.9（带有 $k=1$）将在我们发展赋范空间上的微分学时使用（见引理 2.3.18 的证明），也将用于确立关于无限维李群正则性的一个精细结果（引理 6.4.8）。引理 1.5.11 的一个特殊情形（在注 1.5.12(c) 中单独指出）将在习题 2.3.17 中用于讨论牛顿法的渐近行为，也将在定理 2.3.34（反函数定理的一个版本）的证明中使用。

引理 1.5.8。设 E 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为具有非空内部的凸子集，且 $f\colon U \to F$ 为一个 C^1-映射。设 p 为 F 上的连续半范数，q 为 E 上的连续半范数，使得

$$L := \sup\{p(df(x,y))\colon x \in U, y \in \overline{B}_1^q(0)\} < \infty.$$

那么对所有 x、$y \in U$，$p(f(y)-f(x)) \le Lq(y-x)$ 成立，因此 $\mathrm{Lip}_{p,q}(f) \le L$。

证明。由引理 B.11.1，我们有 $p(df(x,y)) \le Lq(y)$，对所有 $x \in U$ 和 $y \in E$ 均成立。利用中值定理，我们推出

$$\begin{aligned} p(f(y)-f(x)) &= p\left(\int_0^1 df(x+t(y-x),y-x)\,dt\right) \\ &\le \int_0^1 p(df(x+ty,y-x))\,dt \le \int_0^1 Lq(y-x)\,dt = Lq(y-x) \end{aligned}$$

对所有 $x, y \in U$ 均成立。 □

引理 1.5.9。设 E、E_1、$\ldots$、E_k 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 $g\colon U \times (E_1 \times \cdots \times E_k) \to F$ 为连续映射，并满足对每个 $x \in X$，$g(x,\cdot)\colon E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ 是 k-线性的。假设 g 存在连续偏微分

$$d_1 g\colon U \times (E_1 \times \cdots \times E_k) \times E \to F$$

关于第一个变量（(如命题 1.4.11) 中所述）。那么

$$g^\vee\colon U \to \mathcal{L}^k(E_1,\ldots,E_k;F)_b,\ x \mapsto g(x,\cdot)$$

是连续的。对于每个 $x_0 \in U$ 以及 F 上的每个连续半范数 p，存在一个 x_0-邻域 $U_0 \subseteq U$、E_j 上针对 $j \in \{1,\ldots,k\}$ 的连续半范数 q_j，以及 E 上的一个连续半范数 q，使得

$$p(g(x_2,y)-g(x_1,y)) \le q_1(y_1)\ldots q_k(y_k)q(x_2-x_1) \tag{1.56}$$

对所有 x_1、$x_2 \in U_0$ 和 $y=(y_1,\ldots,y_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$。

证明。注意，对于每个 $x \in U$， $d_1 g(x,\cdot)\colon E_1 \times \cdots \times E_k \times E \to F$ 都是 $(k+1)$-线性的：由连续性，只需在 $x \in U^0$ 时验证这一点。对于 $y \in E_1 \times \cdots \times E_k$ 和 $z \in E$， $d_1 g(x,y,z) = d(g(\cdot,y))(x,z)$ 关于 z 是线性的，因为 $g(\cdot,y)$ 是一个 C^1-映射。对于 $z \in E$，映射 $d_1 g(x,\cdot,z)$ 是 k-线性映射 $(g(x+tz,\cdot) - g(x,\cdot))/t$ 的逐点极限，因此 $d_1 g(x,\cdot,z)$ 是 k-线性的。

设 p 是 F 和 $x_0 \in U$ 上的连续半范数。由于 $d_1 g(x,0) = 0$ 且 $d_1 g$ 连续，我们可找到一个凸的 x_0- 邻域 $U_0 \subseteq U$、 E_j 上的连续半范数 q_j（针对 $j \in \{1,\dots,k\}$），以及 E 上的连续半范数 q，使得

$$d_1 g(U_0 \times B_1^{q_1}(0) \times \cdots \times B_1^{q_k}(0) \times B_1^{q}(0)) \subseteq B_1^{p}(0).$$

Then

$$p(d_1 g(x,y_1,\dots,y_k,z)) \le q_1(y_1)\cdots q_k(y_k)q(z) \tag{1.57}$$

对所有 $x \in U_0$ 以及 $(y_1,\dots,y_k,z) \in E_1 \times \cdots \times E_k \times E$ 均成立，由引理 B.11.1 可知。利用中值定理和 (1.57)，我们可推得

$$\begin{aligned} p(g(x_2,y) - g(x_1,y)) &= p\left(\int_0^1 d_1 g(x_1 + t(x_2-x_1), y, x_2 - x_1)\,dt\right) \\ &\le \int_0^1 p(d_1 g(x_1 + t(x_1-x_1), y, x_2 - x_1))\,dt \\ &\le q_1(y_1)\dots q_k(y_k)q(x_2-x_1) \end{aligned}$$

对所有 $x_1, x_2 \in U_0$ 以及 $y = (y_1,\dots,y_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ 均成立。若 $B_j \subseteq E_j$ 是 $j \in \{1,\dots,k\}$ 的有界子集且 $B := B_1 \times \cdots \times B_k$，那么

$$C := \sup(q_1(B_1)\cdots q_k(B_k)) < \infty.$$

由前面的结果，我们有

$$\|g^\vee(x_2) - g^\vee(x_1)\|_{B,p} \le C\, q(x_2 - x_1) \text{ for all } x_1, x_2 \in U_0. \tag{1.58}$$

因此 $g^\vee\colon U \to (\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F), \|\cdot\|_{B,p})$是局部利普希茨的，因而连续。由于形如 $\|\cdot\|_{B,p}$ 的半范数定义了 $\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)_b$上的局部凸向量拓扑，我们由此推得， $g^\vee$ 作为到该空间的映射也连续。□

注 1.5.10。鉴于 g 关于第二个变量的 k-线性， 引理 1.5.9 中的可微性条件等价于 g 是 C^1 （由例 1.2.3 和命题 1.4.11 可得；另见习题 1.7.4）。给定 $\ell \in \mathbb{N}$，可以证明，只要g 是 $C^{\ell+1}$， $g^\vee\colon U \to \mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)_b$ 就是 C^ℓ（参见 [Gl07e]）。

引理 1.5.11。设 E 和 F 是局部凸空间， $U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集， $k \in \mathbb{N}$ 和 $f\colon U \to F$ 是一个 C^{k+1}-映射。那么下列映射是连续的：

$$(d^{(k)}f)^\vee\colon U \to \mathcal{L}^k(E,\dots,E;F)_b,\ x \mapsto d^{(k)}f(x,\cdot).$$

证明。 将引理 1.5.9 应用于 $g := d^{(k)} f\colon U \times E^k \to F$。 □

注 1.5.12。(a) 引理 1.5.9 的证明表明，在该引理的情形下，对于 F 上的每个连续半范数 p 和每个有界子集 $B \subseteq E_1 \times \cdots \times E_k$（见 (1.58)），映射 $g^\vee\colon U \to (\mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F), \|\cdot\|_{B,p})$ 都是局部利普希茨的。

(b) 因此，在引理 1.5.11 的情形下，对于 F 上的每个连续半范数 p 和每个有界子集 $B \subseteq E^k$，$(d^{(k)} f)^\vee\colon U \to (\mathcal{L}^k(E, \ldots, E; F), \|\cdot\|_{B,p})$ 是局部利普希茨的。

(c) 特别地，如果 $(E, \|\cdot\|_E)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间，且 $f\colon U \to F$ 是局部凸子集 $U \subseteq E$ 上的一个 C^2-映射，且该子集的内部稠密，那么 $f'\colon U \to \mathcal{L}(E, F)$ 作为映射到 $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ 是局部利普希茨的（因此也是连续的）。

第 1.5 节习题

习题 1.5.1. 设 $(E, \|\cdot\|_E)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间，且 $\alpha\colon E \to F$ 是连续线性映射。证明 α 是利普希茨映射，且 $\mathrm{Lip}(\alpha) = \|\alpha\|_{\mathrm{op}}$。

习题 1.5.2. 设 (X, d_X)、(Y, d_Y) 和 (Z, d_Z) 是度量空间。

(a) 若 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to Z$ 是利普希茨映射，证明 $g \circ f\colon X \to Z$ 是利普希茨映射，且 $\mathrm{Lip}(g \circ f) \le \mathrm{Lip}(g)\,\mathrm{Lip}(f)$。(b) 在 $Y \times Z$ 上赋予度量 $d((y_1, z_1), (y_2, z_2)) = \max(d_Y(y_1, y_2), d_Z(z_1, z_2))$。证明函数 $f = (f_1, f_2)\colon X \to Y \times Z$ 是利普希茨映射，当且仅当其两个分量 f_1 和 f_2 都是利普希茨映射。此外，$\mathrm{Lip}(f) = \max\{\mathrm{Lip}(f_1), \mathrm{Lip}(f_2)\}$。

习题 1.5.3. 设 (K, d_K) 是紧度量空间，(Y, d_Y) 是度量空间。证明：函数 $f\colon K \to Y$ 是利普希茨的，当且仅当它是局部利普希茨的。

练习 1.5.4. 设 E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$f\colon U \to F$ 是一个函数。证明：若 f 是 C^1，则对于 F 上的每个连续半范数 p，$f\colon U \to (F, p)$ 都是局部利普希茨的。
[使用引理 1.5.8 和引理 1.5.3(d) 证明的一个变体。]

1.6 泰勒展开与齐次多项式

现在我们通过讨论泰勒展开，完成对 C^k-映射的阐述。与有限维情形一样，泰勒定理将使我们能够把一个 C^k-函数 f 在 x 附近写成 $f(x+y) = p(y) + R(y)$ 的形式，其中 p 是一个次数为 $\le k$ 的多项式，且 $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^k} R(ty) = 0$。

曲线的泰勒公式

命题 1.6.1. 设 F 是一个实局部凸空间，$k \in \mathbb{N}$, $\gamma\colon I \to F$是定义在非退化区间 $I \subseteq \mathbb{R}$上的一条 C^k-曲线，并且 $x \in I$。
(a) 那么

$$\gamma(x+t) = \gamma(x) + t\gamma'(x) + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\gamma^{(k-1)}(x) + \rho_k(t) \tag{1.59}$$

对所有 $t \in I - x$，余项 $\rho_k(t)$ 由下式给出

$$\rho_k(t) = \frac{t^k}{(k-1)!}\int_0^1 (1-r)^{k-1}\gamma^{(k)}(x+rt)\,dr\,. \tag{1.60}$$

(b) 此外，

$$\gamma(x+t) = \gamma(x) + t\gamma'(x) + \cdots + \frac{t^k}{k!}\gamma^{(k)}(x) + t^k R_k(t) \tag{1.61}$$

对 $t \in I - x$，存在唯一确定的连续映射 $R_k\colon I - x \to F$。此处 $R_k(0) = 0$，且 $R_k(t)$ 可写成弱积分

$$R_k(t) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-r)^{k-1}(\gamma^{(k)}(x+rt) - \gamma^{(k)}(x))\,dr\,. \tag{1.62}$$

证明。(a) 若 $k = 1$，则中值定理表明

$$\rho_1(t) = \gamma(x+t) - \gamma(x) = \int_0^1 d\gamma(x+rt, t)\,dr = t\int_0^1 \gamma'(x+rt)\,dr,$$

其形式即为所断言的形式。现假设该结果对 k 成立，且 γ为 C^{k+1}。注意到 $\int(1-r)^{k-1}\,dr = -\frac{1}{k}(1-r)^k$且 $\frac{d}{dr}(\gamma^{(k)}(x+rt)) = t\gamma^{(k+1)}(x+rt)$,一分部积分（如习题 1.2.3 中所述）给出

$$\begin{aligned}\rho_k(t) &= \frac{t^k}{(k-1)!}\int_0^1 (1-r)^{k-1}\gamma^{(k)}(x+rt)\,dr \\ &= \frac{t^k}{k!}\gamma^{(k)}(x) + \frac{t^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-r)^k\gamma^{(k+1)}(x+rt)\,dr,\end{aligned}$$

从而 $\gamma(x+t) = \sum_{j=0}^{k}\frac{t^j}{j!}\gamma^{(j)}(x) + \rho_{k+1}(t)$，其中 $\rho_{k+1}(t)$ 具有所需形式。

(b) 由于 $k\int_0^1 (1-r)^{k-1}dr = [-(1-r)^k]_0^1 = 1$，我们可以将 (a) 中的余项 ρ_k 改写为

$$\begin{aligned}\rho_k(t) &= \frac{t^k}{k!}\gamma^{(k)}(x) + \rho_k(t) - \frac{t^k}{k!}k\int_0^1 (1-r)^{k-1}\gamma^{(k)}(x)\,dr \\ &= \frac{t^k}{k!}\gamma^{(k)}(x) + t^k \underbrace{\frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-r)^{k-1}(\gamma^{(k)}(x+rt) - \gamma^{(k)}(x))\,dr}_{=:R_k(t)}\,.\end{aligned}$$

注意， R_k 是被积函数连续的含参积分，因此连续；并且 $R_k(0) = 0$。对于 $t \neq 0$，显然 $R_k(t)$ 由 γ 唯一确定，因为随后我们可以由 (1.61) 求出 $R_k(t)$。于是，$R_k(0) = \lim_{0\neq t\to 0} R_k(t)$ 也由连续性唯一确定。□

C^k-映射的泰勒定理

在多元微积分中，泰勒定理说明了如何用一个多项式（多元多项式函数）尽可能好地逼近给定点附近的函数。我们的目标是对局部凸空间之间的函数做同样的事，所用多项式的含义如下。

定义 1.6.2。设 E 和 F 是 $\mathbb{K}$-向量空间。一个从 E 到 F、次数为 $k \in \mathbb{N}_0$ 的齐次多项式是一个形如 $p\colon E \to F$ 的映射

$$p(x) = \beta\big(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k}\big) \tag{1.63}$$

对于某个 k-线性映射 $\beta\colon E^k \to F$。

注意，次数为 0 的齐次多项式是常值映射。[9] 根据定义，次数为 1 的齐次多项式 $p\colon E \to F$ 是线性映射。

注 1.6.3. 若 $p\colon E \to F$ 是次数为 k 的齐次多项式，则 $p(tx) = \beta(tx, tx, \ldots, tx) = t^k\beta(x, \ldots, x) = t^k p(x)$ 对所有 $x \in E$ 与 $t \in \mathbb{K}$ 成立。

定义 1.6.4. 设 $k \in \mathbb{N}_0$。$\mathbb{K}$-向量空间之间的函数 $p\colon E \to F$ 称为次数为 $\leq k$ 的多项式，如果它可以写成次数为 j 的齐次多项式 $p_j\colon E \to F$ 之和 $p = \sum_{j=0}^{k} p_j$，对 $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$。

注 1.6.5. 多项式 $p = \sum_{j=0}^{k} p_j$ 的齐次分量 p_j（如定义 1.6.4 中所述）是唯一确定的。要看出这一点，只需证明对每个线性泛函 $\lambda\colon F \to \mathbb{K}$，$\lambda \circ p_j$ 由 $\lambda \circ p$ 确定（因为后者在 F 上分离点）。然而，对每个 $y \in E$，函数 $\mathbb{K} \to \mathbb{K}, t \mapsto \lambda(p(ty)) = \sum_{j=0}^{k} \lambda(p_j(y))t^j$ 是普通多项式，因而确定其系数 $\lambda(p_j(y))$。

注 1.6.6. 齐次多项式定义中的 k-线性映射 $\beta\colon E^k \to F$ 总可以选为一个对称 k-线性映射。事实上，给定 β，映射

$$\overline{\beta}\colon E^k \to F, \quad \overline{\beta}(x_1, \ldots, x_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \beta(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

[9] 0-线性映射 $E^0 \to F$ 是一个（必然为常数的）映射 $\beta\colon E^0 = \{0\} \to F$。将“$x, \ldots, x$” 视为 0，我们可知每个次数为 0_0 的齐次多项式都是常数。

是对称的 k-线性映射，并且对每个 $x \in E$， $p(x) = \overline{\beta}(x, \dots, x) = \beta(x, \dots, x)$。如果 E 和 F 是拓扑向量空间，且 β 是连续的，那么 β 也连续。我们稍后将看到，$\overline{\beta}$ 由 p 唯一确定。

下面的引理给出了齐次多项式的例子，并说明多项式的复合仍是多项式。

引理 1.6.7。 设 $E, E_1, \dots, E_n, F$ 和 H 是向量空间。那么下述结论成立：

(a) 若 $\beta\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ 是一个 n-线性映射，则 β 是次数为 n 的齐次多项式。(b) 若 $\beta\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to H$ 是一个 n-线性映射，且 $(p_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ 是一个由次数为 k_j 的齐次多项式 $p_j\colon E \to E_j$ 组成的 n 元组，则

$$p\colon E \to F, \quad p(x) := \beta(p_1(x), \dots, p_n(x))$$

是次数为 $k_1 + \cdots + k_n$ 的齐次多项式。
(c) 若 $q\colon F \to H$ 是次数为 k 的齐次多项式，且 $p\colon E \to F$ 是次数为 ℓ 的齐次多项式，则 $q \circ p\colon E \to H$ 是次数为 $k\ell$ 的齐次多项式。(d) 若 $q\colon F \to H$ 是次数为 $\le k$ 的多项式，且 $p\colon E \to F$ 是次数为 $\le \ell$ 的多项式，则 $q \circ p\colon E \to H$ 是次数为 $\le k\ell$ 的多项式。

证明。 (a) 定义 $\alpha\colon (E_1 \times \cdots \times E_n)^n \to F$，

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) := \beta(x_{1,1}, \dots, x_{n,n}),$$

其中 $x_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n})$。那么 α 是 n-线性的，并且对所有 $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$，都有 $\beta(x) = \alpha(x, \dots, x)$。

(b) 对于 $j \in \{1, \dots, n\}$，设 $\beta_j\colon E^{k_j} \to F$ 是一个 k_j-线性映射，满足 $p_j(x) = \beta_j(x, \dots, x)$。那么 $\alpha := \beta \circ (\beta_1 \times \cdots \times \beta_n)\colon E^{k_1+\cdots+k_n} \to H$ 是 $(k_1 + \cdots + k_n)$-线性的，并且 $p(x) = \alpha(x, \dots, x)$，因此 p 确实是一个次数为 $k_1 + \cdots + k_n$ 的齐次多项式。

(c) 对于一个 k-线性映射 $\beta\colon F^k \to H$，我们有 $q(x) = \beta(x, \dots, x)$。由于 $q(p(x)) = \beta(p(x) \dots, p(x))$，因此 (b) 部分适用于 $p_1, \dots, p_k := p$。

(d) 我们有 $q = \sum_{j=0}^{k} q_j$ 和 $p = \sum_{i=0}^{\ell} p_i$，其中 $p_i\colon E \to F$ 是一个次数为 i 的齐次多项式，且对于一个 j-线性映射 $\beta_j\colon F^j \to H$，有 $q_j(x) = \beta_j(x, \dots, x)$。于是

$$q \circ p = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{\ell} \beta_j \circ (p_{i_1}, \dots, p_{i_j}),$$

根据 (b)，其中每个直和项都是次数为 $i_1 + \cdots + i_j \le j\ell \le k\ell$ 的齐次多项式。断言得证。□

盖托微分是齐次多项式的重要来源，也说明了后者在微分学中的重要性。

定义 1.6.8. 设 E 和 F 是局部凸空间，$f\colon U \to F$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的一个映射，$x \in U, y \in E$ 和 $k \in \mathbb{N}$。如果存在一个开零邻域 $W \subseteq \mathbb{K}$，使得 $x + Wy \subseteq U$ 和 $W \to F, t \mapsto f(x+ty)$ 可微 k 次，[10] 那么我们定义

$$\delta_x^k f(y) := \frac{d^k}{dt^k}\Big|_{t=0} f(x+ty)\,.$$

若对每个 $y \in E$ 和 $\delta_x^k f$ 都存在 $\delta_x^k f(y)\colon E \to F$，且 $y \mapsto \delta_x^k f(y)$ 是次数为 k 的齐次多项式，则称 $\delta_x^k f\colon E \to F$ 为 x阶盖托微分在 f处。令 $\delta_x^0 f$ 为常值映射 $E \to F,\ y \mapsto f(x)$。

引理 1.6.9。设 E 和 F 为局部凸空间，$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $f\colon U \to F$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 C^k- 映射。那么，对满足 $j \le k$ 的每个 $j \in \mathbb{N}_0$ 以及每个 $x \in E$，$\delta_x^j f$ 都存在，且由下式给出

$$\delta_x^j f(y) = d^{(j)} f(x, y, \ldots, y)\,.$$

因此 $\delta_x^j f\colon E \to F$ 是一个次数为 j 的连续齐次多项式。

证明。存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $x + \mathbb{D}_\varepsilon^0 y \subseteq U$。则 $\gamma\colon \mathbb{D}_\varepsilon^0 \to F,\ \gamma(t) := f(x+ty)$ 是 C^k。我们有

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(f(x+ty+sy) - f(x+ty)\right) = df(x+ty, y)$$

并且归纳地有 $\gamma^{(j)}(t) = d^{(j)} f(x+ty, y, \ldots, y)$对所有 $j = 1, \ldots, k$成立。因此$\delta_x^j f(y) \overset{\text{定义}}{=} \frac{d^j}{dt^j}\big|_{t=0} f(x+ty) = \gamma^{(j)}(0) = d^{(j)} f(x, y, \ldots, y)$，即为所求。□

齐次多项式（因而任意多项式）的盖托微分可以很容易地计算。

引理 1.6.10. 若 E 与 F 是局部凸空间，$n \in \mathbb{N}_0$ 且 $\beta\colon E^n \to F$ 是对称 n-线性映射，则 $p\colon E \to F,\ p(x) := \beta(x, \ldots, x)$ 对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 与 $x \in E$都具有第k阶盖托微分 $\delta_x^k p$。它由下式给出

$$\delta_x^k p(y) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}\,\beta(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-k}, \underbrace{y, \ldots, y}_{k}) & \text{if } k \le n; \\ 0 & \text{if } k > n. \end{cases} \tag{1.64}$$

特别是，

$$\delta_0^k p(y) = \begin{cases} n!\,p(y) & \text{if } k = n; \\ 0 & \text{if } k \ne n. \end{cases} \tag{1.65}$$

如果 β 连续，那么 p 光滑。

[10] 因此，我们要求当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 时可以构造 k 实导数（如 1.1 中所述），当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时可以构造k 复导数（如 2.1 中所述）。

证明。给定 $x, y \in E$，定义 $\gamma\colon \mathbb{K} \to F$, $\gamma(t) := p(x+ty)$。于是

$$\gamma(t) \;=\; \beta(x+ty,\dots,x+ty) \;=\; \sum_{j=1}^{n} t^j \binom{n}{j} \beta(\underbrace{x,\dots,x}_{n-j},\, \underbrace{y,\dots,y}_{j}),$$

因为 β 是 n-线性且对称的。从这个公式可以清楚地看出，γ 是光滑的。照常对这个公式求导，可得 (1.64)，其中 $\delta_x^k p(y) \;=\; \gamma^{(k)}(0)$（显然是关于 y的 k 次齐次多项式）。取$x:=0$，(1.64) 蕴含 (1.65)。若 β 连续，则 p 是光滑的，因为它是光滑映射 β （见例 1.3.5）与连续线性、因而也是光滑的映射 $E \to E^n$, $x \mapsto (x$、.....、 $x)$ 的复合。□

注 1.6.11。若 $p \;=\; \sum_{k=0}^{\ell} p_k\colon\; E \;\to\; F$ 是局部凸空间之间的 $\leq\; \ell$次多项式，且其齐次多项式为 $p_k\colon\; E \to F$，次数为 k，则 (1.65) 蕴含

$$\frac{\delta_0^k p}{k!} \;=\; \begin{cases} p_k & \text{if } k \leq \ell; \\ 0 & \text{if } k > \ell. \end{cases} \tag{1.66}$$

定义 1.6.12. 设 E 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为开子集，$k \in \mathbb{N}_0$ 且 $f\colon\; U \to F$ 为一个 C^k-映射。对于 $x \in U$，映射

$$P_x^k f\colon E \to F, \quad P_x^k f(y) := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \delta_x^j f(y)$$

称为 f 在 x处的 k阶泰勒多项式，或称为 f 在 x处的 k-喷射。

注 1.6.13. 由引理 1.6.9 可知，$P_x^k f \;=\; \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \delta_x^j f$是一个次数为 $\leq k$且具有连续齐次分量的多项式。因此，由引理 1.6.10，$P_x^k f\colon\; E \to F$是一个光滑映射。

泰勒定理说明了用 $P_x^k f(y)$近似 $f(x+y)$时出现的余项。

定理 1.6.14（泰勒定理）。设 E 和 F 为局部凸空间，$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $f\colon\; U \to F$ 是在开子集 $U \subseteq E$上的一个 C^k-映射。给定 $x \in U$，记

$$f(x+y) = P_x^k f(y) + R(y) \tag{1.67}$$

对于 $y \in U - x$。然后

$$R(y) \;=\; \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-s)^{k-1} (\delta_{x+sy}^k f(y) - \delta_x^k f(y))\, ds \tag{1.68}$$

对所有满足 $x + [0,1]y \subseteq U$ 的 $y \in U - x$。

证明。对于满足 $x + [0,1]y \subseteq U$ 的 $y \in U - x$，根据命题 1.3.4，映射 $\gamma\colon [0,1] \to F$，$\gamma(t) := f(x + ty)$ 是一条 C^k-曲线。与引理 1.6.9 的证明中一样，我们看到

$$\gamma^{(j)}(t) = d^{(j)} f(x + ty, y, \ldots, y) = \delta^j_{x+ty} f(y) \tag{1.69}$$

对于 $j = 1, \ldots, k$。利用命题 1.6.1(b)，我们推得

$$\begin{aligned} f(x+y) \;&=\; \gamma(1) = \gamma(0) + \gamma'(0) + \cdots + \frac{1}{k!}\gamma^{(k)}(0) \\ &\quad + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-s)^{k-1}(\gamma^{(k)}(s) - \gamma^{(k)}(0))\, ds \\ &= f(x) + \delta^1_x f(y) + \cdots + \frac{1}{k!}\delta^k_x f(y) \\ &\quad + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-s)^{k-1}(\delta^k_{x+sy} f(y) - \delta^k_x f(y))\, ds, \end{aligned}$$

由此可得 (1.68)。 □

k 阶泰勒多项式可以用多种方式刻画。

命题 1.6.15。设 E 和 F 是局部凸空间，$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $f\colon U \to F$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 C^k-映射。那么对每个 $x \in U$，以下结论成立：

(a) $p := P^k_x f\colon E \to F$ 是次数为 $\leq k$ 的唯一多项式，使得 $\delta^j_0(p) = \delta^j_x f$ 对每个 $j \leq k$ 都成立，因此 $P^k_0(p) = P^k_x f$。(b) $p := P^k_x f$ 满足

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+ty) - p(ty)}{t^k} \;=\; 0 \quad \textit{for each } y \in E \tag{1.70}$$

并且是具有此性质的次数为 $\leq k$ 的唯一多项式。

证明。(a) 是 (1.66) 的平凡推论。

(b) 映射 $P^k_x f := \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!}\delta^j_x f$ 是次数为 $\leq k$ 的连续多项式。给定 $x \in U$ 和 $y \in E$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $x + [0,\varepsilon]y \subseteq U$。将 (1.68) 应用于 $f(x+ty) - P^k_x f(ty) = R(ty)$，其中 $t \in [0,\varepsilon]$，我们得到

$$R(ty) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-s)^{k-1}(\delta^k_{x+sty} f(ty) - \delta^k_x f(ty))\, ds = t^k \int_0^1 h(t,s)\, ds$$

其中 $h\colon [0,\varepsilon] \times [0,1] \to F$，

$$h(t,s) := \frac{1}{(k-1)!}(1-s)^{k-1}(\delta^k_{x+sy} f(y) - \delta^k_x f(y)).$$

由于 h 连续，根据含参积分的连续性（引理 1.1.11），$t^{-k}(f(x+ty) - P^k_x f(ty)) = \int_0^1 h(t,\ s)\ ds \to \int_0^1 h(0,\ s)\ = 0$ 对于 $t \to 0$ 成立。

现在设 $p\colon E \to F$ 是任意一个次数为 $\leq k$ 且满足 (1.70) 的多项式。我们有 $p = \sum_{j=0}^{k} p_j$，其中齐次多项式 $p_j\colon E \to F$ 的次数为 j。于是，对每个 $y \in E$ 和每个连续线性泛函 $\lambda \in F'$，

$$q\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad q(t) := \lambda(P_x^k f(ty) - p(ty)) = \sum_{j=0}^{k} t^j \lambda(\delta_x^j f(y) - p_j(y))$$

是满足 $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^k} q(t) = 0$的普通多项式。由于 q 的次数为 $\leq k$，这只有在 q 恒等于零时才可能成立。由于 F' 在F上分离点，我们推得对于所有 $t \in \mathbb{K}$，$P_x^k f(ty) = p(ty)$，从而特别有 $P_x^k f(y) = p(y)$。由于 y是任意的，我们得到 $P_x^k f = p$。□

例 1.6.16。 如果 E和 F是局部凸空间，且 $p = \sum_{j=0}^{\ell} p_j$ 是一个具有连续齐次分量 $p_j\colon E \to F$的多项式，那么 (1.66) 蕴含

$$P_0^k(p) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} p_j & \text{if } k \leq \ell; \\ p & \text{if } k \geq \ell. \end{cases}$$

例 1.6.17。 设 E、 F和 H为局部凸空间， $p\colon E \to F$和 $q\colon F \to H$ 为次数为 $\leq k$且具有连续齐次分量的多项式。则

$$q \circ p = \sum_{j=0}^{k^2} r_j$$

由引理 1.6.7(d)及其证明， r_j是次数为 j的连续齐次多项式： $E \to F$ 。现在例 1.6.16 表明

$$P_0^k(q \circ p) = \sum_{j=0}^{k} r_j$$

是 p 和 q的“截断复合”，即截去所有次数为 $> k$的齐次分量后得到的结果。

引理 1.6.18。 设 $f\colon U \to F$ 是开0邻域$U \subseteq E$上的一个 C^k-映射，且 $a \in E$。那么 $P_a^k(f(\cdot - a)) = P_0^k f$。

证明。 将命题 1.6.15(b)应用于 0 附近的映射 f ，可得$t^{-k}(f(ty) - P_0^k f(ty)) \to 0$，当 $t \to 0$时成立。因此 $t^{-k}(f((a+ty)-a) - P_0^k f(ty)) \to 0$，由此，根据命题 1.6.15(b)中的唯一性，有 $P_a^k(f(\cdot - a)) = P_0^k f$。□

极化公式

推广例 1.6.17，我们将讨论 C^k-映射的复合的泰勒多项式。在此之前，让我们分析如何从相应的齐次多项式恢复对称多重线性

映射。对于对称双线性映射 $\beta\colon E\times E\to F$，这很容易：若 $p(x):=\beta(x,\ x)$，那么

$$p(x\pm y)=\beta(x,x)\pm 2\beta(x,y)+\beta(y,y)$$

对所有 $x,\ y\in E$，因此

$$\beta(x,y)=\frac{1}{4}(p(x+y)-p(x-y))=\frac{1}{8}(p(x+y)-p(x-y)-p(-x+y)+p(-x-y)).$$

现在我们陈述一个适用于对称 k-线性映射的推广。

命题 1.6.19（极化公式）。设 E 和 F 是向量空间，$\beta\colon E^k\to F$ 是对称 k-线性映射，且 $p\colon E\to F, p(x):=\beta(x,\dots,x)$ 是相应的齐次多项式。则

$$\beta(x_1,\dots,x_k)=\frac{1}{k!\,2^k}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\in\{1,-1\}}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\,p(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_kx_k)\qquad(1.71)$$

对所有 $x_1,\dots,x_k\in E$ 均成立。因此，β 由 p 唯一确定；若 E 和 F 是拓扑向量空间，则 β 连续当且仅当 p 也连续。

证明。令 M 为所有函数 $\sigma\colon\{1,\dots,k\}\to\{1,\dots,k\}$ 的集合，并令 $S_k\subseteq M$ 为 $\{1,\dots,k\}$ 的所有排列组成的对称群。若 $x_1,\dots,x_k\in E$，令 $\theta(x_1,\dots,x_k)$ 表示 (1.71) 的右端项。由于

$$\begin{aligned}p(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_kx_k)&=\beta(\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_kx_k,\dots,\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_kx_k)\\&=\sum_{\sigma\in M}\varepsilon_{\sigma(1)}\cdots\varepsilon_{\sigma(k)}\,\beta(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}),\end{aligned}$$

我们有

$$\theta(x_1,\dots,x_k)=\frac{1}{k!\,2^k}\sum_{\sigma\in M}A_\sigma\,\beta(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)})$$

with

$$A_\sigma:=\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1}\varepsilon_{\sigma(1)}\cdots\varepsilon_{\sigma(k)}\,\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\,.$$

若 $\sigma\in S_k$，则 $A_\sigma=\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1}1=2^k$。若 $\sigma\in M\setminus S_k$，则存在一个不在 σ 的像中的 $j\in\{1,\dots,k\}$。因此

$$A_\sigma=(1-1)\sum_{\varepsilon_i=\pm1,i\neq j}\varepsilon_{\sigma(1)}\cdots\varepsilon_{\sigma(k)}\prod_{i\neq j}\varepsilon_i=0\,.$$

利用 β 的对称性，我们推得

$$\theta(x_1,\dots,x_k)=\frac{1}{k!\,2^k}\sum_{\sigma\in S_k}2^k\beta(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)})=\beta(x_1,\dots,x_k).\qquad\square$$

推论 1.6.20。设 E 和 F 为局部凸空间，$f\colon\ U \to F$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 C^k-映射，其中 $k \in \mathbb{N}$。设 $F_0 \subseteq F$ 是一个向量子空间，且 $x \in U$。那么 $\delta_x^k f(E) \subseteq F_0$ 当且仅当 $d_{(k)}f(\{x\} \times E^k) \subseteq F_0$。

证明。由于 $\delta_x^k f(y) = d_{(k)}f(x,\ y,\ \ldots\ldots,\ y)$，显然，如果 F_0 包含 $\delta_x^k f$ 的像，就会包含 $d_{(k)}f(x,\ \bullet)$ 的像。由于对称的 k-线性映射 $d_{(k)}f(x,\ \bullet)$ 可由 $\delta_x^k f$ 通过极化公式 (1.71) 恢复，因此反向结论也显然成立。□

泰勒多项式链式法则

命题 1.6.21。设 E、F 和 H 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$ 为开集，$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $f\colon\ U \to V \subseteq F$、$g\colon\ V \to H$ 为 C^k- 映射。给定 $x \in U$，令 $z\colon = f(x)$。那么

$$P_x^k(g \circ f)\ =\ P_0^k\big((P_z^k g) \circ (P_x^k f\ - z)\big), \tag{1.72}$$

其中右端可按例 1.6.17中的方法计算。因此

$$P_x^k(g \circ f)(y) = \tag{1.73}$$
$$g(f(x)) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i_1+\cdots+i_j \le k} \frac{1}{i_1! \cdots i_j!} d^{(j)}g\big(f(x), \delta_x^{i_1} f(y), \ldots, \delta_x^{i_j} f(y)\big).$$

证明。若 $f_1\colon U_1 \to V_1$ 和 $g_1\colon V_1 \to H$ 是定义在 x 的开邻域 $U_1 \subseteq E$ 上的 C^k-映射，以及定义在 z 的开邻域 $V_1 \subseteq F$ 上的 C^k-映射，并且 $P_x^k(f_1) = P_x^k(f)$ 且 $P_z^k(g_1) = P_z^k(g)$，则 $\delta_x^j f = \delta_x^j f_1$，因此 $d_{(j)}f(x,\cdot) = d_{(j)}f_1(x,\cdot)$（由极化可得），对每个 $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ 都成立。同样，$d_{(j)}g(z,\cdot) = d^{(j)}g_1(z,\cdot)$ 对每个 j 都成立。因此，根据 Fa`a di Bruno 公式（定理 1.3.18），对每个 j 都有 $d_{(j)}(g \circ f)(x,\cdot) = d_{(j)}(g_1 \circ f_1)(x,\cdot)$，从而

$$P_x^k(g \circ f)\ =\ P_x^k(g_1 \circ f_1). \tag{1.74}$$

由于根据引理 1.6.18 和命题 1.6.15(a)，$P_x^k f_1 = P_0^k(P_x^k f)\ = P_x^k f$ 且 $P_z^k g_1 = P_0^k(P_z^k g)\ = P_z^k g$，我们可以将 (1.74) 应用于 $f_1\colon\ E \to F$, $v \mapsto (P_x^k f)(v - x)$ 和 $g_1\colon\ F \to H$, $w \mapsto (P_z^k g)(w - z)$。因此

$$\begin{aligned} P_x^k(g \circ f) = P_x^k(g_1 \circ f_1)\ &=\ P_x^k\big((P_z^k g)(\cdot - z) \circ (P_x^k f)(\cdot - x)\big) \\ &= P_0^k\big((P_z^k g)(\cdot - z) \circ P_x^k f\big)\,, \end{aligned}$$

利用 (1.74) 得到第一个等式，并利用引理 1.6.18 得到最后一个等式。由于最后一项为 $P_0^k\big((P_z^k g)\ \circ (P_x^k f\ - z)\big)$，我们便证明了 (1.72)。

给定 $y \in E$，我们代入 $v := P_x^k f(y) - z = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\, \delta_x^i f(y)$

$$P_z^k g(v) = g(z) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} d^{(j)}g(f(x), v, \ldots, v).$$

由于 $d_{(j)}g(f(x)\ \cdot)$ 是 j-线性的，我们发现 $(P_z^k g)(P_x^k f(y)\ -z)$ 等于

$$g(f(x))+\sum_{j=1}^{k^2}\frac{1}{j!}\sum_{i_1+\cdots+i_j\le k}\frac{1}{i_1!\cdots i_j!}d^{(j)}g\big(f(x),\delta_x^{i_1}f(y),\ldots,\delta_x^{i_j}f(y)\big).$$

舍去含有 $j>k$ 的直和项（它们是 y 中次数为 $j>k$ 的齐次多项式），即可得到 (1.73)。□

注 1.6.22. $P_x^k(g\circ f)$ 的等式 (1.73) 蕴含了复合 $g\circ f$ 的盖托微分的 Fa`a di Bruno 公式的一个变体： $P_x^k(g\circ f)$ 中次数为 $k\in\mathbb{N}$ 的齐次多项式为 $\frac{1}{k!}\delta_x^k(g\circ f)$；与 (1.73) 比较可得

$$\delta_x^k(g\circ f)(y)=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!}\sum_{i_1+\cdots+i_j=k}\frac{1}{i_1!\cdots i_j!}\,d^{(j)}g(f(x),\delta_x^{i_1}f(y),\ldots,\delta_x^{i_j}(y))$$

对所有 $y\in E$ 都成立。（这也可由定理 1.3.18 得到，其中 $y_1,\ldots,y_k:=y$。）[11]

约定 1.6.23.设 E 和 F 为局部凸空间， $U\subseteq E$ 为开零邻域， $f,g\colon U\to F$ 为两个 C^k-映射。若 k 已明确，偶尔我们将简写 $f(x)=g(x)+\cdots$，当 $P_0^k(f-g)=0$ 时。因此，$f(x+y)=P_x^k f(y)+\cdots$，特别是对于每个 C^k-映射 f 以及其定义域中的 x。

齐次分量的连续性

多项式连续，当且仅当它的所有齐次分量都连续。

命题 1.6.24. 设 $p=\sum_{j=0}^k p_j\colon E\to F$是局部凸空间之间次数为 $\le k$的多项式，其齐次分量的次数为 j。若 p 在某个 $x_0\in E$处连续，则 p 及其所有 p_j 都连续。

为证明这一点，我们先回顾如何从多项式 $p\colon\mathbb{K}\to F$在一个适当有限集上的取值，恢复其系数；该多项式的次数为 $\le k$。

给定一个 $\mathbb{K}$-向量空间 F，记 $P(\mathbb{K},F)$ 为所有多项式 $p\colon\mathbb{K}\to F$构成的空间，而 $P_{\le k}(\mathbb{K},F)\subseteq P(\mathbb{K},F)$ 表示所有次数为 $\le k$的多项式构成的向量子空间。

引理 1.6.25. 对每个 $k\in\mathbb{N}_0$，存在一个 $(k+1)\times(k+1)$-矩阵$(b_{i,j})_{i,j\in\{0,1,\ldots,k\}}$ 其元素为有理数$b_{i,j}$ 使得对于每个向量空间 F以及每个次数为 $\le k$且满足 $a_i\in F$的多项式 $p\colon\mathbb{K}\to F,\ t\mapsto\sum_{i=0}^k a_i t^i$，都有

$$a_i=\sum_{j=0}^{k}b_{i,j}p(j)\quad \textit{for all } i\in\{0,1,\ldots,k\}.$$

[11] 不过，要解释这些常数，所涉及的组合学会更加复杂。

证明。对于固定的 $k \in \mathbb{N}_0$，定义拉格朗日插值多项式 $p^{1,\ j}{}^{k}$: $=$ $p_j \in P_{\leq k}\ \mathbb{K}\ \mathbb{K}$ (,)如下:

$$p_j(x) := \prod_{\ell \neq j}^{k} \frac{x-\ell}{j-\ell}$$

对于 $j \in \{0, 1 \ldots, k\}$（且 ℓ属于同一个集合）。于是

$$p_j(i) = \delta_{j,i} \quad \text{for all } i \in \{0, \ldots, k\}$$

并且 p_j 的系数为有理数。考虑线性映射

$$\varphi_F \colon P_{\leq k}(\mathbb{K}, F) \to F^{k+1} \quad \varphi_F(p) := (p(i))_{i \in \{0,\ldots,k\}}.$$

于是 $\varphi_{\mathbb{K}}(p_j) = \delta_{j,\ \cdot\ } = e_j$ 是第 j个标准基向量，因此 $\varphi_{\mathbb{K}}$ 是满射，进而是同构，因为 $P_{\leq k}(\mathbb{K},\ \mathbb{K})$ 和 $\mathbb{K}^{k+1}$ 的维数均为 $k+1$。对于 $i \in \{0, \ldots, k\}$，考虑映射

$$\psi_i \colon P_{\leq k}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad p \mapsto a_i$$

对于形如 $p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j\, x^j$的 p。由于

$$b_{i,j} := (\psi_i \circ (\varphi_{\mathbb{K}})^{-1})(e_j) = \psi_i(p_j)$$

是 p_j的第 i个系数，我们有 $b_{i,\ j} \in \mathbb{Q}$。由于 $\psi_i \circ (\varphi_{\mathbb{K}})^{-1}$ 是线性的，因此得到

$$(\psi_i \circ (\varphi_{\mathbb{K}})^{-1})(y) = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j}\, y_j$$

对所有 $y = (y_0, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^{k+1}$。因此

$$a_i = \psi_i(p) = (\psi_i \circ (\varphi_{\mathbb{K}})^{-1})(\varphi_{\mathbb{K}}(p)) = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j} p(j)$$

与之前一样，对于 $p \in P_{\leq k}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$。若 $p \in P_{\leq k}(\mathbb{K}, F)$ 且 $p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j\, x^j$，则 $(\lambda \circ p)(x) = \sum_{j=0}^{k} \lambda(a_j)\ x^j$ 对每个线性泛函 $\lambda\colon\ F \to \mathbb{K}$。现在 $\lambda \circ p$ 的第 i 个系数

$$\lambda(a_i) = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j}\, (\lambda \circ p)(j) = \lambda\Big(\sum_{j=0}^{k} b_{i,j}\, p(j) \Big).$$

由于线性泛函 λ 分离点，$a_i = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j}\, p(j)$ 成立。 □

命题 1.6.24 的证明。首先假设 $p = \sum_{j=0}^{k} p_j$ 在 $x_0 = 0$ 处连续，其中 $p_j\colon$ $E \to F$ 是次数为 j 的齐次多项式。

设 $(b_{i,\ j})_{i,\ j\in\{0,1,\dots,k\}}$ 如引理 1.6.25 所述。对于每个 $y \in E$，映射 $\mathbb{K} \to F$，$t \mapsto p(ty) = \sum_{j=0}^{k} t^j p_j(y)$ 是一个次数为 $\leq k$ 的多项式，因此

$$p_i(y) = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j}\, p(jy) \tag{1.75}$$

对所有 $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ 都成立。由于 p 在零点连续，由 (1.75) 可得，对每个 i，p_i 在零点连续。因此，根据习题 1.6.5，p_i 连续。

现在假设 x_0 任意。那么 $q\colon E \to F$, $q(x) := p(x - x_0)$ 是一个在零点连续的多项式，由此根据前述结果可知 q 连续。因此，p 也连续，从而每个 p_j 都连续。□

余项的估计

我们证明关于泰勒展开中余项的估计。初次阅读时可以略过这些结果。

引理 1.6.26. 设 E 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为一个开子集，$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $f\colon U \to F$ 为一个 C^{k+1}- 映射。若 $x_0 \in U$ 且 p 是 F 上的连续半范数，则存在 E 上的连续半范数 q 和 $r > 0$，使得 $B^q_{2r}(x_0) \subseteq U$，并且泰勒余项

$$R_x(y) := \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-s)^{k-1} (\delta^k_{x+sy} f(y) - \delta^k_x f(y))\, ds$$

满足 $p(R_x(y)) \leq (q(y))^{k+1}$，对所有 $x \in B^q_r(x_0)$ 以及 $y \in B^q_r(0)$均成立。

证明。映射 $U \times E \to F$，$(x, y) \mapsto \delta^{k+1}_x(y)$ 是连续的，且 $\delta^{k+1}_{x_0} f(0) = 0$。因此，存在 $\varepsilon > 0$ 以及 E 上的连续半范数 Q，使得 $B^Q_{2\varepsilon}(x_0) \subseteq U$，并且对所有 $z \in B^Q_{2\varepsilon}(x_0)$ 和 $y \in B^Q_\varepsilon(0)$，都有 $p(\delta^{k+1}_z f(y)) \leq 1$。于是

$$p(\delta^{k+1}_z f(y)) \leq (Q(y)/\varepsilon)^{k+1} \text{ for all } z \in B^Q_{2\varepsilon}(x_0) \text{ and } y \in E,$$

由引理 B.11.2 得出。对于 $x \in B^Q_\varepsilon(x_0)$ 和 $y \in B^Q_\varepsilon(0)$，我们推得

$$\begin{aligned} p(R_x(y)) &= \frac{1}{(k-1)!} p\left(\int_0^1 (1-s)^{k-1} \int_0^s \delta^{k+1}_{x+ty}(y)\, dt\, ds \right) \\ &\leq \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \int_0^s p(\delta^{k+1}_{x+ty} f(y))\, dt\, ds \leq \frac{(Q(y)/\varepsilon)^{k+1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

取 $q := \frac{1}{\sqrt[k+1]{(k-1)!}}\, Q/\varepsilon$ 和 $r := \frac{1}{\sqrt[k+1]{(k-1)!}}$，即可得到该结论。□

注 1.6.27。 若 $(E,\ \|\cdot\|_E)$ 和 $(F,\ \|\cdot\|_F)$ 是在引理 1.6.26 的情形下的赋范空间，且 $p := \|\cdot\|_F$，则可假设 $q = \sqrt[k+1]{C}\, \|\cdot\|_E$ 对某个 $C > 0$ 成立，并推出

$$\|R_x(y)\|_F \leq C(\|y\|_E)^{k+1} \text{ for all } x \in B^E_r(x_0) \text{ and } y \in B^E_r(0).$$

引理 1.6.28。设 E、F 和 Z 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$ 为开子集，$(x_0、y_0) \in U \times V$ 和 $f\colon U \times V \to Z$ 为一个 C^2-函数。设 p 是 Z 上的连续半范数。若存在连续线性函数 $\alpha\colon E \to Z$ 和 $\beta\colon F \to Z$，使得

$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) \text{ and } f(x_0, y) = f(x_0, y_0) + \beta(y - y_0)$$

对所有 $x \in U$ 和 $y \in V$，则存在 $r > 0$ 以及定义在 E 和 F 上的连续半范数 q_1 和 q_2，分别使得 $B_r^{q_1}(x_0) \subseteq U$, $B_r^{q_2}(y_0) \subseteq V$，并且

$$p(f(x_0 + x, y_0 + y) - f(x_0, y_0) - \alpha(x) - \beta(y)) \leq q_1(x)\, q_2(y)$$

对所有 $x \in B_r^{q_1}(0)$ 和 $y \in B_r^{q_2}(0)$。

证明。将 f 替换为

$$g\colon U \times V \to Z, \quad g(x, y) := f(x, y) - f(x_0, y_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0),$$

我们可以假设 $f(x_0, y_0) = 0$, $\alpha = 0$，并且 $\beta = 0$。由于

$$h\colon U \times V \times E \times F \to Z, \quad h(x, y, x_1, y_1) := d^{(2)} f((x, y), (0, y_1), (x_1, 0))$$

是连续的，因此存在定义在 E 和 F 上的连续半范数 q_1 和 q_2，分别使得 $B_1^{q_1}(x_0) \subseteq U$, $B_1^{q_2}(y_0) \subseteq V$，且 $p(h(x, y, x_1, y_1)) \leq 1$，对所有 $(x, y, x_1, y_1) \in B_1^{q_1}(x_0) \times B_1^{q_2}(y_0) \times B_1^{q_1}(0) \times B_1^{q_2}(0)$ 均成立。由于 $h(x, y, \cdot)\colon E \times F \to Z$ 是双线性的，引理 B.11.1 表明

$$p(h(x, y, x_1, y_1)) \leq q_1(x_1) q_2(y_1) \tag{1.76}$$

对于所有 $(x,\ y,\ x_1,\ y_1),\ \in B_1^{q_1}(x_0) \times B_1^{q_2}(y_0) \times E \times F$。由于 $f(x_0,\ y) = 0$ 对于 $y \in V$，

$$d_2 f(x_0, y_0 + ty; y) = \frac{d}{dt} f(x_0, y_0 + ty) = 0 \tag{1.77}$$

对于所有 $(y,\ t),\ \in B_1^{q_2}(0) \times [0, 1]$ 成立。利用 $f(x_0 + x,\ y_0) = 0$ 和 (1.77)，可得

$$\begin{aligned} f(x_0 + x, y_0 + y) &= \int_0^1 d_2 f(x_0 + x, y_0 + ty; y)\, dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 d^{(2)} f((x_0 + sx, y_0 + ty), (0, y), (x, 0))\, ds\, dt \end{aligned}$$

对于所有 $x \in B_1^{q_1}(0)$ 和 $y \in B_1^{q_2}(0)$。利用 (1.76) 对被积函数进行估计，

$$p(f(x_0 + x, y_0 + y)) \leq q_1(x) q_2(y) \text{ for all } x \in B_1^{q_1}(0) \text{ and } y \in B_1^{q_2}(0)$$

如下。该断言由 $r := 1$ 得证。 □

第 1.6 节习题。

习题 1.6.1. 设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $f\colon E \to F$ 是局部凸空间之间的一个 C^k-映射，且其齐次次数为 k，即对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x \in E$，都有 $f(tx) = t^k f(x)$。证明，对于所有 $x \in E$，都有 $f(x) = \delta_0^k f(x)$。特别地，f 是一个连续齐次多项式。

[Use that $\delta_0^k f(x) = \frac{d^k}{dt^k}\big|_{t=0} f(tx) = \frac{d^k}{dt^k}\big|_{t=0} t^k f(x).$]

习题 1.6.2。 设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数。我们求出求逆映射 $\iota\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}, \iota(x) := x^{-1}$ 的盖托微分和泰勒多项式。

(a) 给定 $x \in \mathcal{A}^\times$ 和 $y \in \mathcal{A}$，考虑开子集

$$W = \{z \in \mathbb{C} : x + zy \in \mathcal{A}^\times\} \subseteq \mathbb{C}$$

$\gamma' z = d\iota x + zy\, y = :$: 上的映射 $\gamma\colon W \to \mathcal{A}^\times, \gamma(z) := \iota(x + zy)$。则 $-\gamma z\, y\gamma z$ 1 31 ( ) (,) ( ) ( ) 由 (.) 得。证明

$$\gamma^{(k)}(z) = (-1)^k\, k!\, \gamma(z)\,\big(y\,\gamma(z)\big)^k$$

对每个 $z \in W$，并推得 $\delta_x^k \iota(y) = (-1)^k k!\, x^{-1}\big(yx^{-1}\big)^k$。

(b) 对每个 k，求出 $P_x^k \iota(y)$。化简关于 $x = 1$ 的公式。

习题 1.6.3。 设 F 是一个向量空间，且 $n,\ k \in \mathbb{N}$。证明，映射 $p\colon \mathbb{K}^n \to F$ 是按定义 1.6.4 意义下次数为 $\leq k$ 的多项式，当且仅当 p 是一个次数为 $\leq k$、系数取自 F 的普通多项式；也就是说，存在由次数为 $|\alpha|$ 的多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ 所标记的元素 $a_\alpha \in F$: $= \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq k$，使得对所有 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$，都有 $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} x^\alpha\, a_\alpha$，其中 $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$。

习题 1.6.4。 设 $(E,\ \|\cdot\|_E)$ 和 $(F,\ \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间。次数为 k 的连续齐次多项式 $p\colon E \to F$ 的范数定义为

$$\|p\|_{\mathrm{op}} := \sup\{\|p(x)\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

因此 $\|p(x)\|_F \leq \|p\|_{\mathrm{op}} (\|x\|_E)^k$ 对所有 $x \in E$ 均成立。利用极化，证明若 $\beta\colon E^k \to F$ 是连续对称 k-线性映射，且 $p\colon E \to F, x \mapsto \beta(x, \ldots, x)$ 是其对应的齐次多项式，则

$$\|p\|_{\mathrm{op}} \leq \|\beta\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{k^k}{k!}\, \|p\|_{\mathrm{op}}\,. \tag{1.78}$$

习题 1.6.5. 证明拓扑向量空间之间的齐次多项式 $p\colon E \to F$ 连续，当且仅当它在 0 处连续（使用极化公式和习题 1.3.8(b)）。

练习 1.6.6. 设 $k \in \mathbb{N}$ 和 $f\colon E \subseteq U \to F$ 是一个 C^k-映射。证明映射 $U \times E \to F, (x, y) \mapsto \delta_x^k(y)$ 连续。

习题 1.6.7. 给定一个含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}$，定义 exp: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\exp(x) := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} x^k$, 以及 log : $B_1^{\mathcal{A}}(1) \to \mathcal{A}, \log(x) := \sum_{k=1}^\infty (-1)_k^{k+1} (x - 1)^k$。

(a) 证明这些级数在每个球 $B_r^{\mathcal{A}}(0)$ 上一致收敛，分别在每个 $r < 1$ 的 $B_r^{\mathcal{A}}(1)$ 上一致收敛。由此推得 Exp 和对数函数连续。

(b) 稍后将会清楚，Exp 和对数函数是 C^∞，其 n 阶泰勒多项式分别为 $P_0^n(\mathrm{Exp})(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$ 和 $P_1^n(\text{对数函数})(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^k$（参见命题 2.1.17）。先假定这一点，考虑 C^∞-映射

$$f\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A} \supseteq U \to \mathcal{A}, \quad f(x,y) := \log(\exp(x)\exp(y)),$$

定义在某个开（0，0）邻域 $U \subseteq \mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 上。由命题 1.6.21 可知，确定泰勒多项式 $P^2_{(0,\,0)} f$ 的方法如下：将所有函数替换为它们的二阶泰勒多项式，展开并舍去所有阶数超过 2 的项。用同样的方法计算 $\log(\exp(x)\exp(y)\exp(-x)\exp(-y))$ 在 (0，0) 处的二阶泰勒多项式。

习题 1.6.8。设 E 和 F 是 $\mathbb{K}$-向量空间，$\beta\colon E^k \to F$ 是一个对称 k-线性映射，且 $p\colon E \to F, x \mapsto \beta(x, \ldots, x)$ 是关联多项式。

(a) 证明，对于每个有限维向量子空间 $E_0 \subseteq E$，$p(E_0)$ 在 F 中的线性张成空间 F_0 是有限维的。由于 F_0 可以赋予唯一的豪斯多夫向量拓扑，因此我们可以讨论 F_0 中的极限。

(b) 证明方向导数 $d^{(j)}p(x; y_1, \ldots, y_j)$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$, $x \in E$ 和 $y_1, \ldots, y_j \in E$ 均存在，且由下式给出

$$d^{(j)}p(x, y_1, \ldots, y_j) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-j)!}\,\beta(\underbrace{x, \ldots, x}_{k-j}, y_1, \ldots, y_j) & \text{if } j \le k; \\ 0 & \text{if } j > k. \end{cases}$$

特别地，这得出了另一种证明，说明 $\beta = d^{(k)}p(x, \cdot)$ 可由 p 唯一确定（无需借助极化公式）。

习题 1.6.9。设 E 和 F 是拓扑向量空间，X 是拓扑空间，$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $f\colon X \times E \to F$ 是连续映射，并且对每个 $x \in X$，部分映射 $f_x := f(x, \cdot)\colon E \to F$ 都是次数为 $\le k$ 的多项式。对于 $j \in \{0, \ldots, k\}$，令 $(f_x)_j\colon E \to F$ 为 f_x 的次数为 j 的齐次分量。证明 $f_j\colon X \times E \to F, (x, y) \mapsto (f_x)_j(y)$ 对所有 $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ 都是连续的。

习题 1.6.10。设 E 和 F 是局部凸空间，$n \in \mathbb{N}$，且 $P_{\le n}(E, F)$ 是所有次数为 $\le n$ 的多项式 $p\colon E \to F$ 构成的空间。

(a) 设 $\Gamma \subseteq F^E$ 是次数为 n 的齐次多项式的集合。证明 Γ 等度连续，当且仅当 Γ 在 0 处等度连续。[使用极化公式、练习 B.11.3 和引理 B.11.8(a)。](b) 通过调整命题 1.6.24 的证明，证明集合 $\Gamma \subseteq P_{\le n}(E, F)$ 等度连续，当且仅当 Γ 在某个 $x_0 \in E$ 处等度连续。

习题 1.6.11。给定一个 $\mathbb{K}$-向量空间 F 和 $n \in \mathbb{N}$，记 $P(\mathbb{K}^n, F)$ 为所有多项式 $p\colon \mathbb{K}^n \to F$ 构成的空间。

(a) 对于 $p \in P(\mathbb{K}^2, F)$，证明对所有 $x_1 \in \mathbb{K}$ 均有 $p^\vee(x_1) := p(x_1, \cdot) \in P(\mathbb{K}, F)$，并且 $p^\vee \in P(\mathbb{K}, P(\mathbb{K}, F))$。[提示：若 $p(x_1, x_2) = \sum_{i_1, i_2 = 0}^k a_{i_1, i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$，则

$$p(x_1, x_2) = \sum_{i_2=0}^k \Big(\sum_{i_1=0}^k a_{i_1, i_2} x_1^{i_1} \Big) x_2^{i_2} = \sum_{i_1=0}^k q_{i_1}(x_2)\, x_1^{i_1}$$

with $q_{i_1}(x_2) := \sum_{i_2=0}^k a_{i_1, i_2} x_2^{i_2}$.]

(b) 对于 $k \in \mathbb{N}_0$，令 $(b_{i,j})_{i,j=0}^k$ 为引理 1.6.25 中具有有理元的 $(k+1) \times (k+1)$-矩阵。证明

$$a_{i_1,i_2} = \sum_{j_1,j_2=0}^{k} b_{i_1,j_1} b_{i_2,j_2}\, p(j_1,j_2)$$

对所有如 (a) 中多重次数为 $\leq (k,k)$ 的 $i_1, i_2 \in \{0,1,\ldots,k\}$ 与 $p \in P(\mathbb{K}^2, F)$。(c) 求 $n > 2$ 的类似结论。(d) 证明 $\Phi\colon P(\mathbb{K}^2,F) \to P(\mathbb{K}, P(\mathbb{K},E))$，$p \mapsto p^\vee$ 是 $\mathbb{K}$-向量空间的同构。

习题1.6.12. 对 $n \in \mathbb{N}$ 与 $k \in \mathbb{N}_0$，将 $\Delta_{n,k} := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n\colon |\alpha| \leq k\}$ 简记，其中对 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ 有 $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$。给定一个 $\mathbb{K}$-向量空间 F，令 $P_{\leq k}(\mathbb{K}^n, F)$ 为 $\mathbb{K}^n$ 上所有取值于 F、次数为 $\leq k$ 的多项式所成的空间，即 $p(x) = \sum_{\alpha\in\Delta_{n,k}} a_\alpha x^\alpha$，其中 $a_\alpha \in F$ 适当。

(a) 让我们对 $n \in \mathbb{N}$ 进行归纳，证明对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，都存在多项式$p^{n,k}_\alpha \in P_{\leq k}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$，使得对于$\alpha \in \Delta_{n,k}$

$$p^{n,k}_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha,\beta} \quad \text{for all } \beta \in \Delta_{n,k}, \tag{1.79}$$

利用克罗内克δ。如果 $n = 1$，对于 $p^{1,k}_j$，则对所有 $k \geq 1$ 和$j \in \{0,\ldots,k\}$，可以取证明引理 1.6.25 时遇到的拉格朗日插值多项式。如果已为 $k \in \mathbb{N}_0$和 $\alpha \in \Delta_{n-1,k}$找到 $n \geq 2$ 和多项式 $p^{n-1,k}_\alpha$，则可如下对 $k \in \mathbb{N}_0$进行归纳，为 $\alpha \in \Delta_{n,k}$ 求得 $p^{n,k}_\alpha$：若 $k = 0$，取 $p^{n,0}_{0\,0} := 1$。若已为$\beta \in \Delta_{n,k-1}$找到 $k \geq 1$ 和 $p^{n,k-1}_\beta$，令$\alpha \in \Delta_{n,k}$，并验证具有所需性质的 $p^{n,k}_\alpha$可按以下方式构造：若 $|\alpha| < k$，令

$$p^{n,k}_\alpha(x) := \frac{k - x_1 - \cdots - x_n}{k - \alpha_1 - \cdots - \alpha_n} p^{n,k-1}_\alpha(x) \quad \text{for } x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

若 $|\alpha| = k$，则 α 属于超平面 $H := \{x \in \mathbb{K}^n\colon x_1 + \cdots + x_n = k\}$，且 $\alpha_n = k - \alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-1}$ 由 $(\alpha_1, \ldots..., \alpha_{n-1}) \in \Delta_{n-1,k}$ 确定。映射

$$\psi\colon \mathbb{K}^{n-1} \to H, \quad (x_1,\ldots,x_{n-1}) \mapsto \Big(x_1,\ldots,x_{n-1}, k - \sum_{j=1}^{n-1} x_j\Big)$$

是一个双射，它将 $\Delta_{n-1,k}$ 映到 $\Delta_{n,k} \cap H$。此外，$\psi^{-1} = \mathrm{pr}\,|_H$，其中 $\mathrm{pr}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n-1}$，$(x_1, \ldots..., x_n) \mapsto (x_1, \ldots..., x_{n-1})$。于是 $q := p^{n-1,k}_{\alpha()} \circ \mathrm{pr} \in P_{\leq k}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$，我们可以取

$$p^{n,k}_\alpha := q - \sum_{\beta\in\Delta_{n,k}\setminus H} q(\beta)\, p^{n,k}_\beta,$$

其中右端已定义为 $\Delta_{n,k} \setminus H = \{\beta \in \Delta_{n,k}\colon |\beta| < k\}$。证明所构造的所有多项式的系数都属于域 $\mathbb{Q}$。

(b) 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$，考虑线性映射

$$\varphi_F\colon P_{\leq k}(\mathbb{K}^n, F) \to F^{\Delta_{n,k}}, \quad \varphi_F(p) := (p(\alpha))_{\alpha\in\Delta_{n,k}}.$$

如引理 1.6.25 的证明所示，证明 φ_F 是一个同构，并且存在有理数族 $(b^n_{\alpha,\beta})_{\alpha,\,\beta\in\Delta_{n,k}}$ 使得

$$a_\alpha = \sum_{\beta\in\Delta_{n,k}} b^{n,k}_{\alpha,\beta}\, p(\beta) \tag{1.80}$$

对所有如上所述的 $p \in P_{\leq k}(\mathbb{K}^n, F)$。利用 $\varphi_{\mathbb{K}}$ 是单射这一点，还可证明每个 $p^n_{\alpha^k} \in P_{\leq k}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ 都由 (1.79) 唯一确定。

1.7 Cᵏ-函数空间及其间的映射

函数空间以及这类空间之间典型映射的可微性，对于无限维李群理论和许多重要例子都至关重要。我们现在分三个阶段研究这类映射。

首先，我们讨论以下形式映射的可微性：

$$C(K,f)\colon C(K,U)\to C(K,F),\quad \gamma\mapsto f\circ\gamma$$

(及相关映射)，其中 K 是一个紧拓扑空间，E 且 F 是局部凸空间，而 $f\colon U\to F$ 是一个 C^k-映射，其定义在开子集 $U\subseteq E$上。所得结果（命题 1.7.1 和 1.7.4）可用于在每个李群 $C(K,G)$ 上构造李群结构，前提是李群的局部描述（定理 5.3.1）已建立。除了连续逆代数的单位群之外，这些也是最简单的无限维李群例子。涉及参数的上述命题变体（命题 1.7.5）将用于（第 2.3 节）研究巴拿赫空间中微分方程解的参数依赖性。此外，它还将用于证明巴拿赫–李群和微分同胚群都是性质良好的李群，即所谓的 C^0-正则李群（插入参考文献），在这类群中，连续的李代数值曲线具有性质良好的群中演化（详见定义 6.1.1）。

接下来，我们在局部凸空间的开子集 U 上定义 C^k-函数空间 $C^k(U,F)$ 的自然拓扑，并证明

$$C^k(U,f)\colon C^k(U,E)\to C^k(U,F),\quad \gamma\mapsto f\circ\gamma$$

对每个 C^k-映射 $f\colon E\to F$，该映射都是连续的（命题 1.7.12）。在向量丛的截面空间上引入拓扑时，我们将用到这一结果（以及命题 1.7.11）（见第 4.1 节）。我们还将研究函数空间 $C^k(U,E)$ 的完备性和可度量性等性质。

本节的高潮是指数律，它表明：在良好情形下，取值于光滑函数空间的光滑函数 $f\colon U\to C^\infty(V,F)$ 恰好对应于两个变量的光滑函数 $U\times V\to F$（推论 1.7.35）。更一般地，我们研究何时 C^k-函数

$U \to C^\ell(V,E)$ 对应于适当定义的 $C^{k,\ell}$-函数 $U \times V \to F$，后者在其两个自变量上具有不同的可微阶数（定理 1.7.30）。指数律是无穷维微积分的有力工具。我们将经常使用它们，既用于发展无限维李理论（例如，讨论 C^k-正则性），也用于讨论例子（如在微分同胚群上构造李群结构，以及证明它们的正则性）。

有些结果涉及技术细节，建议等到需要时再阅读，以便直接了解相关的应用动机。

连续函数空间之间的映射

若 K 是紧拓扑空间，E 是一个（实或复）局部凸空间，那么紧开拓扑使所有从 K 到 E 的连续 E 值函数构成的向量空间 $C(K, E)$ 成为一个局部凸拓扑向量空间（见引理 A.6.24(g)）。现在我们讨论这类函数空间及其开子集之间的重要映射的可微性。在附录 A.6 中，我们已经确立了函数空间之间映射的连续性 性质；这些事实是以下讨论的基础，我们建议读者查阅附录以了解必要的背景知识。

我们先从一个关于叠加算子可微性性质的结果开始（其证明包含在下面更一般的理论中，正如注记 1.7.9(a) 所解释的）：

命题 1.7.1. 设 K 是紧拓扑空间，E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是开子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $g\colon U \to F$ 是一个C^k-映射。那么以下映射也是 C^k:

$$C(K,g)\colon C(K,U) \to C(K,F), \quad \gamma \mapsto g \circ \gamma.$$

回顾一下，如果 $U \subseteq E$ 是开集，那么 $C(K,U) = \lfloor K,U \rfloor$ 在 $C(K,E)$ 中是开集；此外，$C(K,E)$ 在 $C(K,U)$ 上诱导的拓扑与紧开拓扑一致（见注 A.6.6）。

如果在上述情形中 $f\colon K \times U \to F$ 是连续映射，那么

$$f_*(\gamma) := f \circ (\mathrm{id}_K, \gamma) \in C(K,F)$$

对所有 $\gamma \in C(K,U)$ 成立，而引理 A.6.20 表明，由此得到的映射

$$f_*\colon C(K,U) \to C(K,F), \quad \gamma \mapsto f_*(\gamma)$$

是连续的（所谓的“推前”）。更明确地说，

$$f_*(\gamma)(x) := f(x, \gamma(x)) \quad \text{for } x \in K.$$

我们要证明，如果 f 是 C^k，那么 f_* 也是 C^k。事实上，只要 f仅仅是所谓的 $C^{0,k}$- 映射，这个结论就成立；这对我们的一些应用很重要。

定义 1.7.2。设 X 是豪斯多夫拓扑空间，F 是局部凸空间，U 是局部凸空间 E的开子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。映射 $f\colon X \times U \to F$ 称为 $C^{0,k}$，如果 f 是连续的，且迭代方向导数

$$d^{(0,j)}f(x,y,w_1,\dots,w_j) := (D_{w_j}\cdots D_{w_1}f_x)(y)$$

其中 $f_x := f(x,\cdot)\colon U \to F$对所有满足$j \le k$且 $w_1,\dots,w_j \in E$的 $x \in X$，$y \in U$，$j \in \mathbb{N}$均存在，并且映射 $d^{(0,j)}f\colon X \times U \times E^j \to F$是连续的。[12] 若 $U \subseteq E$ 仅为一个具有稠密内部的局部凸子集，则称映射 f（同上）为 $C^{0,k}$，如果 f 连续，$f|_{X\times U^0}$ 是$C^{0,k}$，且 $d^{(0,j)}(f|_{X\times U^0})\colon X \times U^0 \times E^j \to F$存在一个连续延拓 $d^{(0,j)}f\colon X \times U \times E^j \to F$（该延拓必然唯一），对所有满足 $j \le k$的 $j \in \mathbb{N}$均成立。我们提及，$C^{k,0}$-映射 $f\colon U \times X \to F$及其偏微分$d^{(j,0)}f\colon U \times X \times E^j \to F$也可以按照相同的模式定义（交换 x和 y的角色）。

注 1.7.3。(a) 我们此前已在命题 1.3.23（关于积分对参数的可微依赖）中遇到过 $C^{k,0}$-映射（当时并未为这类映射命名），在引理 1.3.12 中也遇到过。用先前的记号，

$$d^{(i,0)}f = d_1^{(i)}f \quad \text{and} \quad d^{(0,j)}f = d_2^{(j)}f.$$

我们的新记号为考察乘积上的 $C^{k,\ell}$-映射做好了准备，其中两个变量的可微阶数 k 和 ℓ 不同；也为考察其微分 $d^{(i,j)}f$（其中 $i,\ j \in \mathbb{N}_0$满足 $i \le k$和 $j \le \ell$）做好了准备（见定义 1.7.17）。

(b) 若 E_1、E_2和 F 是局部凸空间，且 $U_1 \subseteq E_1$、$U_2 \subseteq E_2$ 是开子集，那么每个 C^k-映射 $f\colon U_1 \times U_2 \to F$ 都是 $C^{0,k}$，其中

$$d^{(0,j)}f(x,y,w_1,\dots,w_j) = d^{(j)}f(x,y,(0,w_1),\dots,(0,w_j)) \tag{1.81}$$

对所有满足 $j \le k$ 和 w_1的 $x \in U_1$、$y \in U_2$、$j \in \mathbb{N}$，…，$w_j \in E_2$都成立。这由定义显然可知。若 U_1和 U_2仅是具有稠密内部的局部凸子集，则 (1.81) 的右端给出了 $d^{(0,j)}(f|_{U_1\times U_2^0})$的连续延拓，因此 f 仍是 $C^{0,k}$。同样，乘积上的每个 C^k-映射都是 $C^{k,0}$。

现在，我们关于推前的结果表述如下。

命题 1.7.4. 设 K 是一个紧拓扑空间，E和 F是局部凸空间，$U \subseteq E$是一个开子集，$k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，且 $f\colon K \times U \to F$是一个 $C^{0,k}$-映射。那么下述映射是 C^k：

$$f_*\colon C(K,U) \to C(K,F), \quad \gamma \mapsto f \circ (\mathrm{id}_K,\gamma).$$

[12] 因此，如果 X 是局部凸空间的子集，则 $d^{(0,j)}f(x,\ y,\ w_1,\ \dots\dots,\ w_j) := (D_{(0,w_j)}\cdots D_{(0,w_1)}\ f)(x,\ y)$。

我们将从一个带参数的变体推导出命题 1.7.4。在下面的结果中，我们将简写为

$$f^p(x,y) := f(x,y,p) \quad \text{for } (x,y,p) \in K \times U \times P \tag{1.82}$$

以及 $(f^p)_*(\gamma)(x) = f(x, \gamma(x)\ p)$ 对于 $x \in K$, $\gamma \in C(K, U)$ 和 $p \in P$。

命题 1.7.5。设 E、F 和 Z 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为开子集，$P \subseteq Z$ 为具有稠密内部的局部凸子集，K 为紧拓扑空间，$k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $f\colon K \times (U \times P) \to F$ 为一个 $C^{0,\,k}$- 映射。那么下列映射是 C^k:

$$\Phi\colon C(K,U) \times P \to C(K,F), \quad (\gamma, p) \mapsto (f^p)_*(\gamma).$$

三个引理将帮助我们证明命题 1.7.5。在第一个引理中，我们使用 $U^{[1]} \subseteq U \times E \times \mathbb{K}$，其定义见 (1.16) 和 (1.48)。

引理 1.7.6。设 P 为豪斯多夫拓扑空间，E 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且$f\colon P \times U \to F$为一个 $C^{0,\,1}$-映射。那么下列映射是连续的:

$$f^{[0,1]}\colon P \times U^{[1]} \to F, \ f^{[0,1]}(p,x,y,t) := \begin{cases} \frac{1}{t}\big(f(p,x+ty) - f(p,x)\big) & \text{if } t \neq 0; \\ d^{(0,1)}f(p,x,y) & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

我们指出，引理 1.7.6 可仿照引理 1.2.10 和 1.4.9 证明；同样，下面的引理可仿照引理 1.3.12 证明（另见注 1.4.12）：我们只需在所有公式中插入参数 $p \in P$，并检查其对 p 也连续依赖。

引理 1.7.7。设 E 和 F 是局部凸空间，$\ell \in \mathbb{N}$，且$(W_j)_{1 \leq j \leq \ell}$是局部凸空间族 W_j，其中 $j \in \{1, \ldots, \ell\}$。简记 $W := W_1 \times \cdots \times W_\ell$。设 $U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，P 是豪斯多夫拓扑空间，$r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，并且

$$f\colon U \times (W \times P) \to F$$

是一个 $C^{r,\,0}$-映射，使得

$$f(x,\cdot,p)\colon W_1 \times \cdots \times W_\ell \to F$$

对所有 $x \in U$ 和 $p \in P$，都是 ℓ-线性的。则 f 是 $C^{r,\,0}$，而且作为从$(U \times W) \times P$到 F 的映射时也是如此。

我们记录一个典型的应用，以备后用。

引理 1.7.8。设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间，E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集，$k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $f\colon X \times U \to F$ 是一个 $C^{0,\,k}$-映射。那么，对于所有满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}$，$d^{(0,j)}f\colon X \times (U \times E^j) \to F$ 都是 $C^{0,\,k-j}$。

证明。由习题 1.7.1，只需证明 $g\colon X\times(E^j\times U)\to F$,$g(x,w,y):=d^{(0,j)}f(x,y,w)$ 是 $C^{0,\,k-j}$（其中 $x\in X$, $y\in U$, $w\in E^j$）。显然，g 在 $(X\times E^j)\times U^0$ 上的限制是 $C^{0,\,k-j}$，其中

$$d^{(0,i)}g((x,w),y,z_1,\dots,z_i)=d^{(0,j+i)}f(x,y,w,z_1,\dots,z_i)\tag{1.83}$$

对所有的 $x\in X$, $y\in U^0$, $w\in E^j$和 $z_1,\dots,z_i\in E$。由于 (1.83) 右侧定义了一个从 $X\times E^j\times U\times E^i$ 到复数域 F 的连续映射 h_i，我们看到 g 在 $(X\times E^j)\times U$ 上是 $C^{0,\,k-j}$ 的，且对所有 i，都有 $d^{(0,i)}g=h_i$。由于 $g(x,w,y)$ 关于 $w\in E^j$ 是 j-线性的，引理 1.7.7 表明，g 也是 $C^{0,k-j}$ 的，即作为从 $X\times(E^j\times U)$ 到 F 的映射时亦然。□

命题的证明 1.7.5。我们可以假设 $k\in\mathbb{N}_0$，并进行归纳。根据引理 A.6.21，映射 Φ 是连续的。现在设 $k\geq 1$，并假设将 k 换成 $k-1$ 时断言成立。由于映射 $d^{(0,1)}f\colon K\times(U\times P\times E\times Z)\to F$ 是 $C^{0,k-1}$ 的（见引理 1.7.8），因此

$$g\colon K\times(U\times E\times P\times Z)\to F,\quad g(x,y,z,p,q):=d^{(0,1)}f(x,y,p,z,q)$$

是 $C^{0,\,k-1}$（见习题 1.7.1）。因此

$$\Psi\colon C(K,U\times E)\times(P\times Z)\to C(K,F),\quad(\gamma,\eta,p,q)\mapsto(g^{p,q})_*(\gamma,\eta)$$

根据归纳假设，是 C^{k-1}（此处及下文中，如引理 A.6.7 所示，将 $C(K,\,U\times E)$ 与 $C(K,\,U)\times C(K,\,E)$ 视为相同）。我们断言，Φ 在每个 $(\gamma,\,p)\in C(K,\,U)\times P^0$ 处沿每个方向 $(\eta,\,q)\in C(K,\,E)\times Z$ 的方向导数都存在，且由下式给出

$$d\Phi((\gamma,p),(\eta,q))=\Psi(\gamma,\eta,p,q).\tag{1.84}$$

由于 (1.84) 的右端定义了 $(\gamma,p,\eta,q)\in C(K,U)\times P\times C(K,E)\times Z$ 的连续函数，这意味着 Φ 是 C^1，并且 $d\Phi$ 在其整个定义域上都由 (1.84) 给出；因此 $d\Phi$ 将是一个 C^{k-1}-映射，所以 Φ 将是 C^k。为证明该断言，取满足 $\gamma(K)+\mathbb{D}_\varepsilon\eta(K)\subseteq U$ 且满足 $p+\mathbb{D}_\varepsilon q\subseteq P$ 的 $\varepsilon>0$。那么，对所有 $(x,y,z,t)\in K\times\gamma(K)\times\eta(K)\times\mathbb{D}_\varepsilon$，都有 $(x,y,p,z,q,t)\in K\times(U\times P)^{[1]}$，且映射

$$h\colon K\times\gamma(K)\times\eta(K)\times\mathbb{D}_\varepsilon\to F,\quad h(x,y,z,t):=f^{[0,1]}(x,y,p,z,q,t)$$

是连续的。对于 $0\neq t\in\mathbb{D}_\varepsilon$，考虑差商

$$\Delta_t:=\frac{\Phi(\gamma+t\eta,p+tq)-\Phi(\gamma,p)}{t}\in C(K,F).$$

对于 $x\in K$，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_t(x)&=\frac{f(x,\gamma(x)+t\eta(x),p+tq)-f(x,\gamma(x),p)}{t}\\&=f^{[0,1]}(x,\gamma(x),p,\eta(x),q,t)\;=\;(h^t)_*(\gamma,\eta)(x).\end{aligned}$$

因此，对于 $t \in \mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{0\}$，有 $\Delta_t = (h^t)_*(\gamma,\eta)$；由引理 A.6.21，右端是关于 $t \in \mathbb{D}_\varepsilon$ 的连续 $C(K,F)$-值函数。因此，差商 $\Delta_t = (h^t)_*(\gamma,\eta)$ 当 $t \to 0$ 时收敛到 $(h^0)_*(\gamma,\eta)$。由于 $(h^0)_*(\gamma,\eta)(x) = d(0,1)f(x,\gamma(x)\ p,\eta(x)\ q) = \Psi(\gamma,\eta,p,q)(x)$，我们已经证明了 (1.84)。证明完毕。□

注记 1.7.9。(a) 将 P 取为单点集，命题 1.7.4 即可由命题 1.7.5 推出。取 $f(x,\ y) := g(y)$，命题 1.7.1 就成为命题 1.7.4 的特殊情形。

(b) 我们指出，如果 U 改为 E 的一个具有非空内部的凸子集，那么命题 1.7.5（因而命题 1.7.4 和命题 1.7.1 也同样如此）仍然成立。事实上，在这种情形下，$C(K,U)^0 = C(K,U^0)$（练习 1.7.3）。特别地，凸集 $C(K,U)$ 具有非空内部，从而 $C(K,U) \times P$ 是 $C(K,E)$ 的一个具有稠密内部的局部凸子集。现在，命题 1.7.5 的归纳证明中的情形 $k = 0$ 不要求 U 的开性。在归纳步骤中，对于 (γ,p,η,q)，方向导数仍具有 (1.84) 中所描述的形式 $\in C(K,U^0)\times P^0 \times C(K,E)\times Z$（由现有证明可知）。由于 Ψ 按归纳法为 C^{k-1}，因而是连续的，我们 deduce 得到 Φ 在其整个定义域上都是 C^1，且 $d\Phi$ 由 (1.84) 给出。因此，$d\Phi$ 是 C^{k-1}，而 Φ 是 C^k。

函数空间之间拉回与全局前推的连续性

现在，我们将 $C^k(U,\ F)$（由 $U \to F$ 到 U 的 C^k-映射 γ 所构成的空间）赋予局部凸空间结构，其中 U 是局部凸空间 E 中具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。我们证明此类空间之间两种映射的连续性；稍后讨论流形上的 C^k-映射空间以及向量丛中的 C^k-截面空间时，将需要这些结果。

定义 1.7.10。设 E 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。对于满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}_0$，在 $C(U \times E^j,\ F)$ 上赋予紧开拓扑。关于映射

$$d^{(j)} \colon C^k(U,F) \to C(U \times E^j, F), \quad \gamma \mapsto d^{(j)}\gamma,$$

（j 与前文相同）称为紧开 C^k-拓扑。由于 $d^{(j)}$ 构成了从 $C^k(U,\ E)$ 到局部凸空间的点分离线性映射族，$C^k(U,\ E)$ 也构成局部凸拓扑向量空间。

命题 1.7.11。设 E_1、E_2 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E_1$ 和 $V \subseteq E_2$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $f\colon\ U \to E_2$ 是一个 C^r-映射，满足 $f(U) \subseteq V$。那么下列映射是连续线性的：

$$f^* \colon C^r(V,F) \to C^r(U,F), \quad \gamma \mapsto \gamma \circ f.$$

证明。 根据引理 A.6.9，映射 f^* 到 $C(U,F)$ 是连续的。只需证明，对于所有满足 $k \le r$ 的 $k \in \mathbb{N}$， $d^{(k)}(f^*(\gamma)) = d^{(k)}(\gamma \circ f) \in C(U \times E_1^k, F)$ 在 $\gamma \in C^r(V,F)$ 中连续。根据 Fa`a di Bruno 公式（定理 1.3.18）， $d^{(k)}(\gamma \circ f)$ 是直和项 $h_P(\gamma)$ 之和，其中各项为

$$h_P(\gamma)(x,y) = d^{(j)}\gamma(f(x), d^{(|I_1|)}f(x,y_{I_1}), \dots, d^{(|I_j|)}f(x,y_{I_j}))$$

对于 $j \in \{1,\dots,k\}$, $P = \{I_1,\dots,I_j\} \in P_{k,j}$ 以及 $(x,y) \in U \times E_1^k$。要看出每个 h_P（因而 $d^{(k)} \circ f^*$）都是连续的，注意到

$$g_P \colon U \times E_1^k \to V \times E_2^j, \quad (x,y) \mapsto (f(x), d^{(|I_1|)}f(x,y_{I_1}), \dots, d^{(|I_j|)}f(x,y_{I_j}))$$

是连续映射。因此， $g_P^* \colon C(V \times E_2^j, F) \to C(U \times E_1^k, F)$, $\eta \mapsto \eta \circ g_P$也是连续的（见引理 A.6.9）。由于 $d^{(j)} \colon C^r(V,F) \to C(V \times E_2^j, F)$,$\gamma \mapsto d^{(j)}\gamma$是连续的，故 $h_P = g_P^* \circ d^{(j)}$确实连续。□

命题 1.7.12. 设 Z, E 和 F 是局部凸空间， $U \subseteq Z$ 是具有稠密内部的局部凸子集， $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $f \colon U \times E \to F$ 是一个 C^r-映射。那么以下映射是连续的：

$$f_* \colon C^r(U,E) \to C^r(U,F), \quad \gamma \mapsto f \circ (\mathrm{id}_U, \gamma).$$

证明。设 $k \in \mathbb{N}_0$ 满足 $k \le r$；我们需要证明 $d^{(k)} \circ f_* \colon C^r(U,E) \to C(U \times Z^k, F)$ 是连续的。对于 $k = 0$，由引理 A.6.20 可知结论成立。若 $k > 0$，则有 $d^{(k)}(f_*(\gamma)) = d^{(k)}(f \circ \widetilde{\gamma})$，其中 $\widetilde{\gamma} := (\mathrm{id}_U, \gamma) \colon U \to U \times E$。因此，Fa`a di Bruno 公式（定理 1.3.18）表明， $d^{(k)}(f_*(\gamma))(x, y_1, \dots, y_k)$（对于 $x \in U$ 和 $y = (y_1, \dots, y_k) \in Z^k$）是以下直和项 $h_P(\gamma) \in C(U \times Z^k, F)$ 之和

$$h_P(\gamma)(x,y) := d^{(j)}f(\widetilde{\gamma}(x), d^{(|I_1|)}\widetilde{\gamma}(x,y_{I_1}), \dots, d^{(|I_j|)}\widetilde{\gamma}(x,y_{I_j}))$$

对于 $j \in \{1,\dots,k\}$ 和 $P = \{I_1 \dots, I_j\} \in P_{k,\,j}$（记号同定理 1.3.18）。为证明 h_P连续，对于 $I \subseteq \{1,\dots,k\}$，我们考虑连续映射

$$g_I \colon U \times Z^k \to U \times Z^{|I|}, \quad (x,y) \mapsto (x, y_I);$$

因此 $g_\emptyset$ 是投影 $U \times Z^k \to U$, $(x,\ y) \mapsto x$。于是

$$g_I^* \colon C(U \times Z^{|I|}, Z \times E) \to C(U \times Z^k, Z \times E), \quad \eta \mapsto \eta \circ g_I$$

是连续的（由引理 A.6.9）。现在我们可以写成

$$h_P = C(U \times Z^k, d^{(j)}f) \circ (g_\emptyset^*, g_{I_1}^* \circ d^{(|I_1|)}, \cdots, g_{I_j}^* \circ d^{(|I_j|)}) \circ \widetilde{\cdot},$$

其中映射 $C^r(U,\ E) \to C^r(U,\ U \times E)$, $\gamma \mapsto \widetilde{\gamma} = (\mathrm{id}_U,\ \gamma)$ 是连续的，映射 $d^{(i)} \colon C^r(U,\ U \times E) \to C(U \times Z^i,\ Z \times E)$ 对满足 $i \le r$ 的 $i \in \mathbb{N}$ 是连续的，最后，

由于 $d^{(k)}(\mathrm{id}_U, \gamma) = (d^{(k)}\,\mathrm{id}_U, d^{(k)}\gamma) \in C(U \times Z^k, Z \times E)$ 关于 $\gamma \in C^r(U,E)$ 连续依赖。

$$C(U \times Z^k, d^{(j)}f)\colon C(U \times Z^k, U \times E \times (Z \times E)^j) \to C(U \times Z^k, F)$$

根据引理 A.6.3，它是连续的。因此， h_P 连续，正如所需。 □

由 $r := k$ 和 $f(x, y) := g(y)$，我们推得：

推论 1.7.13.设 Z、 E 和 F 是局部凸空间， $U \subseteq Z$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $g\colon E \to F$ 是一个C^k-映射。那么下列映射是连续的：

$$C^k(U, g)\colon C^k(U, E) \to C^k(U, F), \quad \gamma \mapsto g \circ \gamma.$$

推论 1.7.14.设 Z、 E_1 和 E_2 是局部凸空间， $U \subseteq Z$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $\mathrm{pr}j\colon E_1 \times E_2 \to E_j$ 是到第 j 个分量的投影，其中 $j \in \{1, 2\}$。那么映射

$$\Phi := (C^k(U, \mathrm{pr}_1), C^k(U, \mathrm{pr}_2))\colon C^k(U, E_1 \times E_2) \to C^k(U, E_1) \times C^k(U, E_2)$$

将 $\gamma \in C^k(U, E_1 \times E_2)$ 映到其分量组成的有序对 $(\mathrm{pr}_1 \circ\gamma, \mathrm{pr}_2 \circ\gamma)$，是一个拓扑向量空间同构。

证明。令 $\lambda_1\colon E_1 \to E_1 \times E_2, x \mapsto (x, 0)$ 和 $\lambda_2\colon E_2 \to E_1 \times E_2, y \mapsto (0, y)$ 为包含映射。对于 $j \in \{1, 2\}$，令 $\pi_j\colon C^k(U, E_1) \times C^k(U, E_2) \to C^k(U, E_j)$ 为到第 j 个分量的投影。由于 λ_1 和 λ_2 是连续线性映射，因而是光滑的，根据推论 1.7.13 可得

$$\Phi^{-1} = C^k(U, \lambda_1) \circ \pi_1 + C^k(U, \lambda_2) \circ \pi_2$$

是连续的。 □

空间 $C^k(U, F)$ 的基本性质

现在我们汇总函数空间 $C^k(U, F)$ 的一些性质，尤其是当 U 是有限维 $\mathbb{K}$-向量空间的子集时。

引理 1.7.15。 设 E 和 F 为局部凸空间， $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集。则线性映射

$$\Phi\colon C^k(U, F) \to \prod_{j \le k} C(U \times E^j, F), \quad f \mapsto (d^j f)_{j \le k}$$

（其中 $j \in \mathbb{N}_0$ 与 $j \le k$）是像为闭集的拓扑嵌入。

证明。根据紧开 C^k-拓扑的定义，显然 Φ 是线性的，且是一个拓扑嵌入。为证明 Φ 的像是闭的，设 $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是 $C^k(U, F)$ 中的一个网，使得

$$\Phi(f_\alpha) \to h$$

对于某个 $h=(h_j)_{j\le k}\in\prod_{j\le k}C(U\times E^j,F)$ 成立。简记 $f:=h_0$。我们断言，对于所有满足 $j\le k$, $x\in U^0$ 且 $(y_1,\dots,y_j)\in E^j$ 的 $j\in\mathbb{N}_0$，迭代方向导数 $d^{(j)}f(x,y_1,\dots,y_j)$ 都存在。若此断言成立，则 h_j 将是 $d^{(j)}(f|_{U^0})$ 的连续延拓，因此 f 将是 C^k，且对所有 j，都有 $d^{(j)}f=h_j$，从而 $\Phi(f)=h$。

为证明该断言，我们可以假设 U 是开的。[14] 只需在基域 $\mathbb{R}$ 上讨论（若 $k\ge 1$ 和每个 f_α 都是 $C^k_{\mathbb{C}}$，且在实数意义下 $d^{(j)}f=h_j$，那么 $df(x,\cdot)=h_1(x,\cdot)$的复线性意味着 f是 $C^k_{\mathbb{C}}$，见引理 1.4.17）。现在，我们对满足 $j\le k$ 的 $j\in\mathbb{N}_0$ 使用归纳法，证明f 是满足 $d^{(j)}f=h_j$的 C^j。根据定义，情形 $j=0$ 成立。若该断言对 $0\le j<k$ 成立，令 $x\in U$且 $y_1,\dots,y_{j+1}\in E$。取满足$x+[-r,r]y_{j+1}\subseteq U$的 $r>0$。根据归纳假设，f是满足 $d^{(j)}f=h_j$的 C^j，因此

$$\gamma(t):=d^{(j)}f(x+ty_{j+1},y_1,\dots,y_j)=h_j(x+ty_{j+1},y_1,\dots,y_j)$$

对于 $t\in[-r,r]$。通过 $\gamma_\alpha(t)$ 定义 $\gamma_\alpha\colon[-r,r]\to E$和 $\eta\colon[-r,r]\to E$，其中 $=d^{(j)}f_\alpha(x+ty_{j+1},y_1,\dots,y_j)$，且 $\eta(t):=h_{j+1}(x+ty_{j+1},y_1,\dots,y_j,y_{j+1})$。由于

$$\gamma_\alpha(t)\to\gamma(t)\quad\text{and}\quad\gamma'_\alpha(t)=d^{(j+1)}f_\alpha(x+ty_{j+1},y_1,\dots,y_{j+1})\to\eta(t)$$

关于 $t\in[-r,r]$一致地，习题 1.1.13(b) 表明 γ 是一个 C^1-曲线，且$\gamma'=\eta$。特别地，$d^{(j+1)}f(x,y_1,\dots,y_{j+1})=\gamma'(0)$ 存在，其表达式为

$$d^{(j+1)}f(x,y_1,\dots,y_{j+1})=\gamma'(0)=\eta(0)=h_{j+1}(x,y_1,\dots,y_{j+1}),$$

这就完成了证明。 □

命题 1.7.16。设 E 是一个可度量化局部凸空间，F 是一个局部凸空间，$k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 $U\subseteq E$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集。那么下述结论成立：

(a) 如果 F 分别是完备、拟完备、序列完备和麦基完备的，那么 $C^k(U,F)$ 也分别是完备、拟完备、序列完备和麦基完备的。(b) 如果 F可度量化且 U 局部紧，那么 $C^k(U,F)$ 可度量化。(c) 如果 F可赋范，U紧且 $k\in\mathbb{N}_0$，那么 $C^k(U,F)$ 可赋范。

证明。(a) 对每个 $j\in\mathbb{N}_0$，拓扑空间 $U\times E^j$ 都可度量化，因此是一个 $k_{\mathbb{R}}$ $\prod_{j\le k}C\ U\times E^j\ F$ $j\in$-空间。$\mathbb{N}_0$
因此，根据引理 A.6.24 (d)、(e)、(h) 和 (i)，局部凸空间 (,)（其中 ）分别是完备、拟完备、序列完备和麦基完备的。由引理 1.7.15 可得这些断言。

(b) 若 U 是局部紧的，则 E 也是局部紧的，因此是一个有限维向量空间。设 $p_1\le p_2\le\cdots$是

[14] 另一种证明思路是约化到引理 1.4.18。不过，我们更倾向于下面的论证，它们并不更长，而且更为初等。

定义其局部凸向量拓扑的 F 上的半范数递增序列，并设 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$是由紧集构成的 U 的一个穷竭（参见习题 A.6.10）。习题 1.7.8 中描述的半范数$\|\cdot\|_{C^j,K_n,p_m}$定义了 $C^k(U,F)$ 上的局部凸向量拓扑，其中 $n,m\in\mathbb{N}$且 $j\in\mathbb{N}_0$满足 $j\le k$。由于半范数集是可数的，根据推论 B.4.12，$C^k(U,F)$可度量化。

(c) 若 p 是 F 上定义其拓扑的范数，则根据 (b) 的证明，$\|\cdot\|_{C^k,U,p}$定义了 $C^k(U,F)$ 的拓扑。□

$C^{k,\ell}$-函数与指数律

定义 1.7.17。设 E_1、E_2和 F 为局部凸空间，$U\subseteq E_1$ 和$V\subseteq E_2$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 $k,\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。若映射 $f\colon U\times V\to F$ 满足 $d^{(0,0)}f:=f$ 连续，且迭代方向导数

$$d^{(i,j)}f(x,y,v_1,\dots,v_i,w_1,\dots,w_j)$$
$$:=(D_{(v_i,0)}\cdots D_{(v_1,0)}D_{(0,w_j)}\cdots D_{(0,w_1)}f)(x,y)$$

对所有满足 $i\le k$ 和 $j\le\ell$的 $i,j\in\mathbb{N}_0$ 均存在，其中 $(x,y)\in U^0\times V^0$ 和 $v_1,\dots,v_i\in E_1$, $w_1,\dots,w_j\in E_2$，并且可连续延拓

$$d^{(i,j)}f\colon U\times V\times E_1^i\times E_2^j\to F.$$

我们赋予空间 $C^{k,\ell}(U\times V,F)$——所有 $C^{k,\ell}$-映射 $f\colon U\times V\to F$的空间——所谓的紧开 $C^{k,\ell}$-拓扑，即关于以下线性映射的始拓扑

$$d^{(i,j)}\colon C^{k,\ell}(U\times V,F)\to C(U\times V\times E_1^i\times E_2^j,F)$$

对所有 i，j，如前所述，右端使用紧开拓扑。

在前述情形下，我们有：

引理 1.7.18。如果 $f\colon U\times V\to F$是一个 $C^{k,\ell}$-映射，那么对于每个 $x\in U$，$f_x:=f(x,\cdot)\colon V\to F$是一个 C^ℓ-映射，并且

$$d^{(j)}(f_x)(y,w_1,\dots,w_j)=d^{(0,j)}f(x,y,w_1,\dots,w_j)\tag{1.85}$$

对于所有满足 $j\le\ell$且 $(y,w_1,\dots,w_j)\in V\times E_2^j$的 $j\in\mathbb{N}$。

证明。如果 $x\in U^0$，那么 $f_x|_{V^0}$是 C^ℓ，其中

$$d^{(j)}(f_x|_{V^0})(y,w)=d^{(0,j)}f(x,y,w)\tag{1.86}$$

对于所有满足 $j\le\ell$、$y\in V^0$和 $w=(w_1,\dots,w_j)\in E_2^j$ 的 $j\in\mathbb{N}$。由于 (1.86) 的右端定义了一个关于 $(y,w)\in V\times E_2^j$ 的连续 F 值函数，因此我们看到 f_x 是 C^ℓ，并且对每个 $x\in U^0$，(1.85) 像之前一样对 j 成立。

若 $x\in U\setminus U^0$，我们可以将引理 1.4.18 应用于 $f|_{X\times V}$，取 $X:=U^0\cup\{x\}$以及 $g_j:=d^{(0,j)}f|_{X\times V\times E_2^j}$，从而再次得到 f_x是 C^k，且 (1.85) 成立。[15] □

[15] 注意，x 是 X 的一个聚点，因为 U^0 在 X 中稠密，且 $x\notin U^0$。

注 1.7.19。 (a) 特别地， $U\times V\subseteq E_1\times E_2$上的 $C^{0,\,\ell}$-映射（按定义 1.7.2 的含义）与定义 1.7.17 中的映射一致（ $C^{k,\,0}$-映射也同样如此）。

(b) 对于 $f\in C^{k,\ell}(U\times V,F)$，与引理 1.7.18 中相同的推理表明，对所有满足 $j\le\ell$、 $y\in V$ 以及 $w_1,\dots,w_j\in E_2$的 $j\in\mathbb{N}_0$， $U\to F$, $x\mapsto d^{(0,j)}f(x,y,w_1,\dots,w_j)$ 是一个 C^k-映射。

到积的映射的表现符合预期。

命题 1.7.20.设 E_1 与 E_2 为局部凸空间， $U\subseteq E_1$ 与 $V\subseteq E_2$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 k、 $\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。设 $(F_a)_{a\in A}$ 为一族局部凸空间。则一个映射

$$f=(f_a)_{a\in A}\colon U\times V\to\prod_{a\in A}F_a$$

是 $C^{k,\ell}$ 当且仅当每个分量 $f_a\colon U\times V\to F_a$ 是 $C^{k,\ell}$。在此情形下，

$$d^{(i,j)}f=(d^{(i,j)}f_a)_{a\in A}\ \textit{for all } i,j\in\mathbb{N}_0\ \textit{such that } i\le k\ \textit{and}\ j\le\ell. \tag{1.87}$$

证明。 设 $F:=\prod_{a\in A}F_a$。 若 f 是 $C^{k,\,\ell}$，则每个分量 f_a 都是连续的。此外，迭代方向导数

$$D_{(v_1,0)}\cdots D_{(v_1,0)}D_{(0,w_j)}\cdots D_{(0,w_1)}f_a(x,y)$$

对所有满足 $i\le k$ 和 $j\le\ell$ 的 i、 $j\in\mathbb{N}_0$，所有 $(x,y)\in U^0\times V^0$ 以及所有 $v=(v_1,\dots,v_i)\in E_1^i$、 $w=(w_1,\dots,w_j)\in E_2^j$ 都存在，并且等于 $\mathrm{pr}_a(d^{(i,j)}f(x,y,v,w))$，因为我们可以将连续线性投影 $\mathrm{pr}_a\colon F\to F_a$ 应用于 f相应的导数。由于映射 $\mathrm{pr}_a\circ d^{(i,j)}f\colon U\times V\times E_1^i\times E_2^j\to F$是连续的，它就是连续延拓 $d^{(i,j)}f_a$，由此可推得 f_a 是 $C^{k,\ell}$。反过来，若每个 f_a 都是 $C^{k,\ell}$，则 f 是连续的。此外，对于所有满足 $i\le k$ 和 $j\le\ell$ 的 i、 $j\in\mathbb{N}_0$，所有 $(x,y)\in U^0\times V^0$ 以及所有 $v=(v_1,\dots,v_i)\in E_1^i$、 $w=(w_1,\dots,w_j)\in E_2^j$，

$$D_{(v_1,0)}\cdots D_{(v_1,0)}D_{(0,w_j)}\cdots D_{(0,w_1)}f(x,y)$$

存在且等于 $(d^{(i,j)}f_a(x,y,v,w))_{a\in A}$，因为极限可以逐分量形成。由于 $(d^{(i,j)}f_a)_{a\in A}\colon U\times V\times E_1^i\times E_2^j\to F$是连续的，我们看到$f$ 是 $C^{k,\ell}$，并且 (1.87) 成立。□

我们记录一个适用于 $C^{k,\ell}$-映射的施瓦茨定理版本。

命题 1.7.21。设 E_1、 E_2 和 F 为局部凸空间， $U\subseteq E_1$ 和 $V\subseteq E_2$ 为开子集， k、 $\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 $f\colon U\times V\to F$ 为 $C^{k,\,\ell}$-映射。设 i、 $j\in\mathbb{N}_0$ 满足 $i\le k$ 和 $j\le\ell$。对于 v_1、……、 $v_i\in E_1$、 w_1、……、 $w_j\in E_2$，定义

$$u_a:=\begin{cases}(v_a,0) & \textit{if } a\in\{1,\dots,i\};\\ (0,w_{a-i}) & \textit{if } a\in\{i+1,\dots,i+j\}.\end{cases}$$

设 $\pi \in S_{i+j}$ 是 $\{1,\dots,i+j\}$ 的一个置换。那么迭代方向导数

$$(D_{u_{\pi(1)}} \cdots D_{u_{\pi(i+j)}} f)(x,y)$$

对所有 $(x, y) \in U \times V$ 都存在，并且等于 $d^{(i,j)} f(x, y, v_1, \dots, v_i, w_1, \dots, w_j)$。

证明。由于 $f(x, \cdot)$ 是 C^ℓ，且 $f(\cdot, y)$ 是 C^k（因此命题 1.3.17 适用于这些映射），我们可以假设 $i, j \geq 1$（从而 $k, \ell \geq 1$）二者均成立。先令 $j = 1$；我们对 $i \in \mathbb{N}$ 进行归纳，并令 $i \leq k$，则

$$(D_{(0,w_1)} D_{(v_i,0)} \cdots D_{(v_1,0)} f)(x,y)$$

对所有 $(x, y) \in U \times V$ 都存在，并且等于 $d^{(i,1)} f(x, y, v_1, \dots, v_i, w_1)$。对于 $i = 1$，这由引理 1.3.16 得出，该引理应用于 $(s, t) \mapsto f(x + sv_1, y + tw_1)$，其中 (s, t) 位于 $\mathbb{K}^2$ 中的一个零邻域内。现在令 $i \geq 2$，并假设将 i 替换为 $i-1$ 时断言成立；于是下列导数存在且彼此相等：

$$D_{(0,w_1)} D_{(v_{i-1},0)} \cdots D_{(v_1,0)} f(x,y) = D_{(v_{i-1},0)} \cdots D_{(v_1,0)} D_{(0,w_1)} f(x,y). \quad (1.88)$$

Then

$$g\colon U \times V \to F, \quad (x,y) \mapsto D_{(v_{i-1},0)} \cdots D_{(v_1,0)} f(x,y)$$

是 $C^{(1,0)}$ 与 $d^{(1,0)} g(x, y, v_i) = d^{(i,0)} f(x, y, v_1, \dots, v_i)$。由 (1.88),

$$D_{(0,w_1)} g(x,y)$$

存在且等于 $d^{(i-1,1)} f(x, y, v_1, \dots, v_{i-1}, w_1)$；因此它在 $(x, y, w_1) \in U \times V \times E_2$ 中连续。最后一个单位元蕴含

$$D_{(v_i,0)} D_{(0,w_1)} g(x,y)$$

存在且等于 $d^{(i,1)} f(x, y, v_1, \dots, v_i, w_1)$，这是 $(x, y, v_i, w_1) \in U \times V \times E_1 \times E_2$ 的连续 F 值函数。因此 $(s, t) \mapsto g(x + sv_i, y + tw_1)$ 满足引理 1.3.16 的假设，我们还可推出

$$D_{(0,w_1)} D_{(v_i,0)} g(x,y) = D_{(0,w_1)} D_{(v_i,0)} \cdots D_{(v_1,0)} f(x,y)$$

存在且等于

$$\begin{aligned} D_{(v_i,0)} D_{(0,w_1)} g(x,y) &= D_{(v_i,0)} D_{(0,w_1)} D_{(v_{i-1},0)} \cdots D_{(v_1,0)} f(x,y) \\ &= D_{(v_i,0)} \cdots D_{(v_1,0)} D_{(0,w_1)} f(x,y), \end{aligned}$$

利用 (1.88) 过渡到第二行。这就完成了归纳步骤。

现在设 $\pi \in S_{i+j}$ 与 $u_1, \dots, u_{i+j}$ 如命题中所述。证明通过对 $i + j$ 作归纳法，其中 $i, j \geq 1$。情形 $i + j = 2$ 已经解决。现在假设 $i + j \geq 3$。

若 $\pi(1) \in \{1,\dots,i\}$，则根据归纳法，$(D_{u_{\pi(2)}} \cdots D_{u_{\pi(i+j)}} f)(x, y)$ 存在，且等于

$$d^{(i-1,j)}f(x,y,v_1,\dots,v_{\pi(1)-1},v_{\pi(1)+1},\dots,v_i,w_1,\dots,w_j).$$

这个关于 $(x,\ y)$ 的函数可以沿方向 $u_{\pi_1}=(v_{\pi(1)},\ 0)$ 求导。因此，下列导数存在且相同：

$$\begin{aligned}&(D_{u_{\pi(1)}}\cdots D_{u_{\pi(i+j)}}f)(x,y)\\&\quad=d^{(i,j)}f(x,y,v_1,\dots,v_{\pi(1)-1},v_{\pi(1)+1},\dots,v_i,v_{\pi(1)},w_1,\dots,w_j)\\&\quad=d^{(i,j)}f(x,y,v_1,\dots,v_i,w_1,\dots,w_j);\end{aligned}$$

最后的等式由命题 1.3.17 得出，因为 $x\mapsto d^{(0,\ j)}f(x,\ y,\ w_1,\ \dots,\ w_j)$ 是 C^k。

若 $\pi(1)\in\{i+1,\dots,i+j\}$，则由归纳法可知下列导数存在且彼此相等：

$$\begin{aligned}&(D_{u_{\pi(2)}}\cdots D_{u_{\pi(i+j)}}f)(x,y)\\&\quad=d^{(i,j-1)}f(x,y,v_1,\dots,v_i,w_1,\dots,w_{\pi(1)-1},w_{\pi(1)+1},\dots,w_j).\end{aligned}$$

现在，$h\colon\ U\times V\to F$，$(x,\ y)\mapsto d^{(0,\ j-1)}f(x,\ y,\ w_1,\ \dots,\ w_{\pi(1)-1},\ w_{\pi(1)+1},\ \dots,\ w_j)$ 是一个 $C^{k,\ 1}$-函数，且

$$\begin{aligned}&d^{(i,1)}h(x,y,v_1,\dots,v_i,w_{\pi(1)})\\&\quad=d^{(i,j)}f(x,y,v_1,\dots,v_i,w_1,\dots,w_{\pi(1)-1},w_{\pi(1)+1},\dots,w_j,w_{\pi(1)})\\&\quad=d^{(i,j)}f(x,y,v_1,\dots,v_i,w_1,\dots,w_j),\end{aligned}$$

利用 $f(x,\ \cdot)$ 是 C^ℓ 这一点，结合命题 1.3.17，可重新排列对第二个变量的求导次序。根据上面已处理的情形 $j=1$，

$$D_{u_{\pi(1)}}\cdots D_{u_{\pi(i+j)}}f(x,y)=D_{w_{\pi(1)}}D_{(v_i,0)}\cdots D_{(v_1,0)}h(x,y)$$

存在且等于

$$d^{(i,1)}h(x,y,v_1,\dots,v_i,w_{\pi(1)})=d^{(i,j)}f(x,y,v_1,\dots,v_i,w_1,\dots,w_j).\qquad\square$$

推论 1.7.22。设 E_1、E_2 和 F 为局部凸空间，$U\subseteq E_1$ 和 $V\subseteq E_2$ 为具有稠密内部的局部凸子集，k、$\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 $f\colon\ U\times V\to F$ 为一个 $C^{k,\ \ell}$-映射。那么

$$g\colon V\times U\to F,\quad g(y,x):=f(x,y)$$

是一个 $C^{\ell,\ k}$-映射，并且

$$d^{(j,i)}g(y,x,w_1,\dots,w_j,v_1,\dots,v_i)=d^{(i,j)}f(x,y,v_1,\dots,v_i,w_1,\dots,w_j)\quad(1.89)$$

对所有满足 $i\le k$ 和 $j\le\ell$ 的 $i,j\in\mathbb{N}_0$，$x\in U$，$y\in V$，$v=(v_1,\dots,v_i)\in E_1^i$ 以及 $w=(w_1,\dots,w_j)\in E_2^j$。

证明。 根据命题 1.7.21，方向导数 $d^{(j,i)}g(y,\ x,\ w,\ v)$ 存在，当 $(x,\ y) \in V^0 \times U^0$，且由 (1.89) 给出。由于 (1.89) 的右端给出了到所有 $(y,\ x,\ w,\ v) \in V \times U \times E_2^j \times E_1^i$ 的连续延拓，我们可知 g 是 $C^{\ell,\ k}$，且 (1.89) 成立。□

引理 1.7.23.设 E_1、E_2 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E_1$ 为具有稠密内部的局部凸子集，$k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $f\colon\ U \times E_2 \to F$ 为一个 $C^{k,\ 0}$-映射，使得对每个 $x \in U$，$f_x\colon = f(x,\cdot)\colon E_2 \to F$ 都是线性的。那么 f 是 $C^{k,\ \infty}$。

证明。 根据定义，在 $(x,\ y) \in U^0 \times E_2$ 处，关于第一个变量的 i 阶方向导数存在，并且存在连续延拓 $d_{(i,\ 0)}f$，对所有满足 $i \leq k$ 的 $i \in \mathbb{N}$ 均成立。利用 f_x 是连续线性的这一点，我们得到

$$d^{(0,1)}f(x,y,w_1) = f(x,w_1) \tag{1.90}$$

对所有 $(x,\ y,\ w_1) \in U^0 \times E_2 \times E_2$ 均成立，并且（由于 (1.90) 与 y 无关）

$$d^{(0,j)}f(x,y,w_1,\ldots,w_j) = 0 \text{ for all } (x,y,w_1,\ldots,w_j) \in U^0 \times E_2^{j+1},$$

对所有 $j \in \mathbb{N}$ 满足 $j \geq 2$。在这两种情况下，我们都可以对第一个变量取方向导数；对于像之前一样的 i 以及 v_1、.....、$v_i \in E_1$，我们得到

$$d^{(i,1)}f(x,y,v_1,\ldots,v_i,w_1) = d^{(i,0)}f(x,w_1,v_1,\ldots,v_i) \quad \text{and}$$
$$d^{(i,j)}f(x,y,v_1,\ldots,v_i,w_1,\ldots,w_j) = 0.$$

由于上一个方程和倒数第二个方程的右端分别在 $U \times E_2 \times E_1^i \times E_2$ 和 $U \times E_2 \times E_1^i \times E_2^j$ 上定义了取值于连续F的函数，我们看到 f 是 $C^{k,\ \infty}$。□

注 1.7.24。设 E_1、E_2 和 F 为局部凸空间，$V \subseteq E_2$ 为具有稠密内部的局部凸子集，$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $g\colon\ E_1 \times V \to F$ 为一个 $C^{0,\ \ell}$-映射，使得对于每个 $y \in V$，$g^y := g(\cdot,\ y)\colon\ E_1 \to F$ 都是线性的。那么 g 是 $C^{\infty,\ \ell}$（因为我们可以结合推论 1.7.22 和引理 1.7.23）。

引理 1.7.25。设 E 是有限维向量空间，F 是局部凸空间，$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集。如果 U 是局部紧的，那么求值映射

$$\varepsilon\colon C^\ell(U,F) \times U \to F, \quad (f,x) \mapsto f(x)$$

是一个 $C^{\infty,\ \ell}$-映射。

证明。 由于包含映射 $C^\ell(U,F) \to C(U,F)$ 是连续的，由引理 A.6.12 可知 ε 是连续的，进而 $C^{0,0}$。现在假设 $\ell \geq 1$。对于固定的 $f \in C^\ell(U,F)$，我们有

$$\varepsilon(f,\cdot) = f.$$

由此显然可知，对于所有满足 $j \le \ell$、$x \in U^0$ 和 $y_1, \dots, y_j \in E$ 的 $j \in \mathbb{N}$，导数 $d^{(0,j)}\varepsilon(f, x, y_1, \dots, y_j)$ 均存在，且由下式给出

$$d^{(0,j)}\varepsilon(f, x, y_1, \dots, y_j) = d^{(j)}f(x, y_1, \dots, y_j).$$

到 $(f, x, y_1, \dots, y_j) \in C^\ell(U, F) \times U \times E^j$ 的一个延拓由函数给出

$$h_j \colon C^\ell(U, E) \times U \times E^j \to F, \quad (f, x, y_1, \dots, y_j) \mapsto \varepsilon_j(d^{(j)}f, (x, y_1, \dots, y_j)),$$

其中 $\varepsilon_j \colon C(U \times E^j, F) \times (U \times E^j) \to F$ 是求值映射。现在，根据引理 A.6.12，ε_j 是连续的，而映射

$$d^{(j)} \colon C^\ell(U, F) \to C(U \times E^j, F), \quad f \mapsto d^{(j)}f$$

根据紧开 C^ℓ-拓扑的定义是连续的。因此，h_j 是连续的，并且我们推得 ε 是 $C^{0,\ell}$，其中

$$d^{(0,j)}\varepsilon(f, x, y_1, \dots, y_j) = d^{(j)}f(x, y_1, \dots, y_j)$$

对所有满足 $j \in \mathbb{N}$ 的 $j \le \ell$、$x \in U$ 和 $y_1, \dots, y_j \in E$ 均成立。由于 $\varepsilon(f, x)$ 关于 f 是线性的，我们推得 ε 是 $C^{\infty,\ell}$（见注 1.7.24）。□

命题 *1.7.26*（C^r,^{s}-映射的链式法则 *1*）。 设 E_1、E_2、F_1、F_2 和 F 为局部凸空间，$U_1 \subseteq E_1$、$U_2 \subseteq E_2$、$V_1 \subseteq F_1$ 和 $V_2 \subseteq F_2$ 为具有稠密内部的局部凸子集，r、$s \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$、$g\colon V_1 \times V_2 \to F$ 为一个 C^r,^{s}-映射，$f_1\colon U_1 \to F_1$ 为一个 C^r-映射，且 $f_1(U_1) \subseteq V_1$；$f_2\colon U_2 \to F_2$ 为一个 C^s-映射，且 $f_2(U_2) \subseteq V_2$。那么，下述映射也是 C^r,^{s}：

$$g \circ (f_1 \times f_2) \colon U_1 \times U_2 \to F, \quad (x, y) \mapsto g(f_1(x), f_2(y)).$$

证明。 设 $h := g \circ (f_1 \times f_2)$；首先假设 U_1 和 U_2 是开集。令 k，$\ell \in \mathbb{N}_0$，其中 $k \le r$ 且 $\ell \le s$。我们证明迭代方向导数

$$d^{(k,\ell)}h(x, y, v, w)$$

对所有 $x \in U_1$、$y \in U_2$、$v = (v_1, \dots, v_k) \in E_1^k$ 和 $w = (w_1, \dots, w_\ell) \in E_2^\ell$ 均存在。此外，我们将得到 $d^{(k,\ell)}h(x, y, v, w)$ 的显式公式，这些公式表明它是一个以 F 为值的连续函数，其自变量为 (x, y, v, w)。

若 $\ell \ge 1$，则根据引理 1.7.18，$g(f_1(x), \cdot)\colon V_2 \to F$，$z \mapsto g(f_1(x), z)$ 是一个 C^s-映射，其 j 阶微分为 $d^{(0,j)}g(f_1(x), \cdot)$，其中 $j \in \mathbb{N}$ 且 $j \le s$。因此，根据链式法则（命题 1.4.10），$U_2 \to F$，$y \mapsto g(f_1(x), f_2(y))$ 是一个 C^s-映射，其 ℓ 阶微分将 $(y, w) \in U_2 \times E_2^\ell$ 映为

$$\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{P \in P_{\ell,j}} d^{(0,j)}g(f_1(x), f_2(y), d^{(|I_1|)}f_2(y, w_{I_1}), \dots, d^{(|I_j|)}f_2(y, w_{I_j})), \quad (1.91)$$

根据 Fa`a di Bruno 公式（定理 1.3.18 和注 1.4.15(c)），并使用其中引入的记号，且 $P = \{I_1, \dots, I_j\}$。因此，$d^{(0,\ell)}h(x, y, w)$ 由 (1.91) 给出，因此 $d^{(0,\ell)}h$ 是连续的。

同样，若 $k \geq 1$ 和 $\ell = 0$，我们发现 $d^{(k,0)}h(x,\ y,\ v)$ 存在且等于

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{Q \in P_{k,i}} d^{(i,0)} g(f_1(x), f_2(y), d^{(|J_1|)} f_1(x, v_{J_1}), \ldots, d^{(|J_i|)} f_1(x, v_{J_i})) \quad (1.92)$$

其中 $Q = \{J_1, \ldots, J_i\}$。因此，$d^{(k,0)}h$ 是连续的。

若 $k, \ell \geq 1$，我们利用 $V_1 \to F,\ z \mapsto d^{(0,j)}g(z,u)$ 是一个 C^r-映射这一点，其中 $u \in V_2 \times F_2^j$ 给定为

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_j) := (f_2(y), d^{(|I_1|)} f_2(y, w_{I_1}), \ldots, d^{(|I_j|)} f_2(y, w_{I_j}))$$

（记号同 (1.91)），其第 i 阶微分将 $(z_0, z_1, \ldots, z_i) \in V_1 \times F_1^i$ 映为 $d^{(i,j)}g(z_0, u_0, z_1, \ldots, z_i, u_1, \ldots, u_j)$（见注 1.7.19(b)）。因此，根据链式法则（命题 1.4.10），$U_1 \to F$，$x \mapsto d^{(0,\ell)}h(x,y,w)$ 是一个 C^r-映射，其第 k 阶微分将 $(x,v) \in U_1 \times E_1^k$ 映为

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{Q \in P_{k,i}} \sum_{P \in P_{\ell,j}} d^{(i,j)} g\big(f_1(x), f_2(y), d^{(|J_1|} f_1(x, v_{J_1}), \ldots, d^{(|J_i|)} f_1(x, v_{J_i}),$$
$$d^{(|I_1|)} f_2(y, w_{I_1}), \ldots, d^{(|I_j|)} f_2(y, w_{I_j})\big). \quad (1.93)$$

因此，$d^{(k,\ell)}h(x,\ y,\ v,\ w)$存在，且由（1.93）给出；因此，$d^{(k,\ \ell)}h$ 是连续的。

对于一般的 U_1 和 U_2，对所有满足 $k \leq r$ 和 $\ell \leq s$的 $k,\ \ell \in \mathbb{N}_0$，迭代方向导数 $d^{(k,\ell)}h(x,\ y,\ v,\ w)$均存在，且分别由（1.91）、（1.92）和（1.93）给出，对所有$(x,\ y,\ v,\ w) \in U_1^0 \times U_2^0 \times E_1^k \times E_2^\ell$均成立。由于（1.91）、（1.92）和（1.93）定义了连续映射

$$d^{(k,\ell)}h \colon U_1 \times U_2 \times E_1^k \times E_2^\ell \to F$$

它们延拓了 $d^{(k,\ \ell)}(h|_{U_1^0 \times U_2^0})$，由此可知 h 是 $C^{r,\ s}$。 □

注 1.7.27。由（1.91）、（1.92）和（1.93）给出的 $d^{(k,\ell)}h(x,\ y,\ v,\ w)$ 的表达式，分别是在 $k = 0$、$\ell = 0$以及$k,\ \ell \neq 0$这些情形下，Fa`a di Bruno 公式关于 $h := g \circ (f_1 \times f_2)$的微分 $d^{(k,\ell)}h$ 的类似形式。

命题 1.7.28（$C^{r,\ s}$-映射的链式法则 2）。设 E_1、E_2、F 和 H 为局部凸空间，$U \subseteq E_1$、$V \subseteq E_2$ 和 $W \subseteq F$ 为具有稠密内部的局部凸子集，r、$s \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$、$f\colon\ U \times V \to F$ 为一个 $C^{r,\ s}$-映射，使得 $f(U \times V) \subseteq W$，且 $g\colon\ W \to H$ 为一个 C^{r+s}-映射。那么 $g \circ f\colon\ U \times V \to H$ 也是一个 $C^{r,\ s}$-映射。

证明。设 $h := g \circ f$。对于满足 $k \leq r$ 和 $\ell \leq s$ 的 $k,\ \ell \in \mathbb{N}_0$，我们证明

$$d^{(k,\ell)}h(x,y,v,w)$$

对所有 $x \in U^0, y \in V^0, v = (v_1, \ldots\ldots, v_k) \in E_1^k$和 $w = (w_1, \ldots\ldots, w_\ell) \in E_2^\ell$均存在。

若 $\ell \geq 1$，则根据引理 1.7.18，$f(x,\ \cdot): V^0 \to F, y \mapsto f(x,\ y)$ 是一个 C^s-映射，其 j 阶微分为 $d_{(0,\ j)}f(x,\ \cdot)$，其中 $j \in \mathbb{N}$ 满足 $j \leq s$。因此，根据链式法则（命题 1.4.10），$V^0 \to F, y \mapsto g(f(x,\ y))$ 是一个 C^s-映射，其 ℓ 阶微分将 $(y,\ w) \in V^0 \times E_2^\ell$ 映射为

$$\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{P \in P_{\ell,j}} d^{(j)} g(f(x,y), d^{(0,|I_1|)} f(x,y,w_{I_1}), \ldots, d^{(0,|I_j|)} f(x,y,w_{I_j})), \quad (1.94)$$

根据 Fa`a di Bruno 公式（定理 1.3.18 和注 1.4.15(c)），并采用其中引入的记号，且 $P = \{I_1, \ldots, I_j\}$。因此，$d^{(0,\ell)}h(x,y,w)$ 由公式 (1.94) 给出。

同样，若 $k \geq 1$ 且 $\ell = 0$，我们发现 $d^{(k,0)}h(x,y,v)$ 存在，且等于

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{Q \in P_{k,i}} d^{(i)} g(f(x,y), d^{(|J_1|,0)} f(x,y,v_{J_1}), \ldots, d^{(|J_i|,0)} f(x,y,v_{J_i})) \quad (1.95)$$

其中 $Q = \{J_1, \ldots, J_i\}$。

若 $k, \ell \geq 1$，我们利用 ${\theta^y}_{,P}{}^w: U \to W \times F^j$，

$$x \mapsto \big(f(x,y), d^{(0,|I_1|)} f(x,y,w_{I_1}), \ldots, d^{(0,|I_j|)} f(x,y,w_{I_j})\big)$$

是一个 C^r-映射（见注 1.7.19(b)），其中

$$d^{(m)}\theta_P^{y,w}(x,u) = \big(d^{(m,0)} f(x,y,u), d^{(m,|I_1|)} f(x,y,u,w_{I_1}), \ldots, d^{(m,|I_j|)} f(x,y,u,w_{I_j})\big) \quad (1.96)$$

对于 $x \in U$、$m \in \mathbb{N}$，其中 $m \leq r$，且 $u \in E_1^m$。因此 $U^0 \to F$，

$$x \mapsto d^{(0,\ell)}h(x,y,w) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{P \in P_{\ell,j}} d^{(j)} g(\theta_P^{y,w}(x))$$

根据链式法则（命题 1.4.10），这是一个 C^r-映射，其 k 阶微分将 $(x,\ v) \in U^0 \times E_1^k$ 映射为

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{Q \in P_{k,i}} \sum_{P \in P_{\ell,j}} d^{(i+j)} g\big(\theta_P^{y,w}(x), d^{(|J_1|)}\theta_P^{y,w}(x, v_{J_1}), \ldots, d^{(|J_i|)}\theta_P^{y,w}(x, v_{J_i})\big). \quad (1.97)$$

因此，对于所有 $\in U^0 \times V^0 \times E_1^k \times E_2$，$d^{(k,\ell)}h(x,y,v,w)$ 均存在，且由 (1.97) 给出。现在，(1.96) 表明，对于所有 $a \in \{1, \ldots, i\}$，$d^{(|J_a|)}{\theta^y}_{,P}{}^w(x, v_{J_a})$ 是 $(x,y,v,w) \in U \times V \times E_1^k \times E_2^\ell$ 的连续函数。因此，(1.97) 定义了一个 $(x,y,v,w) \in U_1 \times U_2 \times E_1^k \times E_2^\ell$ 的连续函数 $d^{(k,\ell)}h$，它延拓了 $d^{(k,\ell)}(h|_{U_1^0 \times U_2^0})$。同样，(1.94) 和 (1.95) 分别给出连续延拓 $d^{(k,\ell)}h$，条件分别是 $k = 0$ 和 $\ell = 0$。因此，h 是 $C^{r,s}$。□

注 1.7.29. (a) 由 (1.94)、(1.95) 和 (1.97)（连同 (1.96)）给出的 $d^{(k,\ell)}(g \circ f)(x,y,v,w)$ 的表达式，是 Fa`a di Bruno 公式在不同情形下关于微分 $d^{(k,\ell)}(g \circ f)$ 的类似表达式，分别对应 $k = 0$、$\ell = 0$、$k, \ell \neq 0$。

(b) 若 $\ell = 0$，则在命题 1.7.26 和 1.7.28 中，U_2 和 V_2（分别为 V）可以替换为豪斯多夫拓扑空间。同样，若$k = 0$，则在上述命题中，U_1 和 V_1（分别为 U）可以替换为豪斯多夫拓扑空间。

初读时，可以重点关注下一个定理的情形 (a)。关于 $k_{\mathbb{R}}$-空间的概念，参见附录中的 A.6.15(c)。

定理 1.7.30（空间的指数律 $C^{k,\ell}$-函数）。设E_1、E_2和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E_1$ 和 $V \subseteq E_2$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 k、$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。若 $f \in C^{k,\ell}(U \times V, F)$，令$f^\vee(x) := f_x := f(x,\cdot)$，其中 $x \in U$。那么

$$f^\vee : U \to C^\ell(V,F)$$

是一个 C^k-映射，且该映射

$$\Phi : C^{k,\ell}(U \times V, F) \to C^k(U, C^\ell(V,F)), \quad f \mapsto f^\vee$$

是线性的，且是一个拓扑嵌入。如果

(a) V是局部紧的；或 (b)$U \times V \times E_1^i \times E_2^j$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间，对于所有满足 $i \leq k$ 和 $j \leq \ell$ 的 i、$j \in \mathbb{N}_0$，

那么 Φ 是拓扑向量空间同构。

注 1.7.31。(a) 若 $k = 0$，则在定理 1.7.30 的设定中，U 可替换为豪斯多夫拓扑空间（忽略符号 E_1^0）。同样，若 $\ell = 0$，则 V 可替换为豪斯多夫拓扑空间。

(b) 设 $g\colon U \to C^\ell(V, F)$ 是一个映射。若 Φ 是同构，则 g 是 C^k 当且仅当

$$g^\wedge : U \times V \to F, \quad g^\wedge(x,y) := g(x)(y)$$

是 $C^{k,\ell}$。[如果 g是 C^k，那么 $g^\wedge = \Phi^{-1}(g) \in C^{k,\ell}(U \times V, F)$。如果 $g^\wedge \in C^{k,\ell}(U \times V, F)$，那么 $g = \Phi(g^\wedge) \in C^k(U, C^\ell(V, F))$。]

(c) 设 $f\colon U \times V \to F$是一个 $C^{k,\ell}$-映射。我们将在定理 1.7.30 的证明中看到

$$(d^{(j)} \circ (d^{(i)} f^\vee))(x,v)(y,w) = d^{(i,j)} f(x,y,v,w) \tag{1.98}$$

对所有 i，$j \in \mathbb{N}_0$满足 $i \leq k$和 $j \leq \ell$的情况，以及所有 $(x, y, v, w) \in U \times V \times E_1^i \times E_2^j$，

定理 1.7.30 的证明。由引理 1.7.18 可知，对于每个 $x \in U$， $f^\vee(x) = f_x \in C^\ell(V, F)$。

映射 $f^\vee\colon U \to C^\ell(V,F)$ 是连续的。当

$$d^{(j)} \circ f^\vee \colon U \to C(V \times E_2^j, F)$$

对每个满足 $j \le \ell$ 的 $j \in \mathbb{N}_0$，映射都是连续的，因为 $C^\ell(V, F)$ 上的拓扑是关于映射 $d^{(j)}\colon C^\ell(V, F) \to C(V \times E_2^j, F)$ 的初始拓扑，其中 j 同前。若 $x \in U$、$y \in V$ 和 $w \in E_2^j$，则有

$$(d^{(j)} \circ f^\vee)(x)(y,w) = d^{(j)}(f_x)(y,w) = d^{(0,j)}f(x,y,w) = (d^{(0,j)}f)^\vee(x)(y,w).$$

因此

$$d^{(j)} \circ f^\vee = (d^{(0,j)}f)^\vee,$$

若将 $d^{(0,j)}f$ 视为连续函数 $U \times (V \times E_2^j) \to F$。根据命题 A.6.17(a)，映射 $(d^{(0,j)}f)^\vee\colon U \to C(V \times E_2^j, F)$（因此 $d^{(j)} \circ f^\vee$ 也）是连续的。

映射 $f^\vee\colon U \to C^\ell(V, F)$ 是 C^k。为说明这一点，我们用归纳法证明，对于每个满足 $i \le k$ 的 $i \in \mathbb{N}$， $f^\vee\colon U \to C^\ell(V, F)$ 都是 C^i，并且

$$d^{(i)}(f^\vee)(x,v) = (d^{(i,0)}f)(x,\cdot,v) \tag{1.99}$$

对所有 $x \in U$ 和 $v \in E_1^i$。两次应用推论 1.7.22，可知映射

$$h_i\colon (U \times E_1^i) \times V \to F, \quad ((x,v),y) \mapsto d^{(i,0)}f(x,y,v)$$

是 $C^{0,\,\ell}$，其中

$$d^{(0,j)}h_i((x,v),y,w) = d^{(i,j)}f(x,y,v,w)$$

对所有 $(x,\ v,\ y,\ w) \in U \times E_1^i \times V \times E_2^j$。因此

$$h_i^\vee\colon U \times E_1^i \to C^\ell(V,F), \quad (x,v) \mapsto (d^{(i,0)}f)(x,\cdot,v)$$

是连续的，由前面处理的情形 $i = 0$ 可知，其中

$$(d^{(j)} \circ (h_i^\vee))(x,v)(y,w) = d^{(i,j)}f(x,y,v,w). \tag{1.100}$$

因此，只需证明 (1.99) 左端的迭代方向导数存在，且对所有 $x \in U^0$ 和 $v \in E_1^i$，均与 $h_i^\vee(x,\ v)$ 相同；那么 $f^\vee$ 将是 C^i 和[16]

$$d^{(i)}(f^\vee) = h_i^\vee. \tag{1.101}$$

若 $i = 1$，则对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $x + \mathbb{D}_\varepsilon v \subseteq U^0$。对于 $t \in \mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{0\}$，考虑

$$\Delta_t := \frac{f^\vee(x+tv) - f^\vee(x)}{t} \in C^\ell(V,F).$$

[16] 注意，(1.100) 和 (1.101) 蕴含 (1.98)。

我们证明

$$d^{(j)}(\Delta_t) \to d^{(j)}(h_i^\vee(x,v))$$

作为 $t \to 0$。由于 $d^{(0,j)}f\colon U \times (V \times E_2^j) \to F$ 是 $C^{1,0}$，因此存在一个连续映射

$$(d^{(0,j)}f)^{[1,0]}\colon U^{[1]} \times (V \times E_2^j) \to F$$

它扩展了差商映射，如引理 1.7.6 所示。根据命题 A.6.17，相应映射

$$((d^{(0,j)}f)^{[1,0]})^\vee\colon U^{[1]} \to C(V \times E_2^j, F)$$

是连续的。现在

$$\begin{aligned}(d^{(j)}(\Delta_t))(y,w) &= \frac{(d^{(j)} \circ f^\vee)(x+tv) - (d^{(j)} \circ f^\vee)(x)}{t}(y,w)\\ &= \frac{(d^{(0,j)}f)^\vee(x+tv) - (d^{(0,j)}f)^\vee(x,v)}{t}(y,w)\\ &= \frac{d^{(0,j)}f(x+tv,y,w) - d^{(0,j)}f(x,y,w)}{t}\\ &= (d^{(0,j)}f)^{[1,0]}((x,v,t),(y,w)).\end{aligned}$$

因此

$$d^{(j)}(\Delta_t) = ((d^{(0,j)}f)^{[1,0]})^\vee(x,v,t),$$

其收敛到

$$((d^{(0,j)}f)^{[1,0]})^\vee(x,v,0)\colon (y,w) \mapsto d^{(1,j)}f(x,y,v,w)$$

（这等于 $(d^{(j)} \circ h_1^\vee)\ (x,\ v)$），当 $t \to 0$ 时。

现在假设 $2 \le i \le k$，并且已证明用 i 替换 $i-1$ 时，(1.99) 成立。令 $x \in U^0$ 和 $v = (v_1, \ldots\ldots, v_i) \in E_1^i$。设 $v' := (v_1, \ldots\ldots, v_{i-1})$。对于某个 $\varepsilon > 0$，我们有 $x + \mathbb{D}_\varepsilon v_i \subseteq U^0$。对于 $t \in \mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{0\}$，考虑

$$\Delta_t := \frac{d^{(i-1)}(f^\vee)(x+tv_i,v') - d^{(i-1)}(f^\vee)(x,v')}{t} \in C^\ell(V,F).$$

我们证明

$$d^{(j)}(\Delta_t) \to d^{(j)}(h_i^\vee(x,v))$$

当 $t \to 0$ 时。由于 $d^{(i-1,j)}f\colon U \times (V \times E_1^{i-1} \times E_2^j) \to F$ 是 $C^{1,0}$，存在一个连续映射

$$(d^{(i-1,j)}f)^{[1,0]}\colon U^{[1]} \times (V \times E_1^{i-1} \times E_2^j) \to F$$

按照引理 1.7.6 扩展差商映射。因此，

$$g\colon U^{[1]} \times (V \times E_2^j) \to F, \quad (x,u,t,y,w) \mapsto (d^{(i-1,j)}f)^{[1,0]}((x,u,t),(y,v',w))$$

是连续的。根据命题 A.6.17，相应映射

$$g^\vee\colon U^{[1]} \to C(V \times E_2^j, F)$$

是连续的。现在

$$\begin{aligned} d^{(j)}(\Delta_t)(y,w) &= \frac{(d^{(j)} \circ h_{i-1}^\vee)(x+tv_i, v') - (d^{(j)} \circ h_{i-1}^\vee)(x,v')}{t}(y,w) \\ &= \frac{d^{(i-1,j)}f(x+tv_i, y, v', w) - d^{(i-1,j)}f(x,y,v',w)}{t} \\ &= g^\vee(x, v_i, t)(y,w) \end{aligned}$$

因此

$$d^{(j)}(\Delta_t) = g^\vee(x, v_i, t),$$

它收敛到

$$g^\vee(x, v_i, 0)\colon (y,w) \mapsto d^{(i,j)}f(x,y,v,w)$$

（即，收敛到 $(d^{(j)} \circ h_i^\vee)(x,v)$），当 $t \to 0$ 时。根据前面的结果，$f^\vee \in C^k(U, C^\ell(V, F))$，因此可以定义 Φ。显然，Φ是线性且单射的。

映射 Φ 是一个拓扑嵌入。为此，设 $\mathcal{O}$ 是 $C^{k,\ell}(U \times V, F)$ 上的紧开 $C^{k,\ell}$-拓扑，设 $\mathcal{T}$是关于 Φ 在$C^{k,\ell}(U\times V, F)$ 上的始拓扑，它使 Φ 成为拓扑嵌入。根据始拓扑的传递性，$\mathcal{T}$是关于以下映射的始拓扑

$$d^{(i)} \circ \Phi\colon C^{k,\ell}(U \times V, F) \to C(U \times E_1^i, C^\ell(V,F)).$$

由于 $C^\ell(V,F)$ 上的拓扑是相对于映射 $d^{(j)}\colon C^\ell(V,F) \to C(V \times E_2^j, F)$ 的初始拓扑，由引理 A.6.4 可推出，$C(U \times E_1^i, C^\ell(V,F))$ 上的拓扑是相对于映射的初始拓扑

$$C(U\times E_1^i, d^{(j)})\colon C(U\times E_1^i, C^\ell(V,F)) \to C(U\times E_1^i, C(V\times E_2^j, F)),\ \gamma \mapsto d^{(j)}\circ\gamma.$$

因此，$\mathcal{T}$是相对于这些映射的初始对象

$$\varphi_{i,j} := C(U \times E_1^i, d^{(j)}) \circ d^{(i)}.$$

现在，$\mathcal{O}$ 是相对于这些映射的初始对象

$$d^{(i,j)}\colon C^{k,\ell}(U \times V, F) \to C(U \times V \times E_1^i \times E_2^j, F).$$

引理 A.6.9 表明，该映射

$$\Theta_{i,j}\colon C(U \times V \times E_1^i \times E_2^j, F) \to C(U \times E_1^i \times V \times E_2^j, F)$$

由 $\Theta_{i,j}(\gamma)(x,v,y,w) := \gamma(x,y,v,w)$ 给出，它是一个同胚，因此其定义域带有关于 $\Theta_{i,j}$ 的始拓扑。由命题A.6.17，该映射

$$\Psi_{i,j}\colon C(U\times E_1^i\times V\times E_2^j,F)\to C(U\times E_1^i,C(V\times E_2^j,F)),\ \ \gamma\mapsto\gamma^\vee$$

是一个拓扑嵌入，因此其定义域带有关于 $\Psi_{i,j}$ 的始拓扑。故由始拓扑的传递性， $\mathcal{O}$ 是关于映射 $\Psi_{i,j}\circ\Theta_{i,j}\circ d^{(i,j)}$ 的始拓扑。由于

$$\Psi_{i,j}\circ\Theta_{i,j}\circ d^{(i,j)}=\varphi_{i,j},$$

由此我们推得 $\mathcal{O}=\mathcal{T}$。因此 Φ 是一个拓扑嵌入。

若条件 (a) 成立，则 Φ 是满射。为此，令 $g\in C^k(U,C^\ell(V,F))$。由于我们假设 V 是局部紧的（条件（a）），求值映射 $\varepsilon\colon C^\ell(V,F)\times V\to F$ 是 $C^{\infty,\ell}$（引理 1.7.25），因此

$$g^\wedge:=\varepsilon\circ(g\times\mathrm{id}_V)\colon U\times V\to F,\quad (x,y)\mapsto g(x)(y)$$

根据链式法则 1（命题 1.7.26），是 $C^{k,\ell}$。现在 $\Phi(g^\wedge)=g$，因为对所有 $x\in U$ 和 $y\in V$，$(g^\wedge)^\vee(x)(y)=(g^\wedge)_x(y)=g^\wedge(x,y)=g(x)(y)$。

若条件 (b) 成立，则 Φ 是满射。为此，令 $g\in C^k(U,C^\ell(V,F))$。上文中的每个映射 $\Psi_{i,j}$ 都是同胚（见命题 A.6.17），因此

$$\Psi_{i,j}\circ\Theta_{i,j}\colon C(U\times V\times E_1^i\times E_2^j,F)\to C(U\times E_1^i,C(V\times E_2^j,F))$$

是一个同胚。因此，存在唯一的 $f_{i,\,j}\in C(U\times V\times E_1^i\times E_2^j,\ F)$，使得

$$(\Psi_{i,j}\circ\Theta_{i,j})(f_{i,j})=d^{(j)}\circ(d^{(i)}g).\tag{1.102}$$

那么 $f:=f_{0,0}\in C(U\times V,F)$ 满足 $f^\vee=g$。因此， $\Phi(f)=g$，如果我们能够证明 f 是 $C^{k,\ell}$。只需证明，对于所有满足 $i\le k$ 和 $j\le\ell$ 的 $i,j\in\mathbb{N}_0$，以及所有 $v\in E_1^i$，还有 $w\in E_2^j$（若 $(x,y)\in U^0\times V^0$），迭代方向导数 $d_{(i,j)}f(x,y,v,w)$ 存在且等于 $f_{i,j}(x,y,v,w)$。如果能够证明，对于每个有限维向量子空间 $H\subseteq E_2$，$f|_{U^0\times(V^0\cap H)}$ 都是 $C^{k,\ell}$，那么这就成立，并且

$$d^{(i,j)}(f|_{U^0\times(V^0\cap H)})=f_{i,j}|_{U^0\times(V^0\cap H)\times E_1^i\times H^j}\tag{1.103}$$

对所有 $i,\ j$ 都与之前一样。令 $\lambda\colon H\to E_2$ 为包含映射。由于 $\lambda|_{V^0\cap H}$ 是 C^ℓ，限制映射

$$\rho:=C^\ell(\lambda|_{V^0\cap H},F)\colon C^\ell(V,F)\to C^\ell(V^0\cap H,F),\quad \eta\mapsto\eta|_{V^0\cap H}$$

是连续线性的（参见命题 1.7.11），因此是光滑的，这意味着

$$g_H:=\rho\circ g|_{U^0}\colon U^0\to C^\ell(V^0\cap H,F)$$

是 C^k。由于 $V^0\cap H$ 是局部紧的，我们知道

$$(g_H)^\wedge\colon U^0\times(V^0\cap H)\to F$$

是一个 $C^{k,\ell}$-映射，满足

$$(d^{(j)} \circ (d^{(i)} g_H))(x,v)(y,w) = d^{(i,j)} g_H^{\wedge}(x,y,v,w) \tag{1.104}$$

（参见（1.98））。于是，对于所有 $(x,y) \in U^0 \times (V^0 \times H)$，$g_H^{\wedge}(x,y) = g_H(x)(y) = g(x)(\lambda(y)) = g(x)(y) = f(x,y)$，因此 $f|_{U^0 \times (V^0 \cap H)} = g_H^{\wedge}$ 是 $C^{k,\ell}$，并且

$$(d^{(i,j)} f)|_{U^0 \times (V^0 \cap H) \times E_1^i \times H^j} = d^{(i,j)}(g_H^{\wedge}). \tag{1.105}$$

我们有 $d^{(i)}(g|_{U^0}) = (d^{(i)} g)|_{U^0 \times E_1^i}$，因此

$$d^{(i)} g_H = \rho \circ d^{(i)}(g|_{U^0}) = \rho \circ (d^{(i)} g)|_{U^0 \times E_1^i}, \tag{1.106}$$

利用 ρ 是连续且线性的。此外，

$$d^{(j)}(\rho(\gamma)) = d^{(j)}(\gamma|_{V^0 \cap H}) = (d^{(j)}\gamma)|_{(V^0 \cap H) \times H^j}$$

对每个 $\gamma \in C^{\ell}(V,F)$ 都成立。将此应用于 $\gamma := (d^{(i)} g_H)(x,v)$（如（1.106）中所示），其中 $x \in U^0$ 和 $v \in E_1^i$，我们得到

$$(d^{(j)} \circ d^{(i)} g_H)(x,v)(y,w) = d^{(j)}(d^{(i)} g(x,v))(y,w) = f_{i,j}(x,y,v,w)$$

对所有 $(y,w) \in (V^0 \cap H) \times H^j$ 均成立。结合（1.104）和（1.105），这就推出了（1.103）。证明完毕。□

注 1.7.32。 可以将定理 1.7.30 中的条件（b）替换为以下条件：

(i) $U \times V \times E_1 \times E_2$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$空间；或 (ii)
$\ell = 0$ 且 $U \times V \times E_1$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$空间；或 (iii)
$k = 0$ 且 $U \times V \times E_2$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$空间。

[假设 (i) 成立。令 $g \in C^k(U, C^{\ell}(V, F))$。对于满足 $i \le k$ 且 $j \le \ell$ 的 $i, j \in \mathbb{N}_0$，定义 $f_{i,j}: U \times V \times E_1^i \times E_2^j \to F$ 如下：

$$f_{i,j}(x,y,v,w) := (d^{(j)} \circ (d^{(i)} g))(x,v)(y,w).$$

考虑

$$\theta_i : V \times E_2 \to V \times E_2^i, \quad (y,w) \mapsto (y,w,\dots,w).$$

则 $C(\theta_i, F): C(V \times E_2^i, F) \to C(V \times E_2, F)$，$\gamma \mapsto \gamma \circ \theta_i$ 是一个连续映射（见命题 A.6.9），因此

$$g_{i,j} : U \times E_1 \to C(V \times E_2, F),$$

$$(x,v) \mapsto C(\theta_j, F)(d^{(j)}(\delta_x^i g(v))) = d^{(j)}(\delta_x^i g(v)) \circ \theta_j$$

是连续的。利用假设 (i)，命题 A.6.17 表明

$$g_{i,j}^{\wedge} : U \times E_1 \times V \times E_2 \to F$$

是连续的。现在 $f_{i,j}(x,y,v,w)$ 关于 $v=(v_1,\dots,v_i)$ 是对称的 i-线性映射 $\in E_1^i$（当其余自变量固定时）。因此，若我们利用相应的齐次多项式定义 $h_{i,j}$:
$U \times V \times E_1^i \times E_2 \to F$

$$h_{i,j}(x,y,u,w) := f_{i,j}(x,y,(u,\dots,u),w)$$

（含有 i 个 $u \in E_1$）时，则

$$f_{i,j}(x,y,v,w) = \frac{1}{i!\,2^i} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i \in \{1,-1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i \, h_{i,j}(x,y,\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_i v_i, w)$$

由极化公式（命题 1.6.19）可得。但 $f_{i,j}(x,y,v,w)$（因此 $h_{i,j}(x,y,u,w)$ 也）关于 $w \in E_2^j$ 是对称的 j-线性映射，而取相应的齐次多项式可得映射 $g^\wedge_{i,j}$。再次使用极化公式，我们得到

$$f_{i,j}(x,y,v,w) = \frac{1}{i!j!\,2^{i+j}} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i \in \{1,-1\}} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_j \in \{1,-1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_i \, \sigma_1 \cdots \sigma_j$$
$$g^\wedge_{i,j}(x,y,\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_i v_i, \sigma_1 w_1 + \cdots + \sigma_j w_j).$$

因此 $f_{i,j}$ 是连续的，现在我们可以证明 $f := f_{0,0} \in C^{k,\ell}(U \times V, F)$ 和 $\Phi(f) = g$，如定理 1.7.30(b) 的证明中从 (1.102) 开始所示。]

情形 (ii) 和 (iii) 类似（见习题 1.7.6）；此时只需要一个极化论证。

命题 1.7.33。设 E_1、E_2 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E_1$ 和 $V \subseteq E_2$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 k、$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。则有以下结论:

(a) 每个 $C^{k+\ell}$-映射 $f\colon U \times V \to F$ 都是 $C^{k,\ell}$，且包含映射

$$\lambda\colon C^{k+\ell}(U \times V, F) \to C^{k,\ell}(U \times V, F)$$

是连续且线性的。

(b) 每个 $C^{k,k}$-映射 $f\colon U \times V \to F$ 都是 C^k，且包含映射

$$\mu\colon C^{k,k}(U \times V, F) \to C^k(U \times V, F)$$

是连续且线性的。

证明。(a) 对所有满足 $i \le k$ 和 $j \le \ell$ 的 $i,j \in \mathbb{N}_0$，以下迭代方向导数存在且相等:

$$d^{(i,j)} f(x,y,v,w) = d^{(i+j)} f(x,y,(0,w_1),\dots,(0,w_j),(v_1,0),\dots,(v_i,0)) \tag{1.107}$$

对于 $v=(v_1,\dots,v_i) \in E_1^i$，$w=(w_1,\dots,w_j) \in E_2^j$ 和 $(x,y) \in U \times V$。由于 (1.107) 的右端定义了一个连续的 F值函数

关于 $(x,y,v,w) \in U\times V\times E_1^i\times E_2^j$，我们看到 f 是 $C^{k,\ell}$，并且 (1.107) 对所有如前所述的 i,j 以及所有 $(x,y,v,w)\in U\times V\times E_1^i\times E_2^j$ 都成立。注意$h_{i,j}\colon U\times V\times E_1^i\times E_2^j\to U\times V\times (E_1\times E_2)^{i+j}$,

$$(x,y,v,w)\mapsto (x,y,(0,w_1),\dots,(0,w_j),(v_1,0),\dots,(v_i,0))$$

是连续映射。因此，映射

$$C(h_{i,j},F)\colon C(U\times V\times (E_1\times E_2)^{i+j},F)\to C(U\times V\times E_1^i\times E_2^j,F),\ \gamma\mapsto \gamma\circ h_{i,j}$$

是连续的。现在

$$d^{(i,j)}\circ\lambda = C(h_{i,j},F)\circ d^{(i+j)}$$

根据 (1.107)，它是连续函数，因为 $C(h_{i,j},F)$ 和

$$d^{(i+j)}\colon C^{k+\ell}(U\times V,F)\to C(U\times V\times (E_1\times E_2)^{i+j},F)$$

是连续的。由于 $C^{k,\ell}(U\times V, F)$ 上的拓扑是关于映射 $d^{(i,j)}\colon C^{k,\ell}(U\times V, F)\to C(U\times V\times E_1^i\times E_2^j, F)$ 的初始拓扑，我们推知 λ 是连续的。

(b) 我们用关于 $m\in\mathbb{N}$ 的归纳法证明，每个 $f\in C^{m,m}(U\times V, F)$ 都是 C^m，其中

$$d^{(m)}f(x,y,w)=\sum_{I\subseteq\{1,\dots,m\}} d^{(a,m-a)}f(x,y,w_{i_1,1},\dots,w_{i_a,1},w_{j_1,2},\dots,w_{j_{m-a},2}) \tag{1.108}$$

对于 $(x, y, w)\in U\times V\times (E_1\times E_2)^m$，其中 $w=(w_1,\dots,w_m)$ 满足 $w_b=(w_{b,1}, w_{b,2})\in E_1\times E_2$ 对于 $b\in\{1,\dots,m\}$,

$$I=\{i_1,\dots,i_a\}\quad\text{with}\quad i_1<i_2<\dots<i_a$$

并且 $\{1,\dots,m\}\setminus I=\{j_1,\dots,j_{m-a}\}$ 满足 $j_1<\dots<j_{m-a}$。如果 $m=1$，那么根据偏微分法则（命题 1.4.11），f 是 C^1，并且

$$df(x,y,w_1)=d^{(1,0)}f(x,y,w_{1,1})+d^{(0,1)}f(x,y,w_{1,2}),$$

由此 (1.108) 成立。现在设 f 是一个 $C^{m+1,m+1}$-映射，且满足 $m\in\mathbb{N}$，并假设 (1.108) 对 m 成立。固定 $I\subseteq\{1,\dots,m\}$ 和 $w\in(E_1\times E_2)^m$，并令$z:=(w, w_{m+1})$ 满足 $w_{m+1}=(w_{m+1,1}, w_{m+1,2})\in E_1\times E_2$。简记

$$w^I:=(w_{i_1,1},\dots,w_{i_a,1},w_{j_1,2},\dots,w_{j_{m-a},2}).$$

根据施瓦茨定理（命题 1.7.21），映射

$$h_{I,w}\colon U\times V\to F,\quad (x,y)\mapsto d^{(a,m-a)}f(x,y,w^I)$$

是 $C^{1,1}$ 且

$$d^{(1,0)}h_{I,w}(x,y,w_{m+1,1}) = d^{(a+1,m-a)}f(x,y,(w,w_{m+1})^{I\cup\{m+1\}})$$

and

$$d^{(0,1)}h_{I,w}(x,y,w_{m+1,2}) = d^{(a,m-a+1)}f(x,y,(w,w_{m+1})^{I}).$$

根据偏微分法则，$h_{I,\,w}$ 是 C^1，其中 $d^{(1)}h_{I,\,w}(x,\ y,\ w_{m+1})$ 等于

$$d^{(a+1,m-a)}f(x,y,(w,w_{m+1})^{I\cup\{m+1\}}) + d^{(a,m-a+1)}f(x,y,(w,w_{m+1})^{I}).$$

因此 $d_{(m+1)}f(x,\ y,\ z)$ 存在，且由下式给出

$$\sum_{I\subseteq\{1,\dots m\}} \big(d^{(a+1,m-a)}f(x,y,z^{I\cup\{m+1\}}) + d^{(a,m-a+1)}f(x,y,z^{I})\big).$$

这具有 (1.108) 的形式，其中 $m+1$ 替代 m，z 替代 w。

要证明 μ 是连续的，请注意映射

$$g_{m,\,I}\colon U\times V\times(E_1\times E_2)^m \to U\times V\times E_1^a\times E_2^{m-a},\ (x,\ y,\ w)\mapsto(x,\ y,\ w^I)$$

对于 $I\subseteq\{1,\dots,m\}$ 是连续的，记号同 (1.108)。因此，

$$C(g_{m,I},F)\colon C(U\times V\times E_1^a\times E_2^{m-a},F)\to C(U\times V\times(E_1\times E_2)^m),\ \gamma\mapsto\gamma\circ g_{m,I}$$

是连续的（见引理 A.6.9）。注意，

$$d^{(m)}f = \bigcup_{I\subseteq\{1,\dots,m\}} C(g_{m,I},F)(d^{(a,m-a)}f)\quad\text{for } f\in C^{k,k}(U\times V,F)$$

对于满足 $m\le k$ 的 $m\in\mathbb{N}_0$，由 (1.108) 可知。由于

$$d^{(a,m-a)}\colon C^{k,k}(U\times V,F)\to C(U\times V\times E_1^a\times E_2^{m-a},F)$$

是连续的，我们推得 $d^{(m)}\circ\mu$ 是连续的。因此，利用 $C^k(U\times V,F)$ 上的拓扑是相对于映射$d^{(m)}\colon C^k(U\times V,F)\to C(U\times V\times(E_1\times E_2)^m,F)$ 的初始拓扑，可知 μ 是连续的。□

取 $k=\ell=\infty$，命题 1.7.33 包含以下结果：

推论 1.7.34。设 E_1、E_2 和 F 是局部凸空间，$U\subseteq E_1$ 和 $V\subseteq E_2$ 是具有稠密内部的局部凸子集。那么，映射$f\colon U\times V\to F$ 是 C^∞ 当且仅当它是 $C^{\infty,\,\infty}$。此外，

$$C^\infty(U\times V,F) = C^{\infty,\infty}(U\times V,F)$$

作为一个局部凸空间，即紧开 C^∞ 拓扑与紧开 $C^{\infty,\,\infty}$拓扑一致。□

在定理 1.7.30（以及注 1.7.32）中取 $k=\ell=\infty$，并利用 $C^{\infty,\,\infty}(U\times V,F) = C^\infty(U\times V,\ F)$，我们得到一个重要的特殊情形：

推论 1.7.35（光滑函数空间的指数律）。设 E_1、E_2 和 F 为局部凸空间，且 $U \subseteq E_1$ 和 $V \subseteq E_2$ 均为具有稠密内部的局部凸子集。若 $f \in C^\infty(U \times V, F)$，令 $f^\vee(x) := f_x := f(x, \cdot)$，其中 $x \in U$。那么

$$f^\vee \colon U \to C^\infty(V, F)$$

是一个 C^∞-映射，且该映射

$$\Phi \colon C^\infty(U \times V, F) \to C^\infty(U, C^\ell(V, F)), \quad f \mapsto f^\vee$$

是线性的拓扑嵌入。如果 V 是局部紧的，或者 $U \times V \times E_1 \times E_2$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间，那么 Φ 是拓扑向量空间同构。□

本节最后给出五个引理，初读时可以略过。引理 1.7.36、1.7.37 和 1.7.38 将用于一些技术性结果，这些结果最终将用于证明巴拿赫-李群和微分同胚群的 C^0-正则性。引理 1.7.39 和 1.7.40（或习题 1.7.12）则是巴拿赫空间中微分方程相关结果（推论 2.4.37）所需的；该结果不会在其他地方用到。

引理 1.7.36。设 X 是一个拓扑空间，E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集，且 $f \colon X \times U \to F$ 是一个 $C^{0,1}$-函数。若 $k \in \mathbb{N}$ 且 $d^{(0,1)}f \colon X \times (U \times E) \to F$ 是 $C^{0,k}$，则 f 是 $C^{0,k+1}$。

证明。对于 $x \in X$、$y \in U^0$、$j \in \{2, \ldots, k+1\}$ 和 $w_1, \ldots\ldots, w_j \in E$，迭代方向导数 $d^{(0,j)}f(x, y, w_1, \ldots\ldots, w_j)$ 存在，其表达式为

$$\begin{aligned}(D_{w_j} \cdots D_{w_1}(f_x))(y) &= (D_{(w_j,0)} \cdots D_{(w_2,0)}(d^{(0,1)}f)_x)(y, w_1) \\ &= d^{(0,j-1)}(d^{(0,1)}f)(x, (y, w_1), (w_2, 0), \ldots, (w_j, 0)).\end{aligned}$$

由于 f 是 $C^{0,1}$，且前一个公式的右端定义了关于 $(x, y, w_1, \ldots\ldots, w_j)$ 的连续函数 $\in X \times U \times E^j$，对所有 $j \in \{2, \ldots, k+1\}$ 都成立，因此我们看到 f 是 $C^{0,k+1}$。□

下面给出链式法则的另一种表述。

引理 1.7.37. 设 $g_1 \colon X \to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射。设 E、F 和 H 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$ 为具有稠密内部的局部凸子集，$r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $f \colon Y \times V \to H$ 以及 $g_2 \colon X \times U \to F$ 为 $C^{0,r}$-映射。若 $g_2(X \times U) \subseteq V$，则下列映射亦为 $C^{0,r}$：

$$h \colon X \times U \to H, \quad (x, y) \mapsto f(g_1(x), g_2(x, y)).$$

证明。我们可以假设 $r \in \mathbb{N}$。固定 x，则 $f(g_1(x)\cdot)$ 与 $g_2(x,\cdot)$ 均为具有微分 $d^{(0,1)}f(g_1(x)\cdot)$ 和 $d^{(0,1)}g_2(x,\cdot)$ 的 C^1-映射（参见引理 1.7.18）。因此 $h_x := h(x,\cdot)$ 为 C^1，且 $d^{(0,1)}h(x,y,w) = dh_x(y,w) = d^{(0,1)}f(g_1(x)\ g_2(x,y)\ d^{(0,1)}g_2(x,y,w))$，它连续依赖于 $(x,y,w) \in X \times U \times E$。故 h 为 C^0,1。此外，

$$d^{(0,1)}h(x,y,w) = d^{(0,1)}f(g_1(x), g_2(x,y), d^{(0,1)}g_2(x,y,w))$$

由归纳法可知，这是关于 $(x,y,w) \in X \times (U \times E)$ 的 $C^{0,r-1}$-函数，利用以下事实： $Y \times (V \times F) \to H$ 根据引理 1.7.8 是 $C^{0,r-1}$，而 $X \times (U \times E) \to F \times F, (x,y,w) \mapsto (g_2(x,y)\ d^{(0,1)}g_2(x,y,w))$ 是 $C^{0,r-1}$，因为根据习题 1.7.1 和引理 1.7.8，其各分量均如此。因此，根据引理 1.7.36， h 是 $C^{0,r}$。□

最后，我们还需要指数律的另一种变体。

引理 1.7.38。设 Y 和 Z 是局部紧拓扑空间， E 和 F 是局部凸空间， $U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。在 $C(Z,F)$ 上赋予紧开拓扑。若 $f\colon U \times Y \to C(Z,F)$ 是一个 $C^{k,0}$-映射，则下列映射也是 $C^{k,0}$:

$$f^\wedge\colon U \times (Y \times Z) \to F, \quad (x,y,z) \mapsto f(x,y)(z).$$

证明。 由定理 1.7.30 和注 1.7.31(a)，映射

$$f^\vee\colon U \to C(Y, C(Z,F)), \quad x \mapsto f(x,\cdot)$$

是 C^k。根据命题 A.6.17，线性映射 $\Phi\colon C(Y \times Z, F) \to C(Y, C(Z,F))$， $\eta \mapsto \eta^\vee$ (with $\eta^\vee(y)(z) := \eta(y,z)$) 是同胚。因此

$$\Psi := \Phi^{-1}\colon C(Y, C(Z,F)) \to C(Y \times Z, F), \quad \gamma \mapsto \gamma^\wedge$$

是连续线性映射（其中 $\gamma^\wedge(y,z) := \gamma(y)(z)$）。因此 $g := \Psi \circ f^\vee\colon U \to C(Y \times Z, F)$ 是 C^k，由此

$$g^\wedge\colon U \times (Y \times Z) \to F, \quad g^\wedge(x,y,z) := g(x)(y,z)$$

是 $C^{k,0}$，由定理 1.7.30 和注 1.7.31(a) 得出。但是 $g^\wedge = f^\wedge$ as $g^\wedge(x,y,z) = g(x)(y,z) = \Psi(f^\vee(x))(y,z) = \Psi(f(x,\cdot))(y)(z) = f(x,y)(z) = f^\wedge(x,y,z)$。□

最后的引理使用第 2.3 节和命题 2.3.17 中的记号。

引理 1.7.39。设 K 是一个紧拓扑空间， P 是一个拓扑空间， $k \in \mathbb{N}$，且 $(E_j, \|\cdot\|_j)$ 对于 $j \in \{1,\dots,k\}$ 是赋范空间。设 $(E, \|\cdot\|_E)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间， $U \subseteq E$ 是一个开子集，并且

$$f\colon K \times U \times (E_1 \times \cdots \times E_k) \times P \to F$$

是一个连续映射，使得对于所有 $(x,y,p) := f(x,y,\cdot,p)\colon E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ 都是 k-线性的，并且映射 $(x,y,p) \in K \times U \times P$

$$g\colon K\times U\times P\to\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)_b$$

由此得到的映射是连续的。那么映射

$$\Theta\colon C(K,U)\times P\to\mathcal{L}^k(C(K,E_1),\dots,C(K,E_k);C(K,F))_b$$

由 $\Theta(\gamma,p)(\gamma_1,\dots,\gamma_k)(x):=f(x,\gamma(x)\ \gamma_1(x)\dots,\gamma_k(x)\ p)$ 确定的是连续的。

证明。按通常方式，我们将 $C(K,U\times E_1\times\cdots\times E_k)$ 与乘积 $C(K,U)\times C(K,E_1)\times\cdots\times C(K,E_k)$ 等同。由引理 A.6.21，该映射

$$\Phi\colon C(K,U)\times C(K,E_1)\times\cdots\times C(K,E_k)\times P\to C(K,F)$$

由 $\Phi(\gamma,\gamma_1,\dots,\gamma_k,p)(x):=f(x,\gamma(x)\ \gamma_1(x)\dots,\gamma_k(x)\ p)$ 确定的是连续的。因此，由命题 A.6.17，Θ 作为到 $\mathcal{L}^k(C(K,E_1)\dots,C(K,E_k);C(K,F))_c$ 的映射是连续的。为看出 Θ 关于其值域上的算子范数也是连续的，设 $\gamma\in C(K,U)$、$p\in P$ 与 $\varepsilon>0$。由于 $\gamma(K)\subseteq U$ 是紧的，存在 $r>0$ 使得 $\gamma(K)+B_r^E(0)\subseteq U$。由于

$$h(x,y,q):=g(x,\gamma(x)+y,q)-g(x,\gamma(x),p)$$

在 $(x,\ y,\ q)\in K\times B_r^E(0)\times P$ 和 $h(x,\ 0,\ p)=0$ 上连续，利用华莱士引理，我们可以找到一个开 p-邻域 $P_0\subseteq P$ 和 $s\in]0,\ r]$，使得

$$\|h(x,y,q)\|_{\mathrm{op}}\le\varepsilon\quad\text{for all }(x,y,q)\in K\times B_s^E(0)\times P_0.$$

对于 $\eta\in C(K,\ B_s^E(0))$ 和 $q\in P_0$，这意味着

$$\begin{aligned}&\|(\Theta(\gamma+\eta,q)-\Theta(\gamma,p))(\gamma_1,\dots,\gamma_k)(x)\|_F\\&\qquad=\|h(x,\eta(x),q)(\gamma_1(x),\dots,\gamma_k(x))\|_F\le\|h(x,\eta(x),q)\|_{\mathrm{op}}\le\varepsilon\end{aligned}$$

对于所有上确界范数为 $\|\gamma_j\|_\infty\le1$ 的 $\gamma_j\in C(K,\ E_j)$，$j\in\{1,\dots,k\}$ 和 $x\in K$ 均成立。对 x 取上确界，得到

$$\|\big(\Theta(\gamma+\eta,q)-\Theta(\gamma,p)\big)(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\|_\infty\le\varepsilon.$$

像之前一样，对 $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ 取上确界，得到

$$\|\Theta(\gamma+\eta,q)-\Theta(\gamma,p)\|_{\mathrm{op}}\le\varepsilon$$

对于所有 $q\in P_0$ 和 $\eta\in C(K,\ B_s^E(0))$。因此，Θ 在 $(\gamma,\ p)$ 处连续。 □

采用命题 1.7.4 中的记号，我们有：

引理 1.7.40. 设 $(E,\|\cdot\|_E)$、$(F,\|\cdot\|_F)$ 和 $(Z,\|\cdot\|_Z)$ 为赋范空间，$U\subseteq E$ 为开子集，$P\subseteq Z$ 为具有稠密内部的局部凸子集，K 为紧拓扑空间，并且 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。此外，设 $f\colon K\times(U\times P)\to F$ 为一个 $C^{0,k}$-映射，满足

$$(d^{(0,j)}f)^\vee\colon K\times U\times P\to\mathcal{L}^j(E\times Z,\dots,E\times Z;F)_b\tag{1.109}$$

对所有满足 $j\le k$ 的 $j\in\mathbb{N}$ 都连续。则下列映射是 FC^k：

$$\Phi\colon C(K,U)\times P\to C(K,F),\quad(\gamma,p)\mapsto(f^p)_*(\gamma)=f^p\circ(\mathrm{id}_K,\gamma).$$

证明。令 $\lambda\colon Z \to C(K,Z)$ 为将 $p \in Z$ 映射到常值函数 $\lambda(p)\colon x \mapsto p$ 的映射。因此 λ 是线性的等距变换。根据命题 1.7.5，Φ 是 C^k；根据习题 1.7.5，我们有

$$\begin{aligned} &d^{(j)}\Phi(\gamma,p,\gamma_1,p_1,\ldots,\gamma_j,p_j)(x) \\ &\qquad = d^{(0,j)}f(x,\gamma(x),p,\gamma_1(x),p_1,\ldots,\gamma_j(x),p_j) \end{aligned} \tag{1.110}$$

对所有满足 $j \le k$, $\gamma \in C(K,U)$, $\gamma_1,\ldots,\gamma_j \in C(K,E)$, 且 $p \in U$,$p_1,\ldots,p_j \in Z$ 的 $j \in \mathbb{N}$。根据引理 1.7.39，映射

$$\Theta_j\colon C(K,U)\times P \to \mathcal{L}^j(C(K,E\times Z),\ldots,C(K,E\times Z);C(K,F))_b$$

由 $\Theta_j(\gamma,p)(\eta_1,\ldots,\eta_j)(x) := d^{(0,j)}f(x,\gamma(x)\ p,\eta_1(x)\ldots,\eta_j(x))$ 确定的映射是连续的（这要归功于 (1.109)）。根据 (1.110)，映射

$$(d^{(j)}\Phi)^\vee\colon C(K,U)\times P \to \mathcal{L}^k((C(K,E)\times Z)^j;C(K,F))_b$$

由 $(d^{(j)}\Phi)^\vee(\gamma,p)(\gamma_1,p_1,\ldots\gamma_j,p_j) = \Theta_j(\gamma,p)(\gamma_1,\lambda(p_1)\ldots,\gamma_j,\lambda(p_j))$ 给出，因此 $(d^{(j)}\Phi)^\vee$ 是连续的。因此，根据命题 2.3.17(c)，Φ 是 FC^k。□

注 1.7.41. 若 U、P 和 F 如引理 1.7.40 中所述，K 是有限维向量空间中的一个具有稠密内部的紧凸子集，且 $f\colon K\times U\times P \to F$ 是 FC^k，那么 (1.109) 中的所有映射都是连续的（由命题 2.3.17(c) 可得），因此该引理适用。习题 1.7.12 中概述了这一特殊情形的一种更简单的替代证明。

下面的引理在稍后讨论流形 M 和 N 上 $C^{r,s}(M\times N, F)$ 的拓扑时会很有用。

引理 1.7.42. 设 r、$s \in \mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$、$E_1$、$E_2$、$F_1$、$F_2$ 和 F 为局部凸空间，$U_j \subseteq E_j$ 和 $V_j \subseteq F_j$ 为分别对于 $j\in\{1,2\}$、g_1 具有稠密内部的局部凸子集。设 $g_1\colon U_j \to F_1$ 是一个 C^r-映射，满足 $g_1(U_1)\subseteq V_1$；且 $g_2\colon U_2 \to F_2$ 是一个 C^s-映射，满足 $g_2(U_2)\subseteq V_2$。那么下面的线性映射是连续的：

$$C^{r,s}(g_1\times g_2,F)\colon C^{r,s}(V_1\times V_2,F) \to C^{r,s}(U_1,\times U_2,F),\quad f\mapsto f\circ(g_1\times g_2).$$

证明。由注 1.7.27 可知，对于所有满足 $k\le r$ 且 $\ell \le s$ 的 $(k,\ell) \in \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$，存在一个有限集 $A_{k,\ell}$、一对 $(i(a)\ j(a)) \in \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$，满足 $i(a)\le k$ 且 $j(a)\le \ell$，以及一个连续函数

$$\psi_a\colon U_1\times U_2\times E_1^k\times E_2^\ell \to V_1\times V_2\times F_1^{i(a)}\times F_2^{j(a)}$$

对于 $a\in A_{k,\ell}$，使得对于所有 $f\in C^{r,s}(V_1\times V_2,F)$，有

$$d^{(k,\ell)}(f\circ(g_1\times g_2)) = \sum_{a\in A_{k,\ell}} (C(\psi_a,F)\circ d^{(i(a),j(a))})(f).$$

因此 $d^{(k,\ell)}\circ C^{r,s}(g_1\times g_2,\ F)$ 是连续的（使用引理 A.6.9），由此 $C^{r,s}(g_1\times g_2,\ F)$ 是连续的。□

引理*1.7.43.* 设 $r, s \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, E_1, E_2 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E_1$ 且 $V \subseteq E_2$ 是具有稠密内部的局部凸子集，I 是一个集合，$(U_i)_{i\in I}$ 是 U 的一个开覆盖，且 $(V_i)_{i\in I}$ 是 V 的一个开覆盖。那么 $C^{r,s}(U \times V, F)$ 上的紧开 $C^{r,s}$-拓扑 $\mathcal{O}$ 关于限制映射族 $\rho_i\colon C^{r,s}(U \times V, F) \to C^{r,s}(U_i \times V_i, F)$（$i \in I$ 时）是初始的。

证明。对所有满足 $k \leq r$ 和 $\ell \leq s$ 的 $k, \ell \in \mathbb{N}_0$，$C(U \times V \times E_1^k \times E_2^\ell, F)$ 上的紧开拓扑相对于限制映射 $\rho_{i,k,\ell}\colon C(U \times V \times E_1^k \times E_2^\ell) \to C(U_i \times V_i \times E_1^k \times E_2^\ell, F)$ 是初始的，见引理 A.6.11。因此，$\mathcal{O}$ 相对于映射 $\rho_{i,k,\ell} \circ d^{(k,\ell)}$ 是初始的（见引理 A.2.7）。对每个 $i \in I$，集合 $C^{r,s}(U_i \times V_i, F)$ 上的紧开 $C^{r,s}$-拓扑相对于映射是初始的

$$\tau_{i,k,\ell}\colon C^{r,s}(U_i \times V_i, F) \to C(U_i \times V_i \times E_1^k \times E_2^\ell, F),\ f \mapsto d^{(k,\ell)} f$$

对于带有 $k \leq r$ 和 $\ell \leq s$ 的 $k, \ell \in \mathbb{N}_0$。由于 $\rho_{i,k,\ell} \circ d^{(k,\ell)} = \tau_{i,k\ell} \circ \rho_i$，由引理 A.2.7 可得，$\mathcal{O}$ 相对于映射 ρ_i（$i \in I$）是初始的。□

第1.7节习题

习题 1.7.1. 设 X 是豪斯多夫拓扑空间，E_1、E_2 和 F 是局部凸空间，$\alpha\colon E_1 \to E_2$ 是连续线性映射，且 $k \in \mathbb{N}_\infty$。设 $U \subseteq E_1$ 和 $V \subseteq E_2$ 是具有稠密内部的局部凸子集，使得 $\alpha(U) \subseteq V$，并且 $f\colon X \times V \to F$ 是一个 $C^{0,k}$-映射。证明映射

$$g\colon X \times U \to F,\quad (x, y) \mapsto f(x, \alpha(y))$$

是 $C^{0,k}$，且对所有 $x \in X$、$y \in U$ 和 $z_1, \ldots, z_k \in E_1$，有 $d^{(0,k)}g(x, y, z_1, \ldots, z_k) = d^{(0,k)}f(x, \alpha(y), \alpha(z_1), \ldots, \alpha(z_k))$。

习题1.7.2. 设 X 是拓扑空间，E 和 F 是复局部凸空间，$V \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。证明：若映射 $f\colon X \times U \to F$ 是 $C^{0,k}_{\mathbb{R}}$（即，当 E 和 F 被视为实向量空间时，$C^{0,k}$），并且对每个 $x \in X$，$f(x, \cdot)\colon U \to F$ 是 $C^k_{\mathbb{C}}$，则 f 是 $C^{0,k}_{\mathbb{C}}$。

习题 1.7.3. 设 K 是紧拓扑空间，E 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是具有非空内部的凸子集。证明，$C(K, U)$ 在 $C(K, E)$ 中的子集，其内部为 $C(K, U)^0 = C(K, U^0)$。

[提示：如果存在 $\gamma \in C(K, U)^0 \setminus C(K, U^0)$，那么我们就能找到 $x \in K$ 使得 $\gamma(x) \in U \setminus U^0$。利用点求值 $C(K, E) \to E, \eta \mapsto \eta(x)$ 连续，且 $E \to C(K, E),\ v \mapsto c_v$（其中 $c_v(x) := v$ 对所有 $v \in E$ 都成立）是连续映射（见引理 A.6.19）]，导出矛盾。

习题 1.7.4. 设 E_1、E_2 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E_1$ 为具有稠密内部的局部凸子集，$f\colon U \times E_2 \to F$ 为一个映射，且其定义域和值域为局部凸空间 $W_1 \times \cdots \times W_m$，$W_1, \ldots, W_m$，。证明，若它是一个 $C^{k,0}$，且对每个 $x \in U$，$f_x := f(x, \cdot)$ 是 m-线性的，则 f 是 $C^{k,\infty}$。

[利用练习 1.3.7 求出 $d^{(0,j)}f(x, y_0, y_1, \ldots, y_j)$ 关于 $x \in U$ 和 $y_0, y_1, \ldots, y_j \in E_2$ 的显式公式。然后按照引理 1.7.23 的证明进行。]

习题 1.7.5。在命题 1.7.5 的情形下，证明

$$d^{(j)}\Phi(\gamma,p,\gamma_1,p_1,\dots,\gamma_j,p_j)(x)=d^{(0,j)}f(x,\gamma(x),p,\gamma_1(x),p_1,\dots,\gamma_j(x),p_j)$$

对于所有满足 $j\le k$ 的 $j\in\mathbb{N}$，以及所有 $\gamma\in C(K,U)$、$\gamma_1,\dots,\gamma_j\in C(K,E)$、$p\in P$、$p_1$ ，……，$p_j\in Z$ 和 $x\in K$。

[点求值 $\varepsilon_x\colon C(K,F)\to F,\eta\mapsto\eta(x)$ 是连续线性的，因此 $\varepsilon_x\circ(d^{(j)}\Phi)=d^{(j)}(\varepsilon_x\circ\Phi)$，其中 $(\varepsilon_x\circ\Phi)(\gamma,p)=f(x,\gamma(x),p)$。]

习题 1.7.6。证明注 1.7.32 中所述的情形 (ii) 和 (iii)。

习题 1.7.7. 设 E 是一个序列完备局部凸空间，$f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是连续的，且 $g\colon\mathbb{R}^n\to E$ 是一个具有紧支撑的连续函数。

(a) 证明 $(f*g)(x):=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)$ 定义了一个连续函数 $f*g\colon\mathbb{R}^n\to E$。[该积分如定义 1.8.5 所述，并由命题 1.1.15 保证其存在，因为它可以理解为紧区间上的迭代弱积分。]

(b) 若方向导数 $D_v f(x)$ 对某个 $v\in\mathbb{R}^n$ 以及所有 $x\in\mathbb{R}^n$ 存在，且 $D_v f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$（分别地，$D_v g\colon\mathbb{R}^n\to E$）是连续的，则对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，$D_v(f*g)(x)$ 存在，且 $D_v(f*g)=(D_v f)*g$（分别地，$f*D_v g$）。

(c) 若 f 是光滑的，则 $f*g$ 也是光滑的。

(d) 令 $h\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $h\ \mathbb{R}^n\subseteq[0,\infty[$ $h\ \subseteq$: 为一个光滑函数，满足 ( ) $[-1,1]^n$ $\int_{\mathbb{R}^n}h\ x\ dx=1$ $\varepsilon>0$ supp( ) 和 ( )。对于，我们定义

$$h_\varepsilon\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{1}{\varepsilon^n}h\Big(\frac{1}{\varepsilon}x\Big).$$

证明，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$h_\varepsilon*f\to f$ 属于 $C(\mathbb{R}^n,E)$。

习题 1.7.8. 设 E 为局部凸空间，$U\subseteq\mathbb{R}^n$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。证明，$C^k(U,E)$ 上的紧开 C^k-拓扑可由以下半范数描述：$\|f\|_{C^j,K,p}$，其中 $j\in\mathbb{N}_0$ 满足 $j\le k$，$K\subseteq U$ 为紧子集，且 p 为连续半范数：$E\to[0,\infty[$，其中

$$\|f\|_{C^j,K,p}:=\max_{|\alpha|\le j}\sup_{x\in K}p\Big(\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x^\alpha}(x)\Big)\quad\text{for } f\in C^k(U,E).$$

习题 1.7.9. 设 E 和 F 为局部凸空间，$k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 $U\subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集。给定满足 $j\le k$ 和 $\gamma\in C^k(U,F)$ 的 $j\in\mathbb{N}_0$，我们通过 $\Delta_j\gamma(x,y)$ 定义 $\Delta_j\gamma\colon U\times E\to F\colon=d^{(j)}\gamma(x,y,\dots,y)$（第 j 阶 Gˆateaux 微分 $\delta_x^j\gamma(y)$）。

（a）由引理 1.7.15 推出，该映射

$$\Delta\colon C^k(U,F)\to C(U,F)\times\prod_{\mathbb{N}\ni j\le k}C(U\times E,F),\ \gamma\mapsto(\gamma,(\Delta_j(\gamma))_{\mathbb{N}\ni j\le k})$$

是像为闭集的线性拓扑嵌入。

[对于 $j\in\mathbb{N}$，若 $j\le k$，则我们有 $\Delta_j\gamma=(d^{(j)}\gamma)\circ g_j$，这是利用连续映射 g_i 得到的：$U\times E\to U\times E^j$，$(x,y)\mapsto(x,y,\dots,y)$。反过来，由极化公式可知，$d^{(j)}\gamma=\sum_{i\in I_j}c_{ij}(\Delta_j\gamma)\circ g_{ij}$，其中存在适当的 $c_{ij}\in\mathbb{Q}$ 和连续函数 g_{ij}：$U\times E^j\to U\times E$。引理 A.6.9 使我们能够从网 $\Delta_j\gamma_\alpha$ 的极限转到 $d^{(j)}\gamma_\alpha$ 的极限，反之亦然。]

(b) 对于 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，证明：若 $U \times E$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间，且 F 分别是完备、拟完备、序列完备和麦基完备的，则 $C^k(U, F)$ 也分别是完备、拟完备、序列完备和麦基完备的。[论证可仿照命题 1.7.16(a) 的证明。关于 $k = 0$，参见引理 A.6.24。]

习题 1.7.10. 设 E 为局部凸空间，$U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开子集，$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 且 $f\colon U \to E$ 为连续函数，其盖托微分

$$\delta^{(j)} f(x, y) := \delta_x^{(j)} f(y) := ((D_y)^j f)(x)$$

对所有满足 $j \in \mathbb{N}$ 和 $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^n$ 的 $j \leq k$ 都存在，并定义连续函数 $\delta^{(j)} f\colon U \times \mathbb{R}^n \to E$。我们的目标是证明 f 是 C^k。由于只需证明对每个点 $x \in U$，f 在某个开邻域上是 C^k，因此，在乘以一个函数 $\chi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R})$ 后（该函数在 x 的某个邻域上等于 1），并将 χf 在 $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(h)$ 上延拓为 0，我们可以假设 $U = \mathbb{R}^n$ 且 f 有紧支撑。如果能证明 f 作为到完备化 $\widetilde{E}$ 的映射是 C^k，那么 $\operatorname{im}(d^{(j)} f) \subseteq E$，因为 $\operatorname{im}(\delta^{(j)} f) \subseteq E$，并且可以利用极化公式从 $\delta_x^{(j)} f$ 恢复 $d^{(j)} f(x, \cdot)$。因此，f 作为到 E 的映射也将是 C^k。于是现在可以假设 E 是完备的。令 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，满足 $h(\mathbb{R}^n) \subseteq [0, \infty[$, $\operatorname{supp}(h) \subseteq [-1, 1]^n$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, dx = 1$。令 $h_\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 如习题 1.7.7(b) 中所述。于是 $f_\varepsilon := h_\varepsilon * f\colon \mathbb{R}^n \to E$ 是光滑函数；根据习题 1.7.7(b)，对所有满足 $j \leq k$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$ 的 $j \in \mathbb{N}$，都有 $(D_y)^j f_\varepsilon = h_\varepsilon * (D_y^j) f$。

(a) 证明，对于每个满足 $|\alpha| \leq k$ 的多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\frac{\partial^{|\alpha|} f_\varepsilon}{\partial x^\alpha}$ 在 $C(\mathbb{R}^n, E)$ 中收敛到连续函数 g_α。根据极化公式和习题 1.7.7(b)，$\frac{\partial^{|\alpha|} f_\varepsilon}{\partial x^\alpha}$ 是 $(D_y)^{|\alpha|} f_\varepsilon = h_\varepsilon * (D_y)^{|\alpha|} f$ 的线性组合，其中适当的 $y \in \mathbb{R}^n$ 所对应的系数与 ε 无关。[(b) 利用习题 1.7.8，从 (a) 推出 $\left(\frac{\partial^{|\alpha|} f_\varepsilon}{\partial x^\alpha}\right)_{\varepsilon > 0}$ 是完备局部凸空间 $C^k(\mathbb{R}^n, E)$ 中的柯西网。进而推出 $f = g_0 \in C^k(\mathbb{R}^n, E)$。

习题 1.7.11. 设 K 是紧拓扑空间；$(Y, \|\cdot\|_Y)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间。我们在从 K 到赋范空间的连续映射空间上赋予上确界范数；在赋范空间之间的连续线性算子空间上赋予算子范数。证明，对于$\gamma \in C(K, \mathcal{L}(Y, F))$，$\eta \in C(K, Y)$，$x \in K$，$\Xi(\gamma)(\eta)(x) := \gamma(x)(\eta(x))$，并定义一个连续映射 $\Xi\colon C(K, \mathcal{L}(Y, F)) \to \mathcal{L}(C(K, Y), C(K, F))$，它关于 $\eta \in C(K, Y)$ 是连续线性的。证明映射

$$\Xi\colon C(K, \mathcal{L}(Y, F)) \to \mathcal{L}(C(K, Y), C(K, F)),\ \gamma \mapsto \Xi(\gamma)$$

由此得到的映射是连续且线性的，其中有 $\|\Xi\|_{\mathrm{op}} \leq 1$。

习题 1.7.12. 设 $(E, \|\cdot\|_E)$、$(F, \|\cdot\|_F)$ 和 $(Z, \|\cdot\|_Z)$ 是赋范空间，$U \subseteq E$ 是开子集，$P \subseteq Z$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 K 是有限维向量空间 X 中具有非空内部的紧凸子集。若 $f\colon K \times U \times P \to F$ 是一个 FC^k-映射，证明

$$\Phi\colon C(K, U) \times P \to C(K, F),\quad (\gamma, p) \mapsto (f^p)_*(\gamma) = f(\cdot, p) \circ (\mathrm{id}_K, \gamma)$$

是 FC^k。可以假设 k 是有限的，并用归纳法进行证明； $k=0$ 的情形由引理 A.6.21 涵盖。现在令 $k \in \mathbb{N}$，并假设将 $k-1$ 替换为 k 时断言成立。映射 Φ 是 C^k，因此根据命题 1.7.5，C^1。我们将 $(x,y,p) \in K \times U \times P$ 记作 $f'(x,y,p) := df(x,y,p,\cdot) \in \mathcal{L}(X \times E \times Z, F)$，并将 $\gamma \in C(K,U)$ 和 $p \in P$ 记作 $\Phi'(\gamma,p) := d\Phi(\gamma,p,\cdot) \in \mathcal{L}(C(K,E) \times Z, C(K,F))$。

(a) 证明，导出 (1.84) 的计算过程也给出了以下公式

$$\Phi'(\gamma,p)(\eta,q)(x) = f'(x,\gamma(x),p)(0,\eta(x),q)$$

对所有 $\gamma \in C(K,U)$、 $p \in P$、 $x \in K(K,E)$ 和 $q \in Z$ 均成立。

(b) 对于 $Y := X \times E \times Z$，按习题 1.7.11 中的定义定义 Ξ。由归纳法可知，该映射

$$\Psi\colon C(K,U) \times P \to C(K, \mathcal{L}(Y,F)), \quad (\gamma,p) \mapsto f'(\cdot,p) \circ (\mathrm{id}_K, \gamma)$$

是 FC^{k-1}。映射 $\lambda\colon Z \to C(K,Z)$ 将 $q \in Z$ 映射到常值函数 $\lambda(q)\colon K \to Z$，$x \mapsto q$，它是连续且线性的。证明 (a) 中的公式可以改写为

$$\Phi' = \mathcal{L}(\Lambda, C(K,F)) \circ \Xi \circ \Psi,$$

其中 $\Lambda\colon C(K, E) \times Z \to C(K, Y) \cong C(K, X) \times C(K, E) \times C(K, Z)$，$(\eta, q) \mapsto (0, \eta, \lambda(q))$ 是连续线性映射。由此推得 Φ' 是 FC^{k-1}，并推断 Φ 是 FC^k。

1.8 第1章附录

在第1章的本附录中，我们讨论曲线以及定义在高维集合上的适当映射的弱积分的存在性。

命题 1.1.15 的证明

我们证明命题 1.1.15，即序列完备局部凸空间中曲线弱积分的存在性。为了构造连续曲线的弱积分，我们用阶梯函数逼近该曲线。

定义 1.8.1。 设 E 是一个局部凸空间，且 $a < b$ 属于 $\mathbb{R}$。

(a) 若存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$，使得 $\gamma|_{]t_{k-1},\ t_k[}$ 对所有 $k \in \{1,\ldots,n\}$ 都为常数，则称函数 $\gamma\colon [a,b] \to E$ 为（取值于 E 的）阶梯函数。(b) 若 $\gamma\colon [a,b] \to E$ 是阶梯函数，且 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 是一个划分，使得 $\gamma|_{]t_{k-1},\ t_k[} = \alpha_k$ （其中 $\alpha_k \in E$ 适当），则定义

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt \ := \ \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})\,\alpha_k \ \in \ E\,.$$

注 1.8.2.(a) 与实值函数的情形一样，利用 $[a,b]$ 的任意两个划分都存在公共加细这一事实，我们看到 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$ 与 $t_0,\ldots,t_k$ 的选取无关。

(b) 利用公共加细的存在性，我们看到所有 E 值阶梯函数的集合 $\mathcal{S}([a,b],E)$ 是 $E^{[a,b]}$ 的一个向量子空间，并且 $\mathcal{S}([a,b],E) \to E,\ \gamma \mapsto \int_a^b \gamma(t)\,dt$ 是一个线性映射。

(c) 对每个阶梯函数 $\gamma\colon [a,b] \to E$ 以及 E上的半范数 $\|\cdot\|_p$，有

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)\,dt \right\|_p \;\le\; (b-a)\,\max\{\|\gamma(t)\|_p \colon t \in [a,b]\}\,. \tag{1.111}$$

为此，令 t_k 和 α_k 如定义 1.8.1(b) 所述。我们定义 $M := \max\{\|\alpha_k\|_p \;\; k = 1 \dots n\}$ $\|\int_a^b \gamma\ t\ dt\|_p = \|\sum_{k=1}^n t_k - t_{k-1}\ \alpha_k\|_p$:、、。于是()()()() $\le \sum_{k=1}^n t_k - t_{k-1}\ \|\alpha_k\|_p \le M \sum_{k=1}^n t_k - t_{k-1} = b-a\ M$ ()。

为了证明连续曲线的弱积分存在，首先证明任意这样的曲线都是一致连续的，这样表述如下:

定义 1.8.3. 从度量空间 (X,d) 到拓扑向量空间 E 的映射 $f\colon X \to E$ 称为**一致连续**，如果对于每个零邻域 $U \subseteq E$，都存在 $\delta > 0$ 使得

$$f(x) - f(y) \in U \quad \text{for all } x,y \in X \text{ of distance } d(x,y) < \delta.$$

曲线的一致连续性现在可由下面的引理推出。

引理 1.8.4. 若 $f\colon X \to E$ 是从紧度量空间 (X,d) 到拓扑向量空间 E的连续映射，则 f 一致连续。

证明. 给定 E中的一个零邻域 U，令 $V \subseteq E$ 为一个满足 $V - V \subseteq U$的零邻域。对于 $x \in X$，由 f的连续性可知存在 $\delta_x > 0$ 使得

$$f(y) - f(x) \in V \quad \text{for all } y \in B_{\delta_x}(x),$$

其中 $B_{\delta_x}(x)$ 表示度量空间 X中以 x 为中心、半径为 δ_x 的开球。于是 $(B_{\frac{\delta_x}{2}}(x))_{x\in X}$ 是 X的一个开覆盖。由于空间 X 是紧的，我们可以找到一个有限子集 $F \subseteq X$，使得 $X = \bigcup_{x\in F} B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)$。定义$\delta := \min\{\frac{\delta_x}{2}\colon x \in F\}$。对于 $y,z \in X$，若 $d(y,z) < \delta$，则可找到 $x \in F$使得 $y \in B_{\frac{\delta_x}{2}}(x)$。于是 $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z) < \frac{\delta_x}{2} + \delta \le \delta_x$ 表明 $z \in B_{\delta_x}(x)$ 也成立，因此 $f(z) - f(y) = f(z) - f(x) - (f(y) - f(x)) \in V - V \subseteq U$。我们已经证明 f 一致连续。□

命题 1.1.15 的证明。我们可以假设 $a < b$。设 $\gamma\colon [a,b] \to E$ 是一条 C^0-曲线。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，利用划分 $(a + k2^{-n}(b-a))_{k=0}^{2^n}$，我们通过 $\gamma_n(a) := \gamma(a)$ 定义一个阶梯函数 $\gamma_n\colon [a,b] \to E$，并且

$$\gamma_n(t) \;:=\; \gamma(a + k\,2^{-n}(b-a))$$

对于 $k \in \{0,\dots,2^n-1\}$ 和 $t \in \,]a + k\frac{b-a}{2^n},\ a + (k+1)\frac{b-a}{2^n}]$。我们证明

$$S_n := \int_a^b \gamma_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{b-a}{2^n}\,\gamma(a+k\,2^{-n}(b-a)) \in E$$

是一个柯西序列。为此，设 $U \subseteq E$ 是一个零邻域。缩小 U后，我们不妨假设 $U = \{x \in E\colon \|x\|_p \leq 1\}$是 E 上某个连续半范数 $\|\cdot\|_p$ 的闭单位球（参见命题 B.4.3）。由于区间 $[a,b]$ 是紧的，且 γ 连续，引理 1.8.4给出 $\delta > 0$，使得对所有满足 $|r-s| < \delta$的 $r,\ s \in [a,b]$，都有 $\gamma(r) - \gamma(s) \in \frac{1}{b-a} U$。于是

$$\|\gamma(r) - \gamma(s)\|_p \leq (b-a)^{-1} \quad \text{whenever } |r-s| < \delta. \tag{1.112}$$

设 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $2^{-N}\cdot(b-a) < \delta$。则

$$\max\{\|\gamma_n(t) - \gamma_m(t)\|_p\colon t \in [a,b]\} \leq (b-a)^{-1} \tag{1.113}$$

对所有 $n,\ m > N$ 都成立。事实上，根据 γ_n 的构造，对于每个 $t \in [a,b]$，我们有 $\gamma_n(t) = \gamma(v)$，其中存在某个 $v \in [a,b]$ 使得 $|t-v| \leq 2^{-n}(b-a)$。同样地，$\gamma_m(t) = \gamma(w)$，其中存在某个 $w \in [a,b]$ 使得 $|t-w| \leq 2^{-m}(b-a)$。于是 $|v-w| \leq |v-t| + |t-w| \leq (2^{-n}+2^{-m})(b-a) \leq 2^{-N}(b-a) < \delta$，从而根据 (1.112)，$\|\gamma_n(t) - \gamma_m(t)\|_p = \|\gamma(v) - \gamma(w)\|_p \leq (b-a)^{-1}$。因此 (1.113) 成立。

结合 (1.113) 和 (1.111)，可知 $\|S_n - S_m\|_p \leq 1$ 对所有$n,\ m \geq N$因此 $S_m - S_n \in U$。于是 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 E 中的柯西序列，因而由序列完备性可知它收敛。令 $S := \lim_{n\to\infty} S_n$。若 $\lambda \in E'$，则 $\lambda(S_n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{b-a}{2^n}$ $(\lambda\circ\gamma)(a+k\,2^{-m}(b-a)) \in \mathbb{K}$ 是连续函数 $\lambda\circ\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{K}$的黎曼和。因此，正如单变量微积分中所熟知的，$\lambda(S) = \lim_{n\to\infty} \lambda(S_n) = \int_a^b \lambda(\gamma(t))\,dt$。故 S满足弱积分 $\int_a^b \gamma(t)\,dt$的定义性质。□

高维集合上的向量值积分

我们现在讨论 $[0,1]^n$、单形以及更一般集合上的弱积分，以备后用。我们发现在勒贝格积分的框架下工作较为方便。缺乏必要背景的读者可以将 X 替换为 $\mathbb{R}^n$的Jordan可测子集，假定 f 是连续的，并将勒贝格积分替换为黎曼积分。这对我们的实际应用已经足够。

定义 1.8.5. 设(X,Σ,μ)为一个测度空间，E为一个局部凸空间，$f\colon X \to F$为一个映射，使得对每个 $\lambda \in E'$，$\lambda\circ f\colon X \to \mathbb{K}$ 关于测度 μ在 X 上勒贝格可积。若存在 $z \in E$，使得对每个 $\lambda \in E'$有 $\lambda(z) = \int_X \lambda\circ f\,d\mu$，则称 z为 f 在 X上的弱积分，并记作 $\int_X f\,d\mu := z$。若 X是 $\mathbb{R}^n$ 的博雷尔子集，且 μ是勒贝格测度到 X的限制，我们简记为 $\int_X f(x)\,dx := \int_X f\,d\mu$。

由于 E' 在 E上分离点，弱积分是唯一的（如果它存在）。在本节余下部分，我们赋予 $\mathbb{R}^n$ 及其子集

由最大范数导出的度量（x，y）$\mapsto \|y-x\|_\infty$。我们赋予度量空间（X，d_X）和（Y，d_Y）的乘积 $X\times Y$最大度量，d（（x_1，y_1），（x_2，y_2））：= max{d_X（x_1，x_2） d_Y（y_1，y_2）}对于（x_1，y_1），（x_2，y_2）$\in X\times Y$。

命题 1.8.6。设 E 是一个 *Mackey*完备局部凸空间，且 $0<a<b<\infty$。则对每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及每个利普希茨映射 f：$[a,b]^n\to E$，$\int_{[a,b]^n} f(x)\,dx$ 存在于 E 中。

例如，f：$[0,1]^n\to E$ 可以是任意 C^1-映射（见引理 1.5.6）。

证明。证明采用归纳法。根据 Mackey完备性的定义，$n=1$ 情形成立。现在设 $n\geq 2$。对于每个 $y\in[a,b]^{n-1}$，曲线

$$[a,b]\to E,\quad t\mapsto f(y,t)$$

是利普希茨的，因此弱积分 $g(y):=\int_{[a,b]} f(y,t)\,dt$ 存在。由引理 1.5.7，映射 g：$[a,b]^{n-1}\to E$ 是利普希茨的。因此

$$z:=\int_{[a,b]^{n-1}} g(y)\,dy$$

根据归纳法，存在于 E 中。对于每个 $\lambda\in E'$，我们有 $\lambda(z)=\int_{[a,b]^{n-1}}\lambda(g(y))\,dy=\int_{[a,b]^{n-1}}\int_{[a,b]}\lambda(f(y,t))\,dt\,dy=\int_{[a,b]^n}\lambda(f(x))\,dx$，最后一个等式使用了富比尼定理。因此 $z=\int_{[a,b]^n} f(x)\,dx$。□

推论 1.8.7。设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集，E 为麦基完备局部凸空间，f：$U\to E$ 为一个 C^1-映射，其支集

$$\operatorname{supp}(f):=\overline{\{x\in U:\,f(x)\neq 0\}}$$

是 U 的一个紧子集。那么弱积分 $\int_U f(x)\,dx$ 存在于 E 中。

证明。由于 f 可以通过延拓为 0 而成为定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^1-映射，我们不妨假设 $U=\mathbb{R}^n$。存在 $r>0$ 使得 supp(f) $\subseteq[-r,r]^n$。于是，由命题 1.8.6，$z:=\int_{[-r,r]^n} f(x)\,dx$ 存在于 E 中。应用连续线性泛函可知，z 满足弱积分 $\int_U f(x)\,dx$ 的定义性质。□

命题 1.8.8。设 E 是一个麦基完备局部凸空间。则对每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及定义在单纯形 $\Delta_n:=\{(x_1,\dots,x_n)\in[0,\infty[^n:\,\sum_{k=1}^n x_k\leq 1\}$ 上的利普希茨映射f：$\Delta_n\to E$，弱积分 $\int_{\Delta_n} f(x)\,dx$ 在 E 中存在。

例如，f：$\Delta_n\to E$ 可以是任意的 C^1-映射（参见引理 1.5.6）。

证明。 为了化归到命题 1.8.6，我们使用满射光滑映射

$$\varphi\colon [0,1]^n \to \Delta_n,\ \ \varphi(t_1,\dots,t_n) := (t_1,(1-t_1)t_2,\dots,(1-t_1)\cdots(1-t_{n-1})t_n)$$

带雅可比行列式

$$\delta(t) \ := \ \det \varphi'(t) = (1-t_1)^{n-1}(1-t_2)^{n-2}\cdots(1-t_{n-1})$$

对于 $t = (t_1,\dots,t_n) \in [0,1]^n$。根据引理 1.5.6， φ 是利普希茨映射。于是 $\delta(t) > 0$ 对于 $t \in]0,1[^n$，，且 φ 将 $]0,1[^n$ 微分同胚地映到 Δ_n^0。给定 f，现在考虑映射

$$g\colon [0,1]^n \to E\,, \quad g(t) \ := \ \delta(t)\, f(\varphi(t)),$$

它是两个有界利普希茨映射的乘积，因此也是利普希茨映射（见习题 1.8.1）。根据命题 1.8.6，弱积分 $z := \int_{[0,1]^n} g(t)\,dt$ 存在于 E 中。于是

$$\begin{aligned}\lambda(z) &= \int_{[0,1]^n} \delta(t)(\lambda\circ f)(\varphi(t))\,dt \ = \ \int_{]0,1[^n} \delta(t)(\lambda\circ f)(\varphi(t))\,dt \\ &= \int_{\Delta_n^0} (\lambda\circ f)(x)\,dx \ = \ \int_{\Delta_n} (\lambda\circ f)(x)\,dx\end{aligned}$$

根据积分变换，对每个 $\lambda \in E'$ 均成立。因此 $z = \int_{\Delta_n} f(x)\ dx$。 □

第 1.8 节习题

习题 1.8.1. 设 (X,d) 是一个度量空间， E_1、 E_2 和 F 是局部凸空间， β: $E_1 \times E_2 \to F$ 是连续双线性映射，且 $f_1\colon X \to E_1$ 以及 $f_2\colon X \to E_2$ 是利普希茨映射，并且 $f_1(X) \subseteq E_1$ 和 $f_2(X) \subseteq E_2$ 有界。证明 $\beta\circ(f_1,f_2)\colon X \to F$ 是利普希茨映射。举例说明，若 f_1 或 f_2 无界，则结论可能不成立。

1.9 第1章的注记与评述

光滑映射的微分学 C^k。本文介绍的局部凸空间微分学方法源自 Andr´ee Bastiani [Ba64]。该方法与 A. Fr¨olicher、A. Kriegl 和 P. W. Michor 开创的所谓“方便微分学”（参见 [FK88] 和[KM97]）并列，是无限维微分学的主要方法之一。20 世纪 80 年代，Milnor 关于无限维李群的综述使这一方法广为人知 [Mil84]。我们所考虑的 C^k映射在文献中也称为“Keller 的 C_c^k 映射”，因为在 Keller 对局部凸空间中微分学的比较研究中，这类映射被称为 C_c^k映射

[Kr74]。关于 C_c^k映射（定义在开子集上）微分学的论述，可见 [Mr80], [BCR 81], [Ham82], [Mil82], [Mil84], [Ne01a]以及 [Gl02c]„ 其一般性程度各不相同。与这些文献不同，Keller [Kr74]的研究以收敛结构而非拓扑空间为基础。我们对 Fa`a di Bruno 公式（定理 1.3.18）的表述受到了 [ClH12]的启发。关于习题 1.3.10 的证明（它推广了 [Ham82, Thm. 5.3.1]），参见 [GN17, 引理 2.3] 。

便利微分学。 便利微分学意义下的光滑性是一种弱化的光滑性，它既易于处理，也易于验证。在这一背景下，若映射$f\colon E \to F$在局部凸空间之间满足：对每条光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to E$，映射 $f\circ\gamma\colon \mathbb{R} \to F$都是光滑的，则称其为“光滑”。虽然按照我们的定义，光滑映射也必然是便利意义下的光滑映射，但反过来并不成立：便利光滑映射甚至未必连续。对于 Fr´echet 空间之间的映射，光滑性与便利光滑性等价（参见 [KM97，定理 12.8 和 4.11(1)]），因此在这一特殊情形下，便利微积分的技巧也可用于我们的框架。

完备性。 关于微分学的基础发展并不需要完备性这一观察，见 [Kr74, 附录] 和 [Gl02c]。这对商构造十分重要，因为完备局部凸空间 E 除以闭向量子空间 $F \subseteq E$ 所得的商空间 E/F 未必完备（也未必麦基完备），除非 E 可度量化。这种病态的一个例子（基于 [SN81]）见例 B.13.17；另见 [K¨o69，第 31 节。6] 以及[KM97，例，页 22]。如前所述，麦基完备性对于便利微分学至关重要；关于这一概念的深入结果和大量信息可见 [KM97]。值域空间的麦基完备性也使复解析函数理论更加简明，正如我们将在第 2.1 节回顾的那样。

巴拿赫空间上的经典微积分。对于巴拿赫空间之间的映射，还存在连续弗雷歇可微映射这一经典概念（例如参见 [Di60] and [CaH67]）。对于这类映射，有限维微积分中的其他结果也依然成立；而超出巴拿赫空间的范围后，这些结果可能不再成立（例如逆映射和隐函数定理，或常微分方程解的唯一性与存在性）。回顾一下，从巴拿赫空间 E 的开子集到巴拿赫空间 F 的连续映射 $f\colon E \supseteq U \to F$，如果在每个 $x \in U$ 处都是全微分的（即，存在一个连续线性映射 $f'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$，使得

$$f(x+y) - f(x) - f'(x)(y) = o(\|y\|)$$

成立），且映射 $f'\colon U \to \mathcal{L}(E, F)$ 是连续的，其中 $\mathcal{L}(E, F)$ 配备算子范数。归纳地，如果 f 是 FC^1 的，并且 $f'\colon U \to \mathcal{L}(E, F)$ 是 FC^{k-1} 的，则称 f 为 FC^k（更多细节见第 2.3 节）。可以

证明每个 FC^k-映射都是 C^k 的，并且巴拿赫空间开子集之间的每个 C^{k+1}-映射都是 FC^k 的（见命题 2.3.17，或 [Kr74], [Mil82], [Gl07e，附录], [Wa12，附录 A.3], 以及 [Ne01a]中的概要）。这一可微阶数相差一阶的情况在实际应用中并无大碍。特别地，巴拿赫空间开子集之间的映射是 C^∞ 的，当且仅当它是 FC^∞ 的。

非开子集上的微分学。我们发现，让读者尽早了解非开子集上的分析学至关重要。我们认为，内部稠密的局部凸集是 C^k-映射定义域的理想选择：它既足够一般（适用于李理论的应用），又有助于建立简单而令人信服的理论。许多情况下，这类 C^k-映射不过是向量空间开子集上的 C^k-映射的限制（这是微分几何中的传统研究对象），有限维定义域的情形尤其如此。事实上，对任意局部凸空间 F、开子集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，任意 C^k-映射 $f\colon U \cap [0,\infty[^n \to F$ 都可以延拓为定义在 U 上、取值于 F 的 C^k-映射；而且实际上存在连续线性延拓算子 $C^k(U \cap [0,\infty[^n, F) \to C^k(U, F)$（参见基于 [See64] 的思想的 [Hn23] 和 [Gl20b], ; 另参见 [Mit61]）。对于具有非空内部的紧凸子集 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，$C^k(K, \mathbb{R})$ 可视为 $\mathcal{E}^k(K)$ 空间，其中的元素是 C^k 类惠特尼喷流，并且根据惠特尼延拓定理 [Wh34]，它们允许 C^k-延拓到 $\mathbb{R}^n$。对于 $k = \infty$，连续线性延拓算子 $C^\infty(K, \mathbb{R}) \cong \mathcal{E}^\infty(K) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 的存在性是经典结果（参见 [Stn70，第 181], 页，引自 [Frk07，第 123] 页）。当 k 有限时，连续线性限制映射 $\rho\colon C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to C^k(K, \mathbb{R})$ 如前所述是满射，因而根据 Fr´echet 空间上的开映射定理，它是商映射。因此，[Fef07] 给出了连续线性延拓算子 $C^k(K, \mathbb{R}) \to C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$。对于任意 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 以及任意序列完备局部凸空间 F，现在可以利用 ε-张量积，从前述延拓算子构造出连续线性延拓算子 $C^k(K, F) \to C^k(\mathbb{R}^n, F)$（参见 [Gl20b]）。我们还提及一些相关结果：对于一般的紧子集 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，连续线性算子 $\mathcal{E}^\infty(K) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 存在的条件可通过特征化来描述（参见 [Tn 79] 和 [Frk07]）。关于温和线性延拓算子 [FJW11], 的存在性，以及能以喷流的 C^k-范数估计延拓的 C^k-范数的线性延拓算子的存在性，也有更简明的特征化结果（参见 [FJW16]）。[Mi20], 大力倡导在惠特尼喷流空间上使用延拓算子，旨在研究有限维流形之间的映射流形。关于赋范空间子集上映射的延拓结果，见 [MO92]；局部凸空间中的参数问题则由 [Hn23] 论述。相关结果另见 [Wo06] 和 [RS18]。

$C^{k,\ell}$函数与指数律。$C^{k,\ell}$-映射的微分学由 [Alz13], [Alz19], 和 [AlS15] 发展起来；前两部著作甚至讨论了 C^α- 映射 f：在局部凸空间的子集 $U_1 \times \cdots \times U_n \to F$的乘积上$U_1$、.....、$U_n$ E_1、.....、E_n，其中 $\alpha = (\alpha_1$、.....、$\alpha_n)$ 是一个n-元组，其第 $\alpha_j \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 个分量表示在

第 j 个变量中的阶数。$C^{k,\ell}$-映射的指数律（定理 1.7.30 和评注 1.7.32）及其关于 C^∞-映射的特殊情形（推论 1.7.35），可见于 [Alz13], [Alz19], 和 [AlS15], ，其中使用的是 k-空间，而非 $k_{\mathbb{R}}$-空间。更受限版本的指数律早已出现（例如参见 [Gl04b, §12]）。灵感还来自 [Th96]„ 其中乘积 $\mathcal{O}$ 上的乘积拓扑（如 C^k-映射定义中的那些乘积）被替换为乘积上比 $\mathcal{O}$ 更细的最粗k-空间拓扑（如习题 A.6.1）；另见 [Sei72]。C^α-映射的其他方面见于 [GS22]。

在便利微分学中，对 Mackey 完备局部凸空间的开子集（或更一般的子集）上光滑映射（按便利意义理解）所构成的空间$C^\infty(U,\ F)$采用另一种拓扑，即相对于线性映射所定义的始拓扑

$$C^\infty(\gamma,F)\colon C^\infty(U,F)\to C^\infty(\mathbb{R},F),\quad f\mapsto f\circ\gamma$$

到 F 中的光滑曲线空间（赋予紧开 C^∞-拓扑），其中 $\gamma\colon\ \mathbb{R}\to U$ 遍历所有光滑曲线。于是，光滑函数的指数律总是成立（所涉及的 Mackey 完备局部凸空间无需满足额外条件） [KM97], ，但仅在这样的意义下：映射

$$\Phi\colon C^\infty(U\times V,F)\to C^\infty(U,C^\infty(V,F)),\quad f\mapsto f^\vee$$

是有界向量空间的同构（即，Φ 和 Φ^{-1} 都将有界集映为有界集）。即使对于 $E_1=E_2=U=V=\mathbb{R}$，映射Φ 在便利框架所采用的拓扑下也是不连续的 [Bil02]。

除了光滑或 $C^{k,\ell}$-函数的情形外，对于其他一些相关的可微函数空间（例如，向量值快速衰减光滑函数构成的 Schwartz 空间），也存在指数律，参见[KMR16]和 [Nik15]。

微分学的进一步推广。设 E 和 F 是定义在非离散豪斯多夫拓扑域 $\mathbb{K}$ 上的拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间，且 $U\subseteq E$ 是一个开子集。按照 [BGN04], ，若映射 $f\colon\ U\to F$ 连续，并且方向差商映射存在连续延拓 $f^{[1]}\colon\ U^{[1]}\to F$，如引理 1.2.10 所述，则称其为$C^1$。归纳地，若 f 是 C^1 且 $f^{[1]}$ 是 C^{k-1}，则称 f 为 C^k 。引理 1.2.10 保证，在 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 上的局部凸空间的开子集之间的映射，按照 [BGN04] 的意义是 C^1 的，当且仅当它按照定义 1.2.1 的意义是 C^1 的；此外，C^k-性质也是等价的（见 [BGN04]）。对于拓扑域上的 C^k-映射而言，微分学中相当大一部分内容仍然成立，因此对于实拓扑向量空间或复拓扑向量空间之间的 C^k-映射也是如此，而这些空间不一定是局部凸的。然而，差分学可能比微分学繁琐得多。因此，我们只在差分学具有优势时偶尔使用它；一个例子是借助 $f^{[1]}$对链式法则（命题 1.2.13）的简短证明。有关这种一般方法的更多信息，参见 [Ber08],[Gl04b], [Gl06a], 和 [Gl07d]

微分学。另请比较关于非阿基米德分析的早期文献（如 [Sf84] 及其中的参考文献），其中主要研究单个标量变量的函数。

也可以考虑拓扑群 G的开子集 U 上的向量值 C^k函数 $f\colon\ U \to F$（而非局部凸空间 E上的函数），以及相应的 $C^{k,\ell}$映射。在 $x \in U$ 处沿方向 $y \in E$ 的方向导数可替换为导数

$$df(x,\gamma) := (D_\gamma f)(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x\gamma(t))$$

沿着连续单参数群 $\gamma\colon\ \mathbb{R} \to G$ 此处，在适当的假设下，同样可以使用指数律（参见 [BCR81], [BNi15],[Nik15]以及开创性论文 [Rs53]）。

2 微分学的进一步技巧

在本章中，我们将进一步讨论无穷维微积分的概念和工具，这些内容与特定的例和应用相关，但在无穷维李群的入门课程中可以略过。

2.1 复解析映射

在本节中，为了更加清晰，我们将 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的 C^k-映射称为 $C^k_{\mathbb{K}}$-映射。给定复局部凸空间 E 和 F，我们证明：定义在开子集 $U \subseteq E$ 上的映射 $f\colon U \to F$ 是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$ 当且仅当它是复解析的，即它是一个连续映射，并且在每一点附近都可以表示为连续齐次多项式级数。

首先讨论 $\mathbb{C}$ 的开子集上的映射，然后再进行第二步，将其推广到定义域 $U \subseteq E$ 上，这样做很有用。正如我们先前讨论实区间上的曲线时一样，在这种情况下，$C^k_{\mathbb{C}}$ 性质有一种更简单的描述。

引理 2.1.1。设 $f\colon U \to E$ 是从开子集 $U \subseteq \mathbb{C}$ 到复局部凸空间 E 的映射，且 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么，当且仅当 f 具有复导数时，f 是一个 $C^k_{\mathbb{C}}$-映射

$$f^{(1)}(z) := f'(z) := \lim_{w \to 0} \frac{1}{w}\big(f(z+w) - f(z)\big) \tag{2.1}$$

且对于所有满足 $z \in U$ 和 $j \in \mathbb{N}$ 的 $f_{(j)}(z) := (f^{(j-1)})'(z)$ $j \le k$（其中 $f_{(0)} := f$），并且对于所有满足 $j \le k$ 的 $j \in \mathbb{N}_0$，$f^{(j)}\colon U \to E$ 都是连续的。在这种情况下，

$$f^{(j)}(z) \;=\; d^{(j)}f(z, 1, \ldots, 1) \;=\; \delta_z^j f(1) \tag{2.2}$$

and

$$d^{(j)}f(z, w_1, \ldots, w_j) \;=\; w_1 \cdot \ldots \cdot w_j \cdot f^{(j)}(z)\,, \tag{2.3}$$

对于所有满足 $j \le k$、$z \in U$、w_1、.....、$w_j \in \mathbb{C}$ 的 $j \in \mathbb{N}$。

证明。我们可以假设 $k < \infty$。如果对所有满足 $j \le k$ 的 $j \in \mathbb{N}$，$f^{(j)}$ 都存在且连续，那么仿照引理 1.2.4 的证明可知，对于所有 $(z, w_1) \in U \times \mathbb{C}$，$df(z, w_1)$ 都存在，且由下式给出

$$df(z,w_1) = w_1 df(z,1) = w_1 f'(z), \tag{2.4}$$

它是 $(z,w_1) \in U \times \mathbb{C}$ 的连续 E 值函数。因此 f 是 $C^1_{\mathbb{C}}$。如果 $k \geq 2$，那么 $f'\colon U \to E$ 对所有满足 $j \leq k-1$ 的 $j \in \mathbb{N}$，都存在连续的复导数 $(f')^{(j)} = f_{(j+1)}$，由此根据归纳假设，$f'\colon U \to E$ 是一个 $C^{k-1}_{\mathbb{C}}$ 映射，其中

$$d(f')(z,w_2,\ldots,w_k) = w_2 \cdots w_k (f')^{(k-1)}(z) \tag{2.5}$$

对于 $z \in U$ 和 $w_2, \ldots\ldots, w_k \in \mathbb{C}$。现在 (2.4) 表明，$df$ 是 $C^{k-1}_{\mathbb{C}}$，因此 f 是 $C^k_{\mathbb{C}}$。固定 $w_1 \in \mathbb{C}$，利用 (2.5) 可以在 (2.4) 中关于 z 变量构造 $k-1$ 方向导数，从而得到 (2.3)。

反之，如果 f 是一个 $C^k_{\mathbb{C}}$-映射，那么显然 $f^{(j)}(z)$ 存在，并且对于所有满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}$，它由 $d_{(j)}f(z, 1, \ldots\ldots, 1)$ 给出。只需注意，$d_{(j)}f(z, 1, \ldots\ldots, 1)$ 关于 z 是连续的。□

与注 1.2.12 类似的注释适用于 $C^1_{\mathbb{C}}$-映射 $f\colon \mathbb{C} \supseteq U \to E$。

定义 2.1.2. 设 E 和 F 是复局部凸空间，$U \subseteq E$ 是开集。映射 $f\colon U \to F$ 称为**复解析**（$\mathbb{C}$-解析，或 $C^\omega_{\mathbb{C}}$），如果它是连续的，并且对每个 $x \in U$，都存在一个连续齐次多项式序列 $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$，其中 $p_k\colon E \to F$ 的次数为 k，使得

$$f(x+y) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k(y) \quad \text{as a pointwise limit,} \tag{2.6}$$

对所有 y，在满足 $x + Y \subseteq U$ 的某个零邻域 $Y \subseteq E$ 内，均有。

注 2.1.3. 在前述定义中取 $E = \mathbb{C}$，可知连续映射 $f\colon \mathbb{C} \supseteq U \to F$ 是复解析的，当且仅当对每个 $x \in U$，都存在一个序列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$，其元素 $a_k \in F$ 满足[1]

$$f(x+z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} z^k\, a_k \tag{2.7}$$

对某个满足 $x + Y \subseteq U$ 的零邻域 $Y \subseteq \mathbb{C}$ 内的所有 z，均有。

因此，单复变量函数是复解析的，当且仅当它局部由幂级数给出。值得注意的是，函数 $\mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ 是复解析的，当且仅当它是全纯的。

---

[1] f 的连续性在此实际上是自动成立的，因为对 F 上的每个连续半范数 $\|\cdot\|_p$ 以及满足 $\mathbb{D}_r \subseteq Y$ 的 $r > 1$，我们有

$$\|f(x+z) - f(x)\|_p \leq |z|\, C \sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^{k-1}$$

对于每个 $z \in \mathbb{D}_{r/2}$，其中 $C := \sup\{\|r^k a_k\|_p\colon k \in \mathbb{N}\} < \infty$，因为 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k a_k$ 的收敛性意味着 $\lim_{k\to\infty} r^k a_k = 0$。

定义 2.1.4. 给定一条 C^1-曲线 $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$，以及一个到复局部凸空间 E的连续映射$f\colon \gamma([a,b])\to E$，我们定义

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt,$$

如果右端的弱积分在 E 中存在。若 $\gamma\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C}$,$\gamma(t)=a+re^{it}$ 其中 $a\in\mathbb{C}$ 且 $r>0$，令

$$\int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta)\,d\zeta := \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta.$$

注 2.1.5. (a) 显然，$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ 存在，当且仅当存在一个（必然唯一的）元素 $z\in E$，使得对每个$\lambda\in E'$，都有 $\lambda(z)=\int_\gamma \lambda(f(\zeta))\,d\zeta$。在这种情况下，$z=\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$。

(b) 假设 γ 仅为分段 C^1，即一个 C^0-曲线 $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{C}$，并且存在适当的 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，使得对每个 $j\in\{1,\dots,n\}$，限制 $\gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$ 都是C^1。在这种情况下，只要 z 存在，我们就将 $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ 定义为唯一的元素 $z\in E$，使得对每个 $\lambda\in E'$，都有 $\lambda(z)=\sum_{j=1}^n\int_{t_{j-1}}^{t_j}\lambda(f(\gamma(t)))\,\gamma'(t)\,dt$。容易看出，此定义与 n 和 $t_0,\dots,t_n$ 的选择无关。

We shall use the notation $\mathbb{D}_r=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\le r\}$ and $\mathbb{D}=\mathbb{D}_1$.

命题 2.1.6. 设 $U\subseteq\mathbb{C}$ 是一个开子集，且 $f\colon U\to E$ 是到麦基完备复局部凸空间 E 的映射。那么以下条件等价:

(a) f 是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$; (b) f 是 $C^1_{\mathbb{C}}$; (c) f 是 $C^1_{\mathbb{R}}$，且对每个 $x\in U$，$df(x,\cdot)\colon \mathbb{C}\to E$ 都是复线性的; (d) f 连续且“弱解析”，即对每个 $\lambda\in E'$，映射 $\lambda\circ f\colon \mathbb{C}\supseteq U\to\mathbb{C}$ 都是复解析的。(e) f 连续，并且对所有满足 $x+\mathbb{D}_r\subseteq U$ 的 $x\in U$ 和 $r>0$，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-x|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{2.8}$$

对所有满足 $|z-x|<r$ 的 $z\in\mathbb{C}$。
(f) f 连续，且对每个 $x\in U$，都存在一个如 (e) 中所述的 r，使得 (2.8) 成立。(g) f 是复解析的。

证明。(a)⇒(b)、(b)⇒(c) 和 (e)⇒(f) 这些蕴含关系都是平凡的。

(c)⇒(d): 由于是 $C^1_{\mathbb{R}}$，映射 f 连续。对于每个 $\lambda\in E'$，复合映射 $\lambda\circ f\colon U\to\mathbb{C}$ 是 $C^1_{\mathbb{R}}$; 其实微分为 $(\lambda\circ f)'(x)=\lambda\circ f'(x)\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$

根据链式法则，因此是复线性的；映射 $f'(x)$ 根据假设是复线性的。因此， $\lambda \circ f$ 是全纯的，因而是复解析的，因为它是一个满足柯西–黎曼方程的 $C^1_{\mathbb{R}}$-映射。

(d)⇒(e)： $\lambda \circ f$：对每个 $\lambda \in E'$， $\mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ 是全纯的，因此

$$\lambda(f(z)) = (\lambda \circ f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - x| = r} \frac{(\lambda \circ f)(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{|\zeta - x| = r} \lambda\Big(\frac{1}{2\pi i}\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\Big) d\zeta$$

对于 x， r 以及如**(e)**中所述的 z，根据柯西积分公式。因此， $f(z)$ 是弱积分 $\int_{|\zeta - x| = r} \frac{1}{2\pi i}\, f(\zeta)\, \zeta - z\, d\zeta$。 — —

(f)⇒(g)：设 $r > 0$ 如**(f)**中所述，且 $s \in]0,\ r[$。对于每个 $z \in \mathbb{D}_s$，我们有 $x + z \in x + \mathbb{D}^0_r$，因此

$$f(x+z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - x| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - (x+z)}\, d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x + re^{it})}{re^{it} - z}\, re^{it}\, dt\,,$$

根据假设。这里

$$\frac{re^{it}}{re^{it} - z} \;=\; \frac{1}{1 - \frac{z}{re^{it}}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z}{re^{it}}\Big)^n,$$

由于 $\big|\frac{z}{re^{it}}\big| \le \frac{s}{r} < 1$。我们断言

$$\sum_{k=0}^{n} f(x + re^{it}) \Big(\frac{z}{re^{it}}\Big)^k \;\to\; \frac{f(x + re^{it})}{re^{it} - z}\, re^{it}$$

关于 $t \in [0, 2\pi]$，当 $n \to \infty$ 时一致地。如果这是真的，则引理 1.1.14 表明

$$\begin{aligned} f(x+z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x + re^{it})}{re^{it} - z}\, re^{it}\, dt \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x + re^{it})}{(re^{it})^n}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, a_n \end{aligned}$$

其中 $a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - x| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{n+1}}\, d\zeta$，因此 f 是复解析的，正如所要求的。为证明这一断言，设 p 是 E 上的连续半范数。那么

$$C \;:=\; \sup\big\{\|f(x + re^{it})\|_p \colon t \in [0, 2\pi]\big\} \;<\; \infty\,,$$

因为 $[0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|f(x + re^{it})\|_p$ 是紧集上的连续函数。固定 z，并简记 $K := \frac{C}{1 - \frac{s}{r}}$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们得到

$$\begin{aligned} &\Big\| \frac{f(x + re^{it})}{re^{it} - z}\, re^{it} - \sum_{k=0}^{n} f(x + re^{it}) \big(\tfrac{z}{re^{it}}\big)^k \Big\|_p \\ &\qquad = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f(x + re^{it}) \big(\tfrac{z}{re^{it}}\big)^k \Big\|_p \;\le\; C \sum_{k=n+1}^{\infty} (s/r)^k \;=\; K\,(s/r)^{n+1} \end{aligned}$$

对每个 $t \in [0,2\pi]$ 都成立，因此对所有 t 取上确界也有 $\leq K(s/r)^{n+1}$。所需的一致收敛得以证明。

(g)⇒(e)：若 f 是复解析的，则给定 $x \in U$，存在元素 $a_n \in E$使得 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-x)^n a_n$ 对所有充分接近 x 的 z 都成立，因此$\lambda(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-x)^n \lambda(a_n)$ 对每个 $\lambda \in E'$都成立，这表明函数$\lambda \circ f\colon \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ 是复解析的，因而是全纯的。由柯西积分公式，对于每个 $x \in U$和满足 $x + \mathbb{D}_r \subseteq U$的 $r > 0$，我们有

$$\lambda(f(z)) = (\lambda \circ f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - x| = r} \frac{\lambda(f(\zeta))}{\zeta - z}\, d\zeta$$

对每个 $z \in x + \mathbb{D}_r$都成立。由于 $\lambda \in E'$ 是任意的，我们仿照“(d)⇒(e)”可知，$f(z)$ 是弱积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - x| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ 对每个 $z \in x + \mathbb{D}_r$都成立。因此 (e) 成立。

(e)⇒(a)：给定 $x \in U$，设 $r > 0$使得 $x + \mathbb{D}_r \subseteq U$。映射 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，$g(w) := x + re^{iw}$ 是连续的，故原像 $W := g^{-1}(U \setminus (x + \mathbb{D}_{r/2}))$是开的，并且由假设它包含 $[0,2\pi]$。映射

$$\varphi\colon (x + \mathbb{D}^0_{r/2}) \times [0,2\pi] \to E, \quad \varphi(z,t) := \frac{1}{2\pi}\frac{f(x + re^{it})}{re^{it} - z}\, re^{it}$$

具有形式 $\varphi(t,z) = \beta(h(z,t)\ c(t))$，其中 $\beta\colon \mathbb{C} \times E \to E$，$\beta(s,v) := sv$ 是连续双线性的数乘，$c\colon [0,2\pi] \to E$，$c(t) := f(x + re^{it})_{2\pi}\ ^{re^{it}}$ 是连续的，且 $h\colon (x + \mathbb{D}^0_{r/2}) \times W \to \mathbb{C}$，$h(z,w) := \frac{1}{re^{iw} - z}$是$C^\infty_{\mathbb{C}}$。因此，我们处于注记 1.3.24(c)的情形。若假设 E是序列完备的，则所有相关的弱积分自动存在，从而使我们能够对含参积分$f(z) = \int_0^{2\pi} \varphi(z,t)\, dt$应用命题 1.3.23。因此在此情形下 f是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$，且

$$\begin{aligned} f^{(j)}(z) = d^{(j)} f(z,1,\ldots,1) &= \int_0^{2\pi} \beta(d_1^{(j)} h(z,t,1,\ldots,1), c(t))\, dt \\ &= \frac{j!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x + re^{it})re^{it}}{(re^{it} - z)^{j+1}}\, dt = \frac{j!}{2\pi i}\int_{|\zeta - x| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}}\, d\zeta. \quad (2.9) \end{aligned}$$

在一般情形下，若 E 仅仅是麦基完备的，则前述论证可保证 f 作为映到某一完备化 E的映射是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$，从而推出

$$[0,2\pi] \to \widetilde{E}, \quad t \mapsto \frac{j! f(x + re^{it})re^{it}}{2\pi(re^{it} - z)^{j+1}} \qquad (2.10)$$

是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$，因此对每个 $z \in x + \mathbb{D}_{r/2}$和 $j \in \mathbb{N}$，都是一条利普希茨曲线。但这样一来，(2.10) 也是 E中的一条利普希茨曲线，因此 (2.9) 中所有弱积分都存在于 E 中，后者是麦基完备的。现在，f 是一个 $C^\infty_{\mathbb{C}}$-映射$\mathbb{C} \supseteq U \to \widetilde{E}$，且对每个 $j \in \mathbb{N}_0$都有 $f^{(j)}(U) \subseteq E$，由 (2.3) 可推出$d_{(j)}f(U \times \mathbb{C}^j) \subseteq E$对每个 $j \in \mathbb{N}_0$都成立。因此，根据习题 1.3.3，作为到 E的映射，f也是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$的。□

注 2.1.7。命题 2.1.6(d) 中的连续性假设可以省略。事实上，若 $f\colon \mathbb{C} \supseteq U \to E$ 是弱解析的，$x \in U$ 且 $K \subseteq U$ 是 x的一个紧邻域，则对每个 $\lambda \in E'$，$\lambda(f(K)) \subseteq \mathbb{C}$ 是紧集，因而有界，因为函数 $\lambda \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ 是复解析的，因而连续。因此，根据麦基定理（定理 B.9.8），$f(K)$是弱有界的，因而在 E中有界。对于满足 $x + \mathbb{D}_r \subseteq U$和 $z \in \mathbb{D}_r^0$的每个 $r > 0$，由柯西积分公式可得

$$\lambda(f(z)) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda(f(x + re^{it}))re^{it}}{re^{it} - z}\, dt$$

对每个 $\lambda \in E'$，从而 $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{2\pi(re^{it}-z)} f(x+re^{it})\, dt$作为弱积分（在练习 1.1.11(a) 的扩展意义下）。这里，被积函数的第一个因子是连续的复值函数，而第二个因子是有界的，因为 $f(x+\mathbb{D}_r)$ 由于 $x+\mathbb{D}_r$ 的紧致性而是有界的（如上所述）。练习 1.1.11(b) 现在表明含参积分f 是连续的。

推论 2.1.8.设 $U \subseteq \mathbb{C}$ 为开集，E 为复局部凸空间，且 $f\colon U \to E$ 为复解析映射。则 f 是 $C_{\mathbb{C}}^{\infty}$，并且对满足 $x + \mathbb{D}_r \subseteq U$ 的每个 $x \in U$ 和 $r > 0$，下列结论成立：

(a) (2.7) 中的系数 a_n 唯一确定；它们由下式给出：$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$。(b) 对于每个 $z \in \mathbb{D}_r^0$，都有 $f(x + z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f^{(n)}}{n!}(x)$ (c) 柯西积分公式成立：对于每个 $z \in x + \mathbb{D}_r^0$ 和 $n \in \mathbb{N}_0$，

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta - x| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta\,. \tag{2.11}$$

因此，对于 E 上的每个连续半范数 $\|\cdot\|_p$，我们有“柯西估计”

$$\|f^{(n)}(x)\|_p \;\le\; \frac{n!}{r^n}\max\big\{\|f(\zeta)\|_p\colon |\zeta - x| = r\big\}\,. \tag{2.12}$$

证明。(a) 设 $Y \subseteq \mathbb{C}$ 是一个零邻域，使得 $x+Y \subseteq U$ 且对所有 $z \in Y$，$f(x+z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$。于是 $\lambda(f(x+z)) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \lambda(a_n)$，因此

$$h\colon Y \to \mathbb{C}, \quad h(z) := \lambda(f(x+z))$$

是一个全纯函数，因此，正如复分析中众所周知的，对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，$a_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!}$。如果 E是麦基完备的，那么根据命题 2.1.6，f是 $C_{\mathbb{C}}^{\infty}$，因此 $h'(z) = \lambda(f'(x+z))$；更一般地，由归纳法，对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，都有 $h^{(n)}(z) = \lambda(f^{(n)}(x+z))$。因此，对每个 $\lambda \in E'$，$\lambda(a_n) = \lambda\big(\frac{f^{(n)}}{n!}(x)\big)$，由此确实有 $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$。如果 E不是麦基完备的，我们

~将 f 视为取值于完备化 E的复解析函数。那么，作为取值于 $\widetilde{E}$的函数， f 是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$，且对每个 $n \in \mathbb{N}_0$， $f^{(n)}(x) = n!\, a_n \in E$。由于 f是一个$C^\infty_{\mathbb{C}}$-映射 $\mathbb{C} \supseteq U \to \widetilde{E}$，满足对每个 $n \in \mathbb{N}_0$都有 $f^{(n)}(U) \subseteq E$，我们便可得出（如同命题 2.1.6 证明的结尾所示），作为取值于 E的映射， f 也 $C^\infty_{\mathbb{C}}$。

(b) 和 (c)：由于 $f(x+z) \in E$ 在 (b) 中成立，且所有直和项都属于 E，所讨论的序列在 E 中收敛到 $f(x+z)$，当且仅当它在 $\widetilde{E}$中收敛到该值。同样，由于 $f^{(n)}(z) \in E$在 (c) 中成立，且被积函数取值于 E，只要能证明这些公式对作为从 ~到 E的映射的 f 成立，它们就在 E 中成立。因此，我们可以假设 E 是完备的。命题 2.1.6 中“(f)⇒(g)”的证明表明，对于每个 $z \in \mathbb{D}^0_r$， ~~$f(x+z) = \sum_{n=0}^\infty z^n a_n$~~，其中 $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - x| = r} \frac{f(\zeta)\,(\zeta - x)}{n+1}\, d\zeta$。由已证得的 (a)，有 $a_n = f^{(n)}(x)\, n!$，因此柯西积分公式对 $f^{(n)}(x)$ 成立。将引理 1.1.9 应用于 (2.11)，即可得到柯西估计。□

推论 2.1.9。设 $U \subseteq \mathbb{C}$ 为开集， E 为复局部凸空间，且 $f\colon\ U \to E$ 为映射。则以下条件等价：

（a） f 是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$；（b） f是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$，且对每个 $x \in U$， $df(x, \cdot)\colon \mathbb{C} \to E$是复线性的；（c） f 是复解析的。

证明。蕴含 (a)⇒(b) 是平凡的，而 (c)⇒(a) 已在引理 2.1.8 中证明。

(b)⇒(c)：由命题 2.1.6， f 作为取值于 E的~完备化 E 的映射是复解析的。给定 $x \in U$，取 $r > 0$ 使得 $x + \mathbb{D}_r \subseteq U$。由推论 2.1.8，对所有 $z \in \mathbb{D}^0_r$，有 $f(x+z) = \sum_{n=0}^\infty z^n a_n$，其中$a_n := f^{(n)}(x)\, n! = \frac{1}{n!}\, d^{(n)} f(x, 1, \ldots, 1) \in E$对每个 ~~$n \in \mathbb{N}_0$~~都成立，因为 f作为取值于 E的映射是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$的。因此，对每个 n，$f(x+z) = \sum_{n=0}^\infty z^n a_n$且 $a_n \in E$，从而 f作为取值于 E的映射是复解析的。□

引理 2.1.10. 设 $r > 0$ 和 $f\colon\ \mathbb{D}^0_r \to E$ 是到复局部凸空间 E的复解析映射。那么 $f'\colon\ U \to E$也是复解析的。若$f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n a_n$，则 $f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n z^{n-1} a_n$。

证明. 由于 f 是复解析的， f 是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$，因此 f' 也是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$，从而是复解析的。由推论 2.1.8(a)，我们有 $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$。再次由推论 ~~2.1.8~~(a)，我们有 $f'(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n b_n$，其中 $b_n = \frac{(f')^{(n)}(0)}{n!} = (n+1)\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = (n+1)a_{n+1}$，由此即可得出所需公式。□

定义 2.1.11。设 E、 F 为复局部凸空间， $U \subseteq E$ 为开集，且 $f\colon\ U \to F$ 为一个映射。若 f *Gˆateaux* 解析，即它沿每条仿射直线都是复解析的，则称其为此类映射；也就是说，对于每个 $x \in U$ 和 $y \in E$，函数

$$Z \to F, \quad z \mapsto f(x + zy)$$

在开子集 $Z := \{z \in \mathbb{C}\colon\ x + zy \in U\} \subseteq \mathbb{C}$是复解析的。

定理 2.1.12. 设 E 和 F 是复局部凸空间，$U \subseteq E$ 是开集，且 $f\colon U \to F$ 是一个映射。那么下列条件等价：

(a) f 是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$；(b) f是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$，且 $f'(x)\colon E \to F$对每个 $x \in U$ 都是复线性的；(c) f 是连续且盖托解析的；(d) f 是复解析的。

如果 F 是麦基完备的，那么 (e) 和 (f) 也都分别等价于(a)–(d)：

(e) f *is* $C^1_{\mathbb{C}}$*;*
(f) f *is* $C^1_{\mathbb{R}}$ *and* $f'(x)\colon E \to F$ *is complex linear, for each* $x \in U$*.*

证明。 蕴含关系 (a)⇒(b)、(a)⇒(e) 和 (e)⇒(f) 都是平凡的。

(b)⇒(c)：给定 $x \in U$和 $y \in E$，令 $Z := \{z \in \mathbb{C}\colon x + zy \in U\}$。映射 $Z \to U$, $z \mapsto x + zy$ 是连续仿射线性映射的限制，因而是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$，复合映射 $h\colon Z \to F$, $h(z) := f(x + zy)$ 是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$，其在 $z \in Z$ 处的微分 $h'(z)$ 由 $h'(z)(w) = f'(x + zy)(wy)$ 给出，其中 $w \in \mathbb{C}$；这是由链式法则得到的。由于 $f'(x + zy)$ 是复线性的，上述公式表明 $h'(z)\colon \mathbb{C} \to F$ 是复线性的，因此根据推论 2.1.9 中的 (b)⇒(c)，h 是复解析的。于是 f 连续且盖托解析。

(c)⇒(a)：我们用归纳法证明，对每个 $k \in \mathbb{N}$，f 是 $C^k_{\mathbb{C}}$。给定$x_0 \in U$，存在 x_0 的一个开邻域 $X \subseteq U$ 以及一个平衡的0-邻域 $Y \subseteq E$，使得 $X + 2Y \subseteq U$。给定 $x \in X$与 $y \in Y$，由 f的Gâteaux解析性，映射 $h\colon \mathbb{D}^0_2 \to F$，$h(z) := f(x+zy)$是复解析的，从而 $df(x, y) = h'(0)$存在。由于由推论 2.1.8(c)，$h'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{h(\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(x+\zeta y)}{\zeta^2}\, d\zeta$，我们得到

$$df(x, y) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{f(x + \zeta y)}{\zeta^2}\, d\zeta \quad \text{for all } x \in X \text{ and } y \in Y. \tag{2.13}$$

如同引理 1.2.4 中所示，我们看到，对于所有 $x \in X$和$y \in E = \bigcup_{s>0} sY$，$df(x, y)$ 实际上都存在，并且关于 y 是齐次的。因此，对于所有 $(x, y) \in U \times E$，$df(x, y)$ 都存在，因为 x_0 是任意的。由于 f 连续，由 (2.13) 和引理 1.1.11 可知，$df|_{X\times Y}$ 连续。由于 $E = \bigcup_{s>0} sY$ 和

$$df(x, y) \;=\; s\, df|_{X\times Y}(x, s^{-1}y) \qquad \text{for each } x \in X \text{ and } y \in sY, \tag{2.14}$$

我们推得 $df|_{X\times E}$连续（因而 df也连续，因为 x_0是任意的）。因此，f 是 $C^1_{\mathbb{C}}$。令 $Q \subseteq \mathbb{C}$ 为一个开子集，使得 $[0, 2\pi] \subseteq Q$，并且对所有 $s \in Q$，$|e^{is}| \leq 2$。若现在对于某个 $k \in \mathbb{N}$，f 依归纳法是 $C^k_{\mathbb{C}}$，则 (2.13) 将 $df(x, y)$ 表示为一个含参积分：$df(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x, y, t)\, dt$，其中 $g\colon X \times Y \times Q \to F$，$g(x, y, s) := e^{-is} f(x + e^{is}y)$ 是 $C^k_{\mathbb{C}}$。根据注记 1.3.24(b)，命题 1.3.23 表明 $df|_{X\times Y}$ 作为到F的映射是 $C^k_{\mathbb{C}}$ 的，因此由 (2.14) 可知 $df|_{X\times E}$ 也是如此，进而 df 也是如此（因为 x_0 是任意的）。因此，f作为到 $\widetilde{F}$的映射是 $C^{k+1}_{\mathbb{C}}$的。由于 $\delta^j_x f(y) = \frac{d^j}{dz^j}\big|_{z=0} f(x + zy)$ $\in F$具有复

$z \mapsto f(x+zy)$作为到 F的映射的解析性，我们推得，对每个 $x \in U$， $\delta_x^j f(E) \subseteq F$，且 $y \in E$和 $j \le k+1$，因此由极化（参见推论 1.6.20）也有 $d^{(j)}f(U \times E^j) \subseteq F$。因此， f 作为到 F的映射也是 $C_{\mathbb{C}}^{k+1}$ 的，从而完成归纳证明。

(c)⇒(d)：根据已经证明的“(c)⇒(a)”， f 是 $C_{\mathbb{C}}^{\infty}$。给定 $x \in U$，令$W \subseteq E$ 为一个平衡开零邻域，使得 $x + W \subseteq U$。对于每个$y \in W$，集合 $Z := \{z \in \mathbb{C}: zy \in W\}$是 $\mathbb{C}$中的一个平衡开零邻域。根据假设，映射 $h\colon Z \to F$, $h(z) := f(x+zy)$是复解析的。由于 $1 \in Z$ 且 Z 是开集，对于某个 $r > 1$ ，我们有 $r \in Z$ ，因此$\mathbb{D}_r \subseteq Z$，因为 Z 是平衡的。现在，推论 2.1.8(b)表明

$$h(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n \, \frac{\delta_x^n f(y)}{n!} \quad \text{for each } z \in \mathbb{D}_r^0 .$$

因此 $f(x+y) = h(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_x^n f(y)}{n!}$，其中 $\frac{\delta_x^n f}{n!}\colon E \to F$是由引理 1.6.9可知的一个次数为 n的连续齐次多项式。因此， f 是复解析的。

(d)⇒(c)：给定 $x \in U$和 $y \in E$，映射 $h\colon Z \to F$， $z \mapsto f(x+zy)$ 在$Z := \{z \in \mathbb{C}: x + zy \in U\} \subseteq \mathbb{C}$是连续的。给定 $z \in Z$，存在一个开零邻域 $W \subseteq E$，使得 $(x+zy) + W \subseteq U$，以及次数为 k 的连续齐次多项式 $p_k\colon E \to F$，使得对于每个 $w \in W$， $f((x+zy)+w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(w)$。存在一个开零邻域 $Y \subseteq \mathbb{C}$，使得 $Yy \subseteq W$。于是，对于每个 $s \in Y$， $h(z+s) = f((x+zy) + sy) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k(y)$。因此， h 是复解析的，从而 f 是盖托解析的。

(f)⇒(c)：假设 f 是 $C_{\mathbb{R}}^1$，且每个 $f'(x)$ 都是复线性的。那么 f是连续的。给定 $x \in U$ 和 $y \in E$，令 $h\colon Z \to F$, $h(z) := f(x+zy)$ 如定义 2.1.11 所述。那么 h 是$C_{\mathbb{R}}^1$，其微分 $dh(z, \cdot)\colon \mathbb{C} \to F, w \mapsto df(x+zy, wy)$ 对每个 $z \in Z$ 都是 $\mathbb{C}$线性的，因此根据命题 2.1.6， h 是复解析的。因此 f 是连续的且为盖托解析的。□

注 2.1.13。既然已经证明复解析映射与 $C_{\mathbb{C}}^{\infty}$-映射是一回事，我们便可由命题 1.3.4 推出，可复合的复解析映射的复合仍是复解析的。

每个复解析映射在局部都由其泰勒级数给出。

推论 2.1.14。设 $f\colon E \supseteq U \to F$为复解析映射，且 $x \in U$。则下述结论成立：

(a) $p_k\colon E \to F$ 中的齐次多项式由(2.6) 唯一确定；它们由 $p_k = \delta_x^k f/k!$ 给出，其中 $\delta_x^k f$ 是 f 在 x 处的第 k 阶盖托微分。(b) 若 $V \subseteq E$ 是一个平衡开0邻域，且 $x + V \subseteq U$，则

$$f(x+z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_x^k f(z)}{k!} \qquad \textit{for all } z \in V.$$

证明。假设对每个 $z \in Y$，都有 $f(x+z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z)$，如 (2.6) 所示。给定 $y \in E$，存在 $r > 0$ 使得 $\mathbb{D}_r^0 y \subseteq Y$。于是 $h\colon \mathbb{D}_r^0 \to F, h(s) = f(x+sy) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k(y)$ 是复解析的。由推论 2.1.8(a)，对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，有 $p_k(y) = h^{(k)}(0)/k! = \delta_x^k f(y)/k!$。这证明了 (a)；在证明定理 2.1.12 中的“(c)⇒(d)”时，断言 (b) 已经得到证明。□

例 2.1.15. 设 $\mathcal{A}$ 是一个复连续逆代数。根据推论 1.3.8，求逆映射 $\iota\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times, \iota(x) := x^{-1}$ 是复解析的。我们将 ι 在点 $x \in \mathcal{A}^\times$ 处展开为泰勒级数。由习题 1.6.2 可知，对于每个$y \in \mathcal{A}$，都有 $\delta_x^k \iota(y) = (-1)^k k! x^{-1}\big(yx^{-1}\big)^k$。现在，推论 2.1.14 表明，对于每个满足 $x + \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{A}^\times$ 的绝对凸开零邻域 $\mathcal{Y} \subseteq A$，我们有

$$\iota(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{-1}\big(yx^{-1}\big)^k \quad \text{for all } y \in Y.$$

特别是，如果 $x = \mathbf{1}$，那么 $\iota(\mathbf{1}+y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^k$，因此

$$(\mathbf{1}-y)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k. \tag{2.15}$$

因此，$(\mathbf{1}-y)^{-1}$ 由诺伊曼级数给出，正如我们在习题 1.3.9 中已经遇到的巴拿赫代数的情形一样。

定理 2.1.16（恒等定理）。设 E 和 F 是复局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个开连通子集，且 $f\colon U \to F$ 是复解析的。假设下列条件之一成立：

(a) 存在一个非空开子集 $V \subseteq U$，使得 $f|_V = 0$；(b) 存在 $x \in U$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 都有 $\delta_x^k f = 0$；或者：(c) 存在一个实向量子空间 $H \subseteq E$，使得 $H + iH = E$，并且存在 $x \in U$，使得 $f|_{(x+H)\cap U} = 0$。

那么 $f = 0$。

证明。首先注意，(a)⇒(b)，因为 $f|_V = 0$ 蕴含 $d^{(k)}f(V \times E^k)$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立（显然可用归纳法证明），由此可得，对所有 $k \in \mathbb{N}$，$x \in V$，都有 $\delta_x^k f = 0$。

此外（c）⇒（b）。事实上，给定 $x \in U$，使得 $f|_{(x+H)\cap U} = 0$ 且 $y \in H$，存在 $r > 0$ 使得 $x + \mathbb{D}_r^0 y \subseteq U$。于是 $h\colon \mathbb{D}_r^0 \to F$，$h(z) := f(x+zy)$ 是 $C_{\mathbb{C}}^\infty$。这里，对每个 $t \in]-r$，根据假设，$h(t) = 0$，因此对每个 $t \in]-r$，也有 $h'(t) = \lim_{s\to 0} \big(h(t+s) - h(t)\big)/s = 0$，因为我们可以用实数序列 s 来计算极限。重复这一论证，我们发现对每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 和每个 $t \in]-r$，$h^{(k)}(t) = 0$，从而对每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 以及特别是每个 $y \in H$，$\delta_x^k f(y) = h^{(k)}(0) = 0$。现在，极化公式（1.71）表明，对所有 $y_1, \ldots\ldots, y_k \in H$，$d^{(k)} f(x, y_1, \ldots\ldots, y_k) = 0$，由此，利用

$d^{(k)}f(x,\cdot)$ 的复 k-线性。由于 $E = H + iH$，我们推得$d^{(k)}f(x,\cdot) = 0$，因此 $\delta_x^k f = 0$。

现在假设 (b) 成立。利用习题 1.6.6，我们可知

$$W := \{x \in U\colon (\forall k \in \mathbb{N}_0)\ \delta_x^k f = 0\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}\bigcap_{y\in E}\{x \in U\colon \delta_x^k f(y) = 0\}$$

是 U 的闭子集。根据我们的假设，W 非空。由于 U 连通，如果能够证明 W 也是开集，我们就有 $W = U$（从而证明完成）。为此，令 $x \in W$；于是对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，都有 $\delta_x^k f = 0$。存在一个平衡开零邻域 $V \subseteq E$，使得 $x + V \subseteq U$。那么对于每个 $z \in V$，由推论 2.1.14 可得 $f(x+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_x^k f}{k!}(z) = 0$，从而 $f|_{x+V} = 0$，因此根据 (a) 的证明，$x + V \subseteq W$ (b)。于是 W 是其每个点的一个邻域，因而是开集。□

在复解析性的定义中，我们要求在每个点附近都存在一个由齐次多项式构成的级数展开。在良好的情形下，只需在某一个点附近有这样的展开即可。

命题 2.1.17。设 E 和 F 是复局部凸空间，$U \subseteq E$是一个平衡开0-邻域，且 $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ 是一个由连续齐次多项式构成的序列 $p_k\colon E \to F$，其次数为 k。若极限

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z)$$

对每个 $z \in U$都存在，映射 $f\colon U \to F$是连续的，且 F是麦基完备的，那么 $f\colon U \to F$ 是复解析的。

证明。由于 f 是连续的，根据定理 2.1.12 中的“(c)⇒(d)”，我们只需证明 f 是盖托解析的。由命题 2.1.6(d)可知，当且仅当对每个 $\lambda \in F'$，$\lambda \circ f$ 都是盖托解析的。这里，$(\lambda \circ f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda \circ p_k)(z)$。因此，我们不妨假设 $F = \mathbb{C}$。我们断言，对每个紧子集 $K \subseteq U$，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup\{|p_k(x)|\colon x \in K\} < \infty\,. \tag{2.16}$$

为此，取 $r > 1$ 使得 $\mathbb{D}_r K \subseteq U$（这是可能的，因为 K 是紧的，而 U 是开且平衡的）。给定 $x \in K$，映射 $h\colon \mathbb{D}_r^0 \to \mathbb{C}$,$h(z) := f(zx) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(x)$ 是全纯的，且 $p_k(x) = \frac{h^{(k)}(0)}{k!}$。于是$C := \sup\{|f(y)|\colon y \in \overline{\mathbb{D}_r K}\} < \infty$，这是由 $\mathbb{D}_r K$的紧致性和 f的连续性得出的。利用柯西估计 (2.12)，得到

$$|k!\,p_k(x)| = |h^{(k)}(0)| \le \frac{k!}{r^k}\sup\Big\{|h(z)|\colon z \in \mathbb{D}_r\Big\} \le \frac{k!}{r^k}\,C\,.$$

因此，对每个 $x \in K$， $|p_k(x)| \le C/r^k$，从而

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup\{|p_k(x)| : x \in K\} \le \sum_{k=0}^{\infty} C/r^k = \frac{C}{1-\frac{1}{r}} < \infty,$$

由此，(2.16) 成立。

给定 $x \in U$和 $y \in E$，定义 $Z := \{z \in \mathbb{C} : x + zy \in U\}$和 $g : Z \to \mathbb{C}$,$g(z) := f(x+zy)$。对于每个 $z_0 \in Z$，我们找到 $r > 0$使得 $z_0 + \mathbb{D}_r \subseteq Z$。集合 $K := x + (z_0 + \mathbb{D}_r)y \subseteq U$是紧的，由 (2.16) 可知级数$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x+zy)$ 在 $z_0 + \mathbb{D}_r$ 上一致地收敛。因此， $g|_{z_0+\mathbb{D}_r^0}$是全纯的，因为它是全纯（多项式）函数$z_0 + \mathbb{D}_r^0 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} p_k(x+zy)$的一致极限。由于 $z_0 \in Z$是任意的，我们看到 g是全纯的，因此 f 是 Gˆateaux 全纯的，正如所要求的。□

例 2.1.18。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺复巴拿赫代数。我们在习题 1.6.7 中已经看到，映射 exp: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$、$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$以及 log : $B_1^{\mathcal{A}}(1) \to \mathcal{A}$、$\log(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)_k^{k+1}(x-1)^k$是连续的。因此，命题 2.1.17 表明 exp 和 log 是复解析的。推论 2.1.14 推出，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$P_0^n(\exp)(\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k}^{k+1} x^k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$且 $P_1^n(\log)(\,)\,()$。

直极限上的复解析函数

我们以一个更专门的结果结束本节，该结果涉及局部凸直极限的开子集上的复解析函数。下面的定理略微推广了 [Da10]中的主要结果。它对某些复李群的构造以及证明其正则性很有用（参见例如 [Da11] 和 [Da14]）。

定理 2.1.19（达门定理）。设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是一个复局部凸空间的直序列，其局部凸归纳极限 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 是豪斯多夫的。设 $U_n \subseteq E_n$ 是 $n \in \mathbb{N}$ 的一个凸开子集，且 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$。则 $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 在 E 中是开的。若 F 是一个复局部凸空间，且 $f : U \to F$ 是一个函数，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$， $f_n := f|_{U_n} : U_n \to F$ 都是复解析的，并且 $f(U_n) \subseteq F$ 有界，则 f 是复解析的。

在下面的引理及其证明中，我们使用定义 1.5.4 中的术语和记号。

引理 2.1.20。设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$为局部凸空间的直接序列，其局部凸归纳极限为 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$。设 $U_n \subseteq E_n$ 为 $n \in \mathbb{N}$的凸开子集，使得 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$。若 F为局部凸空间，且 $f : U \to F$为函数，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$， $f_n := f|_{U_n} : U_n \to F$ 在 $U_n \subseteq E_n$ 上是利普希茨的，则 f 是连续的。

证明。给定 $x \in U$，我们来证明 f 在 x处连续。对某个 $m \in \mathbb{N}$，我们有 $x \in U_m$；在过渡到直序列 $E_m \subseteq E_{m+1} \subseteq \cdots$之后，我们可以假设 $x \in E_1$。在对每个 $n \in \mathbb{N}$ 将 U_n 替换为 $U_n - x$，并将 f替换为 $g\colon\ U - x \to F$，$g(y) := f(x+y)$之后，我们可以假设 $x = 0$。设 p为 F 上的连续半范数，且 $\varepsilon > 0$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在 E_n 上的连续半范数 q_n，使得 $\operatorname{Lip}_{p,\,q_n}(f_n) < \infty$。选取 $r_n > 0$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n \operatorname{Lip}_{p,q_n}(f_n) \,<\, \varepsilon;$$

例如，取 $r_n := \varepsilon 2^{-n}/(\operatorname{Lip}_{p,\,q_n}(f_n) + 1)$，其中 $n \in \mathbb{N}$。于是

$$V := \sum_{k\in\mathbb{N}} B^{q_k}_{r_k}(0) \cap 2^{-k} U_k$$

是 E 中的一个开零邻域（见引理 B.13.6(c)）。此外，

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} U_k \subseteq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} U_n \subseteq U_n \quad \text{for each } n \in \mathbb{N},$$

因为 U_n 是凸的且 $0 \in U_n$。若 $y \in V$，则存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 以及元素 $z_k \in B^{q_k}_{r_k}(0) \cap 2^{-k} U_k$，使得 $y = \sum_{k=1}^{n} z_k$ 对 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 成立。简记

$$y_k := \sum_{j=1}^{k} z_j \ \text{ for } k \in \{0, 1, \ldots, n\};$$

因此 $y_0 = 0$ 且 $y_n = y$。此外，对所有 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 以及 $q_k(y_k - y_{k-1}) = q_k(z_k) < r_k$，都有 $\{y_{k-1}, y_k\} \subseteq U_k$。于是

$$\begin{aligned} p(f(y) - f(0)) &\le \sum_{k=1}^{n} p(f(y_k) - f(y_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} p(f_k(y_k) - f_k(y_{k-1})) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} q_k(y_k - y_{k-1}) \operatorname{Lip}_{p,q_k}(f_k) \le \sum_{k=1}^{n} r_k \operatorname{Lip}_{p,q_k}(f_k) < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此，对所有 $y \in V$，$p(f(y) - f(0)) < \varepsilon$，所以 f 在零点连续。 □

引理 2.1.21. 设 E、F 是复局部凸空间，$U \subseteq E$ 是开集，$f\colon U \to F$ 是复解析映射，且 $x \in U$。设 p 是 F 上的连续半范数，q 是 E 上的连续半范数，并且 $V := B^q_r(x) \subseteq U$ 和 $p(f(V))$ 有界。那么

$$p(\delta^k_x f(y)) \le \frac{k!}{r^k} \sup\{p(f(v))\colon v \in V\} \text{ for all } y \in \overline{B}^q_1(0) \text{ and } k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.17)$$

此外，对于每个 $\rho \in]0, r[$，$\operatorname{Lip}_{p,q}(f|_{B^q_\rho(x)}) < \infty$。

证明。简记 $C := \sup p(f(V)) < \infty$。给定 $y \in B_1^q(0)$，我们定义 $Z := \{z \in \mathbb{C}: x + zy \in V\}$。那么 $h: Z \to F$, $h(z) := f(x + zy)$ 是复解析且有界的。对于每个 $s \in]0, r[$，我们有 $\mathbb{D}_s \subseteq Z$。利用推论 2.1.8 中列出的柯西估计 (2.12)，对于 $k \in \mathbb{N}_0$，我们得到

$$p(\delta_x^k f(y)) = p(h^{(k)}(0)) \leq \frac{k!}{s^k} C.$$

令 $s \to r$，即可得出 (2.17)。给定 $\rho \in]0, r[$ 和 $v \in B_\rho^q(x)$，我们有 $B_{r-\rho}^q(v) \subseteq B_r^q(x) = V$。在 (2.17) 中用 v 替换 x，并用 $r - \rho$ 替换 r，可得

$$p(df(v, y)) = p(\delta_v^1 f(y)) \leq \frac{C}{r - \rho}.$$

因此，由引理 1.5.8，$\mathrm{Lip}_{p,\, q}(f|_{B_\rho^q(x)}) \leq C/(r - \rho) < \infty$。 □

定理 2.1.19 的证明。为证明 f 是 Gˆateaux 解析的，令 $x \in U$ 和 $y \in E$。存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in U_m$ 且 $y \in E_m$。于是，对每个 $n \geq m$，$Z_n := \{z \in \mathbb{C}: x + zy \in U_n\}$ 是 $\mathbb{C}$ 的开子集，且映射 $Z_n \to F$, $z \mapsto f(x + zy) = f_n(x + zy)$ 是复解析的。此外，$Z := \{z \in \mathbb{C}: x + ty \in U\}$ 是 $\mathbb{C}$ 的开子集。映射 $h: Z \to F$, $z \mapsto f(x + zy)$ 是复解析的，因为 $Z = \bigcup_{n \geq m} Z_n$，并且如上所见，对每个 $n \geq m$，$h|_{Z_n}$ 都是复解析的。因此，f 是 Gˆateaux 解析的。

根据定理 2.1.12 中的“(c)⇒(d)”，如果我们能够证明 f 连续，则映射 f 将是复解析的。为证明 f 在 $x \in U$ 处连续，取某个 m 并转而考虑 $E_m \subseteq E_{m+1} \subseteq \cdots$ 后，不妨设 $x \in U_1$。将每个 U_n 替换为 $U_n - x$，并将 f 替换为 $f(x + \cdot)$ 后，不妨设 $x = 0$。因此，每个 U_n 都是 E_n 中的凸开零邻域。根据习题 B.1.1，

$$U_n' := \{y \in U_n : \mathbb{D}y \subseteq U_n\}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，以及 $U_1' \subseteq U_2' \subseteq \cdots$，$E_n$ 是一个绝对凸开零邻域。如果 q_n: U_n' 的闵可夫斯基泛函为 $E_n \to [0, \infty[$，则 $U_n' = B_1^{q_n}(0)$。定义 W_n: $= \frac{1}{2} U_n' = B_{1/2}^{q_n}(0)$。于是，$W_1 \subseteq \bar{W}_2 \subseteq \cdots$，且 $= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$： E 中的 W 是一个开零邻域。根据引理 2.1.21，对于 F 上的每个连续半范数 p，都有 $\mathrm{Lip}_{p,\, q_n}(f_n|_{W_n}) < \infty$。值得注意的是，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$W_n \to F$ 在 $W_n \subseteq E_n$ 上是利普希茨的。因此，根据引理 2.1.20，$f|_W$ 是连续的。□

第 2.1 节习题。

习题 2.1.1. 设 E 是一个麦基完备的复局部凸空间，且 $f: U \to E$ 是定义在开子集 $U \subseteq \mathbb{C}$ 上的映射。证明：

(a)（柯西积分定理）。如果 f 是复解析的，且 U 关于某个 $z_0 \in U$ 是星形的（或至少是单连通的），那么对于 U 中的每条闭合分段 C^1 曲线 γ，都有 $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0$。

(b)（莫雷拉定理）。如果 f 是连续的，且对于每个（三角形区域） $\Delta \subseteq U$，都有 $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta = 0$，那么 f 是复解析的。(c)（刘维尔定理）。每个有界的 $C^\infty_{\mathbb{C}}$-映射 $f\colon \mathbb{C} \to E$ 都是常数。

习题 2.1.2.设 E 与 F 为复局部凸空间， $U \subseteq E$ 为开集，且 $f\colon U \to F$为连续映射，使得对子集 $\Lambda \subseteq F'$ 中的所有 λ， $\lambda\circ f\colon U \to \mathbb{C}$均为复解析，其中该子集在 F 上分离点（即对 F中的所有 $x \neq y$，存在 $\lambda \in \Lambda$使得 $\lambda(x) \neq \lambda(y)$）。再假设 F是序列完备的。利用命题 2.1.6 中的“(e)⇒(g)”以及定理 2.1.12 中的“(c)⇒(d)”，证明 f 是复解析的。

习题 2.1.3. 设 E 与 F 为复局部凸空间， $U \subseteq E$ 为开集，且 $f\colon U \to F$ 为一个映射。利用命题 2.1.6 中的“(e)⇒(g)”以及定理 2.1.12 中的“(c)⇒(d)”，证明：若 F 是麦基完备的，且 f 作为到 F 的某个满足 $F \subseteq \widetilde{F}$的完备化 $\widetilde{F}$的映射是复解析的，则 f 作为到 $\widetilde{F}$的映射也是复解析的。

习题 2.1.4. 设 $\mathcal{A}$ 是复含幺连续逆代数；假设 $\mathcal{A} \neq \{0\}$（这意味着 $\mathbf{1} \neq 0$）。给定 $x \in \mathcal{A}$，定义其 *resolvent set* 为 $\rho(x) := \{z \in \mathbb{C}\colon z\mathbf{1} - x \in \mathcal{A}^\times\}$，其 *spectrum* 为 $\sigma(x) := \mathbb{C} \setminus \rho(x)$。

(a) 注意， $\rho(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是开的，而 $\sigma(x)$是闭的。(b)
对每个 $z \in \mathbb{C}^\times$，有

$$z\mathbf{1} - x \;=\; z\left(\mathbf{1} - \frac{1}{z}\,x\right). \tag{2.18}$$

推出存在 $r > 0$，使得对所有满足 $|z| > r$的 $z \in \mathbb{C}$，均有 $z \in \rho(x)$。由此推断 $\sigma(x)$ 是紧的。(c) 利用 (2.18) 计算 $(z\mathbf{1} - x)^{-1}$，并推出 $\lim_{|z|\to\infty}(z\mathbf{1} - x)^{-1} = 0$。(d) 根据已证事实推断 $R\colon \rho(x) \to \mathcal{A}$, $R(z) := (z\mathbf{1} - x)^{-1}$是复解析的。给定 $r \geq 0$，简记 $M_r := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \geq r\}$。由 (c) 推出，对 $\mathcal{A}$上的每个连续半范数 $\|\cdot\|_p$， $\|R(M_r)\|_p \subseteq \mathbb{R}$都有界。因此 $R(M_r) \subseteq \mathcal{A}$有界。(e) 证明 $\sigma(x) \neq \emptyset$。(提示：否则 $R\colon \mathbb{C} \to \mathcal{A}$将是一个有界的复解析映射，可对其应用习题 2.1.1(c)中的刘维尔定理。)

练习 2.1.5。本习题是练习 1.1.9 的延续。设 F 是一个局部凸空间， X 是一个拓扑空间，$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是映射序列 $\gamma_n\colon X \to F$，且 $\gamma\colon X \to F$ 是一个映射。证明以下结论：

(a) 若 F 是麦基完备的， X 是 $\mathbb{C}$ 的开子集，每个 γ_n 都是复解析的，且 $\gamma_n \to \gamma$ 一致地成立，则 γ 也是复解析的。(b) 给定一个复 Banach 代数 $\mathcal{A}$，令 $\eta_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,x^k$，其中 $x \in \mathcal{A}$ 且 $n \in \mathbb{N}$。证明 η_n 在每个开球 $\overline{B}_r(0) \subseteq \mathcal{A}$ 上一致收敛。由此推得 $\exp\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$， $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,x^n$ 是复解析的。(c) 若 F 序列完备，$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 F 中的一个序列，且 $0 \neq x \in \mathbb{C}$ 是一个复数，满足 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k\,a_k$ 收敛，则 $\{x^k\,a_k\colon k \in \mathbb{N}_0\}$ 在 F 中有界，并且 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k\,a_k$ 在 $\mathbb{D}_r^0$ 上一致收敛到一个复解析映射；对于每个 $r \in]0,\ |x|[$ 都成立。（若 F 仅为麦基完备，这一结论仍然成立，因为相关的部分和构成 Mackey–柯西序列。）

(d) 若 F 是麦基完备的， X 是可度量化局部凸空间 E 的开子集，每个 γ_n 都是复解析的，并且对每个紧子集 $K \subseteq X$， $\gamma_n|_K$ 一致收敛到 $\gamma|_K$，则 γ 是复解析的。

习题 2.1.6. 设 $p = \sum_{j=0}^{k} p_j$: $E \to F$ 是复局部凸空间之间的多项式，其齐次分量为 p_j。证明 p 是盖托解析的。由此推出，若 p 连续，则 p 是复解析的，并且对每个 $j \in \{0, \dots, k\}$， p_j: $E \to F$ 连续。与命题 1.6.24 比较，后者是通过完全不同的论证得出的。

习题 2.1.7. 设 E, F 是复巴拿赫空间，且 f: $U \to F$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的映射。证明以下条件等价:

(a) f 是复解析的; (b) f 是盖托解析且局部有界，即每个 $x \in U$ 都有一个开邻域 $V \subseteq U$，使得 $f(V)$ 在 F 中有界; (c) f 局部有界且弱解析，即对每个 $\lambda \in F'$, $\lambda \circ f$: $U \to \mathbb{C}$ 都是复解析的。

习题 2.1.8. 证明: 从开子集 $U \subseteq \mathbb{C}^n$ 到麦基完备复局部凸空间 F 的映射 f: $U \to F$ 是复解析映射，当且仅当它是弱解析的。（提示: 每个 $x \in U$ 都有一个紧邻域 K。证明，如果 f 是弱解析的，那么 $f(K)$有界。）

习题 2.1.9. 设 E, F为复巴拿赫空间， $U \subseteq E$为开集， f: $U \to F$为复解析映射，且 $x \in U$。存在 $r > 0$使得 $V := B_r^E(x) \subseteq U$，并且 f在 V上有界。

(a) 利用柯西估计证明 $\|\delta_x^k f\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{k!}{r^k} \|f|_V\|_\infty$，其中 $\|\delta_x^k f\|_{\mathrm{op}}$是齐次多项式 $\delta_x^k f$ 的范数（如习题 1.6.4 中所述），而 $\|\cdot\|_\infty$是上确界范数。因此，对每个 $s < r$，都有 $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s^k}{k} \|\delta_x^k f\|_{\mathrm{op}} < \infty$。(b) 利用由斯特林公式可知 $\lim_{k\to\infty} k/\sqrt[k]{k!} = e$ （欧拉常数），推导出对所有 $s < \frac{r}{e}$，都有 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \|d^{(k)} f(x, \cdot)\|_{\mathrm{op}} < \infty$。

因此，对于巴拿赫空间开子集之间的映射，我们所说的复解析性与 Bourbaki [Bou67] 所说的复解析性一致。

习题 2.1.10. 令 $E := \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ 为绝对可和复数列构成的巴拿赫空间，其范数定义为 $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ 对于 $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$。我们考虑 f: $E \to \mathbb{C}$, $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^k (x_k)^{2k}$。

(a) 利用对于每个复数序列 $(x_k)_{k\geq n}$ $x_k \in \mathbb{D}_{1/2}$，有 $\sum_{k=n}^{\infty} 2^k |x_k|^{2k} \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-n}$，证明定义 f 的级数在每个 $x \in E$ 的某个邻域上一致收敛。由此推出 f 是复解析的。(b) 证明对于每个 $x \in E$， f 在 $B_1^E(x)$ 上无界。(c) 定义 g: $E \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $g(x) := (f(kx))_{k\in\mathbb{N}}$。证明 g 是复解析的，但在 E 中的每个零邻域上都无界。

由于在 0 处不是局部有界的， g 中的函数（c）并非 Bourbaki [Bou67]意义下的复解析函数。特别地， [Bou67, 3.3.1] 是错误的。

习题 2.1.11。 设 $f\colon U \to F$ 是从开子集 $U \subseteq \mathbb{C}^n$ 到复局部凸空间 E 的复解析映射。给定 $r = (r_1, \ldots, r_n) \in]0, \infty[^n$ 和 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$，我们将 $P_r(x) := B^{\mathbb{C}}_{r_1}(x_1) \times \cdots \times B^{\mathbb{C}}_{r_n}(x_n) \subseteq \mathbb{C}^n$ 称为 $\mathbb{C}^n$ 中多半径为 r 的开多圆柱。

(a)（多变量情形的柯西积分公式）。用关于 n 的归纳法证明：若 U 包含 $P_r(x)$ 的闭包 $\overline{P_r(x)}$，则

$$\partial^\alpha f(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - x_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n - x_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_n \cdots d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1 + 1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{\alpha_n + 1}}$$

对所有 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in P_r(x)$ 以及所有 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$。

(b)（柯西估计）。由此推出

$$\|\partial^\alpha f(x)\|_p \;\le\; \frac{\alpha!}{r^\alpha} \sup\left\{\|f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\|_p \colon |\zeta_j - x_j| = r_j\right\} \tag{2.19}$$

对 E 上的每个连续半范数 $\|\cdot\|_p$ 以及每个 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$。

习题 2.1.12. 本习题面向熟悉巴拿赫空间中绝对可和族的读者（参见 Dieudonn´e [Di60，第 V 章，§ 2]）。利用柯西估计 (2.19)，证明从开子集 $U \subseteq \mathbb{C}^n$ 到巴拿赫空间 E 的映射 $f\colon U \to E$ 是复解析的，当且仅当它在每个 $x \in U$ 附近由绝对收敛幂级数给出，即对 $\mathbb{C}^n$ 中某个零邻域内的 z 以及适当的系数 $a_\alpha \in E$，有 $f(x+z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} z^\alpha a_\alpha$。Dieudonn´e 利用这一性质来定义复解析映射。

习题 2.1.13。 赋予 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 乘积拓扑，并考虑 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$，
$f(z) = (e^{kz})_{k \in \mathbb{N}}$。
(a) 证明 f 是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$，并计算 $f'(z) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 以及 $f^{(2)}(z)$（对于 $z \in \mathbb{C}$）。(b) 在 $E := \text{张成}_{\mathbb{C}}\big(f(\mathbb{C}) \cup f'(\mathbb{C})\big) \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上赋予诱导拓扑。证明余限制 $g := f|^E\colon \mathbb{C} \to E$ 是 $C^1_{\mathbb{C}}$，但不是 $C^2_{\mathbb{C}}$（因此 g 不是复解析的）。提示：可直接使用以下结论而无需证明：函数 $h_{n,z} := \mathbb{N} \to \mathbb{C}$、$k \mapsto k^n z^k$ 对于 $n \in \mathbb{N}_0$、$z \in \mathbb{C}^\times$ 是线性无关的。(c) 给定 $k \in \mathbb{N}$，找出一个包含 $f(\mathbb{C})$ 的向量子空间 $F \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$，使得 f 作为到 F 的映射是 $C^k_{\mathbb{C}}$，但不是 $C^{k+1}_{\mathbb{C}}$。

练习 2.1.14. 证明函数 $h_{k,z}$（对于 $k \in \mathbb{N}_0$，$z \in \mathbb{C}^\times$）在 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 中线性无关，证明如下：

(a) 验证对于每个固定的 $z \in \mathbb{C}^\times$，函数 $h_{k,z}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) 线性无关。(b) 现在考虑移位算子 $S\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $S(f)(n) = f(n+1)$。那么 S 是由所有复数序列构成的空间 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上的线性自同态。给定 $z \in \mathbb{C}$，我们将 V^z 记为 S 的广义特征空间，它由所有满足 $(S - z)^k f = 0$（对某个 $k \in \mathbb{N}$）的 $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 组成。通过对 k 使用归纳法，证明对于每个 $z \in \mathbb{C}^\times$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$，$h_{k,z} \in V^z$。

该断言成立，因为广义特征空间的和 $\sum_{z \in \mathbb{C}^\times} V^z$ 是直和。

2.2 实解析映射

现在我们来定义实解析映射。它们是一类性质良好的函数，特别是光滑的，并且在每个点的局部都由该点附近的泰勒级数给出（实际定义还需要一个稍强的性质）。为了陈述精确的定义，我们需要拓扑向量空间的复化。

定义 2.2.1. 若 E 是实拓扑向量空间，则在 $E_{\mathbb{C}} := E \times E$上赋予乘积拓扑，并按如下方式定义运算后，它成为一个复拓扑向量空间：

$$(x+iy).(u,v) := (xu-yv, xv+yu) \quad \text{for } x,y \in \mathbb{R},\, u,v \in E.$$

由此得到的复向量空间 $E_{\mathbb{C}}$ 称为 E的复化。注意，若 E是局部凸的，则 $E_{\mathbb{C}}$ 也是局部凸的。将 E 与 $E \times \{0\} \subseteq E_{\mathbb{C}}$等同起来，我们将 $E_{\mathbb{C}} = E \oplus iE$ 视为实向量空间。

更一般地，复拓扑向量空间 F与连续的 $\mathbb{R}$-线性映射 $\gamma\colon E \to F$一起，称为 E的复化，若存在复拓扑向量空间的同构 $\varphi\colon F \to E_{\mathbb{C}} = E \times E$，使得对于每个 $x \in E$，都有 $\varphi(\gamma(x)) = (x, 0)$。同样，我们记作 $E_{\mathbb{C}} := F$。

现在定义实解析映射如下：

定义 2.2.2。设 E 和 F 是实局部凸拓扑向量空间，$U \subseteq E$ 是开集，且 $f\colon U \to F$ 是一个映射。若 f 可延拓为一个复解析映射 $V \to F_{\mathbb{C}}$，且该映射定义在 $E_{\mathbb{C}}$ 中包含 U 的某个开邻域 V 上，则称 f 是实解析 的（$\mathbb{R}$-解析的、$C^{\omega}_{\mathbb{R}}$的，或简称 C^{ω}）。

映射 $f\colon U \to F$ 的实解析性是一种局部 性质：

引理 2.2.3。若存在 U 的一个开覆盖$(U_j)^{j\in J}$，使得对每个 $j \in J$，$f|_{U_j}$ 都是实解析的，则 f 是实解析的。

证明。若对每个 j，$f|_{U_j}$ 都是实解析的，则对每个 $x \in U$，我们都能找到一个凸开零邻域 $W_x \subseteq E$，使得 $x + W_x \subseteq U$，并且对于一个复解析映射 $g_x\colon V_x := (x+W_x) + iW_x \to F_{\mathbb{C}}$，$f|_{x+W_x} = g_x|_{x+W_x}$。给定 x、$y \in U$，集合 $V_x \cap V_y$ 是凸集的交集，因而是凸的，所以是连通的。若 $V_x \cap V_y \neq \emptyset$，则公式 $V_x \cap V_y = ((x+W_x) \cap (y+W_y)) + i(W_x \cap W_y)$ 表明 $\emptyset \neq E \cap (V_x \cap V_y) = (x+W_x) \cap (y+W_y) =: C$。由于 g_x 和 g_y 在 C 上一致，根据定理 2.1.16(c)，它们在整个 $V_x \cap V_y$ 上一致。因此，对所有 x、$y \in U$，$g_x|_{V_x \cap V_y} = g_y|_{V_x \cap V_y}$，由此可知 $g := \bigcup_{x\in U} g_x\colon \bigcup_{x\in U} V_x \to F_{\mathbb{C}}$ 是良定义的复解析映射，并且延拓了 f。□

命题 2.2.4. 若 E、F 和 H 是实局部凸空间，$U \subseteq E$ 和$V \subseteq F$ 是开集，且 $f\colon U \to V \subseteq F$ 和 $g\colon V \to H$ 是实解析映射，则 $g \circ f\colon U \to H$ 也是实解析映射。

证明。 由于 g 是实解析映射，存在一个开子集 $V_1 \subseteq F_{\mathbb{C}}$ 和一个复解析映射 $g_1\colon V_1 \to H_{\mathbb{C}}$，使得 $V \subseteq V_1$ 和 $g_1|_V = g$。由于 f 是实解析映射，存在一个开子集 $U_1 \subseteq E_{\mathbb{C}}$ 和一个复解析映射$f_1\colon U_1 \to F_{\mathbb{C}}$，使得 $U \subseteq U_1$ 和 $f_1|_U = f$。于是 $U_2 := (f_1)^{-1}(V_1)$ 是 U_1 的一个开子集，且包含 U。如有必要，将 U_1 替换为 U_2 后，我们可以假设 $f_1(U_1) \subseteq V_1$。那么 $g_1 \circ f_1\colon U_1 \to H_{\mathbb{C}}$ 是复解析映射，且 $(g_1 \circ f_1)|_U = g \circ f$，因此 $g \circ f$ 是实解析映射。□

引理 2.2.5. 每个实解析映射 $f\colon E \supseteq U \to F$ 都是光滑的。对于 f 的每个复解析延拓 $f_1\colon E_{\mathbb{C}} \supseteq U_1 \to F_{\mathbb{C}}$，若 $U \subseteq U_1$，则对所有 $k \in \mathbb{N}$、$x \in U$以及 $y_1, \dots, y_k \in E$，都有 $d^{(k)}f(x, y_1, \dots, y_k) = d^{(k)}(f_1)(x, y_1, \dots, y_k)$。

证明. 映射 $f_1\colon U_1 \to F_{\mathbb{C}}$ 是复解析的，因此它是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$，从而也有 $C^\infty_{\mathbb{R}}$。包含映射 $\gamma\colon E \to E_{\mathbb{C}}, \gamma(x) = x$ 是连续线性的，因而是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$，由此可得 $f = f_1 \circ \gamma|_U^{U_1}$ 作为到 $F_{\mathbb{C}}$的映射是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$。由于$f(U) \subseteq F$，其中 $F = F \times \{0\}$在 $F \times F = F_{\mathbb{C}}$中是闭的，由引理 1.3.19可知，$f$ 作为到 F的映射也具有 $C^\infty_{\mathbb{R}}$。若 $x \in U$ 且 $y \in E$，取一个非零实数序列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 n都有 $x + s_n y \in U$。那么

$$\frac{1}{s_n}(f_1(x + s_n y) - f_1(x)) = \frac{1}{s_n}(f(x + s_n y) - f(x))$$

同时收敛于 $df_1(x, y)$ 与 $df(x, y)$，从而 $df_1(x, y) = df(x, y)$。这验证了关于 $k = 1$ 的最后断言，一般情形则由归纳法得出，即对迭代方向导数重复前述论证。□

每个实解析映射都由其泰勒级数局部给出。

引理 2.2.6. 若 $f\colon E \supseteq U \to F$是实解析的且 $x \in U$，则存在一个开零邻域 $Y \subseteq E$，使得 $x + Y \subseteq U$且 $f(x + y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_x^k f(y)}{k!}$对所有 $y \in Y$ 成立。

证明。 设 $f_1\colon U_1 \to F_{\mathbb{C}}$是 f 的一个复解析延拓，定义在 $E_{\mathbb{C}}$ 中 U 的一个开邻域 U_1 上。设 $Y_1 \subseteq E_{\mathbb{C}}$ 是一个开的平衡零邻域，使得 $x + Y_1 \subseteq U_1$。则由推论 2.1.14，对所有$y \in Y_1$有 $f_1(x + y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_x^k f_1}{k!}(y)$，从而利用引理 2.2.5，对所有 $y \in Y := Y_1 \cap (U - x) \subseteq E$ 有 $f(x + y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_x^k f_1}{k!}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_x^k f}{k!}(y)$。□

注 2.2.7. 如果 E 是一个弗雷歇空间，那么引理 2.2.6 的逆命题也成立：$f\colon E \supseteq U \to F$ 是实解析的，当且仅当 f 是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$，且在每个点的邻域内由其泰勒级数给出。这是因为，若 E是一个弗雷歇空间，那么映射 $f\colon E \supseteq U \to F$ 到实局部凸空间 F 是实解析的，当且仅当它连续，并且在局部具有形式 $f(x + y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(y)$，其中右侧是连续齐次多项式 $p_k\colon E \to F$ 的逐点收敛级数，其次数为 k（它们必然与$\frac{1}{k!}\delta_x^k f$一致）；参见 [BS71b，定理 5.2]。我们不会用到这一事实，也不会证明它。

定理 2.2.8（恒等定理）。设 E 和 F 是实局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个开连通子集，且 $f\colon U \to F$ 是实解析的。若 $f|_V = 0$ 在某个非空开子集 $V \subseteq U$ 上成立，则 $f = 0$。更一般地，若存在 $x \in U$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 都有 $\delta_x^k f = 0$，则 $f = 0$。

证明。显然，第一个条件蕴含第二个条件。因此我们现在假设存在 $x \in U$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}_0$ 都有 $\delta_x^k f = 0$。存在开子集 $U_1 \subseteq E_{\mathbb{C}}$ 使得 $U \subseteq U_1$，以及复解析映射 $f_1\colon U_1 \to F_{\mathbb{C}}$ 使得 $f_1|_U = f$。在将 U_1 替换为包含 U 的连通分支之后，我们可以假定 U_1 是连通的。于是由引理 2.2.5，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $y_1, \ldots, y_k \in E$，有 $f_1(x) = f(x) = 0$ 以及 $d(k)(f_1)(x, y_1, \ldots, y_k) = d(k)f(x, y_1, \ldots, y_k) = 0$，从而由 $d^{(k)}(f_1)(x, \cdot)$ 的复 k-线性性，对所有 $y_1, \ldots, y_k \in E_{\mathbb{C}}$ 有 $d(k)f(x, y_1, \ldots, y_k) = 0$。因此由定理 2.1.16 的情形 (b) 得到 $f_1 = 0$，从而也得到 $f = f_1|_U = 0$。□

我们要证明每个复解析映射也是实解析的。下面两个引理有助于证明这一点。

引理 2.2.9. 给定一个复向量空间 E，令 $J\colon E \to E$, $J(x) := ix$。设 $E_{\mathbb{R}}$ 为 E 底层的实向量空间，且 $(E_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = E_{\mathbb{R}} \oplus iE_{\mathbb{R}}$ 为其复化。那么映射

$$\varphi\colon (E_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to E \oplus \overline{E}, \quad \varphi(x + iy) := (x + Jy, x - Jy)$$

是复向量空间之间的一个同构，其中 E 表示赋予“相反复结构”的 $\underline{E}$，其数乘为 $\mathbb{C} \times E \to \underline{E}, (z, x) \mapsto z * x := zx$。

证明. 按照定义 2.2.1，我们将 $(E_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ 视为 $E_{\mathbb{R}} \times E_{\mathbb{R}}$。给定 $u, v \in E$，方程 $u = x + Jy$ 和 $v = x - Jy$ 有唯一解 $(x, y) \in E^2$，其表达式为 $x = (u + v)/2$ 和 $y = J(v - u)/2$。因此 φ 是一个双射，且

$$\varphi^{-1}\colon E \oplus \overline{E} \to (E_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}, \qquad \varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{J(v - u)}{2}\right). \tag{2.20}$$

显然，φ 是实线性的。它是复线性的，因为还有 $\varphi(i(x, y)) = \varphi(-y, x) = (-y + Jx, -y - Jx) = (J(x + Jy), (-J)(x - Jy)) = i\varphi(x, y)$。□

由 φ 的定义和 (2.20) 可知，若 E 是复拓扑向量空间，则 φ 是拓扑向量空间同构。

引理 2.2.10。若 $f\colon E \supseteq U \to F$ 是复解析的，那么将 f 视为从 $U \subseteq E$ 到 F 的映射（使用相反的复结构），它也同样是复解析的。

证明。 f 的连续性随之成立。此外，给定 $x \in U$，我们有

$$f(x + z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z) \tag{2.21}$$

对 E 中某一零邻域内的所有 z，以及适当的次数为 k的连续齐次多项式 p_k: $E \to F$。此处，对某个适当的连续对称 k-线性映射 β_k: $E^k \to F$，有 $p_k(z) = \beta_k(z, \ldots, z)$。于是 β_k: $E^k \to F$也是 k- 线性的，因为 $\beta_k(z * y_1, y_2, \ldots, y_k) = \beta_k(zy_1, y_2, \ldots, y_k) = z\beta_k(y_1, y_2, \ldots, y_k) = z * \beta_k(y_1, y_2, \ldots, y_k)$。因此每个 p_k 也是从 E 到 F的次数为 k的连续齐次多项式，从而(2.21)表明 f 从 $U \subseteq E$ 到 F是复解析的。□

命题 2.2.11。每个复解析映射也是实解析的。

证明。设 E 和 F 为复局部凸空间，$U \subseteq E$ 为开集，且f: $U \to F$是一个复解析映射。记 U 为 U，视为 E的开子集。由前述引理，f 作为从 U 到 F 的映射是复解析的，因此映射 $f \times f$: $U \times U \to F \times F, (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$ 也是复解析的。对于每个 $x_0 \in U$，存在一个开 x_0- 邻域 $V \subseteq E$ 和一个开零邻域 $W \subseteq E$，使得 $V + J(W) \subseteq U$且 $V - J(W) \subseteq U$。若 φ: $(E_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to E \times E$是引理 2.2.9 中从复局部凸空间出发的同构，且 ψ: $(F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to F \times F$ 以类似方式定义，则

$$g := \psi^{-1} \circ (f \times f) \circ \varphi|_{V+iW}^{U \times \overline{U}} : V + iW \to (F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$$

是 $V + iW \subseteq (E_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = E_{\mathbb{R}} \oplus iE_{\mathbb{R}}$ 上的复解析映射，并可延拓为 $f|_V$ 上的 $g(x) = \psi^{-1}(f(x), f(x)) = f(x)$，对每个 $x \in V$ 均成立。因此，根据引理 2.2.3，f 是局部实解析的，因而是实解析的。□

命题 2.2.12。设 E 是实局部凸空间，F 是复局部凸空间，$U \subseteq E$ 是开子集，且 f: $U \to F$ 是实解析映射。那么存在一个开子集 $V \subseteq E_{\mathbb{C}}$ 和一个复解析映射 g: $V \to F$，使得 $U \subseteq V$ 且 $g|_U = f$。

证明。设 $F_{\mathbb{R}}$ 是 F 的底层实局部凸空间，且 $(F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ 是 $F_{\mathbb{R}}$ 的复化。由于 f: $U \to F_{\mathbb{R}}$ 是实解析的，因此存在一个开子集 $V \subseteq E_{\mathbb{C}}$ 和一个复解析映射 h: $V \to (F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$，使得 $U \subseteq V$ 且 $h|_U = f$。实线性映射 $\mathrm{id}: F_{\mathbb{R}} \to F$ 诱导出复线性映射 α: $(F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to F, v+iw \mapsto v+iw$，其中 v，$w \in F_{\mathbb{R}}$，分别在 $(F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ 和 F 中与 i 相乘。于是 $\alpha \circ f = f$，且 $g := \alpha \circ h$: $V \to F$ 是 f 的复解析延拓。□

例：实连续逆代数中的求逆

为说明实解析映射的概念，我们证明（含幺）实连续逆代数中的求逆不仅是光滑的（如推论1.3.8所示），而且是实解析的。

命题 2.2.13。设 $\mathcal{A}$ 是实连续逆代数。那么，求逆映射 ι: $\mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times$，$\iota(x) := x^{-1}$ 是实解析的。

以下两个引理对证明很有用。

引理 2.2.14。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺结合拓扑代数。则下列结论成立：

(a) 若 $\mathcal{A}^\times$ 是单位元邻域，则 $\mathcal{A}^\times$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开的。(b) 若求逆映射 $\iota\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times$ 在 $\mathbf{1}$ 处连续，则 ι 连续。

证明。(a) 给定 $x \in \mathcal{A}$，考虑左乘映射 $\lambda_x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，$\lambda_x(a) := xa$。由于代数乘法连续，$\lambda_x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是连续的。给定 $x, y \in \mathcal{A}$，我们有 $(\lambda_x \circ \lambda_y)(a) = xya = \lambda_{xy}(a)$ 对所有$a \in \mathcal{A}$，从而 $\lambda_x \circ \lambda_y = \lambda_{xy}$。此外，显然 $\lambda_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$。若 $x \in \mathcal{A}^\times$，则$\lambda_x \circ \lambda_{x^{-1}} = \lambda_{\mathbf{1}} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$，类似地 $\lambda_{x^{-1}} \circ \lambda_x = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$，这表明 $\lambda_x\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是可逆连续映射，其连续逆映射为 $(\lambda_x)^{-1} = \lambda_{x^{-1}}$。因此$\lambda_x$ 是同胚。于是，对于内部，我们得到：

$$(\lambda_x(\mathcal{A}^\times))^0 \;=\; \lambda_x((\mathcal{A}^\times)^0) \;\ni\; \lambda_x(\mathbf{1}) \;=\; x\,.$$

现在，由于每个 $x \in \mathcal{A}^\times$ 都是内点，我们可以推断 $\mathcal{A}^\times$ 是开集。

(b) 给定 $x \in \mathcal{A}^\times$，令 $\ell_x, \rho_x\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times$，$\rho_x(y) = yx$。公式

$$\iota(\ell_x(y)) \;=\; (\ell_x(y))^{-1} \;=\; (xy)^{-1} \;=\; y^{-1}x^{-1} \;=\; \rho_{x^{-1}}(y^{-1}) \;=\; \rho_{x^{-1}}(\iota(y))$$

表明 $\iota \circ \ell_x$ 在 $\mathbf{1}$ 处连续，因此 $\iota = (\iota \circ \ell_x) \circ (\ell_x)^{-1}$ 在 $\ell_x(\mathbf{1}) = x$ 处连续。□

定义 2.2.15。若 $\mathcal{A}$ 是实代数，我们通过以下方式使 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 成为复代数

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \;:=\; (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \tag{2.22}$$

对所有 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{A}$。

注 2.2.16. 容易验证，由 (2.22) 定义的映射 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 是复双线性的。此外，若 $\mathcal{A}$ 是结合的，则 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 也是结合的；若 $\mathcal{A}$ 含幺，则 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 也含幺，且具有相同的单位元（习题）。

引理 2.2.17.若 $\mathcal{A}$ 是实连续逆代数，则 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 也是连续逆代数。

证明。由于 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数，我们可以找到一个开单位元邻域 $U \subseteq \mathcal{A}^\times$ 和一个开零邻域 $V \subseteq \mathcal{A}$，使得

$$\mathbf{1} + (a^{-1}b)^2 \in \mathcal{A}^\times \quad \text{for all } a \in U,\, b \in V.$$

对于 a, b，与之前一样，我们有 $a + ib = a(\mathbf{1} + ia^{-1}b)$ 属于 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$，其中 a 可逆，因此 $\mathbf{1} + ia^{-1}b$ 也可逆。事实上，简记 $c := a^{-1}b$，我们注意到 $\mathbf{1} + ic$ 和 $\mathbf{1} - ic$ 可交换，因此 $\mathbf{1} + ic$ 也与 $\mathbf{1} + c^2 = (\mathbf{1} + ic)(\mathbf{1} - ic)$ 及其逆映射可交换。现在 $(\mathbf{1} + ic)(\mathbf{1} + c^2)^{-1}(\mathbf{1} - ic) = (\mathbf{1} + c^2)^{-1}(\mathbf{1} - ic)(\mathbf{1} + ic) = \mathbf{1}$

这意味着 $(\mathbf{1}+c^2)^{-1}(\mathbf{1}-ic)$ 是 $\mathbf{1}+ic$ 的逆映射。我们已经证明开子集 $U+iV$ 包含于 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{\times}$，并且

$$(a+ib)^{-1}=(\mathbf{1}+(a^{-1}b)^2)^{-1}(\mathbf{1}-ia^{-1}b)a^{-1} \quad \text{for all } (a,b)\in U\times V,$$

它连续依赖于（a，b）。利用引理 2.2.14，我们推得$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 是一个连续逆代数。□

命题的证明2.2.13。由引理 2.2.17，$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 是一个连续逆代数。求逆映射 $j\colon (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{\times}\to\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, $j(x):=x^{-1}$ 是复解析的（见例 2.1.15），并且延拓了 ι。因此，ι 是实解析的。□

实解析流形上映射的复解析延拓

我们简要讨论以局部凸空间为模型的实解析流形和复解析流形上的映射的复化与复解析延拓，并从全局角度加以考察（定义见第 3.1 节和第 3.2 节）。

定义 2.2.18。设 M 是一个以实局部凸空间 E为模型的实解析流形。称以 $E_{\mathbb{C}}$为模型的复解析流形 M^* 是 M 的一个复化，如果 $M\subseteq M^*$ 成立，并且每个 $x\in M$ 都包含在 M^*的某个坐标图 $\varphi\colon U^*\to U'\subseteq E_{\mathbb{C}}$的定义域 U^*中，使得 $\varphi(M\cap U^*)=E\cap U'$且 $\varphi|_{M\cap U^*}\colon M\cap U^*\to E\cap U'$是 M的一个坐标图。

命题 2.2.19.设 M 是以实局部凸空间 E为建模空间的实解析流形，且 M^* 是 M的复化。若 M在 M^*中是闭的，且 M^*是仿紧的，则下述结论成立：对每个以复局部凸空间为建模空间的复解析流形 L 以及每个实解析映射 $f\colon M\to L$，存在开子集 $U\subseteq M^*$ 使得 $M\subseteq U$，以及复解析映射 $g\colon U\to L$使得 $g|_M=f$。

证明. 对每个 $x\in M$，存在 M^*在 x附近的坐标图 $\varphi_x\colon U_x^*\to U_x'\subseteq E_{\mathbb{C}}$，使得 $\varphi_x(M\cap U_x^*)=E\cap U_x'$成立，并且

$$\psi_x:=\varphi_x|_{M\cap U_x^*}\colon M\cap U_x^*\to E\cap U_x'$$

是 M的一个坐标图。给定 $f\colon M\to L$，设 F为 L的建模空间。对$x\in M$，设 $\kappa_x\colon P_x\to Q_x\subseteq F$为 L在 $f(x)$附近的坐标图。在缩小U_x^*与 U_x'之后，我们可以假定 $\kappa_x\circ f\circ\psi_x^{-1}$在整个 $E\cap U_x'$上有定义。由于是实解析的，$\kappa_x\circ f\circ\psi_x^{-1}$具有到某个开子集 $W_x\subseteq E_{\mathbb{C}}$的复解析延拓 $f_x\colon W_x\to F$，使得 $E\cap U_x'\subseteq W_x$（见命题 2.2.12）。在缩小 W_x之后，我们可以假定 $f_x(W_x)\subseteq Q_x$。在用 $W_x\cap U_x'$替换 W_x之后，我们可以假定 $W_x\subseteq U_x'$并且

$$E\cap W_x=E\cap U_x'. \tag{2.23}$$

现在 $V_x:=\varphi_x^{-1}(W_x)$ 是 U_x^* 的一个开子集，并且

$$M \cap V_x = M \cap U_x^*, \tag{2.24}$$

由 (2.23) 可知。利用 (2.24)，函数 $g_x := \kappa_x^{-1} \circ f_x \circ \varphi_x|_{V_x} \colon V_x \to L$ 是复解析的，且 $g_x|_{M\cap V_x} = f|_{M\cap V_x}$。若 $x, y \in M$ 和 $a \in M \cap V_x \cap V_y$，则有$g_y(a) = f(a) = g_x(a)$，并可找到一个连通的开 a-邻域 $O \subseteq V_x \cap V_y$，使得 $g_y(O) \subseteq P_x$。因此，f_x 和 $\kappa_x \circ g_y \circ \varphi_x^{-1}|_{\varphi_x}(O)$ 是复解析函数，并且对于所有满足 $(\kappa_x \circ f \circ \varphi_x^{-1})(z)$ 的 $z \in E \cap \varphi_x(O)$，二者都相等。由恒等定理（定理 2.1.16(c)），$f_x|_{\varphi_x}(O) = \kappa_x \circ g_y \circ \varphi_x^{-1}|_{\varphi_x}(O)$。因此，$O(a, x, y) := O$ 是 M^* 中的一个开 a-邻域，使得 $g_x|_{O(a,x,y)} = g_y|_{O(a,x,y)}$。由引理 A.5.10，存在一个开子集 $U \subseteq M^*$，使得 $M \subseteq U$，以及一个函数 $g\colon U \to L$，使得每个 $z \in U$ 都有一个开邻域 $W \subseteq U$，满足对于某个 $x \in M$ 和 $g|_W = g_x|_W$，有 $W \subseteq V_x$。因此，g 是复解析的，且 $g|_M = f$。□

第 2.2 节习题

习题 2.2.1. 证明实局部凸空间 E 的复化 $\gamma\colon E \to E_{\mathbb{C}}$ 具有如下泛性质：对于任意从 $E \to F$ 到复局部凸空间 F 的连续 $\mathbb{R}$-线性映射 α，存在唯一的连续 $\mathbb{C}$-线性映射 $\widetilde{\alpha}\colon E_{\mathbb{C}} \to F$，使得

$$\widetilde{\alpha} \circ \gamma = \alpha. \tag{2.25}$$

特别地，对于任意实局部凸空间之间的连续 $\mathbb{R}$-线性映射 $\beta\colon E_1 \to E_2$，若其复化分别为 $\gamma_1\colon E_1 \to (E_1)_{\mathbb{C}}$ 和 $\gamma_2\colon E_2 \to (E_2)_{\mathbb{C}}$，则存在唯一的连续 $\mathbb{C}$-线性映射 $\beta_{\mathbb{C}}\colon (E_1)_{\mathbb{C}} \to (E_2)_{\mathbb{C}}$，使得 $\beta_{\mathbb{C}} \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ \beta$。如果 $E \subseteq E_{\mathbb{C}}$，且 γ 是包含映射，那么 (2.25) 就是 $\widetilde{\alpha}|_E = \alpha$。

习题 2.2.2.设 E 是一个序列完备的实局部凸空间。证明，开子集 $U \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数 $f\colon U \to E$ 是实解析的，当且仅当 f 是一个 $C^\infty_{\mathbb{R}}$-映射，并且在每个 $x \in U$ 的邻域内都由其泰勒级数给出，即 $f(x+z) = \sum_{k=0}^\infty z^k\, f_{(k)}(x)\, k!$ 对所有接近 0 的 $z \in \mathbb{R}$ 都成立。（提示：利用泰勒级数在局部将 f 延拓为复解析映射。）注：由于部分和构成 Mackey–柯西序列，这一结果对麦基完备的 E仍然成立。

习题 2.2.3.证明，实局部凸空间之间的每个连续线性映射以及每个连续 n-线性映射都是实解析的。由此推得，实局部凸空间之间的每个连续齐次多项式都是实解析的。

习题 2.2.4.设 E 和 F 是实局部凸空间，$U \subseteq E$ 是开子集，$F_0 \subseteq F$是序列闭向量子空间，且 $f\colon U \to F$是满足 $f(U) \subseteq F_0$的映射。证明，f是实解析的，当且仅当其余限制 $f|^{F_0}\colon U \to F_0$ 是实解析的。

习题2.2.5。设 E和 F_1，……，F_n为实局部凸空间（其中 $n \in \mathbb{N}$），且 $U \subseteq E$为开集。证明：映射 $f = (f_j)_{j=1}^n\colon U \to F_1 \times \cdots \times F_n$是实解析的，当且仅当对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$，其分量 $f_j\colon U \to F_j$都是实解析的。

习题 2.2.6. (a) 设 $f_1\colon \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ 是实解析映射 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的复解析延拓，其中 $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$。证明 $\mathbb{D} \not\subseteq U$。

(b) 求一个实解析函数序列 $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$，满足 $f_k\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使映射 $f:=(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 不是实解析的。

习题 2.2.7. 证明：若映射 $f\colon E\supseteq U\to F$ 是实解析的，则对所有 $j\in\mathbb{N}$，其微分 $d^{(j)}f\colon U\times E^j\to F$ 也是实解析的。

习题 2.2.8.验证注 2.2.16 的细节。

习题 2.2.9. 设 E 和 F 是实局部凸空间，N 是 E 的闭向量子空间，且 $q\colon E\to E/N=:E_1$ 是商映射。设 $f_1\colon U_1\to F$ 是定义在开子集 $U_1\subseteq E_1$ 上的映射。设 $U\subseteq E$ 是一个开子集，使得 $q(U)=U_1$。证明：f_1 是实解析的，当且仅当 $f:=f_1\circ q|_U^{U_1}\colon U\to F$ 是实解析的（通过复解析延拓，将问题化归为引理 1.3.21）。

练习 2.2.10. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 为所有满足对某个 $k\in\mathbb{N}$有 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^k}=0$ 的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 所构成的空间。赋予 E 由 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$诱导的拓扑。证明

$$f\colon\mathbb{R}\to E,\quad f(t):=(\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}}$$

是 $C^\infty_{\mathbb{R}}$，且在每一点由其泰勒级数给出（参见练习 1.1.4）。然而，f 并非实解析。

2.3 赋范空间上的微分学

在本节中，我们建立赋范空间的开（以及更一般的）子集之间 k 次连续 Fr´echet 可微映射的微分学，包括反函数定理与隐函数定理的若干版本。我们简称此类映射为 FC^k-映射。每个FC^k-映射都是 C^k，但反之不然（参见练习 2.3.12 中一个并非 FC^1的 C^1-映射）。至少，赋范空间的子集之间的每个 C^{k+1}-映射都是 FC^k，从而 C^∞-映射与 FC^∞-映射重合（见命题 2.3.17）。本主题将在第 2.4 节与第 2.5 节中继续，这两节涵盖巴拿赫空间与巴拿赫流形上常微分方程（ODEs）的基本理论。关于不动点、反函数以及初值问题的解的参数依赖性的结果，对我们的目的十分重要。特别地，稍后需要一些关于常微分方程解的参数依赖性的更专门结果，以看出以巴拿赫空间为模型的李群是性态良好的（C^0-正则）李群（同样地，σ-紧致有限维光滑流形的微分同胚群亦然）。因此，我们在整个讨论中都强调参数依赖性。

连续 Fr´échet 可微映射与 FC^k-映射

在本节中，$(E,\|\cdot\|_E)$、$(F,\|\cdot\|_F)$ 和 $(E_1,\|\cdot\|_1)$、$(E_2,\|\cdot\|_2)$ 等均为 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 上的赋范空间。

定义 2.3.1。 若映射 $f\colon U \to F$ 定义在开子集 $U \subseteq E$ 上，且存在连续线性映射$f'(x)\colon E \to F$，使得余项 $R(y) := f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)$ 满足仿射线性近似中的条件，则称其在 $x \in U$ 处全微分。

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + R(y) \quad \text{for } y \in U \tag{2.26}$$

满足

$$\lim_{y\to x} \frac{R(y)}{\|y-x\|_E} = 0. \tag{2.27}$$

注 2.3.2. (a) 若 $f\colon U \to E$ 在 x处全微分，则 f 在 x处连续，因为

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + \|y-x\|_E \frac{R(y)}{\|y-x\|_E} \to 0$$

当 $y \neq x$ 趋于 x时。

(b) 线性映射 $f'(x)$ 由 (2.26) 和 (2.27) 唯一确定，因为在 x 处全微分意味着对所有 $y \in E$，方向导数 $df(x,y)$ 均存在，并且

$$f'(x)(y) = df(x,y). \tag{2.28}$$

只需证明 $y \neq 0$时结论成立。对于满足 $x+ty \in U$ 的 $0 \neq t \in \mathbb{K}$，我们有

$$\frac{1}{t}(f(x+ty) - f(x)) = f'(x)(y) + \frac{1}{t}R(x+ty),$$

其中，根据 (2.27)，$\frac{\|R(x+ty)\|_F}{|t|} = \|y\|_E \frac{\|R(x+ty)\|_F}{\|ty\|_E} \to 0$ 为 $t \to 0$。

2.3.3. 在本节中，除非另有说明，我们赋予连续线性映射α的空间 $\mathcal{L}(E, F)$ $E \to F$ 算子范数。它定义了有界收敛拓扑，因此为强调这一点，我们也记作 $\mathcal{L}(E, F)_b$。如果使用紧开拓扑（它与紧收敛拓扑一致），则记作 $\mathcal{L}(E, F)_c$。

定义 2.3.4. 开子集 $U \subseteq E$ 上的映射 $f\colon U \to F$ 称为连续 *Fr´echet* 可微（或称为 FC^1），如果它在每个 $x \in U$ 处都是全微分，并且映射

$$f'\colon U \to \mathcal{L}(E,F)$$

是连续的。如果 f是 FC^1 且 $f'\colon U \to \mathcal{L}(E, F)$ 是某个 $k \in \mathbb{N}$的 FC^k，我们称 f 为 FC^{k+1}。如果 f 是连续的，我们称 f 为 FC^0；如果对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$， f 都是 FC^k，我们称 f 为 FC^∞。

通过直接归纳法可知，每个 FC^{k+1}-映射都是 FC^k。

例 2.3.5. (a) 赋范空间之间的每个常值映射 $f\colon E\to F$ 都是 FC^1，且 $f'=0$，因此根据归纳法，对所有 $k\in\mathbb{N}$， f 都是 FC^k。故 f 是 FC^∞。

(b) 每个连续线性映射 $\lambda\colon E\to F$ 是 FC^1，在每个 $x\in E$ 处有 $\lambda'(x)=\lambda$ 以及余项 $R=0$。由于 λ' 是常数因而 FC^∞，我们推出 λ 是 FC^∞。

(c) FC^k-映射的线性组合是 FC^k。

(d) 每个连续双线性映射 $\beta\colon E_1\times E_2\to F$ 是 FC^∞，且

$$\beta'(x_1,x_2)(y_1,y_2)=\beta(x_1,y_2)+\beta(y_1,x_2)\text{ for all }(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in E_1\times E_2.$$

为看出这一点，赋予 $E_1\times E_2$ 最大范数，

$$\|(x_1,x_2)\|:=\max\{\|x_1\|_1,\|x_2\|_2\}\quad\text{for}\quad(x_1,x_2)\in E_1\times E_2.$$

利用前述连续线性映射 $\beta'(x_1,x_2)$，在 $x=(x_1,x_2)$ 处线性近似中的余项 $R(y)$ 由下式给出

$$\beta(y_1,y_2)-\beta(x_1,x_2)-\beta(x_1,y_2-x_2)-\beta(y_1-x_1,x_2)=\beta(y_1-x_1,y_2-x_2)$$

对于 $y=(y_1,y_2)\in E_1\times E_2$，其中

$$\frac{\|R(y)\|_F}{\|y-x\|}\le\frac{\|\beta\|_{\mathrm{op}}\|y_1-x_1\|_1\|y_2-x_2\|_2}{\|y-x\|}\le\|\beta\|_{\mathrm{op}}\|y-x\|\to 0$$

当 $y\neq x$ 趋于 x 时。因此， β 是 FC^1。注意， $\beta'(x_1,x_2)$ 关于 (x_1,x_2) 是线性的。由于

$$\begin{aligned}\|\beta'(x_1,x_2)(y_1,y_2)\|_F&\le\|\beta\|_{\mathrm{op}}(\|x_1\|_1\|y_2\|_2+\|y_1\|_1\|x_2\|_2)\\&\le 2\|\beta\|_{\mathrm{op}}\|(x_1,x_2)\|\,\|(y_1,y_2)\|,\end{aligned}$$

我们有 $\|\beta'(x_1,x_2)\|_{\mathrm{op}}\le 2\|\beta\|_{\mathrm{op}}\|(x_1,x_2)\|<\infty$，由此 β' 是连续线性映射，因此 FC^∞。于是 β 是 FC^∞。

注 2.3.6。对于赋范空间上的微积分而言，以下双线性映射是连续的（因而 FC^∞），这一点至关重要：

(a) 求值映射 $\varepsilon\colon\mathcal{L}(E,F)\times E\to F,(\alpha,x)\mapsto\alpha(x)$; (b) 复合映射

$$\Gamma\colon\mathcal{L}(E_2,E_3)\times\mathcal{L}(E_1,E_2)\to\mathcal{L}(E_1,E_3),\quad(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\circ\beta.$$

事实上， $\|\varepsilon(\alpha,x)\|_F\le\|\alpha\|_{\mathrm{op}}\|x\|_E$ 以及 $\|\Gamma(\alpha,\beta)\|_{\mathrm{op}}\le\|\alpha\|_{\mathrm{op}}\|\beta\|_{\mathrm{op}}$，由此 $\|\varepsilon\|_{\mathrm{op}}\le 1$ 且 $\|\Gamma\|_{\mathrm{op}}\le 1$。

注 2.3.7. 给定赋范空间之间的连续线性映射 $\alpha\colon E_1\to E_2$，以及赋范空间 E，我们还将使用以下连续的线性映射

$$\mathcal{L}(E,\alpha)\colon\mathcal{L}(E,E_1)\to\mathcal{L}(E,E_2),\quad\beta\mapsto\alpha\circ\beta$$

and

$$\mathcal{L}(\alpha, E)\colon \mathcal{L}(E_2, E) \to \mathcal{L}(E_1, E), \quad \beta \mapsto \beta \circ \alpha$$

其满足

$$\|\mathcal{L}(E, \alpha)\|_{\mathrm{op}} \leq \|\alpha\|_{\mathrm{op}} \quad \text{and} \quad \|\mathcal{L}(\alpha, E)\|_{\mathrm{op}} \leq \|\alpha\|_{\mathrm{op}} \tag{2.29}$$

（根据刚才讨论的复合映射估计）。

2.3.8. 本节中，我们赋予连续 k-线性映射 $E_1 \times \cdots \times E_k \to F$的空间 $\mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F)$ 以范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$（如习题 1.3.8 中所述），并为强调而记作 $\mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F)_b$。因此， $\mathcal{L}^1(E; F) = \mathcal{L}(E, F)$。若改用由 $C(E_1 \times \cdots \times E_k; F)$ 诱导的紧开拓扑，则记作 $\mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F)_c$（另见定义 B.11.4 和习题 B.9.2）。

注 2.3.9.求值映射

$$\varepsilon\colon \mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F) \times E_1 \times \cdots \times E_k \to F, \ (\beta, x_1, \ldots, x_k) \mapsto \beta(x_1, \ldots, x_k)$$

是（$k+1$）-线性的，并且连续，其中 $\|\varepsilon\|_{\mathrm{op}} \leq 1$ 为

$$\|\varepsilon(\beta, x_1, \ldots, x_k)\|_F = \|\beta(x_1, \ldots, x_k)\|_F \leq \|\beta\|_{\mathrm{op}} \|x_1\|_1 \cdots \|x_k\|_k$$

对所有 $\beta \in \mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k; F)$ 以及 $x_j \in E_j$对于 $j \in \{1, \ldots, k\}$。

注 2.3.10。诸如以下形式的指数律

$$\mathcal{L}^2(E_1, E_2; F)_b \cong \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F)_b)_b$$

（如练习 2.3.1 所述）以及相应的识别，在赋范空间的微分学中发挥着一定作用。由于递归定义 2.3.4 避免了使用高阶 Fréchet 导数，我们可以尽量减少对此类识别的使用；多重线性映射空间的指数律仅用于命题 2.3.17(b)（通过引理 2.3.18）和 (c) 的证明。

考虑到微分方程的右端通常定义在非开子集上，我们也考虑非开定义域。

定义 2.3.11。 在具有稠密内部的局部凸子集 $U \subseteq E$ 上的映射 $f\colon U \to F$ 称为连续 ***Fr´echet*** 可微（或 FC^1），如果它是连续的，其在内部的限制 $f|_{U^0}$ 是可微的，并且 $(f|_{U^0})'$ 存在一个（必然唯一的）连续延拓

$$f'\colon U \to \mathcal{L}(E, F).$$

若 f是 FC^1且 f'：对于某个 $k \in \mathbb{N}$， $U \to \mathcal{L}(E, F)$ 是 FC^k，我们称 f是 FC^{k+1}。若 f是连续的，我们称 f是 FC^0；若对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$， f都是 FC^k，我们称 f 是 FC^∞。

除了 FC^k-映射外，我们还可以考虑赋范空间之间的 C^k-映射（如第1章所述）。现在我们比较这两个概念，其中 $k=1$。一般的 $k\in\mathbb{N}$将在命题 2.3.19 和 2.3.17 中讨论。

引理 2.3.12。设 $U\subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集。对于映射 $f\colon\ U\to F$，以下条件等价：

(a) f 是连续 *Fr´echet* 可微的；(b) f是 C^1，且映射 $U\to\mathcal{L}(E,F)$，$x\mapsto df(x,\cdot)$ 是连续的。

若这些条件成立，则

$$df(x,y)=f'(x)(y)\quad \textit{for all } x\in U \textit{ and } y\in E. \tag{2.30}$$

证明。(a)⇒(b)：若 f是 FC^1，则 f连续，且方向导数$df(x,y)=f'(x)(y)$ 对所有 $x\in U^0$和 $y\in E$均成立（见 (2.28)），因此

$$df(x,y):=f'(x)(y)=\varepsilon(f'(x),y)\ \text{ for } (x,y)\in U\times E$$

(其中 ε 如备注 2.3.6(a) 所示）定义了到 $U\times E$上的连续延拓 df。因此 f 是 C^1，且 (2.30) 成立。

(b)⇒(a)：令 $x\in U$ 对应于 $f'(x):=df(x,\cdot)$，可得连续映射 $f'\colon U\to\mathcal{L}(U,F)$。给定 $x\in U$ 和 $\varepsilon>0$，存在一个凸的 x-邻域 $Y\subseteq U$，使得

$$\|f'(y)-f'(x)\|_{op}\le\varepsilon\quad \text{for all } y\in Y. \tag{2.31}$$

利用中值定理，我们推得

$$\begin{aligned}&\|f(z)-f(x)-f'(x)(z-x)\|_F\\ &\quad=\left\|\int_0^1 (f'(x+t(z-x))-f'(x))(z-x)\,dt\right\|_F\\ &\quad\le\max\{\|f'(x+t(z-x))-f'(x)\|_{op}\colon t\in[0,1]\}\|z-x\|_E\le\varepsilon\|z-x\|_E\end{aligned}$$

对所有 $z\in Y$，利用 (2.31) 并取 $y:=x+t(z-x)$。若 $x\in U^0$，这意味着 f 在 x 处全微分，其导数为 $f'(x)$。因此 f 是 FC^1。□

练习 2.3.12 中给出了一个巴拿赫空间之间的 C^1-映射的例子，该映射不是 FC^1。

命题 2.3.13（FC^k映射的链式法则）。设 $U\subseteq E_1$、$V\subseteq E_2$是具有稠密内部的局部凸子集，$k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$和 $f\colon U\to E_2$以及 $g\colon V\to E_3$是 FC^k映射，且满足 $f(U)\subseteq V$。那么映射$g\circ f\colon U\to E_3$，$x\mapsto g(f(x))$也是 FC^k，并且

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\circ f'(x)\quad \textit{for all } x\in U. \tag{2.32}$$

证明。由于是 FC^1， f和 g都是 C^1，并且 $df(x,\cdot) = f'(x)$ 以及$dg(z,\cdot) = g'(z)$ 分别连续依赖于 $x \in U$和 $z \in V$（见引理 2.3.12）。因此 $g \circ f$ 是 C^1，且满足

$$d(g \circ f)(x,y) = dg(f(x), df(x,y)) = (g'(f(x)) \circ f'(x))(y)$$

对所有 $x \in U$ 和 $y \in E$ （参见命题 1.4.10）。利用连续双线性复合映射

$$\Gamma \colon \mathcal{L}(E_2,E_3) \times \mathcal{L}(E_1,E_2) \to \mathcal{L}(E_1,E_3),\ (\alpha,\beta) \mapsto \alpha \circ \beta,$$

我们有

$$d(g \circ f)(x,\cdot) = g'(f(x)) \circ f'(x) = \Gamma(g'(f(x)), f'(x)),$$

它关于 $x \in U$ 连续。根据引理 2.3.12， $g \circ f$ 是 FC^1，且 (2.32) 成立。若 $k \geq 2$，并且将 k 换成 $k-1$ 时断言成立，则考虑连续线性（因此也是 FC^{k-1}）映射

$$\lambda_1 \colon \mathcal{L}(E_2,E_2) \to \mathcal{L}(E_2,E_3) \times \mathcal{L}(E_1,E_2),\ \ \alpha \mapsto (\alpha, 0)$$

以及 $\lambda_2 \colon \mathcal{L}(E_1,E_2) \to \mathcal{L}(E_2,E_3) \times \mathcal{L}(E_1,E_2),\ \beta \mapsto (0,\beta)$。于是

$$(g' \circ f, f') = \lambda_1 \circ g' \circ f + \lambda_2 \circ f'$$

根据归纳假设， FC^{k-1} 是 $\lambda_1 \circ g' \circ f$，而 $\lambda_2 \circ f'$ 是 FC^{k-1}。由于 Γ 是 FC^{k-1}，再次利用归纳假设可知

$$(g \circ f)' = \Gamma \circ (g' \circ f, f')$$

是 FC^{k-1}。由于 $g \circ f$是 FC^1且 $(g \circ f)'$是 FC^{k-1}，映射 $g \circ f$是 FC^k。 □

注 2.3.14。设 $U \subseteq E$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。那么，映射 $f = (f_1, f_2) \colon U \to E_1 \times E_2$是 FC^k，当且仅当 f_1 和 f_2 都是 FC^k。

[为此，令 $\pi_j \colon E_1 \times E_2 \to E_j$ 是到 jth 个因子的投影，其中$j \in \{1,2\}$，并令 $\lambda_j \colon E_j \to E_1 \times E_2$是将 x映射为 $(x,0)$（若 $j=1$）以及 $(0,x)$（若 $j=2$）的映射。于是，π_1、 π_2、 λ_1和 λ_2 都是连续线性映射，因此FC^∞。利用命题 2.3.13，该断言可由以下恒等式推出

$$f_1 = \pi_1 \circ f, \quad f_2 = \pi_2 \circ f \quad \text{and} \quad f = \lambda_1 \circ f_1 + \lambda_2 \circ f_2. \tag{2.33}$$

引理 2.3.15。设 $U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且$f \colon U \to F$连续 *Fr´echet* 可微。设 $x \in U$和 $R \colon U \to F$是仿射线性近似中的余项

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + R(y)$$

在 x 周围的 f。那么，当 $r > 0$ 足够小时，$R|_{U \cap B_r^E(x)}$ 是利普希茨的，并且

$$\lim_{r \to 0} \operatorname{Lip}(R|_{U \cap B_r^E(0)}) = 0. \tag{2.34}$$

证明。给定 $\varepsilon > 0$，存在一个凸的 x-邻域 $Y \subseteq U$，使得

$$\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \varepsilon \quad \text{for all } y \in Y.$$

对于所有 y，$z \in Y$，利用中值定理，我们 deduce that

$$\begin{aligned}\|R(z) - R(y)\|_F &= \|f(z) - f(y) - f'(x)(z-y)\|_F \\ &= \left\| \int_0^1 (f'(y + t(z-y)) - f'(x))(z-y)\, dt \right\|_F \\ &\leq \int_0^1 \|f'(y + t(z-y)) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \|z-y\|_E \, dt \leq \varepsilon \|z-y\|_E,\end{aligned}$$

由此断言得证。 □

注 2.3.16。在引理 2.3.15 的情形下，定义 $g\colon U \to F$ 通过 $g(y) := f(y) - f'(x)(y)$，其中 $y \in U$。假设 U 在 E 中是开集。由于 $g(y) = R(y) + f(x) - f'(x)(x)$ 与 $R(y)$ 仅相差一个常数，映射

$$f|_{B_r^E(x)} = f'(x)|_{B_r^E(x)} + g|_{B_r^E(x)}$$

对于较小的 $r > 0$，它是连续线性映射 $f'(x)$ 的利普希茨扰动，并且当 $r \to 0$ 时，$\mathrm{Lip}(g|_{B_r^E(x)}) = \mathrm{Lip}(R|_{B_r^E(x)}) \to 0$。这将在我们证明反函数定理（定理 2.3.20）时发挥作用。

命题 2.3.17。设 $U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$f\colon U \to F$ 是一个函数，且 $k \in \mathbb{N}$。则有以下结论：

(a) 若 f 是 FC^k，则 f 是 C^k。(b) 若 f 是 C^{k+1}，则 f 是 FC^k。(c) f 是 FC^k 当且仅当 f 是 C^k，且映射 $U \to \mathcal{L}^k(E, \dots, E; F)_b, x \mapsto d^{(k)}f(x, \cdot)$ 连续。

证明。(a) 若 f 是 FC^k，则 f 是 C^1，并且

$$df = \varepsilon \circ (f' \times \mathrm{id}_E), \tag{2.35}$$

其中 $\varepsilon\colon \mathcal{L}(E,F) \times E \to F$，$(\alpha, x) \mapsto \alpha(x)$ 是求值映射（见引理 2.3.12）。由于是连续双线性的，ε 是 C^{k-1}。根据归纳法，FC^{k-1}-映射 f' 是 C^{k-1}（若 $k = 1$，则连续）；连续线性映射 id_E 是 C^{k-1}，因此 $f' \times \mathrm{id}_E$ 是 C^{k-1}（参见练习 1.3.6）。利用链式法则（命题 1.4.10），由 (2.35) 可推得 df 是 C^{k-1}。因此，f 是 C^k。

(b) 若 $k = 1$：我们证明，如果 f 是 FC^1，那么它就是 C^2。令 $x \in U$。由于 $d^{(2)}f\colon U \times E \times E \to F$ 连续，且 $d^{(2)}f(x, 0, 0) = 0$，给定 $\varepsilon > 0$，存在 x 的一个凸邻域 $Y \subseteq U$ 和 $r > 0$，使得

$$\|d^{(2)}f(y, v, w)\|_F \leq \varepsilon \quad \text{for all } y \in Y \text{ and } v, w \in B_r^E(0).$$

缩小 Y 后，我们可以假设 $Y-Y\subseteq B_{r^2}^E(0)$。将中值定理应用于 df 这个 C^1 函数，可得对所有满足 $\|v\|_E\le 1$ 的 $y\in Y$ 和 $v\in E$:

$$\begin{aligned}\|(f'(y)-f'(x))(v)\|_F &= \|df(y,v)-df(x,v)\|_F\\ &= \left\|\int_0^1 d^{(2)}f(x+t(y-x),v,y-x)\,dt\right\|_F\\ &\le \int_0^1 \left\|d^{(2)}f\big(x+t(y-x),rv,\frac{1}{r}(y-x)\big)\right\|_F dt\le\varepsilon.\end{aligned}$$

Thus

$$\|f'(y)-f'(x)\|_{\mathrm{op}}\le\varepsilon\quad\text{for all } y\in Y, \tag{2.36}$$

这表明 f' 在 x 处连续，因而连续。因此，由引理 2.3.12，f 是 FC^1。

关于 $k=1$ 的(c)即引理 2.3.12 的内容。

对于 $k\ge 2$，断言(b)和(c)对本节而言不太重要，我们建议初次阅读时跳过其证明。(b)的证明用到另一条引理。

引理 2.3.18. 设 $k\in\mathbb{N}$、$\ell\in\mathbb{N}_0$ 和 $U\subseteq E$ 为一个具有稠密内部的局部凸子集。若映射 $f\colon U\to\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)$ 作为到$\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)_c$的映射是 $C^{\ell+1}$，则它作为到 $\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)_b$的映射是 FC^ℓ。

证明。对 $\ell\in\mathbb{N}_0$ 使用归纳法即可证明。若 $\ell=0$，我们将 f 视为到 $C(E_1\times\cdots\times E_k,F)$ 的一个 C^1-映射，并由定理 1.7.30 和注记 1.7.31(b) 推得该映射

$$f^\wedge\colon U\times(E_1\times\cdots\times E_k)\to F,\ (x,y_1,\dots,y_k)\mapsto f(x)(y_1,\dots,y_k)$$

是 $C^{1,0}$。因此，根据引理 1.5.9，作为到$\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)_b$的映射，$f=(f^\wedge)^\vee$ 是连续的（因而是 FC^0）。

若作为到 $\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)_c$ 的映射，f 是 $C^{\ell+1}$，其中 $\ell\in\mathbb{N}$ 为某个值，则

$$df\colon U\times E\to\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)_c\subseteq C(E_1\times\cdots\times E_k;F)$$

是 C^ℓ，由此

$$\widehat{df}\colon(U\times E)\times(E_1\times\cdots\times E_k)\to F,\quad(x,y,x_1,\dots,x_k)\mapsto df(x,y)(x_1,\dots,x_k)$$

是一个 $C^{\ell,0}$-映射。将 $\widehat{df}$ 理解为一个 $C^{\ell,0}$-映射 $U\times(E\times E_1\times\cdots\times E_k)\to F$（这是一个较弱的性质），定理 1.7.30 给出一个 C^ℓ-函数

$$g:=(\widehat{df})^\vee\colon U\to C(E\times E_1,\dots\times E_k,F).$$

由于 $g(U)$ 是 $C(E\times E_1\times\cdots\times E_k,F)$ 中闭向量子空间 $\mathcal{L}^{k+1}(E,E_1,\dots,E_k;F)$ 的子集，引理 1.4.16 允许我们将 g 视为一个到 $\mathcal{L}^{k+1}(E,E_1,\dots,E_k;F)_c$ 的 C^ℓ-函数。根据归纳假设，g 作为到 $\mathcal{L}^{k+1}(E,E_1,\dots,E_k;F)_b$ 的映射是 $FC^{\ell-1}$。考虑

$$\Phi\colon \mathcal{L}^{k+1}(E,E_1,\dots,E_k;F)_b \to \mathcal{L}(E,\mathcal{L}^k(E_1,\dots,E_k;F)_b)_b$$

习题 2.3.1 中的映射，它是一个拓扑向量空间同构。如果我们能够证明

$$f' = \Phi \circ g,$$

那么 f'将是 $FC^{\ell-1}$，因此 f将是 FC^{ℓ}（正如所需）。对于 $x \in U$、$y \in E$和 $x_j \in E_j$，当 $j \in \{1,\dots,k\}$时，我们计算得

$$\begin{aligned}\Phi(g(x))(y)(x_1,\dots,x_k) &= g(x)(y,x_1,\dots,x_k) = \widehat{df}(x,y,x_1,\dots,x_k)\\ &= df(x,y)(x_1,\dots,x_k),\end{aligned}$$

由此 $\Phi(g(x))(y) = df(x,\ y) = f'(x)(y)$，因此 $\Phi(g(x)) = f'(x)$。 □

命题 2.3.17 的证明完毕。(b) 若 $f\colon\ U \to F$ 是带有 $k \geq 1$ 的 C^{k+1}，则 f 是 FC^1（由已处理的情形 $k = 1$）。由于 $df\colon\ U \times E \to F$ 是C^k，映射

$$(df)^\vee\colon U \to C(E,F),\quad x \mapsto df(x,\cdot)$$

根据定理 1.7.30，它是 C^k。由于 $(df)^\vee$ 的像包含于 $C(E,\ F)$ 中的闭向量子空间 $\mathcal{L}(E,\ F)$，我们推得 $(df)^\vee$ 的余限制$f'\colon\ U \to \mathcal{L}(E,\ F)_c$ 也为 C^k。于是，根据引理 2.3.18，$f'\colon\ U \to \mathcal{L}(E,\ F)_b$ 是 FC^{k-1}，因此 f 是 FC^k。

(c) 令 $k \geq 2$，并假设将 k 替换为 $k-1$ 时断言成立。令 $f\colon U \to F$ 为一个 C^k-映射，使得 $U \to \mathcal{L}^k(E \times \cdots \times E;\ F)_b,\ x \mapsto d^{(k)}f(x,\cdot)$ 连续。由 (b)，f 是 FC^{k-1}，因此 $f'\colon U \to \mathcal{L}(E,F)_b$ 是 FC^{k-2}，故由 (a) 可知 C^{k-2}。由于 $df\colon U\times E \to F$ 是 C^{k-1}，映射 $(df)^\vee\colon U \to C(E,F),x \mapsto df(x,\cdot)$ 也因此

$$g := f'\colon U \to \mathcal{L}(E,F)_c$$

是 C^{k-1}。我们断言

$$d^{(k-1)}g(x,y_1,\dots,y_{k-1})(y) = d^{(k)}f(x,y_1,\dots,y_{k-1},y) \tag{2.37}$$

对所有 $x \in U$ 和 $y,\ y_1,\ \dots,\ y_{k-1} \in E$ 都成立。若此式成立，则

$$d^{(k-1)}g(x,\cdot) = \Phi(d^{(k)}f(x,\cdot)) \quad \text{for all } x \in U,$$

利用同构

$$\Phi\colon \mathcal{L}^k(E,\dots,E;F)_b \to \mathcal{L}^{k-1}(E,\dots,E;\mathcal{L}(E,F)_b)_b \tag{2.38}$$

习题 2.3.1 中讨论的拓扑向量空间。因此

$$U \to \mathcal{L}^{k-1}(E,\dots,E;\mathcal{L}(E,F)_b)_b,\ \ x \mapsto d^{(k-1)}g(x,\cdot) = \Phi(d^{(k)}f(x,\cdot)) \tag{2.39}$$

是连续的。由于求值映射

$$\varepsilon\colon \mathcal{L}^{k-1}(E,\dots,E;\mathcal{L}(E,F)_b)_b \times E^{k-1} \to \mathcal{L}(E,F)_b$$

是连续的（见 2.3.9），我们推得

$$d^{(k-1)}g(x,y_1,\dots,y_{k-1}) = \varepsilon(d^{(k-1)}g(x,\cdot),y_1,\dots,y_{k-1}) \in \mathcal{L}(E,F)_b$$

连续依赖于 $(x,\ y_1,\ \dots,\ y_{k-1}) \in U \times E^{k-1}$。因此，根据引理 1.4.19(b)，$f' = g$ 作为到 $\mathcal{L}(E,\ F)_b$ 的映射是 C^{k-1}。由于 (2.39) 中的映射是连续的，根据归纳法，映射 f' 是 FC^{k-1}。因此，f 是 FC^k。

为验证 (2.37)，令 $y \in E$。由于求值映射 $\varepsilon_y\colon \mathcal{L}(E,\ F)_c \to F, \alpha \mapsto \alpha(x)$ 是连续线性的，我们有

$$\begin{aligned} d^{(k-1)}(\varepsilon_y \circ g)(x,y_1,\dots,y_{k-1}) &= \varepsilon_y(d^{(k-1)}g(x,y_1,\dots,y_{k-1})) \quad (2.40)\\ &= d^{(k-1)}g(x,y_1,\dots,y_{k-1})(y) \end{aligned}$$

对所有 $(x,\ y_1,\ \dots,\ y_{k-1}) \in U \times E^{k-1}$ 均成立。由于 $\varepsilon_y \circ g = df(\cdot, y)$，(2.40) 中的第一项由 $d^{(k-1)}(d^{k}\quad x\quad \dots)(,\ ,\ ,\ ) = d^{(k)}f(,\ ,\ ,\ ,\ )()f(,\ y_1,\ ,\ y_k,\ y)$ 给出，因此该断言成立。

反过来，如果 f 是 FC^k，那么根据 (a)，f 是 C^k。此外，$f'\colon U \to \mathcal{L}(E,\ F)_b$ 是 FC^{k-1}，因此由归纳法可知 f' 是 C^{k-1}，并且

$$U \to \mathcal{L}^{k-1}(E,\dots,E;\mathcal{L}(E,F)_b)_b, \quad x \mapsto d^{(k-1)}(f')(x,\cdot)$$

是连续映射。给定 $y \in E$，求值映射 $\varepsilon_y\colon \mathcal{L}(E,\ F)_b \to F, \alpha \mapsto \alpha(y)$ 是连续线性的，且 $\varepsilon_y \circ f' = df(\cdot,\ y)$，这意味着

$$\begin{aligned} d^{(k-1)}(f')(x,y_1,\dots,y_{k-1})(y) &= d^{(k-1)}(\varepsilon_y \circ f')(x,y_1,\dots,y_{k-1})\\ &= d^{(k)}f(x,y,y_1,\dots,y_{k-1}) \end{aligned}$$

对所有 $(x,\ y_1,\ \dots,\ y_{k-1}) \in U \times E^{k-1}$ 均成立。因此，重新使用 (2.38) 中的映射 Φ，我们有 $d^{(k)}f(x,\ \cdot) = \Phi^{-1}(d^{(k-1)}(f')(x,\ \cdot)) \in \mathcal{L}^k(E,\ \dots,\ E;\ F)_b$，它关于 $x \in U$ 连续变化。□

命题 2.3.19。设 E 为有限维向量空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，F 为赋范空间，$f\colon\ U \to F$ 为映射，且 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。那么，$f$ 是 C^k 当且仅当 f 是 FC^k。

证明。若 f 是 FC^k，则由命题 2.3.17(a)，f 是 C^k。为证明逆命题，我们可以假设 $k \in \mathbb{N}$。证明采用归纳法。情形 $k = 1$：设 $v_1,\ \dots,\ v_n$ 是 E 的一组基。那么

$$\varphi\colon \mathcal{L}(E,F)_b \to F^n, \quad \alpha \mapsto (\alpha(v_1),\dots,\alpha(v_n))$$

是拓扑向量空间同构（见习题 B.9.4）。映射

$$\varphi \circ f' = (df(\cdot,v_1),\dots,df(\cdot,v_n))\colon U \to F^n \qquad (2.41)$$

是 C^{k-1}，因此连续，这意味着 $f' = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f')$ 连续。因此，根据引理 2.3.12，f 是 FC^1。若 f 是带有 $k \geq 2$ 的 C^k，则由 (2.41) 可推出 $\varphi \circ f'$ 是 C^{k-1}。根据归纳假设，$f' = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f')$ 是 C^{k-1}，因而 FC^{k-1}。因此，f 是 FC^k。□

不动点、反函数与隐函数

现在，我们将证明FC^k-映射的经典反函数定理，此外还会证明其他内容：

定理 2.3.20（ FC^k-映射的反函数定理）。设 E为巴拿赫空间，且 $f\colon U \to E$ 为开子集 $U \subseteq E$上的 FC^k-映射，其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 $x_0 \in U$。若 $f'(x_0)\colon E \to E$可逆，则存在开 x_0-邻域 $V \subseteq U$，使得 $f(V)$ 在 E 中为开集，且$f|_V\colon V \to f(V)$ 为 FC^k-微分同胚。

我们还将证明经典的隐函数定理（并且稍作加强，因为我们不必假设 E 完备且 $U \subseteq E$ 为开子集）：

定理 *2.3.21*（ FC^k-映射的隐函数定理）。设 E为赋范空间， F 为巴拿赫空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集， $V \subseteq F$ 为开子集。设 $f\colon U \times V \to F$ 为一个FC^k-映射，满足 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 以及 $(x_0, y_0) \in U \times V$，使得 $f(x_0, y_0) = 0$，且 $(f_{x_0})'(y_0)\colon F \to F$可逆，其中对 $x \in U$有 $f_x := f(x, \cdot)\colon V \to F$。则存在开 x_0-邻域 $U_0 \subseteq U$、开 y_0-邻域$V_0 \subseteq V$以及 FC^k-映射 $\varphi\colon U_0 \to V_0$，使得

$$\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \colon f(x, y) = 0\} = \operatorname{graph}(\varphi). \tag{2.42}$$

与前文一样，此处以及本节余下部分中的向量空间（及其可微性性质）均取在基域 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上。定理 2.3.20 和 2.3.21 的证明需要做一些准备；相应的准备将在注 2.3.33 和 2.3.41 之后给出。

即使 E 是任意的局部凸空间，隐函数定理的一个版本仍然成立（推论 2.3.40 ），我们将从这一结果推出定理 2.3.21。作为证明的工具，我们研究压缩映射的不动点对参数的依赖性（这本身也颇具意义）。先回顾一下相关概念。

定义 2.3.22. 设 (X, d) 是一个度量空间。若存在 $L \in [0, 1[$ 使得映射 $f\colon X \to X$ 满足

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y) \quad \text{for all } x, y \in X,$$

即 f是利普希茨连续的，且$\operatorname{Lip}(f) < 1$。利普希茨常数 $L \in [0, 1[$也称为压缩常数。

引理 2.3.23. 若度量空间(X, d) 上的压缩映射 $f\colon X \to X$ 有不动点 x_∞，则该不动点必然唯一。

证明。 设 $\overline{x} \in X$满足 $f(\overline{x}) = \overline{x}$。若 $\overline{x} \neq x_\infty$，则 $d(\overline{x}, x_\infty) > 0$，从而

$$d(\overline{x}, x_\infty) = d(f(\overline{x}), f(x_\infty)) \leq L\, d(\overline{x}, x_0) < d(\overline{x}, x_\infty),$$

这显然荒谬。 □

我们回顾一下巴拿赫不动点定理（也称压缩映射原理）。

引理 2.3.24（巴拿赫不动点定理）。设(X,d) 是一个完备度量空间，且 $X\neq\emptyset$， $f\colon\ X\to X$ 是压缩映射，压缩常数为 $L\in[0,1[$。则有：

(a) f 有唯一的不动点 x_∞。(b) 对于每个 $x_0\in X$，

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)=x_\infty. \tag{2.43}$$

(c) 以下先验估计成立：对于所有 $n\in\mathbb{N}_0$，

$$d(f^n(x_0),x_\infty)\le\frac{L^n}{1-L}\,d(f(x_0),x_0). \tag{2.44}$$

证明。给定 $x_0\in X$，令 $x_n:=f^n(x_0)$，其中 $n\in\mathbb{N}_0$。于是

$$d(x_{n+1},x_n)\le L^n d(x_1,x_0) \tag{2.45}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}_0$ 均成立，因为当 $n=0$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 时，该估计显然成立

$$d(x_{n+1},x_n)=d(f(x_n),f(x_{n-1}))\le L\,d(x_n,x_{n-1})\le L^n d(x_1,x_0)$$

由归纳法得 $d(x_n,x_{n-1})\le L^{n-1}d(x_1,x_0)$。对于 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $m\in\mathbb{N}$，这意味着

$$d(x_{n+m},x_n)\le\frac{L^n}{1-L}\,d(x_1,x_0); \tag{2.46}$$

事实上，利用三角不等式、(2.45) 以及几何级数的求和公式，可得 $d(x_{n+m},x_n)\le\sum_{k=n}^{n+m-1}d(x_{k+1},x_k)\le\sum_{k=n}^{n+m-1}L^k d(x_1,x_0)=L^n d(x_1,x_0)\sum_{j=0}^{m-1}L^j\le\frac{L^n}{1-L}d(x_1,x_0)$。由 (2.46)，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是柯西序列，因此收敛。令 $x_\infty\in X$ 为其极限。那么 x_∞ 是 f 的不动点，因为

$$f(x_\infty)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x_\infty.$$

在 (2.46) 中令 $m\to\infty$，即可得到 (2.44)。关于不动点的唯一性，请参见引理 2.3.23。□

以下假设使得关于压缩映射族的不动点能够得到有意义的结果。

定义 2.3.25. 设 (X,d) 是一个度量空间，且 $(f_j)_{j\in J}$ 是一族压缩映射 $f_j\colon X\to X$。称数 $\theta\in[0,1[$ 为 $(f_j)_{j\in J}$ 的**一致压缩常数**，如果它是每个 f_j 的压缩常数。若 $(f_j)_{j\in J}$ 存在一致压缩常数，我们称其为**一致压缩映射族**，当且仅当.....

$$\sup_{j\in J}\operatorname{Lip}(f_j)<1. \tag{2.47}$$

命题 2.3.26. 设(X,d) 是一个满足 $X\neq\emptyset$ 的完备度量空间。设P 是一个拓扑空间，且 $f\colon\ P\times X\to X$ 是一个映射，使得这些映射

$$f_p:=f(p,\cdot)\colon X\to X$$

构成一个一致的压缩映射族$(f_p)_{p\in P}$。令 θ 为一致压缩常数。对于 $p\in P$，令 $x_p\in X$ 为 f_p的唯一不动点。则有以下结论：

(a) 若 f 连续，则 $\varphi\colon\ P\to X,\ p\mapsto x_p$ 连续。(b) 若存在定义 P 拓扑的度量 d_P，且对于每个 $x\in X$，$f^x:=f(\cdot,x)\colon\ P\to X,\ p\mapsto f(p,x)$ 是利普希茨的，满足

$$L:=\sup_{x\in X}\operatorname{Lip}(f^x)<\infty,$$

那么 φ 是利普希茨的，且 $\operatorname{Lip}(\varphi)\ \leq\frac{L}{1-\theta}$。

证明。 对于所有 $p,q\in P$，由 (2.44) 可知

$$d(x_p,x_q)\leq\frac{1}{1-\theta}d(f_q(x_p),x_p)=\frac{1}{1-\theta}d(f(q,x_p),f(p,x_p)).\tag{2.48}$$

(a) 令 $p\in P$。给定 $\varepsilon>0$，存在一个 p-邻域 $Q\subseteq P$，使得对于所有 $q\in Q$，$d(f(q,x_p)\ f(p,x_p))\ <(1-\theta)\varepsilon$，因此由 (2.48) 可得 $d(x_p,x_q)\ <\varepsilon$。故 φ在 p处连续。

(b) 由于 $d(f(q,x_p)\ f(p,x_p))\ \leq Ld_P(q,p)$，(2.48) 表明 φ 是利普希茨映射，且 $\operatorname{Lip}(\varphi)\ \leq L/(1-\theta)$。□

命题 2.3.27。设 E 是局部凸空间，$P\subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$(F,\|\cdot\|)$ 是巴拿赫空间，$U\subseteq F$ 是具有稠密内部的闭凸子集。设 $f\colon\ P\times U\to U$ 是一个映射，使得映射 $f_p:=f(p,\cdot)\colon\ U\to U$ 构成压缩映射的一致族 $(f_p)_{p\in P}$。设 $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，并令 x_p 为 $p\in P$ 对应的 f_p 的不动点。则有以下结论：

(a)若 f 是 C^k，则映射 $\varphi\colon\ P\to U,\ p\mapsto x_p$ 也为 C^k。(b)若 E 是赋范空间且 f 是 FC^k，则 $\varphi\colon\ P\to U$ 也为 FC^k。

证明。 设 $\theta\in[0,1[$ 为 $(f_p)_{p\in P}$ 的一致压缩常数。我们可以假设 $k\in\mathbb{N}$。

(a) 情形 $k=1$：我们断言，对每个 $n\in\mathbb{N}_0$，存在连续映射 $h_n\colon\ P^{[1]}\to F$ 使得

$$h_n(p,q,t)=\frac{(f_{p+tq})^{n+1}(x_p)-(f_{p+tq})^n(x_p)}{t}\ \text{for all}\ (p,q,t)\in P^{[1]}\ \text{with}\ t\neq0,\tag{2.49}$$

其中 $P^{[1]}$与（1.48）中相同。对于所有满足 $t\neq0$ 的 $(p,q,t)\in P^{[1]}$，我们有

$$\varphi(p+tq)=x_{p+tq}=\lim_{N\to\infty}(f_{p+tq})^N(x_p),$$

由此可得……的左边

$$\begin{aligned}\frac{(f_{p+tq})^{N+1}(x_p)-x_p}{t}&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(f_{p+tq})^{n+1}(x_p)-(f_{p+tq})^n(x_p)}{t}\\&=\sum_{n=0}^{N}h_n(p,q,t)\end{aligned}\tag{2.50}$$

收敛到

$$\frac{\varphi(p+tq)-\varphi(p)}{t}.$$

如果我们能证明 $\sum_{n=0}^{\infty}h_n$ 收敛到连续函数 $h\colon P^{[1]}\to F$，那么 φ 将是 C^1，且满足 $\varphi^{[1]}=h$（见引理 1.4.9）。我们用归纳法证明该断言。若 $n=0$，利用 $x_p=f_p(x_p)=f(p,\ x_p)$，可得

$$\frac{f_{p+tq}(x_p)-x_p}{t}=\frac{f(p+tq,x_p)-f(p,x_p)}{t}=f^{[1]}(p,x_p,q,0,t)$$

对所有满足 $t\neq 0$ 的 $(p,\ q,\ t)\in P^{[1]}$，都有 $h_0\colon P^{[1]}\to F$，

$$(p,q,t)\mapsto f^{[1]}(p,x_p,q,0,t)$$

正如所需。若 $n\in\mathbb{N}$ 和 h_{n-1} 已经找到，记

$$\begin{aligned}(f_{p+tq})^n(x_p)&=(f_{p+tq})^{n-1}(x_p)+t\frac{(f_{p+tq})^n(x_p)-(f_{p+tq})^{n-1}(x_p)}{t}\\&=(f_{p+tq})^{n-1}(x_p)+th_{n-1}(p,q,t)\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{(f_{p+tq})^{n+1}(x_p)-(f_{p+tq})^n(x_p)}{t}\\&\quad=\frac{f(p+tq,(f_{p+tq})^n(x_p))-f(p+tq,(f_{p+tq})^{n-1}(x_p))}{t}\\&\quad=f^{[1]}(p+tq,(f_{p+tq})^{n-1}(x_p),0,h_{n-1}(p,q,t),t)\end{aligned}\tag{2.51}$$

对所有满足 $t\neq 0$ 的 $(p,q,t)\in P^{[1]}$ 均成立。注意，(2.51) 中的最后一项对所有 $(p,q,t)\in P^{[1]}$ 都有意义，并定义了一个连续函数 $h_n\colon P^{[1]}\to F$。递归构造至此完成。

由于 h_0 连续，每个 $(p_0,q_0,t_0)\in P^{[1]}$ 都有一个开邻域 $W\subseteq P^{[1]}$，使得 $h_0(W)$ 有界；因此

$$M:=\|h_0|_W\|_\infty<\infty.$$

利用 (2.45)，我们得到

$$\begin{aligned}\|h_n(p,q,t)\| &= \frac{1}{|t|}\|(f_{p+tq})^{n+1}(x_p) - (f_{p+tq})^n(x_p)\| \le \frac{\theta^n}{|t|}\|f_{p+tq}(x_p) - x_p\| \\ &= \theta^n\|h_0(p,q,t)\| \le \theta^n M\end{aligned}$$

对所有满足 $t \neq 0$ 的 $(p,\ q,\ t) \in W$。因此

$$\|h_n(p,q,t)\| \le \theta^n M \ \text{ for all } \ (p,q,t) \in W,$$

由于 h_n 是连续的，且 $\{(p,q,t) \in W\colon\ t \neq 0\}$ 在 W中稠密。因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|h_n|_W\|_\infty \le \sum_{n=0}^{\infty}\theta^n M = \frac{M}{1-\theta} < \infty,$$

这表明 $\sum_{n=0}^{\infty} h_n|_W$ 一致收敛到一个连续函数$W \to F$。由于 (p_0,q_0,t_0) 是任意的，我们推得 $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$在局部一致收敛到一个连续函数 $h\colon P^{[1]} \to F$。

归纳步骤。若对于某个满足 $k \ge 2$的 $k \in \mathbb{N}$， f 是 C^k，则根据归纳假设，φ 是 C^{k-1}（因而也是 C^1）。由于

$$f(p,\varphi(p)) = \varphi(p)$$

对于 $p \in P$，利用链式法则可得

$$df(p,\varphi(p),q,d\varphi(p,q)) = d\varphi(p,q) \ \text{ for all } \ (p,q) \in P \times E. \tag{2.52}$$

现在， $g\colon\ P \times E \times F \to F$, $(p,q,y) \mapsto df(p,\varphi(p)\ q,y)$ 是一个 C^{k-1}-映射。令$g_{p,q} := g(p,q,\cdot)\colon\ F \to F$，我们可以将 (2.52) 改写为

$$g_{p,q}(d\varphi(p,q)) = d\varphi(p,q) \ \text{ for all } (p,q) \in P \times E. \tag{2.53}$$

由于 $g_{p,\ q} = d_1 f(p,\ \varphi(p)\ q) + d_2 f(p,\ \varphi(p)\ \cdot)$，利用引理 1.5.3(b)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}(g_{p,q}) &= \mathrm{Lip}(d_2 f(p,\varphi(p),\cdot)) = \|d_2 f(p,\varphi(p),\cdot)\|_{\mathrm{op}} \\ &= \|(f_p)'(\varphi(p))\|_{\mathrm{op}} \le \mathrm{Lip}(f_p) \le \theta.\end{aligned}$$

因此 $(g_{p,\ q})_{(p,q)\in P\times E}$ 是一致压缩映射族。由于根据 (2.53)， $d\varphi(p,\ q)$ 是$g_{p,\ q}$ 的不动点，根据归纳假设， $d\varphi$ 是 C^{k-1}。因此 φ是 C^k。

(b) 根据 (a) 中的 (2.52)，映射 φ是 C^1，并且

$$\varphi'(p) = f'(p,\varphi(p)) \circ \lambda_1 + f'(p,\varphi(p)) \circ \lambda_2 \circ \varphi'(p) \quad \text{ for } \quad p \in P,$$

利用连续线性映射 $\lambda_1\colon\ E \to E \times F$, $q \mapsto (q,0)$ 和$\lambda_2\colon\ F \to E \times F$, $y \mapsto (0,y)$。因此

$$\varphi'(p) = h_p(\varphi'(p)) \tag{2.54}$$

根据映射

$$h\colon P\times\mathcal{L}(E,F)\to\mathcal{L}(E,F),\ (p,\alpha)\mapsto f'(p,\varphi(p))\circ\lambda_1+f'(p,\varphi(p))\circ\lambda_2\circ\alpha$$

根据链式法则和注 2.3.6(b)，按前述方式写作 FC^{k-1}，即$h_p:=h(p,\ \cdot)$。这里我们利用了 φ 是 FC^{k-1}；事实上，φ 是连续的（因此FC^0），且若 $k\geq 2$，则可通过归纳法假设满足 FC^{k-1}-性质。利用 (2.29)，我们得到

$$\mathrm{Lip}(h_p)=\|\mathcal{L}(E,f'_p(\varphi(p))\circ\lambda_2)\|_{\mathrm{op}}\leq\|f'_p(\varphi(p))\circ\lambda_2\|_{\mathrm{op}}\leq\|f'_p(\varphi(p))\|_{\mathrm{op}}\leq\theta,$$

由此 $(h_p)_{p\in P}$ 是一致压缩映射族。由 (2.54)，$\varphi'(p)$是 h_p 的不动点，因此归纳假设表明 φ' 是 FC^{k-1}，从而连续，故根据引理 2.3.12，φ 是 FC^1。于是 φ 是 FC^k。□

关于不动点对参数的实解析依赖性，也有相应结果（见 Exercices 2.3.6 和 2.3.8）。初读时可以略过下面这个关于 $C^{0,\,k}$-依赖性的引理；它仅用于进一步的技术性结果，而这些结果最终使得能够证明巴拿赫-李群和微分同胚群的 C^0-正则性。

引理 *2.3.28.* 设 X 为拓扑空间，E 为局部凸空间，$P\subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，$(F,\|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间，$U\subseteq F$ 为具有稠密内部的闭凸子集，且 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。设 $f\colon X\times(P\times U)\to U$ 为一个 $C^{0,k}$-映射，使得映射 $f_{x,p}:=f(x,p,\cdot)\colon U\to U$构成一个一致的 $(f_{x,p})_{(x,p)\in X\times P}$压缩映射族。令$\varphi(x,p)\in U$为 $f_{x,p}$ 关于 $(x,p)\in X\times P$ 的不动点。则 $\varphi\colon X\times P\to F,\ (x,p)\mapsto\varphi(x,p)$ 是一个 $C^{0,k}$-映射。

证明。不妨设 $k<\infty$。证明对 $k\in\mathbb{N}_0$使用归纳法。对于 $k=0$，由命题 2.3.26(a)知断言成立。现在设 $k\in\mathbb{N}$。对于固定的 $x\in X$，映射 $f_x:=f(x,\cdot)\colon P\times U\to U$是 C^k（见引理 1.7.18），并定义了一个一致的压缩映射族，因此，由命题 2.3.27(a)，$\varphi_x:=\varphi(x,\cdot)\colon P\to F$是一个 C^k-映射。固定 x，对其应用链式法则

$$\varphi_x(p)=f_x(p,\varphi_x(p)),$$

我们得到，对于所有 $(p,q)\in P\times E$，$d\varphi_x(p,q)=d(f_x)(p,\varphi_x(p),q,d\varphi_x(p,q))$，因此

$$d^{(0,1)}\varphi(x,p,q)=d^{(0,1)}f(x,p,\varphi(x,p),q,d^{(0,1)}\varphi(x,p,q)).$$

由前面的结论可知，$d^{(0,1)}\varphi(x,p,q)$ 是映射 $g_{x,p,q}:=g(x,p,q,\cdot)$ 关于 $(x,p,q)\in X\times P\times E$ 的不动点，如果我们定义

$$g\colon X\times(P\times E\times F)\to F,\quad g(x,p,q,y):=d^{(0,1)}f(x,p,\varphi(x,p),q,y).$$

现在 $d^{(0,1)}f\colon X\times(P\times U\times E\times F)\to F$是 $C^{0,\,k-1}$根据引理 1.7.8 和映射

$$X \times (P \times E \times F) \to P \times U \times E \times F, \quad (x,p,q,y) \mapsto (p, \varphi(x,p), q, y)$$

是 $C^{0,\,k-1}$，因为 φ是 $C^{0,\,k-1}$ 根据归纳法（另见习题 1.7.1）。因此 g 是$C^{0,\,k-1}$，根据引理1.7.37。现在

$$g(x,p,q,y) = d_2 f(x,p,\varphi(x,p);q) + d_3 f(x,p,\varphi(x,p);y)$$

用偏微分来表示。若 θ 是 $(f_{x,p})_{(x,p)\in X\times P}$ 的一致压缩常数，则根据引理 1.5.3，对所有 $(x,p) \in X \times P$，都有 $\|d_3 f(x,p,\varphi(x,p);\cdot)\|_{\mathrm{op}} \le \theta$。因此，$\mathrm{Lip}(g_{x,p,q}) \le \theta$（同样根据引理 1.5.3）。故 $(g_{x,p,q})_{(x,p,q)\in X\times P\times E}$ 是一致压缩映射族。因此，根据归纳假设，$d^{(0,1)}\varphi$ 是 $C^{0,k-1}$。于是根据引理 1.7.36，φ 是 $C^{0,k}$。□

定义 2.3.29。设 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 E 和 F 是定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 和 f 上的局部凸空间：$U \to V$ 是开子集 $U \subseteq E$ 与 $V \subseteq F$ 之间的映射；在讨论 FC^k-映射时，我们假设 E 和 F 都是可赋范的。

(a) f：如果 f 是双射，且 f 和 f^{-1} 都是 C^k-映射（分别为 FC^k-映射、$\mathbb{K}$-解析映射），则称 $U \to V$ 分别为 C^k-微分同胚、FC^k-微分同胚和 $\mathbb{K}$-解析微分同胚。同理，如果 $U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$ 是具有稠密内部的局部凸子集，则定义 C^k-微分同胚和 FC^k-微分同胚。

(b) 如果存在一个开x-邻域 $W \subseteq U$，使得 $f(W)$ 在 F 中是开的，并且 $f|_W$: $W \to f(W)$ 是一个 C^k-微分同胚，则称 f 在 $x \in U$ 处是一个局部 C^k-微分同胚。如果 f 在每个 $x \in U$ 处都是局部 C^k-微分同胚，则称 f 为局部 C^k-微分同胚。局部 FC^k-微分同胚和局部$\mathbb{K}$-解析微分同胚（以及在 x 处的此类映射）的定义类似，只需分别将 C^k-映射替换为 FC^k-映射和 $\mathbb{K}$-解析映射。

注 2.3.30. 如果 $f\colon U \to V$（如前所述）是一个 C^1-微分同胚，对 $\mathrm{id}_U = f^{-1} \circ f$ 和 $\mathrm{id}_V = f \circ f^{-1}$ 应用链式法则，我们发现，对于所有 $x \in U$ 和 f^{-1}，$\mathrm{id}_E = (f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x)$

$$\mathrm{id}_F = f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y) \tag{2.55}$$

对于所有 $y \in V$。在 (2.55) 中取 $y := f(x)$，得到 $\mathrm{id}_F = f'(x) \circ (f^{-1})'(f(x))$。因此，对于所有 $x \in U$，$f'(x)$ 都是可逆的，并且

$$(f^{-1})'(f(x)) = f'(x)^{-1}. \tag{2.56}$$

注 2.3.31。设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间，且 $E \neq \{0\}$ 和 $\alpha\colon E \to E$ 是 E 作为拓扑向量空间的一个自同构。在下文中，数值

$$\frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

将会反复出现。它可以解释为 α 的最小膨胀因子，即

$$\frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} = \inf\left\{\frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} : 0 \neq x \in E\right\} \in]0,\infty[. \tag{2.57}$$

为此，将 (2.57) 的右端改写为

$$\frac{1}{\sup\{\|x\|/\|\alpha(x)\| : 0 \neq x \in E\}} = \frac{1}{\sup\{\|\alpha^{-1}(y)\|/\|y\| : 0 \neq y \in E\}}.$$

现在我们证明一个定量版的反函数定理，适用于线性自同构 α 的利普希茨扰动 $f = \alpha + g$。证明基于一种简化的牛顿迭代，该迭代不涉及 f 的导数，而是使用给定的 α。

定理 2.3.32（定量反函数定理）。设$(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，具有 $E \neq \{0\}$，且 $\alpha \in \mathrm{GL}(E)$。设 $x \in E$、$r > 0$ 和 $g\colon B_r^E(x) \to E$ 是一个利普希茨映射，满足

$$\mathrm{Lip}(g) < \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}.$$

那么，$f\colon B_r^E(x) \to E$、$y \mapsto \alpha(y) + g(y)$ 具有以下性质：

(a) f 具有开像，且是到其像上的同胚。(b) $f^{-1}\colon f(B_r^E(x)) \to B_r^E(x)$ 是利普希茨的，且

$$\mathrm{Lip}(f^{-1}) \leq a^{-1} \quad \textit{for} \quad a := \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}(g) > 0.$$

(c) 若令 $h := f^{-1} - \alpha^{-1}$，则 $f^{-1} = \alpha^{-1} + h$ 和 $h\colon f(B_r^E(x)) \to E$ 是利普希茨的，且

$$\mathrm{Lip}(h) \leq \frac{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{Lip}(g)}{a}. \tag{2.58}$$

(d) 记 $b := \|\alpha\|_{\mathrm{op}} + \mathrm{Lip}(g)$。则

$$a\|z-y\| \leq \|f(z)-f(y)\| \leq b\|z-y\| \quad \textit{for all } y, z \in B_r^E(x).$$

(e) 球的像满足以下估计：

$$B_{ar}^E(f(x)) \subseteq f(B_r^E(x)) \subseteq B_{br}^E(f(x))$$

更一般地，

$$B_{as}^E(f(y)) \subseteq f(B_s^E(y)) \subseteq B_{bs}^E(f(y)) \tag{2.59}$$

对于所有 $y \in B_r^E(x)$ 以及 $0 < s \leq r - \|y - x\|$。

(f) 若 f 是 C^k（（分别地，FC^k））且满足 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，则 $f^{-1}\colon f(B_r^E(x)) \to E$ 也具有 C^k（（分别地，FC^k））性质。

证明。设 $L := \mathrm{Lip}(g)$; 则

$$a + L = \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}. \tag{2.60}$$

(d) 对所有 $y, z \in B_r^E(x)$，我们有

$$\|f(z) - f(y)\| = \|\alpha(z - y) + g(z) - g(y)\|,$$

因此，由三角不等式以及 $\|f(z) - f(y)\| \geq \|\alpha(z-y)\| - \|g(z) - g(y)\| \geq a\|z - y\|$，利用 (2.57)，可得 $\|f(z) - f(y)\| \leq (\|\alpha\|_{\mathrm{op}} + L)\|z - y\|$。

(b) (d) 中的下界估计意味着 f 是单射。若 $v, w \in f(B_r^E(x))$，则 $v = f(y)$ 且 $w = f(z)$，其中 $y := f^{-1}(v)$ 且 $z := f^{-1}(w)$。由 (d)，我们有 $\|f^{-1}(w) - f^{-1}(v)\| = \|z - y\| \leq \frac{1}{a}\|f(z) - f(y)\| = \frac{1}{a}\|w - v\|$。因此 $\mathrm{Lip}(f^{-1}) \leq \frac{1}{a}$。

(e) 令 y 和 s 如 (2.59) 所示。由 (d) 可知，(2.59) 中的第二个包含映射成立。要证明第一个，我们只需证明

$$\overline{B}_{at}^E(f(y)) \subseteq f(\overline{B}_t^E(y))$$

对所有 $0 < t < r - \|y - x\|$ 都成立。为此，令 $c \in B_{at}^E(f(y))$，并考虑

$$h_c\colon \overline{B}_t^E(y) \to E, \quad z \mapsto z - \alpha^{-1}(f(z) - c).$$

于是，对所有 $z \in \overline{B}_t^E(y)$，都有 $h_c(z) \in \overline{B}_t^E(y)$，因为

$$\begin{aligned} \|h_c(z) - y\| &= \|\alpha^{-1}(\alpha(z) - \alpha(y) - f(z) + c)\| \\ &= \|\alpha^{-1}(-g(z) + g(y) - f(y) + c)\| \\ &\leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}(L\|z - y\| + \|c - f(y)\|) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}(Lt + at) \leq t, \end{aligned}$$

利用 (2.60)。此外，$h_c\colon \overline{B}_t^E(y) \to \overline{B}_t^E(y)$ 是一个压缩映射，因为

$$\begin{aligned} \|h_c(z) - h_c(v)\| &= \|\alpha^{-1}(\alpha(z) - \alpha(v) - f(z) + f(v))\| \\ &= \|\alpha^{-1}(g(v) - g(z))\| \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} L\|z - v\| \end{aligned}$$

这表明

$$\mathrm{Lip}(h_c) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} L < 1. \tag{2.61}$$

根据巴拿赫不动点定理，存在 $z \in \overline{B}_t^E(y)$ 使得

$$z = h_c(z) = z - \alpha^{-1}(f(z) - c)$$

因此 $c = f(z)$。

(a) 由 (b) 可知， f 是到其像上的同胚。(2.59) 中的第一个包含关系表明 $f(B_r^E(x))$ 是开集。

(c) 我们有 $\mathrm{id} = f^{-1} \circ f = (\alpha^{-1} + h) \circ (\alpha + g) = \mathrm{id} + \alpha^{-1} \circ g + h \circ f$ 因此 $h \circ f = -\alpha^{-1} \circ g$，即，

$$h = -\alpha^{-1} \circ g \circ f^{-1}.$$

因此 $\mathrm{Lip}(h) \leq \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \mathrm{Lip}(g)\, \mathrm{Lip}(f^{-1})$。按照 (b) 中的方法估计 $\mathrm{Lip}(f^{-1})$，可得 (2.58)。

(f) 若 f 是 C^k（分别为 FC^k），我们证明对于每个 $y \in B_r^E(x)$，在 $f(y)$ 的某个开邻域上，f^{-1} 是 C^k（分别为 FC^k）。为此，设 $0 < t < r - \|y - x\|$。那么

$$\widetilde{h} \colon \overline{B}_{at}^E(f(y)) \times \overline{B}_t^E(y) \to \overline{B}_t^E(y), \quad z \mapsto z - \alpha^{-1}(f(z) - c)$$

是 C^k（分别为 FC^k）。由 (2.61)，映射 $\widetilde{h}_c := \widetilde{h}(c, \cdot)$ 对于 $c \in B_{at}^E(f(y))$ 构成一个一致压缩映射族，而且我们还看到，$\widetilde{h}_c$ 的不动点 z 与 $f^{-1}(c)$ 一致。因此，根据命题 2.3.27，f^{-1} 在 $B_{at}^E(f(y))$ 上是 C^k（分别为 FC^k）。□

注 2.3.33. 用 $L \in [\mathrm{Lip}(g), \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}[$ 代替 $\mathrm{Lip}(g)$ 重复前述证明，我们得到与定理 2.3.32 中 (b)–(e) 类似的陈述，只是 L 取代了 $\mathrm{Lip}(g)$。

定理的证明 2.3.20。我们有 $B_r^E(x_0) \subseteq U$，对某个 $r > 0$。由引理 2.3.15，在缩小 r 之后，我们可以使得该函数

$$g \colon B_r^E(x_0) \to E, \quad x \mapsto f(x) - f'(x_0)(x)$$

是利普希茨的，且

$$\mathrm{Lip}(g) < \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

于是由定理 2.3.32，$f|_{B_r^E(x_0)} = f'(x_0) + g$ 具有开像，并且是到后者上的 FC^k-微分同胚。□

作为工具，我们现在研究局部逆的族。

定理 2.3.34（含参数反函数定理）。 设 E 为局部凸空间，$(F, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，$V \subseteq F$ 为开子集，且 $f \colon U \times V \to F$ 为满足 $k \in \{2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$ 的 C^k-函数。对 $x \in U$，简记 $f_x := f(x, \cdot) \colon V \to F$。假设 $(x_0, y_0) \in U \times V$，且 $f'_{x_0}(y_0) \in$ 一般线性群(F)。则存在开的 x_0-邻域 $U_0 \subseteq U$ 以及开的 y_0-邻域 $V_0 \subseteq V$，具有如下性质：

(a) $f_x(V_0)$ 在 F 中是开集，并且对每个 $x \in U_0$，$f_x|_{V_0} \colon V_0 \to f_x(V_0)$ 是一个 C^k-微分同胚；

(b) 集合 $W := \bigcup_{x\in U_0}\{x\}\times f_x(V_0)$ 在 $U_0\times F$ 中是开集，并且映射

$$\psi\colon U_0\times V_0\to W,\quad (x,y)\mapsto (x,f_x(y))$$

是一个 C^k-微分同胚。

证明使用以下引理的(a)部分。

引理2.3.35。设 E是一个局部凸空间，$(F,\|\cdot\|)$是一个赋范空间，$U\subseteq E$是一个具有稠密内部的局部凸子集，$V\subseteq F$是一个开子集，且 $f\colon U\times V\to F$是一个函数。记 $f_x := f(x,\cdot)\colon V\to F$为$x\in U$。假设

(a) f 是 C^2；或者(b) F 是有限维的，且 f 是 C^1 (或至少 $C^{0,1}$)；或者 (c) E 是可赋范的，且 f 是 FC^1。

那么 $g\colon U\times V\to\mathcal{L}(F)_b$, $(x,y)\mapsto (f_x)'(y)$是一个连续映射。

证明。(a) 见注 1.5.12。

(b) 设 $v_1,\dots,v_n$ 是 F 的一组基。根据习题 B.9.4(b)，映射

$$\varphi\colon \mathcal{L}(F)_b\to F^n,\quad \alpha\mapsto(\alpha(v_1),\dots,\alpha(v_n))$$

是拓扑向量空间同构。由于映射

$$\varphi\circ g = (d_2f(\cdot,v_1),\dots,d_2f(\cdot,v_n))\colon U\times V\to F^n \tag{2.62}$$

是连续的，因此 $g=\varphi^{-1}\circ(\varphi\circ g)$ 也是连续的。

(c) 由于 $\lambda\colon F\to E\times F$, $y\mapsto(0,y)$ 是连续线性的，映射

$$\mathcal{L}(\lambda,F)\colon \mathcal{L}(E\times F,F)_b\to\mathcal{L}(F)_b,\quad \alpha\mapsto\alpha\circ\lambda$$

以及 $g=\mathcal{L}(\lambda,F)\circ f'$ 都是连续的。 □

定理 2.3.34 的证明。我们可以假设 $F\neq\{0\}$，排除平凡情形。令 $\alpha := (f_{x_0})'(y_0)$ 和 $0<L<\frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$；因此

$$a := \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - L > 0.$$

根据引理 2.3.35(a)，存在一个开 x_0-邻域 $U_0\subseteq U$ 和 $r>0$，满足 $V_0 := B_r^F(y_0)\subseteq V$，使得

$$\big(\forall\,(x,y)\in U_0\times V_0\big)\ \|(f_x)'(y)-\alpha\|_{\mathrm{op}} = \|(f_x)'(y)-(f_{x_0})'(y_0)\|_{\mathrm{op}}\le L. \tag{2.63}$$

那么 $g_x\colon V_0\to F$, $y\mapsto f_x(y)-\alpha(y)$ 满足 $\|(g_x)'(y)\|_{\mathrm{op}}\le L$，对凸集 V_0 中的所有 y 均成立，因此根据引理 1.5.3，$\mathrm{Lip}(g_x)\le L$。

(a) 由于 $f_x|_{V_0} = \alpha+g_x$，定理 2.3.32 表明，$f_x(V_0)$ 在 F 中是开集，并且 $f_x|_{V_0}$: 对每个 $x\in U_0$，$V_0\to f_x(V_0)$ 都是一个 C^k-微分同胚。因此，(b) 中的映射 ψ 是单射。

(b) 设 $\overline{x} \in U_0$ 和 $\overline{y} \in V_0$。我们证明，W 包含 $U_0 \times F$ 中 $(x, f_x(y))$ 的一个邻域 Ω，并且 ψ^{-1} 在此邻域上是 C^k。令 $0 < t < r - \|y - y_0\|$ 和 Q 为 U_0 中 x 的一个开邻域，使得

$$f_x(\overline{y}) \in \overline{B}^F_{at/2}(f_{\overline{x}}(\overline{y})) \quad \text{for all } x \in Q. \tag{2.64}$$

Then

$$\overline{B}^F_{at}(f_x(\overline{y})) \supseteq \overline{B}^F_{at/2}(f_{\overline{x}}(\overline{y})) \quad \text{for all } x \in Q,$$

由 (2.64) 和三角不等式可得。因此

$$f_x(V_0) \supseteq f_x(\overline{B}^F_t(\overline{y})) \supseteq \overline{B}^F_{at}(f_x(\overline{y})) \supseteq \overline{B}^F_{at/2}(f_{\overline{x}}(\overline{y}))$$

对于 $x \in Q$，利用定理 2.3.32(e) 和注 2.3.33 可得第二个包含关系。因此

$$\Omega := Q \times \overline{B}^F_{at/2}(f_{\overline{x}}(\overline{y})) \subseteq W.$$

为证明 $\psi^{-1}|_\Omega$ 是 C^k，回顾定理 2.3.32(e) 的证明可知，$(f_x|_{V_0})^{-1}(c)$是压缩映射的唯一不动点

$$h_{x,c} \colon \overline{B}^F_t(\overline{y}) \to \overline{B}^F_t(\overline{y}), \quad z \mapsto z - \alpha^{-1}(f_x(z) - c)$$

对于 $x \in Q$ 和 $c \in \overline{B}^F_{at}(f_{\overline{x}}(y))$，它满足 $\operatorname{Lip}(h_{x,c}) \le L\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}$。由前述可知，$(h_{x,c})_{(x,c)\in\Omega}$ 是一致压缩映射族，其一致压缩常数为 $L\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} < 1$。由于映射

$$h \colon \Omega \times \overline{B}^F_t(\overline{y}) \to \overline{B}^F_t(\overline{y}), \quad (x, c, z) \mapsto z - \alpha^{-1}(f(x, z) - c)$$

是 C^k，命题 2.3.27(a) 表明，不动点 $(f_x|_{V_0})^{-1}(c) \in F$ 是 $(x, c) \in \Omega$ 的一个C^k-函数。□

注 2.3.36。由于定理 2.3.34(b) 中的 W 是开集，它包含 $Q \times Z$，其中 x_0 是开邻域，$Q \subseteq U_0$ 是 $Z \subseteq F$ 的开邻域（$f_{x_0}(y_0)$）。因此，将 U_0 替换为 Q 后，我们可以假设

$$U_0 \times Z \subseteq W.$$

因此，对所有 $x \in U_0$，都有 $Z \subseteq f_x(V_0)$，并且映射

$$U_0 \times Z \to V_0, \quad (x, z) \mapsto (f_x|_{V_0})^{-1}(z)$$

是 C^k（因为它是 C^k-映射 $\psi^{-1}|_{U_0\times Z}\colon U_0 \times Z \to U_0 \times V_0$ 的第二个分量）。

注 2.3.37。(a) 若存在一个开 x_0-邻域 $U_0 \subseteq U$ 和 $r > 0$，满足 $V_0 := B^F_r(y_0) \subseteq V$，则定理 2.3.34 对 $k = 1$ 也成立。

$$L := \sup_{(x,y)\in U_0\times V_0} \|(f_x)'(y) - (f_{x_0})'(y_0)\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{\|(f_{x_0})'(y_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}. \tag{2.65}$$

如果 F 是有限维的，或者 E 可赋范且 f 是 FC^1，则该条件自动成立（分别参见引理2.3.35(b) 和 (c)）。若假设 (2.65)，则 (2.63) 成立，并且可以逐字重复定理 2.3.34 证明的其余部分。

(b) 如果 E 可赋范且 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，那么在定理 2.3.34 的所有假设和结论中，我们都可以用 FC^k-映射替换 C^k-映射。事实上，我们刚刚注意到，当 f 是 FC^k（因此也是 FC^1）时，(2.63) 成立。现在可以重复定理 2.3.34 的证明，将 FC^k 替换为 C^k，并用命题 2.3.27(b) 替代命题 2.3.27(a)。

(c) 如果定理 2.3.34 中的 $U \subseteq E$ 是开集，那么在该定理的所有假设和结论中，我们都可以用 $\mathbb{K}$-解析映射替换 C^k-映射。如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，这显然成立，因为定义在开子集上的映射是 $\mathbb{K}$-解析的，当且仅当它是 $C^\infty_{\mathbb{C}}$（见定理 2.1.12）。如果 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$且 f 是实解析的，缩小 U 和 V后，我们可以假设 f 有一个复解析延拓

$$\widetilde{f}\colon \widetilde{U} \times \widetilde{V} \to F_{\mathbb{C}},$$

其中 $U \subseteq E_{\mathbb{C}}$ 是一个开 x_0邻域，而 $V \subseteq F_{\mathbb{C}}$ 是一个开 y_0-邻域。由于 $(f_{x_0})'(y_0) = (f_{x_0})'(y_0)_{\mathbb{C}} \in \mathrm{GL}(F_{\mathbb{C}})$，定理 2.3.34 给出了一个开 x_0 $U_0 \subseteq U$ y_0 $V_0 \subseteq V$邻域和一个开-邻域，使得 $W := \bigcup_{x \in \widetilde{U}_0} \{x\} \times f_x(V_0)$ 在 $E_{\mathbb{C}} \times F_{\mathbb{C}}$ 中是开集，并且

$$\widetilde{\psi}\colon \widetilde{U}_0 \times \widetilde{V}_0 \to \widetilde{W}, \quad (x, y) \mapsto \widetilde{f}_x(y)$$

是一个复解析微分同胚。将定理 2.3.34 应用于 C^∞-映射$f|_{(U\cap\widetilde{U}_0)\times(V\cap\widetilde{V}_0)}$，我们得到定理中所述的一个开 x_0邻域 $U_0 \subseteq U \cap U_0$以及一个开 y_0邻域 $V_0 \subseteq V \cap V_0$。由于 ψ 是 ψ 的复解析延拓，而 $\widetilde{\psi}^{-1}$ 是 ψ^{-1}的复解析延拓，因此 ψ 和 ψ^{-1} 是实解析的。因此，ψ 是一个实解析微分同胚。由于 $(f_x|_{\widetilde{V}_0})^{-1}$ 是 $(f_x|_{V_0})^{-1}$的复解析延拓，因此对所有 $x \in U_0$，$(f_x|_{V_0})^{-1}$ 都是实解析的，从而 $f_x|_{V_0}\colon V_0 \to f_x(V_0)$ 是一个实解析微分同胚。

在定理 2.3.34 及其关于注 2.3.37(c) 中所述解析函数的类似定理中选取 $E = \{0\}$ 和 $x_0 = 0$，便可得到 C^k-映射和 $\mathbb{K}$-解析映射的逆映射定理:

推论 2.3.38。设 F 是 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的巴拿赫空间，且 $f\colon V \to F$ 是定义在开子集 $V \subseteq F$ 上的映射。假设 f 对某个 $k \in \{2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$（分别为 $\mathbb{K}$- 解析）是 C^k。设 $y_0 \in V$ 使得 $f'(y_0)\colon F \to F$ 可逆。则存在一个开 y_0-邻域 $V_0 \subseteq V$，使得 $f(V_0)$ 在 F 中是开集，并且 $f|_{V_0}\colon V_0 \to f(V_0)$ 是一个 C^k-微分同胚（分别为一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚）。□

注 2.3.39。当存在一个 y_0-邻域 $V_0 \subseteq V$ 满足以下条件时，推论 2.3.38 对 $k = 1$ 仍然成立：

$$\sup\{\|f'(y) - f'(y_0)\|_{\mathrm{op}} \colon y \in V_0\} < \frac{1}{\|f'(y_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}}$$

（参见注 2.3.37(a)）。如果没有这样的附加条件，反函数定理对于 C^1-映射可能不成立，见练习 2.3.12。

隐函数定理也可立即由定理 2.3.34 推出。

定理 *2.3.40*。设 E 是一个局部凸空间，F 是 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的巴拿赫空间，$U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且 $V \subseteq F$ 是一个开子集。设 $f\colon U \times V \to F$ 是一个 C^k- 映射，满足 $k \in \{2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$（相应地，是一个 $\mathbb{K}$- 解析映射），并且 $(x_0, y_0) \in U \times V$，使得 $f(x_0, y_0) = 0$ 且 $(f_{x_0})'(y_0)\colon F \to F$ 可逆，其中 $f_x := f(x, \cdot)\colon V \to F$ 对于 $x \in U$ 成立。那么存在一个开 x_0-邻域 $U_0 \subseteq U$、一个开 y_0-邻域 $V_0 \subseteq V$ 以及一个 C^k-函数（相应地，$\mathbb{K}$-解析函数）$\varphi\colon U_0 \to V_0$，使得

$$\{(x, y) \in U_0 \times V_0 \colon f(x, y) = 0\} = \operatorname{graph}(\varphi). \tag{2.66}$$

证明。令 U_0、V_0、W 和 ψ 如定理 2.3.34 中所述；正如注 2.3.36 中所指出的，我们可以假设，对于某个开零邻域 $Z \subseteq F$，$U_0 \times Z \subseteq W$。因此，对于每个 $x \in U_0$，$f_x|_{V_0}$ 都有一个零点 $\varphi(x) \in V_0$；由于 $f_x|_{V_0}$ 是单射，该零点唯一。由于

$$\psi(x, \varphi(x)) = (x, 0),$$

我们看到，$\varphi(x)$ 是 $\psi^{-1}(x, 0) \in U_0 \times V_0$ 的第二分量，因此（与 $\psi^{-1}(x, 0)$ 一样）是关于 $x \in U_0$ 的一个 C^k-函数（分别是一个 $\mathbb{K}$-解析函数，参见注 2.3.37(c)）。□

注 2.3.41。如果假设存在一个开 x_0-邻域 $U_0 \subseteq U$ 和 $r > 0$，满足 $V_0 := B_r^F(y_0) \subseteq V$，使得 (2.65) 成立，那么定理 2.3.40 对 $k = 1$ 也成立。事实上，在这种情况下，可以重复前面的证明，使用注 2.3.37(a) 中所述的定理 2.3.34 的 C^1-版本。

定理的证明 2.3.21。将定理 2.3.34 替换为注 2.3.37(b) 中所述的 FC^k 变体后，我们可以逐字重述定理 2.3.40 的证明。□

全局反函数定理

定理 2.3.32 立即推出一个全局反函数定理。

定理 2.3.42。设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，$\alpha \in$ 一般线性群(E) 且 $g\colon E \to E$ 是利普希茨的，满足

$$\mathrm{Lip}(g) < \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}.$$

那么 $f := \alpha + g$: $E \to E$ 是一个同胚，且逆映射f^{-1}: $E \to E$是利普希茨的，满足

$$\mathrm{Lip}(f^{-1}) \le a^{-1} \quad for \quad a := \frac{1}{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}(g). \tag{2.67}$$

此外， $h := f^{-1} - \alpha^{-1}$是利普希茨的， $f^{-1} = \alpha^{-1} + h$并且

$$\mathrm{Lip}(h) \le \frac{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \mathrm{Lip}(g)}{a}. \tag{2.68}$$

如果对于某个 $k \in \mathbb{N}$（（分别地， FC^k，分别地， $\mathbb{K}$-解析）），g是 C^k，那么 f^{-1}也具有C^k（（分别地， FC^k，分别地， $\mathbb{K}$-解析））。

证明。设 $L := \mathrm{Lip}(g)$， $g_r := g|_{B_r^E(0)}$ 且 $f_r := f|_{B_r^E(0)}$，其中 $r > 0$。将定理 2.3.32 应用于 g_r 和 f_r，可知 f_r 是单射，且

$$\mathrm{Lip}((f_r)^{-1}) \le a^{-1} \tag{2.69}$$

并且 $\mathrm{im}(f_r) \supseteq B_{ar}^E(f(0))$（另见注 2.3.33）。给定 E中的 $x \neq y$，对于某个 $r > 0$，有 $x, y \in B_r^E(0)$，从而得到 $f(x) = f_r(x) \neq f_r(y) = f(y)$；因此 f 是单射。由于对于 $r > 0$，集合 $B_{ar}^E(f(0))$ 覆盖了 E，可知 f 是满射。给定 $x, y \in E$，对于某个 $r > 0$，有 $x, y \in \mathrm{im}(f_r)$。由于

$$\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| = \|(f_r)^{-1}(x) - (f_r)^{-1}(y)\| \le \mathrm{Lip}((f_r)^{-1})\|x - y\|,$$

由（2.69）可推出（2.67）成立。同理，由估计可得（2.68）

$$\mathrm{Lip}((f_r)^{-1} - \alpha^{-1}) \le \frac{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} L}{a}$$

（这是注 2.3.33 中所述的（2.58）的类似结果）。若 g 分别是 C^k 和 FC^k，则对每个 $r > 0$，$(f_r)^{-1}$ 分别是 C^k 和 FC^k（见定理 2.3.32），因此 f^{-1}是 C^k（分别为 FC^k）。若 g是实解析的，则 $f'(x)$ 的可逆性意味着 f 在 x处是局部解析微分同胚（见推论 2.3.38），因此 f^{-1} 在 $f(x)$ 的某个开邻域上是实解析的。因此， f^{-1}是实解析的。□

若在定理 2.3.42 的情形下， g 是 C^1，则

$$f'(x) = \alpha + g'(x) = \alpha \circ (\mathrm{id}_E + \alpha^{-1} \circ g'(x))$$

对所有 $x \in E$ 都可逆

$$\|\alpha^{-1} \circ g'(x)\|_{\mathrm{op}} \le \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \|g'(x)\|_{\mathrm{op}} \le \|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \mathrm{Lip}(g) < 1.$$

此外，

$$\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le \|(\mathrm{id}_E + \alpha^{-1}\circ g'(x))^{-1}\|_{\mathrm{op}}\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le \frac{\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}}{1-\|\alpha^{-1}\|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{Lip}(g)}$$

是 x 的有界函数（第二个估计用到了习题 1.3.9(c)）。因此，定理 2.3.42 的主要结论（即 f 是一个双射）是下述 Hadamard 全局反函数定理版本的特殊情形；我们在此提及它以确保内容完整。初次阅读时，我们建议跳过证明，因为在微分同胚群的李理论研究中，定理 2.3.42 通常已经足够。

定理 2.3.43. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，且 $q\colon E \to E$ 是一个局部C^1-微分同胚，满足

$$L := \sup_{x\in E} \|q'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} < \infty. \tag{2.70}$$

那么 $q(E) = E$ 且 q 是一个C^1-微分同胚。

我们将使用一个关于提升唯一性的事实。回忆一下，若拓扑空间之间的映射 $q\colon X \to Y$ 满足：对每个 $x \in X$，都存在一个开邻域 $V \subseteq X$，使得 $q(V)$ 在 Y 中是开集，且 $q|_V\colon V \to q(V)$ 是一个同胚，则称该映射为局部同胚。

引理 2.3.44. 设 $q\colon Z \to Y$ 是拓扑空间之间的一个局部同胚。设 X 是一个拓扑空间，且 $\gamma\colon X \to Z$ 和 $\eta\colon X \to Z$ 是连续映射，满足

$$q\circ\gamma = q\circ\eta.$$

若 X 是连通的，Z 是豪斯多夫空间，且对某个 $x_0 \in X$ 有 $\gamma(x_0) = \eta(x_0)$，则$\gamma = \eta$。

证明。集合 $E := \{x \in X\colon \gamma(x) = \eta(x)\}$ 是闭集（因为 γ 和 η 连续，且 Z 是豪斯多夫的），并且非空，因为 $x_0 \in E$。如果我们能证明 E 是开集，那么由于 X 是连通的，$E = X$，从而 $\gamma = \eta$。给定 $x \in E$，取 $V \subseteq Z$ 为 $\gamma(x) = \eta(x)$的一个邻域，使得 $q|_V$ 是单射。由于 γ 和 η 连续，存在一个 x-邻域 $U \subseteq X$，使得 $\gamma(U) \subseteq V$且 $\eta(U) \subseteq V$。现在由 $q|_V \circ \gamma|_U = q|_V \circ \eta|_U$可得 $\gamma|_U = \eta|_U$，于是 $U \subseteq E$。因此，E 是 X 中 x 的一个邻域，从而 E 是开集。□

引理 2.3.45. 设 X、Y 和 Z 是局部凸空间，$U \subseteq X$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$V \subseteq Y$ 和 $W \subseteq Z$ 是开子集，且 $q\colon W \to V$ 是一个 C^k-微分同胚；若 $k = \omega$，则假设 $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$ 和 U 在 X 中是开集。若 $\gamma\colon U \to W$ 是连续映射，且 $q\circ\gamma$ 是 C^k，那么 γ 也是 C^k，并且

$$\gamma'(x) = q'(\gamma(x))^{-1}\circ(q\circ\gamma)'(x) \quad \textit{for all } x \in U. \tag{2.71}$$

证明. 给定 $x \in U$，设 $W_0 \subseteq W$ 是 $\gamma(x)$ 的一个开邻域，使得 $q(W_0)$ 在 Y 中是开集，且 $q|_{W_0}\colon W_0 \to q(W_0)$ 是一个 C^k-微分同胚。设 $U_0 \subseteq U$ 是 x 的一个开邻域，使得 $\gamma(U_0) \subseteq W_0$。于是

$$\gamma|_{U_0} = (q|_{W_0})^{-1} \circ (q \circ \gamma)|_{U_0} \tag{2.72}$$

是 C^k（因此也是 γ）。将链式法则应用于 (2.72)，并利用 $y{:=}\gamma(x)$，在

$$((q|_{W_0})^{-1})'(q(y)) = q'(y)^{-1} \quad \text{for all } y \in W_0, \tag{2.73}$$

我们得到 (2.71)。 □

命题 2.3.43 的关键在于 C^1-曲线的提升存在性，以及此类提升之间同伦的存在性。

引理 2.3.46。在定理 2.3.43 的情形下，以下结论成立：

(a) 若 $\gamma\colon [0,1] \to E$ 是一条 C^1-曲线，且 $z_0 \in E$ 满足 $q(z_0) = \gamma(0)$，则存在一条 C^1-曲线 $\eta\colon [0,1] \to E$，使得 $q \circ \eta = \gamma$ 且 $\eta(0) = z_0$。*(b)* 若 $F\colon [0,1] \times [0,1] \to E$ 是一个 C^1-映射，且 $z_0 \in E$ 满足 $q(z_0) = F(0,0)$，则存在一个 C^1-映射 $G\colon [0,1] \times [0,1] \to E$，使得 $q \circ G = F$ 且 $G(0,0) = z_0$。

证明。 (a) 设 $r \in [0,1[$ 和 $\eta\colon [0,r] \to E$ 为连续映射，满足 $q \circ \eta = \gamma|_{[0,r]}$ 且 $\eta(0) = z_0$（若取 $r := 0$，则总能实现这种情形）。存在 $\eta(r)$ 的一个开邻域 $W_0 \subseteq E$，使得 $q(W_0)$ 在 E 中是开集，且 $q|_{W_0}\colon W_0 \to q(W_0)$ 是一个同胚。由于 $q(W_0)$ 是 $q(\eta(r)) = \gamma(r)$ 的一个邻域，存在 $\rho \in]r,\ 1]$，使得 $\gamma([r,\rho]) \subseteq q(W_0)$。令

$$\eta(t) := (q|_{W_0})^{-1}(\gamma(t))$$

对于 $t \in [r,\rho]$，我们得到 η 的一个连续延拓，它是到映射 $[0,\rho] \to E$ 的延拓，并满足 $\eta(0) = z_0$ 且 $q \circ \eta = \gamma|_{[0,\rho]}$。

由前述内容可知，对于某个 $r \in]0,\ 1]$ 存在一个连续映射 $\eta_r\colon [0,r[\to E$，使得 $q \circ \eta_r = \gamma|_{[0,r[}$ 且 $\eta_r(0) = z_0$。引理 2.3.44 意味着 r 可以取为极大的。令

$$M := \max\{\|\gamma'(t)\|\colon t \in [0,r]\}.$$

引理 2.3.45 意味着 η_r 是 C^1，其中

$$\|\eta_r'(t)\| = \|(q(\eta_r(t))')^{-1}(\gamma'(t))\| \le LM$$

对所有 $t \in [0,r[$ 均成立。因此，η_r 是利普希茨连续的（参见引理 1.5.3），故一致连续。由于 $(E,\ \|\cdot\|)$ 是完备的，η_r 有一个一致连续延拓 $\eta\colon [0,r] \to E$。于是 $q \circ \eta = \gamma|_{[0,r]}$，因为等式在稠密子集 $[0,r[$ 上成立。若有 $r < 1$，则可将 η 延拓至某个 $[0,\rho]$，其中 $\rho \in]r,\ 1]$（如证明开头所示），这与

r 的极大性矛盾。因此 $r = 1$，只需注意到 η 是 C^1，由引理 2.3.45 即得。

(b) 设 $B_\varepsilon(s,t) := \{(a,b) \in [0,1]^2 \colon |a-s|, |b-t| < \varepsilon\}$ 对于 $(s,t) \in [0,1]^2$ 和 $\varepsilon > 0$。设 $r \in [0,1[$ 和 $G \colon [0,r] \times [0,1] \to E$ 是一个连续映射，使得 $q \circ G = F|_{[0,r]\times[0,1]}$ 且 $G(0,0) = z_0$（由 (a) 可知，取 $r := 0$ 即可总能达到这种情形）。对于每个 $t \in [0,1]$，存在 $G(r,t)$ 的一个开邻域 $W_t \subseteq E$，使得 $q(W_t)$ 在 E 中是开集，且 $q|_{W_t} \colon W_t \to q(W_t)$ 是一个同胚。由于 $q(W_t)$ 是 $q(G(r,t)) = F(r,t)$ 的一个邻域，因此存在 $\varepsilon_t > 0$，使得对于 $V_t := B_{\varepsilon_t}(r,t)$，$F(V_t) \subseteq q(W_t)$ 成立。然后

$$G^t := (q|_{W_t})^{-1} \circ F|_{V_t}$$

是一个连续映射，在凸集（因此也是连通集）$V_t \cap ([0,r] \times [0,1])$上与 G 一致，其中 $G^t(r,\ t) = G(r,\ t)$（见引理 2.3.44）。若$t,\ \tau \in [0,1]$ 且 $V_t \cap V_\tau \neq \emptyset$，则 $V_t \cap V_\tau$ 与凸集

$$\{a \in [0,1] \colon |a-r| < \min\{\varepsilon_t, \varepsilon_\tau\}\} \times \{b \in [0,1] \colon |b-t| < \varepsilon_t \text{ and } |b-\tau| < \varepsilon_\tau\},$$

一致，该凸集对某个 $b \in [0,1]$包含$(r,\ b)$。由于 $G^t(r,\ b) = G(r,\ b) = G^\tau(r,\ b)$，引理 2.3.44 表明 $G^t|_{V_t\cap V_\tau} = G^\tau|_{V_t\cap V_\tau}$。利用华莱士引理（引理 A.4.3），我们找到 $\rho \in]r,\ 1]$ 使得

$$[0,\rho] \times [0,1] \subseteq ([0,r] \times [0,1]) \cup \bigcup_{t\in[0,1]} V_t = ([0,r[\times [0,1]) \cup \bigcup_{t\in[0,1]} V_t.$$

于是 $G(a,\ b) := G^t(a,\ b)$ 对 $t \in [0,1]$ 成立，而$(a,\ b) \in V_t \cap ([0,\rho] \times [0,1])$ 定义了 G 的一个连续延拓，得到映射 $[0,\rho] \times [0,1] \to E$，使得 $q \circ G = F|_{[0,\rho]\times[0,1]}$。

根据上述内容，对于某个 $r \in]0,1]$，存在一个连续映射$G_r \colon [0,r[\times [0,1] \to E$，使得 $q \circ G_r = F|_{[0,r[\times[0,1]}$ 且 $G_r(0,0) = z_0$。引理 2.3.44 表明，可以将 r 选为极大的。令

$$M := \max\{\|F'(s,t)\|_{\mathrm{op}} \colon (s,t) \in [0,r] \times [0,1]\}.$$

引理 2.3.45 表明，G_r 是 C^1，其中

$$\|G_r'(s,t)\|_{\mathrm{op}} = \|q'(G_r(s,t))^{-1} \circ F'(s,t)\|_{\mathrm{op}} \leq LM$$

对所有 $(s,t) \in [0,r[\times [0,1]$ 都成立。因此，G_r 是利普希茨的（见引理 1.5.3），因而一致连续。由于 $(E, \|\cdot\|)$ 是完备的，G_r 有一个一致连续延拓 $G \colon [0,r] \times [0,1] \to E$。于是 $q \circ G = F|_{[0,r]\times[0,1]}$，因为等式在稠密子集 $[0,r[\times [0,1]$ 上成立。若有 $r < 1$，则对某个 $\rho \in]r,1]$，G 可以延拓至 $[0,\rho] \times [0,1]$（如前所示），这与 r 的极大性矛盾。因此 $r = 1$，接下来只需根据引理 2.3.45 观察到 G 是 C^1。□

定理2.3.43 的证明。为说明 q 是满射，令 $y \in E$。令 $z_0 \in E$，并考虑 C^1-曲线

$$\gamma\colon [0,1]\to E,\quad t\mapsto q(z_0)+t(y-q(z_0)).$$

令 $\eta\colon [0,1]\to E$ 如引理 2.3.46(a) 中所述。于是 $q\circ\eta=\gamma$，因此 $y=\gamma(1)=q(\eta(1))$ 属于 q 的像。

为证明 q 是单射，取满足 $q(z_0)=q(z_1)$ 的 z_0，$z_1\in E$。于是

$$\eta\colon [0,1]\to E,\quad t\mapsto z_0+t(z_1-z_0)$$

是从 z_0 到 z_1 的 C^1-曲线，因此 $\gamma:=q\circ\eta$ 是一个环路。利用 $x_0:=\gamma(0)=\gamma(1)$，考虑映射 C^1

$$F\colon [0,1]\times[0,1]\to E,\quad (s,t)\mapsto x_0+s(\gamma(t)-x_0).$$

由引理 2.3.46(b)，存在一个 C^1-映射 $G\colon [0,1]\times[0,1]\to E$，使得

$$q\circ G=F\quad\text{and}\quad G(0,0)=z_0.$$

由于对所有 $t\in[0,1]$，$F(0,t)=x_0$，由引理 2.3.44 可知，对所有 t，必有 $G(0,t)=z_0$。同理，$F(s,0)=F(s,1)=x_0$ 且 $G(0,0)=G(0,1)=z_0$，这意味着对所有 $s\in[0,1]$，$G(s,0)=G(s,1)=z_0$。但是，对所有 $t\in[0,1]$，$F(1,t)=\gamma(t)$，且 $G(1,0)=z_0$，这意味着对所有 $t\in[0,1]$，$G(1,t)=\eta(t)$。因此$z_1=\eta(1)=G(1,1)=z_0$。□

第 2.3 节习题

练习 2.3.1. 设 n，$m\in\mathbb{N}$，令 $(E_j,\ \|\cdot\|_j)$ 为 $j\in\{1,\dots,n+m\}$ 上的赋范空间，且 $(F,\|\cdot\|_F)$ 也是赋范空间。

(a) 证明，对于 $E_1\times\cdots\times E_n$ 中的所有 $x=(x_1,\dots,x_n)$ 和 $\beta\in\mathcal{L}^{n+m}(E_1,\dots,E_{n+m};F)$，有 $\beta^\vee(x):=\beta(x,\cdot)\in\mathcal{L}^m(E_{n+1},\dots,E_{n+m};F)$，其中

$$\|\beta^\vee(x)\|_{\mathrm{op}}\le\|\beta\|_{\mathrm{op}}\|x_1\|_1\dots\|x_n\|_n.$$

证明 $\beta^\vee\in\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;\mathcal{L}^m(E_{n+1},\dots,E_{n+m};F))$ 以及 $\|\beta^\vee\|_{\mathrm{op}}=\|\beta\|_{\mathrm{op}}$。

(b) 设 ε_n 是求值映射，其定义域为

$$\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;\mathcal{L}^m(E_{n+1},\dots,E_{n+m};F))\times E_1\times\cdots\times E_n$$

值域为 $\mathcal{L}^m(E_{n+1},\dots,E_{n+m};F)$；根据注 2.3.9，这是一个连续的 $(n+1)$-线性映射。设 $\delta_m\colon \mathcal{L}^m(E_{n+1},\dots,E_{n+m};F)\times E_{n+1}\times\cdots\times E_{n+m}\to F$ 为求值映射，它是连续的 $(m+1)$-线性映射。定义

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}(x_1,\dots,x_{n+m}) &:= \beta(x_1,\dots,x_n)(x_{n+1},\dots x_{n+m})\\ &= \delta_m(\beta(x_1,\dots,x_n),x_{n+1},\dots,x_{n+m})\\ &= \delta_m(\varepsilon_n(\beta,x_1,\dots,x_n),x_{n+1},\dots,x_{n+m})\end{aligned}$$

对于集合 $E_1\times\cdots\times E_{n+m}$ 中的 $\beta\in\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;\mathcal{L}^m(E_{n+1},\dots,E_{n+m};F))$ 和 $(x_1,\dots,x_{n+m})$，证明 $\widehat{\beta}\in\mathcal{L}^{n+m}(E_1,\dots,E_{n+m};F)$ 和 $(\widehat{\beta})^\vee=\beta$。

由 (a) 和 (b)，映射

$$\Phi\colon \mathcal{L}^{n+m}(E_1,\dots,E_{n+m};F)\to\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;\mathcal{L}^m(E_{n+1},\dots,E_{n+m});F),\ \beta\mapsto\beta^\vee$$

是一个等距同构，其逆映射由 $\Phi^{-1}(\beta)=\widehat{\beta}$ for $\beta\in\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;\ \mathcal{L}^m(E_{n+1},\dots,E_{n+m};F))$. 给定巴拿赫空间 $(F,\|\cdot\|_F)$。

(c) 利用一个众所周知的事实：对于每个赋范空间 $(E,\|\cdot\|_E)$，$(\mathcal{L}(E,F)\ \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ 都是巴拿赫空间。证明对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 以及所有赋范空间 $(E_1,\|\cdot\|_1)\dots,(E_n,\|\cdot\|_n)$，$(\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;\ F)\ \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ 都是巴拿赫空间。

习题 2.3.2. 设 $(E,\|\cdot\|_E)$ 和 $(F,\|\cdot\|_F)$ 是赋范空间，且 $U\subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集。我们将按照定义 2.3.1 的要求，在这一更一般的情形下定义 f 在 $x\in U$ 处的全微分性。

(a) 证明：如果 f 在 $x\in U$ 处全微分，那么 f 在 x 处连续，并且 $f'(x)\in\mathcal{L}(E,F)$ 唯一确定。(b) 证明：f 是 FC^1，当且仅当 f 在每个 $x\in U$ 处全微分，且映射 $f'\colon U\to\mathcal{L}(E,\ F),\ x\mapsto f'(x)$ 连续。[关于该条件的必要性，请参见引理 2.3.12 的证明。]

习题 2.3.3。设 $(E,\ \|\cdot\|_E)$ 和 $(F,\ \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间，$U\subseteq E$ 是一个内部稠密的任意子集。我们称映射 $f\colon U\to F$ 是 FC^1，如果存在一个连续映射 $f'\colon U\to\mathcal{L}(E,\ F)$，使得对每个 $x\in U$，映射 f 都存在一个满足 (2.27) 的线性近似 (2.26)，如定义 2.3.1 所述。

(a) 证明，若 $f\colon U\to F$ 是 FC^1，则 f' 唯一。此外，f 在每个 $x\in U$ 处连续。(b) 假设 $(Y,\|.\|_Y)$ 也是一个赋范空间，$V\subseteq F$ 是一个具有稠密内部的子集，且 $f(U)\subseteq V$，并且 f 和映射 $g\colon V\to Y$ 都是 FC^1。证明 $g\circ f\colon U\to Y$ 是 FC^1，且对所有 $x\in U$，有 $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\circ f'(x)$。

习题 2.3.4。（不动点的唯一性）。设 (X,d) 是一个度量空间，$U\subseteq X$ 是一个子集，$f\colon U\to X$ 是一个映射，满足 $\theta:=\mathrm{Lip}(f)<1$ 且 $x,y\in U$，并且 $f(x)=x$ 和 $f(y)=y$。证明 $x=y$。

习题 2.3.5。设 (X,d) 是一个度量空间，$U\subseteq X$ 是一个开子集，P 是一个拓扑空间，且 $f\colon P\times U\to X$ 是一个连续映射，使得映射 $f_p:=f(p,\cdot)\colon U\to X$ 满足

$$\theta:=\sup\{\mathrm{Lip}(f_p)\colon p\in P\}<1.$$

设 P_0 为所有满足以下条件的 $p\in P$ 的集合：f_p 有一个不动点 x_p（根据前一道习题，该不动点必然是唯一的）。

(a)（化归为自映射）。给定 $p\in P_0$，设 $\varepsilon>0$ 使得 $V:=B_\varepsilon^d(x_p)\subseteq U$。设 $Q\subseteq P$ 为 p 的一个邻域，使得对所有 $q\in Q$，有 $d(f(q,x_p)\ x_p)\leq(1-\theta)\varepsilon$。证明对所有 $q\in Q$，有 $f_q(V)\subseteq V$。(b) 若 (X,d) 完备，则由 (a) 推出 P_0 在 P 中是开的，并利用命题 2.3.26(a) 可知映射 $\varphi\colon\ P_0\to U,\ p\mapsto x_p$ 是连续的。

习题 2.3.6. 设 P为局部凸空间 E的一个开子集。设 V为巴拿赫空间$(F,\|\cdot\|)$的一个开子集，且 $f\colon\ P\times V\to V$为实解析映射。对 $p\in P$记 $f_p\colon=f(p,\cdot)\colon\ V\to V$，并假设$(f_p)_{p\in P}$是一致压缩映射族。设 P_0为所有使 f_p具有不动点 x_p的 $p\in P$所成之集。由前一道习题， P_0在 P中是开的。证明映射 $\varphi\colon\ P_0\to V$， $p\mapsto x_p$是实解析的。

[对所有 $p\in P$ 和 $x\in V$，都有 $\|f_p'(x)\|_{\mathrm{op}}<1$。对于 $p\in P_0$，不动点 x_p 是方程 $x-f(p,\ x)=0$ 的唯一解 x，这一点可以借助隐函数定理的实解析版本来讨论。]

习题 2.3.7. 设 E 是实向量空间， $\|\cdot\|$ 是其上的一个范数，令 $B:=B_1^E(0)$ 为开单位球。回顾一下， $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|\le 1\}$。在复向量空间 $E_{\mathbb{C}}$ 中，定义

$$U:=\mathrm{absconv}(B)=\mathrm{conv}(\mathbb{D}B).$$

(a) 由于 $\mathbb{D}B\subseteq B+iB$ 且后一个集合是凸集，我们有

$$U\subseteq B+iB. \tag{2.74}$$

推得 $U\cap E\subseteq B$，从而 $U\cap E=B$。

(b) 为了证明 U是开集，设 $x\in U$，存在 $n\in\mathbb{N}$, $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{D}$, $x_1,\dots,x_n\in B$ 以及 $t_1,\dots,t_n\ge 0$ 使得 $x=t_1z_1x_1+\cdots+t_nz_nx_n$。由于 B是开集，存在 $r>1$ 使得 $rx_1,\dots,rx_n\in B$。推导出 $rx\in U$，并结合引理 B.1.3(d) 得出 $x\in U^0$。

(c) 证明 $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}iB\subseteq U$。(d) 从 (2.74) 和 (c) 推导出， U的闵可夫斯基泛函 $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}:=\mu_U$是复向量空间 $E_{\mathbb{C}}$ 上的一个范数，并且与实向量空间 $E_{\mathbb{C}}=E\oplus iE$ 上的最大范数等价（因此定义了乘积拓扑）。(e) 证明对每个 $x\in E$，都有 $\|x\|_{\mathbb{C}}=\|x\|$。(f) 设 $\|\cdot\|'$是复向量空间 $E_{\mathbb{C}}$ 上的任意范数，且对每个 $x\in E$都有 $\|x\|'=\|x\|$。设 C是 $(E,\|\cdot\|')$ 中的开单位球。证明 $B\subseteq C$, $U\subseteq C$ 和 $\|\cdot\|'\le\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$。我们称 $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$为 $\|\cdot\|$的 *maximal complexification*。(g) 另设 $(F,\|\cdot\|_F)$ 是 $\mathbb{R}$上的一个赋范向量空间，且 $\alpha\colon\ E\to F$是一个连续线性映射。证明，若将 $\alpha_{\mathbb{C}}\colon\ E_{\mathbb{C}}\to F_{\mathbb{C}}$, $x+iy\mapsto\alpha\ x\ +i\alpha\ y$ $E_{\mathbb{C}}$ $F_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$ ( ) ( ) 视为从 (, $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$) 到 (, ($\|\cdot\|_F$)) 的复线性映射，则 $\|\alpha_{\mathbb{C}}\|_{\mathrm{op}}=\|\alpha\|_{\mathrm{op}}$。(h) 设 $\beta\colon\ E_1\times E_2\to F$是 $\mathbb{R}$上的赋范向量空间与 $\beta_{\mathbb{C}}\colon(E_1)_{\mathbb{C}}\times(E_2)_{\mathbb{C}}\to F_{\mathbb{C}}$之间的一个连续双线性映射，且后者是它唯一的复双线性扩张。证明，在复化向量空间上采用极大复化范数时， $\|\beta_{\mathbb{C}}\|_{\mathrm{op}}=\|\beta\|_{\mathrm{op}}$ 成立。针对具有 $n\in\mathbb{N}$的连续 n-线性映射，表述并证明一个类似的结果。

习题 2.3.8. 设 P是局部凸空间 E的一个开子集。设 V是巴拿赫空间 $(F,\ \|\cdot\|)$ 的一个开子集，且 $f\colon\ P\times V\to F$是一个实解析映射。设 $p\in P$和 $x_p\in V$是映射 $f_p\colon=f(p,\ \cdot)$ 的不动点，满足 $\|f_p'(x_p)\|_{\mathrm{op}}<1$。缩小 p-邻域 $P\subseteq E$ 和 x_p-邻域 $V\subseteq F$后，我们可以假设 f有一个复解析延拓 $f\colon\ P\times V\to F_{\mathbb{C}}$，其中 $\widetilde{P}$ 是 $E_{\mathbb{C}}$ 中 P的一个开邻域， $\widetilde{V}$是 $F_{\mathbb{C}}$中 V的一个开邻域。

(a) 证明：必要时缩小邻域后，我们可以假设存在 $\theta \in [0,1[$，使映射 $f_q := f(q,\ \cdot)$: $V \to F$ 对所有 $(q,\ x) \in P \times V$ 都满足 $\|f_q'(x)\|_{\mathrm{op}} \le \theta$；并且映射 $\widetilde{f}_q := \widetilde{f}(q,\ \cdot)$: $\widetilde{V} \to F_{\mathbb{C}}$ 对所有 $(q,\ x) \in \widetilde{P} \times \widetilde{V}$ 都满足 $\|\widetilde{f}_q'(x)\|_{\mathrm{op}} \le \theta$。这里使用范数 $\|\cdot\|$ 在 $F_{\mathbb{C}}$ 上的极大复化 $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$。

(b) 此外，证明我们还可以做到：存在 $r > 0$，使得 $W := B_r^{F_{\mathbb{C}}}(x_p) \subseteq V$ 且 $\overline{W} := \overline{B_r^{F_{\mathbb{C}}}(x_p)} \subseteq V$，使得对所有 $q \in P$，$f_q(W) \subseteq W$；并且对所有 $q \in \widetilde{P}$，$\widetilde{f}_q(\overline{W}) \subseteq \widetilde{W}$。

(c) 由 (b) 可知，对于每个 $q \in P$，$f_q|_W$ 有唯一的不动点 $\varphi(q) := x_q$；对于每个 $q \in \widetilde{P}$，$\widetilde{f}_q|_{\overline{W}}$ 也有唯一的不动点 $\widetilde{\varphi}(q)$。利用命题 2.3.27~，证明 $\widetilde{\varphi}$: $P \to F_{\mathbb{C}}$ 是 $C_{\mathbb{C}}^\infty$，因而是复解析的，并推导出 φ: $P \to F$ 是实解析的。

将当前的另一种方法与习题 2.3.6 进行比较。

练习 2.3.9. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间，$U \subseteq E$ 是一个开子集。称函数 f: $U \to F$ 到赋范空间 $(F, \|\cdot\|_F)$ 在点 $x \in U$ 处 *strictly differentiable*，如果存在连续线性映射 $f'(x)$: $E \to F$，使得满足下述条件的唯一函数 R: $U \to F$ ...

$$(\forall y \in U)\ f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + R(y) \tag{2.75}$$

满足 $\mathrm{Lip}(R|_{B_r^E(x)}) \to 0$，当 $r \to 0$ 时。则 $R(x) = 0$，且 f 在 x 处全微分，其导数为 $f'(x)$，因此 $f'(x)$ 是唯一的。此外，

$$f(y) = \alpha(y) + g(y) \quad \text{for } y \in U \tag{2.76}$$

其中 $\alpha := f'(x)$ 且 $g(y) := f(x) - f'(x)(x) + R(y)$ 满足 $\mathrm{Lip}(g|_{B_r^E(x)}) = \mathrm{Lip}(R|_{B_r^E(x)}) \to 0$，当 $r \to 0$ 时。如果 f 在每个 $x \in U$ 处都严格可微，则称 f 为 *strictly differentiable*。

现设 $(E, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间，$x \in E$、$r > 0$ 且 f: $B_r^E(x) \to E$ 是在 x 处严格可微的函数，并有 $f'(x) \in$ 一般线性群(E)。证明：必要时缩小 r 后，$f|_{B_r^E(x)}$ 是到其像上的同胚，$f(B_r^E(x))$ 在 E 中为开集，且映射 f^{-1}: $f(B_r^E(x)) \to E$ 在 $f(x)$ 处严格可微，其导数为 $f'(x)^{-1}$。

[缩小 r 后，我们即处于定理 2.3.32 的情形。利用定理 2.3.32 中关于 $\mathrm{Lip}(h)$ 的估计 (2.58)，该估计在 $r \to 0$ 时趋于 0，可见 f^{-1} 在 $f(x)$ 处严格可微。]

练习 2.3.10. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 与 $(F, \|\cdot\|_F)$ 为赋范空间，且 $U \subseteq E$ 为开子集。

(a) 证明函数 f: $U \to F$ 严格可微，当且仅当 f 是 FC^1。[若 f 严格可微，则 f 在每个 $y \in U$ 处全微分；对 (2.75) 关于 y 求导，可得

$$f'(y) = f'(x) + R'(y) \quad \text{for all } y \in U,$$

其中 $\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} = \|R'(y)\|_{\mathrm{op}} \le \mathrm{Lip}(R|_{B_r^E(x)})$ 对于 $y \in B_r^E(x)$。反过来，如果 f 是 FC^1，那么根据引理 2.3.15，f 是严格可微的。]

(b) 将 (a) 与习题 2.3.9 结合，给出定理 2.3.20 中 FC^1 情形的另一种证明。

练习 2.3.11. 设 E 是一个局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集，F 是一个巴拿赫空间，且 $V \subseteq U \times F$ 是相对开集。设 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 满足 $k \geq 2$ 和 $f\colon V \to F$ 是一个 C^k-映射，并且对所有 $(x, y) \in V$，都有 $d_2 f(x, y, \cdot) \in$ 一般线性群(F)。证明：

(a) 若 $\gamma\colon U \to F$ 是一个连续函数，其图包含于 V，且对所有 $x \in U$ 都有 $f(x, \gamma(x)) = 0$，则 γ 是 C^k。(b) 若 U 连通，且 $\gamma, \eta\colon U \to F$ 是连续函数，其图包含于 V，并且

$$f(x, \gamma(x)) = f(x, \eta(x)) = 0$$

对所有 $x \in U$ 都成立，且对某个 $x_0 \in U$，$\gamma(x_0) = \eta(x_0)$，则 $\gamma = \eta$。

练习 2.3.12. 在本习题中，$L^1[0,1]$ 表示等价类 $[\gamma]$（模去几乎处处为零的函数）的巴拿赫空间，这些等价类由关于勒贝格–博雷尔测度可积的可测函数$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 组成。此外，$L^\infty[0,1]$ 是本性有界可测函数 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$的等价类空间。照例，我们在记号中不区分函数与等价类。众所周知，$L^1[0,1]' \cong L^\infty[0,1]$；该同构将 $\theta \in L^\infty[0,1]$ 映为连续线性泛函

$$\lambda_\theta\colon L^1[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto \int_{[0,1]} \theta(x)\gamma(x)\,dx.$$

(a) 证明 $f(\gamma) := \sin \circ \gamma \in L^1[0,1]$ 对所有 $\gamma \in L^1[0,1]$成立。(b) 证明 $f\colon L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ 是利普希茨连续的，且$\mathrm{Lip}(f) \leq 1$。同样的推理是否适用于 $g(\gamma) := \cos \circ \gamma$? (c) 对于 $\gamma \in L^\infty[0,1]$，证明线性映射

$$m_\gamma\colon L^1[0,1] \to L^1[0,1], \quad \eta \mapsto \gamma\eta$$

其中 $(\gamma\eta)(x) := \gamma(x)\eta(x)$ 连续，且 $\|m_\gamma\|_{\mathrm{op}} \leq \|\gamma\|_{L^\infty}$。
(d) 证明映射

$$h\colon L^1[0,1] \times L^1[0,1] \to L^1[0,1], \quad h(\gamma, \eta) := m_{\cos \circ \gamma}(\eta) = (\cos \circ \gamma)\eta$$

是连续的。 [提示：根据 (c) 和习题 B.11.4(c)，只需证明

$$L^1[0,1] \to L^1[0,1], \ \gamma \mapsto h(\gamma, \eta) = m_\eta(g(\gamma))$$

对稠密向量子空间 $L^\infty[0,1]$ 中的每个 η 都是连续的，其中 $L^1[0,1]$。] (e) 令 $\gamma, \eta \in L^1[0,1]$ 和 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。验证

$$\frac{f(\gamma + t\eta) - f(\gamma)}{t} = \int_0^1 h(\gamma + st\eta, \eta)\,ds;$$

为此，对等式两边应用线性泛函 λ_θ，其中 $\theta \in L^\infty[0,1]$。
(f) 令 $t \to 0$ 取自 (e)，证明 $df(\gamma, \eta) = h(\gamma, \eta)$。推导出 f 是 C^1。(g) 我们有 $f(0) = 0$。证明尽管 $f'(0) = \mathrm{id}_{L^1[0,1]}$，$f(L^1[0,1])$ 在 $L^1[0,1]$ 中不是零邻域。推导出 f不是 FC^1。

练习 2.3.13。 假设在定理 2.3.34 的情形中，将 $U \subseteq E$ 替换为 $U = P \times Q$，其中 P 是一个拓扑空间， Q 是局部凸空间 Y 中具有稠密内部的局部凸子集。此外，假设 $f\colon\ P \times (Q \times V) \to F$ 不是 C^k，而仅仅是 $C^{0,\,k}$，其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$（若 F 是无限维的，则需要假设注释 2.3.37(a) 中的 (2.65)）。

(a) 利用引理 2.3.28，证明定理 2.3.34 的结论仍然成立，但 $\varphi\colon\ P_0 \times (Q_0 \times V_0) \to W$ 只是 $C^{0,\,k}$ 且具有 $C^{0,\,k}$ 逆映射（若我们选择 $U_0 = P_0 \times Q_0$ 使其在 P 中有一个开 p_0-邻域 P_0，并在 Q 中有一个相对开 q_0-邻域 Q_0，其中 $x_0 = (p_0,\ q_0)$）。(b) 证明隐函数定理（定理 2.3.40）的结论也仍然成立，但 $\varphi\colon\ U_0 = P_0 \times Q_0 \to V_0$ 只是 $C^{0,\,k}$。

练习 2.3.14。 设 Z 是一个拓扑空间， Y 是一个集合，且 $q\colon\ Z \to Y$ 是一个映射，它满足如下意义下的局部单射性：对每个 $z \in Z$，都存在一个邻域 $V \subseteq Z$，使得 $q|_V$ 是单射。设 X 是一个拓扑空间，且 $\gamma\colon\ X \to Z$ 和 $\eta\colon\ X \to Z$ 都是连续映射，并满足 $q \circ \gamma = q \circ \eta$。证明：若 X 是连通的， Z 是豪斯多夫的，且对某个 $x_0 \in X$ 有 $\gamma(x_0) = \eta(x_0)$，则 $\gamma = \eta$。

练习 2.3.15（简化牛顿迭代）。设 $(E,\ \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，且满足 $E \neq \{0\}$。设 $x_0 \in E$、 $r > 0$ 和 $f\colon\ B_r^E(x_0) \to E$ 是一个 FC^1-映射，且 $f'(x_0) \in$ 一般线性群(E)，

$$a := \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \mathrm{Lip}(f - f'(x_0)) > 0, \text{ and } \|f(x_0)\| < ar. \tag{2.77}$$

(a) 证明 f 在 $B_r^E(x_0)$ 中有唯一零点 x_∞。(b) 证明对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x_n \to x_\infty$，当 $n \to \infty$ 时， $x_n := x_{n-1} - f'(x_0)^{-1}(f(x_{n-1}))$ $\in B_r^E(x_0)$ 成立。(c) 设 $L := \|f'($ $= \|x_1 - x_0\|/\ 1 - L$ $\|x_n - x_\infty\| \le CL^n$ $n \in \mathbb{N}_0$ $)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\,\mathrm{Lip}($ $f - f'($ $))$（它是 $[0,1[$ 的一个元素），且 $C\colon\ ($ $)$。证明对所有 都成立。

[参见定理 2.3.32 及其证明。]

如果从一个充分接近 x_∞ 的初始近似 x_0 开始，那么每个满足 $f'(x_\infty) \in \mathrm{GL}(E)$ 的零点 x_∞ 都可以通过简化牛顿迭代求得：

练习 2.3.16。 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，且 $E \neq \{0\}$。设 $U \subseteq E$ 是一个开子集， $f\colon\ U \to E$ 是一个 FC^1-函数， $x_\infty \in U$ 是 f 的一个零点，且满足 $f'(x_\infty) \in \mathrm{GL}(E)$。证明存在 $r \ge s > 0$，使得 $B_{2r}^E(x_\infty) \subseteq U$，并且对每个 $x_0 \in B_s^E(x_\infty)$，$f|_{B_r^E(x_0)}$ 都满足练习 2.3.15 的假设 (2.77)。

[设 $\varepsilon > 0$ 满足 $4\varepsilon \le 1/\|f'(x_\infty)^{-1}\|_{\mathrm{op}}$。选取 $r > 0$，使 $B_{2r}^E(x_\infty) \subseteq U$ 足够小，我们就能使 $f'(x_0) \in \mathrm{GL}(E)$，并且

$$\left| \frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \frac{1}{\|f'(x_\infty)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} \right| \le \varepsilon \text{ for all } x_0 \in B_r^E(x_\infty).$$

我们还可以做到，对于所有 $x \in B_{2r}^E(x_\infty)$， $\|f'(x) - f'(x_\infty)\|_{\mathrm{op}} \le \varepsilon$，因此，对于所有 $x_0 \in B_r^E(x_\infty)$ 和 $x \in B_{2r}^E(x_\infty)$，$\|f'(x) - f'(x_0)\|_{\mathrm{op}} \le 2\varepsilon$。由此可得，对于所有 $x_0 \in B_r^E(x_\infty)$，$\mathrm{Lip}\big(f|_{B_r^E(x_0)} - f'(x_0)\big) \le 2\varepsilon$，因此

$$\frac{1}{\|f'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - \operatorname{Lip}\left(f|_{B_r^E(x_0)} - f'(x_0)\right) \geq \frac{1}{\|f'(x_\infty)^{-1}\|_{\mathrm{op}}} - 3\varepsilon \geq \varepsilon > 0.$$

接下来只需选择足够小的 $s \in]0, r]$，使得对于所有 $x_0 \in B_s^E(x_\infty)$，$\|f(x_0)\| < \varepsilon r$。]

此外，当 x_0 接近 x_∞ 时，牛顿迭代趋向于零点 x_∞，其中 $f'(x_\infty) \in$ 一般线性群(E)。

习题 2.3.17（牛顿法）。设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，$f\colon U \to E$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 FC^1-函数，且 $x_\infty \in U$ 满足 $f(x_\infty) = 0$，以及 $f'(x_\infty) \in$ 一般线性群(E)。假设 $E \neq \{0\}$。

(a) 设 $r > 0$ 满足 $B_r^E(x_\infty) \subseteq U$。缩小 r 后，我们可以假设对所有 $x \in B_r^E(x_\infty)$，都有 $f'(x) \in$ 一般线性群(E)，并且 $M := \sup\{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\colon x \in B_r^E(x_\infty)\} < \infty$。进一步缩小 r 后，我们还可以假设

$$L := M \sup\{\|f'(x) - f'(y)\|_{\mathrm{op}}\colon x, y \in B_r^E(x_\infty)\} < 1.$$

对每个 $x \in B_r^E(x_\infty)$，映射

$$g_x\colon B_r^E(x_\infty) \to E, \quad y \mapsto y - f'(x)^{-1}(f(y))$$

满足 $g_x(x_\infty) = x_\infty$ 且

$$\operatorname{Lip}(g_x) \leq \|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \operatorname{Lip}\left(f|_{B_r^E(x_\infty)} - f'(x)\right) \leq L, \tag{2.78}$$

由此它是 $B_r^E(x_\infty)$ 的自映射和一个压缩映射。给定 $x_0 \in B_r^E(x_\infty)$，这使我们能够定义

$$x_n := g_{x_{n-1}}(x_{n-1}) = x_{n-1} - f'(x_{n-1})^{-1}(f(x_{n-1})) \in B_r^E(x_\infty)$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 递归地定义。由 (2.78) 推得，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\|x_n - x_\infty\| \leq L^n \|x_0 - x_\infty\|$。因此，对 $n \to \infty$，$x_n \to x_\infty$。

(b) 为了获得关于 $n \to \infty$ 时渐近行为的更好估计，定义

$$\theta_s := M \sup\{\|f'(x) - f'(y)\|_{\mathrm{op}}\colon x, y \in \overline{B}_s^E(x_\infty)\} \text{ for } s \in [0, r[.$$

那么，对所有 $s \in [0, r[$，$\theta_s \leq L < 1$，且当 $s \to 0$ 时，$\theta_s \to 0$。验证

$$\operatorname{Lip}\left(g_x|_{\overline{B}^E_{\|x-x_\infty\|}(x_\infty)}\right) \leq \theta_{\|x-x_\infty\|}$$

对所有 $x \in B_r^E(x_\infty)$。推导出，在 (a) 的情形下，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有估计 $\|x_n - x_\infty\| \leq \theta_{\|x_{n-1}-x_\infty\|} \cdots \theta_{\|x_0-x_\infty\|} \|x_0 - x_\infty\|$。

(c) 由 (b) 推导出：对于每个 $\theta > 0$，给定 $x_0 \in B_r^E(x_\infty)$，存在 $C > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\|x_n - x_\infty\| \leq C\theta^n$。

(d) 现在假设 f 是 C^2。根据注 1.5.12(c)，如有必要，缩小 r 后，我们可以使得存在 $K > 0$，对于所有 $x, y \in B_r^E(x_\infty)$，都有 $\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{2}K\|y - x\|$，因此

$$\theta_s \leq MKs \text{ for all } s \in [0, r[.$$

因此 $\|x_n - x_\infty\| \leq \theta_{\|x_{n-1}-x_\infty\|}\|x_{n-1} - x_\infty\| \leq MK\|x_{n-1} - x_\infty\|^2$，从而

$$MK\|x_n - x_\infty\| \leq (MK\|x_{n-1} - x_\infty\|)^2$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$。将 $\delta_n := MK\|x_n - x_\infty\|$ 缩写为 $n \in \mathbb{N}_0$，则有

$$\delta_n \le (\delta_{n-1})^2 \text{ for all } n \in \mathbb{N}$$

（文献中称为“局部二次收敛”的估计）。
给定 $\theta \in]0,\ 1[$，存在 $n_\theta \in \mathbb{N}$ 使得 $\delta_{n_\theta} \le \theta$。推导出

$$\delta_{n_\theta + k} \le \theta^{(2^k)} \text{ for all } k \in \mathbb{N}_0.$$

我们提及一个牛顿迭代收敛的判据。

练习 2.3.18。设 $(E,\ \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，满足 $E \neq \{0\}$，且 $f\colon U \to E$ 是开子集 $U \subseteq E$ 上的一个 FC^1-映射。验证以下证明概要中的细节：

(a) 设 $x_0 \in U$ 和 $r > 0$，使得对所有 $x \in B^E_{2r}(x_0)$，都有 $B^E_{2r}(x_0) \subseteq U$，$f'(x) \in$ 一般线性群(E)，且 $m := \sup\{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\colon x \in B^E_{2r}(x_0)\} < \infty$，并且

$$\ell := m \sup\{\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}}\colon x, y \in B^E_{2r}(x_0)\} < 1.$$

那么 $a := \frac{1}{\|f'\ x_0\ ()^{-1}\|_{\text{算子}} - \mathrm{Lip}\left(f|_{B^E_{2r}(x_0)} - f'(x_0)\right)} \ge \frac{1}{m}(1-\ell) \in]0,\ 1]$。若 $\|f(x_0)\| < ar$，则根据定理 2.3.32，$f|_{B^E_r(x_0)}$ 有一个零点 x_∞。此外，$f|_{B^E_r(x_\infty)}$ 满足练习 2.3.17(a) 的假设，并且 $x_0 \in B^E_r(x_\infty)$。因此，对于所有 n，$x_n := x_{n-1} - f'(x_{n-1})^{-1}(f(x_{n-1}))$ 都有定义，且 $x_n \to x_\infty$ 为 $n \to \infty$。

(b) 若 x_∞ 是 f 的任意一个零点，且 $f'(x_\infty) \in$ 一般线性群(E)，则存在 $r > 0$，使得对于所有 $x \in B^E_{3r}(x_\infty)$，$B^E_{3r}(x_\infty) \subseteq U$，且 $f'(x) \in$ 一般线性群(E)，

$$M := \sup\{\|f'(x)^{-1}\|_{\mathrm{op}}\colon x \in B^E_{3r}(x_\infty)\} < \infty,$$

并且 $L := M\sup\{\|f'(y) - f'(x)\|_{\mathrm{op}}\colon x, y \in B^E_{3r}(x_\infty)\} < 1$。选择 $s \in]0, r]$ 充分小，使得对所有 $x_0 \in B^E_s(x_\infty)$，$\|f(x_0)\| \le \frac{1}{M}(1-L)r$。于是，对于每个 $x_0 \in B^E_s(x_\infty)$，$f|_{B^E_{2r}(x_0)}$ 满足 (a) 的假设。

练习 2.3.19。通过以下方式定义 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：若 $x \le 1/2$，则 $g(x) = 0$；若 $x \in [1/2, 3/2]$，则 $g(x) = x/2 - 1/4$；若 $x \ge 3/2$，则 $g(x) = 1/2$。令 $x_0 := 2$，并考虑 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$x \mapsto x + \int_0^x g\ t\ dt$ ( )。

(a) 设 $x_n := x_{n-1} - f'(x_0)^{-1}f(x_{n-1})$，其中 $n \in \mathbb{N}$。证明 $x_n = (1/3)^n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。由此推知，习题 2.3.17(c) 的结论一般不适用于 *simplified* 牛顿迭代。
(b) 现在考虑牛顿迭代 $y_n := y_{n-1} - f'(y_{n-1})^{-1}f(y_{n-1})$，其中 $n \in \mathbb{N}$，且 $y_0 := x_0$。证明对于所有 $n \ge 2$，$y_n = 0$ 都是 f 的唯一零点。

为了加快向不动点的收敛，通常可以使用牛顿迭代，而不是巴拿赫不动点定理中所述的迭代。

习题 2.3.20. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，$U \subseteq E$是一个开子集，且 $f\colon U \to E$ 是一个 FC^1-映射，满足 $\sup\{\|f'(x)\|_{\mathrm{op}}\colon x \in U\} < 1$。假设 f有一个不动点 x_∞。那么 x_∞是微分同胚群映射 FC^1 $h\colon U \to E, h(x) := x - f(x)$ 的一个零点。证明对于所有 $x \in U$，$h'(x) \in$一般线性群(E)；特别地，$h'(x_\infty) \in$一般线性群(E)。推导出，如果初始值 x_0 足够接近 x_∞，那么 x_∞可以作为函数 h的牛顿迭代极限得到。

2.4 局部凸空间中的微分方程

现在我们研究局部凸空间子集上的微分方程，包括巴拿赫空间中微分方程的经典情形。

除非另有说明，本节所讨论的所有向量空间都是实数域上的向量空间。

定义 2.4.1. 设 E 是一个局部凸空间，$W \subseteq \mathbb{R} \times E$ 是一个子集，$f\colon W \to E$ 是一个函数。

(a) 若函数 $\gamma\colon I \to E$ 定义在一个非退化区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上，我们称其为*微分方程的解*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{2.79}$$

若 γ 是 C^1，

$$(t, \gamma(t)) \in W \quad \text{and} \quad \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)) \ \text{ for all } \ t \in I. \tag{2.80}$$

(b) 如果 $(t_0,\ y_0) \in W$ 且 $\gamma\colon I \to E$ 是 (2.79) 的一个解，并且 $t_0 \in I$ 且 $\gamma(t_0) = y_0$，则称 γ 为*初值问题的解*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.81}$$

(c) 如果满足以下条件，我们就称微分方程 (2.79) *具有解的局部唯一性*：对于 (2.79) 的任意解 $\gamma_1\colon I_1 \to E$ 和 $\gamma_2\colon I_2 \to E$，若在某个 $t_0 \in I_1 \cap I_2$ 处有 $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$，则存在 $I_1 \cap I_2$ 中 t_0 的一个邻域 I，使得 $\gamma_1|_I = \gamma_2|_I$。

(d) 如果对于一个非退化区间 $J \subseteq \mathbb{R}$ 和某个子集 $U \subseteq E$，有 $W = J \times U$（或者，如果 $W \subseteq J \times U$，其中 J 和 U 同前），[2] 我们就称微分方程 (2.79) *具有解的局部存在性*，当且仅当满足以下条件：[3] 对于所有 $(t_0,\ y_0) \in W$，初值问题 (2.81) 存在一个解 $\gamma\colon I \to E$，其定义域 I 在 J 中相对开。

若 E 是巴拿赫空间，则存在众所周知且简单的解的局部存在性和唯一性判据（我们很快会回顾这些判据）。对于不是巴拿赫空间的局部凸空间 E 以及适当的连续线性映射 $A\colon E \to E$，即使是如下形式的线性微分方程，也

$$y'(t) = Ay(t) \tag{2.82}$$

需要满足局部唯一性；也可以选择 E 和 A，使得解的局部存在性不成立。[4] 我们回顾一些众所周知的例子：

[2] 稍后，W 将是 $J \times U$ 中的相对开集，因此局部具有这种形式。[3] 更准确地说，我们应该讨论解的局部存在性 *with respect to* J；不过，具体选择 J 总是可以从上下文中明确看出。[4] 此处使用右端项 $f\colon \mathbb{R} \times E \to E,\ f(t,\ y) := A(y)$。

例 2.4.2。考虑局部凸直和 $E := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ （参见例 A.7.14 和 B.13.3）以及右移位

$$A\colon E \to E, \quad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

它是连续且线性的（这是引理 A.7.3(ii)的推论）。如果初值问题

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = (1, 0, 0, \ldots)$$

有一个解 $\gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon I \to E$，那么 γ_1 将满足 $\gamma_1(0) = 1$，并且

$$\gamma_1'(t) = 0 \text{ for all } t \in I,$$

因此对于所有 $t \in I$都有 $\gamma_1(t) = 1$。对于 $n > 1$，我们将有 $\gamma_n(0) = 0$，并且

$$\gamma_n'(t) = \gamma_{n-1}(t) \quad \text{for all } t \in I,$$

因此对于所有 $t \in I$，由对 n进行归纳法可得 $\gamma_n(t) = t^{n-1}/(n-1)!$。由于

$$(t^{n-1}/(n-1)!)_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad \text{for all } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

我们推得 $I = \{0\}$，这与 I 是非退化的假设相矛盾。因此 γ 不可能存在。

例 2.4.3. 令 $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} = \prod_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{R}$，赋予乘积拓扑；由此得到的非赋范 Fr´ echet 空间（参见习题 B.9.6）。我们考虑左移位

$$A\colon E \to E, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

于是，零函数 $\gamma\colon \mathbb{R} \to E, t \mapsto 0$ 是初值问题的解

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = 0. \tag{2.83}$$

令 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，使得对所有 $n \in \mathbb{N}_0$，均有 $h^{(n)}(0) = 0$，但对所有 $t \neq 0$，均有 $h(t) \neq 0$（例如，当 $t \neq 0$ 时，$h(t) := e^{-1/t^2}$）。那么，函数 $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$（其 n 分量为 $\eta_n := h^{(n)}$）也是 (2.83) 的一个解。观察 η_0可知，γ 和 η 在任何零邻域上都不相等。

为了后续使用，我们提及：

引理 2.4.4。设 E 是一个局部凸空间，$W \subseteq \mathbb{R} \times E$ 是一个子集，并且$f\colon W \to E$ 是一个连续函数。设 $\gamma\colon I \to E$ 是定义在一个非退化区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数，使得对所有 $t \in I$都有$(t, \gamma(t)) \in W$。设 $t_0 \in I$且 $y_0 := \gamma(t_0)$。那么以下条件等价：

(a) γ 是 C^1，并且满足初值问题 (2.81)；(b) γ是连续的，弱积分 $\int_{t_0}^t f(s, \gamma(s))\, ds$对所有 $t \in I$均存在于 E中，并且 $\gamma(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s))\, ds$。

证明。 若 (a) 成立，则根据命题 1.1.5 和 (2.81)，(b) 也成立。若 (b) 成立，则根据命题 1.1.12，(a) 也成立。□

注 2.4.5. 设 E 是一个局部凸空间， $W \subseteq \mathbb{R} \times E$ 是一个子集，且 $f\colon W \to E$ 是一个连续函数。

(a) 若 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间， $t_0 \in I$ 和 $\gamma\colon I \to E$ 是一个连续映射，且 $\{(t, \gamma(t))\colon t \in I\} \subseteq W$ 在 $I \setminus \{t_0\}$ 的各个连通分支上的限制都是 (2.79) 的解，则 γ 也满足 (2.79)，因为函数 $I \to E, t \mapsto f(t, \gamma(t))$ 连续，且引理 1.4.14 适用。

(b) 若 I_1 和 I_2 是 $\mathbb{R}$ 中的非退化区间，满足 $t_0 := \max(I_1) = \min(I_2)$，且 $\gamma_j\colon I_j \to E$ 是关于 $j \in \{1, 2\}$ 的 (2.79) 的解，并且 $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$，则也有

$$\gamma\colon I_1 \cup I_2 \to E, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ if } t \in I_1; \\ \gamma_2(t) \text{ if } t \in I_2 \end{cases}$$

根据 (a)，是 (2.79) 的一个解。

(c) 若 $W \subseteq \mathbb{R} \times E$ 是具有稠密内部的局部凸子集， $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $f\colon W \to E$ 是 C^k，则 (2.79) 的每个解 $\gamma\colon I \to E$ 都是 C^{k+1}。对于 $k = 0$，这由定义可知。若 $k \geq 1$ 且断言对 $k-1$ 成立，则 γ 是 C^k。由于

$$\gamma'(t) = f(t, \gamma(t)),$$

根据链式法则，γ' 是 C^k，因此 γ 是 C^{k+1}。

引理 2.4.6. 考虑满足解的局部唯一性的微分方程 (2.79)。若 $\gamma_1\colon I_1 \to E$ 和 $\gamma_2\colon I_2 \to E$ 是 (2.79) 的解，且对于某个 $t_0 \in I_1 \cap I_2$，有 $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$，则 $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$。

证明。 子集 $K := \{t \in I_1 \cap I_2\colon \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$ 在 $I_1 \cap I_2$ 中是闭的，因为 E 是豪斯多夫空间，且函数 γ_1 和 γ_2 是连续的。由于 (2.79) 满足解的局部唯一性， K 在 $I_1 \cap I_2$ 中是相对开的。根据假设，$K \neq \emptyset$。由于 $I_1 \cap I_2$ 是一个区间，因而是连通的，故有 $K = I_1 \cap I_2$。□

引理 2.4.7。考虑一个微分方程

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{2.84}$$

满足解的局部唯一性和解的局部存在性，其中 E 是一个局部凸空间，$J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间， $U \subseteq E$ 和 $f\colon W \to E$ 是子集 $W \subseteq J \times U$ 上的函数。对于每个 $(t_0, y_0) \in W$，存在一个解 $\gamma\colon I \to E$，它是初值问题 (2.81) 的解，并具有以下性质：对于 (2.81) 的每个解 $\eta\colon I_\eta \to E$，

$$I_\eta \subseteq I \quad and \quad \eta = \gamma|_{I_\eta} \tag{2.85}$$

成立。函数 γ 由后一个性质唯一确定，并且 I 在 J 中相对开。

证明。固定 $(t_0, y_0) \in W$，令 S 为 (2.81) 的所有解 $\eta\colon I_\eta \to E$ 的集合。令 $I := \bigcup_{\eta\in S} I_\eta$。于是

$$\gamma\colon I \to E, \quad \gamma(t) := \eta(t) \text{ if } \eta \in S \text{ and } t \in I_\eta$$

是一个定义良好的函数，因为根据引理 2.4.6，对所有 $\eta,\zeta \in S$，都有 $\eta|_{I_\eta\cap I_\zeta} = \zeta|_{I_\eta\cap I_\zeta}$。由构造可知，$I_\eta \subseteq I$，且对所有 $\eta \in S$，都有 $\gamma|_{I_\eta} = \eta$，因此 γ 是方程 (2.81) 的一个解，并且 (2.85) 成立。引理中的唯一性断言显然成立。如果 I 在 J 中不是开集，那么或者有 $t_1 := \sup(I) \in I$，但对某个 $b \in J$，$t_1 < b$（这是我们现在假设的情形）；或者有 $t_1 := \inf(I) \in I$，但对某个 $a \in J$，$a < t_1$（这种情形可用类似的论证讨论）。根据局部存在性，存在一个解 θ: $K \to E$，它是微分方程 (2.79) 的解，且满足 $\theta(t_1) = \gamma(t_1)$，其定义域 K 在 J 中相对开。于是，对某个 $t_2 > t_1$，有 $[t_1, t_2] \subseteq K$。现在，$\eta\colon I \cup [t_1, t_2] \to E$，若 $t \in I$，则 $\eta(t) := \gamma(t)$；若 $t \in [t_1, t_2]$，则 $\eta(t) := \theta(t)$，是初值问题 (2.81) 的一个解。因此 $\eta \in S$ 且 $I \cup [t_1, t_2] = I_\eta \subseteq I$，这与 $t_2 > \sup(I)$ 矛盾。□

定义 2.4.8. 在引理 2.4.7 中针对 $(t_0, y_0) \in W$ 构造的解 $\gamma\colon I \to E$ 称为初值问题 (2.81) 的极大解；为强调其对 t_0 和 y_0 的依赖，我们也用 $\gamma_{t_0,y_0}\colon I_{t_0,y_0} \to E$ 代替 γ。由下式给出的子集 $\Omega \subseteq J \times J \times U$

$$\Omega := \bigcup_{(t_0,y_0)\in W} I_{t_0,y_0} \times \{(t_0, y_0)\}$$

是所谓的（极大）流的定义域

$$\mathrm{Fl}\colon \Omega \to E, \quad \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0) := \gamma_{t_0,y_0}(t).$$

给定 $t, t_0 \in J$，我们定义 $\Omega_{t,t_0} := \{y_0 \in E\colon (t_0, y_0) \in W \text{ 和 } t \in I_{t_0,y_0}\}$，并考虑部分映射

$$\mathrm{Fl}_{t,t_0}\colon \Omega_{t,t_0} \to E, \quad y_0 \mapsto \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0).$$

在引理 2.4.7 和定义 2.4.8 的情形下，我们有：

引理 2.4.9. (a) 若 $(t_0, y_0) \in W$ 且 $t_1 \in I_{t_0,y_0}$，则 $\gamma_{t_0,y_0} = \gamma_{t_1,y_1}$ 满足 $y_1 := \gamma_{t_0,y_0}(t_1) = \mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0)$。

(b) 若 $t_2 \in I_{t_1,y_1}$ 属于 *(a)*，则 $t_2 \in I_{t_0,y_0}$，且 $Fl_{t_2,t_0}(y_0) = Fl_{t_2,t_1}(Fl_{t_1,t_0}(y_0))$。*(c)* 对所有 $t_1, t_0 \in J$，映射 Fl_{t_1,t_0} 是单射，$Fl_{t_1,t_0}(\Omega_{t_1,t_0}) = \Omega_{t_0,t_1}$，且 $Fl_{t_0,t_1} = (Fl_{t_1,t_0})^{-1}$。

证明。(a) 记 $y_1 := \mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0)$。函数 γ_{t_0,y_0} 和 γ_{t_1,y_1} 是微分方程 (2.79) 的解，且它们在 t_1 处的取值相同。因此，根据 γ_{t_1,y_1} 的极大性，$I_{t_0,y_0} \subseteq I_{t_1,y_1}$，并且 γ_{t_0,y_0} 是 γ_{t_1,y_1} 在 I_{t_0,y_0} 上的限制。因此，$t_0 \in I_{t_1,y_1}$ 且 $\gamma_{t_1,y_1}(t_0) = \gamma_{t_0,y_0}(t_0) = y_0$。因此，根据 γ_{t_0,y_0} 的极大性，$I_{t_1,y_1} \subseteq I_{t_0,y_0}$ 且 $\gamma_{t_1,y_1} = \gamma_{t_0,y_0}|_{I_{t_1,y_1}}$。所以 $\gamma_{t_0,y_0} = \gamma_{t_1,y_1}$。

(b) 根据 (a)，我们有 $t_2 \in I_{t_0,y_0}$ 且 $\mathrm{Fl}_{t_2,t_0}(y_0) = \gamma_{t_0,y_0}(t_2) = \gamma_{t_1,y_1}(t_2) = \mathrm{Fl}_{t_2,t_1}(\mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0))$。

(c) 若 $y_0 \in \Omega_{t_1,t_0}$，则简记 $y_1 := \gamma_{t_0,y_0}(t_1) = \mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0)$。由 (a)，有 $\gamma_{t_0,y_0} = \gamma_{t_1,y_1}$。因此 $t_0 \in I_{t_1,y_1}$，从而 $y_1 \in \Omega_{t_0,t_1}$，故

$$\mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(\Omega_{t_1,t_0}) \subseteq \Omega_{t_0,t_1}. \tag{2.86}$$

此外，由 (b)，$\mathrm{Fl}_{t_0,t_1}(\mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0)) = \mathrm{Fl}_{t_0,t_0}(y_0) = y_0$。因此，$\mathrm{Fl}_{t_1,t_0}$是单射，且 $\mathrm{Fl}_{t_0,t_1} \circ \mathrm{Fl}_{t_1,t_0} = \mathrm{id}_{\Omega_{t_1,t_0}}$，从而 $\mathrm{Fl}_{t_0,t_1}(\Omega_{t_0,t_1}) \supseteq \Omega_{t_1,t_0}$。交换 t_0 和 t_1的角色，也有 $\mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(\Omega_{t_1,t_0}) \supseteq \Omega_{t_0,t_1}$。因此，利用 (2.86)，$\mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(\Omega_{t_1,t_0}) = \Omega_{t_0,t_1}$。□

现在我们讨论确保解的局部唯一性的三个条件。

定义 2.4.10. 令 $X = \mathbb{R}$（或任意拓扑空间），$(E, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，且 $f\colon W \to E$ 是定义在子集 $W \subseteq X \times E$ 上的函数。令 $L \in [0, \infty[$。我们称 f 满足常数为 L的全局利普希茨条件，当

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \le L\|y_2 - y_1\|$$

对所有满足 $(t, y_1), (t, y_2) \in W$ 的 $t \in X$和 $y_1, y_2 \in E$，若 f对某个 L 满足常数为 L的全局利普希茨条件，我们就称 f 满足全局利普希茨条件。如果每个 $(t_0, y_0) \in W$ 都有一个邻域 $Y \subseteq W$，使得 $f|_Y$ 满足全局利普希茨条件，那么就称 f 满足局部利普希茨条件。为明确起见，我们也会说全局或局部利普希茨条件关于第二个变量，或关于 y变量。

若 P还是一个拓扑空间，且 W是 $X \times E \times P$的一个子集，则称函数 $f\colon W \to E$ 在第二个变量上满足全局（或局部）利普希茨条件，如果映射 $((t, p)\ y) \mapsto f(t, y, p)$ 在相应的子集 $(X \times P) \times E$ 上满足该条件。

命题 2.4.11. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间，且 $f\colon W \to E$ 是定义在子集 $W \subseteq \mathbb{R} \times E$上的函数。若 f 满足局部利普希茨条件，则微分方程 $y'(t) = f(t, y(t))$ 满足解的局部唯一性。

证明。设 $\gamma_1\colon I_1 \to E$和 $\gamma_2\colon I_2 \to E$是 (2.79) 的解，且对某个 $t_0 \in I_1 \cap I_2$，$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$。简记 $y_0 := \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$。由于 f 满足局部利普希茨条件，我们可找到 $\varepsilon > 0$、$\delta > 0$ 和 $L \in [0, \infty[$，使得$f|_Y$ 在以下范围内满足常数为 L 的全局利普希茨条件

$$Y := \{(t, y) \in W\colon |t - t_0| \le \delta \text{ and } \|y - y_0\| \le \varepsilon\}.$$

缩小 δ 后，我们可以假设，对于所有 $j \in \{1, 2\}$ 和 t，$\delta L < 1$ and $\|\gamma_j(t) - y_0\| \le \varepsilon$ 均成立

$$U := \{t \in I_1 \cap I_2\colon |t - t_0| \le \delta\},$$

它是 $I_1 \cap I_2$ 中 t_0 的一个邻域。对于所有 $s \in U$，我们有

$$\|f(s,\gamma_2(s)) - f(s,\gamma_1(s))\| \le L\|\gamma_2(s) - \gamma_1(s)\| \le L\|\gamma_1|_U - \gamma_2|_U\|_\infty,$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 $C(U,E)$ 上的上确界范数。利用引理 2.4.4(b)，可推出

$$\begin{aligned}\|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \big(f(s,\gamma_2(s)) - f(s,\gamma_1(s))\big)\, ds \right\| \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,\gamma_2(s)) - f(s,\gamma_1(s))\|\, ds \right| \le \delta L \|\gamma_2|_U - \gamma_1|_U\|_\infty\end{aligned}$$

对所有 $t \in U$，从而可得

$$\|\gamma_2|_U - \gamma_2|_U\|_\infty \le \delta L \|\gamma_2|_U - \gamma_1|_U\|_\infty.$$

由于 $\delta L < 1$，这意味着 $\|\gamma_2|_U - \gamma_1|_U\|_\infty = 0$，因此 $\gamma_1|_U = \gamma_2|_U$。 □

例 2.4.12。若 X 是一个拓扑空间，$(E,\|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，$U \subseteq E$是一个具有稠密内部的局部凸子集，且 $f\colon X \times U \to E$ 是一个 $C^{0,1}$-映射，则 f 在第二个变量上满足局部利普希茨条件。

[给定 $(x_0,y_0) \in X \times U$，存在 X 中 x_0 的一个邻域 X_0、U 中 y_0 的一个凸邻域 U_0，以及 $r > 0$，使得

$$d_2 f(X_0 \times U_0 \times \overline{B}_r^E(0)) \subseteq \overline{B}_1^E(0).$$

于是，对所有 $(x,\ y) \in X_0 \times U_0$，都有 $\|d_2 f(x,\ y,\ \cdot)\|_{\mathrm{op}} \le \frac{1}{r}$，因此根据引理 1.5.3，对所有 $x \in X_0$，$\mathrm{Lip}(f(x,\ \cdot)|_{U_0}) \le \frac{1}{r}$。]

定义 2.4.13。设 $(E,\ \|\cdot\|)$ 是 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 上的局部凸空间。在 E 中的**线性微分方程**是如下形式的微分方程：

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t),$$

其中 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，$b\colon J \to E$ 是连续函数，而 $A\colon J \to \mathcal{L}(E)$ 是一个满足以下条件的函数：

$$\widehat{A}\colon J \times E \to E, \quad (t,y) \mapsto A(t)(y)$$

是连续的。若 $b = 0$，则该线性微分方程称为**齐次**；若 $b \neq 0$，则称为**非齐次**。

注 2.4.14. A的连续性：$J \times E \to E$ 蕴含作为映射到配备紧开拓扑的 $\mathcal{L}(E)$的 A 连续；如果 E 可度量化（或者，更一般地，如果 $J \times E$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间），那么 A 的连续性与 $A\colon J \to \mathcal{L}(E)_c$ 的连续性等价（参见命题 A.6.17）。如果 E 是桶化的，同样的结论也成立。为此，假设 $A\colon J \to \mathcal{L}(E)_c$ 连续。

双线性求值映射 $\beta\colon E\times\mathcal{L}(E)_c\to E,(y,\alpha)\mapsto\alpha(y)$是分别连续的，因此当 E 是桶化的时，它是亚连续的（见推论 B.11.16）。现在，对每个紧子集$K\subseteq J$， $A(K)\subseteq\mathcal{L}(E)_c$ 都是紧的（因而有界）。因此， $\beta|_{E\times A(K)}$ 连续（见命题 B.11.13(a)），由此 $\widehat{\ }K\times E\to E,(t,y)\mapsto A(t,y)=\beta(y,A(t))$连续，因而 A也连续。

例 2.4.15. 对于赋范空间 $(E,\|\cdot\|)$ 中的每个线性微分方程 $y'(t)=A(t)y(t)+b(t)$，连续函数

$$f\colon J\times E\to E,\quad f(t,y):=A(t)(y)+b(t)$$

满足关于第二个变量的局部利普希茨条件；若 J 是紧的，则 f 满足全局利普希茨条件。

$\frown$[只需证明最后一个断言。由于 $A\colon\ J\times E\to E$ 是连续的且 $\widehat{A}|_{J\times\{0\}}=0$，由华莱士引理，存在 $r>0$ 使得 $\widehat{A}(\overline{J}\times B_r^E(0))^{\overline{\ }}\subseteq B_1^E(0)$。因此，对于所有 $t\in J$，$\operatorname{Lip} f(t,\cdot)=\operatorname{Lip} A(t)=\|A(t)\|_{\mathrm{op}}\leq\frac{1}{r}$。]

命题 2.4.16. 设 E 为一个局部凸空间，且 $f\colon W\to E$ 是定义在子集 $W\subseteq\mathbb{R}\times E$ 上的映射。设 Λ 是从$\lambda\colon E\to E_\lambda$ 到局部凸空间 E_λ 的连续线性映射集合，并满足以下条件：

(a) Λ 在 E上分离点；(b) 对所有 $\lambda\in\Lambda$，存在一个函数 $f_\lambda\colon W_\lambda\to E_\lambda$，定义在子集$W_\lambda\subseteq\mathbb{R}\times E_\lambda$ 上，使得$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\times\lambda)(W)\subseteq W_\lambda$，

$$\lambda\circ f=f_\lambda\circ(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\times\lambda)|_W$$

并且微分方程 $y'(t)=f_\lambda(t,y(t))$ 满足解的局部唯一性。

那么 f 满足解的局部唯一性。

证明。 设 $\gamma_1\colon\ I_1\to E$和 $\gamma_2\colon\ I_2\to E$是(2.79)的解，并且 $t_0\in I_1\cap I_2$满足 $\gamma_1(t_0)=\gamma_2(t_0)$。对于 $\lambda\in\Lambda$ 和 $j\in\{1,2\}$，我们于是有

$$(\lambda\circ\gamma_j)'(t)=\lambda(\gamma_j'(t))=\lambda(f(t,\gamma_j(t)))=f_\lambda(t,(\lambda\circ\gamma_j)(t))$$

对所有 $t\in I_j$均成立，因此 $\lambda\circ\gamma_j$是 $y'(t)=f_\lambda(t,\ y(t))$的一个解。由于$\lambda\circ\gamma_1$ 和 $\lambda\circ\gamma_2$ 在 t_0 处的取值相同，且根据(b)，$y'(t)=f_\lambda(t,\ y(t))$满足解的局部唯一性，由引理 2.4.6可知 $\lambda\circ\gamma_1|_{I_1\cap I_2}=\lambda\circ\gamma_2|I_1\cap I_2$。由于 $\lambda\in\Lambda$ 在 E上分离点，故 $\gamma_1|_{I_1\cap I_2}=\gamma_2|_{I_1\cap I_2}$ 成立。□

注 2.4.17。在命题 2.4.16 的典型应用中，每个 E_λ 都是赋范空间，且 f_λ 满足局部利普希茨条件；根据命题 2.4.11，命题 2.4.16(b) 的最后一个条件此时自动成立。

例 2.4.18。设 F 是局部凸空间，$E := F^n$，其中 $n \in \mathbb{N}$，且 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间。设 $a_{jk}\colon J \to \mathbb{R}$ 是连续函数，其中 $j,\ k \in \{1, \dots, n\}$。此外，设 $b = (b_1, \dots, b_n)\colon J \to F^n$ 是连续函数。对于 $t \in J$，设 $A(t)\colon F^n \to F^n$ 是将 $y = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$ 映射为

$$A(t)(y) := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(t) y_k, \dots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(t) y_k \right).$$

那么，线性微分方程

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{2.87}$$

满足解的局部唯一性。

为此，令 Λ 为所有 $\lambda^n := \lambda \times \cdots \times \lambda\colon F^n \to \mathbb{R}^n, (y_1, \dots, y_n) \mapsto (\lambda(y_1) \dots, \lambda(y_n))$ 的集合，其中 λ 遍历 F 的所有连续线性泛函构成的对偶空间 F'。那么，Λ 在 E 上分离点。对于 $t \in J$，通过以下方式定义矩阵 $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$B(t) := (a_{jk}(t))_{j,k=1}^{n}.$$

那么，$B\colon J \to \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $b_\lambda := \lambda^n \circ b\colon J \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射。对于（2.87）的右端 $f\colon J \times E \to E$, $f(t, y) := A(t)(y) + b(t)$，我们有

$$\lambda^n \circ f = f_{\lambda^n} \circ (\mathrm{id}_J \times \lambda^n)$$

其中 $f_{\lambda^n}\colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_{\lambda^n}(t, y) = B(t)y + b_\lambda(t)$。由于

$$y'(t) = B(t)y + b_\lambda(t)$$

由命题 2.4.11 和例 2.4.15 可知，它满足解的局部唯一性；此外，$y'(t) = f(t,\ y(t))$ 也满足解的局部唯一性，这是由命题 2.4.16 得出的。

局部唯一性的第三个判据——局部流的存在性——尤为重要。

定义 2.4.19。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，E 是一个局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集，且 $f\colon W \to E$ 是开子集 $W \subseteq J \times U$ 上的函数。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。我们称微分方程 $y'(t) = f(t,\ y(t))$ 存在局部 C^k-流，如果对于所有 $(t,\ y) \in W$，都存在一个相对开区间 $I \subseteq J$，其中 $t \in I$；一个 U 中包含 y 的开邻域 V，其中 $I \times V \subseteq W$；以及一个 C^k-函数

$$\Phi\colon I \times I \times V \to E$$

具有以下性质：

(a) 对所有 $(t_0, y_0) \in I \times V$，函数 $I \to E, t \mapsto \Phi_{t,t_0}(y_0) := \Phi(t, t_0, y_0)$ 是初值问题 (2.81) 的一个解；(b) 存在一个开 y-邻域 $Y \subseteq V$，使得 $\Phi_{t_1,t_0}(Y) \subseteq V$ 对所有 $t_0, t_1 \in I$ 均成立，并且

$$\Phi_{t_2,t_1}(\Phi_{t_1,t_0}(y_0)) = \Phi_{t_2,t_0}(y_0) \text{ for all } t_0, t_1 \in I \text{ and } y_0 \in Y.$$

若 J 是开区间，$U \subseteq E$ 是开子集，f 是实解析映射，并且如前所述的 Φ 可以对所有 $(t, y) \in W$取为实解析映射，那么我们称 $y'(t) = f(t, y(t))$ 具有实解析局部流。

命题 2.4.20。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 为非退化区间，E 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且 $f\colon W \to E$ 为开子集 $W \subseteq J \times U$上的函数。如果微分方程 $y'(t) = f(t, y(t))$ 具有局部 C^1-流，那么它满足解的局部唯一性。

证明。设 $\gamma_j\colon I_j \to E$是微分方程 $y'(t) = f(t, y(t))$ 的解，其中 $j \in \{1, 2\}$ 和 $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$ 满足 $y := \gamma_1(\bar{t}) = \gamma_2(\bar{t})$。为了证明 γ_1 和 γ_2 在 $I_1 \cap I_2$中 t 的某个邻域上一致，我们不妨假设 $I_1 \cap I_2 \neq \{t_0\}$（只排除平凡情形）。因此 $I_1 \cap I_2$ 是非退化区间。设 I、V、Φ和 Y如定义 2.4.19 所述。对于 $(t, t_0, y_0) \in I \times I \times V$，记

$$(\partial_2\Phi)(t, t_0, y_0) := \frac{\partial \Phi}{\partial t_0}(t, t_0, y_0)$$

关于 Φ 对第二个变量的偏导数。存在一个相对开区间 $K \subseteq I_1 \cap I_2 \cap I$，满足 $t \in K$，使得对所有 $t \in K$，$\gamma_1(K) \subseteq Y$，$\gamma_2(K) \subseteq Y$ 以及$\Phi_{t,\,t}(y) \in Y$。如有必要，缩小 K后，我们还可以假设

$$\theta_j(t) := \Phi_{\bar{t},t}(\gamma_j(t)) \in Y \text{ for all } t \in K \text{ and } j \in \{1, 2\}.$$

只需证明

$$\gamma_j(t) = \Phi_{t,\bar{t}}(\bar{y}) \text{ for } t \in K \text{ and } j \in \{1, 2\}.$$

由于对所有 $t \in I$，$\Phi_{t,\,t} \circ \Phi_{t,\,t}|_Y = \mathrm{id}_Y$，映射$\Phi_{t,\,t}|_Y$是单射。因此，只要证明 θ_1 和 θ_2 都与.....相同，$\gamma_1|_K = \gamma_2|_K$ 就成立

$$\theta\colon K \to E, \quad t \mapsto \Phi_{\bar{t},t}(\Phi_{t,\bar{t}}(\bar{y})) = \bar{y}.$$

由于当 $j \in \{1, 2\}$时，$\theta_j(t) = y = \theta(t)$，只要证明.....，后者就成立

$$\theta_j'(t) = \theta'(t) = 0 \text{ for } t \in K.$$

对于所有 $t \in I$和 $z \in Y$，我们有

$$z = \Phi_{\bar{t},t}(\Phi_{t,\bar{t}}(z))$$

因此，对 t 求导可得，

$$0 = \partial_2\Phi(\bar{t}, t, \Phi_{t,\bar{t}}(z)) + d\Phi_{\bar{t},t}(\Phi_{t,\bar{t}}(z), f(t, \Phi_{t,\bar{t}}(z))) \text{ for } \quad t \in I, z \in Y, \tag{2.88}$$

利用 $\frac{d}{dt}\Phi_{t,t}(z) = f(t, \Phi_{t,t}(z))$。对于 $t \in K$ 和 $j \in \{1, 2\}$，我们有 $\gamma_j(t) = \Phi_{t,t}(z)$，其中 $z := \theta_j(t) \in Y$。由于 $\gamma_j'(t) = f(t, \gamma_j(t)) = f(t, \Phi_{t,t}(z))$，可得

$$\begin{aligned}\theta_j'(t) &= \partial_2\Phi(\bar{t}, t, \gamma_j(t)) + d\Phi_{\bar{t},t}(\gamma_j(t), \gamma_j'(t)) \\ &= \partial_2\Phi(\bar{t}, t, \Phi_{t,\bar{t}}(z)) + d\Phi_{\bar{t},t}(\Phi_{t,\bar{t}}(z), f(t, \Phi_{t,\bar{t}}(z))) = 0\end{aligned}$$

这是（2.88）的特殊情形。 □

注记 2.4.21。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，E 是一个局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集，且 $f\colon W \to E$ 是在开子集 $W \subseteq J \times U$ 上的函数。令 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$；若 $k = \omega$，则假设 J 和 U 是开的。若微分方程 $y'(t) = f(t, y(t))$ 满足解的局部存在性和局部唯一性，则以下条件等价：

(a) $y'(t) = f(t, y(t))$ 存在局部 C^k-流；(b) 与 $y'(t) = f(t, y(t))$ 相关的极大流 Fl: $\Omega \to E$ 的定义域 Ω 对所有 $(t, \underline{t}, y) \in W$ 都是 $J \times J \times U$ 中的一个邻域，并且在某个（可能更小的）开邻域上是 C^k。

事实上，若 $\Phi\colon I \times I \times V \to E$ 如定义 2.4.19 所述，则 $I \times I \times V \subseteq \Omega$ 且 $\mathrm{Fl}|_{I\times I\times V} = \Phi$ 是 C^k；因此 (a)⇒(b)。反过来，假设对于所有满足 $\Phi := \mathrm{Fl}|_{I\times I\times V}$ 是 C^k 的 $(t, y) \in W$，Ω 都包含 $(t, \underline{t}, y)$ 的一个开邻域 $\bar{I} \times I \times V$。由于 $\Phi(t, t, y) = y$ 且 Φ 连续，必要时缩小 I 后，我们可以假设存在一个开 y-邻域 $Y \subseteq V$，使得 $\Phi(I \times I \times Y) \subseteq V$。由引理 2.4.9(b)，定义 2.4.19 的条件（b）成立。因此 (b)⇒(a)。

引理 2.4.22. 考虑集合 X 上的一个自映射 $f\colon X \to X$。若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得迭代 $g := f^n\colon X \to X$ 有唯一的不动点 x_0，那么 x_0 也是 f 的不动点。此外，若 X 是一个拓扑空间，f 在 x_0 处连续，且 $y \in X$ 是一个元素，使得当 $k \to \infty$ 时 $g^k(y) \to x_0$，那么也有 $f^k(y) \to x_0$。

证明. 恒等式 $f^n(f(x_0)) = f(f^n(x_0)) = f(x_0)$ 表明 $f(x_0)$ 是 f^n 的不动点。因此，根据 f^n 的不动点的唯一性，$f(x_0) = x_0$。

为证明第二个断言，只需注意到对每个 $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$，当 $k \to \infty$ 时，$f^{j+nk}(y) = f^j(g^k(y)) \to f^j(x_0) = x_0$。□

定理 2.4.23（定量存在定理）。设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，$a < b$ 是实数，且 $t_0 \in [a, b]$。设 $y_0 \in E$、$R > 0$ 和 $f\colon [a, b] \times B_R^E(y_0) \to E$ 是满足关于第二个变量的全局利普希茨条件的有界连续函数。记

$$M := \|f\|_\infty := \sup\{\|f(t,y)\| \colon (t,y) \in [a,b] \times \overline{B}_R^E(y_0)\} \in [0,\infty[$$

并定义[5]

$$\varepsilon_1 := \min\{t_0 - a, R/M\}, \quad \varepsilon_2 := \min\{b - t_0, R/M\}.$$

那么有如下结论:

(a) 在非退化区间 $I := [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2]$ 上，存在唯一的 C^1-函数 γ: $I \to B_R^E(y_0)$，它满足初值问题

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{2.89}$$

(b) 若通过 $\gamma_0(t) := y_0$ 定义 $\gamma_0 \in C(I,E)$，并且对 $n \in \mathbb{N}$ 通过定义 $\gamma_n \in C(I,E)$，则

$$\gamma_n(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma_{n-1}(s))\, ds \ \text{ for } \ t \in I,$$

那么 $\gamma_n \to \gamma$ 一致地。

(c) 若 $R/M \geq \max\{t_0 - a, b - t_0\}$，则 $I = [a,b]$，因此 γ 在整个 $[a,b]$ 上都有定义。

证明。(c) 根据 ε_1 和 ε_2 的定义显然成立。

(a)和(b)。根据命题 2.4.11，解 γ 是唯一的（如果存在）。根据假设，我们有

$$L := \sup\{\mathrm{Lip}(f(t,\cdot)) \colon t \in [a,b]\} < \infty.$$

令 $I := [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2]$ 且 $F := C(I,E)$，并赋予上确界范数。我们考虑映射

$$g \colon \{\eta \in C(I,E) \colon \|\eta\|_\infty \leq R\} \to C(I,E), \quad g(\eta)(t) := \int_{t_0}^t f(s, y_0 + \eta(s))\, ds.$$

我们断言

(i) g 是 $B_R^F(0) \subseteq C(I,E)$ 的自映射；且(ii) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，$g^n \colon B_R^F(0) \to B_R^F(0)$ 都是利普希茨的，其中

$$\mathrm{Lip}(g^n) \leq \frac{L^n}{n!}\varepsilon^n, \tag{2.90}$$

其中 $\varepsilon := \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq R/M$。因此，当 $\frac{L^n}{n!}\varepsilon^n < 1$ 时，g^n 是压缩映射。 —

[5] 当 $M = 0$ 时，读作 $R/0 := \infty$。[6] 注意，当 n 足够大时，此条件成立，因为 $\sum_{n=0}^\infty \frac{L^n}{n!}\varepsilon^n = e^{L\varepsilon} < \infty$。 —

如果这是真的，按 (ii) 中的方法固定 n；那么 g^n 有唯一的不动点 η（根据巴拿赫不动点定理，即引理 2.3.24），并且 $\eta = \lim_{k\to\infty} g^{nk}(0)$。那么 g 也以 η 为不动点，并且

$$\eta = \lim_{k\to\infty} g^k(0) \text{ in } C(I,E), \tag{2.91}$$

由引理 2.4.22。由引理 2.4.4, η 满足

$$z'(t) = f(t, z(t) + y_0), \quad z(t_0) = 0. \tag{2.92}$$

将 y_0 视为常值函数 $I \to E$, $t \mapsto y_0$。根据前文，$\gamma := \eta + y_0$ 满足 (2.89)，且由于 $\gamma_k = g^k(y_0) + y_0$，我们看到，当 $k \to \infty$ 时，$\gamma_k \to \gamma$ 一致收敛。要完成 (a) 和 (b) 的证明，因此只需证明该断言。

(i) 设 $\zeta \in B_R^F(0)$。对每个 $t \in I$，我们有

$$\|g(\zeta)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \zeta(s) + y_0)\, ds \right\| \le |t - t_0| M \le R$$

当 ε_1, $\varepsilon_2 \le R/M$ 时。因此 $g(\zeta) \in B_R^F(0)$。

(ii) 若对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都能证明

$$\|(g^n(\eta_2) - g^n(\eta_1))(t)\| \le \frac{|t - t_0|^n}{n!} L^n \|\eta_2 - \eta_2\|_\infty \tag{2.93}$$

对所有 $\eta_1, \eta_2 \in B_R^F(0)$ 和 $t \in I$（因为 $|t - t_0| \le \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \varepsilon$）。我们通过归纳法进行证明；对于 $n = 1$，有

$$\begin{aligned}
\|g(\eta_2)(t) - g(\eta_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \big(f(s, \eta_2(s) + y_0) - f(s, \eta_2(s) + y_0) \big)\, ds \right\| \\
&\le \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \eta_2(s) + y_0) - f(s, \eta_1(s) + y_0)\|\, ds \right| \\
&\le |t - t_0| L \|\eta_2 - \eta_1\|_\infty,
\end{aligned}$$

如所需。若 (2.93) 对 n 成立，则有

$$\begin{aligned}
&\|g^{n+1}(\eta_2)(t) - g^{n+1}(\eta_1)(t)\| \\
&\quad = \left\| \int_{t_0}^t \big(f(s, g^n(\eta_2)(s) + y_0) - f(s, g^n(\eta_1)(s) + y_0) \big)\, ds \right\| \\
&\quad \le \left| \int_{t_0}^t \|f(s, g^n(\eta_2)(s) + y_0) - f(s, g^n(\eta_1)(s) + y_0)\|\, ds \right| \\
&\quad \le \left| \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^n}{n!} L^{n+1} \|\eta_2 - \eta_1\|_\infty\, ds \right| = \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} L^{n+1} \|\eta_2 - \eta_1\|_\infty,
\end{aligned}$$

利用归纳假设。这就完成了归纳步骤。 □

注 2.4.24。若使用 Banach–Weissinger 不动点定理 [Wsg52] 而非巴拿赫不动点定理，定理 2.4.23 的证明可以简化；前者可直接应用于自映射 g，而不只是其某个幂 g^n（见习题 2.4.1）。尽管如此，我们仍选择使用标准的巴拿赫不动点定理，因为稍后在本节讨论参数时，我们希望再次使用这一证明。届时我们便可以运用第 2.3 节中有关不动点参数依赖性的结果。

推论 2.4.25。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，$(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，$W \subseteq J \times E$ 是一个开子集，且 $f\colon W \to E$ 是一个连续函数，并且其第二个变量满足局部利普希茨条件。则 $y'(t) = f(t, y(t))$ 满足解的局部存在性。

证明。给定 $(t_0, y_0) \in W$，存在实数 $a < b$，使得 $[a,b]$ 是 t_0 在 J 中的邻域，并且存在 $R > 0$ 使得 $[a,b] \times B_R^E(y_0) \subseteq W$。缩小 R 和区间 $[a,b]$ 后，不妨设

$$L := \sup_{t\in[a,b]} \operatorname{Lip} f(t,\cdot)|_{\overline{B}_R^E(y_0)} < \infty$$

并且 $M := \sup\{\|f(t, y)\| : t \in [a,b],\ y \in \overline{B}_R^E(y_0)\} < \infty$。根据定理 2.4.23，存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$，使得 $I := [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2]$ 是 t_0 在 $[a,b]$ 中的邻域，并且初值问题 $y'(t) = f(t, y(t))$，$y(t_0) = y_0$ 有一个解 $\gamma\colon I \to E$。只需注意到 I 也是 J 中的 t_0 邻域即可。□

命题 2.4.26。设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间，$J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，$b\colon J \to E$ 是连续函数，而 $A\colon J \to \mathcal{L}(E)$ 是一个 $\widehat{}$ 函数，且 $A\colon J \times E \to E$ 连续。那么

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{2.94}$$

满足解的局部存在性和局部唯一性。对于每个 $(t_0, y_0) \in J \times E$，$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$，$y(t_0) = y_0$ 的极大解在整个 J 上都有定义。

证明。由例 2.4.15，映射 $f\colon J \times E \to E, (t, y) \mapsto A(t)(y) + b(t)$ 满足局部利普希茨条件。因此，根据命题 2.4.11，(2.94) 满足解的局部唯一性。若能证明，对于 $(t_0, y_0) \in J \times E$，初值问题 $y'(t) = A(t)y(t) + b(t), y(t_0) = y_0$ 在每个包含 $t_0 \in I$ 的非退化紧子区间 $I \subseteq J$ 上都有解，则其余断言即可得出。固定 $I = [a,b]$。由例 2.4.15，我们有

$$L := \sup_{t\in I} \operatorname{Lip} f(t,\cdot) < \infty.$$

我们定义 $g\colon C(I,E) \to C(I,E)$，通过 $g(\gamma)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \gamma(s))\, ds$。与定理 2.4.23 的证明一样，对 $n \in \mathbb{N}_0$ 作归纳可得

$$\|g^n(\gamma)(t) - g^n(\eta)(t)\| \leq \frac{L^n|t-t_0|^n}{n!}\|\gamma - \eta\|_\infty$$

对所有 $\gamma, \eta \in C(I, E)$ 和 $t \in I$，因此 $\mathrm{Lip}(g^n) \leq \frac{(b-a)^n L^n}{n!}$。我们推得，当 n充分大时，$\mathrm{Lip}(g^n) < 1$，从而根据引理 2.4.22 和巴拿赫不动点定理，g 有一个不动点 γ。于是，根据引理 2.4.4，γ 在整个 I 上都有定义，并且求解了我们所考虑的初值问题。□

注 2.4.27. 注意，在命题 2.4.26 中，A 作为映射 $J \to \mathcal{L}(E)_b$不必连续（见习题 2.4.4）。

现在我们研究微分方程的解对参数的依赖关系（并继续研究解对初始条件的依赖关系）。我们先介绍相关术语。

定义 2.4.28. 设 E 为一个局部凸空间，P为一个集合，$J \subseteq \mathbb{R}$ 为一个非退化区间，$U \subseteq E$ 为一个子集，且 $f\colon W \to E$ 是在子集 $W \subseteq J \times U \times P$上的一个函数。对于 $p \in P$，考虑微分方程

$$y'(t) = f(t, y(t), p) \tag{2.95}$$

其右端项由函数 $W^p \to E$、$(t,\ y) \mapsto f(t,\ y,\ p)$ 在子集 $W^p := \{(t,\ y) \in J \times U\colon (t,\ y,\ p) \in W\}$上给出，其中 $J \times U$。如果微分方程 (2.95) 对所有 $p \in P$都满足局部存在性和解的局部唯一性，我们令 $\gamma_{t_0,\ y_0,\ p}\colon I_{t_0,\ y_0,\ p} \to E$为初值问题的极大解

$$y'(t) = f(t, y(t), p), \quad y(t_0) = y_0 \tag{2.96}$$

对 $(t_0,\ y_0,\ p) \in W$。我们定义

$$\Omega := \bigcup_{(t_0,y_0,p)\in W} I_{t_0,y_0,p} \times \{(t_0, y_0, p)\} \subseteq J \times J \times E \times P$$

在这种情况下，并将映射

$$\mathrm{Fl}\colon \Omega \to E, \quad \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0, p) := \gamma_{t_0,y_0,p}(t)$$

称为相应的（极大）流。

现在我们来陈述一个关于微分方程的解对参数和初始条件的依赖性的典型结果。

定理 2.4.29。 设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 为一个非退化区间，$(E, \|\cdot\|)$ 为一个巴拿赫空间，F 为一个局部凸空间，$U \subseteq E$ 为一个开子集，且$P \subseteq F$ 为一个具有稠密内部的局部凸子集。设 $W \subseteq J \times U \times P$ 为一个开子集，$k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 并且

$$f\colon W \to E, \quad (t, y, p) \mapsto f(t, y, p)$$

是一个 C^k-函数。如果 $k = 0$，则假设 f 在 y 变量上满足局部利普希茨条件。则有以下结论：

(a) 微分方程

$$y'(t) = f(t, y(t), p) \tag{2.97}$$

对每个 $p \in P$都满足解的局部存在性和局部唯一性；(b) 微分方程 (2.97) 的流的定义域 Ω 在 $J \times J \times U \times P$中是开集；(c) 微分方程 (2.97) 的流 Fl: $\Omega \to E$ 是 C^k。

如果 J 是一个开区间，$P \subseteq F$ 是一个开子集，且 f 是实解析的，那么 Fl也是实解析的。

为了证明定理 2.4.29，我们首先推导一些关于解的局部行为的结果。此外，我们还将介绍处理具有解析右端的微分方程的工具。随后，在更一般的流形上的微分方程框架下，我们将在第 2.5 节中对这些研究进行推广。正如我们将看到的，定理 2.4.29 无需单独证明；它是推论 2.5.20 的特殊情形。

下面的引理将帮助我们从复微分方程的复解析解中得到实微分方程的实解析解（此时 $E = F_{\mathbb{C}}$）。

引理 2.4.30。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，E 是一个局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个子集，$W \subseteq J \times U$ 是一个子集，且 $f\colon\ W \to E$ 是一个函数，使得微分方程 $y'(t) = f(t, y(t))$ 满足解的局部唯一性。设 $F \subseteq E$ 是一个闭向量子空间，使得

$$g(t, y) := f(t, y) \in F \quad \textit{for all } (t, y) \in W \cap (J \times F).$$

那么微分方程 $y'(t) = g(t, y(t))$ 满足解的局部唯一性。如果它还满足解的局部存在性，那么以下结论成立：若 $\gamma\colon I \to E$ 是微分方程 $y'(t) = f(t, y(t))$ 的一个解，且 $y(t_0) \in F$ 对某个$t_0 \in I$成立，那么 $\gamma(I) \subseteq F$，并且 γ 是微分方程 $y'(t) = g(t, y(t))$ 的一个解。

证明。由于 $y'(t) = g(t, y(t))$ 的解也是 $y'(t) = f(t, y(t))$ 的解，因此第一个微分方程继承了第二个微分方程的解的局部唯一性。现在设 $\gamma\colon I \to E$ 是 $y'(t) = f(t, y(t))$ 的一个解，且对某个 $t_0 \in I$，有 $\gamma(t_0) \in F$。不妨假设 γ 是初始数据 $(t_0, \gamma(t_0))$ 对应的极大解。由于 γ连续，且 F在 E中是闭的，因此原像 $\gamma^{-1}(F)$ 在 I中是闭的。根据假设，$\gamma^{-1}(F)$ 非空。由于 I 是连通的，只要证明 $\gamma^{-1}(F)$ 在 I中是开集，我们就有 $\gamma^{-1}(F) = I$（从而完成证明）。为此，取 $t_1 \in \gamma^{-1}(F)$。根据解的局部存在性，初值问题

$$y'(t) = g(t, y(t)), \quad y(t_1) = \gamma(t_1)$$

在相对开子区间 $K \subseteq J$ 上有一个解 $\eta\colon\ K \to F$。由于 γ 具有极大性，$K \subseteq I$ 且由此可得 $\eta = \gamma|_K$，从而 $K \subseteq \gamma^{-1}(F)$。因此，$\gamma^{-1}(F)$ 是 t_1 的一个邻域，因而在 I 中是开集。□

作为讨论实解析解的工具，我们简要讨论一下复微分方程。

2.4.31. 设 E 为复局部凸空间，$W \subseteq \mathbb{C} \times E$ 为子集，且 $f\colon W \to E$ 为函数。

(a) 我们称定义在内部非空的凸子集 $I \subseteq \mathbb{C}$ 上的函数 $\gamma\colon I \to E$ 为复微分方程的解

$$y'(z) = f(z, y(z)) \tag{2.98}$$

如果 γ 是 $C^1_{\mathbb{C}}$-函数，$(z, \gamma(z)) \in W$ 且对所有 $z \in I$ 有 $\gamma'(z) = f(z, \gamma(z))$，其中 $\gamma'(z)$ 理解为复导数 $\frac{d\gamma}{dz}(z)$（:= $d\gamma(z,1)$，参见定义 2.1.1）。

(b) 若 $(z_0, y_0) \in W$ 且 $\gamma\colon I \to E$ 是复微分方程 (2.98) 的解，使得 $z_0 \in I$ 且 $\gamma(z_0) = y_0$，则称 γ 为初值问题的解

$$\begin{cases} y'(z) = f(z, y(z)) \\ y(z_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.99}$$

注 2.4.32.(a) 我们只讨论复巴拿赫空间 E 中的复微分方程。当然，我们主要关注 $I \subseteq \mathbb{C}$ 和 $W \subseteq \mathbb{C} \times E$ 为开子集的情形；在这种情况下，解 γ 的 $C^1_{\mathbb{C}}$ 性质等价于 γ 是复解析的（见命题 2.1.6）。不过，我们对巴拿赫空间中复微分方程的讨论完全避免使用幂级数，而始终基于相关函数的 $C^1_{\mathbb{C}}$ 性质（或 $C^k_{\mathbb{C}}$ 性质），而非复解析性。在这一背景下的主要结果——命题 2.4.34——中，P 和 J 的开性并非必要的额外条件。因此，我们以完全一般的形式陈述了 2.4.31，其中也包括非开集的情形。

(b) 下文中，处理复微分方程时，我们将经常用后者“t”（或其他形式）代替 z，以便对实微分方程和复微分方程采用统一的记号。不过，对于复微分方程，所有关于 t 的导数都指复导数。

转而考虑规范化初值问题可能会很有用。

2.4.33.设 $J \subseteq \mathbb{K}$ 为具有非空内部的凸子集，$t_0 \in J$ 且$\gamma\colon J \to E$ 为该初值问题的一个解

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

在 $\mathbb{K}$ 上。令 $t \in J$。则

$$\gamma(t) = \eta(1) + y_0 \tag{2.100}$$

$C^1_{\mathbb{R}}$-曲线

$$\eta\colon [0,1]\to E,\quad \eta(\tau):=\gamma(t_0+\tau(t-t_0))-y_0$$

其满足初值问题

$$w'(\tau)=(t-t_0)f(t_0+\tau(t-t_0),w(t)+y_0),\quad w(0)=0 \tag{2.101}$$

其已标准化，即初始条件为 $\tau_0=0$ and$w(\tau_0)=0$。如果我们能够找到 (2.101) 的解 η，那么我们也知道 $\gamma(t)$（由 (2.100) 可知）。这一思想是下面证明的核心。

定理 2.4.34。设$(E,\|\cdot\|)$为一个巴拿赫空间，F为 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$上的局部凸空间。给定$(t,y,p)\in\mathbb{K}\times E\times F$，设 $J\subseteq\mathbb{K}$为具有非空内部的凸子集，且满足 $t\in J$；设 $U\subseteq E$ 为一个开 y-邻域，$P\subseteq F$ 为具有稠密内部的局部凸子集，且满足 $p\in P$。设 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$和 $f\colon J\times U\times P\to E$为 $C^k_{\mathbb{K}}$-函数；若 $k=0$，则假设 f 关于其第二个变量满足局部利普希茨条件；若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，则假设 $k\geq 1$。则存在一个凸的、相对开的 t-邻域 $J_0\subseteq J$、一个开 y-邻域 $U_0\subseteq U$以及一个相对开的 p-邻域 $P_0\subseteq P$，并具有以下性质：

(a) 对于所有$(t_0,y_0,p)\in J_0\times U_0\times P_0$，初值问题

$$y'(t)=f(t,y(t),p),\quad y(t_0)=y_0 \tag{2.102}$$

在 $\mathbb{K}$ 上有唯一的 $C^k_{\mathbb{K}}$-解 $\gamma_{t_0,\,y_0,\,p}\colon J_0\to E$；

(b) 映射 $\Phi\colon J_0\times J_0\times U_0\times P_0\to E,\ (t,t_0,y_0,p)\mapsto\gamma_{t_0,\,y_0,\,p}(t)$ 是 $C^k_{\mathbb{K}}$。

若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，则 $J\subseteq\mathbb{R}$、$U\subseteq E$和 $P\subseteq F$ 都是开子集，且 f 是实解析的，那么我们还可以使 Φ 是实解析的。

证明。若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，则 (a) 中的唯一性由命题 2.4.11 得出。若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$，则 (a) 中的 $\gamma_{t_0,y_0,p}(t)$ 是唯一的，因为 $\gamma_{t_0,y_0,p}(t)=\eta(1)$，若定义$\eta\colon[0,1]\to E$, $\eta(\tau):=\gamma_{t_0,y_0,p}(t_0+\tau(t-t_0))-y_0$，则其是初值问题 $w'(\tau)=(t-t_0)f(t_0+\tau(t-t_0)\ w(t)+y_0,p)$，$w(0)=0$ 的解，因此是唯一的，因为 $(\tau,w)\mapsto(t-t_0)f(t_0+\tau(t-t_0)\ w+y_0,p)$ 在 w 变量上满足局部利普希茨条件（参见 2.4.33）。

现在，如果 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$，我们就来构造解。缩小 U 后，我们可以假设，对于某个 $R>0$，有 $U=B^E_{2R}(y)$。缩小 J、R和 P后，我们可以假设存在 $M,L\in[0,\infty[$使得

$$(\forall t\in J)\,(\forall p\in P)\quad \operatorname{Lip}(f(t,\cdot,p))\leq L,\quad \text{and }\|f\|_\infty\leq M. \tag{2.103}$$

缩小 J后，我们可以假设其直径 $r:=\operatorname{diam}(J):=\sup\{|s-t|\colon\ s,\ t\in J\}$足够小，以至于

$$rL<1\quad\text{and}\quad rM\leq R. \tag{2.104}$$

现在我们用 $U_0 := B_R^E(y)$ 和 $J_0 := J$, $P_0 := P$ 来证明 (a) 和 (b)。考虑 $C_{\mathbb{R}}^k$-函数 $h\colon [0,1] \times (B_{2R}^E(y) \times J_0 \times J_0 \times P_0) \to E$,

$$h(\tau, y, t, t_0, p) := (t - t_0) f(t_0 + \tau(t - t_0), y, p).$$

那么 h 是 $C^{0,\,k}_{\mathbb{R}}$，尤其如此。此外，如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，则 h 是 $C^{0,\,k}_{\mathbb{C}}$，因为映射 $h(\tau, \cdot)\colon B_{2R}^E(y) \times J_0 \times J_0 \times P_0 \to E$ 对每个 $\tau \in [0,1]$ 都是 $C_{\mathbb{C}}^k$（因此习题1.7.2适用）。现在 $\|h\|_\infty \le rM$ 并且

$$\operatorname{Lip} h(\tau, \cdot, t, t_0, p) \le |t - t_0| \operatorname{Lip}(f(t_0 + \tau(t - t_0), \cdot, p)) \le rL$$

对于所有 $(\tau,\ t,\ t_0,\ p) \in [0,1] \times J_0 \times J_0 \times P_0$。考虑带上确界范数的 $Y := C([0,1], E)$。根据定量存在定理（定理 2.4.23）及其证明（取 $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_2 = 1$ 和 $n = 1$），初值问题

$$w'(\tau) = h(\tau, w(\tau) + y_0, t, t_0, p), \quad w(0) = 0 \tag{2.105}$$

对于集合 $J_0 \times J_0 \times B_R^E(y) \times P_0$ 中的所有 $(t,\ t_0,\ y_0,\ p)$，都有唯一解 $\eta_{t,\ t_0,\ y_0,\ p}\colon [0,1] \to E$，并且 $\eta_{t,\ t_0,\ y_0,\ p}$ 是压缩映射的唯一不动点

$$g_{t,t_0,y_0,p}\colon \overline{B}_R^Y(0) \to \overline{B}_R^Y(0)$$

压缩常数为 rL，其中 $g\colon\ J_0 \times J_0 \times B_R^E(y) \times P_0 \times B_R^Y(0) \to B_R^Y(0)$ 由下式给出

$$g(t, t_0, y_0, p, \psi)(\tau) := \int_0^\tau h(s, \psi(s) + y_0, t, t_0, p)\, ds$$

对于 $\tau \in [0,1]$（以及 $g_{t,\ t_0,\ y_0,\ p} := g(t,\ t_0,\ y_0,\ p,\ \cdot)$，一如既往）。因此

$$g(t, t_0, y_0, p, \psi) = I\big((h^{t,t_0,p})_*(\psi + y_0)\big), \tag{2.106}$$

其中，由 $I(\psi)(\tau) := \int_0^\tau \psi(s)\, ds$ 确定的映射 $I\colon\ C([0,1],\ E) \to C([0,1], E)$ 是连续的 $\mathbb{K}$-线性映射，而映射

$$C([0,1], B_{2R}^E(\overline{y})) \times J_0 \times J_0 \times P \to C([0,1], E),\ (\psi, t, t_0, p) \mapsto (h^{t,t_0,p})_*(\psi)$$

由命题 1.7.5 可知是 $C_{\mathbb{K}}^k$（其中 $C([0,1],\ B_{2R}^E(y)) = B_{2R}^Y(y)$）。因此，$g$ 是 $C_{\mathbb{K}}^k$，从而也有

$$\Psi\colon J_0 \times J_0 \times B_R^E(\overline{y}) \times P_0 \to C([0,1], E),\ (t, t_0, y_0, p) \mapsto \eta_{t,t_0,y_0,p}$$

根据命题 2.3.27(a)，是 $C_{\mathbb{K}}^k$。点求值

$$\mathrm{ev}_1\colon C([0,1], E) \to E, \quad \psi \mapsto \psi(1)$$

在 1 处是连续的 $\mathbb{K}$-线性，因此我们推得

$$\mathrm{ev}_1 \circ \Psi \colon J_0 \times J_0 \times B_R^E(\overline{y}) \times P_0 \to E,\ (t, t_0, y_0, p) \mapsto \eta_{t,t_0,y_0,p}(1)$$

是 $C_{\mathbb{K}}^k$，因此映射也

$$\Phi \colon J_0 \times J_0 \times B_R^E(\overline{y}) \times P_0 \to E,\ (t, t_0, y_0, p) \mapsto \eta_{t,t_0,y_0,p}(1) + y_0.$$

给定 $(t, t_0, y_0, p, \tau) \in J_0 \times J_0 \times B_R^E(y) \times P_0 \times [0,1]$，$\eta_{t_0+s(t-t_0)\,t_0,y_0,p}$和函数 $[0,1] \to E, \tau \mapsto \eta_{t,t_0,y_0,p}(s\tau)$ 均为初值问题 $w'(\tau) = h(\tau, w(\tau) + y_0, t_0 + s(t - t_0)\ t_0, p)$，$w(0) = 0$的解，因此这两个函数相同。取 $\tau = 1$，我们推得

$$\begin{aligned} \eta_{t,t_0,y_0,p}(s) + y_0 &= \eta_{t_0+s(t-t_0),t_0,y_0,p}(1) + y_0 \\ &= \Phi(t_0 + s(t - t_0), t_0, y_0, p) \end{aligned} \tag{2.107}$$

对所有 $(t,\ t_0,\ y_0,\ p,\ s) \in J_0 \times J_0 \times B_R^E(\overline{y}) \times P_0 \times [0,1]$。

情形 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$：设 $(t_0,\ y_0,\ p) \in J_0 \times B_R^E(y) \times P_0$。函数 $\gamma\colon J_0 \to E, \gamma(t) := \Phi(t,\ t_0,\ y_0,\ p)$ 满足 $\gamma(t_0) = y_0$。为了使 γ 成为 (2.102) 的解，只需证明对每个 $t \in J_0 \setminus \{t_0\}$，限制 $\gamma|_K$ 也是如此，其中 $K := \{t_0 + s(t - t_0) :\ s \in [0,1]\}$。现在

$$\gamma(t_0 + s(t - t_0)) = \Phi(t_0 + s(t - t_0), t_0, y_0, p) = \eta_{t,t_0,y_0,p}(s) + y_0$$

是 $s \in [0,1]$ 的 C^1-函数。由于 $[0,1] \to K,\ s \mapsto t_0 + s(t - t_0)$ 是一个C^1-微分同胚，我们推 deduce 得出 $\gamma|_K$ 是 C^1。此外，

$$\begin{aligned} (t - t_0)\gamma'(t_0 + s(t - t_0)) &= \frac{d}{ds}\gamma(t_0 + s(t - t_0)) = \eta'_{t,t_0,y_0,p}(s) \\ &= h(s, \eta_{t,t_0,y_0,p}(s) + y_0, t, t_0, p) \\ &= h(s, \gamma(t_0 + s(t - t_0)), t, t_0, p) \\ &= (t - t_0) f(t_0 + s(t - t_0), \gamma(t_0 + s(t - t_0)), p), \end{aligned}$$

因此，对于所有 $x \in K$，$\gamma'(x) = f(x,\ \gamma(x)\ p)$。于是 $\gamma_{t_0,\ y_0,\ p} := \gamma$ 解 (2.102)，并且我们注意到 (a) 和 (b) 已得到证明。

情形 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$：此时 Φ 是带有 $k \geq 1$ 的 $C_{\mathbb{C}}^k$。因此，对于 $(t_0,\ y_0,\ p) \in J_0 \times B_R^E(y) \times P_0$，函数

$$\gamma\colon J_0 \to E, \quad t \mapsto \Phi(t, t_0, y_0, p)$$

是 $C_{\mathbb{C}}^k$。我们有 $\gamma(t_0) = y_0 + \eta_{t_0,\ t_0,\ y_0,\ p}(1) = y_0$。由于复导数$\gamma'$: $J_0 \to E$ 连续，若能证明下式，则 γ 将满足初值问题 (2.102)：

$$\gamma'(t) = f(t, \gamma(t), p) \text{ for all } t \in J_0 \setminus \{t_0\}. \tag{2.108}$$

但由 (2.107) 和链式法则可得

$$\begin{aligned}(t-t_0)\,\gamma'(t) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=1}\gamma(t_0+s(t-t_0)) = \eta'_{t,t_0,y_0,p}(1)\\ &= (t-t_0)f(t,\eta_{t,t_0,y_0,p}(1)+y_0,p) = (t-t_0)f(t,\gamma(t),p)\end{aligned}$$

（其中 $s\in[0,1]$），由此可得 (2.108)。

实解析情形：假设 $J\subseteq\mathbb{R}$、$U\subseteq E$ 和 $P\subseteq F$ 是开集，且 f 是实解析的。那么 f 有一个复解析延拓 $f\colon Y\to E_{\mathbb{C}}$，定义在 $\mathbb{C}\times E_{\mathbb{C}}\times F_{\mathbb{C}}$ 中 $J\times U\times P$ 的一个开邻域 Y 上。取 t 的一个凸开邻域，并取 y 和 p 的开邻域 $U\subseteq E_{\mathbb{C}}$ 和 $P\subseteq F_{\mathbb{C}}$，使得 $J\times U\times P\subseteq Y$。缩小后面这些邻域后，我们可以假设 $J\cap\mathbb{R}\subseteq J$、$U\cap E\subseteq U$ 和 $P\cap F\subseteq P$。用前述交集替换 J、U 和 P 后，我们可以假设

$$J=\widetilde{J}\cap\mathbb{R},\quad U=\widetilde{U}\cap E,\ \text{and}\ \widetilde{P}\cap F=P.$$

根据已证明命题的复数情形，存在一个凸开 t 邻域 $J_0\subseteq J$ 以及开邻域 $U_0\subseteq U$ 和 $P_0\subseteq P$ 和 y 的开邻域 p，使得初值问题

$$y'(t)=\widetilde{f}(t,y(t),p),\quad y(t_0)=y_0$$

存在复解析解 $\widetilde{\gamma}_{t_0,\,y_0,\,p}\colon J_0\to E_{\mathbb{C}}$ 对所有属于 $J_0\times U_0\times P_0$ 的 $(t_0,\ y_0,\ p)$，映射

$$\widetilde{\Phi}\colon \widetilde{J_0}\times\widetilde{J_0}\times\widetilde{U_0}\times\widetilde{P}\to E_{\mathbb{C}},\ (t,t_0,y_0,p)\mapsto\widetilde{\gamma}_{t_0,y_0,p}(t)$$

是复解析的。定义 $J_0:=J_0\cap\mathbb{R}$, $U_0:=U_0\cap E$ 以及 $P_0:=P_0\cap F$。对于所有 $(t_0,\ y_0,\ p)\in J_0\times U_0\times P_0$，引理 2.4.30 表明 $\widetilde{\gamma}_{t_0,\,y_0,\,p}(J_0)\subseteq E$，并且 $\gamma_{t_0,\,y_0,\,p}:=\widetilde{\gamma}_{t_0,\,y_0,\,p}|_{J_0}$ 是（2.102）的一个解。此外，（b）中定义的映射 Φ 是实解析的，因为 Φ 是复解析延拓。□

注 2.4.35。定理 2.4.34 的证明提供了定量信息：如果选择 $U=B^E_{2R}(y)$ 以及 J,P，使得满足 (2.103) 和 (2.104)，那么当 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 且 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 时，可以选择 $U_0:=B^E_R(y)$、$J_0:=J$ 和 $P_0:=P$。

此外，如果 f 是实解析的，那么 Φ（如定理 2.4.34(b) 中所述）在整个 $J\times J\times B^E_R(y)\times P$ 上都是实解析的。不过，后一点要到稍后（定理 2.4.29 建立之后）才会明确；在实解析情形下，我们对定理 2.4.34 的证明并非定量的，并且可能会涉及更小的邻域。

备注 2.4.36。如果 $k=0$，那么在定理 2.4.34 中，P 可以替换为任意拓扑空间。定理 2.4.29、命题 2.4.38、定义 2.4.28、定义 2.5.9、定理 2.5.18 和推论 2.5.20 中也同样如此。

我们还有一个适用于 FC^k-映射情形的定理 2.4.34 版本。

推论 2.4.37. 设$(E, \|\cdot\|_E)$ 是一个实巴拿赫空间，$(F, \|\cdot\|_F)$ 是一个基于 $\mathbb{R}$的赋范空间，且$(t, y, p) \in \mathbb{R} \times E \times F$。设 $U \subseteq E$ 是一个开 y邻域， $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个包含 t 的非退化区间， $P \subseteq F$ 是一个具有稠密内部的局部凸子集，并且满足 $p \in P$。设 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$和 $f\colon J \times U \times P \to E$ 是一个 FC^k映射。那么存在一个包含 t 的相对开子区间 $J_0 \subseteq J$ 、一个开 y邻域 $U_0 \subseteq U$以及一个相对开 p邻域 $P_0 \subseteq P$，具有以下性质：

(a) 对于所有$(t_0, y_0, p) \in J_0 \times U_0 \times P_0$，初值问题

$$y'(t) = f(t, y(t), p), \quad y(t_0) = y_0 \tag{2.109}$$

有唯一解 $\gamma_{t_0,\ y_0,\ p}\colon \ J_0 \to E$;

(b) 映射 $\Phi\colon \ J_0 \times J_0 \times U_0 \times P_0 \to E$，$(t, t_0, y_0, p) \mapsto \gamma_{t_0,\ y_0,\ p}(t)$ 是 FC^k。

证明。由于 f是 FC^k，定理 2.4.34 证明中的映射 h也具有 FC^k。根据 (2.106)，由引理 1.7.40 和注 1.7.41（或习题 1.7.12 中的另一种讨论）可推知，定理 2.4.34 证明中的映射 g 具有 FC^k。利用命题 2.3.27(b)，我们看到，压缩映射 $g_{t,t_0,y_0,p}$ 的不动点 $\eta_{t,t_0,y_0,p}$ 是 (t, t_0, y_0, p) 的一个 FC^k-函数，因此 $\Phi(t, t_0, y_0, p) = \eta_{t,t_0,y_0,p}(1) + y_0$ 在 (t, t_0, y_0, p) 中是 FC^k。□

现在我们转向定理 2.4.34 的一个类似结果，讨论含参数微分方程右端为 $C^{0,k}$-函数的情形。我们建议初读时跳过这个更专门的结果，因为它只会用到两次（用于证明巴拿赫-李群和微分同胚群的 C^0-正则性）。

命题 2.4.38. 设$(E, \|\cdot\|)$ 为巴拿赫空间， F为局部凸空间， $P \subseteq F$ 为具有稠密内部的局部凸子集， $a < b$ 为实数，$y \in E$、 $R > 0$、 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 以及

$$f\colon [a, b] \times (B^E_{2R}(\overline{y}) \times P) \to E, \ (t, y, p) \mapsto f(t, y, p)$$

为一个满足关于 y 变量的全局利普希茨条件的 $C^{0,k}$-函数。假设

$$M := \|f\|_\infty := \sup\{\|f(t, y, p)\|\colon (t, y, p) \in [a, b] \times B^E_{2R}(\overline{y}) \times P\} < \infty$$

且 $R/M \geq b - a$。那么，对于每个$(t_0, y_0, p) \in [a, b] \times B^E_R(y) \times P$，初值问题

$$y'(t) = f(t, y(t), p), \quad y(t_0) = y_0$$

有唯一解 $\gamma_{t_0,y_0,p}\colon \ [a, b] \to E$，且下列映射为 $C^{0,k}$:

$$\Phi\colon ([a, b] \times [a, b]) \times (B^E_R(\overline{y}) \times P) \to E, \quad \Phi(t, t_0, y_0, p) := \gamma_{t_0,y_0,p}(t).$$

证明。 简记 $F := C([a,b], E)$。由假设，

$$L := \sup\{\operatorname{Lip}(f(t,\cdot,p)\colon (t,p) \in [a,b] \times P\} \in [0,\infty[.$$

固定 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\theta := \frac{L^n}{n!}(b-a)^n < 1.$$

由定量存在定理（定理 2.4.23）保证$\gamma_{t_0,\ y_0,\ p}$ 的存在性，而后者的证明表明

$$\eta_{t_0,y_0,p} := \gamma_{t_0,y_0,p} - y_0$$

是压缩映射$(g_{t_0,\ y_0,\ p})^n$ 在 $B_R^F(0)$ 中的唯一不动点，其压缩常数为 θ，其中

$$g\colon [a,b] \times (B_R^E(\overline{y}) \times P \times \overline{B}_R^F(0)) \to \overline{B}_R^F(0) \tag{2.110}$$

由 $g(t_0,\ y_0,\ p,\ \psi)(t) := \int_{t_0}^t f(s,\ \psi(s) + y_0,\ p)\ ds$ 给出，其中 $(t_0,\ y_0,\ p,\ \psi)$ 位于 (2.110) 左侧，而 $t \in [a,b]$ （以及 $g_{t_0,\ y_0,\ p}(\psi) := g(t_0,\ y_0,\ p,\ \psi)$ ）。因此

$$g(t_0, y_0, p, \psi) = I\big(t_0, (f^p)_*(\psi + y_0)\big) \tag{2.111}$$

使用映射

$$I\colon [a,b] \times C([a,b], E) \to C([a,b], E)$$

由 $I(t_0,\psi)(t) := \int_{t_0}^t \psi(s)\ ds$ 对于 $(t_0,\psi,t) \in [a,b] \times C([a,b],E) \times [a,b]$ 以及映射

$$(f^p)_*\colon C([a,b], B_{2R}^E(\overline{y})) \to C([a,b], E)$$

由 $(f^p)_*(\psi)(t) := f(t,\psi(t)\ p)$ 给出，其中如果将 y 视为常值函数 $[a,b] \to E,\ t \mapsto y$，则 $C([a,b], B_{2R}^E(y)) = B_{2R}^F(y)$。由于映射$f\colon [a,b] \times (B_{2R}^E(y) \times P) \to E$是 $C^{0,k}$，命题 1.7.5 表明

$$P \times B_{2R}^F(\overline{y}) \to C([a,b], E), \quad (p,\psi) \mapsto (f^p)_*(\psi)$$

是一个 C^k-映射。此外， I 是连续的，因为

$$\begin{aligned}
&\|I(t_1,\psi_1) - I(t_0,\psi_0)\|_\infty \\
&\qquad = \|I(t_1,\psi_1 - \psi_0) + I(t_1,\psi_0) - I(t_0,\psi_0)\|_\infty \\
&\qquad = \left\| t \mapsto \int_{t_1}^t (\psi_1(s) - \psi_0(s))\, ds + \int_{t_1}^{t_0} \psi_0(s)\, ds \right\|_\infty \\
&\qquad \le (b-a)\|\psi_1 - \psi_0\|_\infty + |t_1 - t_0|\,\|\psi_0\|_\infty \to 0
\end{aligned}$$

作为 $t_1,\ \psi_1$ 中的 $\to (t_0,\ \psi_0)$。由于 I 关于第二个变量是线性的，由引理 1.7.23 可得， I 是 $C^{0,\infty}$ （因此 $C^{0,k}$）。将命题 1.7.26 应用于 (2.111)，可推知 g 是 $C^{0,k}$。因此

$$h\colon [a,b]\times(B_R^E(\overline{y})\times P\times \overline{B}_R^F(0))\to \overline{B}_R^F(0),\ \ h(t_0,y_0,p,\psi):=(g_{t_0,y_0,p})^n(\psi)$$

根据引理 1.7.37 反复应用可得 is $C^{0,\,k}$。因此，映射

$$[a,b]\times(\overline{B}_R^E(\overline{y})\times P)\to C([a,b],E),\quad (t_0,y_0,p)\mapsto \eta_{t_0,y_0,p}$$

将 (t_0,y_0,p) 映射为压缩映射 $h_{t_0,y_0,p}=(g_{t_0,y_0,p})^n$ 的不动点，即 $C^{0,k}$ （见引理 2.3.28）。于是还有

$$[a,b]\times(\overline{B}_R^E(\overline{y})\times P)\to C([a,b],E),\quad (t_0,y_0,p)\mapsto \gamma_{t_0,y_0,p}=\eta_{t_0,y_0,p}+y_0$$

是 $C^{0,k}$，因此根据引理 1.7.38，Φ 是 $C^{0,k}$。 □

第 2.4 节习题

习题 2.4.1。设 (X,d) 是一个完备度量空间，其中 $X\neq\emptyset$ 且 $f\colon X\to X$ 是一个利普希茨映射，其迭代满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Lip}(f^n)<\infty.$$

证明 Banach–Weissinger 不动点定理：

(a) $d(f^{n+m}(x),f^n(x))\le d(f(x),x)\sum_{k=n}^{n+m-1}\operatorname{Lip}(f^k)$ 对所有 $n,\ m\in\mathbb{N}$ 以及 $x\in X$ 成立；(b) 对每个 $x\in X$，序列 $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ 都收敛，且其极限是 f 的不动点；(c) f 的不动点 x_∞ 是唯一的；(d) 对每个 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$，$d(x_\infty,f^n(x))\le d(f(x),x)\sum_{k=n}^{\infty}\operatorname{Lip}(f^k)$。(e) 证明前述不动点定理适用于定理 2.4.23 的证明中所用的自映射 g（而不仅适用于其某个幂 g^n）。

练习 2.4.2。设 E 是一个局部凸空间，且 $f\colon W\to E$ 是开子集 $W\subseteq\mathbb{R}\times E$ 上的实解析映射。

(a) 设 γ 是一个实解析解，满足

$$y'(t)=f(t,y(t)),\quad y(t_0)=y_0. \tag{2.112}$$

Then

$$\gamma''(t)=\frac{\partial f}{\partial t}(t,\gamma(t))+d_2f(t,\gamma(t),\gamma'(t))=f_2(t,\gamma(t))$$

其中 $f_2(t,y):=\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)+d_2f(t,y,f(t,y))$。以此类推，证明存在实解析函数 $f_n\colon W\to E$，对所有整数 $n\ge 2$ 均成立，使得方程 (2.112) 的每个实解析解 $\gamma\colon I\to E$ 都满足

$$\gamma^{(n)}(t)=f_n(t,\gamma(t))\quad\text{for all } n\in\mathbb{N}\text{ and } t\in I.$$

(b) 推导出，如果 $\gamma_j\colon I_j\to E$ 是方程 (2.112) 在 $j\in\{1,2\}$ 上的实解析解，那么 γ_1 和 γ_2 在 t_0 的某个邻域内一致。由此推知 $\gamma_1|_{I_1\cap I_2}=\gamma_2|_{I_1\cap I_2}$。

(c) 证明，如果方程 (2.112) 有实解析解，那么它也有一个极大实解析解 $\gamma^{\omega}_{t_0,\ y_0}\colon I^{\omega}_{t_0,\ y_0} \to E$ （使得每个实解析解都是前者的限制）。

(d) 假设 (2.112) 对所有 $(t_0, y_0) \in W$ 都有实解析解，定义 $\Omega^{\omega} := \bigcup_{(t_0,y_0)\in W} I^{\omega}_{t_0,\ y_0} \times \{(t_0, y_0)\}$ 以及 $\mathrm{Fl}^{\omega}\colon \Omega^{\omega} \to E$, $\mathrm{Fl}^{\omega}(t, t_0, y_0) := \mathrm{Fl}^{\omega}_{t,t_0}(y_0) := \gamma^{\omega}_{t_0,y_0}(t)$。证明：若给定 $(t_0, y_0) \in W$，则 $t_1 \in I_{t_0,y_0}$ 与 $t_2 \in I_{t_1,\mathrm{Fl}^{\omega}(t_1,t_0,y_0)}$，进而 $t_2 \in I_{t_0,y_0}$ 以及

$$\mathrm{Fl}^{\omega}_{t_2,t_0}(y_0) = \mathrm{Fl}^{\omega}_{t_2,t_1}(\mathrm{Fl}^{\omega}_{t_1,t_0}(y_0)). \tag{2.113}$$

练习 2.4.3. 设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 为非退化区间，$(E, \|\cdot\|)$ 为赋范空间，$U \subseteq E$ 为子集，且 $f\colon J \times U \to E$ 为函数。假设存在局部勒贝格可积函数 $g\colon J \to [0, \infty]$，使得

$$\mathrm{Lip}\, f(t, \cdot) \le g(t) \quad \text{for all } t \in J.$$

证明 $y'(t) = f(t,\ y(t))$ 满足解的局部唯一性。

习题 2.4.4。设 $E := \ell^2$ 是平方可和复数序列的希尔伯特空间。对于 $t \in \mathbb{R}$，定义 $A(t) \in \mathcal{L}(E)$，其中 $\|A(t)\|_{\mathrm{op}} = 1$ 通过以下方式给出

$$A(t)(x) := (e^{int} x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{for } x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E.$$

证明映射 $\widehat{A}\colon \mathbb{R} \times E \to E, (t,\ x) \mapsto A(t)(x)$ 是连续的。证明映射 $A\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)_b$, $t \mapsto A(t)$ 不连续。

习题 2.4.5。设 $U \subseteq \mathbb{C}$ 是一个开子集，E 是一个复巴拿赫空间，$f\colon U \to E$ 是一个连续函数。证明，若微分方程 $y'(z) = f(z)$ 在非空开连通子集 $J \subseteq U$ 上存在一个 $C^1_{\mathbb{C}}$-解 $\gamma\colon J \to E$，则 $f|_J$ 是复解析的，因此 $C^1_{\mathbb{C}}$。

因此，在定理 2.4.34 中不能省略条件 $k \ge 1$。

习题 2.4.6。设 J 为非退化区间，E 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为具有稠密内部的局部凸子集，$W \subseteq J \times U$ 为开子集，且 $f\colon W \to E$ 为满足 $y'(t) = f(t,\ y(t))$ 存在局部 C^1-流的函数。令 $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to U, (t,\ t_0,\ y_0) \mapsto \mathrm{Fl}(t,\ t_0,\ y_0) = \mathrm{Fl}_{t,\ t_0}(y_0)$ 为极大流；记

$$\partial_1 \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial t}\, \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0) := d\,\mathrm{Fl}(t, t_0, y_0, 1, 0, 0)$$

并且对 $(t, t_0, y_0) \in \Omega$, $\partial_2 \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial t_0}\, \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0) := d\,\mathrm{Fl}(t, t_0, y_0, 0, 1, 0)$。由于 $I_{t_0,y_0} \to E$, $t \mapsto \mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0)$ 满足 $y'(t) = f(t, y(t))$，$y(t_0) = y_0$，因此有

$$\mathrm{Fl}(t_0, t_0, y_0) = y_0 \ \text{ for all } (t_0, y_0) \in W \tag{2.114}$$

and

$$\partial_1 \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0) = f(t, \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0)) \ \text{ for all } (t, t_0, y_0) \in \Omega. \tag{2.115}$$

值得注意的是，对于所有的 $(t_0, y_0) \in W$，$\partial_1 \mathrm{Fl}(t_0, t_0, y_0) = f(t_0, y_0)$。

(a) 对 (2.114) 关于 t_0 求导，证明

$$\partial_2 \mathrm{Fl}(t_0, t_0, y_0) = -\partial_1 \mathrm{Fl}(t_0, t_0, y_0) = -f(t_0, y_0)$$

对所有的 $(t_0, y_0) \in W$。还要推导出

$$d\,\mathrm{Fl}_{t_0,t_0}(y_0, z) = z \ \text{ for all } (t_0, y_0) \in W \text{ and } z \in E. \tag{2.116}$$

(b) 若 $g\colon U \to F$是到局部凸空间 F 的 C^1-函数，证明

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} g\big(\mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0)\big) = dg\big(y_0, f_{t_0}(y_0)\big)$$

对所有 $(t_0, y_0) \in W$，其中 $f_{t_0}(y_0) := f(t_0, y_0)$。

(c) 若 f存在局部 C^2-流，由 (2.116) 推出 $d^{(2)}\mathrm{Fl}_{t_0,t_0}(y_0, z, w) = 0$对所有 $(t_0, y_0) \in W$以及 $z, w \in E$ 均成立。

(d) 若 f 存在局部 C^2-流，且 $g\colon U \to E$ 是一个 C^1-映射，证明

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} d\,\mathrm{Fl}_{t_0,t}\big(\mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0), g(\mathrm{Fl}_{t,t_0}(y_0))\big) = dg\big(y_0, f_{t_0}(y_0)\big) - df_{t_0}\big(y_0, g(y_0)\big)$$

对所有 $(t_0, y_0) \in W$ 均成立。

[利用施瓦茨定理，得到 $d^{(2)}\mathrm{Fl}((t_0, t_0, y_0, g\,y_0), (0,1,0), (0\,0\,g\,y_0)) = d\partial_2(t_0\,t_0\,y_0, (0\,0\,g\,y_0)) = (0,0,(\,))\,(0,1,0))$

Fl((,,) ( ) (,,( ))) Fl((,,) (,,( ))),这等于 $-df_{t_0}(y_0, g(y_0))$。]

习题 2.4.7. 证明定理 2.4.29 中的流 Fl 不仅是 C^k，而且 $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Fl}\colon \Omega \to E$也是 C^k。

[注意，$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Fl}(t, t_0, y_0, p) = f(t, \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0, p)\ p)$。]

习题 2.4.8.设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 和 $P \subseteq F$ 是子集，$f\colon J \times U \times P \to E$ 是一个函数，并且 $(t_0, y_0, p_0) \in J \times U \times P$。证明，一个 C^1-函数 $\gamma\colon J \to E$ 是下列方程的解

$$y'(t) = f(t, y(t), p_0), \quad y(t_0) = y_0$$

当且仅当 $\eta\colon J \to E \times F$, $\eta(t) := (\gamma(t)\ p_0)$ 是下列方程的解

$$w'(t) = g(t, w(t)), \quad w(t_0) = (y_0, p_0)$$

对于 $g\colon J \times U \times P \to E \times F$, $g(t, y, p) := (f(t, y, p), 0)$。

习题 2.4.9. 设 E 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，$J \subseteq \mathbb{R}$ 是非退化区间，$W \subseteq J \times U$ 是开子集，且 $f\colon W \to E$ 是一个 C^1-映射，使得 $y'(t) = f(t, y)$ 存在局部 C^1-流。令 $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to E$ 为该流；因此，对所有 $(t, t_0, x) \in \Omega$，有 $\frac{d}{dt}\mathrm{Fl}_{t,t_0}(x) = f(t, \mathrm{Fl}_{t,t_0}(x))$，且对所有 $(t_0, x) \in W$，有 $\mathrm{Fl}_{t_0,t_0}(x) = x$。

(a) 验证 $\Omega \subseteq J \times U$ 是开子集，$\mathrm{Fl} \in C^0(\Omega, E)$，$\mathrm{Fl}(t, t_0, x) \in C^1(\Omega, E)$，并由此得出 Fl 在 $\Omega \subseteq J \times J \times U$ 上是 $C^{1,1}$。(b) 根据 (a)，对所有 $(t, t_0, x) \in \Omega$ 和 $y \in E$，导数 $\frac{d}{dt}(d\,\mathrm{Fl}_{t,t_0}(x, y))$ 均存在。利用命题 1.7.21，证明

$$\frac{d}{dt} d\,\mathrm{Fl}_{t,t_0}(x, y) = d_2 f(t, \mathrm{Fl}_{t,t_0}(x), d\,\mathrm{Fl}_{t,t_0}(x, y)).$$

值得注意的是，对于所有的 $(t_0, x) \in W$和 $y \in E$，$\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}\mathrm{Fl}_{t,t_0}(x, y) = d_2 f(t_0, x, y)$。

我们来讨论用于求初值问题近似解的欧拉方法，以及皮亚诺存在定理。在习题 2.4.10 和习题 2.4.11 中，我们令 $a<b$ 为实数，$(E,\|\cdot\|_E)$ 为巴拿赫空间，$y_0\in E$ 和

$$f\colon [a,b]\times \overline{B}_R^E(y_0)\to E$$

是一个连续函数，使得

$$M:=\sup\{\|f(t,y)\|_\infty\colon (t,y)\in[a,b]\times\overline{B}_R^E(y_0)\}<\infty \text{ and } (b-a)M\le R.$$

给定 $[a,b]$ 的一个剖分 $Z=(t_0,\dots,t_\ell)$，其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_\ell=b$，我们用 $m(Z)$ 表示 $j\in\{1,\dots,\ell\}$ 中 t_j-t_{j-1} 的最大值。递归地，我们定义$y_j\in E$，其中 $\|y_j-y_0\|_E\le(t_j-a)M\le(b-a)M\le R$，具体如下

$$y_j:=y_{j-1}+(t_j-t_{j-1})f(t_{j-1},y_{j-1}) \text{ for } j\in\{1,\dots,\ell\}.$$

与 Z 对应的欧拉折线是分段仿射线性函数$\gamma_Z\colon [a,b]\to B_R^E(y_0)$，它将 $t\in[t_{j-1},t_j]$ 映射到 $\gamma_Z(t):=y_{j-1}\mp\frac{t-t_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}(y_j-y_{j-1})$，其中 $j\in\{1,\dots,\ell\}$。因此，若我们~~定义 τ_Z~~：$[a,b]\to Z$，使其满足 $\tau_Z(t):=t_{j-1}$当 $t\in[t_{j-1},t_j[$ 且 $j\in\{1,\dots,\ell-1\}$，或当 $j=\ell$ 且 $t\in[t_{\ell-1},b]$时，则

$$\gamma_Z(t)=y_0+\int_a^t f(\tau_Z(s),\gamma_Z(\tau_Z(s)))\,ds \tag{2.117}$$

对所有的 $t\in[a,b]$，其中 $\gamma_Z(\tau_Z(s))=y_{j-1}$ 若 $\tau_Z(s)=t_{j-1}$。注意

$$\operatorname{Lip}(\gamma_Z)\le M \quad\text{and} \tag{2.118}$$

$$|\tau_Z(s)-s|\le m(Z) \quad \text{for all } s\in[a,b]. \tag{2.119}$$

令 $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$为 $[a,b]$ 的一个剖分序列，使得 $m(Z_k)\to 0$当 $k\to\infty$时成立，并简记 $\gamma_k:=\gamma_{Z_k}$ 和 $\tau_k:=\tau_{Z_k}$。令 $F:=C([a,b],E)$，赋予其上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$，并考虑由下式确定的映射 $g\colon B_R^F(y_0)\to F$

$$g(\eta)(t):=y_0+\int_a^t f(s,\eta(s))\,ds \text{ for } \eta\in\overline{B}_R^F(y_0) \text{ and } t\in[a,b], \tag{2.120}$$

将 y_0 记作 $[a,b]\to E,\ t\mapsto y_0$。由于 $(b-a)M\le R$，对每个 $\eta\in B_R^F(y_0)$，都有 $g(\eta)\in B_R^F(y_0)$。通过 $\|(t,y)\|:=\max\{|t|,\|y\|_E\}$ 给 $\mathbb{R}\times E$ 赋予一个范数。

习题 2.4.10（欧拉方法）。

（a）如果 E 是有限维的，那么 $[a,b]\times B_R^E(y_0)$ 是紧集，因此 f 是一致连续的。给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$ 使得对于所有 $(s_1,\ y_1)$、$(s_2,\ y_2)\in[a,b]\times B_R^E(y_0)$，若 $|s_2-s_1|\le\delta$ 且 $\|v_2-v_1\|_E\le\delta$，则 $\|f(s_2,\ v_2)-f(s_1,\ v_2)\|_E\le\varepsilon$。利用

$$g(\gamma_k)(t)-\gamma_k(t)=\int_a^t\Big(f\big(s,\gamma_k(s)\big)-f\big(\tau_k(s),\gamma_k(\tau_k(s))\big)\Big)\,ds,$$

证明，若 k 足够大，使得 $\max\{1,M\}m(Z_k)\le\delta$，则 $\|g(\gamma_k)-\gamma_k\|_\infty\le\varepsilon(b-a)$。

现在假设 f 如前所述，在其第二个变量上满足全局利普希茨条件，即 $L := \sup\{\mathrm{Lip}(f(t,\cdot)) : t \in [a,b]\} < \infty$。选取足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\theta := \frac{L^n}{n!}(b-a)^n < 1$；那么 $g^n : B_R^F(y_0) \to B_R^F(y_0)$ 是一个压缩映射，且 $\mathrm{Lip}(g^n) \le \theta$；此外，$\mathrm{Lip}(g) \le (b-a)L$（参见定理 2.4.23 的证明）。令 $\gamma : [a,b] \to B_R^E(y_0)$ 为方程 $y'(t) = f(t, y(t))$，$y(t_0) = y_0$ 的解，该解由定理 2.4.23 保证存在。

(b) 利用望远镜求和 $g^n(\gamma_k) - \gamma_k = \sum_{j=1}^{n} (g^j(\gamma_k) - g^{j-1}(\gamma_k))$，推出对于 (a) 中的 k，有 $\|g^n(\gamma_k) - \gamma_k\|_\infty \le C\varepsilon$，其中 $C := (b-a)\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Lip}(g)^j$。利用引理 2.3.24 中的先验估计 (2.44)，推出 $\|\gamma - \gamma_k\|_\infty \le \frac{C}{1-\theta}\varepsilon$。因此，当 $k \to \infty$ 时，$\gamma_k \to \gamma$ 一致地成立。

(c) 证明：若对任意巴拿赫空间 E，额外假设 f 一致连续，则 (a) 和 (b) 的所有结论仍然成立。例如，若 f 利普希茨连续，则后者成立；证明 $\|g(\gamma_k) - \gamma_k\|_\infty \le \mathrm{Lip}(f) \max\{1, M\} m(Z_k)$ 且

$$\|\gamma - \gamma_k\|_\infty \le \frac{C \,\mathrm{Lip}(f) \max\{1, M\}}{1-\theta} m(Z_k) \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}$$

在这种情况下，C 如 (b) 中所示。

习题 2.4.11（Peano 存在定理）。如果 E 是有限维的，那么 $B_R^E(y_0)$ 是紧的。由 $\mathrm{Lip}(\gamma_k) \le M$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立，可推出 $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$ 等度连续。由于对每个 $t \in [a,b]$ 和 $k \in \mathbb{N}$，$\gamma_k(t) \in B_R^E(y_0)$，Ascoli 定理表明 $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$ 在 $(C([a,b], E), \|\cdot\|_\infty)$ 中相对紧。因此，取一个子序列后，我们可以假设对某个 $\gamma \in C([a,b], E)$，$\gamma_k \to \gamma$ 一致收敛（于是 $\gamma \in B_R^F(y_0)$）。将 (2.120) 中的 g 写为

$$g(\eta) = y_0 + I(f_*(\eta)),$$

其中 $f_* : C([a,b], B_R^E(y_0)) \to C([a,b], E)$，$\eta \mapsto f \circ (\mathrm{id}_{[a,b]}, \eta)$ 根据引理 A.6.20 是连续的，而 $I : C([a,b], E) \to C([a,b], E)$ 是由

$$I(\eta)(t) = \int_a^t \eta(s)\, ds$$

给出的连续线性映射。由习题 2.4.10 (a) 可知 $\Delta_k := g(\gamma_k) - \gamma_k \to 0$。令 $k \to \infty$ 代入

$$\gamma_k = g(\gamma_k) - \Delta_k = y_0 + I(f_*(\gamma_k)) - \Delta_k,$$

推导出 $\gamma = g(\gamma)$。因此，γ 是 $y'(t) = f(t, y(t))$ 的解，$y(a) = y_0$。

2.5 流形上的微分方程

在第 2.4 节中，我们已经讨论了局部凸空间子集上的微分方程，重点关注局部结果。现在我们转而讨论整体性质，这些性质在流形上的微分方程框架下研究更为恰当。对于读者而言，本节只预设其了解有关流形的最基本定义：以局部凸空间为模型的 C^k-流形（可以带边界）的概念；[7]

[7] 本节中的所有结果均适用，只要将“边界”理解为最一般形式的“粗糙边界”。

这类流形之间的 C^k-映射 $f\colon\ M \to N$ 的概念；以及切映射 $Tf\colon\ TM \to TN$。本节中的所有流形都定义在基域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 上。

定义 2.5.1. 若 M 是一个 C^1-流形（可能带有边界），$I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，且 $\gamma\colon I \to M$ 是一个 C^1-映射，则我们通过如下方式定义 $\dot\gamma\colon I \to TM$

$$\dot\gamma(t) := T\gamma(t,1) \in T_{\gamma(t)}M \quad \text{for } t \in I,$$

照常将 TI 与 $I \times \mathbb{R}$ 等同。因此，若 $M = U$ 是局部凸空间 E 的一个开子集，则

$$\dot\gamma = (\gamma, \gamma')\colon I \to TU = U \times E.$$

在本节中对 $\dot\gamma$ 和 γ' 使用不同的记号是有益的；在本书后面的部分，我们常常用 γ' 代替 $\dot\gamma$，其含义将由上下文明确。

定义 2.5.2. 设 M 是以局部凸空间 E 为模型的 C^1-流形。设 $W \subseteq \mathbb{R} \times M$ 是一个子集，且 $f\colon W \to TM$ 是一个函数，使得对所有 $(t,y) \in W$，都有 $f(t,y) \in T_yM$。

(a) 我们称定义在非退化区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数 $\gamma\colon I \to M$ 是微分方程的解

$$\dot y(t) = f(t, y(t)) \tag{2.121}$$

若 γ 是一个 C^1-映射，且对所有 $t \in I$ 和 $\dot\gamma(t) = f(t,\gamma(t))$，均有 $(t,\gamma(t)) \in W$。

(b) 若 $(t_0, y_0) \in W$，且 $\gamma\colon I \to M$ 是 (2.121) 的一个解，并满足 $t_0 \in I$ 和 $\gamma(t_0) = y_0$，则称 γ 为初值问题的解

$$\begin{cases} \dot y(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.122}$$

(c) 若满足以下条件，我们称微分方程 (2.121) 具有解的局部唯一性：对于 (2.121) 的任意两个解 $\gamma_1\colon I_1 \to M$ 和 $\gamma_2\colon I_2 \to M$，若对某个 $t_0 \in I_1 \cap I_2$ 有 $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$，则存在 t_0 在 $I_1 \cap I_2$ 中的一个邻域 I，使得 $\gamma_1|_I = \gamma_2|_I$。

(d) 若在某个非退化区间 $J \subseteq \mathbb{R}$ 上，W 是 $J \times M$ 的子集，则称微分方程 (2.121) 满足解的局部存在性（相对于 J），当且仅当满足以下条件：对于所有的 $(t_0, y_0) \in W$，都存在一个解 $\gamma\colon I \to M$，它是初值问题 (2.122) 的解，且其定义域 I 在 J 中相对开。

注 2.5.3. (a) 在大多数应用中，对于一个非退化区间 $J \subseteq \mathbb{R}$，我们有 $W = J \times M$。如果 M 是一个 C^{k+1}-流形，并且如上所述的 $f\colon J \times M \to TM$ 对某个 $k \in \mathbb{N}_0$ 是 C^k，那么我们可以将 f 视为一个时变

类为 C^k 的向量场，定义在 M 上，其含义是 f 是 C^k，并且 $f_t := f(t,\cdot): M \to TM$ 对每个 $t \in J$ 都是定义在 M 上的一个 C^k-向量场。

(b) 若 $f: W \to TM$ 如定义 2.5.2 中所述，且 $\varphi: U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$ 是 M 的一个坐标图，则定义 $W_\varphi := \{(t, \varphi(y)) : (t,y) \in W \cap (\mathbb{R} \times U_\varphi)\} \subseteq \mathbb{R} \times V_\varphi$ 和

$$f_\varphi : W_\varphi \to E, \quad f_\varphi(t,y) := d\varphi f(t, \varphi^{-1}(y)).$$

若 $\gamma: I \to M$ 是非退化区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的一个 C^1-映射，并且满足 $\gamma(I) \subseteq U_\varphi$，那么 γ 是 (2.121) 的解，当且仅当 $\varphi \circ \gamma$ 是 $y'(t) = f_\varphi(t, y(t))$ 的解。

在引理 2.4.6 和注 2.4.5 的证明中用 M 替换 E，可得:

引理 2.5.4。考虑一个具有解的局部唯一性的微分方程 (2.121)。若 $\gamma_1: I_1 \to M$ 和 $\gamma_2: I_2 \to M$ 是 (2.121) 的解，且对于某个 $t_0 \in I_1 \cap I_2$，有 $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$，则 $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$。□

引理 *2.5.5.* 考虑微分方程 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$，它满足解的局部唯一性和局部存在性，其中 M 是一个以局部凸空间为模型的流形（可能带边界），$J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，$f: W \to TM$ 是定义在 $J \times U$ 的子集 W 上的函数，且对所有 $(t,y) \in W$，都有 $f(t,y) \in T_y(M)$。对于每个 $(t_0, y_0) \in W$，初值问题 *(2.122)* 存在一个解 $\gamma: I \to E$，使得

$$I_\eta \subseteq I \quad and \quad \eta = \gamma|_{I_\eta} \tag{2.123}$$

对于 *(2.122)* 的每个解 $\eta: I_\eta \to M$。函数 γ 由后一个性质唯一确定，并且 I 在 J 中相对开。□

定义 2.5.6. 引理 2.5.5 中所述的解 $\gamma: I \to M$，对于 $(t_0, y_0) \in W$，称为初值问题 (2.122) 的极大解；为强调其对 t_0 和 y_0 的依赖性，我们也将 $\gamma_{t_0,\, y_0}: I_{t_0,\, y_0} \to M$ 写作 γ。由下式给出的子集 $\Omega \subseteq J \times J \times M$

$$\Omega := \bigcup_{(t_0,y_0) \in W} I_{t_0,y_0} \times \{(t_0,y_0)\}$$

是所谓（极大）流 Fl 的定义域：$\Omega \to M$，$\mathrm{Fl}(t,\, t_0,\, y_0) := \gamma_{t_0,\, y_0}(t)$。给定 t，$t_0 \in J$，令 $\Omega_{t,\, t_0} := \{y_0 \in M : (t_0,\, y_0) \in W$ 并且 $t \in I_{t_0,\, y_0}\}$，考虑部分映射

$$\mathrm{Fl}_{t,t_0} : \Omega_{t,t_0} \to M, \quad y_0 \mapsto \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0).$$

在引理 2.5.5 和定义 2.5.6 的情形下，我们可以重复引理 2.4.9 的证明，并得到:

引理 2.5.7. (a) 若 $(t_0, y_0) \in W$ 且 $t_1 \in I_{t_0,y_0}$，则 $\gamma_{t_0,y_0} = \gamma_{t_1,y_1}$ 满足 $y_1 := \gamma_{t_0,y_0}(t_1) = \mathrm{Fl}_{t_1,t_0}(y_0)$。

(b) 若 $t_2 \in I_{t_1,y_1}$ 属于 *(a)*，则 $t_2 \in I_{t_0,y_0}$ 且 $Fl_{t_2,t_0}(y_0) = Fl_{t_2,t_1}(Fl_{t_1,t_0}(y_0))$。*(c)* 对所有 $t_1, t_0 \in J$，映射 Fl_{t_1,t_0} 是单射，$\Phi_{t_1,t_0}(\Omega_{t_1,t_0}) = \Omega_{t_0,t_1}$，且 $Fl_{t_0,t_1} = (Fl_{t_1,t_0})^{-1}$。□

以下命题可仿照引理 2.4.30 证明；只需在其证明中分别将 y'、E 和 F 替换为 $\dot{y}$、M 和 N。

命题 *2.5.8.* 设 M 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^1-流形。设 $N \subseteq M$ 是一个闭子集，且是以闭向量子空间 $F \subseteq E$ 为模型的子流形；设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间。设 $W \subseteq J \times M$ 是一个子集，且 $f\colon W \to TM$ 是一个函数，使得对所有 $(t,y) \in W$，$f(t,y) \in T_yM$；并且对所有 $(t,y) \in W \cap (\mathbb{R}\times N)$，$f(t,y) \in T_yN$。定义 $g\colon W \cap (\mathbb{R}\times N) \to TN$, $g(t,y) := f(t,y)$。假设 $\dot{y}(t) = f(t,y(t))$ 满足解的局部唯一性；那么 $\dot{y}(t) = g(t,y(t))$ 也满足解的局部唯一性。此外，若 $\dot{y}(t) = g(t,y(t))$ 满足解的局部存在性，则有如下结论：若 $\gamma\colon I \to E$ 是 $\dot{y}(t) = f(t,y(t))$ 的一个解，且对于某个 $t_0 \in I$，$y(t_0) \in N$，则 $\gamma(I) \subseteq N$，并且 γ 是 $\dot{y}(t) = g(t,y(t))$ 的解。□

定义 2.5.9. 设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。设 M 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^k-流形（若 $k \geq 1$），或 C^1-流形（若 $k = 0$），并且可以带有边界。设 $f\colon W \to TM$ 是开子集 $W \subseteq J \times M$ 上的函数，使得对于所有 $(t,y) \in W$，$f(t,y) \in T_yM$。如果微分方程 $\dot{y}(t) = f(t,y(t))$ 存在局部C^k-流，则称其具有局部C^k-流；也就是说，对于所有 $(t,y) \in W$，存在一个相对开区间 $I \subseteq J$（其中 $t \in I$）、M 中包含 y 的一个开邻域 V，以及一个 C^k-函数

$$\Phi\colon I \times I \times V \to M$$

满足以下性质：

(a) 对所有 $(t_0,\ y_0) \in I \times V$，函数 $I \to M$, $t \mapsto \Phi_{t,\ t_0}(y_0) := \Phi(t,\ t_0,\ y_0)$ 是初值问题 (2.122) 的一个解；(b) 存在一个开 y-邻域 $Y \subseteq V$，使得对于所有$t_0,\ t_1 \in I$，$\Phi_{t_1,\ t_0}(Y) \subseteq V$，并且

$$\Phi_{t_2,t_1}(\Phi_{t_1,t_0}(y_0)) = \Phi_{t_2,t_0}(y_0) \text{ for all } t_0,t_1,t_2 \in I \text{ and } y_0 \in Y.$$

若 J 为开区间，M 为以局部凸空间为模型的实解析流形，f（如上所述）是实解析的，并且满足 (a) 和 (b) 的 Φ 可以选为实解析的，那么我们称 $\dot{y}(t) = f(t,\ y(t))$ 允许实解析局部流。

引理 2.5.10. 若 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$（如定义 *2.5.9* 中所述）允许局部 C^1-流，则它满足解的局部唯一性。

证明。注意，$y'(t) = f_\varphi(t,\ y(t))$（如注 2.5.3(b) 所述）对 M 的每个坐标图 φ 都存在局部 C^1-流，因此根据命题 2.4.20，满足解的局部唯一性。结论得证。□

注记2.5.11。若 M、k 和 $f\colon W \to TM$ 如定义 2.5.9 所述，且 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ 满足局部存在性和解的局部唯一性，那么它存在局部 C^k-流，当且仅当相应极大流 Fl 的定义域 Ω 是 $J \times J \times M$ 中每个 $(t, t, y) \in W$ 处的 (t, t, y) 的邻域，并且 Fl 在 Ω 中的某个开邻域 (t, t, y) 上是 C^k 的。事实上，对于如定义 2.5.9 所述的 $\Phi\colon I \times I \times V \to M$，有 $I \times I \times V \subseteq \Omega$ 且 $\mathrm{Fl}|_{I\times I\times V} = \Phi$。反之，我们可以将 Φ 定义为 Fl 的限制。

为阐释一般理论，我们考虑两个例子，即 1.) 李群 G 上的含时左不变向量场；以及 2.) 右 G-空间 M 上的含时基本向量场。这些例子面向熟悉以局部凸空间为模型的李群概念以及基本李理论事实（如第 5.1 节所述）的读者。

在接下来的两个引理中，设 G 是一个以局部凸空间为模型的李群，并令 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G) := T_e(G)$ 为 G 在单位元 e 处的切空间。我们将使用光滑左作用

$$G \times T(G) \to T(G),\ (g, v) \mapsto gv := T(\lambda_g)v \tag{2.124}$$

G 在其切丛上的作用，其中 $\lambda_g\colon G \to G, x \mapsto gx$ 是由 g 给出的左平移。每个 $v \in \mathfrak{g}$ 都定义一个左不变向量场

$$v_l\colon G \to T(G), \quad v_l(g) := gv.$$

令 $\mathcal{V}(G)^l$ 为 G 上左不变向量场构成的向量空间。给定一个 C^k-曲线 $\gamma\colon [0,1] \to \mathfrak{g}$，满足 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，我们可以考虑映射

$$[0,1] \to \mathcal{V}(G)^l, \quad t \mapsto \gamma(t)_l$$

以及相应的时变向量场

$$[0,1] \times G \to T(G), \quad (t, g) \mapsto \gamma(t)_l(g) = g\gamma(t)$$

它是一个 C^k-映射，因为 γ 是 C^k，且作用 (2.124) 是光滑的。C^1-曲线 $\eta\colon [0,1] \to G$ 满足微分方程

$$\dot{y}(t) = \gamma(t)_l(y(t)) = y(t)\gamma(t)$$

当且仅当其左对数导数 $\delta(\eta)\colon [0,1] \to \mathfrak{g}, \ t \mapsto \eta(t)^{-1}\dot{\eta}(t)$ 满足 $\delta(\eta) = \gamma$。在这种情况下，η 是 C^{k+1}（参见注 2.4.5(c)）。

引理 2.5.12. 若 $\gamma\colon [0,1] \to \mathfrak{g}$ 是一条 C^k-曲线，且存在一条 C^{k+1}-曲线 $\eta\colon [0,1] \to G$，其左对数导数为 $\delta(\eta) = \gamma$，则

$$\dot{y}(t) = \gamma(t)_l(y(t)) = y(t)\gamma(t)$$

满足解的局部存在性和局部唯一性。相应的极大流定义在整个 $[0,1] \times [0,1] \times G$ 上；它是 C^{k+1}- 映射

$$\mathrm{Fl}\colon [0,1] \times [0,1] \times G \to G, \ \mathrm{Fl}(t, t_0, y_0) := y_0\eta(t_0)^{-1}\eta(t).$$

证明。由于乘法映射 $\sigma\colon G\times G\to G$ 是 G 在自身上的光滑右作用，并且对所有 $g\in G$ 和 $v\in\mathfrak{g}$，$v_\sharp(g)=T_e(\lambda_g)v=T\sigma(g,\cdot)v$，该引理是后续引理 2.5.13 的一个特殊情形。□

对于如前所述的 G，设 M 是一个以局部凸空间（可能带有粗糙边界）为模型的光滑流形，且 $\sigma\colon M\times G\to M$ 是 G 在 M 上的光滑右作用。给定 $v\in\mathfrak{g}$，我们定义相应的基本向量场 $v_\sharp$ 于 M 上：

$$v_\sharp\colon M\to TM,\quad v_\sharp(p):=T(\sigma_p)(v)=T(\sigma)(0_p,v),$$

其中 $M\to TM$，$p\mapsto 0_p\in T_pM$ 是零截面（它是光滑的），$\sigma_p:=\sigma(p,\cdot)\colon G\to M$ 是 $p\in M$ 处的轨道映射，并且按照惯例，将 $T(M\times G)$ 识别为 $T(M)\times T(G)$。若 $\gamma\colon[0,1]\to\mathfrak{g}$ 是一条 C^k-曲线，则时变向量场

$$[0,1]\times M\to TM,\ (t,p)\mapsto\gamma(t)_\sharp(p)=T\sigma(0_p,\gamma(t))$$

是 C^k。

引理 2.5.13。若 $\gamma\colon[0,1]\to\mathfrak{g}$ 是一条 C^k-曲线，并且存在一条 C^{k+1}-曲线 $\eta\colon[0,1]\to G$，其左对数导数为 $\delta(\eta)=\gamma$，则

$$\dot y(t)=\gamma(t)_\sharp(y(t))$$

满足解的局部存在性和局部唯一性。相应的极大流定义在整个 $[0,1]\times[0,1]\times M$ 上；它是 C^{k+1}- 映射

$$\mathrm{Fl}\colon[0,1]\times[0,1]\times M\to M,\ \mathrm{Fl}(t,t_0,y_0):=\sigma(y_0,\eta(t_0)^{-1}\eta(t)).\qquad(2.125)$$

证明。简记 $\sigma(p,g)=:pg$，其中 $p\in M$ 且 $g\in G$。我们定义

$$\Phi\colon[0,1]\times[0,1]\times M\to M,\quad(t,t_0,y_0)\mapsto y_0\eta(t_0)^{-1}\eta(t)$$

并记 $\Phi_{t,t_0}(y_0):=\Phi(t,t_0,y_0)$。那么 Φ 是一个 C^{k+1}-映射。给定 $y_0\in M$ 和 $t_0\in[0,1]$，我们通过 $\zeta(t):=\eta(t_0)^{-1}\eta(t)$ 定义 $\zeta\colon[0,1]\to G$，并考虑 $\varphi\colon[0,1]\to M$，$\varphi(t):=y_0\zeta(t)=\Phi_{t,t_0}(y_0)$。那么 $\delta(\zeta)=\delta(\eta)=\gamma$，并且

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\varphi(t+s)=\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}y_0\zeta(t+s)\\&=\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\sigma(y_0\zeta(t),\zeta(t)^{-1}\zeta(t+s))=T(\sigma_{y_0\zeta(t)})\delta(\zeta)(t)=\gamma(t)_\sharp(\varphi(t)),\end{aligned}$$

由此 φ 是 (2.125) 的解。对所有 $t,t_0,t_1\in[0,1]$ 和 $y_0\in M$，令 $y_1:=\Phi_{t_1,t_0}(y_0)=y_0\eta(t_0)^{-1}\eta(t_1)$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_{t,t_1}(\Phi_{t_1,t_0}(y_0))&=\Phi_{t,t_1}(y_1)=y_1\eta(t_1)^{-1}\eta(t)\\&=y_0\eta(t_0)^{-1}\eta(t_1)\eta(t_1)^{-1}\eta(t)=y_0\eta(t_0)^{-1}\eta(t)=\Phi_{t,t_0}(y_0).\end{aligned}$$

因此，Φ 是方程 (2.125) 的局部流。因此，方程 (2.125) 满足解的局部唯一性（见引理 2.5.10）和局部存在性。此外，$\mathrm{Fl}=\Phi$.□

注 2.5.14. (a) 若 $k=\infty$，则引理 2.5.13 中的唯一性结果（因而引理 2.5.12 中的结果）也可由引理 D.1.12 推得。

(b) 关于引理 2.5.12 中唯一性结论的另一种基于李理论论证的证明，参见引理 5.5.4。

定理 2.5.15. 设 $J\subseteq\mathbb{R}$ 是一个非退化区间，且 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。设 M 是一个 C^k-流形（若 $k\geq 1$），或者是一个 C^1-流形（若 $k=0$），它可以有边界，并以局部凸空间 E 为模型。设 $f\colon W\to TM$ 是开子集 $W\subseteq J\times M$ 上的一个函数，使得对于所有 $(t,y)\in W$，都有 $f(t,y)\in T_yM$。假设 $\dot{y}(t)=f(t,y(t))$ 存在局部流；若 $k=0$，进一步假设 $\dot{y}(t)=f(t,y(t))$ 满足解的局部唯一性。令 $\mathrm{Fl}\colon \Omega\to M$ 为 $\dot{y}(t)=f(t,y(t))$ 的极大流。那么有：

(a) 极大流 Fl 的定义域 Ω 在 $J\times J\times M$ 中是开集，且 Fl 是 C^k；(b) Ω_{t,t_0} 对所有 $t_0,t\in J$ 在 M 中都是开集，并且映射 $\Phi_{t,t_0}\colon\Omega_{t,t_0}\to\Omega_{t_0,t}$ 是一个C^k-微分同胚。[8]

若 J 是一个开区间，M 是模于局部凸空间的实解析流形，f 是实解析的，且 $\dot{y}(t)=f(t,y(t))$ 存在实解析局部流，那么 Fl: $\Omega\to M$ 也是实解析的，并且映射 $\mathrm{Fl}_{t,t_0}\colon\Omega_{t,t_0}\to\Omega_{t_0,t}$是实解析微分同胚。

证明。 在实解析情形下，令 $k:=\omega$。取参数的单点集，我们可将 Ω 在 $J\times J\times M$ 中的开性以及 Fl 的 C^k性质视为下一结果（定理 2.5.18）的特殊情形。 Ω 的开性蕴含集合 Ω_{t,t_0} 在 M中是开集。由引理 2.5.7(c)，我们知道 $\mathrm{Fl}_{t,t_0}\colon\Omega_{t,t_0}\to\Omega_{t_0,t}$ 是一个双射，其逆映射为 $\mathrm{Fl}_{t_0,t}$。由于 Fl 是 C^k，其部分映射 Fl_{t,t_0} 和 $\mathrm{Fl}_{t_0,t}$ 也都是 C^k。因此，Fl_{t,t_0} 是一个 C^k-微分同胚。□

在以下两个定义中，设 $J\subseteq\mathbb{R}$ 是一个非退化区间，P 是一个以局部凸空间 F 为模型的 C^k-流形，且 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty,\omega\}$，$M$ 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^k-流形（若 $k\geq 1$）或 C^1-流形（若 $k=0$）。若 $k\neq\omega$，则 P 和 M 都可以有边界。若 $k=\omega$，我们假设 J 是一个开区间。设 $W\subseteq J\times M\times P$ 是一个开子集，且 $f\colon W\to TM$ 是一个函数，使得对所有 $(t,\ y,\ p)\in W$，均有 $f(t,\ y,\ p)\in T_yM$。

定义 2.5.16. 若 $\dot{y}(t)=f(t,\ y(t)\ p)$ 对所有 $p\in P$ 都满足解的局部存在性和局部唯一性，则令 $\gamma_{t_0,\ y_0,\ p}\colon I_{t_0,\ y_0,\ p}\to M$ 为该初值问题的极大解

$$\dot{y}(t)=f(t,y(t),p),\quad y(t_0)=y_0 \tag{2.126}$$

对于 $(t_0,\ y_0,\ p)$，$\in W$。我们定义

[8] 若 $k=0$，则 $\Phi_{t,\ t_0}$ 是一个同胚。

$$\Omega := \bigcup_{(t_0,y_0,p)\in W} I_{t_0,y_0,p} \times \{(t_0,y_0,p)\} \subseteq J \times J \times M \times P$$

在这种情况下，并将映射 $\mathrm{Fl}: \Omega \to M$、$\mathrm{Fl}(t,\ t_0,\ y_0,\ p) := \gamma_{t_0,\ y_0,\ p}(t)$ 称为相应的（极大）流。

定义 2.5.17. 我们称微分方程 $\dot{y}(t) = f(t, y(t)\ p)$具有带参数的局部 C^k-流，如果对于所有 $(t, y, p) \in W$，都存在一个相对开区间 $I \subseteq J$，其中 $t \in I$，一个开 y-邻域 $V \subseteq M$，一个开 p-邻域 $Q \subseteq P$，以及一个 C^k-函数

$$\Phi\colon I \times I \times V \times Q \to M$$

具有以下性质：

(a) 对所有 $(t_0, y_0, q) \in I \times V \times Q$，函数 $I \to M$, $t \mapsto \Phi_{t,t_0,q}(y_0) := \Phi(t, t_0, y_0, q)$ 是初值问题 (2.122) 的一个解；(b) 存在一个开 y-邻域 $Y \subseteq V$，使得对于所有 $t_0, t_1 \in I$ 和 $q \in Q$，$\Phi_{t_1,t_0,q}(Y) \subseteq V$，并且

$$\Phi_{t_2,t_1,q}(\Phi_{t_1,t_0,q}(y_0)) = \Phi_{t_2,t_0,q}(y_0) \text{ for all } t_0, t_1, t_2 \in I,\ y_0 \in Y, \text{ and } q \in Q.$$

定理 *2.5.18*。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $J \subseteq \mathbb{R}$ 为非退化区间。设 M 为一个以局部凸空间为模型的 C^k-流形（若 $k \geq 1$），或者为一个以局部凸空间为模型的 C^1-流形（若 $k = 0$），且可能带有边界。设 P 为一个以局部凸空间为模型、可能带有边界的 C^k-流形。设 $f\colon W \to TM$ 是开子集 $W \subseteq J \times M \times P$ 上的一个函数，使得对所有 $(t, y, p) \in W$，$f(t, y, p) \in T_yM$。假设 $\dot{y}(t) = f(t, y(t)\ p)$ 存在带参数的局部 C^k-流；若 $k = 0$，还假设对所有 $p \in P$，$\dot{y}(t) = f(t, y(t)\ p)$ 满足解的局部唯一性。那么我们有：

(a) 相应参数流 Fl: $\Omega \to M$ 的定义域 Ω 在 $J \times J \times M \times P$ 中是开的，并且 Fl: $\Omega \to M$ 是一个 C^k-映射。(b) 若 J 是一个开区间，M 和 P 是以局部凸空间为模型的实解析流形，f 是实解析的，并且 $\dot{y}(t) = f(t, y(t)\ p)$ 存在带参数的实解析局部流，那么 Fl 是实解析的。

证明。在实解析情形中，我们令 $k := \omega$。给定 $(\tau, t_0, y_0, p) \in \Omega$，设 K 为所有满足如下条件的 $t_1 \in I_{t_0,y_0,p}$ 的集合：Ω 包含 $J \times J \times M \times P$ 中 (t_1, t_0, y_0, p) 的一个邻域 $Q(t_1)$，使得 $\mathrm{Fl}|_{Q(t_1)}$ 为 C^k。由定义，K 在 $I_{t_0,y_0,p}$ 中是相对开的。由于该微分方程容许带参数的局部 C^k-流，我们有 $t_0 \in K$。若能证明 K 在 $I_{t_0,y_0,p}$ 中是闭的，则由后一区间的连通性可得 $K = I_{t_0,y_0,p}$。特别地，$\tau \in K$，从而 Ω（它包含 $Q(\tau)$）是 $J \times J \times M \times P$ 中 (τ, t_0, y_0, p) 的一个邻域，且 $\mathrm{Fl}|_{Q(\tau)}$ 为 C^k（由此可推出所有断言）。为证明 K 是闭的，设 θ 属于 K 在 $I_{t_0,y_0,p}$ 中的闭包。由于该微分方程容许带参数的局部流，存在一个开

邻域 $S \subseteq J \times J \times M \times P$，它是 $(\theta, \theta, \gamma_{t_0,y_0,p}(\theta)\ p)$ 的邻域，使得 $S \subseteq \Omega$ 且 $\mathrm{Fl}|_S$ 为 C^k。在缩小 S之后，我们可以假定 $S = I_1 \times Y$，其中 $I_1 \subseteq J$ 是满足 $\theta \in I_1$ 的相对开区间，而 Y是 $J \times M \times P$的一个开子集。存在 $t_2 \in K$ 使得 $(t_2, t_2, \gamma_{t_0,y_0,p}(t_2)\ p) \in S$。在缩小 $Q := Q(t_2)$ 之后，我们可以假定 $Q = I_0 \times Z$，其中 $I_0 \subseteq J$是满足 $t_2 \in I_0$ 的相对开区间，而 $Z \subseteq J \times M \times P$是一个开的 (t_0, y_0, p)-邻域。此外，我们可以假定

$$(t_2, \gamma_{t_1,y_1,q}(t_2), q) \in Y \text{ for all } (t_1, y_1, q) \in Z.$$

现在，引理 2.5.7 表明，对于所有的 (t, t_1, y_1, q)，$(t, t_1, y_1, q) \in \Omega \in I_1 \times Z$ 并且

$$\mathrm{Fl}(t, t_1, y_1, q) = \mathrm{Fl}|_S(t, t_2, \mathrm{Fl}|_Q(t_2, t_1, y_1, q), q),$$

它是 $(t, t_1, y_1, q) \in I_1 \times Z$的一个 C^k-函数。因此 $\theta \in K$，我们推得 K 是闭的。□

定义 2.5.19。设 M 和 N 分别为以赋范空间 $(E, \|\cdot\|_E)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 为模型的 C^1-流形（可以带边界），且 X为一个拓扑空间。若连续映射 $f\colon W \to N$ 定义在子集$W \subseteq X \times M$ 上，并满足以下性质，则称其满足关于第二个变量的局部利普希茨条件：对于每个 $(t, y) \in W$，存在一个t-邻域 $X_0 \subseteq X$、一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$（它是 M 中以 y 为中心的坐标图），以及一个坐标图$\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq F$（它是 N中以 f为中心的坐标图），其中 (t, y) 满足 $f(W \cap (X_0 \times U_\varphi)) \subseteq U_\psi$，使得映射

$$(\mathrm{id}_X \times \varphi)(W \cap (X_0 \times U_\varphi)) \to F,\ (a, b) \mapsto \psi(f(a, \varphi^{-1}(b))),$$

它定义在 $X \times E$ 的一个子集上，并且在第二个变量中满足局部利普希茨条件。[9]

如果 P 还是一个拓扑空间，且 W 是 $X \times M \times P$ 的一个子集，那么我们称映射 $f\colon W \to N$ 在第二个变量中满足局部利普希茨条件，当且仅当映射 $((t,\ p)\ y) \mapsto f(t,\ y,\ p)$ 在 $(X \times P)$ 的相应子集上满足该条件。

推论 2.5.20。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，$k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，且 P 是一个以局部凸空间为模型的 C^k-流形（边界可能非空）。设 M 是一个以巴拿赫空间为模型的 C^{k+1}-流形（若 $k \geq 1$），或者一个 C^2-流形（若 $k = 0$）。设 $W \subseteq J \times M \times P$ 是一个开子集，并且

$$f\colon W \to TM, \quad (t, y, p) \mapsto f(t, y, p)$$

是一个 C^k-函数，满足 $f(t, y, p) \in T_yM$，对所有$(t, y, p) \in W$均成立。若 $k = 0$，则假设 f 在第二个变量上满足局部利普希茨条件。于是有以下结论：

[9] 我们假设 M 和 N 都是 C^1-流形，以确保刚刚定义的性质与坐标图的选择无关（见习题 2.5.6）。

(a) 微分方程

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), p) \tag{2.127}$$

对每个 $p \in P$，都满足解的局部存在性和局部唯一性；（b）方程 (2.127) 的极大流的定义域 Ω 在 $J \times J \times M \times P$ 中是开集；（c）方程 (2.127) 的极大流 Fl: $\Omega \to M$ 是 C^k。

若 J 是开区间，P 是实解析流形，M 是实解析巴拿赫流形，且 f: $W \to TM$ 是实解析的，则 Fl 是实解析的。

证明。设 E 和 F 分别是 M 和 P 的建模空间。在实解析情形下，令 $k := \omega$。给定 $a := (t, y, p) \in W$，令 φ: $U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$ 和 ψ: $U_\psi \to V_\psi \subseteq F$ 分别为 M 和 P 上 y 和 p 附近的坐标图。定义 $W_a := \{(t, y, q) \in J \times V_\varphi \times V_\psi : (t, \varphi^{-1}(y), \psi^{-1}(q)) \in W\}$，并且

$$f_a : W_a \to E, \quad (t, y, q) \mapsto d\varphi(f(t, \varphi^{-1}(y), \psi^{-1}(q))).$$

现在，根据命题 2.4.11 和定理 2.4.34，$y'(t) = f_a(t, y(t), q)$ 满足解的局部存在性和局部唯一性，并且对每个 $a \in W$ 都存在带参数的局部 C^k-流。鉴于注 2.5.3(b)，断言 (a) 可由上述结果推出，且 $\dot{y}(t) = f(t, y(t), p)$ 存在带参数的局部 C^k-流。因此，根据定理 2.5.18，(b) 和 (c) 成立。□

推论 2.5.20（其中 P 为单点集）和定理 2.5.15 推出：

推论 2.5.21。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。设 M 是一个 C^{k+1}-流形（若 $k \geq 1$）；或者是一个 C^2-流形（若 $k = 0$），其模型空间为巴拿赫空间。设 $W \subseteq J \times M$ 是一个开子集，且f: $W \to TM$是一个 C^k-函数，使得对所有 $(t, y) \in W$，都有 $f(t, y) \in T_yM$。若 $k = 0$，则假设 f 在第二个变量上满足局部利普希茨条件。于是有以下结论：

(a) 该微分方程

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{2.128}$$

满足解的局部存在性和局部唯一性。

(b) 微分方程 (2.128) 的极大流的定义域 Ω 在 $J \times J \times M$中是开的。(c) 微分方程 (2.128) 的极大流 Fl: $\Omega \to M$ 是 C^k。(d) $\Omega_{t,\ t_0}$ 对于所有 t_0、$t \in J$ 在 M 中都是开的，并且映射 $\Phi_{t,\ t_0} : \Omega_{t,\ t_0} \to \Omega_{t_0,\ t}$ 是一个C^k-微分同胚。

若 J 是开区间，P 是实解析流形，M 是实解析巴拿赫流形，且 f: $W \to TM$ 是实解析的，那么 Fl: $\Omega \to M$是实解析的，并且映射 $\mathrm{Fl}_{t,\ t_0}$ 是实解析微分同胚。□

注 2.5.22。对于 $k \geq 1$，如果在所有假设和结论中，分别用 FC^k-映射和 FC^{k+1}-流形替换 C^k-映射和 C^{k+1}-流形，那么推论 2.5.21 的类似结论也成立。此外，若用一个以赋范空间为模型的 FC^k-流形替换 P，那么推论 2.5.20 中的 Fl 也将是 FC^k。证明中只需用推论 2.4.37 替换定理 2.4.34。

定义 2.5.23. 设 M 是一个建模于局部凸空间上的 C^1-流形（可能带有边界），且 $X\colon M \to TM$ 是一个连续向量场，满足 $\dot{y}(t) = X(y(t))$具有解的局部存在性和局部唯一性。记 $\gamma_{y_0}\colon I_{y_0} \to M$ 为微分方程 $\dot{y}(t) = X(y(t))$、$y(0) = y_0$的极大解，其中 $y_0 \in M$，并定义

$$\Omega^X := \bigcup_{y_0 \in M} I_{y_0} \times \{y_0\}$$

以及 $\mathrm{Fl}^X\colon \Omega^X \to M$, $\mathrm{Fl}^X(t, y_0) := \gamma_{y_0}(t)$。在此语境下，极大解 γ_{y_0} 也称为经过 y_0的积分曲线。记 $\mathrm{Fl}_t^X := \mathrm{Fl}(t, \cdot)\colon \Omega_t^X \to M$，其中 $t \in \mathbb{R}$，且 $\Omega_t^X := \{y_0 \in M\colon (t, y_0) \in \Omega^X\} = \{y_0 \in M\colon t \in I_{y_0}\}$。

注 2.5.24.(a) 在定义 2.5.23 的设定下，通过 $f(t, y) := X(y)$ 定义函数$f\colon \mathbb{R} \times M \to TM$。采用定义 2.5.6 中为 f引入的记号 γ_{t_0,y_0}, I_{t_0,y_0}, Ω、$\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M$、$\mathrm{Fl}_{t,t_0}$ 以及 Ω_{t_1,t_0}，我们有$\gamma_{y_0} = \gamma_{0,y_0}$, $I_{y_0} = I_{0,y_0}$,

$$\Omega^X = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times M\colon (t, 0, y) \in \Omega\},\ \mathrm{Fl}^X(t, y) = \mathrm{Fl}(t, 0, y),$$

$\Omega_t^X = \Omega_{t,0}$，且 $\mathrm{Fl}_t^X = \mathrm{Fl}_{t,0}$。

(b) 注意

$$I_{t_0+t_1,y_0} = I_{t_0,y_0} + t_1 \text{ and } \gamma_{t_0+t_1,y_0}(t) = \gamma_{t_0,y_0}(t - t_1) \text{ for all } t \in I_{t_0+t_1,y_0}.$$

事实上，$I_{t_0,y_0}+t_1 \to M, t \mapsto \gamma_{t_0,y_0}(t-t_1)$ 对所有 $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ 和 $y_0 \in M$ 求解 $\dot{y}(t) = X(y(t))$、$y(t_0+t_1) = y_0$，从而对所有 $t \in I_{t_0,y_0} + t_1$ 有 $I_{t_0,y_0} + t_1 \subseteq I_{t_0+t_1,y_0}$ 以及 $\gamma_{t_0+t_1,y_0}(t) = \gamma_{t_0,y_0}(t - t_1)$。在此将 (t_0, t_1) 替换为 $(t_0 + t_1, -t_1)$，我们还发现 $I_{t_0+t_1,y_0} - t_1 \subseteq I_{t_0,y_0}$，从而 $I_{t_0+t_1,y_0} \subseteq I_{t_0,y_0} + t_1$，因此$I_{t_0+t_1,y_0} = I_{t_0,y_0} + t_1$。

(c) 如果 $y_0 \in M$和 $s,\ t \in \mathbb{R}$ 使得 $(s,\ y_0) \in \Omega^X$，那么 $(s + t,\ y_0) \in \Omega^X$ 当且仅当 $(t,\ \mathrm{Fl}_s^X(y_0)) \in \Omega^X$；在此情况下，且 $\mathrm{Fl}_t^X(\mathrm{Fl}_s^X(y_0)) = \mathrm{Fl}_{s+t}^X(y_0)$。事实上，由引理 2.5.7(a)，$I_{0,y_0} = I_{s,y_1}$ and$\gamma_{0,y_0} = \gamma_{s,y_1}$，其中 $y_1 := \gamma_{0,y_0}(s) = \mathrm{Fl}_s^X(y_0)$。现在 $(s + t, y_0) \in \Omega^X$ 意味着 $s + t \in I_{0,y_0} = I_{s,y_1} = I_{0,y_1} + s$。因此 $t \in I_{0,y_1}$（由此 $(t, y_1) \in \Omega^X$），且 $\mathrm{Fl}_t^X(\mathrm{Fl}_s^X(y_0)) = \gamma_{0,y_1}(t) = \gamma_{s,y_1}(s + t) = \gamma_{0,y_0}(s + t) = \mathrm{Fl}_{s+t}^X(y_0)$，这里用到了本注的 (b) 部分。反过来，$(t, y_1) \in \Omega^X$ 意味着 $t \in I_{0,y_1}$。利用 (b)，我们得到 $s + t \in I_{s,y_1} = I_{0,y_0}$，因此 $(s + t, y_0) \in \Omega^X$。

引理 2.5.25。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$。若 $k = 0$，令 M 为一个以局部凸空间为模型的 C^1-流形；否则，令 M 为一个以局部凸空间为模型的 C^k-流形；若 $k \neq \omega$，则允许 M 带有边界。令 $X\colon M \to TM$ 为一个函数，使得对每个 $y \in M$，都有 $X(y) \in T_yM$。考虑以下条件：

(a) $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 容许局部 C^k-流。(b) 对每个 $y \in M$，存在 $\varepsilon > 0$、一个开 y-邻域 $V \subseteq M$ 以及一个 C^k-函数

$$\Psi\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \to M, \quad (t, y) \mapsto \Psi(t, y) =: \Psi_t(y)$$

具有如下性质：

(i) 对每个 $y_0 \in V$，函数 $\Psi(\cdot, y_0)$ 求解初值问题 $\dot{y}(t) = X(y(t))$，$y(0) = y_0$。

(ii) 存在一个 y-邻域 $Y \subseteq V$，使得 $\Psi_t(y) \in V$ 对所有 $(t, y) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times Y$ 成立，并且 $\Psi_s(\Psi_t(y)) = \Psi_{s+t}(y)$ 对所有 $y \in Y$ 以及 s、$t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$（其中 $s + t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$）成立。

则 (b) 蕴含 (a)。若 $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 满足解的局部唯一性或 $k \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$，则 (a) 与 (b) 等价。

证明。(b)⇒(a)：若 Ψ 和 Y 如所述，给定 $t \in \mathbb{R}$，我们定义 $I :=]t - \varepsilon/2,\ t + \varepsilon/2[$ 并注意到 $\Phi\colon I \times I \times V \to M$, $\Phi(t, t_0, y_0) := \Psi(t - t_0, y_0)$，且给定的 Y 满足定义 2.5.9 中的条件。

(a)⇒(b)：假设 $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 存在局部 C^k-流。若 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，则这意味着 $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 满足解的局部唯一性；若 $k = 0$，则我们将后者作为假设。因此，可如定义 2.5.6 中那样，将极大流 Fl 与 $\dot{y} = X(y(t))$ 关联起来。令 $\Phi\colon I \times I \times V \to M$，并设 Y 如定义 2.5.9 中所述，其中 $t := 0$，且给定一个元素 $y \in M$。存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $]-\varepsilon, \varepsilon[\subseteq I$。于是 $\Psi\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \to M$, $\Psi(t, y) := \Phi_t(0, y)$ 是 C^k，并满足 (i) 和 (ii)，这里用到了 $\Phi = \mathrm{Fl}|_{I \times I \times V}$，因此 $\Psi(t, y) = \mathrm{Fl}(t, 0, y) = \mathrm{Fl}^X_t(y)$ 具有注 2.5.24(c) 中所述的性质。□

命题 *2.5.26.* 设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，M 是一个以局部凸空间为模型的 C^1 流形（可能带边界），且 $f\colon J \times M \to TM$ 是一个函数，对于所有 $(t, y) \in J \times M$，$f(t, y) \in T_yM$。假设 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ 满足解的局部存在性和局部唯一性，并且存在局部 C^0 流。设 $(t_0, y_0) \in J \times M$，并假设方程 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ 的极大解 $\gamma\colon I_{t_0, y_0} \to M$，$y(t_0) = y_0$ 并非对所有可能的未来时刻都有定义，即 $I_{t_0, y_0} \cap [t_0, \infty[$ 是 $J \cap [t_0, \infty[$ 的真子集。那么有如下结论：对于每个紧子集 $K \subseteq M$，存在 $t_K \in I_{t_0, y_0} \cap [t_0, \infty[$，使得对于所有 $t \in I_{t_0, y_0} \cap]t_K, \infty[$，$\gamma(t) \notin K$。

证明。由于 $I_{t_0, y_0} \cap [t_0, \infty[$ 是 $J \cap [t_0, \infty[$，区间 $J \cap [t_0, \infty[$ 的真子区间，因此该区间必定非退化。鉴于解的局部存在性，$I_{t_0, y_0} \cap [t_0, \infty[$ 不可能是闭区间；因此 $I_{t_0, y_0} \cap [t_0, \infty[= [t_0, t[$ 对于

某个 $\bar{t} > t_0$。于是 $\bar{t} \in J$。若断言不成立，我们便能找到一个紧子集 $K \subseteq M$ 和一个序列 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中各项属于 $[t_0, \bar{t}[$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\gamma(t_n) \in K$，且当 $n \to \infty$ 趋于 $t_n \to \bar{t}$ 时成立。令 y 为紧拓扑空间 K 中序列 $\gamma(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个聚点。取一个包含 t 的相对开区间 $I \subseteq J$，以及一个开 y 邻域 $V \subseteq M$，使得 $I \times I \times V$ 包含于最大流 Fl 的定义域 $\Omega \subseteq J \times J \times M$ 中，其中该最大流对应于 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$（参见定义 2.5.9）。存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq n_0$ 都有 $t_n \in I$。根据聚点的定义，我们可以找到 $m \geq n_0$，使得 $\gamma(t_m) \in V$。于是，$I \times \{(t_m, \gamma(t_m))\} \subseteq I \times I \times V \subseteq \Omega$ 表明，初值问题 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$，$y(t_m) = \gamma(t_m)$ 的极大解 γ_{t_m}，$\gamma(t_m)$ 的定义域 $I_{t_m,\gamma(t_m)}$ 包含 I。但是 $\gamma_{t_m, \gamma(t_m)} = \gamma_{t_0,y_0} = \gamma$，因此 $t \in I \subseteq I_{t_0,y_0} = [t_0, t[$，矛盾。□

注 2.5.27. 当然，若 $I_{t_0,y_0} \cap]-\infty, t_0]$ 是 $J \cap]-\infty, t_0]$ 的真子区间，也有类似的结果适用。

推论 *2.5.28.* 设 M 是一个紧 C^1-流形（可能带边界），$J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，且 $f\colon J \times M \to TM$ 是满足对所有 $(t, y) \in J \times M$ 都有 $f(t, y) \in T_yM$ 的函数。假设 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ 满足局部存在性和解的唯一性，并且存在局部 C^0-流。那么，对所有 $(t_0, y_0) \in J \times M$，初值问题 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$，$y(t_0) = y_0$ 都有一个解，且该解定义在整个 J 上。

证明。对于所有 $(t_0, y_0) \in J \times M$，由命题 2.5.26 可得 $I_{t_0,y_0} \cap [t_0, \infty[= J \cap [t_0, \infty[$，并且 $I_{t_0,y_0} \cap]-\infty, t_0] = J \cap]-\infty, t_0]$（见注 2.5.27），因此 $I_{t_0,y_0} = J$。□

结合推论 2.5.21 和推论 2.5.28（另见注 2.5.11(b)），我们得到：

推论 *2.5.29.* 设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，M 是一个无边紧 C^2-流形，且 $f\colon J \times M \to TM$ 是一个连续函数，满足对所有 $(t, y) \in J \times M$，$f(t, y) \in T_yM$，并且关于第二个变量局部利普希茨连续。则对所有 $(t_0, y_0) \in J \times M$，初值问题 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$，$y(t_0) = y_0$ 在整个 J 上都有定义的解。□

紧支撑向量场也可以用同样的方式处理。

推论 *2.5.30.* 设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个非退化区间，M 是一个有限维无边 C^2-流形，且 $f\colon J \times M \to TM$ 是连续函数，对所有 $(t, y) \in J \times M$，均有 $f(t, y) \in T_yM$，并且它关于第二个变量局部利普希茨。若存在一个紧子集 $K \subseteq M$，使得对所有 $t \in J$ 和 $y \in M \setminus K$，均有 $f(t, y) = 0$，那么对于所有 $(t_0, y_0) \in J \times M$，初值问题 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$，$y(t_0) = y_0$ 在整个 J 上都有定义的解。□

第 2.5 节的习题

习题 2.5.1. 设 M 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^1-流形（可以有边界）。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是非退化区间，$f\colon W \to TM$ 是定义在子集 $W \subseteq J \times TM$ 上的函数，满足对所有 $(t,x) \in W$，均有 $f(t,x) \in T_xM$。设 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ 是 M 的一个坐标图，且 $f_\varphi\colon W_\varphi \to E$ 如注 2.5.3(b) 所述。假设 $y(t) = f(t, y(t))$ 满足解的局部存在性和局部唯一性。

(a) 证明 $y'(t) = f_\varphi(t, y(t))$ 满足局部存在性与解的局部唯一性。(b) 设 $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M$ 为 $y(t) = f(t, y(t))$ 的极大流，且 $\Phi\colon Q \to E$ 为 $y'(t) = f_\varphi(t, y(t))$ 的极大流。证明 $(\mathrm{id}_J \times \mathrm{id}_J \times \varphi^{-1})(Q) \subseteq \Omega$ 与

$$\mathrm{Fl}_{t,t_0}(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}\big(\Phi_{t,t_0}(x)\big) \quad \text{for all } (t,t_0,x) \in Q.$$

习题 2.5.2. 设 M 为一个 C^1-流形，$J \subseteq \mathbb{R}$ 为一个非退化区间，$W \subseteq J \times M$ 为一个子集，且 $f\colon W \to TM$ 为一个函数，使得对所有 $(t,y) \in W$，有 $f(t,y) \in T_yM$。假设 $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ 满足局部存在性与解的局部唯一性，并设 $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to M$ 为其极大流。给定一个开子集 $U \subseteq M$，考虑 $f_U := f|_{W \cap (J \times U)}\colon W \cap (J \times U) \to TU$。证明下列结论：

(a) 微分方程 $\dot{y}(t) = f_U(t,\ y(t))$ 满足解的局部存在性与唯一性；其极大流 Fl^U 的定义域为

$$\Omega^U := \{(t,t_0,y_0) \in \Omega\colon (\forall \tau \in [0,1])\ \Phi(t_0 + \tau(t-t_0), t_0, y_0) \in U\}$$

且由 $\mathrm{Fl}^U = \mathrm{Fl}|_{\Omega^U}\colon \Omega^U \to U$ 给出。
(b) 若 Ω 是 $J \times J \times M$ 中的开集且 Fl 连续，则 Ω^U 是 $J \times J \times U$ 中的开集。

习题 2.5.3. 给定一个 C^1-映射 $g\colon M \to N$，其定义域和值域分别为 C^1-流形 M 和 N。设 $X\colon M \to TM$ 和 $Y\colon N \to TN$ 是连续向量场，并且按照 $Y \circ g = Tg \circ X$ 的意义彼此相关。设 $\gamma\colon I \to M$ 是非退化区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的一个 C^1-映射。证明：

(a) 若 γ 是微分方程 $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 的一个解，则 $g \circ \gamma$ 是 $\dot{y}(t) = Y(y(t))$ 的解。
(b) 若对所有 $p \in M$，$T_pg\colon T_pM \to T_{g(p)}N$ 都是单射，且 $g \circ \gamma$ 是微分方程 $\dot{y}(t) = Y(y(t))$ 的一个解，则 γ 是 $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 的解。(c) 若 g 是一个 C^1-微分同胚，则 $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 存在局部 C^1-流，当且仅当 $\dot{y}(t) = Y(y(t))$ 存在局部 C^1-流。在此情形下，对所有 $(t,y_0) \in \Omega^X$，有 $\Omega^Y = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times g)(\Omega^X)$ 且 $\mathrm{Fl}^Y_t(g(y_0)) = g(\mathrm{Fl}^X_t(y_0))$。
(d) 写出时变向量场的对应命题。

习题 2.5.4。 设 M 是一个以局部凸空间为模型的 C^1 流形（可能带边界），且 $X\colon M \to TM$ 是一个连续向量场。考虑定义 2.5.23 中的 $\mathrm{Fl}^X\colon \Omega^X \to M$ 和 Ω^X_t。证明对于所有 $t \in \mathbb{R}$，$\mathrm{Fl}^X_t(\Omega^X_t) = \Omega^X_{-t}$。此外证明 $\mathrm{Fl}^X_t\colon \Omega^X_t \to \Omega^X_{-t}$ 是双射，其逆映射为 $(\mathrm{Fl}^X_t)^{-1} = \mathrm{Fl}^X_{-t}$。

习题 2.5.5. 补全注记2.5.11以及引理 2.5.10和推论 2.5.20的证明中的细节。

习题 2.5.6. 设 M与 N分别为以赋范空间$(E,\|\cdot\|_E)$和$(F,\|\cdot\|_F)$为模型的 C^1-流形（可能带边界）。设 X为拓扑空间， $W\subseteq X\times M$为子集，且 $f\colon W\to N$为连续函数，它关于第二个变量满足局部利普希茨条件。设 $Y\subseteq X$ 为开子集， $\kappa\colon P_\kappa\to Q_\kappa\subseteq E$为 M的坐标图， $\theta\colon P_\theta\to Q_\theta\subseteq F$为 N的坐标图，使得 $f(W\cap(Y\times P_\kappa))\subseteq P_\theta$。证明映射

$$h\colon(\mathrm{id}_Y\times\kappa)(W\cap(Y\times P_\kappa))\to F,\ (a,b)\mapsto\theta\big(f\big(a,\kappa^{-1}(b)\big)\big)$$

在第二个变量上满足局部利普希茨条件。

[插入定义 2.5.19 中的坐标图 φ 和 ψ，并利用引理 1.5.3(a)，可知这些坐标图之间的转移映射是局部利普希茨的。]

习题 2.5.7。设 $X\colon M\to TM$是 C^1-流形 M上的连续向量场，且 $\dot\gamma(t)=X(\gamma(t))$ 存在局部 C^1-流。在 (a) 中， M 可以有边界。

(a) 证明

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(\mathrm{Fl}_t^X(p))=df(X(p))$$

对每个从 f到局部凸空间 F的 C^1-函数 $f\colon M\to F$以及 $p\in M$，均成立。

(b) 若 M和 X光滑，且 X存在局部 C^2-流，则

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}d\,\mathrm{Fl}_{-t}^X\big(Y\big(\mathrm{Fl}_t^X(p)\big)\big)=[X,Y](p)$$

对每个光滑向量场 $Y\colon M\to TM$和 $p\in M$（其中 $[X,Y]$是光滑向量场 X和 Y的李括号，如定理 3.4.13 所述）。

[利用习题 2.5.2 和 2.5.3(c)，将问题归结为练习 2.4.6。]

2.6 可度量化空间上的微积分

本节将介绍一些工具，以简化可度量化局部凸空间上的微分学。我们证明以下事实：

定理 2.6.1。设 E是可度量化实局部凸空间， $U\subseteq E$是开集，且 $f\colon U\to X$是到拓扑空间 X的映射。那么， f连续，当且仅当对于每条光滑曲线 $\gamma\colon\mathbb{R}\to U$， $f\circ\gamma\colon\mathbb{R}\to X$连续。

定理 2.6.2。设 E是可度量化实局部凸空间， $U\subseteq E$是开集，且 $f\colon U\to F$是到局部凸空间 F的映射。设 $k\in\mathbb{N}_0$。那么， f是 C^k，当且仅当对于每个光滑映射$\gamma\colon\mathbb{R}^{k+1}\to U$， $f\circ\gamma\colon\mathbb{R}^{k+1}\to F$是 C^k。

注 2.6.3. 定理 2.6.1 可作如下解释：若 E是一个可度量化的局部凸空间，且 $U\subseteq E$是一个开子集，那么 E在 U上诱导的拓扑与关于光滑曲线集 $C^\infty(\mathbb{R},U)$ 的终拓扑一致，其中这些曲线为 $\gamma\colon\mathbb{R}\to U$。

在证明这些定理之前，我们先证明一个较容易的结果：

命题 2.6.4.设 E 是可度量化局部凸空间，$U \subseteq E$ 是开集，且 $f\colon U \to X$ 是到拓扑空间 X的映射。那么，当且仅当对于每条连续曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$，$f$ 都是连续的。

证明。 该条件的必要性显而易见。为证明该条件也充分，我们采用逆否命题。因此，假设 f 不连续。由于空间 E 可度量化，我们可以找到一点 $x \in U$ 和一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 U 中的该序列收敛于 x，但 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛于 $f(x)$。令 $V \subseteq U$ 为 x的一个凸邻域；取一个子序列后，我们可以假设对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $x_n \in V$。现在定义 $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$，其定义域为

$$\gamma(t) := \begin{cases} x & \text{if } t \le 0 \\ x_1 & \text{if } t \ge 1 \\ x_{n+1} + \frac{t-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}(x_n - x_{n+1}) & \text{if } t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

并注意到 $\gamma(\frac{1}{n}) = x_n$。注意，该映射的像是通过对每个 n画一条从 x_n 到 x_{n+1} 的线段，再加上 $\{x\}$而得到的“无限多边形”。由于 $\{x\} \cup \{x_n\colon\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq V$且 V是凸的，我们推出 $\operatorname{im}\ \gamma \subseteq V \subseteq U$。于是，$\gamma$显然在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$上连续。它在 0 点也连续：事实上，给定 x 的一个凸邻域 $W \subseteq U$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge N$，都有 $x_n \in W$。对每个 $t \in]0, \frac{1}{N}]$，存在 $n \ge N$ $t \in]\frac{1}{n+1}\ \frac{1}{n}]$ $\gamma\ t\ = \tau x_{n+1} +\ 1-\tau\ x_n$ $\tau \in$，$[0,1]$ $\gamma\ t\ \in W$ W $x_n\ x_{n+1} \in W$ 使得，。于是，对于某个.....有 ( ) ( )，因此 ( )，这是利用了.....是凸的以及，。因此γ连续。最后注意到 $\gamma(\frac{1}{n}) = x_n$，因此 $(f\circ\gamma)(\frac{1}{n})$ 不收敛于 $(f\circ\gamma)(0)$，尽管 $\frac{1}{n} \to 0$。所以 $f\circ\gamma$不连续。□ − −

−

为了能够用光滑曲线而不仅仅是连续曲线连接收敛序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的点 x_n，我们需要假设序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛得足够快。

定义 2.6.5。局部凸空间 E 中的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 若快速收敛 到 $x \in E$，则称其快速收敛，如果对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，$\lim_{n\to\infty} n^k \cdot (x_n - x)\ = 0$。

引理 2.6.6（特殊曲线引理）。设 E 是实局部凸空间，$x \in E$，且$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E 中的一个快速收敛到 x的序列。那么存在一条光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to E$，其像 $\gamma(\mathbb{R})$ 包含于$\{x\} \cup \{tx_n + (1-t)x_{n+1}\colon\ n \in \mathbb{N}, t \in [0,1]\}$，使得对每个$n \in \mathbb{N}$，都有 $\gamma(\frac{1}{n}) = x_n$，且 $\gamma(0) = x$。

证明。 我们选取一个光滑映射 $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $\operatorname{im}\ \tau \subseteq [0,1]$, $\tau(t) = 0$当 $t \le \frac{1}{3}$ 且 $\tau(t) = 1$当 $t \ge \frac{2}{3}$。现在我们通过以下方式定义一个映射 $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$

$$\gamma(t) := \begin{cases} x & \text{if } t \le 0 \\ x_1 & \text{if } t \ge 1 \\ x_{n+1} + \tau\left(\frac{t-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}\right)(x_n - x_{n+1}) & \text{if } t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

那么， γ 要么是常数，要么由一个闭公式给出，该公式在每个给定的 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 的某个开邻域上定义了一个光滑函数，因此 $\gamma|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ 是光滑的。为了证明 γ 在零点连续，进而连续，我们可以像证明命题 2.6.4 那样进行论证。现在令 $k \in \mathbb{N}$；我们想证明，当 $t \to 0^+$ 时， $\gamma^{(k)}(t) \to 0$ （从而当 $0 \neq t \to 0$ 时也成立）。为此，注意到对于 $t \in]0,\ 1]$，设 $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$，我们有

$$\begin{aligned}\gamma^{(k)}(t) &= \tau^{(k)}\left(\tfrac{t-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}\right)\left(\tfrac{1}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}\right)^k (x_n - x_{n+1}) \\ &= \tau^{(k)}\left(\tfrac{t-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}\right)(n(n+1))^k (x_n - x_{n+1}),\end{aligned}$$

由链式法则。为说明它收敛到 0，令 $\|\cdot\|_p\colon E \to \mathbb{R}$ 为 E上的连续半范数。集合 $\tau^{(k)}(\mathbb{R}) = \tau^{(k)}([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])$ 是紧集，因此包含于某个 $[-M, M]$ 中。现在对 $n \geq 2$进行估计：

$$\begin{aligned}\|\gamma^{(k)}(t)\|_p &= \left|\tau^{(k)}\left(\tfrac{t-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}\right)\right| (n(n+1))^k \|x_n - x_{n+1}\|_p \\ &\leq M\,(n(n+1))^k \|x_n - x_{n+1}\|_p \\ &= M\,(n(n+1))^k \|(x_n - x) - (x_{n+1} - x)\|_p \\ &\leq M\,(n(n+1))^k \|x_n - x\|_p + M\,(n(n+1))^k \|x_{n+1} - x\|_p \\ &\leq Mn^{3k}\|x_n - x\|_p + M(n+1)^{2k}\|x_{n+1} - x\|_p \\ &= M\|n^{3k}(x_n - x)\|_p + M\|(n+1)^{2k}(x_{n+1} - x)\|_p\,.\end{aligned}$$

因此 $\lim_{t\to 0}\|\gamma^{(k)}(t)\|_p = 0$，这里用到了 $n = n(t) \to \infty$；此处我们利用了$x_n \to x$ 快速这一点。

根据前面的结论， γ 是连续的， $\gamma|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ 是光滑的，并且根据 $0 \mapsto 0$， $\gamma^{(k)}$ 从 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 延拓为连续映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$。利用引理 1.4.14，我们看到 γ 是 C^1，且 $\gamma'(0) = 0$。重复这一论证，我们看到对于每个 $k \in \mathbb{N}$， γ 是 C^k，且 $\gamma^{(k)}(0) = 0$。□

引理 2.6.7。设$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是可度量化局部凸空间 E中的一个收敛序列，极限为 $x \in E$。那么$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个子序列$(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$快速收敛到 x。

证明。由于 E 是局部凸且可度量化的，因此存在一个由连续半范数构成的序列 $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \cdots$，定义其局部凸向量拓扑。由于 $x_n \to x$，对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们都能找到 $n_j \in \mathbb{N}$，使得

$$\|x_n - x\|_j \leq \frac{1}{j^j} \quad \text{for all } n \geq n_j. \tag{2.129}$$

我们可以假设 $n_1 < n_2 < \cdots$。我们断言，当 $j \to \infty$ 时，x_{n_j}快速收敛到 x。为此，固定 $k \in \mathbb{N}_0$。为了使 $\lim_{j\to\infty} j^k(x_{n_j} - x) = 0$，我们必须证明，对于每个 $N \in \mathbb{N}$，$\lim_{j\to\infty}\|j^k(x_{n_j} - x)\|_N = 0$。事实上，对每个 $j \geq N$ 2 129 $\|j^k\ x_{n_j} - x\ \|_N \leq \|j^k\ x_{n_j} - x\ \|_j =$，利用 $j^k\|x_{n_j} - x\|_j \leq j^k\frac{1}{j^j} = \frac{1}{j^{j-k}} \to 0 \quad j \to \infty$ □ (.)，我们得到当 时 ( ) ( )。

定理 2.6.1 的证明。如果 f 连续，那么显然，对于每条光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$，$f \circ \gamma$ 也连续。

为证明逆命题，我们采用逆否命题的论证方式。因此，假设$f\colon U \to X$在某点 $x \in U$不连续。令 $V \subseteq U$为 x的一个凸邻域。于是，存在 $f(x)$的一个邻域 $W \subseteq F$以及 V中的一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $x_n \to x$，但对每个 $n \in \mathbb{N}$，$f(x_n) \notin W$。根据引理 2.6.7，取一个子序列后，我们可以假设 $x_n \to x$快速趋于无穷。因此，特殊曲线引理（引理 2.6.6）给出一条光滑曲线$\gamma\colon \mathbb{R} \to E$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$，且 $\gamma(0) = x$；此外，$\operatorname{im}\gamma$包含于凸包 $\operatorname{conv}(\{x\} \cup \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\})$，而该凸包是 V的子集，因此也是 U的子集。于是 $\operatorname{im}\gamma \subseteq U$，从而可以考虑复合$f \circ \gamma$。由于$(f \circ \gamma)(0) = f(x) \in W$，但对所有 $n \in \mathbb{N}$，$(f \circ \gamma)\left(\frac{1}{n}\right) = f(x_n) \notin W$，其中 $\frac{1}{n} \to 0$，可知 $f \circ \gamma$不连续。□

下面两个引理将帮助我们证明定理 2.6.2：

引理 2.6.8。设 $k \in \mathbb{N}$，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，$E$ 为可度量化实局部凸空间，$U \subseteq E$ 为开集，且 $f\colon U \to F$ 是到局部凸空间 F 的映射，满足 $f \circ \gamma\colon \mathbb{R}^k \to F$ 对每个光滑映射 $\gamma\colon \mathbb{R}^k \to U$ 都是 C^r。那么，对每个开子集 $W \subseteq \mathbb{R}^k$ 及光滑映射$\gamma\colon W \to U$，$f \circ \gamma\colon W \to F$ 都是 C^r。

证明。设 $\gamma\colon W \to U$ 是一个光滑映射，其中 $W \subseteq \mathbb{R}^k$ 是开集。为了使 $f \circ \gamma$ 成为 C^r，只需证明它在每个给定点 $x \in W$ 的某个开邻域上是 C^r。因此，设 $x \in W$。相对于 $\|\cdot\|_\infty$，开球 $B_\varepsilon(x)$ 包含于 W 中，其中 $\varepsilon > 0$ 适当选取。存在一个光滑函数 $h\colon \mathbb{R}^k \to W$，使得 $\operatorname{im} h \subseteq B_\varepsilon(x)$，并且对所有 $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$，$h(y) = y$。现在，由于 $\gamma \circ h\colon \mathbb{R}^k \to U$ 光滑，根据假设，$f \circ (\gamma \circ h)$ 是$\overline{C^r}$。因此，$(f \circ \gamma \circ h)|_{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)} = f \circ \gamma|_{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)}$ 是 C^r，由此完成证明。□

引理 2.6.9。设 $k \in \mathbb{N}$，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，$E$ 是可度量化实局部凸空间，$U \subseteq E$ 是开集，且 $f\colon U \to F$ 是到局部凸空间 F 的映射，并且对于每个光滑映射 $\gamma\colon \mathbb{R}^k \to U$，$f \circ \gamma\colon \mathbb{R}^k \to F$ 都是 C^r。那么对于每个 $j < k$ 以及每个光滑映射 $\gamma\colon \mathbb{R}^j \to U$，$f \circ \gamma\colon \mathbb{R}^j \to F$ 都是 C^r。

证明。给定 $j < k$ 和一个光滑映射 $\gamma\colon \mathbb{R}^j \to U$，我们通过 $\eta(t_1, t_2, \ldots, t_k) := \gamma(t_1, t_2, \ldots, t_j)$ 定义一个光滑映射$\eta\colon \mathbb{R}^k \to U$，其中 $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$。根据假设，$f \circ \eta$ 属于 C^r 类。由于 $f \circ \gamma = (f \circ \eta) \circ \lambda$，其中

$$\lambda\colon \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}^k, \quad \lambda(t_1, \ldots, t_j) := (t_1, \ldots, t_j, 0, \ldots, 0)$$

是连续线性的，因此 C^r，我们也看到 $f \circ \gamma$ 是 C^r。 □

现在我们已经做好充分准备，可以证明定理 2.6.2。

定理 2.6.2 的证明。证明采用关于 $k \in \mathbb{N}_0$的归纳法。由于$k = 0$ 的情形已由定理 2.6.1 覆盖，现在假设 $k \in \mathbb{N}$，

并假设将 k 替换为 $k-1$时，定理 2.6.2 的断言成立。设 $f\colon U\to F$ 是一个映射，使得对于所有光滑映射 $\gamma\colon \mathbb{R}^{k+1}\to U$， $f\circ\gamma$ 是 C^k。那么 $f\circ\gamma$ 是 C^k，因此对于所有光滑映射$\gamma\colon \mathbb{R}^k\to U$， C^{k-1}（引理 2.6.9），由此根据归纳法， f 是 C^{k-1}。

设 $x\in U$和 $y_1,\dots,y_k\in E$；我们断言， $d^{(k)}f(x,y_1,\dots,y_k)$ 存在。为此，取 $r>0$ 使得对于所有 $(t_1,\dots,t_k)\in\,]-r,$ 都有 $\gamma(t_1,\dots,t_k)\colon$ $=x+t_1y_1+\cdots+t_ky_k\in U$，其中 $r[^k=:W$。根据引理 2.6.8 和 2.6.9，映射$f\circ\gamma\colon$ $W\to F$是 C^k，其中 $\gamma\colon W\to U$按刚才所述定义。令 e_i为 $\mathbb{R}^k$的第 i个标准基向量，其中 $i\in\{1,\dots,k\}$。于是，对每个$t=(t_1,\dots,t_k)\in W$，我们计算

$$\begin{aligned} d(f\circ\gamma)(t,e_1) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(x+t_1y_1+\cdots+t_ky_k+sy_1)\\ &= df(x+t_1y_1+\cdots+t_ky_k,y_1)=df(\gamma(t),y_1)\,, \end{aligned}$$

并且归纳地，由相同的论证可得，

$$d^{(j)}(f\circ\gamma)(t,e_1,\dots,e_j)\;=\;d^{(j)}f(\gamma(t),y_1,\dots,y_j)\quad\text{for all } j\in\{1,\dots,k\}.$$

特别地，我们已经证明，定义 $d^{(k)}f(x,y_1,\dots,y_k)$ 的极限存在；它由 $d^{(k)}f(x,y_1,\dots,$ $y_k)\;=d^{(k)}(f\circ\gamma)(0,e_1,\dots,e_k)$ 给出。

剩下要证明的是 $d^{(k)}f\colon U\times E^k\to F$ 连续。由于集合 $U\times E^k$ 在 E^{k+1} 中是开的，且 E^{k+1} 可度量化，我们只需证明对于每条光滑曲线 $\gamma\colon$ $\mathbb{R}\to U\times E^k$，$d^{(k)}f\circ\gamma\colon\mathbb{R}\to F$ 连续。如果能证明 $d^{(k)}f\circ\gamma$ 在每个元素 $t_0\in\mathbb{R}$ 的某个邻域上连续，那么这一点就成立。为验证这一性质，我们写作 $\gamma=(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k)\colon\mathbb{R}\to U\times\mathbb{R}^k$。由连续性，存在一个包含 t_0 和 $\varepsilon>0$ 的开区间 $I\subseteq\mathbb{R}$，使得

$$\eta(t,t_1,\dots,t_k)\;:=\;\gamma_0(t)+t_1\gamma_1(t)+\cdots+t_k\gamma_k(t)\;\in\;U$$

对所有 $(t,\ t_1,\ \dots,\ t_k)\in I\times\,]-\varepsilon,\ \varepsilon[^k=:Y$。注意， $\eta\colon\ Y\to U$是开子集 $Y\subseteq\mathbb{R}^{k+1}$上的光滑映射。因此， $f\circ\eta$是 C^k（见引理 2.6.8）。现在将 $\mathbb{R}^{k+1}$ 的标准基向量标记为 $0,\ 1,\ \dots,\ k$，我们得到

$$\begin{aligned} d(f\circ\eta)((t,t_1,\dots,t_k),e_1) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(\gamma_0(t)+t_1\gamma_1(t)+\cdots+t_k\gamma_k(t)+s\gamma_1(t))\\ &= df(\gamma_0(t)+t_1\gamma_1(t)+\cdots+t_k\gamma_k(t),\gamma_1(t))\\ &= df(\eta(t,t_1,\dots,t_k),\gamma_1(t)) \end{aligned}$$

对所有 $(t,\ t_1,\ \dots,\ t_k)\in Y$。重复这一论证，我们得到

$$d^{(j)}(f\circ\eta)((t,t_1,\dots,t_k),\,e_1,\dots,e_j)=d^{(j)}f(\eta(t,t_1,\dots,t_k),\gamma_1(t),\dots,\gamma_j(t))$$

对所有 $j=1,\ \dots,\ k$。特别是，

$$\begin{aligned} d^{(k)}(f\circ\eta)((t,0,\dots,0),\,e_1,\dots,e_k) &= d^{(k)}f(\eta(t,0,\dots,0),\,\gamma_1(t),\dots,\gamma_k(t))\\ &= d^{(k)}f(\gamma_0(t),\gamma_1(t),\dots,\gamma_k(t))\\ &= (d^{(k)}f\circ\gamma)(t)\,, \end{aligned}$$

对所有 $t \in I$。映射 $d^{(k)}(f \circ \eta)$ 是连续的，由前面的公式可知，$(d_{(k)}f) \circ \gamma|_I$ 也连续，从而完成证明。□

注 2.6.10。引理 2.6.6 以及定理 2.6.1 的证明改编自 [KM97，第 2] 节。定理 2.6.2 是 [BGN04，第 12.4] 条定理的特殊情形。

定理 2.6.2 表明，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和光滑映射 $\gamma\colon \mathbb{R}^k \to U$， f 光滑当且仅当 $f \circ \gamma$ 光滑。我们提及一个密切相关的事实：

注 2.6.11。设 $f\colon E \supseteq U \to F$ 是从可度量化局部凸空间 E 的一个开子集到局部凸空间 F 的映射。可以证明， f 光滑当且仅当对于每条光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to U$， $f \circ \gamma\colon \mathbb{R} \to F$ 都是光滑映射（参见 [KM97] 中的定理 4.11 和 12.8；另见 [Gl04b，命题 E.3]）。对于映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，上述事实称为博曼定理 [Bm67]。

注 2.6.12。定理 2.6.2 可以加强如下：

设 E 是一个可度量化实局部凸空间，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $f\colon U \to F$ 是从开子集 $U \subseteq E$ 到局部凸空间 F 的映射。那么 f 是 C^k 当且仅当对于每个光滑映射 $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to U$， $f \circ \gamma\colon \mathbb{R}^2 \to F$ 都是 C^k。

为了证明 $k \geq 1$ 的充分性，设 γ_1， $\gamma_2\colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$ 是 C^∞ 曲线，并且

$$\gamma(s,t) := \gamma_1(t) + s\gamma_2(t) \in U$$

对所有 $s, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ 都成立。那么 $f \circ \gamma$ 是 C^k，并且对于所有满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}$，

$$\frac{\partial^j (f \circ \gamma)}{\partial s^j}(s,t) = \delta^{(j)}_{\gamma(s,t)} f(\gamma_2(t)).$$

令 $s = 0$，我们看到，对于所有 $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$，盖托微分 $\delta^{(j)}_{\gamma_1 t()} f(\gamma_2(t))$ 都存在，因此 $\delta^{(j)} f\colon U \times E \to F$ 存在且连续（由定理 2.6.1 可知），因为

$$(\delta^{(j)} f) \circ (\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\partial^j (f \circ \gamma)}{\partial s^j})(0, \cdot)$$

是连续的。因此，根据习题 1.7.10， f 是 C^k。

第 2.6 节习题

习题 2.6.1。在引理 2.6.8 的证明中，用到了某个光滑映射 h。证明这样的映射 h 存在。

练习 2.6.2. 验证定理 2.6.1 及其证明在 $U \subseteq E$ 不一定是开集，而是一个具有稠密内部的局部凸子集时，仍然成立。

2.7 西尔瓦空间上的微分学

一些值得关注的无限维李群以西尔瓦空间为模型，例如有限维李群的直极限（见第 12 章），或者紧实解析流形 M 上的实解析微分同胚所构成的李群 $\mathrm{Diff}^\omega(M)$（见 [KM97] 或 [DS15], ; 另见 [Les82, Les83]）。本节将介绍一些微分学工具，它们有助于为这类群构造李群结构。关于西尔瓦空间、拓扑空间的归纳极限以及局部凸空间的归纳极限所需的背景知识，可参见附录 A.7 和 B.13。

命题 2.7.1. 设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是巴拿赫空间的一个直序列$(E_n, \|\cdot\|_n)$，其所有包含映射 $E_n \to E_{n+1}$ 都是紧算子。设 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 是相应的西尔瓦空间，并赋予局部凸归纳极限拓扑 $\mathcal{O}$。设 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ 是 $(E_n, \|\cdot\|_n)$ 中开子集的一个序列。那么 $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 在 $(E, \mathcal{O})$ 中是开集。若 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，且 $f\colon U \to F$ 是到局部凸空间 F 的函数，使得

$$f|_{U_n} : U_n \to F \quad \textit{is } C^k \textit{ on } U_n \subseteq E_n \textit{ for each } n \in \mathbb{N},$$

那么 f 是 C^k。

证明使用一个引理。

引理 2.7.2. 设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是局部凸空间的一个直序列，且 $\mathcal{O}$ 是 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 上的一种局部凸向量拓扑，使每个包含映射 $E_n \to E$ 都连续。设 $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ 是开子集 $U_n \subseteq E_n$ 的一个递增序列，满足 $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 在 $(E, \mathcal{O})$ 中是开集。若 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，且 $f\colon U \to F$ 是到局部凸空间 F 的函数，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$f|_{U_n}\colon U_n \to F$ 都是开子集 $U_n \subseteq E_n$ 上的一个 C^k-函数，那么迭代方向导数

$$d^{(j)} f(x, y_1, \ldots, y_j)$$

对于所有满足 $j \le k$, $x \in U$ 和 $y_1, \ldots, y_j \in E$ 的 $j \in \mathbb{N}$，F 存在；它满足

$$d^{(j)} f|_{U_n \times (E_n)^j} = d^{(j)}(f|_{U_n}) \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{2.130}$$

证明。 如果 $x \in U_n$, $y_1, \ldots, y_j \in E_n$，则有

$$\begin{aligned} df(x, y_1) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x + ty_1) - f(x)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f|_{U_n}(x + ty_1) - f|_{U_n}(x)) \\ &= d(f|_{U_n})(x, y_1) \end{aligned}$$

并递归地

$$\begin{aligned} d^{(j)} f(x, y_1, \ldots, y_j) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d^{(j-1)} f(x + ty_j, y_1, \ldots, y_{j-1}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d^{(j-1)}(f|_{U_n})(x + ty_j, y_1, \ldots, y_{j-1}) \\ &= d^{(j)}(f|_{U_n})(x, y_1, \ldots, y_j) \end{aligned}$$

对于所有整数 $0 < j \leq k$。 □

命题的证明 2.7.1. 根据命题 B.13.13(a)，局部凸归纳极限拓扑 $\mathcal{O}$ 与使 E 成为拓扑空间 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$的归纳极限的拓扑一致。因此，根据引理 A.7.6(a)， U在 $(E, \mathcal{O})$ 中是开集；并且 f 是连续的，因为对每个 n， $f|_{U_n}$ 都是连续的（参见引理 A.7.6(b) 和 A.7.3(ii)）。根据引理 2.7.2， f 的 j重迭方向导数存在，并且对于所有满足 $j \leq k$的 $j \in \mathbb{N}$，由 (2.130) 给出。现在， $U \times E^j$ 是 E^{j+1} 的一个开子集，而 E^{j+1} 是由巴拿赫空间和紧嵌入算子构成的有向序列的局部凸（且拓扑）归纳极限

$$(E_1)^{j+1} \subseteq (E_2)^{j+1} \subseteq \cdots$$

的巴拿赫空间和紧嵌入算子。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$，根据 (2.130)， $d^{(j)} f|_{U_n \times (E_n)^j}$ 是连续的，引理 A.7.6(b) 和 A.7.3(ii) 表明 $d^{(j)} f$ 是连续的。因此， f 是 C^k。□

2.8 局部凸直和上的微分学

我们汇集了一些关于局部凸直和之间一类性质良好的映射的连续性、可微性和解析性的结果。这些结果将用于研究 σ-紧有限维底流形 M 上向量丛中紧支撑光滑截面的空间，也将用于在群 Diff(M) 上构造李群结构，其中该群由 M 上所有 C^∞-微分同胚组成。

命题 2.8.1。设 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间的序列。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列 $C^k_{\mathbb{K}}$-映射 $f_n\colon U_n \to F_n$，其定义在开子集 $U_n \subseteq E_n$ 上，且 $0 \in U_n$ 和 $f_n(0) = 0$ 对除有限多个 $n \in \mathbb{N}$ 之外的所有情形都成立。则 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 在局部凸直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 中是开集，并且

$$f := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} f_n\colon \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} U_n \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} F_n,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

是一个 $C^k_{\mathbb{K}}$-映射。若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 且每个 f_n 都是实解析的，则 f 是实解析的。

证明。 由注记 B.13.1(a)可知， $U := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 在 $E := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$中是开映射。为了证明 f 是 $C^k_{\mathbb{K}}$，我们可以假设 $k < \infty$，并进行归纳。

若 $k = 0$，我们必须证明 f 连续，即在每个$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$处连续。设 V是 $f(x)$ 在 $F := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} F_n$ 中的一个开邻域；缩小 V 后，我们可以假设 $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$，其中 V_n 是 $f_n(x_n)$ 在 F_n 中的一个开邻域（见注记 B.13.1(a)）。由于 $f_n^{-1}(V_n)$ 是 x_n 在 E_n中的一个开邻域，我们推得

$$f^{-1}(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(V_n)$$

是 x 在 E 中的一个开邻域。因此 f 在 x处连续。

若 $k>0$，则对于 $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in U$ 和 $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$，我们可以找到 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $x,\ y\in E_1\times\cdots\times E_N$并且

$$(\forall n>N)\quad 0\in U_n\quad\text{and}\quad f_n(0)=0.$$

对于接近 0 的 $t\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$，我们有 $x+ty\in U_1\times\cdots\times U_N$，并可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(f(x+ty)-f(x)) &= \Big(\frac{1}{t}(f_n(x_n+ty_n)-f_n(x_n))\Big)_{n\in\{1,\dots,N\}}\\ &\to (df_n(x_n,y_n))_{n\in\{1,\dots,N\}} = (df_n(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

因为 $t\to 0$属于 $F_1\times\cdots\times F_N$，从而属于 F（如注 B.13.1(c) 所示，将前者视为 F的向量子空间）。因此，存在 $df(x,\ y)$，且

$$df = \Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} df_n\Big)\circ\Phi|_{U\times E}, \tag{2.131}$$

其中 $\Phi\colon E\times E\to\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(E_n\times E_n)$ 是一个拓扑向量空间同构，它将 $(x,\ y)$ 与 $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 对应起来，并映到 $\Phi(x,\ y)=(x_n,\ y_n)_{n\in\mathbb{N}}$（见引理 B.13.2(c)）。现在，$\oplus_{n\in\mathbb{N}}df_n$（因此根据 (2.131)，$df$）由归纳法可知是 $C_{\mathbb{K}}^{k-1}$，故为连续映射，因此 f 是 $C_{\mathbb{K}}^1$，且 df 是一个 $C_{\mathbb{K}}^{k-1}$-映射。因此，f 是 $C_{\mathbb{K}}^k$。

若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 且每个 f_n 都是实解析的，则我们可以找到复解析映射 $\sim f_n\colon U_n\to(F_n)_{\mathbb{C}}$，它们定义在开子集 $U_n\subseteq(E_n)_{\mathbb{C}}$ 上，使得 $U_n\subseteq\sim U_n$ 且 $\sim f|_{U_n}=f_n$。于是，根据定理 2.1.12，f_n 是 $C_{\mathbb{C}}^\infty$，从而

$$\widetilde{f}:=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{f}_n\colon\ \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{U}_n\to\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(F_n)_{\mathbb{C}}$$

是$C_{\mathbb{C}}^\infty$，因此也是复解析的，再次应用定理 2.1.12 即得。将$E_{\mathbb{C}}$ 与$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(E_n)_{\mathbb{C}}$ 等同，并将 $F_{\mathbb{C}}$ 与 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(F_n)_{\mathbb{C}}$ 等同（参见引理B.13.2(c)），我们可以将$\widetilde{\ }f$ 解释为 f的复解析延拓。因此，f 是实解析的。□

2.9 第2章的注记与评论

本文所呈现的结果得益于众多来源。

解析映射。 在复解析情形中，我们以 J. Bochnak 和 J. Siciak 的综述论文 [BS71a] 和 [BS71b] 为指南，但删去了其中施加的完备性条件。关于非完备空间之间的解析映射，已有文献 [GE92]（另见 [GE04]）、[Gl02c], 和 [Gl07c]对此进行讨论；其中关于 $C_{\mathbb{C}}^k$-映射的例子

并未$C^{k+1}_{\mathbb{C}}$ 在习题 2.1.14 和 2.1.13 中讨论，而是取自 [Gl07c]（比较 [GE92, Ex. 2.3] ，其中讨论了函数具有 k 阶复可微性、但不具有 $k+1$ 阶复可微性的情形，并不考虑导数的连续性）。关于复解析映射的其他参考资料包括 [He71]和 [He89]。巴拿赫空间之间的解析映射也包含在 [Bou67],的概述中，此外， [La75, 附录] 和 [Ne00, 附录 III]中还提供了一些有趣的工具。

关于实解析映射，我们倾向于采用 John Milnor [Mil84] 的方法（他通过复解析延拓的存在性来定义实解析映射），因为尚不清楚按较弱意义定义的实解析映射类 [BS71b] 是否在复合下封闭。本文的阐述扩展了 [Gl02c]。关于无穷维流形的复化以及这一背景下实解析映射的复解析延拓，可参阅 [DGS14]（另见 [PS09]）；对于有限维流形，经典参考文献有 [BrW59] 和 [Gr58b]。

巴拿赫空间上的微积分、逆映射与隐函数。赋范空间之间的 C^k-映射与经典 FC^k-映射之间的关系，已在第1章的注释中说明。命题 2.3.17(c) 中的蕴含“⇐”也见于 [Wa12, Prop. A.3.2]。既然我们已经可以运用 C^k-映射理论，对 FC^k-映射的讨论便可在一定程度上不同于 [Bou67], [CaH67], [Di60], 或 [La99] 等经典论述。例如，对于仅在一点全微分的映射之复合，我们无需链式法则。此外，我们关注的不仅是赋范空间中的参数依赖性，也包括一般局部凸空间中的参数依赖性（以及相关主题）；经典著作中并无与此对应的内容。练习 2.3.12 由作者提供。关于并非 FC^1 的 C^1-映射，更多例子见 [Mil82, Ex. 6.8] 和 [WHO18]。

不动点关于参数的连续、利普希茨及弗雷歇可微依赖性，是动力系统理论中的标准课题（例如参见 Ir[We72], [和 76],Ir80，定理 C. [；另参见 7]Di60，10.1. [）。我们对 1]-依赖性的讨论借鉴了 C^kGl06d [和] Gl07d [。本文给出的定量反函数定理与]We76，第 285 页起（另见 [HrP286] ）、 [Gl06d70] 和 [Gl07d], 中的结果有所不同。证明中使用了简化牛顿迭代，因此我们会在习题中进一步讨论牛顿法及其变体的其他方面。牛顿法的收敛判据最早由 [KA] 给出。

利用球的像的定量信息，并结合不动点对 C^k 的依赖性来证明含参数反函数定理，这一策略取自 [Gl06d] 和 [Gl07d]；随后将隐函数和反函数的定理作为推论得到（相关的早期结果可参见 [Hi99], [Te01b], 以及 [Gl06a] ）。与经典方法试图将隐函数定理化归为反函数定理（因而仅适用于定义在巴拿赫空间开子集上的函数）不同，我们的策略在定理 2.3.21 中不要求 E 完备，亦不要求其为开集。

此外，定理 2.3.40 也可以在 E 为任意局部凸空间的情况下得到，并且还可以推广到 $C^{0,\,k}$-映射，如练习 2.3.13(b) 中所述（这对于命题 2.4.38 的证明很有用；该命题讨论常微分方程解的参数依赖性，并将用于证明巴拿赫–李群和微分同胚群的 C^0-正则性）。巴拿赫空间之间映射的严格可微性（练习 2.3.9 和 2.3.10 中曾提及）由 Leach 引入（见 [Lea61]），并被用于在仅假设一点处可微的情况下得到反函数定理。进一步信息另见 [Bou67], [CaH 67],和[Nij74] 。全局反函数定理的 FC^1-类比，即定理 2.3.43，也见于 [CH82] 和 [CDD85]；推广结果参见 [JLM17] 及其中的参考文献。

我们不证明高级的反函数定理，例如 Nash 和 Moser 的反函数定理（见 [Ham82]和[KM97，第51]节）或 Poppenberg 的反函数定理 [Pop99] ，后者对 Fr´echet 空间施加了现代理论中的性质（参见 [MV97]）。与前述结果不同， [Mu08] 和 [Gl06d] 中的反函数定理也适用于不具有连续范数的 Fr´echet 空间（但其假设相当严格）。 [Ma01], 提出了反函数的另一种框架，该框架利用了映射度的推广。

局部凸空间中的微分方程。 众所周知，不可赋范局部凸空间上的微分方程未必具有良好的性质；例 2.4.2 和例 2.4.3 展示了没有局部解（或有无穷多个局部解）的初值问题，摘自 [Mil82，第 6.1 例/2].[10]为处理这种情况，我们决定将局部唯一性和存在性（以及局部 C^k流的存在性）设为公理，而这些公理对于给定的微分方程可能成立，也可能不成立。公理成立时，就能得到一般性结果（例如极大解的存在性、极大流的存在性，或后者的可微性），而无须依赖巴拿赫空间上微分方程的经典理论。当然，许多能够验证这些公理的情形，都在某种程度上依赖于巴拿赫空间上的微积分。例如，如果巴拿赫空间射影极限上的一个微分方程源自巴拿赫空间上的一组相容微分方程（其右端满足局部利普希茨条件），那么就能保证局部唯一性。这一思想在命题 2.4.16 中得到了推广。一个典型情形——例 2.4.18——曾在 [Te01b] 关于无限维流形上有限维向量分布的弗罗贝尼乌斯定理的讨论中被隐含使用，并在 [Eyn12]中得到明确阐述；研究巴拿赫分布时也需要类似的推理，如

[10] 有关巴拿赫空间中常微分方程可数系统的内容，请参见 [Dei77] 。

见 [Eyn14]。[11] 另请参见 [DGV16]，其中介绍了巴拿赫流形射影极限的一般理论。

在第 2.4 节中，我们通过讨论巴拿赫空间中初值问题的经典情形，补充了形式化的公理化方法；这一讨论利用了第 1.7 节中关于函数空间之间非线性映射的研究结果。我们的出发点是皮卡–林德勒夫定理的定量版本，它将解构造为压缩映射的不动点。随后，我们运用第 2.3 节中关于不动点参数依赖性的结果，得到定理 2.4.34：解对初始条件和参数的 C^k-依赖性（以及实解析依赖性）；并得到命题 2.4.38：对 $C^{0,k}$ 的依赖性。我们对 C^k-依赖性的处理，是对 [Gl06d] 中方法的一种变体（该文改为应用隐函数定理）；而 [AlS15]（其中 t_0 固定）和 [GN17] 则是我们处理 $C^{0,k}$-依赖性的先导工作。关于经典讨论，参见 [CaH67, Thm. 3.7.1]（证明在固定 t_0 和巴拿赫空间中的参数 p 时，对 (t, y_0, p) 的 FC^k-依赖性），或 [Di60, 10.8.2]（关于对 (t, t_0, y_0) 的 FC^k-依赖性）以及 [Di60, 10.7.4]（关于在固定 (t_0, y_0) 和巴拿赫空间中的 p 时，对 (t, p) 的 FC^k-依赖性）。另见 [La99, Thm. IV.1.11]，其中讨论了对 (t, y_0) 的 FC^k-依赖性（固定 t_0），以及同上文献中的 Thm. IV.1.16，其中讨论了与时间无关的向量场的整体流的 FC^k-性质（视为 (t, y_0) 的函数）。通过隐函数定理研究初值问题的解对参数的依赖性，这一总体思路源自 [Ro68]（另参见 [CH82]）。为了证明解对初始条件和参数的实解析依赖性，我们构造了复解析延拓，因此也必须考虑复变量中的微分方程。[Di60] 也采用了这一总体策略。同样，我们将实解析隐函数定理归结为复解析情形，这不过是 $\mathbb{C}$ 上的 C^∞-情形（参见注 2.3.37(c)）。在这两种情况下，这一策略（见 [Di60]）都使得我们无须手动证明解的幂级数展开收敛，也无须给出确保其收敛的任何估计（不同于 [KP02a, KP02b] 中计算性更强的方法）。我们还要指出，尽管格罗恩沃尔引理颇有用处，但在讨论微分方程时我们并未用到它。我们也略去对具有不连续右端项的微分方程的讨论；关于有限维空间或巴拿赫空间中的微分方程，见 [Son98] 或 [Scr97]（及其中所列参考文献）；关于推广及李理论应用，见 [Gl15b] 和 [NR17]（另参见 [MNe18]）。

在习题 2.3.7 和 2.3.8 中，我们使用了某些复化范数（极大性的那些）。关于范数的复化的一般讨论，参见 [MST99] 和 [Kir01]。就李理论应用而言，可比较 [Da14]。

可度量空间上的微积分。众所周知，在可度量化局部凸空间上，映射 f 是光滑的（按定义 1.3.1 的含义），当且仅当

[11] 关于余巴拿赫分布的 Frobenius 定理同样可得，参见 [Hi00] 和 [Eyn16]。

它沿每条光滑曲线都光滑，即按照便利微分学的含义是光滑映射（参见 [KM97, Thm.12.8]；关于有限维空间之间的映射，参见 [Bm67]）。沿着具有 $k+1$ 个变量的光滑映射检验 C^k 性质（如定理 2.6.2 中所述）的想法源自 [BGN04]；由于我们假设局部凸性，证明更为简单。即使对于有限维空间之间的映射，也无法通过光滑曲线检验有限 k 的 C^k 性质，参见 [Bm67]。但正如 [Bm67] 中所指出的，两个变量就足够了。对于可度量化空间上的映射，两个变量也足够（如注 2.6.12 所述），这一点得益于 [KM97, p. 27] 中的一个论证（该论证在习题 1.7.10 中得到了详细展开）。定理 2.6.1 是 [KM97, Thm. 4.11(1)] 的一个变体。利用有限个变量的函数（所谓的“图形”）来筛选出所关注的函数，这一想法也是微分学空间理论的核心（参见 [So 84], [DI85], 及其中的参考文献）。我们还提到，特殊曲线引理（引理 2.6.6）是便利微分学中的标准工具（参见 [KM97, p. 18] 或 [FK88]）。

Silva 空间上的微积分。我们关于 Silva 空间上的 C^k-映射的结果基于 [Gl07a]。值得一提的是，对于 Silva 空间的开子集上的映射，按照定义 1.3.1 的意义定义的光滑性与沿光滑曲线的光滑性（如《方便微分微积分》中所述）是等价的（参见例如 [CaP19]）。对于以可度量化空间为模型的流形，以及以 Silva 空间为模型的流形，光滑映射可以刻画为将（开子集上的）光滑函数拉回为同类函数的映射（见 [EW17]）。关于 Silva 空间之间 Silva 可微映射的某种概念，可参见 [Les82，定义 2.2] 及其中的参考文献。

直和之间的映射。关于局部凸直和之间映射的结果基于 [Gl03b]（其中也讨论了不可数直和）以及 [Gl04b]（其中包括带参数的结果）。

与 [Schw57, Ch.III, §1], 中给出的测试函数空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的零邻域基的显式描述相对应，我们稍后将看到，向量值紧支撑光滑函数空间（或向量丛中的紧支撑光滑截面空间）可以识别为适当局部凸直和的闭向量子空间（例如见 [Gl04b], [Gl03c], [Gl05d], 和 [BG14]）。命题 2.8.1 随后可作为工具，用于建立此类紧支撑函数空间（或截面空间）之间非线性映射的连续性和可微性。

3 无穷维流形基础理论

本章讨论以局部凸空间为模型的流形，以及与之相关的基本概念：流形之间的光滑（以及 C^r-）映射、切映射、向量场和微分形式。

对于缺乏可微流形背景知识的读者，我们会详细讲解所有基本概念和构造。经验较丰富的读者可以跳过这些讲解，直接关注与有限维情形的差异。

在本章末尾，我们汇集了第 4 章中构造无穷维流形所需的预备材料。因此，第 3.7 节介绍向量丛和主丛的相关内容；第 3.8 节则专门讲解如何利用喷射及其相应的指数映射构造局部加法和管状邻域。

3.1 以局部凸空间为模型的流形

到目前为止，我们主要讨论了局部凸空间的开子集之间的 C^r-映射。现在我们来引入相应的“整体”对象，即以局部凸空间为模型的 C^r-流形。经典流形在局部上看起来像 $\mathbb{R}^n$的开子集，而这里考虑的流形在局部上看起来像给定局部凸空间的开子集。我们将在后文看到， C^r-流形之间的 C^k-映射（对于 $k \leq r$）可以用自然的方式定义，分析学中的许多其他概念也可以推广到流形情形。

光滑流形（$r = \infty$）最受关注，但我们认为，更一般地介绍基于基域 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 的 C^r-流形基础也很有用，其中 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$，并以“$C^\omega$”作为“解析”的简写。[1]所有局部凸空间都是定义在 $\mathbb{K}$上的局部凸空间。若要强调所选的基域，我们写作 $C^r_{\mathbb{K}}$，而不写 C^r。

下面将采用以下简化：

[1] 关于符号 ∞ 和 ω，我们的约定是，对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$， $n < \infty < \omega$。此外，$\infty - n := \infty$，且 $\omega - n := \omega$。

约定 3.1.1. 设 $f\colon X \to Y$和 $g\colon A \to B$为任意映射。为避免繁琐的记号，必要时我们将 $g \circ f$作为复合 $g \circ f|_{f^{-1}(A)}\colon f^{-1}(A) \to B$的简写。

注 3.1.2。若 Y 和 A 都是给定拓扑空间 Z 的子集，A 在 Z 中是开集，且 f 连续，则我们通常采用前述约定。此时，$g \circ f$ 的定义域 $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \cap A)$ 在 X 中是开集。

定义 3.1.3。设 M 是豪斯多夫拓扑空间，E 是局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间。M 的一个 E- 坐标图 是一个同胚 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$，它将 $U_\varphi \subseteq M$ 的一个开子集映到 $V_\varphi \subseteq E$ 的一个开子集。设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$。一个 M 的 C^r-图册（以 E 为模型）是由 E 个 $\mathcal{A}$ 坐标图组成的集合，用于 M，并满足以下条件：

（A1） $M = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi$，也就是说，$M$ 被定义域 U_φ 覆盖；（A2）所有 φ，$\psi \in \mathcal{A}$ 都是 C^r-相容的，其含义是转移映射

$$\varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \to V_\varphi \subseteq E \tag{3.1}$$

（它们是 E 的开子集之间的映射）是 C^r。

注意，M 的 C^r-图册集合可以按包含关系排序。

定义 3.1.4. 一个以 E 为模型的 C^r-流形是一个二元组 $(M, \mathcal{A})$，其中 M 是豪斯多夫拓扑空间，而 $\mathcal{A}$ 是 M 的一个极大 C^r-图册。我们主要关注 C^∞-流形，它们也称为光滑流形。$C^\omega_{\mathbb{K}}$-流形也称为 $\mathbb{K}$-解析流形。如果 $(M, \mathcal{A})$ 是一个流形，我们将“坐标图”一词专用于 E-坐标图 $\varphi \in \mathcal{A}$。给定 $x \in M$，x 附近的坐标图是一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ 在 $\mathcal{A}$ 中，满足 $x \in U_\varphi$。我们用 $\mathcal{A}_x$ 表示 M 中 x 附近所有坐标图的集合。以巴拿赫空间（希尔伯特空间或弗雷歇空间）为模型的流形分别称为巴拿赫流形、希尔伯特流形和弗 ′雷歇流形。

注 3.1.5。每个用于 M 的 C^r- $\mathcal{A}$ 图册都包含在一个（唯一确定的）极大 C^r-图册中，即由所有与 $\mathcal{A}$ 相容的 E-坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ 构成的集合 $\mathcal{M}$，其中相容是指转移映射

$$\varphi \circ \kappa^{-1}|_{\kappa(U_\varphi \cap U_\kappa)} \qquad \text{and} \qquad \kappa \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U_\kappa \cap U_\varphi)}$$

对所有 $\kappa \in \mathcal{A}$，均有 C^r。要验证 $\mathcal{M}$ 是一个 C^r-图册，必须检查所有 φ，$\psi \in \mathcal{M}$ 是否相容（按定义 3.1.3 (A2) 的含义）。我们通过“图卡插入”来验证，这是一个基于链式法则的简单标准论证，在下文中通常留给读者完成。要证明$\varphi \circ \psi^{-1}$在给定元素 $x \in \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$ 的某个邻域上 C^r，思路是选取一个坐标图 $\kappa \in \mathcal{A}$，使得 $\psi^{-1}(x) \in U_\kappa$。那么，$W := \psi(U_\varphi \cap U_\psi \cap U_\kappa)$ 是 x 在 $\psi(U_\varphi \cap U_\psi) \subseteq E$中的一个开邻域，而 $\mathcal{M}$的定义意味着

$$\varphi \circ \psi^{-1}|_W = (\varphi \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ \psi^{-1})|_W$$

它是定义在 x的开邻域 W 上的一个 C^r-映射，因为它是若干个 C^r-映射的复合。由于 x 是任意的，我们推得 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 在其整个定义域 $\psi(U_\varphi\cap U_\psi)$ 上 C^r。因此， φ 和 ψ 确实相容。

注 3.1.6。 设 $(M,\mathcal{A})$ 是一个以 E 为建模空间的 C^r-流形。

(a) 有时，我们也将坐标图 $\varphi\in\mathcal{A}$ 称为局部坐标图。若 $\varphi\colon U_\varphi\to V_\varphi$，则称坐标图 φ为 M的整体坐标图，如果 $U_\varphi=M$。当然，整体坐标图不一定存在。

(b) 设 F 是一个与 E 同构的局部凸空间。有时，为了方便起见，我们也会放宽术语，将 F-坐标图 φ 称为 M 的“ M的坐标图”，如果 φ 与 $\mathcal{A}$ 是 C^r-相容的（其含义见注 3.1.5）。这种情况只会很少出现，而这种术语的滥用从上下文中显然可知。

注 3.1.7。通常，对于给定的拓扑空间 M，我们希望将其赋予一个 C^r-流形结构，但一开始并没有极大 C^r-图册；一般来说，我们只知道某个（非极大）图册。于是，我们可以将该图册扩展为极大图册，以便将 M 视为一个 C^r-流形。

下面给出一些流形的基本例子。

例 3.1.8。每个局部凸 $\mathbb{K}$-向量空间 E 都可以用自然的方式成为一个以 E 为模型的 C^∞-流形，并赋予包含 C^∞-图册 $\{\mathrm{id}_E\colon E\to E\}$的极大 C^∞-图册。更一般地，每个开子集 $U\subseteq E$在赋予包含 $\{\mathrm{id}_U\}$的极大 C^∞-图册后，都成为一个 C^∞-流形。同样， E （及其每个开子集）都可以看作一个 $\mathbb{K}$-解析流形。

例 3.1.9。 若 $(M,\mathcal{A})$ 是一个 C^r-流形，且 $U\subseteq M$ 是一个开子集，那么 U 可以成为一个 C^r-流形：我们在 U 上赋予诱导拓扑，并注意到 $\{\varphi\in\mathcal{A}\colon U_\varphi\subseteq U\}$ 是 U的一个极大 C^r-图册（习题！）。

流形更有趣的例子是给定流形的（不一定是开）子流形。

定义 3.1.10. 设 $(M,\mathcal{A})$ 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^r-流形，且 $F\subseteq E$ 是一个闭向量子空间。以 F 为模型的 M的子流形 是满足以下条件的子集 $N\subseteq M$：对每个 $x\in N$，都存在 M 上包含 x 的坐标图 $\varphi\colon U_\varphi\to V_\varphi$，使得 $\varphi(U_\varphi\cap N)=V_\varphi\cap F$。此时， $\varphi_N:=\varphi|^{V_\varphi\cap F}_{U_\varphi\cap N}$ 是 N 的一个 F-坐标图，而由此得到的所有 F-坐标图 φ_N 构成 N 的一个 C^r-图册，这利用了 F 是闭的。[2] 事实上，给定$\varphi_N,\psi_N\in\mathcal{B}$，它们的转移映射

[2] 这里，只要 F 是序列闭的就足够了，但我们不知道有哪些自然情形会使子流形的模型空间是序列闭而非闭的。

$$\varphi_N \circ \psi_N^{-1} \;=\; \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U_\varphi \cap U_\psi \cap N)}$$

作为到 E 的映射是 C^r（因为 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 是 C^r）。由于 $\varphi_N \circ \psi_N^{-1}$ 的取值落在闭向量子空间 F 中，因此根据引理 1.3.19（分别地，习题 2.2.4），它作为到 F 的映射也是 C^r。

现在，我们赋予 N 包含 $\mathcal{B}$ 的极大图册。坐标图 $\varphi_N \in \mathcal{B}$ 称为子流形坐标图，而 M 的相应坐标图 φ 称为适配于 N。如果 N 是 M 的子流形，以 F 为模型，且 F 是 E 的可补向量子空间（如定义B.3.2所述），那么 N 称为分裂 子流形。

注 3.1.11。如果 $N \subseteq M$ 是按上述意义分裂的子流形，那么当 M 是巴拿赫流形时，这一点可能很有用（因此可以使用逆映射定理和隐函数定理）。对于非巴拿赫流形，这一概念用处较小。因此，我们稍后将以不同方式定义“分裂李子群”（参见定义 9.1.20）。

注 3.1.12。我们将在引理 3.3.24 中看到，N 在同构意义下决定 F，并且如果 $N \neq \emptyset$ 和 $r \geq 1$，则诱导在 N 上的 C^r-流形结构基本上是唯一的。

注 3.1.13。出于李理论的需要，我们还需要比子流形更一般的子集（所谓的初始子流形）。我们将在定义 3.3.22 中介绍这些子集。

注 3.1.14。如果 $(M, \mathcal{A})$ 是一个 C^r-流形，并且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 满足 $k \leq r$，那么极大 C^r-图册 $\mathcal{A}$ 也是一个 C^k-图册，因此可扩充为极大 C^k-图册 $\mathcal{B}$。因此，$(M, \mathcal{A})$ 具有一个底层的 C^k-流形 $(M, \mathcal{B})$。为简便起见，我们通常用 M 作为 $(M, \mathcal{A})$ 的简写；每当我们要将 M 视为一个 C^k-流形时，也用同一个符号表示 $(M, \mathcal{B})$。同理，每个 $C^r_{\mathbb{C}}$-流形 $(M, \mathcal{A})$ 都有一个底层的 $C^r_{\mathbb{R}}$-流形，它是通过取包含 $\mathcal{A}$ 的极大 $C^r_{\mathbb{R}}$- 图册得到的。

例 3.1.15.局部凸空间的子流形已经提供了丰富多样的有趣流形。例如，我们稍后将看到，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的每个闭子群都是 $M_n(\mathbb{R})$ 的光滑子流形。一些基本的子流形例子将在接下来的习题中讨论，例如 $\mathbb{R}^2$ 中的圆 $\mathbb{S}^1$、$\mathbb{R}^n$ 中的 $(n-1)$ 球面 $\mathbb{S}^{n-1}$，以及 $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ 内的特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$。

流形的直积将经常被使用。

定义3.1.16. 设 $(M_1, \mathcal{A}_1)$ 和 $(M_2,${v10>}) 分别是以拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间 E_1 和 E_2为模型的 C^r-流形。那么

$$\mathcal{A} := \{\varphi_1 \times \varphi_2 \colon \varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

是 $M_1 \times M_2$的一个 C^r-图册，并赋予乘积拓扑（如下文所述）。因此，包含 $\mathcal{A}$ 的极大图册使 $M_1 \times M_2$ 成为一个以 $E_1 \times E_2$为模型的 C^r-流形，称为 M_1 和 M_2的直积。

要看出 $\mathcal{A}$ 是一个图册，关键是证明所有转移映射都是 C^r。给定 $\varphi_1 \times \varphi_2$、$\psi_1 \times \psi_2 \in \mathcal{A}$，映射

$$(\varphi_1 \times \varphi_2) \circ (\psi_1 \times \psi_2)^{-1} = (\varphi_1 \circ \psi_1^{-1}) \times (\varphi_2 \circ \psi_2^{-1})$$

是 C^r，因为它是两个 C^r 映射的直积（参见引理 1.3.3 和练习 2.2.5）。因此 (A2) 成立，(A1) 也容易验证。

注 3.1.17. 在讨论有限维流形的经典微分几何教科书中，所有流形都以 $\mathbb{R}^n$ 为模型，而且通常假设流形满足第二可数公理（或者等价地，假设它们是 σ-紧的）。这使流形更易于处理：每个 σ-紧致有限维光滑流形都是仿紧的（见引理 A.5.6），并且实际上都存在光滑单位分解（见命题 3.5.34）。后者有助于进行局部化论证，是微分几何和整体分析的重要工具。我们还提到，根据惠特尼嵌入定理 [Wh36]，每个 σ-紧致有限维光滑流形都可以实现为某个 $\mathbb{R}^n$ 的光滑子流形。仿紧有限维流形不过是开 σ-紧子流形的不交并（见命题 A.5.8），因此同样易于处理。

将 σ紧致性、仿紧性或第二可数性等条件纳入一般的以局部凸空间为模型的流形的定义，并不合理（因为许多重要例子并不满足这些条件）。相反，每当需要这样的附加性质时，我们都会明确说明。

注 3.1.18。在此我们指出，以
局部凸空间为模型的流形不一定是正则拓扑空间，这与
有限维流形不同，后者是正则的，因为它们局部紧
（回忆一下，若拓扑空间 X 正则，则它是豪斯多夫的，并且每个
给定点 $x \in X$ 的邻域 U 都包含一个闭邻域
x）。这种非正则流形的一个例子可见于习-
题3.1.3（改编自 [Mil82]）。对于以局部凸
空间（定义见后）为模型的李群，这种病态不会出现：每个李群作-
为拓扑群，其底拓扑空间是正则的，甚至
完全正则的（见 [HR79，第II章，§8]）。

第3.1节习题

习题 **3 1 1** φ $]0\ 2\pi[\to \mathbb{S}^1 \setminus \{1\},\ \varphi\ t = e^{it}$ ψ $]-\pi\ \pi[\to \ldots$
$\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\},\ \psi\ t = e^{it}$ $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}\ |z| = 1\}$
定义：,( ): 和：,( ): ，其中：：是单位圆。证明 $\{\varphi^{-1}, \psi^{-1}\}$ 是 $\mathbb{S}^1$ 的一个 C^∞-图册。

练习 3.1.2. 设 M_1 和 M_2 是 C^r-流形，且 $N_1 \subseteq M_1$ 和 $N_2 \subseteq M_2$都是子流形。证明 $N_1 \times N_2$ 是 $M_1 \times M_2$ 的一个子流形，其流形结构（作为子流形）与 N_1 和 N_2的直积一致。

练习 3.1.3。设 n，$d \in \mathbb{N}$ 满足 $d < n$ 且 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 是具有以下性质的子集：对于每个 $p \in M$，存在一个 C^r-映射 $f\colon\ W \to \mathbb{R}^{n-d}$，其定义在 p的开邻域 $W \subseteq \mathbb{R}^n$上，使得 $M \cap W = f^{-1}(\{0\})$，并且对于每个 $x \in W$，$f'(x)$具有满秩。证明 M是 $\mathbb{R}^n$的一个以 $\mathbb{R}^d \times \{0\}$为模型的 C^r-子流形。（提示：对于之前的 p和 f，经过坐标置换后，不妨设 $h\colon\ \mathbb{R}^n \supseteq W \to \mathbb{R}^n$，$h(x_1, \ldots\ldots, x_n) := (x_1, \ldots\ldots, x_d, f(x))$ 在 p处具有可逆微分，因此根据反函数定理，它在 p的某个开邻域上限制为一个局部微分同胚 φ。）

练习 3.1.4。利用练习 3.1.3，证明球面

$$\mathbb{S}^{n-1} := \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1\Big\}$$

是 $\mathbb{R}^n$的一个 $(n-1)$维光滑子流形。并证明 SL $\{x \in M_2\ \mathbb{R}\quad x = 1\}$ 3 $M_2\ \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ $(\mathbb{R})\colon (\,)\colon \det(\,)$ 是 $(\,)$ 的一个 -维光滑子流形。

练习 3.1.5。设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$、$E$ 为一个局部凸空间，M 为一个豪斯多夫拓扑空间，且 $(U_j)_{j\in J}$ 为 M 的一个开覆盖。假设对每个 $j \in J$，在 U_j 上给定了一个以 E 为模型的 C^r-流形结构，使得对所有 i，$j \in J$，U_i 与 U_j 在 $U_i \cap U_j$ 上诱导相同的 C^r-流形结构。证明可以赋予 M 一个以 E 为模型的 C^r-流形结构，使得 M 在每个开子集 U_j 上诱导所给的 C^r-流形结构。后一 C^r-流形结构是唯一的。

练习 3.1.6。（一个非正则流形）令 M 为 Fr´echet 空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中由所有序列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 组成的子集，其中除有限多个以外，所有 x_k 都属于开区间 $J := \,]-1,\ 1[$。因此 $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} M_n$，其中 M_n: $= \mathbb{R}^n \times J^{\{n+1,n+2,\ldots\}}$ M_n M 。我们赋予其乘积拓扑，并赋予相对于包含映射 $M_n \to M$ 的终拓扑（参见附录 A 中的定义 A.3.1）。因此，当且仅当对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，交集 $U \cap M_n$ 在 M_n 中是开集时，$U \subseteq M$ 才是开集。

(a) 证明 M_n 在 M 中是开集，并证明对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，M 在 M_n 上诱导给定的拓扑。由此推出 M 是豪斯多夫的。(b) 求 $U_1 \times \cdots \times U_n \times J^{\{n+1,n+2,\ldots\}}$ 这种形式的集合在 M 中的闭包，其中 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 U_1、……、U_n 是 $\mathbb{R}$ 的任意非空子集。(c) 证明 M 中 (0，0，……) 的每个邻域 U 都包含一个 (b) 中所述形式的集合，并由此推出 $U \not\subseteq J^{\mathbb{N}}$。注意到 $J^{\mathbb{N}}$ 是 (0，0，……) 的一个邻域，得出拓扑空间 M 不是正则的。(d) 映射 $f\colon\ J \to \mathbb{R}$，$f(x) := x/(1-x^2)$ 是一个 C^∞-微分同胚。证明映射

$$\varphi_n\colon M_n \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (x_1, \ldots, x_n, f(x_{n+1}), f(x_{n+2}), \ldots)$$

对每个 $n \in \mathbb{N}_0$ 都是同胚。证明：$\{\varphi_n\colon\ n \in \mathbb{N}_0\}$ 是一个 C^∞ 图册，使得 M 成为以 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 为模型的光滑流形（实际上是实解析流形）。

习题 3.1.7.（Banach–Grassmann流形）给定一个巴拿赫空间 E 和可补向量子空间 $F \subseteq E$（如定义 B.3.2 所述），令 $\mathrm{Gr}_F(E)$ 表示所有满足 $F \cong H$ 且作为拓扑向量空间与 $E/F \cong E/H$ 同构的可补向量子空间 $H \subseteq E$ 的集合。本习题的目标是使 $\mathrm{Gr}_F(E)$ 成为以 $\mathcal{L}(F,\ E/F)$ 为模型的解析流形，即所谓的 *Grassmann manifold*。

(a) 给定 $H \in \mathrm{Gr}_F(E)$ 和 H 的一个补子空间 $Y \subseteq E$，令 $\mathrm{pr}_1^{H,Y}\colon E = H \oplus Y \to H$ 和 $\mathrm{pr}_2^{H,Y}\colon E = H \oplus Y \to Y$ 为分别投影到第一分量和第二分量的投影。证明，对于每个连续线性映射 $\alpha\colon H \to Y$，其图

$$\Gamma^{H,Y}(\alpha) := \{x + \alpha(x)\colon x \in H\}$$

是 E 的一个闭向量子空间，且以 Y 为补空间。还要证明，$\mathrm{pr}_1^{H,Y}$ 限制为拓扑向量空间同构 $\Gamma^{H,Y}(\alpha) \to H$，其逆映射为 $\theta^{H,Y}(x) := x + \alpha(x)$。因此，$\Gamma^{H,Y}(\alpha) \in \mathrm{Gr}_F(E)$。令

$$U_Y := \{\Gamma^{H,Y}(\alpha)\colon \alpha \in \mathcal{L}(H,Y)\}.$$

证明映射 $\Gamma^{H,Y}\colon \mathcal{L}(H,Y) \to U_Y,\ \alpha \mapsto \Gamma^{H,Y}(\alpha)$ 是双射。还要证明，U_Y 是 E 中 Y 的所有向量补空间组成的集合。

(b) 设 H 与前面相同，且 $G \in U_Y$。那么 $\alpha \in \mathcal{L}(H,Y)$，$\beta \in \mathcal{L}(H,Y)$，$\Gamma^{G,Y}(\beta) = \Gamma^{H,Y}(\alpha)$ 对某个 $\beta = \alpha + \beta \circ \theta^{G,Y}$ 成立。证明，对于每个 α，都有 $\beta = (\mathrm{id} - \theta^{G,Y} \circ \theta^{H,Y})^{-1} \circ \theta^{G,Y} \circ \theta^{H,Y}(\alpha)$。因此，$(\Gamma^{G,Y})^{-1} \circ \Gamma^{H,Y} = \alpha + \mathcal{L}(\theta^{G,Y}, Y)$ 是连续的仿射线性映射（因而也是解析映射）。

(c) 设 $H \in \mathrm{Gr}_F(E)$，且 Y 与 Z 都是 E 中 H 的向量补空间。给定 $\alpha \in \mathcal{L}(H,Y)$，证明 $\Gamma^{H,Y}(\alpha) \in U_Z$ 当且仅当线性映射 $\kappa_\alpha\colon \mathrm{pr}_1^{H,Z} \circ \theta^{H,Y}\colon H \to H$ 可逆。利用 $\mathrm{GL}(H)$ 在 $\mathcal{L}(H)$ 中是开集，推导出 $(\Gamma^{H,Y})^{-1}(U_Z)$ 在 $\mathcal{L}(H,Y)$ 中是开集。对于 $\alpha \in (\Gamma^{H,Y})^{-1}(U_Z)$，证明 $\Gamma^{H,Y}(\kappa_\alpha^{-1} - \alpha \circ \kappa_\alpha^{-1} - \mathrm{id}) = \Gamma^{H,Z} \circ \Gamma^{H,Y}$，其中 $\beta = \kappa_\alpha^{-1} - \alpha \circ \kappa_\alpha^{-1} - \mathrm{id}$。因此 $(\Gamma^{H,Z})^{-1}(\Gamma^{H,Y}(\cdot)) = \mathrm{id} + \beta$，这表明 $(\cdot, \cdot)$ 是解析映射。

(d) 给 $\mathrm{Gr}_F(E)$ 赋予关于映射 $\theta^{H,Y}\colon \mathcal{L}(H,Y) \to \mathrm{Gr}_F(E)$ 的终拓扑，其中 $H \in \mathrm{Gr}_F(E)$，且 Y 是 H 在 E 中的一个向量补空间。证明每个 U_Y 都是 $\mathrm{Gr}_F(E)$ 中的开集，并且 $\theta^{H,Y}$ 是到 U_Y 上的一个同胚。

(e) 一般线性群(E)通过 $\sigma(\Lambda, H) := \Lambda(H)$ 在 $\mathrm{Gr}_F(E)$ 上作用，其中 $\Lambda \in$ 属于一般线性群(E)，$H \in$ 属于 $\mathrm{Gr}_F(E)$。稳定子 $S := \{\Lambda \in$ 一般线性群$(E)\colon \Lambda(F) = F\}$ 的 F 是一般线性群(E) 的闭子群，因此一般线性群$(E)/S$ 是豪斯多夫空间（习题 C.2.7）。由于该作用是传递的，映射 $h\colon$ 一般线性群$(E)/S \to \mathrm{Gr}_F(E)$，$h(\Lambda S) := \Lambda(F)$ 是一个双射。因此，只要证明 h 是开映射，$\mathrm{Gr}_F(E)$ 就是豪斯多夫空间。我们分步进行：证明对于每个 $\Lambda \in$ 一般线性群(E)，$\sigma_\Lambda\colon \mathrm{Gr}_F(E) \to \mathrm{Gr}_F(E)$，$H \mapsto \Lambda(H)$ 是一个同胚。固定 F 在 E 中的一个向量补空间 Y。证明

$$\tau(\Gamma^{F,Y}(\alpha)) := \mathrm{id}_E + \alpha \circ \mathrm{pr}_1^{F,Y} \in \mathrm{GL}(E)$$

对于某个 $\Gamma^{F,Y}(\alpha)$，它位于 F 的某个邻域 $W \subseteq U_Y$ 中，并且 $\tau\colon W \to \mathrm{GL}(E)$ 是到 σ_Λ 的连续局部截面（即 $\sigma_\Lambda \circ \tau = \mathrm{id}_W$），满足 $\tau(F) = \mathbf{1}$。推出 σ_Λ 在 $\mathbf{1}$ 处是开映射（即它将 F 的 $\mathbf{1}$ 邻域映射为邻域）。由此推得 σ_Λ 是开映射，因而 h 也是开映射。

(f) 对于之前所述的每个 H 和 Y，存在拓扑向量空间的同构 $\varphi_{H,Y,\varepsilon,\delta} = \mathcal{L}\,\varepsilon\,\delta\,\circ\,\theta^{H,Y,-1}\colon\ \mathcal{L}\,\varepsilon\,\delta\quad\mathcal{L}\,H\,Y\ \to\mathcal{L}\,F\qquad\alpha\mapsto\delta\circ\alpha\circ\varepsilon\qquad\colon F\to H$ 和 $\delta\colon Y\to E/F$。通过 $,,,\colon (,)\,(,)$ 定义 $,,,\colon U_Y\to\mathcal{L}(F,E/F)$，其中 $(,)\colon (,)\,(,E/F)$，。证明这些映射 $\varphi_{H,Y,\varepsilon,\delta}$ 构成 $\mathrm{Gr}_F(E)$ 的 $\mathcal{L}(F,E/F)$ 坐标图解析图册。取极大图册后，我们便得到 $\mathrm{Gr}_F(E)$ 上所需的解析流形结构。

习题 3.1.8。我们来讨论与格拉斯曼流形相关的现象。

(a) 设 $E:=\ell^2$, $F:=\{x\in E\colon\ x_1=0\}$ 且 $H:=\{x\in E\colon\ x_1=x_2=0\}$。证明 $F\cong H$ 但 $E/F\ncong E/H$，从而 $H\notin\mathrm{Gr}_F(E)$。(b) 证明，局部凸空间 E的每个一维向量子空间 F 都是可补的（如果 $F\neq E$，则对于适当的线性泛函 $\lambda\in E'$，$\ker(\lambda)$ 是 F 的向量补空间）。利用关于 n 的归纳法，推出每个 n 维向量子空间 $F\subseteq E$ 都是可补的。(c) 设 E 是一个巴拿赫空间，$n\in\mathbb{N}$，且 $F\subseteq E$ 和 $H\subseteq E$ 都是 n维向量子空间。证明 $E/F\cong E/H$，从而 $H\in\mathrm{Gr}_F(E)$。[提示：设 Y 和 Z 分别是 F 和 H的向量补空间。于是 $Y\cap Z$ 在 E中具有有限余维，因此在 Y 和 Z]中也具有相同的余维。

> 根据前述内容，$\mathrm{Gr}_n(E):=\mathrm{Gr}_F(E)$ 与 F 的选择无关（模掉 $\mathrm{Gr}_n(E)$ 的建模空间的同构）。流形 $\mathbb{P}(E):=\mathrm{Gr}_1(E)$ 由 E 的所有一维向量子空间组成，尤为重要；它称为 E的 *projective space* 。

3.2 C^r-流形之间的映射

现在我们定义 C^r-流形之间的 C^r-映射，并汇总一些基本性质和例子。

定义 3.2.1. 设 M 和 N 是分别以局部凸空间 E 和 F为模型的 C^r-流形。若映射 $f\colon M\to N$满足 f连续，并且对于 M 的每个坐标图 φ 以及 N的每个坐标图 ψ，映射

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon E\supseteq\varphi(f^{-1}(U_\psi)\cap U_\varphi)\to F \tag{3.2}$$

是 C^r。注意，复合的定义域 $\varphi(f^{-1}(U_\psi)\cap U_\varphi)$ 是 V_φ 的开子集，因此也是 E中的开子集。我们用 $C^r(M,N)$ 表示从 M 到 N的所有C^r-映射的集合。

注 3.2.2. 设 $f\colon M\to N$ 是 C^r-流形 $(M,\mathcal{A}_1)$ 与 $(N,\mathcal{A}_2)$ 之间的连续映射。设 $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{A}_1$和 $\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{A}_2$是任意图册。利用“图卡插入”技巧可知，$f$ 是 C^r 当且仅当对所有 $\varphi\in\mathcal{B}_1$ 和 $\psi\in\mathcal{B}_2$，映射 (3.2) 都是 C^r。因此，可以用非极大图册检验 C^r 性质，这在实践中非常有用。甚至只需验证：对每个 $x\in M$，都存在一个包含 x 的坐标图 $\varphi\in\mathcal{A}_1$ 以及一个包含 $f(x)$ 的坐标图 $\psi\in\mathcal{A}_2$，使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是 C^r。

下面给出一些简单的例子：

例 3.2.3. 设 E 和 F 是局部凸空间，$f\colon U \to F$ 是在开子集 $U \subseteq E$上的映射。那么，作为局部凸空间开子集之间的映射（如第1章所述），f 是 C^r 的，当且仅当作为 E（分别为 F）建模的 C^r-流形 U与 F之间的映射，且这两个流形分别配备包含图册 $\{\mathrm{id}_U\}$和 $\{\mathrm{id}_F\}$的极大 C^r-图册时，f 是 C^r 的。

因此，我们先前的术语与当前的术语相容。

例 3.2.4.设 M_1 和 M_2 分别是以 E_1 和 E_2为模型的 C^r-流形。那么坐标投影

$$\mathrm{pr}_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i$$

是 C^r。事实上，对于定义3.1.16中 $M_1 \times M_2$ 的（非极大）图册 $\mathcal{A}$ 里的每个坐标图 $\varphi_1 \times \varphi_2$，以及 M_1的每个坐标图 ψ，都有

$$\psi \circ \mathrm{pr}_1 \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = \psi \circ \varphi_1^{-1} \circ \pi_1\,,$$

其中 $\pi_1\colon E_1 \times E_2 \to E_1$ 是坐标投影。由于该映射由 C^r-映射复合而成，因此它是 C^r。所以 pr_1 是 C^r。类似地，pr_2 是 C^r。

利用“图卡插入”技巧，我们得到：

命题 3.2.5. 设 M、N 和 X 是 C^r-流形。若 $f\colon M \to N$ 和 $g\colon N \to X$ 是 C^r-映射，则它们的复合 $g \circ f\colon M \to X$ 也是 C^r。

证明。映射 $g \circ f$ 是连续的。给定 M 的坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ 和 X 的坐标图 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$，令 $x \in \varphi((g \circ f)^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi)$。设 N 是 $f(\varphi^{-1}(x))$ 附近的一个坐标图。那么

$$\psi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ g \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ f \circ \varphi^{-1})$$

在 V_φ 中的某个开邻域上成立，而且这是一个 C^r-映射，因为它是拓扑向量空间的开子集之间的 C^r-映射的复合。因此 $\psi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ 是局部 C^r，从而是 C^r。故 $g \circ f$ 是 C^r。□

引理 3.2.6.设 M_1、M_2和 N 是 C^r-流形。则映射 $f = (f_1, f_2)\colon N \to M_1 \times M_2$ 是 C^r，当且仅当其分量 $f_1\colon N \to M_1$和 $f_2\colon N \to M_2$ 是 C^r。

证明。若 f是 C^r，那么 $f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f$ 和 $f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f$ 也都是如此，因为它们是 C^r-映射的复合。反之，假设 f_1 和 f_2 是 C^r。考虑 N 的一个坐标图 φ以及形如 $\varphi_1 \times \varphi_2$ 的 $M_1 \times M_2$ 的一个坐标图（根据注 3.2.2，只需考虑这种情形）。那么 $(\varphi_1 \times \varphi_2) \circ f \circ \varphi^{-1} = (\varphi_1 \circ f_1 \circ \varphi^{-1},\ \varphi_2 \circ f_2 \circ \varphi^{-1})$ 是 C^r（见引理 1.3.3 和习题2.2.5），这正是所需的结论。□

引理 3.2.7。设 M 是一个 C^r-流形，$N \subseteq M$ 是一个子流形。那么包含映射 $\iota\colon N \to M,\ x \mapsto x$是 C^r的。此外，映射 $f\colon P \to N$从一个 C^r-流形到 N是 C^r 的，当且仅当 $\iota \circ f\colon P \to M$是 C^r的。

证明。设 M 和 N的建模空间分别为 E 和 $F \subseteq E$。对于 M中每个适配于 N 的坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$（如定义 3.1.10 中所述），以及相应的子流形坐标图 φ_N（属于 N），复合映射 $\varphi \circ \iota \circ \varphi_N^{-1}$是包含映射 $V_\varphi \cap F \to V_\varphi$；它作为连续线性包含映射 $F \to E$的限制，是 C^r 的。因此，ι 是 C^r 的（见注 3.2.2）。

若 f是 C^r，则根据命题 3.2.5，$\iota \circ f$也是如此。反过来，假设$\iota \circ f$是 C^r。令 φ和 φ_N如前，并令 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$为 P的一个坐标图。简记 $W := \psi(U_\psi \cap f^{-1}(U_\varphi))$。那么 $\varphi \circ \iota \circ f \circ \psi^{-1}\colon W \to E$是一个$C^r$-映射，其取值于闭向量子空间 $F \subseteq E$中，因此根据引理 1.3.19（分别地，习题 2.2.4），$(\varphi \circ \iota \circ f \circ \psi^{-1})|^F = \varphi_N \circ f \circ \psi^{-1}\colon W \to F$是 C^r。故 f 是 C^r。□

定义 3.2.8. C^r-微分同胚是一个 C^r-映射 $f\colon M \to N$，其定义在C^r流形之间，并且存在一个 C^r-映射 $g\colon N \to M$，满足 $g \circ f = \mathrm{id}_M$和 $f \circ g = \mathrm{id}_N$。

换言之，f是一个带有 $f^{-1} \in C^r(N, M)$的双射 C^r-映射。

定义 3.2.9. 称 C^r-流形之间的映射 $f\colon M \to N$ 为局部 C^r-微分同胚，如果对每个点 $x \in M$，都存在 M中的一个开邻域 U，使得 $f(U)$在 N中是开集，并且 $f|_U\colon U \to f(U)$是一个 C^r-微分同胚。特别地，f 是 C^r。

如果上下文已明确 r 的选取，则 C^r-微分同胚和局部C^r-微分同胚分别简称为微分同胚和局部微分同胚。

覆盖流形

在适当的假设下，流形结构可以沿局部同胚向前推或向后拉。

回忆一下，称拓扑空间之间的映射 $q\colon X \to Y$为局部同胚，如果对每个 $x \in X$，都存在一个开邻域 $U \subseteq X$，使得$q(U)$在 Y中是开集，并且 $q|_U\colon U \to q(U)$是一个同胚。

定理 3.2.10。设 M和 N为豪斯多夫空间，且 $q\colon M \to N$为局部同胚。设 E 为定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 和$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$上的局部凸空间。则以下结论成立。

(a) 若 N 是一个以 E 为模型的 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形，则 M 上存在唯一的、以 E 为模型的 $C^r_{\mathbb{K}}$- 流形结构，使得映射 q 是一个局部 $C^r_{\mathbb{K}}$- 微分同胚。(b) 若 q 是满射，且 M 是一个以 E 为模型的 $C^r_{\mathbb{K}}$- 流形，则以下条件等价：(i) N 具有一个以 E 为模型的 $C^r_{\mathbb{K}}$- 流形结构，使得 q 是一个局部 $C^r_{\mathbb{K}}$- 微分同胚；

(ii) 对于所有满足 q 的 x、$y \in M$，存在一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚 $h\colon U \to V$，它将一个开 x-邻域 $U \subseteq M$ 映到一个开y-邻域 $V \subseteq M$，且满足 $q \circ h = q|_U$。如果存在，则 (i) 中所述的 N 上的 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形结构是唯一的。

证明。（a）唯一性：设 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 是 M 上的极大 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册，它们以 E 为模型，并使 q 成为局部 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。给定 $x \in M$，取 $U_j \subseteq M$ 为 $j \in \{1,2\}$ 的一个开 x- 邻域，使得 $q(U_j) \subseteq N$ 是开集，并且 $q|_{U_j}\colon U_j \to q(U_j)$ 是由 $(M, \mathcal{A}_j)$ 在 U_j 上诱导的流形结构下的 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。缩小 U_1 和 U_2 后，可以假设存在 N 的一个坐标图 $\varphi\colon P \to Q \subseteq E$，使得 $q(U_1) \cup q(U_2) \subseteq P$。于是 $U := U_1 \cap U_2$ 是 M 中的一个开 x-邻域，而 $\varphi_x := \varphi \circ q|_U\colon U \to \varphi(q(U))$ 同时属于 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$。因此，$\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 都与包含 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册 $\{\varphi_x\colon x \in M\}$ 的极大 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册相同。

存在性：每个 $x \in M$ 都有一个开邻域 $U_x \subseteq M$，使得$q(U_x)$在 N 中是开集，并且 $q|_{U_x}\colon U_x \to q(U_x)$是一个同胚。缩小 U_x后，我们可以假设 $q(U_x) \subseteq P_x$，其中某个坐标图 $\psi_x\colon P_x \to Q_x \subseteq E$属于 N。缩小 P_x 和 Q_x 后，我们可以假设 $P_x = q(U_x)$。于是$\varphi_x := \psi_x \circ q|_{U_x}\colon U_x \to \psi_x(q(U_x))$是开集之间的一个同胚。现在 $\{\varphi_x\colon x \in M\}$ 是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册，注意到

$$\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} = \psi_x \circ q|_{U_x} \circ (q|_{U_y})^{-1} \circ \psi_y^{-1}$$

在其开定义域 $\varphi_y(U_x \cap U_y)$上与 $\psi_x \circ \psi_y^{-1}$一致。我们赋予 M 相应的极大 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册 $\mathcal{A}$。那么 q 是 $(M, \mathcal{A})$上的一个局部 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚，因为$\psi_x \circ q|_{U_x} = \varphi_x \in \mathcal{A}$推出 φ_x，因此 $q|^{q(U_x)}{}_{U_x} = \psi_x^{-1} \circ \varphi_x$也是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。

(b) 假设 (i) 成立，下面推导 (ii)。设 $x, y \in M$ 满足 $q(x) = q(y)$。由于 q 是局部微分同胚，我们可以找到一个开 x 邻域 $U \subseteq M$ 和一个开 y 邻域 $V \subseteq M$，使得 $q(U)$ 和 $q(V)$ 在 N 中是开集，并且映射 $q|_U\colon U \to q(U)$ 和 $q|_V\colon V \to q(V)$ 是 $C^r_{\mathbb{K}}$ 微分同胚。将 U 替换为 $(q|_U)^{-1}(q(U) \cap q(V))$，并将 V 替换为 $(q|_V)^{-1}(q(U) \cap q(V))$ 后，我们可以假设 $q(U) = q(V)$。现在，$h := (q|_V)^{-1} \circ q|_U\colon U \to V$ 是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$ 微分同胚，且满足 $q \circ h = q|_U$。

反过来，假设 (ii) 成立。给定 $y \in M$，令 $\psi_y\colon P_y \to V_y$ 是 M 的一个坐标图，且满足 $y \in P_y$。根据假设，存在一个开 y 邻域$W_y \subseteq M$，使得 $U_y := q(W_y)$ 在 N 中是开集，且 $q|_{W_y}\colon W_y \to q(W_y)$ 是一个同胚。缩小 W_y 后，我们可以假设 $W_y \subseteq P_y$。缩小 P_y 和 V_y 后，我们可以假设 $W_y = P_y$。现在

$$\varphi_y := \psi_y \circ (q|_{W_y})^{-1}\colon U_y \to V_y$$

分别是 N 和 E 的开子集之间的同胚。为证明 $\{\varphi_y\colon y \in M\}$ 是 N 的 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册，注意到若取满足 $q(y) = x$ 的 $y \in M$，则 $x \in N$ 满足 $y \in U_y$。令 y，$y' \in M$，并设 $x := q(y)$，$x' := q(y')$；我们证明 $\varphi_{y'} \circ \varphi_y^{-1}$ 在其定义域中的给定点 v 的某个开邻域上是 $C^r_{\mathbb{K}}$，

定义域 $\varphi_y(U_y \cap U_{y'})$（因此 $\varphi_{y'} \circ \varphi_y^{-1}$ 是 $C^r_{\mathbb{K}}$）。令 $z := \varphi_y^{-1}(v) \in U_y \cap U_{y'}$。存在 $a \in W_y$ 和 $b \in W_{y'}$，使得 $q(a) = q(b) = z$。根据假设 (ii)，存在一个开 b- 邻域 $V \subseteq M$ 和一个开 a-邻域 $U \subseteq M$，以及一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚 $h\colon U \to V$，使得 $q \circ h = q|_U$。现在

$$(q|_{W_y})^{-1}(U_y \cap U_{y'}) \cap U$$

是 a 在 W_y 中的一个开邻域，因而也是 M 中的一个开邻域，所以包含 a 的连通分支 C 在 M 中也是开集（因为 M 是流形，因而局部连通）。现在

$$g\colon C \to M, \quad c \mapsto (q|_{W_{y'}})^{-1}(q(c))$$

以及 $h|_C\colon C \to M$ 是连续映射，且 $q \circ g = q|_C$ 和 $q \circ h|_C = q|_C$。由于 $g(a) = h(a) = b$，由引理 2.3.44 可得 $g = h|_C$。因此，

$$\varphi_{y'} \circ \varphi_y^{-1}|_{\psi_y(C)} = \psi_{y'} \circ (q|_{W_{y'}})^{-1} \circ q|_{W_y} \circ \psi_y^{-1}|_{\psi_y(C)} = \psi_{y'} \circ h|_C \circ \psi_y^{-1}|_{\psi_y(C)}$$

在 V_y 中 v 的开邻域 $\psi_y(C)$ 上是 $C^r_{\mathbb{K}}$。

令 $\mathcal{A}$ 为 N 上包含 $\{\varphi_y\colon y \in M\}$ 的极大性 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册。对于每个 $y \in M$，像 $q(W_y) = U_y$ 在 N 中是开集，并且 $q|^{U_y}_{W_y} = \varphi_y^{-1} \circ \psi_y$ 是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。因此，$q\colon M \to (N, \mathcal{A})$ 是一个局部 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。

唯一性：对于 $j \in \{1,2\}$，设 $\mathcal{A}_j$ 是 N 上的一个极大 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册，以 E 为模型，且 $q\colon M \to (N, \mathcal{A}_j)$ 是局部 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。给定 $x \in N$，选取 $y \in M$ 使得 $q(y) = x$。对于 $j \in \{1,2\}$，存在一个开 y-邻域 $U_j \subseteq M$，使得 $q(U_j)$ 在 N 中是开集，且 $q|_{U_j}\colon U_j \to q(U_j)$ 是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$- 微分同胚，其中将 $q(U_j)$ 视为 $(N, \mathcal{A}_j)$ 的开子流形。我们可以假设 $W_x := U_1 = U_2$，只需将 U_1 和 U_2 都替换为 $U_1 \cap U_2$。缩小 W_x 后，可以假设 W_x 是 M 的一个坐标图 $\psi_x\colon W_x \to V_x \subseteq E$ 的定义域。那么，对于 $j \in \{1,2\}$，$\varphi_x := \psi_x \circ (q|_{W_x})^{-1}\colon q(W_x) \to V_x$ 是定义在 $(M, \mathcal{A}_j)$ 的开子流形 $q(W_x)$ 上的 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚，因此 $\varphi_x \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$。因此，$\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 都与 M 上包含 $\{\varphi_x\colon x \in N\}$ 的极大 $C^r_{\mathbb{K}}$-图册重合。故 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$。□

我们来回顾一些关于覆盖映射的基本术语。

定义 3.2.11. 拓扑空间之间的映射 $q\colon M \to N$ 称为**覆盖映射**，如果 q 是满射，并且每个 $x \in N$ 都有一个开邻域 $V \subseteq N$，使得该邻域被均匀覆盖，也就是说

$$q^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} W_j$$

对于一族互不相交的开子集，使得且：对所有，都是同胚。给定覆盖映射，一个同胚称为甲板变换，如果。所有甲板变换组成的集合 Deck() 在复合运算下构成一个群。如果 Deck() 对所有传递地作用于，则称为正规覆盖。

我们记录定理 3.2.10 的一个重要特殊情形。

推论 3.2.12。设是豪斯多夫空间之间的覆盖映射，且是上的局部凸空间。

（a）如果 N 是一个以 E 为建模空间的 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形，那么 M 存在唯一的以 E 为建模空间的 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形结构，使得 q 成为局部 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。
（b）如果 M 是一个以 E 为建模空间的 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形，覆盖 q 是正规的，并且每个 $h \in \mathrm{Deck}(q)$ 都是 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚，那么 N 存在唯一的以 E 为建模空间的 $C^r_{\mathbb{K}}$- 流形结构，使得 q 成为局部 $C^r_{\mathbb{K}}$- 微分同胚。□

纯流形与建模空间集

到目前为止，我们考虑的是以单个局部凸空间 F 为建模空间的 C^r-流形，即所谓的纯流形。对于某些用途（例如在第 4.2 节讨论的映射流形上的流形结构），这还不够。

定义 3.2.13。给定豪斯多夫空间 M 和局部凸空间集 $\mathcal{E}$，现在考虑坐标图 (E,φ)，其中 $E \in \mathcal{E}$，且 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ 是从 M 的开子集 U_φ 到 E 的开子集 V_φ 的同胚。我们通常写作 $E_\varphi := E$；如果 E_φ 已知，则简称 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$ 为坐标图。给定 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$，如果坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$ 和 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq E_\psi$ 满足 $\psi\circ\varphi^{-1}\colon \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \to \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$ 是一个 C^r-微分同胚，则称它们相容。其定义域覆盖 M 的一组 C^r-相容坐标图称为 M 上以 $\mathcal{E}$ 为建模空间的 C^r-图册；以 $\mathcal{E}$ 为建模空间的 C^r-流形是一个豪斯多夫空间，并带有一个以 $\mathcal{E}$ 为建模空间的极大 C^r-图册。如果 $\mathcal{E}$ 是单点集 $\{E\}$，那么 M 就是前面所说的以 E 为建模空间的 C^r-流形。

在定义 3.2.1 中使用坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$ 和 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq F_\psi$，而不是采用固定局部凸空间 E 和 F 的 E-坐标图和 F-坐标图，我们可以定义建模于局部凸空间集合 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 上的 C^r-流形 M 和 N 之间的 C^r-映射。其他概念也可以直接推广到非纯流形的情形，具体留给读者。子流形定义如下：

定义 3.2.14。设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ 和 M 是建模于局部凸空间集合 $\mathcal{E}$ 上的 C^r-流形。若子集 $N \subseteq M$ 满足：对每个 $x \in N$，都存在一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$ 以及一个闭向量子空间 $F_\varphi \subseteq E_\varphi$，使得 $\varphi(N \cap U_\varphi) = F_\varphi \cap V_\varphi$，则称其为一个（不一定是纯的）子流形。

我们赋予 N 由出现的 F_φ 集合 $\mathcal{F}$ 建模的极大性 C^r 图册，其中包含所有坐标图 $\varphi|_{N\cap U_\varphi}\colon\ U_\varphi \cap N \to V_\varphi \cap F_\varphi \subseteq F_\varphi$。

约定 3.2.15。除非另有说明，本书所讨论的流形都是纯流形。

非纯流形只在第 4.2、4.3 和 4.4 节中需要。讨论第 3.3 节中的浸没、浸入和嵌入时，我们也会考虑不一定是纯流形的情形，因为在无限维空间中，利用原像构造可能无法得到纯子流形。

第 3.2 节习题

习题 3.2.1。设 M 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^r-流形，其中 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$。设 $\varphi\colon U \to V$ 是开子集 $U \subseteq M$ 和 $V \subseteq E$ 之间的映射。证明：φ 是 M 的坐标图，当且仅当 φ 是一个 C^r-微分同胚。

练习 3.2.2。给定 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 和 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$，设 M 和 N 为 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形，且 $q\colon M \to N$ 是一个局部 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚，并且是正规覆盖映射。证明每个 $h \in \mathrm{Deck}(q)$ 都是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。

练习 3.2.3。设 G 是建模于局部凸空间 E 上的李群；也就是说，G 是一个群和一个光滑流形，并且群乘法 $\mu\colon G\times G \to G, \mu(x, y) = xy$ 和求逆映射 $\eta\colon G \to G, x \mapsto x^{-1}$ 都是光滑的。

(a) 证明，对于每个 $g \in G$，左平移映射 $\lambda_g\colon G \to G, \lambda_g(x) := gx$ 和右平移映射 $\rho_g\colon G \to G, \rho_g(x) := xg$ 都是 C^∞-微分同胚。(b) 设 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$ 是 G 的一个坐标图，且 $g \in G$ 是任意一个群元素。证明 $\varphi_g\colon gU_\varphi \to V_\varphi, x \mapsto \varphi(g^{-1}x)$ 也是一个坐标图。如果 φ 是围绕 $\mathbf{1}$ 的一个坐标图，那么 φ_g 是围绕 g 的一个坐标图。(c) 设 $F \subseteq E$ 是一个闭向量子空间。证明，子群 $H \subseteq G$ 是建模于 F 上的 G 的子流形，当且仅当存在一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$，它是 G 在 e 附近的坐标图，且满足 $\varphi(U_\varphi \cap H) = V_\varphi \cap F$。

练习 3.2.4. 如练习 3.2.3(c) 所示，为一般线性群$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$在$\mathbf{1}$附近指定一个合适的坐标图，并由此推出 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$（如练习 3.1.4 中所述）是以 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{x \in M_2(\mathbb{R})\colon \mathrm{tr}(x) = 0\}$ 为模型的 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的子流形。提示：矩阵指数函数 $\exp\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 满足 $\det(\exp x) = e^{\mathrm{tr}\, x}$（另见例 2.1.18）。

练习 3.2.5.证明：若 G 是一个李群，且 $H \subseteq G$ 是一个子群和子流形，那么子流形结构使 H 成为李群。由此推出 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 是一个李群。

练习 3.2.6. 在 $\{0, 1\}$ 上赋予离散拓扑，并在 $M := \{0, 1\} \times \mathbb{R}$ 上赋予乘积拓扑。设 $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个同胚，但不是一个 C^∞-微分同胚。那么

$$\varphi\colon \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (0, x) \mapsto x$$

且 $\psi\colon \{1\} \times \mathbb{R}, (\mathbf{1}, x) \mapsto \theta(x)$ 是 M 与 $\mathbb{R}$的开子集之间的同胚，并且 $\{\varphi, \psi\}$ 是 M 的光滑图册。设 $\mathcal{A}$ 为相应的极大光滑图册。证明 $\mathrm{pr}_2\colon M \to \mathbb{R}, (j, x) \mapsto x$ 是一个覆盖映射。证明不存在 $\mathcal{B}$上的光滑流形结构，使得 $\mathrm{pr}_2\colon (M, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ 成为局部 C^∞-微分同胚。

3.3 切丛与切映射

本节中，我们定义 C^r-流形 M 在点 $p \in M$处的切空间 $T_p(M)$，其中 $r \geq 1$。流形之间的每个 C^r-映射 $f\colon M \to N$ 都会产生一个“切映射” $T_p(f)\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$，它是导数的某种类似物

，即局部凸空间之间的 C^1-映射的导数 $f'(x)$。在给出切空间的更抽象定义（该定义之后也适用于带边界流形）之前，我们先讨论几何切空间。几何切空间仅对普通流形（无边界）有意义，正如我们目前所考虑的情形。后者为形式体系提供动机，并带来必要的几何直觉。我们固定 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$。

几何切空间

若 $M \subseteq E$ 是局部凸空间中的子流形，则可为每个 $p \in M$ 关联一个 E 的向量子空间 V，即所有满足以下条件的 C^1 曲线 γ 的速度向量 $v = \gamma'(0)$ 的集合：$]-\varepsilon,\ \varepsilon[\to M$ 这些曲线以这样的意义“经过 p”：$\gamma(0) = p$（见习题 3.3.4(a)）。于是，$p+V$ 是 E 中经过 p 的仿射向量子空间，并且在 p 处与 M 相切。

例如，若 $E = \mathbb{R}^n$、$M = \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $p \in \mathbb{S}^{n-1}$，则 $p + V = p + p^\perp$，其中 $p^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle p,\ x\rangle = 0\}$（见习题 3.3.4(b)）。
遗憾的是，由于计算导数 $\gamma'(0)$ 需要用到环境局部凸空间 E，因此上述思路无法用于定义一般流形的切空间（向量空间的子流形除外）。为了在一般情形下找到速度向量的替代物，我们注意到，在 $M \subseteq E$ 的情形下，$v := \gamma'(x)$ 确定（且由其唯一确定）所有经过 p 且满足 $\eta'(0) = v$ 的 C^1 曲线 η 的集合 $[\gamma]$。这启发了下面的定义。

定义 3.3.1。设 M 是以局部凸空间 E 为模型的 C^r-流形，且 $p \in M$。对于经过 p 的 C^1-曲线 γ, η，若

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) \ = \ (\varphi \circ \eta)'(0) \tag{3.3}$$

对于 M 中包含 p 的某个坐标图 φ，则定义此关系。将 φ 换为 p 周围的任意坐标图 ψ，利用链式法则可知 $(\psi \circ \gamma)'(0) = d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p),(\varphi \circ \gamma)'(0))$。因此，可以通过任意给定的坐标图来检验 (3.3) 中的等式，这意味着 $\sim$ 是经过 p 的所有 C^1-曲线 γ 集合上的一个等价关系。经过 p 的 C^1-曲线 γ 的等价类 $[\gamma]$ 称为几何切向量（M 在 p 处的）。M在 p 处的几何切空间 定义为集合 $\mathcal{T}_p(M)$，即 M 在 p 处的所有几何切向量的集合。

下面的引理使得 $\mathcal{T}_p(M)$ 能以规范的方式转化为与 E 同构的局部凸空间。

引理 3.3.2。(a) 给定 M 在 p 附近的一个坐标图 φ，令 $x_\varphi := \varphi(p)$。那么

$$h_\varphi\colon E \to \mathcal{T}_p(M), \quad h_\varphi(y) := [t \mapsto \varphi^{-1}(x_\varphi + ty)]$$

是一个双射，其逆映射为 $\ell_\varphi\colon\ \mathcal{T}_p(M) \to E$, $[\gamma] \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$。

(b) 对于 M 周围的所有坐标图 φ, ψ，我们有 $h_\psi^{-1} \circ h_\varphi = (\psi \circ \varphi^{-1})'(x_\varphi)$，它是拓扑向量空间 E 的一个自同构。

证明。(a) 从切向量的定义可以清楚地看出，ℓ_φ 是单射。给定 $y \in E$，我们有 $\ell_\varphi(h_\varphi(y)) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \varphi(\varphi^{-1}(x_\varphi + ty)) = y$。因此，$\ell_\varphi$ 也是满射，并且 $h_\varphi = \ell_\varphi^{-1}$。

(b) 给定 $y \in E$，我们有

$$h_\psi^{-1}(h_\varphi(y)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(\varphi^{-1}(x_\varphi + ty)) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(x_\varphi)y. \qquad \square$$

我们赋予 $\mathcal{T}_p(M)$ 局部凸拓扑向量空间结构，使得双射 h_φ 成为拓扑向量空间同构，其中 φ 是 M 在 p附近的某个（因而也是任意一个）坐标图。

切空间和切丛的抽象定义

现在，我们以一种纯形式化的方式给出切空间 $T_p(M)$ 的另一种定义。为了说明这一概念，我们回到几何切向量 $v \in \mathcal{T}_p(M)$，它位于 $p \in M$。根据引理 3.3.2 (a)，对于 M 在 p 附近的每个坐标图 φ，都有 $v = h_\varphi(v_\varphi)$，其中向量 $v_\varphi \in E$ 唯一确定。因此，我们可以将 v 与族 $(v_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_p}$ 等同。给定 $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_p$，引理 3.3.2(b) 还告诉我们

$$v_\psi = d(\psi \circ \varphi^{-1})(x_\varphi, v_\varphi), \tag{3.4}$$

其中 $x_\varphi := \varphi(p)$。反过来，每个满足（3.4）中所述变换规律的向量族 $(v_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_p}$ $v_\varphi \in E$，都唯一对应于一个几何切向量 $v \in \mathcal{T}_p(M)$，它由某个（因而也由任意一个）$\varphi \in \mathcal{A}_p$处的 $v = h_\varphi(v_\varphi)$ 给出。因此，我们可以将几何切向量与满足特定变换规律的向量族等同起来。这就是切空间抽象定义的基本思想，我们将在本节中对此进行描述。

定义 3.3.3。设 E 和 F 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 和$V \subseteq F$为开子集。若 $f\colon U \to V$是 C^1，则定义

$$Tf\colon U \times E \to V \times F, \quad Tf(x, y) := (f(x), df(x, y)).$$

若 f是 C^r，则 Tf是 C^{r-1}。我们也用 $T(f)$ 表示 Tf。

注 3.3.4。使用刚刚引入的记号，链式法则可以用一种方便的形式重新表述：给定 C^1-映射 $f\colon U \to V$和 $g\colon V \to W$，其中 $U \subseteq E$、$V \subseteq F$和 $W \subseteq H$是局部凸空间的开子集，我们有

$$d(g \circ f) = dg \circ Tf \tag{3.5}$$

因此

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf. \tag{3.6}$$

利用这一形式，(3.4) 可改写为

$$(x_\psi, v_\psi) = T(\psi \circ \varphi^{-1})(x_\varphi, v_\varphi).$$

定义 3.3.5. 设 M 是一个 C^r-流形，且 $p \in M$。我们在三元组 (φ, x, v) 的集合上定义一个关系 $\sim$，其中 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ 是 M 上 p 附近的一个坐标图，$x := \varphi(p) \in V_\varphi$ 且 $v \in E$，定义如下：给定两个这样的三元组 (φ, x, v) 和 (ψ, y, w)，当且仅当 $(y, w) = T(\psi\circ\varphi^{-1})(x, v)$ 时，我们称 $(\varphi, x, v) \sim (\psi, y, w)$。由 (3.6) 容易得出，$\sim$ 是一个等价关系。(φ, x, v) 的 $\sim$-等价类 $[\varphi, x, v]$ 称为 M 在 p 处的一个切向量。M 在 p 处的所有切向量构成的集合 $T_p(M)$（或 T_pM）称为 M 在 p 处的切空间。给定 $p \in M$，我们选取 M 上 p 附近的一个坐标图 φ，并赋予 T_pM 唯一的局部凸拓扑向量空间结构，使得双射

$$k_\varphi\colon E \to T_pM\,, \quad k_\varphi(v) := T\varphi^{-1}(x, v) := [\varphi, x, v] \tag{3.7}$$

拓扑向量空间的一个同构，其中 $x := \varphi(p)$。

由于

$$k_\psi^{-1} \circ k_\varphi = (\psi \circ \varphi^{-1})'(x) \tag{3.8}$$

是拓扑向量空间的一个同构，T_pM上的向量拓扑定义良好，与 φ的选择无关。

注 3.3.6。如果 $U \subseteq M$ 是一个开子流形且 $p \in U$，那么对于 U中 p附近的每个坐标图 φ，它也是 M的一个坐标图，这意味着 $T_pU \to T_pM$,$[\varphi, x, y] \mapsto [\varphi, x, y]$ 是拓扑向量空间的一个同构。我们将经常把 T_pU 与 T_pM视为相同，而不再另行说明。

定义 3.3.7。设 $(M, \mathcal{A})$ 是一个以局部凸空间 E为模型的 C^r-流形。我们称 $TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$为 M的切丛。由于切空间 T_pM彼此不相交，映射 $\pi_{TM}\colon TM \to M$将切向量 $v \in T_pM$映射到 $\pi_{TM}(v) := p$是定义良好的；称其为丛投影。我们赋予 TM 关于映射族 $(T\varphi^{-1})_{\varphi\in\mathcal{A}}$ 的终拓扑

$$T\varphi^{-1}\colon V_\varphi \times E \to TM\,, \quad (T\varphi^{-1})(x, y) := [\varphi, x, y]\,.$$

我们很快将看到，对于所有 $\varphi \in \mathcal{A}$，$TU_\varphi = \pi_{TM}^{-1}(U_\varphi)$ 在 TM 中是开的，并且

$$T\varphi := (T\varphi^{-1})^{-1}\colon TU_\varphi \to V_\varphi \times E \tag{3.9}$$

对于每个 $\varphi \in \mathcal{A}$，它是一个同胚，并且 $\mathcal{B} := \{T\varphi\colon \varphi \in \mathcal{A}\}$ 是一个以 $E\times E$ 为模型的 C^{r-1}-图册，适用于 TM。我们赋予 TM 包含 $\mathcal{B}$ 的极大性 C^{r-1}-图册。通过这种方式，TM 成为一个 C^{r-1}-流形。

我们需要检查各种细节。

引理 3.3.8.在定义 3.3.7的情形下，下列结论成立：

（a）对于所有的 φ、$\psi \in \mathcal{A}$，图表

$$\begin{array}{ccc} T(U_\varphi \cap U_\psi) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & T(U_\varphi \cap U_\psi) \\ \downarrow{\scriptstyle T\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle T\psi} \\ \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \times E & \xrightarrow{T(\psi\circ\varphi^{-1})} & \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \times E \end{array}$$

是交换的（其中 $T\varphi$和 $T\psi$必须限制在 T（$U_\varphi \cap U_\psi$））。

（b）对于 M的每个坐标图 φ： $U_\varphi \to V_\varphi$， TU_φ在 TM中是开集。

（c） $T\varphi$： $TU_\varphi \to V_\varphi \times E$是一个同胚。（d） $\mathcal{B} := \{T\varphi\colon \ \varphi \in \mathcal{A}\}$是一个 C^{r-1}-图册。（e） π_{TM}： $TM \to M$是一个 C^{r-1}-映射。

（f） TM 在每个切空间 T_pM 上赋予其自然的向量拓扑。

证明。（a）本质上是对（3.8）的重新表述。

（b）给定 $\varphi \in \mathcal{A}$，对于每个 $\psi \in \mathcal{A}$，我们有原像 $(T\psi^{-1})^{-1}(TU_\varphi) = T\psi(TU_\varphi \cap TU_\psi) = \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \times E$，它在 $V_\psi \times E$中是开集。因此，根据 TM上终拓扑的定义， TU_φ在 TM中是开集。

(c) 根据 TM 上拓扑的定义， $T\varphi^{-1}$ 连续，因此可得 $T\varphi$ 是开映射。为证明 $T\varphi$ 连续，设 $U \subseteq V_\varphi \times E$ 为开集。设 $\psi \in \mathcal{A}$。那么 $W := U \cap (\varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \times E)$ 是 $V_\varphi \times E$ 中的开集，由此

$$\begin{aligned} (T\psi^{-1})^{-1}((T\varphi)^{-1}(U)) &= T\psi(TU_\psi \cap (T\varphi)^{-1}(U)) \\ &= T\psi((T\varphi)^{-1}(W)) \ = \ T(\psi \circ \varphi^{-1})(W) \end{aligned}$$

在 $V_\psi \times E$ 中是开集，映射 $T(\psi \circ \varphi^{-1})$: $\varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \times E \to \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \times E$ 是一个同胚，它将 $V_\varphi \times E$ 的开子集映至 $V_\psi \times E$ 的开子集。因此 $(T\varphi)^{-1}(U)$ 是 TM 中的开集。

(d) 根据 (b) 和 (c)，每个 $T\varphi$ 都是一个同胚，它将 TM 的开子集映至 $E \times E$ 的开子集，因此 $T\varphi$ 是一个 $E \times E$-坐标图。显然，集合 TU_φ 覆盖 TM，而 (a) 表明转移映射具有 $T\psi \circ (T\varphi)^{-1} = T(\psi \circ \varphi^{-1})$ 的形式，因而 C^{r-1}。

(e) $\varphi \circ \pi_{TM} \circ T\varphi^{-1}$： $V_\varphi \times E \to V_\varphi$是到第一个分量的投影，因此 C^{r-1}，对每个 $\varphi \in \mathcal{A}$ 都成立。

(f) 由 (c) 以及定义 3.3.5 中向量拓扑的定义可立即得到。□

例 3.3.9。设 E 是一个局部凸空间， $U \subseteq E$ 是一个开子集。那么，id_U 是 U 的整体坐标图，因此 $T(\mathrm{id}_U)\colon TU \to U \times E$（定义见 (3.9)）是 TU 的整体坐标图，进而对每个 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$，它都是一个 C^r-微分同胚。我们将经常借助 $T(\mathrm{id}_U)$ 将 TU 与 $U \times E$ 视为相同，并在公式中省略 $T(\mathrm{id}_U)$。这种滥用记号的情况总能从上下文中看清。在这种识别下，π_{TU} 对应于投影 $\mathrm{pr}_1\colon U \times E \to U$ 到第一分量，即下面的图表交换：

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{T(\mathrm{id}_U)} & U \times E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{TU}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ U & \xrightarrow{\mathrm{id}_U} & U. \end{array}$$

注 3.3.10。类似地，对于以 E 为模型的 C^r-流形 M 的每个坐标图 φ: $U_\varphi \to V_\varphi$，我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} TU_\varphi & \xrightarrow{T\varphi} & V_\varphi \times E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{TM}|_{TU_\varphi}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ U_\varphi & \xrightarrow{\varphi} & V_\varphi, \end{array}$$

其中 pr_1: $V_\varphi \times E \to V_\varphi$ 是到第一个分量的投影。

切映射

定义 3.3.11. 设 f: $M \to N$ 是两个 C^r-流形之间的 C^r-映射。那么存在唯一确定的映射 Tf: $TM \to TN$（也记作$T(f)$），具有以下性质:

(a) 对每个 $p \in M$, $Tf(T_pM) \subseteq T_{f(p)}N$，即 $\pi_{TN} \circ Tf = f \circ \pi_{TM}$。(b) 对于 N 的每个坐标图 ψ: $U_\psi \to V_\psi$ 以及 M的每个坐标图 φ: $U_\varphi \to V_\varphi$，若 $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$, 则下图交换:

$$\begin{array}{ccc} TU_\varphi & \xrightarrow{Tf|^{TU_\psi}_{TU_\varphi}} & TU_\psi \\ \downarrow{\scriptstyle T\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle T\psi} \\ V_\varphi \times E & \xrightarrow{T(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})} & V_\psi \times F. \end{array}$$

映射 Tf称为 f的切映射。给定 $p \in M$，我们定义 $T_pf := T_p(f) := Tf|^{T_{f(p)}N}_{T_pM}$: $T_pM \to T_{f(p)}N$。

要证明 Tf 存在，只需令

$$Tf(v) := \big((T\psi)^{-1} \circ T(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ T\varphi\big)(v) \quad \text{for} \quad v \in TM,$$

其中, φ和 ψ是(b)中任意满足 $\pi_{TM}(v) \in U_\varphi$的坐标图。利用图卡插入、引理 3.3.8(a)和(3.6)，可知 Tf 定义良好。根据定义，所需的图表是交换的。最后, Tf 是C^{r-1}，因为它在局部可写为以下复合

$$Tf|_{TU_\varphi} = (T\psi)^{-1} \circ T(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ T\varphi$$

C^{r-1}-映射。

命题 3.3.12（链式法则）。设 M、N 和 K 为 C^r-流形，且 f: $M \to N$ 以及 g: $N \to K$ 为 C^r-映射。则 $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$。

证明。给定 $p \in M$，我们分别在 g（f（p））、p 和 p 附近选取 K 的坐标图 θ、N 的坐标图 ψ 以及 M 的坐标图 φ，使得 $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ 且 $g(U_\psi) \subseteq U_\theta$。于是

$$T(\theta\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}) = T((\theta\circ g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})) = T(\theta\circ g\circ\psi^{-1})\circ T(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})$$

由 (3.6)。因此

$$\begin{aligned} T(g\circ f)|_{TU_\varphi} &= (T\theta)^{-1}\circ T(\theta\circ g\circ f\circ\varphi^{-1})\circ T\varphi \\ &= (T\theta)^{-1}\circ T(\theta\circ g\circ\psi^{-1})\circ T\psi\circ(T\psi)^{-1}\circ T(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ T\varphi \\ &= Tg\circ Tf|_{TU_\varphi}\,. \end{aligned}$$

由于 p是任意的，该断言成立。 □

注 3.3.13.命题 3.2.5 使我们能够将所有C^r-流形的类视为一个范畴，以 C^r-映射作为态射。由于同样有$T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{TM}$，命题 3.3.12 表明 T是从 C^r-流形范畴到 C^{r-1}-流形范畴的一个函子。

引理 3.3.14. 设 M_1 与 M_2 为 C^r-流形，且$\mathrm{pr}_j\colon M_1\times M_2 \to M_j$为典范投影。则我们有：

(a) $\theta := (T(\mathrm{pr}_1), T(\mathrm{pr}_2))\colon T(M_1\times M_2) \to T(M_1)\times T(M_2)$ 是一个 C^{r-1}-微分同胚。*(b)* 对每个 $x = (x_1, x_2) \in M_1\times M_2$，$\theta(T_x(M_1\times M_2)) \subseteq T_{x_1}M_1\times T_{x_2}M_2$ 成立，且限制 $\theta\colon T_x(M_1\times M_2) \to T_{x_1}M_1\times T_{x_2}M_2$ 是拓扑向量空间同构。

证明。 (b) 的前半部分显然成立。对于 M_1 的任意坐标图 φ_1 和 M_2 的任意坐标图 φ_2，利用 $\big(T(\varphi_1\times\varphi_2)\big)^{-1} = T(\varphi_1^{-1}\times\varphi_2^{-1})$，可得

$$\begin{aligned} &(T(\varphi_1)\times T(\varphi_2))\circ\theta\circ\big(T(\varphi_1\times\varphi_2)\big)^{-1} \\ &\quad= \big(T(\varphi_1)\circ T\,\mathrm{pr}_1\circ\big(T(\varphi_1\times\varphi_2)\big)^{-1},\ T(\varphi_2)\circ T\,\mathrm{pr}_2\circ\big(T(\varphi_1\times\varphi_2)\big)^{-1}\big) \\ &\quad= (T(\varphi_1\circ\mathrm{pr}_1\circ(\varphi_1^{-1}\times\varphi_2^{-1})), T(\varphi_2\circ\mathrm{pr}_2\circ(\varphi_1^{-1}\times\varphi_2^{-1}))) \\ &\quad= (T\pi_1, T\pi_2)\,, \end{aligned}$$

其中 $\pi_j\colon V_{\varphi_1}\times V_{\varphi_2} \to V_{\varphi_j}$ 是投影。这里 $(T\pi_1,\ T\pi_2)$ 是映射

$$V_{\varphi_1}\times V_{\varphi_2}\times E_1\times E_2 \to V_{\varphi_1}\times E_1\times V_{\varphi_2}\times E_2\,,\quad (x_1,x_2,y_1,y_2)\mapsto(x_1,y_1,x_2,y_2)$$

这是一个 C^{r-1}微分同胚。这意味着 θ 是一个 C^{r-1}微分同胚。值得注意的是，θ 是一个同胚，因此对于每个 $x = (x_1,\ x_2) \in M_1\times M_2$，它将$T_x(M_1\times M_2)$限制为到 $T_{x_1}M_1\times T_{x_2}M_2$ 上的同胚。由于它也是线性的（因为它等于（$T_x\,\mathrm{pr}_1,\ T_x\,\mathrm{pr}_2$）），该限制是拓扑向量空间同构。□

注记 3.3.15。(a) 我们将经常借助引理 3.3.14 中描述的微分同胚 θ，把切丛 $T(M_1 \times M_2)$与 $TM_1 \times TM_2$ 认作同一对象。反复应用引理 3.3.14，可得

$$T(M_1 \times \cdots \times M_n) \cong TM_1 \times \cdots \times TM_n \quad \text{via} \quad (T\,\mathrm{pr}_1, \ldots, T\,\mathrm{pr}_n),$$

对于任意有限个 C^r-流形的乘积。

(b) 与 (a) 相反，对于局部凸空间 E 和 F 的开子集 $U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$，按照例 3.3.9 中的约定，我们还可以将 $T(U \times V)$ 与 $(U \times V) \times (E \times F)$ 识别，其中将 $U \times V$ 视为局部凸空间 $E \times F$ 的开子集。具体采用哪种识别方式，总会由上下文清楚表明。

下面这个简单的观察很有用：

引理 3.3.16。如果 $f_1\colon M_1 \to N_1$ 和 $f_2\colon M_2 \to N_2$ 是 C^1-流形之间的映射，那么 $T(f_1 \times f_2)\colon T(M_1 \times M_2) \to T(N_1 \times N_2)$ 在前述识别下对应于映射 $Tf_1 \times Tf_2\colon TM_1 \times TM_2 \to TN_1 \times TN_2$。

证明。我们将使用投影 $\mathrm{pr}_j\colon M_1 \times M_2 \to M_j$, $\pi_j\colon N_1 \times N_2 \to N_j$和 $\Pi_j\colon TN_1 \times TN_2 \to TN_j$。对于 $j \in \{1,2\}$，于是有

$$\begin{aligned}\Pi_j \circ (T\pi_1, T\pi_2) \circ T(f_1 \times f_2) &= T\pi_j \circ T(f_1 \times f_2) = T(\pi_j \circ (f_1 \times f_2)) \\ &= T(f_j \circ \mathrm{pr}_j) = T(f_j) \circ T(\mathrm{pr}_j) \\ &= \Pi_j \circ (Tf_1 \times Tf_2) \circ (T\,\mathrm{pr}_1, T\,\mathrm{pr}_2)\end{aligned}$$

因此 $(T\pi_1,\ T\pi_2) \circ T(f_1 \times f_2) = (Tf_1 \times Tf_2) \circ (T\mathrm{pr}_1,\ T\mathrm{pr}_2)$。 □

注 3.3.17。类似地，$T(f_1,\ f_2)$ 对应于映射 $(f_1,\ f_2)$ 的 $(Tf_1,\ Tf_2)$（习题）。

偏微分法则可推广为以下形式的流形之间的映射。

引理 3.3.18（偏微分法则）。设 M_1、M_2 和 N 是C^1-流形，且 $f\colon M_1 \times M_2 \to N$ 是一个 C^1-映射。设 $\mathrm{pr}_j\colon M_1 \times M_2 \to M_j$ 是 $j \in \{1,2\}$ 的投影。那么

$$T_p f(v) = T_x f(\cdot, y)(T\,\mathrm{pr}_1(v)) + T_y f(x, \cdot)(T\,\mathrm{pr}_2(v))$$

对于所有 $p = (x, y) \in M_1 \times M_2$ 以及 $v \in T_p(M_1 \times M_2)$。因此，如上所述，将$T(M_1 \times M_2)$ 与 $TM_1 \times TM_2$ 等同，我们有

$$Tf_p(v_x, v_y) = T_x(f(\cdot, y))(v_x) + T_y(f(x, \cdot))(v_y)$$

对于所有 $(x, y) \in M_1 \times M_2$、$v_x \in T_x M_1$和 $v_y \in T_y M_2$。

证明。所需公式可由偏导数法则（命题 1.2.8）应用于局部坐标图得出。细节留作习题，由读者完成。□

映射到向量空间的映射的切映射

定义3.3.19。设 E 为局部凸空间， $U \subseteq E$ 为开集， M 为 C^r-流形，且 f 为 $M \to U$ 上的 C^r-映射。按照例 3.3.9 将 TU 与 $U \times E$ 视为相同，我们可以考察 Tf的第一分量和第二分量。根据定义 3.3.11(a)，有 $\pi_{TU} \circ Tf = f \circ \pi_{TM}$，其中 $\pi_{TU}\colon\ U \times E \to U$是投影到第一坐标的投影（鉴于所作的识别）。因此，记 $df\colon\ TM \to E$为 Tf的第二分量，我们有

$$Tf \ = \ (f \circ \pi_{TM},\, df)\,. \tag{3.10}$$

给定 $p \in M$，我们还将记作

$$df(p) := (df)_p := df|_{T_p(M)};$$

这是一个连续线性映射 $T_p(M) \to E$。

注 3.3.20.在阐述基础理论时，我们将严格区分 Tf和 df。文献中并不总是明确区分二者。

3.3.21. 设 U 是局部凸空间的一个开子集， $f\colon\ U \to M$ aC^r-映射到一个带有 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ 的 C^r-流形。给定 $x \in U$，我们将T_xU与 $\{x\} \times E$等同，因此 T_xf是一个映射 $\{x\} \times E \to T_{f(x)}M$。我们经常简化记法，也用 T_xf表示映射 $T_xf(x, \cdot)$: $E \to T_{f(x)}M$。采用这一约定，若 f是一个 C^r-微分同胚，则 $(T_xf)^{-1} = d(f^{-1})|_{T_{f(x)}M}$。

初始子流形

借助切映射这一工具，我们现在可以看出，子流形的建模空间在同构意义下是唯一的。更一般地，这个结论也适用于所谓的初始子流形，它们是子流形的一种非常有用的推广。

定义 3.3.22。设 M 是一个 C^r-流形， N 是一个 C^r-流形，且作为集合有 $N \subseteq M$。若满足以下条件，我们称 N 为 M 的初始子流形:

(a) 包含映射 $\iota\colon\ N \to M$是 C^r，且对每个 $p \in N$， $T_p\iota\colon\ T_pN \to T_pM$是单射。(b) 从一个 C^r-流形 P 到 N 的映射 $f\colon\ P \to N$ 是 C^r，当且仅当 $\iota \circ f\colon\ P \to M$ 是 C^r。

注 3.3.23. 这里 N 上的拓扑不一定是诱导拓扑；它也可能严格更细。利用单射连续线性映射 $T_p\iota$，我们将 T_pN 与 T_pM的向量子空间 $T_p\iota(T_pN)$ 等同。给定一个 C^r-映射$f\colon\ P \to M$，且满足 $f(P) \subseteq N$，则对于每个 $x \in P$，都有 $T_xf(T_xP) \subseteq T_{f(x)}N$（因为 $T_xf = T_{f(x)}(\iota) \circ T_x(f|^N)$）。

引理 3.3.24. 设 M 是一个 C^r-流形，$N \subseteq M$ 是一个子集。

(a) 如果 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 是使 N 成为 M 的初始子流形的图册，那么恒等映射 $\mathrm{id}\colon (N,\mathcal{A}_1) \to (N,\mathcal{A}_2)$ 是一个 C^r-微分同胚。从这个意义上说，初始子流形上的流形结构是唯一的。此外，如果 $N \neq \emptyset$，则其建模空间在拓扑向量空间同构的意义下是唯一的。(b) 每个子流形 $N \subseteq M$ 都是初始子流形。(c) 设 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 是使 $N \neq \emptyset$ 成为 M 的子流形的图册，且分别建模于 M 的建模空间 E 的向量子空间 F_1 和 F_2 上。那么存在拓扑向量空间的同构 $\alpha\colon E \to E$，使得 $\alpha(F_1) = F_2$。

证明。(a) 令 $\iota_j\colon (N,\mathcal{A}_j) \to M$ 为 $j \in \{1,2\}$ 的包含映射，并令 $f\colon (N,\mathcal{A}_1) \to (N,\mathcal{A}_2)$ 为恒等映射。于是 $\iota_2 \circ f = \iota_1$ 是 C^r，因此 f 是 C^r，因为 $(N,\mathcal{A}_2)$ 是初始子流形。类似的论证表明，f^{-1} 也是 C^r。取 $p \in N$。则 $T_p f\colon T_p(N,\mathcal{A}_1) \to T_p(N,\mathcal{A}_2)$ 是拓扑向量空间同构，其中 $T_p(N,\mathcal{A}_j) \cong F_j$。

(b) 取 $p \in N$。令 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ 为 M 的一个坐标图，该坐标图适配于 N，使得 $p \in U_\varphi$，并令 φ_N 为 N 相应的子流形坐标图，如定义 3.1.10 所述。设 $x_0 := \varphi(p)$。则 $\varphi \circ \iota \circ \varphi_N^{-1}$ 是包含映射 $\lambda\colon F \to E$ 在 $\lambda|_{V_\varphi \cap F}\colon V_\varphi \cap F \to V_\varphi$ 上的限制；该包含映射将 N 的建模空间映入 M 的建模空间，且为线性拓扑嵌入。因此，$T_p\varphi \circ T_p\iota \circ (T_p\varphi_N)^{-1} = T_{x_0}(\varphi \circ \iota \circ \varphi_N^{-1})$ 将 $(x_0, y) \in T_{x_0}(V_\varphi \cap F) = \{x_0\} \times F$ 映至 $(x_0, y) \in \{x_0\} \times E = T_{x_0} V_\varphi$，从而对应于嵌入 $\lambda\colon F \to E$。因此 $T_p\iota$ 是拓扑嵌入。所有其他要求已在引理 3.2.7 中验证。

(c) 给定 $p \in N$，设 φ 是 M 在 p 附近的一个坐标图，它适配于以 F_1 为模型的子流形 N；设 $\varphi_N \in \mathcal{A}_1$ 是相应的子流形坐标图，如定义 3.1.10 中所述。设 ψ 是 M 在 p 附近的一个坐标图，它适配于以 F_2 为模型的子流形 N，设 $\psi_N \in \mathcal{A}_2$ 是相应的子流形坐标图。将定义域 U_φ 和 U_ψ 替换为 $U_\varphi \cap U_\psi$ 后，我们不妨假设 $U_\varphi = U_\psi$。那么 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是一个 C^r-微分同胚，因此 $\alpha := (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))$ 是拓扑向量空间 E 的一个自同构。由于

$$\psi \circ \varphi^{-1}\big|_{V_\varphi \cap F_1}^{V_\psi \cap F_2} = \psi_N \circ \varphi_N^{-1},$$

计算方向导数可知，$\alpha(F_1) \subseteq F_2$ 成立，且其逆映射 $\alpha^{-1} = (\varphi \circ \psi^{-1})'(\psi(p))$ 将 F_2 映入 F_1。因此，$\alpha(F_1) = F_2$。□

浸入、浸没和嵌入

考虑局部表现为到某个直和项的线性投影 $E \times F \to F$ 或线性包含映射 $E \to E \oplus F$ 的映射很有用。

定义 3.3.25. 设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ 和 $f\colon M \to N$ 是一个 C^r-映射，定义在分别以局部凸空间集合 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 为模型的 C^r-流形之间。

(a) 如果对于每个 $x \in M$，都存在一个坐标图$\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$，它是 M 在 x附近的坐标图；存在一个坐标图 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq F_\psi$，它是 N在 $f(x)$ 附近的坐标图；以及一个连续线性映射 $q\colon E_\varphi \to F_\psi$，且该映射具有连续线性右逆，使得 $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$、$q(V_\varphi) \subseteq V_\psi$，并且$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = q|_{V_\varphi}$，则称 f 为浸没。(b) 如果对于每个 $x \in M$，都存在一个坐标图$\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$，它是 M在 x附近的坐标图；存在一个坐标图 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq F_\psi$，它是 N 在 $f(x)$附近的坐标图；以及一个连续线性映射 $i\colon E_\varphi \to F_\psi$，且该映射具有连续线性左逆，使得 $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$、$i(V_\varphi) \subseteq V_\psi$，并且$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = i|_{V_\varphi}$，则称 f 为浸入。(c) 如果 f 是一个浸入且是拓扑嵌入，则称 f 为 C^r-流形的嵌入。

注 3.3.26. 这里我们也将切空间和切映射用于以局部凸空间集合为建模空间的流形，正如定义 3.2.13 中所述。几何切空间的定义可直接推广：只需使用坐标图$\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$，其中 E_φ 属于建模空间集合 $\mathcal{E}$。在抽象切空间的定义中，使用四元组 (E, φ, x, v)，其中 $E \in \mathcal{E}$和 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$；赋予 T_pM 局部凸拓扑向量空间结构，使得对于 M 上 p 附近的每个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$，$k_\varphi\colon E \to T_pM, v \mapsto [E, \varphi, x, v]$ 都是拓扑向量空间的同构，其中$x := \varphi(p)$。

注意，每个浸没都是开映射。

命题 3.3.27。 设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ 和 $f\colon M \to N$ 是 C^r-流形之间的满射 C^r-浸没，其中流形分别建模于局部凸空间的集合 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 上。则有以下结论：

(a) 对于每个 $x \in M$，存在一个开 $f(x)$-邻域 $W \subseteq N$ 和一个 C^r-映射 $\sigma\colon W \to M$，使得 $f \circ \sigma = \mathrm{id}_W$。*(b)* 对于每个 C^r-流形 L，映射 $g\colon N \to L$ 是 C^r 的，当且仅当 $g \circ f$ 是 C^r。*(c)* 对于任意（不一定是纯的）子流形 $S \subseteq N$，原像$f^{-1}(S)$ 是 M 的一个（不一定是纯的）子流形。限制$f|_{f^{-1}(S)}\colon f^{-1}(S) \to S$ 是一个浸没。

证明。(a) 设 φ、ψ 和 q 如定义 3.3.25(a) 所述。将 φ 替换为 $\varphi - \varphi(x)$，并将 ψ 替换为 $\psi - \psi(f(x)) = \psi - q(\varphi(x))$ 后，我们可以假设 $\varphi(x) = 0$ 且 $\psi(f(x)) = 0$。设 $\alpha\colon F \to E$ 是一个满足 $q \circ \alpha = \mathrm{id}_F$ 的连续线性映射。则 $W := \psi^{-1}(\alpha^{-1}(V_\varphi) \cap V_\psi)$ 是 N 中的一个开 $f(x)$-邻域，并且 $\sigma := \varphi^{-1} \circ \alpha \circ \psi|_W$ 是一个 C^r-映射，使得 $\sigma(f(x)) = x$ 且 $\psi \circ f \circ \sigma = q \circ \varphi \circ \sigma = \psi|_W$，由此可知 $f \circ \sigma = \mathrm{id}_W$。

(b) 如果 g 是 C^r，那么 $g\circ f$ 是 C^r。反过来，如果 $g\circ f$ 是 C^r，设 $y\in N$。由于 f 是满射，存在 $x\in M$ 使得 $f(x)=y$。设 σ 如 (a) 所述。则 $g|_W = g|_W\circ \mathrm{id}_W = g\circ f\circ\sigma$ 是 C^r。因此，g 在每个点 y 的一个开邻域 W 上都是 C^r，故 g 是 C^r。

(c) 给定 $x\in f^{-1}(S)$，设 φ、ψ 和 q 如定义 3.3.25(a) 中所述；我们可以假设 $\varphi(x)=0$，且 $\psi(f(x))=0$。设 $\alpha\colon F\to E$ 是一个连续线性映射，满足 $q\circ\alpha=\mathrm{id}_F$。于是

$$\beta\colon E\to F\times\ker(q),\quad y\mapsto (q(y), y-\alpha(q(y)))$$

是局部凸空间的一个同构，并且利用投影 $\mathrm{pr}_1\colon F\times\ker(q)\to F$，$(v,w)\mapsto v$，得到 $\mathrm{pr}_1\circ\beta = q$。因此 $\beta(V_\varphi)$ 是 $F\times\ker(q)$ 中的一个开零邻域；缩小 V_φ 后，我们可以假设对于开零邻域 $P\subseteq F$ 和 $Q\subseteq\ker(q)$，有 $\beta(V_\varphi)=P\times Q$。于是 $P\subseteq V_\varphi$；将V_ψ替换为 P后，我们得到 C^r-微分同胚 $\theta:=\beta\circ\varphi\colon U_\varphi\to P\times Q$ 和$\psi\colon U_\psi\to P$，使得 $\mathrm{pr}_1\circ\beta=\psi$。于是 $\psi(S\cap U_\psi)$ 是 P 的一个子流形，而 $A:=\mathrm{pr}_1^{-1}(\psi(S\cap U_\varphi)) = \psi(S\cap U_\varphi)\times Q$ 是 $P\times Q$ 的一个子流形，且 $\mathrm{pr}_1|_A$ 是一个浸没。因此 $\theta^{-1}(A)$ 是 U_φ 的一个子流形，进而也是 M 的一个子流形，并且 $f|_{\theta^{-1}(A)} = \psi^{-1}\circ \mathrm{pr}_1|_A\circ\theta|_{\theta^{-1}(A)}$ 是一个浸没。对于 $y\in U_\varphi$，有 $f(y)\in S$ 当且仅当 $\mathrm{pr}_1(\theta(y)) = q(\varphi(y)) = \psi(f(y))\in\psi(S\cap U_\psi)$。因此 $U_\varphi\cap f^{-1}(S) = \theta^{-1}(A)$ 是一个子流形。由于子流形这一性质是局部的，f^{-1} 是一个子流形。□

推论 3.3.28. 设 $r\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty,\omega\}$，$M$ 是一个 C^r-流形，以一组 $\mathcal{E}$ 局部凸空间为模型，且 $q\colon M\to N$ 是满射。对于$j\in\{1,2\}$，记 N_j 为 N，并赋予其一个以一组 $\mathcal{E}_j$ 局部凸空间为模型的 C^r-流形结构，使得 $q\colon M\to N_j$ 是一个 C^r-浸没。那么 $N_1\to N_2$, $x\mapsto x$ 是一个 C^r-微分同胚。如果 $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2$，则$N_1=N_2$。

证明. 将 q_j 写作一个映射 q 到 N_j。令 $f\colon N_1\to N_2$ 为映射 $x\mapsto x$。由于 $f\circ q_1 = q_2$ 是 C^r，根据命题 3.3.27(b)，映射 f 是 C^r。同理，$f^{-1}\circ q_2 = q_1$ 蕴含 f^{-1} 是 C^r。□

命题 3.3.29. 设 $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$ 和 $f\colon M\to N$ 是映射于分别以局部凸空间的集合 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 为模型的 C^r-流形 M 和 N 之间的一个 C^r-映射。

(a) 若每个 $F\in\mathcal{F}$ 的维数有限，则 f 是浸没，当且仅当对所有 $x\in M$，$T_xf\colon T_xM\to T_{f(x)}N$ 都是满射。(b) 若每个 $E\in\mathcal{E}$ 的维数有限，则 f 是浸入，当且仅当对所有 $x\in M$，$T_xf\colon T_xM\to T_{f(x)}N$ 都是单射。

证明。(a) 若 f 是浸没且 $x\in M$，令 φ、ψ 和 q 如定义 3.3.25(a) 所述。于是 $f=\psi^{-1}\circ q|_{V_\varphi}\circ\varphi$，从而 $T_xf = T_{\psi(f(x))}\psi^{-1}\circ q\circ d\varphi|_{T_xM}$ 是满射。反之，假设每个切映射都是满射。给定

$x \in M$，存在一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$，它是 M 在 x 附近的坐标图；以及一个坐标图 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq F_\psi$，它是 N 在 f（x）附近的坐标图，使得 $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$。根据假设，

$$q := (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))\colon E_\varphi \to F_\psi$$

是满射。设 b_1、……、b_n 是 F_ψ 的一组基；我们找到 a_1、……、$a_n \in E_\varphi$，使得对 $j \in \{1,\dots,n\}$，有 $q(a_j) = b_j$。设 $\alpha\colon F_\psi \to E_\varphi$ 是满足对所有 $j \in \{1,\dots,n\}$，有 $\alpha(b_j) = a_j$ 的连续线性映射。那么

$$\beta\colon E_\varphi \to \ker(q) \times F_\psi,\ v \mapsto (v - \alpha(q(v)), q(v))$$

是拓扑向量空间同构，且 $\beta^{-1}(a, b) = a + \alpha(b)$。缩小 V_φ 后，我们可以假设 $\beta(V_\varphi) = A \times B$，其中 $A \subseteq \ker(q)$ 和 $B \subseteq F_\psi$ 是开零邻域。于是映射 $h\colon A \times B \to \ker(q) \times F_\psi$，

$$(a,b) \mapsto (a, (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \beta^{-1})(a,b)) = (a, (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(a + \alpha(b)))$$

是 C^r，且 $d_2(\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \beta^{-1})(0, 0, c) = q(\alpha(c)) = c$，由此

$$d_2(\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \beta^{-1})(0,0,\cdot) = \mathrm{id}_{F_\psi}.$$

根据含参数反函数定理，缩小 A 和 B后，像 $h(A \times B)$ 是开集，且 h 是到 $h(A \times B)$ 上的 C^r-微分同胚（有限维情形和解析情形可参见定理 2.3.34 以及注 2.3.37 中的 (a) 和 (c)）。于是，$W := \beta^{-1}(h(A \times B))$ 是 E_φ中的开集，且 $\theta := \beta^{-1} \circ h \circ \beta \circ \varphi\colon U_\varphi \to W$是 M的一个坐标图。利用投影 $\mathrm{pr}_2\colon \ker(q) \times F_\psi \to F_\psi$，$(v, w) \mapsto w$，我们有 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{pr}_2 \circ h \circ \beta|_{V_\varphi}$，由此得出 $\psi \circ f \circ \theta^{-1} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \beta^{-1} \circ h^{-1} \circ \beta|_W = \mathrm{pr}_2 \circ h \circ h^{-1} \circ \beta = q|_W$。

(b) 若 f 是浸入且 $x \in M$，令 φ、ψ 和 i 如定义 3.3.25(b) 所述。于是 $f = \psi^{-1} \circ i|_{V_\varphi} \circ \varphi$，故 $T_x f = T_{\psi(f(x))}\psi^{-1} \circ i \circ d\varphi|_{T_x M}$是单射。反过来，假设每个切映射都是单射。令$x_0 \in M$。我们找到 M 上包含 x_0 的一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$，以及 N 上包含 $f(x_0)$ 的一个坐标图$\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq F_\psi$，使得 $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$、$\varphi(x_0) = 0$，并且$\psi(f(x_0)) = 0$。那么

$$\alpha := (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))\colon E_\varphi \to F_\psi$$

是单射。由于 $\alpha(E_\varphi)$是有限维的，它在拓扑向量空间 F_ψ中可补；令 $Y \subseteq F_\psi$ 为一个拓扑补空间。令 $\mathrm{pr}_1\colon F_\psi \to Y$和 $\mathrm{pr}_2\colon F_\psi \to \alpha(E_\varphi)$为连续线性映射，使得 $y = \mathrm{pr}_1(y) + \mathrm{pr}_2(y)$。那么 $g := \mathrm{pr}_2 \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon U_\varphi \to \alpha(F_\varphi)$在 0 处的导数为 $g'(0) = \mathrm{pr}_2 \circ \alpha = \alpha|^{\alpha(E_\varphi)}$，这是有限维向量空间之间的同构。根据反函数定理，缩小V_φ 后，我们可以假设 $g(V_\varphi)$在 $\alpha(E_\varphi)$中是开集，且 $g\colon V_\varphi \to g(V_\varphi)$是一个 C^r-微分同胚。于是，$Q := g'(0)^{-1}(g(V_\varphi))$是 E_φ中的开零邻域，而 $\kappa := g'(0)^{-1} \circ g \circ \varphi\colon U_\varphi \to Q$ 是 M 在 x_0附近的一个坐标图。此外，$h := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ g^{-1}\colon g(V_\varphi) \to F_\psi$ 是一个 C^r- 映射，满足 $\mathrm{pr}_2 \circ h = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}^{V_\varphi}$。现在，$Y + V_\varphi$ 和 $Y + g(V_\varphi)$是 F_ψ中的开零邻域，并且

$$\Xi\colon Y+g(V_\varphi)\to Y+g(V_\varphi),\ v+w\mapsto v+(\mathrm{pr}_1\circ h)(w)+w=v+h(w)$$

对于 $v\in Y$， $w\in g(V_\varphi)$是一个 C^r-微分同胚，其逆映射为 $a+b\mapsto a+2b-h(b)$，其中 $a\in Y$， $b\in g(V_\varphi)$。那么 $P:=\Xi^{-1}(V_\psi)$是 E_φ 的一个开子集，并且$\theta:=\Xi^{-1}\circ\psi$: $U_\psi\to P$是 N的一个坐标图，使得对所有 $x\in V_\varphi$，都有$(\theta\circ f\circ\varphi^{-1})(x)=g(x)$，因此对所有 $x\in Q$，都有$(\theta\circ f\circ\kappa^{-1})(x)=g'(0)(x)=\alpha(x)$。由于$\alpha$ 有一个连续线性左逆， f 是一个浸入。□

命题 3.3.30。设 $r\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty,\omega\}$ 和 $f\colon M\to N$ 是 C^r-流形 M 与 N 之间的一个 C^r-映射，它们不一定是纯的。以下条件等价。

(a) f 是 C^r-流形之间的一个嵌入。(b) $f(M)$是 N 的一个(不一定是纯的)子流形，并且 $f\colon M\to f(M)$是一个 C^r-微分同胚。

证明。如果 (b) 成立，那么对 $x_0\in N$，我们可以找到一个坐标图 ψ: $U_\psi\to V_\psi\subseteq E_\psi$，它适配于 $f(M)$，其含义是 $\psi(f(M)\cap U_\psi)=F\cap V_\psi$，其中 $F\subseteq E_\psi$是某个闭向量子空间。令 $\psi_{f(M)}:=\psi|_{f(M)\cap U_\psi}\colon f(M)\cap U_\psi\to F\cap V_\psi\subseteq F$为相应的子流形坐标图。于是 $W:=f^{-1}(f(M)\cap U_\psi)$ 是 M 的开子集，并且 $\varphi:=\psi\circ f|_W\colon W\to F\cap V_\psi$ 是一个 C^r-微分同胚，因此是 M 的一个 F-坐标图。若 $i:F\to E_\psi$ 是包含映射，则 $\psi\circ f\circ\psi^{-1}=i|_{F\cap V_\psi}$，这意味着 f 是一个浸入。由于包含映射 $j\colon f(M)\to M$ 是一个拓扑嵌入，且 $f|^{f(M)}$ 是一个同胚，我们可推得 $f=j\circ f|^{f(M)}$ 是一个拓扑嵌入。因此 f 是 C^r-流形之间的一个嵌入。

若 (a) 成立且 $y\in f(M)$，我们令 $x\in M$，其中 $y=f(x)$。由于 f 是浸入，存在坐标图 $\varphi\colon U_\varphi\to V_\varphi\subseteq E_\varphi$，它是 M 在 x 附近的坐标图；还存在坐标图 $\psi\colon U_\psi\to V_\psi\subseteq F_\varphi$，它是 N 在 $f(x)$ 附近的坐标图，使得 $f(U_\varphi)\subseteq U_\psi$，且 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\colon V_\varphi\to V_\psi$ 等于 $i|_{V_\varphi}$，其中某个连续线性映射 $i\colon E_\varphi\to F_\psi$ 存在连续线性左逆 $q\colon F_\psi\to E_\varphi$。于是，$F_\psi=i(E_\varphi)\oplus$作为局部凸空间同构于 $\ker(q)$。现在

$$i(V_\varphi)=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(V_\varphi)\subseteq V_\psi.$$

将 V_ψ 替换为 $V_\psi\cap(i(V_\varphi)\oplus\ker(q))$ 并调整 U_ψ 后，我们可以假设

$$i(E_\varphi)\cap V_\psi=i(V_\varphi).$$

由于 f 是拓扑嵌入， $f(U_\varphi)$ 在 $f(M)$ 中相对开。因此，对某个开子集 $Q\subseteq N$，有 $f(U_\varphi)=f(M)\cap Q$。将 Q 替换为 $Q\cap U_\psi$ 后，我们可以假设 $Q\subseteq U_\psi$。将 U_ψ 替换为 Q，并将 V_ψ 替换为 $\psi(Q)$ 后，我们可以假设 $U_\psi=Q$，因此

$$f(M)\cap U_\psi=f(U_\varphi).$$

Then

$$\psi(f(M)\cap U_\psi)=\psi(f(U_\varphi))=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(V_\varphi)=i(V_\varphi)=i(E_\varphi)\cap V_\psi,$$

这表明 ψ 是适配于 $f(M)$ 的坐标图。因此，$f(M)$ 是 N 的子流形。由于 f 是 C^r- 流形之间的嵌入，$f|^{f(M)}\colon M\to f(M)$ 是一个双射。对于如前所述的 φ 和 ψ，ψ 适配于 $f(M)$。令 $\psi_{f(M)}:=\psi|_{f(M)\cap U_\psi}\colon f(M)\cap U_\psi\to i(E_\varphi)\cap V_\psi$ 为相应的子流形坐标图。于是

$$\psi_{f(M)}\circ f|^{f(M)}\circ\varphi^{-1}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1})|^{i(E_\varphi)\cap V_\varphi}=i_{V_\varphi}^{i(V_\varphi)}$$

是一个 C^r-微分同胚。由于它既是双射又是局部 C^r-微分同胚，$f|^{f(M)}$ 是一个 C^r-微分同胚。□

第 3.3 节习题

习题 3.3.1。设 $r\geq 1$ 和 M 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^r-流形。对于 $p\in M$，求一个同构 $\theta_p\colon \mathcal{T}_p(M)\to T_pM$。若 $f\colon M\to N$ 是一个 C^r-映射，证明与 $T_p(f)$ 对应的线性映射 $\mathcal{T}_p(f)\colon \mathcal{T}_p(M)\to\mathcal{T}_{f(p)}(N)$（即，$\mathcal{T}_p(f)\colon =\theta_{f\ p()}^{-1}\circ T_p(f)\circ\theta_p$）是将几何切向量（曲线等价类）$[\gamma]$ 映射到 $[f\circ\gamma]$ 的映射。

习题 3.3.2。设 $r\in\mathbb{N}\cup\{\infty,\omega\}$ 和 M 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^r-流形。

(a) 证明对于每个 $p\in M$，T_pM 是 TM 的分裂子流形，其模型空间为 $\{0\}\times E(\cong E)$。(b) 证明“零截面” $\sigma\colon M\to TM$, $\sigma(p):=0_p\in T_p(M)$ 是一个单射 C^{r-1}-映射。(c) 证明 $\sigma(M)$ 是 TM 的分裂子流形，其模型空间为 $E\times\{0\}(\cong E)$。(d) 证明 $\sigma|^{\sigma(M)}\colon M\to\sigma(M)$ 是一个 C^{r-1}-微分同胚。

习题 3.3.3。利用局部坐标图，验证流形乘积上的映射所满足的偏微分法则（引理 3.3.18）。此外，补全注 3.3.17 中省略的细节。

习题 3.3.4。设 E 是一个局部凸空间，$M\subseteq E$ 是一个以 $F\subseteq E$ 为模型的 C^r-子流形（其中 $r\geq 1$），并且 $p\in M$。设 $\iota\colon M\to E$ 是包含映射，$V\subseteq E$ 是所有速度向量 $\gamma'(0)$ 的集合，其中 C^1 是 M 中经过 p 的 γ -曲线。

(a) 证明 V是 $T_p(\iota)$ 的像，并且 $T_p(\iota)\colon T_pM\to V$是拓扑向量空间的同构。特别地，$V$是 E的一个与 F同构的向量子空间。(b) 若 $E=\mathbb{R}^n$ 且 $M=\mathbb{S}^{n-1}$，证明 $V=p^\perp=\{x\in\mathbb{R}^n\colon\langle x,\ p\rangle=0\}$。对于 $n\in\{2,3\}$，画一幅草图，标出 $\mathbb{S}^{n-1}$、p和 $p+V$。

习题 3.3.5. (乘积法则) 设 $\beta\colon E_1\times E_2\to F$是局部凸空间之间的连续双线性映射，$M$是一个 C^1-流形，且 $f_1\colon M\to E_1$ 以及 $f_2\colon M\to E_2$是 C^1-映射。设 $\varphi:=\beta\circ(f_1,\ f_2)\colon M\to F$。证明

$$d\varphi=\beta\circ(df_1,f_2\circ\pi_{TM})+\beta\circ(f_1\circ\pi_{TM},df_2),$$

其中 $\pi_{TM}\colon TM\to M$ 是丛投影。

习题 3.3.6. 设 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ 和 M 是一个以局部凸空间集 $\mathcal{E}$ 为模型的 C^r-流形。对于 $x, y \in M$，若 $T_x M \cong T_y M$ 作为拓扑向量空间，则记作 $x \sim y$。验证 $\sim$ 是 M 上的一个等价关系，并证明等价类 $[x]$ 是开集。由此推得，对于 M 的每个连通分支 C，对所有 $x, y \in C$，都有 $T_x M \cong T_y M$。

3.4 流形上的向量场李代数

在本节中，我们定义光滑流形 M 上的向量场和向量场的李括号。向量场在光滑函数上充当微分算子，并且可以用来定义流形上的微分方程。向量场的李括号将所有向量场构成的空间 $\mathcal{V}(M)$ 赋予李代数结构。稍后，向量场的李括号将使我们能够把李群 G 的切空间 $T_e(G)$ 转化为李代数。

为提高可读性，我们将重点讨论基域 $\mathbb{R}$ 上光滑流形上的光滑向量场。变体和推广见注 3.4.23。

定义 3.4.1。设 M 是一个光滑流形。M 上的一个（光滑）向量场是一个光滑映射 $X\colon\ M \to TM$，它为每个 $p \in M$ 指定一个切向量 $X(p) \in T_p M$。因此，向量场是一个满足 $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_M$ 的光滑映射 $X\colon\ M \to TM$（即丛投影 $\pi_{TM}\colon\ TM \to M$ 的一个光滑截面）。我们用 $\mathcal{V}(M)$ 表示 M 上所有向量场的集合。

给定 $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ 和 $r, s \in \mathbb{R}$，我们定义截面 $rX + sY\colon\ M \to TM$of π_{TM}，其定义为 $(rX + sY)(p) := rX(p) + sY(p) \in T_p(M)$，其中 $p \in M$。于是 $rX + sY \in \mathcal{V}(M)$，因为很容易利用坐标图验证 $rX + sY$ 是光滑的。显然，以这种方式，$\mathcal{V}(M)$ 成为一个 $\mathbb{R}$-向量空间。我们也可以用函数乘向量场：若 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 且 $X \in \mathcal{V}(M)$，我们通过逐点标量乘法定义 $fX \in \mathcal{V}(M)$，即 $(fX)(p) := f(p)X(p)$。这样，$\mathcal{V}(M)$ 成为一个 $C^\infty(M, \mathbb{R})$-模，前提是将 $C^\infty(M, \mathbb{R})$（即 M 上的实值光滑函数空间）视为一个结合的 $\mathbb{R}$-代数，并以函数的逐点乘法作为代数乘法。

例 3.4.2。考虑最简单的情形：我们的流形是拓扑向量空间 E 的开子集 $U \subseteq E$。在这种情况下，我们有 $TU = U \times E$，且 $\pi_{TU}\colon\ U \times E \to U$ 是到第一个分量的投影。向量场是形如以下形式的光滑映射

$$X = (\mathrm{id}_U, X_E)\colon U \to U \times E, \quad x \mapsto (x, X_E(x)),$$

其中 $X_E\colon\ U \to E$ 是一个光滑映射。

3.4.3. 如果 M 是以 E 为模型的光滑流形，且 X 是 M 上的向量场，那么对于给定的每个坐标图 φ，我们仍有 X_E 的局部类似形式：$U_\varphi \to V_\varphi$

M。事实上，$T(\varphi)\circ X\circ\varphi^{-1}\colon\ V_\varphi\to V_\varphi\times E$ 是 V_φ 上的向量场，因此具有如下形式

$$T(\varphi)\circ X\circ\varphi^{-1}\ =\ (\mathrm{id}_{V_\varphi},X_\varphi) \tag{3.11}$$

具有光滑映射 $X_\varphi:=d\varphi\circ X\circ\varphi^{-1}\colon\ V_\varphi\to E$。我们称 $X_\varphi\in C^\infty(V_\varphi,E)$ 为相对于坐标图 φ 的 X 局部代表。

注 3.4.4。映射 $d\varphi|_{T_pM}$ 的线性性意味着映射

$$\mathcal{V}(M)\to C^\infty(V_\varphi,E)\,,\quad X\mapsto X_\varphi$$

对每个坐标图 $\varphi\colon\ U_\varphi\to V_\varphi\subseteq E$，都是 $\mathbb{R}$-线性的。

根据 X_φ 的定义，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} TU_\varphi & \xrightarrow{\ T\varphi\ } & V_\varphi\times E \\ \uparrow{\scriptstyle X|_{U_\varphi}} & & \uparrow{\scriptstyle (\mathrm{id},X_\varphi)} \\ U_\varphi & \xrightarrow{\ \varphi\ } & V_\varphi\,. \end{array} \tag{3.12}$$

引入术语来描述这类情形很有用。

定义 3.4.5. 设 $f\colon\ M\to N$ 是光滑流形之间的光滑映射。若两个向量场 $X\in\mathcal{V}(M)$ 和 $Y\in\mathcal{V}(N)$ 满足以下条件，则称它们是 f-相关 的：

$$Y\circ f\ =\ T(f)\circ X\,.$$

因此，我们要求图表满足交换律

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\ Tf\ } & TN \\ \uparrow{\scriptstyle X} & & \uparrow{\scriptstyle Y} \\ M & \xrightarrow{\ f\ } & N\,. \end{array}$$

注 3.4.6. (a) 若 $f\colon\ M\to N$ 是光滑映射，且 $X\in\mathcal{V}(M)$，则不一定存在一个与 X f-相关的向量场 $Y\in\mathcal{V}(N)$（反之亦然）。

(b) 若 $f\colon\ M\to N$ 和 $g\colon\ N\to K$ 是光滑映射，$X\in\mathcal{V}(M)$ 与 $Y\in\mathcal{V}(N)$ 是 f-相关的，且 Y 和 $Z\in\mathcal{V}(K)$ 是 g-相关的，则 X 和 Z 是 $g\circ f$-相关的，因为 $Z\circ g\circ f=Tg\circ Y\circ f=Tg\circ Tf\circ X=T(g\circ f)\circ X$。

（c）由（3.12），向量场 $X|_{U_\varphi}$ 和 $(\mathrm{id}\ X_\varphi)$ 是 φ-相关的。

（d）若 $f\colon\ M\to N$ 是光滑映射，$U\subseteq N$ 是开集，且 $X\in\mathcal{V}(M)$、$Y\in\mathcal{V}(N)$ 是 f-相关的，则 $X|_{f^{-1}(U)}$ 和 $Y|_U$ 是 $f|^U_{f^{-1}(U)}$-相关的。

(e) 综合 (b)–(d)，我们得到：如果 $\varphi\colon\ U_\varphi\to V_\varphi$ 和 $\psi\colon\ U_\psi\to V_\psi$ 是光滑流形 M 上的坐标图，且 $X\in\mathcal{V}(M)$，那么 $(\mathrm{id}\ X_\varphi)$ 和 $(\mathrm{id}\ X_\psi)$（分别限制在 $\varphi(U_\varphi\cap U_\psi)$ 和 $\psi(U_\varphi\cap U_\psi)$ 上）通过转移映射 $\tau\colon\ =\psi\circ\varphi^{-1}$ 相联系。后者意味着

$$X_\psi(\tau(x))\ =\ d\tau(x,X_\varphi(x))\quad\text{for all } x\in\varphi(U_\varphi\cap U_\psi). \tag{3.13}$$

反过来，相容的光滑映射族合并为一个向量场：

引理 3.4.7. 设 $(M, \mathcal{A})$ 是以局部凸空间 E 为模型的光滑流形，并设 $(\xi_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{A}}$ 是一族光滑映射 $\xi_\varphi\colon V_\varphi \to E$，它们在如下意义下相容：

$$\xi_\psi \circ (\psi\circ\varphi^{-1}) \;=\; d(\psi\circ\varphi^{-1})\circ(\mathrm{id},\,\xi_\varphi) \quad on \quad \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$$

(即 ξ_φ 与 ξ_ψ 表示 $\psi\circ\varphi^{-1}$-相关的向量场) 对所有坐标图 φ、$\psi \in \mathcal{A}$成立。于是存在唯一确定的向量场 $X \in \mathcal{V}(M)$，其具有给定的局部表示族，即对每个 $\varphi \in \mathcal{A}$ 有 $X_\varphi = \xi_\varphi$。

证明。唯一性：由于 $d\varphi|_{T_pM}$是单射，条件 $d\varphi(X(p)) = \xi_\varphi(\varphi(p))$ 对 $p \in U_\varphi$ 确定了 $X(p)$。至于存在性，我们通过如下方式定义 $X\colon M \to TM$

$$X(p) := T(\varphi^{-1})\big(\varphi(p), \xi_\varphi(\varphi(p))\big) \quad \text{for} \quad p \in U_\varphi.$$

由映射 ξ_φ 的相容性，这给出一个良定义映射 $X\colon M \to TM$。由构造，X是 π_{TM} 的一个截面。$X|_{TU_\varphi}$ 的定义公式表明，对每个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$，$X$ 在 TU_φ 上光滑，因而在整个 M 上光滑。由构造，$X_\varphi = \xi_\varphi$。 □

注 3.4.8。我们指出，开子集 $U \subseteq \mathbb{R}^n =: E$ 上的向量场可以用更明确的方式描述。事实上，给定 $X \in \mathcal{V}(U)$，并记作$X_E = (f_1, \dots, f_n)$，其中 $f_1, \dots, f_n\colon U \to \mathbb{R}^n$ 为光滑函数，这里采用例 3.4.2 中的记号。令 $e_j \in \mathbb{R}^n$ 为第 j 个标准单位向量，并记 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 为 U 上的光滑向量场，使得对所有 $x \in U$，都有 $\big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big)_E(x) = e_j$（同样采用例 3.4.2 中的记号）。那么 X 可表示为

$$X \;=\; f_1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\,\frac{\partial}{\partial x_n},$$

光滑函数 $f_1, \dots, f_n$ 由此恒等式唯一确定。

前述记号已表明，向量场以微分算子的形式作用于函数。事实确实如此（无限维情形亦然）。

定义 3.4.9。设 $f\colon M \to F$ 是从光滑流形 M到局部凸空间 F的光滑映射，且 $X \in \mathcal{V}(M)$是一个向量场。我们将复合定义为光滑映射 $X.f\colon M \to F$

$$X.f \;:=\; df \circ X \in C^\infty(M, F).$$

若 $f\colon U \to F$是在开子集 $U \subseteq M$上的光滑映射，我们记作 $X.f := (X|_U).f = df \circ (X|_U)$。

注 3.4.10。注意到 $\mathcal{V}(M)\times C^\infty(M,\ F) \to C^\infty(M,\ F)$，$(X,\ f) \mapsto X.f$是一个 $\mathbb{R}$-双线性映射，因为 df 分别关于 f 和 $df|_{T_pM}$ 线性：对于每个 $p \in M$，$T_pM \to F$都是线性的。

注 3.4.11。让我们考虑 $M = U$ 是 E的一个开子集这一特殊情形。在这种情况下，我们有 $TU = U \times E$，向量场 X具有$X = (\mathrm{id}_U,\ X_E)$的形式，其中 X_E是某个光滑映射：$U \to E$，而 df：$TU = U \times E \to F$是通常的微分。因此

$$(X.f)(x) \;=\; df(X(x)) = df(x, X_E(x)) \tag{3.14}$$

对于 $x \in U$，即 $(X.f)(x)$ 是 f 在 x 处沿向量场 X 在 x 处提供的方向 $X_E(x)$ 的方向导数。在此处所述的特殊情形下，我们将其简写为

$$X_E.f \;:=\; (\mathrm{id}_U, X_E).f \;=\; X.f\,. \tag{3.15}$$

下文将使用李代数及其各种相关概念（理想、李代数同态、导子和模）。不熟悉这些概念的读者可参考任何李代数入门教材，例如 [HiNe12]。

注释 3.4.12。将 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 视为含幺结合的 $\mathbb{R}$-代数。那么映射

$$\mathcal{L}_X \colon C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})\,, \qquad \mathcal{L}_X(f) \;:=\; X.f \tag{3.16}$$

对每个向量场 $X \in \mathcal{V}(M)$，它都是 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 的导子。事实上，根据注 3.4.10，$\mathcal{L}_X$ 是 $\mathbb{R}$-线性的。为验证乘积法则，设 $f,\ g \in C^\infty(M,\ \mathbb{R})$。由于根据习题 3.3.5，$d(f \cdot g) = (df) \cdot (g \circ \pi_{TM}) + (f \circ \pi_{TM}) \cdot dg$，因此有

$$\mathcal{L}_X(f \cdot g) = d(f \cdot g) \circ X = (df \circ X) \cdot g + f \cdot (dg \circ X) = \mathcal{L}_X(f) \cdot g + f \cdot \mathcal{L}_X(g).$$

定理 3.4.13。对于每个光滑流形$(M, \mathcal{A})$，以下结论成立：

(a) 对于所有的 $X, Y \in \mathcal{V}(M)$，存在唯一确定的光滑向量场 $[X,Y] \in \mathcal{V}(M)$，其局部表示为

$$[X,Y]_\varphi \;=\; X_\varphi.Y_\varphi - Y_\varphi.X_\varphi \quad \textit{for all } \varphi \in \mathcal{A}, \tag{3.17}$$

使用 (3.15) 中的记号。

(b) 由(a)得到的映射 $[\cdot,\cdot] \colon \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M)$ 是 $\mathbb{R}$-双线性的，并使 $\mathcal{V}(M)$ 成为一个李代数。(c) 这个 $\mathbb{R}$-线性映射

$$\mathcal{L} \colon \mathcal{V}(M) \to \mathrm{der}(C^\infty(M,\mathbb{R}))\,, \quad X \mapsto \mathcal{L}_X$$

(其中 $\mathcal{L}_X$ 如(3.16)) 所示）是一个李代数同态，即，

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X.$$

为准备定理 3.4.13 的证明，我们首先研究局部凸空间 E 的开子集 U 上的向量场。给定 $\xi,\ \eta \in C^\infty(U,\ E)$，我们简记为

$$[\xi,\eta] \;:=\; \xi.\eta - \eta.\xi\,,$$

使用与 (3.15) 中相同的记号。

给定局部凸空间的开子集 $U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$，以及一个光滑映射 $\varphi\colon U \to V$，方便起见，若相应的向量场彼此相关，或者等价地，若

$$\eta \circ \varphi \;=\; d\varphi \circ (\mathrm{id}_U, \xi)\,. \tag{3.18}$$

记录一个关于 (3.18) 中这类映射的微分公式很有用。

引理 3.4.14。设 E、F 和 H 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 和 $V \subseteq H$ 为开子集，$f\colon U \to F$ 为一个 C^2-映射，且 $g\colon V \to U$ 和 $h\colon V \to E$ 为 C^1。那么该 C^1-映射的微分

$$\varphi := df \circ (g,h)\colon V \to F, \quad \varphi(x) = df(g(x),h(x))$$

由下式给出

$$d\varphi(x,y) \;=\; d^{\,(2)}f\big(g(x),h(x),dg(x,y)\big) + df\big(g(x),dh(x,y)\big) \tag{3.19}$$

对所有 $x \in V$ 和 $y \in H$ 均成立。

证明。我们有

$$\begin{aligned} d\varphi(x,y) &= d(df)(g(x),h(x),dg(x,y),dh(x,y)) \\ &= d_1(df)(g(x),h(x),dg(x,y)) + d_2(df)(g(x),h(x),dh(x,y)) \\ &= d^{\,(2)}f(g(x),h(x),dg(x,y)) + df(g(x),dh(x,y))\,, \end{aligned}$$

利用链式法则（命题 1.2.13）、引理 1.3.3 中的公式 $d(g,\ h) = (dg,\ dh)$ 以及以下事实

$$d(df)(x,y_1;y_2,y_3) = d^{(2)}f(x,y_1,y_2) + df(x,y_3)$$

由命题 1.3.10 的证明中的 (1.36) 可得。 □

下一个引理概括了定理 3.4.13 在开子集情形下的大部分内容。以下记号将有助于证明：若 $\mathfrak{g}$ 是一个向量空间，且 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$、$(u,\ v) \mapsto [u,v]$ 是一个双线性映射，我们记作

$$\mathrm{Jac}(u,v,w) := [u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]]\,. \tag{3.20}$$

李代数的雅可比恒等式现在简单地写作 $\mathrm{Jac}(u,\ v,\ w) = 0$。

引理 3.4.15。设 E 是一个局部凸空间，且 $U \subseteq E$ 是开集。定义 $\mathcal{L}_\xi(f) := df \circ (\mathrm{id}_U, \xi)$ 对于 $\xi \in C^\infty(U,E)$ 以及 $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$。则有：
(a) 对于每个 $\xi \in C^\infty(U,E)$，映射 $\mathcal{L}_\xi\colon C^\infty(U,\mathbb{R}) \to C^\infty(U,\mathbb{R})$ 是 $C^\infty(U,\mathbb{R})$ 的导子。

(b) 对所有 $\xi,\eta\in C^\infty(U,E)$，$\mathcal{L}_{[\xi,\eta]}=\mathcal{L}_\xi\circ\mathcal{L}_\eta-\mathcal{L}_\eta\circ\mathcal{L}_\xi$。*(c)* 映射 $\mathcal{L}\colon C^\infty(U,E)\to\operatorname{der}(C^\infty(U,\mathbb{R}))$，$\xi\mapsto\mathcal{L}_\xi$ 是线性单射。*(d)* 映射 $[\cdot,\cdot]\colon C^\infty(U,E)\times C^\infty(U,E)\to C^\infty(U,E)$，$(\xi,\eta)\mapsto[\xi,\eta]$ 使 $C^\infty(U,E)$ 成为一个李代数。

证明。(a) 已在注释 3.4.12 中验证。

(b) 令 $f\in C^\infty(U,\mathbb{R})$。由于

$$d(df\circ(\mathrm{id}_U,\eta))(x,y)=d^{(2)}f(x,\eta(x),y)+df(x,d\eta(x,y))$$ 对所有 $(x,y)\in U\times E$

由引理 3.4.14，我们推得

$$\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_\eta(f))=\mathcal{L}_\xi(df\circ(\mathrm{id}_U,\eta))(x)=d(df\circ(\mathrm{id}_U,\eta))\circ(\mathrm{id}_U,\xi)$$

由下式给出

$$\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_\eta(f))(x)=d^{(2)}f(x,\eta(x),\xi(x))+df(x,d\eta(x,\xi(x)))\,.$$

利用这个公式以及交换 ξ 和 η 后相应的公式，我们得到

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi\circ\mathcal{L}_\eta-\mathcal{L}_\eta\circ\mathcal{L}_\xi)(f)(x)&=d^{(2)}f(x,\eta(x),\xi(x))+df(x,d\eta(x,\xi(x)))\\&\quad-d^{(2)}f(x,\xi(x),\eta(x))-df(x,d\xi(x,\eta(x)))\\&=df(x,d\eta(x,\xi(x)))-df(x,d\xi(x,\eta(x)))\\&=df(x,[\xi,\eta](x))=\mathcal{L}_{[\xi,\eta]}(f)(x)\,,\end{aligned}$$

这正是所需结果（二阶项由施瓦茨定理抵消）。

(c) $\mathcal{L}_\xi$ 关于 ξ 是线性的，$df(x,\xi(x))$ 也是如此，对所有 $f\in C^\infty(U,E)$ 和 $x\in U$ 均成立。由于 $\mathcal{L}$ 是线性的，若其核是平凡的，则它是单射。为验证这一点，取 $0\neq\xi\in C^\infty(U,E)$。存在 $x\in U$ 使得 $\xi(x)\neq0$。由 Hahn–Banach 定理，存在 $\lambda\in E'$ 使得 $\lambda(\xi(x))\neq0$（见定理 B.5.6）。因此 $\mathcal{L}_\xi(\lambda)(x)=d\lambda(x,\xi(x))=\lambda(\xi(x))\neq0$，从而 $\mathcal{L}_\xi\neq0$。

(d) 显然，$[\xi,\eta]$ 关于 (ξ,η) 是双线性的（参见注 3.4.10）。因此 $(C^\infty(U,E),[\cdot,\cdot])$ 是一个代数。由于 $[\xi,\xi]=\xi.\xi-\xi.\xi=0$，只需验证雅可比恒等式：对于所有 $\xi,\eta,\zeta\in C^\infty(U,E)$，均有 $\mathrm{Jac}(\xi,\eta,\zeta)=0$（使用 (3.20) 中的记号）。然而，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Jac}(\xi,\eta,\zeta)}=\mathrm{Jac}(\mathcal{L}_\xi,\mathcal{L}_\eta,\mathcal{L}_\zeta)=0\,,$$

利用 (b) 得到第一个等式，并利用 $\operatorname{der}(C^\infty(U,\mathbb{R}))$ 是一个李代数这一事实得到第二个等式。由于 $\mathcal{L}\colon C^\infty(U,E)\to\operatorname{der}(C^\infty(U,\mathbb{R}))$ 是单射，因此 $\mathrm{Jac}(\xi,\eta,\zeta)=0$。□

下面的引理是一种高效工具，后文将频繁使用。它说明了 f-相关这一概念为何有用。

引理 3.4.16（开子集上的相关向量场引理）。设$U \subseteq E$ 和 $V \subseteq F$ 是局部凸空间的开子集。设 $\varphi\colon U \to V$以及 $\xi_1,\xi_2\colon U \to E$和 $\eta_1,\eta_2\colon V \to F$是光滑函数。若 ξ_1 与 η_1 是φ-相关的，且 ξ_2 与 η_2是 φ-相关的，那么 $[\xi_1,\xi_2]$ 与 $[\eta_1,\eta_2]$是 φ-相关的。

证明。 我们断言， $\xi \in C^\infty(U,E)$ 和 $\eta \in C^\infty(V,F)$ 是 φ-相关的，当且仅当

$$\mathcal{L}_\xi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \mathcal{L}_\eta\colon C^\infty(V,\mathbb{R}) \to C^\infty(U,\mathbb{R}), \quad \text{where} \quad \varphi^* f = f \circ \varphi. \tag{3.21}$$

As

$$\mathcal{L}_\xi(f\circ\varphi)(x) = d(f\circ\varphi)(x,\xi(x)) = df(\varphi(x), d\varphi(x,\xi(x)))$$

and

$$(\mathcal{L}_\eta f)(\varphi(x)) = df(\varphi(x),\eta(\varphi(x))),$$

我们看到，若 ξ 和 η 是 φ-相关的，则（3.21）成立。反过来，我们可以将连续线性泛函限制到相应限制上，并应用（3.21），从而看到它蕴含（3.18），也就是说， ξ 与 η是 φ- 相关的。

现在我们的假设意味着

$$\mathcal{L}_{\xi_1} \circ \mathcal{L}_{\xi_2} \circ \varphi^* = \mathcal{L}_{\xi_1} \circ \varphi^* \circ \mathcal{L}_{\eta_2} = \varphi^* \circ \mathcal{L}_{\eta_1} \circ \mathcal{L}_{\eta_2},$$

因此，由引理 3.4.15(b)可得关系

$$\mathcal{L}_{[\xi_1,\xi_2]} \circ \varphi^* = [\mathcal{L}_{\xi_1},\mathcal{L}_{\xi_2}] \circ \varphi^* = \varphi^* \circ [\mathcal{L}_{\eta_1},\mathcal{L}_{\eta_2}] = \varphi^* \circ \mathcal{L}_{[\eta_1,\eta_2]},$$

我们前面的讨论表明，这意味着 $[\xi_1,\xi_2]$ 与 $[\eta_1,\eta_2]$是 φ-相关的。□

定理 3.4.13 的证明。(a) 我们只需证明族 $([X_\varphi,Y_\varphi])_{\varphi\in\mathcal{A}}$ 满足引理 3.4.7 中所述的相容条件。为此，设 φ， $\psi \in \mathcal{A}$ 为坐标图。由于 X_φ 和 X_ψ （分别限制在 $\varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$ 和 $\psi(U_\varphi \cap U_\psi)$ 上）是 $\tau := \psi\circ\varphi^{-1}$-相关的，且 Y_φ 和 Y_ψ 的相应限制也是 τ-相关的，因此由引理 3.4.16 可知，$[X_\varphi,Y_\varphi]$ 和 $[X_\psi,Y_\psi]$ 的限制也为 τ-相关。这就是所需的相容条件。

（b）由引理 3.4.15，对于每个 $\varphi \in \mathcal{A}$，都有 $[X,X]_\varphi = [X_\varphi,X_\varphi] = 0$，因此我们得到 $[X,X] = 0$。同样，雅可比恒等式也可以在坐标图中检验。在坐标图中，由引理 3.4.15 可知它成立。

（c）我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(f)\circ\varphi^{-1} = df\circ X\circ\varphi^{-1} &= df\circ T\varphi^{-1}\circ(\mathrm{id}_{V_\varphi},X_\varphi)\\ &= d(f\circ\varphi^{-1})\circ(\mathrm{id}_{V_\varphi},X_\varphi) = \mathcal{L}_{X_\varphi}(f\circ\varphi^{-1})\end{aligned}$$

对所有的 $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$、 $X \in \mathcal{V}(M)$ 和 $\varphi \in \mathcal{A}$。因此

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}(f)\circ\varphi^{-1} = \mathcal{L}_{[X_\varphi,Y_\varphi]}(f\circ\varphi^{-1}) = [\mathcal{L}_{X_\varphi},\mathcal{L}_{Y_\varphi}](f\circ\varphi^{-1}) = [\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y](f)\circ\varphi^{-1},$$

对所有的 X，$Y \in \mathcal{V}(M)$、$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 和 $\varphi \in \mathcal{A}$。由于 φ 是任意的，因此可得 $\mathcal{L}_{[X,Y]}(f) = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f)$，如所需。□

此外，引理 3.4.16 还有一个（更为重要的）全局版本。

引理 3.4.17（相关向量场引理）。设 $f\colon M \to N$ 是光滑流形之间的光滑映射，$X^1, X^2 \in \mathcal{V}(M)$ 以及 $Y^1, Y^2 \in \mathcal{V}(N)$ 是向量场。若 X^1 与 Y^1 关于 f 相关，且 X^2 与 Y^2 关于 f 相关，则 $[X^1, X^2]$ 与 $[Y^1, Y^2]$ 关于 f 相关。

证明。我们需要证明

$$Tf \circ [X^1, X^2] = [Y^1, Y^2] \circ f$$

对每个 $m \in M$ 都逐点成立。为此，我们选取 M 上以 m 为中心的坐标图 φ，以及 N 上以 $f(m)$ 为中心的坐标图 ψ。不妨设 $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$。于是 $X^j|_{U_\varphi}$ 与 X^j_φ 关于 φ 相关，映射 X^j_φ 与 Y^j_ψ 关于 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ 相关，而 $Y^j|_{U_\psi}$ 与 Y^j_ψ 关于 ψ 相关。根据向量场上李括号的构造，$[X^1, X^2]$ 与 $[X^1_\varphi, X^2_\varphi]$ 关于 φ 相关，且 $[Y^1, Y^2]$ 与 $[Y^1_\psi, Y^2_\psi]$ 关于 ψ 相关。此外，引理 3.4.16 表明，$[X^1_\varphi, X^2_\varphi]$ 与 $[Y^1_\psi, Y^2_\psi]$ 关于 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ 相关。综合这些关系可知，$[Y^1, Y^2]$ 与 $[X^1, X^2]$ 关于 f 相关。□

注 3.4.18。若 M 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的有限维光滑流形，则线性映射

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{V}(M) \to \operatorname{der}(C^\infty(M, \mathbb{R})), \quad X \mapsto \mathcal{L}_X$$

是一个双射，因此可以将 $\operatorname{der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$ 的李代数结构传递到 $\mathcal{V}(M)$ 上。不幸的是，当 M 是以局部凸空间为模型的光滑流形时，$\mathcal{L}$ 通常不是双射，因此在这种情况下，我们无法像 $M = U$ 是局部凸空间的开子集时那样，轻易地将 $\mathcal{V}(M)$ 转化为李代数（参见引理 3.4.15）。例子见 [BGN04，例 8.3]，其中 $\mathcal{L}$ 不是满射（基于 [KM97，引理 28.4]）。

我们不知道以下问题的答案。

问题 3.4.19。映射

$$\mathcal{V}(M) \to \operatorname{der}(C^\infty(M, \mathbb{R})), \quad X \mapsto \mathcal{L}_X \tag{3.22}$$

对于每个以局部凸空间为模型的光滑流形 M，它都是单射吗?

注 3.4.20。设 M 是一个光滑流形，使得对于每个 $p \in M$，微分 $df|_{T_pM}$（其中 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$）在 T_pM 上分离点。那么映射 (3.22) 是单射。[3]

[3] 若 $0 \neq X \in \mathcal{V}(M)$，则 $X(p) \neq 0$ 对某个 $p \in M$ 成立。假设给出 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，其中 $0 \neq df(X(p)) = \mathcal{L}_X(f)(p)$。

问题 3.4.21。 对于每个光滑流形 M 和每个 $p \in M$， $df|_{T_pM}$的微分 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 是否能分离 T_pM上的点?

一个相关问题如下。

问题 3.4.22。 对于每个光滑流形 M， $C^\infty(M, \mathbb{R})$ 是否能在 M 上分离点?

对于第 3.5 节讨论的光滑正则流形（例如有限维流形），问题 3.4.19–3.4.22 都有肯定解。

注 3.4.23。(a) 如果 M 是一个带有 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$（具有 $k \leq r-1$）的 C^r-流形，我们称光滑映射 $X\colon M \to TM$ 为 C^k-向量场，若 $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_{TM}$。所有 C^k-向量场构成实向量空间 $\mathcal{V}_{C^k}(M)$，其逐点运算如定义 3.4.1 所述。它们的局部表示是光滑函数 $X_\varphi\colon V_\varphi \to E$ 到 M 的建模空间 E。如果 $f\colon M \to N$ 是到 C^r 流形 N 的光滑映射，我们称 C^k-向量场 $X \in \mathcal{V}_{C^k}(M)$ 和 $Y \in \mathcal{V}_{C^k}(N)$ 是相关的，若 $Y \circ f = Tf \circ X$。注 3.4.6(b) 的类似结论成立。给定 $X \in \mathcal{V}_{C^k}(M)$ 和到局部凸空间的光滑函数 $f\colon M \to F$，我们可以通过 $X.f := df \circ X$ 定义光滑映射 $X.f\colon M \to F$。

(b) 如果 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 和 M 是一个 $\mathbb{K}$-解析流形，我们称 $X\colon M \to TM$ 是一个 $\mathbb{K}$-解析向量场，如果 $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_{TM}$。所有 $\mathbb{K}$-解析向量场构成的集合 $\mathcal{V}_{C^\omega}(M)$ 在逐点运算下是一个 $\mathbb{K}$-向量空间，并且是由所有光滑向量场组成的李代数 $\mathcal{V}(M)$ 的李子代数，因为对于所有 $X, Y \in \mathcal{V}_{C^\omega}(M)$ 和 M 的每个坐标图 φ，$X_\varphi.Y_\varphi - Y_\varphi.X_\varphi$ 都是 $\mathbb{K}$-解析的。因此，$\mathcal{V}_{C^\omega}(M)$ 是一个在 $\mathbb{K}$ 上的李代数（注意，如果 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，由于对于每个坐标图 φ， $X_\varphi.Y_\varphi - Y_\varphi.X_\varphi$ 在 (X, Y) 上是复双线性的，因此李括号也是复双线性的）。如果 $f\colon M \to F$ 是到局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间 F 的一个 $\mathbb{K}$-解析映射，那么映射 $X.f := df \circ X$ 也是 $\mathbb{K}$-解析的（且关于 f 是 $\mathbb{K}$-线性的）。如果 $F := \mathbb{K}$，那么 $X.f = \mathcal{L}_X(f)$ 关于 $f \in C^\omega(M, \mathbb{K})$ 定义了 $C^\omega(M, \mathbb{K})$ 的一个导子，由此得到一个李代数同态 $\mathcal{V}_{C^\omega}(M) \to \mathrm{der}(C^\omega(M, \mathbb{K}))$。

第3.4节习题

习题 3.4.1. 设 $f\colon M \to N$ 是 C^r 流形之间的 C^r-映射，并设 $X\colon M \to TM$ 和 $Y\colon N \to TN$ 是 C^r 向量场。证明:

(a) 若 X 和 Y 是 f-相关的，则对每个 C^r-映射 $\gamma\colon N \to \mathbb{K}$，$(Y.\gamma) \circ f = X.(\gamma \circ f)$。(b) 当且仅当对每个开子集 $U \subseteq N$ 及每个 C^r-映射 $\gamma\colon U \to \mathbb{K}$， X 和 Y 是 f-相关的，即 $(Y.\gamma) \circ f|_{f^{-1}(U)} = X.(\gamma \circ f|_{f^{-1}(U)})$。

习题 3.4.2. 给定向量场 $X \in \mathcal{V}(M)$，将 $\mathrm{supp}(X)$ 定义为集合 $\{p \in M$ 的闭包： $X(p) \neq 0\}$。证明：对于有限维光滑流形M，所有具有紧支撑的向量场（“紧支撑向量场”）构成的集合 $\mathcal{V}(M)_c$ 是李代数 $\mathcal{V}(M)$ 的一个理想。

习题 3.4.3.设 E 为局部凸空间，$U \subseteq E$ 为开集，并设$\xi, \eta, \zeta\colon U \to E$为光滑映射（我们将其解释为 U 上光滑向量场的局部表示）。则

$$[\xi, \eta](x) := (\xi.\eta - \eta.\xi)(x) = d\eta(x, \xi(x)) - d\xi(x, \eta(x))$$

定义 $[\xi, \eta]\colon U \to E$。通过直接计算验证，$[.,.]$使 C^∞(U, E)成为李代数（特别要验证雅可比恒等式）。

习题 3.4.4 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ $X = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ $Y = \ldots$ 设为一个开子集，且为其上 $g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ U 3.4.8 $[X, Y] =$ 的光滑向量场（见注..）。那么，$h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ h_1 h_2 $U \to \mathbb{R}$ h_1 h_2 配以适当的光滑函数，：。用 f_1, f_2, g_1和 g_2表示并明确计算。

3.5 带边界流形及其推广

一些值得关注的对象（例如 $\mathbb{R}^n$中的闭单位球，或 $\mathbb{R}^2$中的 $[0,1]^2$ ）并不是流形。为了涵盖这些例子，必须放宽流形的定义。由于我们已有适用于非开子集上映射的微分学，这种推广并不会带来任何问题。本节将介绍以给定局部凸空间的内部稠密的局部凸子集为模型的“粗糙边界流形”。这类流形涵盖了以局部凸空间为模型的流形（如前几节所述）、具有非空内部的局部凸空间的凸子集，以及传统的带边界或角流形（参见注3.5.10）。

定义 3.5.1. 设 E 为局部凸空间，且 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。

(a) 豪斯多夫拓扑空间 M 的粗糙 E-坐标图是一个同胚$\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$，它从一个开子集 $U_\varphi \subseteq M$ 映到一个具有稠密内部的局部凸子集$V_\varphi \subseteq E$。若 $r \geq 1$，则由粗糙 E-坐标图组成的 C^r-图册是指一组用于 M 的粗糙 E-坐标图 $\mathcal{A}\colon U_\varphi \to V_\varphi$，$\varphi$满足定义 3.1.3 中的 (A1) 和 (A2)。若 $r = 0$，还需满足：(A3) 对所有 φ、$\psi \in \mathcal{A}$ 和 $x \in U_\varphi \cap U_\psi$，$\varphi(x) \in \partial V_\varphi$ 当且仅当 $\psi(x) \in \partial V_\psi$（其中 $\partial V_\varphi = V_\varphi \setminus V_\varphi^0$是 E中 V_φ 的拓扑边界）。(b) 带粗糙边界的 C^r-流形是一个豪斯多夫拓扑空间 M，连同由粗糙 E-坐标图组成的极大 C^r-图册 $\mathcal{A}$，用于 M。一旦固定了 $\mathcal{A}$，我们就将粗糙 E-坐标图 $\varphi \in \mathcal{A}$ 简称为坐标图。(c) 若 $(M, \mathcal{A})$ 是以 E为模型、带粗糙边界的 C^r-流形，若对于某个 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$（其中 $x \in U_\varphi$），有 $\varphi(x) \in \partial V_\varphi$，则称 $x \in M$ 为（形式）边界点。所有边界点组成的集合 ∂M 称为 M的（形式）边界。

注 3.5.2. 注意，在 (A2) 的情形下， $U_\varphi \cap U_\psi$ 在 U_φ 中是开的，因此 $\psi(U_\varphi \cap U_\psi)$ 在 V_ψ中是开的。因此， $\psi(U_\varphi \cap U_\psi)$ 是 E 中具有稠密内部的局部凸子集。于是，(3.1) 中转移映射的 C^r-性质是有意义的。

例 3.5.3.粗糙边界流形自然地出现于:

(a) 显然，每个 C^r-流形（$M, \mathcal{A}$）（其中 $r \neq \omega$）都有一个底层的带粗糙边界 C^r-流形，它是通过将 $\mathcal{A}$ 替换为包含 $\mathcal{A}$ 的粗糙 E-坐标图的极大 C^r-图册 $\mathcal{A}$ 得到的。(b) 若 E 是一个局部凸空间，则每个具有非空内部的局部凸子集 $U \subseteq E$，配备包含$\{\mathrm{id}_U\}$的粗糙 E-坐标图的极大 C^∞-图册后，都是带粗糙边界的 C^∞-流形。因此， $[0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个以 $\mathbb{R}^n$ 为模型的带粗糙边界光滑流形，标准单形也是如此

$$\Delta_n := \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \colon \sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1\Big\}.$$

例 3.5.4. 若（$M, \mathcal{A}$）是带粗糙边界的 C^r-流形，则如例 3.1.9 所示，每个开子集 $U \subseteq M$ 都可以成为带粗糙边界的 C^r-流形。

例 3.5.5. 设 $(M_1, \mathcal{A}_1)$ 和 $(M_2, \mathcal{A}_2)$ 分别是以局部凸空间 $\mathbb{K}$-向量空间 E_1 和 E_2为模型的 C^r-粗糙边界流形。与无边流形 C^r 的情形一样，我们看到

$$\mathcal{A} := \{\varphi_1 \times \varphi_2 \colon \varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

是 $M_1 \times M_2$ 的粗糙 $(E_1 \times E_2)$ 坐标图的 C^r 图册，并赋予乘积拓扑（若 $r = 0$，则很容易验证附加条件 (A3)）。因此，包含 $\mathcal{A}$ 的粗糙 $(E_1 \times E_2)$ 坐标图的极大性 C^r 图册使 $M_1 \times M_2$ 成为一个粗糙边界 C^r 流形，即 M_1 和 M_2 的直积。

下一个引理表明，若 $r \geq 1$，则条件 (A3) 自动成立。因此，边界正是我们所期望的样子。

引理 3.5.6. 设 $(M, \mathcal{A})$ 是一个粗糙边界 C^r 流形(其中$r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)，且 $x \in M$。设 $\varphi \colon U_\varphi \to V_\varphi$ 和 $\psi \colon U_\psi \to V_\psi$ 是 M 在 x 附近的坐标图。那么，当且仅当 $\psi(x) \in \partial V_\psi$ 时， $\varphi(x) \in \partial V_\varphi$ 。

证明。 我们可以假设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ and $E \neq \{0\}$。由于可以互换 φ和 ψ 的角色，只需证明：若 $z := \psi(x) \in \partial V_\psi$，则 $y := \varphi(x) \in \partial V_\varphi$也成立。反设 $z \in \partial V_\psi$ but$y$ 位于 V_φ的内部 V_φ^0，并导出矛盾。由于 V_ψ 是局部凸的，z 有一个凸邻域 $W \subseteq V_\psi$。于是 $z \in \partial W$，从而$z \notin W^0$，其中 W^0是 W在 E中的内部。将 Hahn–Banach

定理（定理 B.5.3）应用于凸开子集 $W^0 - z$，可得 $\lambda \in E'$，使得 $\lambda(W^0 - z) \subseteq]0, \infty[$，因此，对每个 $w \in W^0$，都有 $\lambda(w) > \lambda(z)$；而对每个 $w \in W$，都有 $\lambda(w) \geq \lambda(z)$。存在 $v \in E$，使得 $\lambda(v) < 0$。由于$\kappa := \psi \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \to V_\psi$ 且 $\kappa^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$ 是 C^r，链式法则推出 $\kappa'(y)$: $E \to E$ 是一个可逆线性映射。因此存在$u \in E$，使得 $\kappa'(y)u = v$。由于 $\kappa^{-1}(W)$是 V_φ 中的 y 的一个邻域，因而也是 E 中的邻域（因为 $y \in V_\varphi^0$），我们可找到 $\varepsilon > 0$，使得对每个 $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$。于是，当 $|t| < \varepsilon$时，$\lambda(\kappa(y + tu)) \geq \lambda(z)$，从而 $\lambda(\kappa'(y)u) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \lambda(\kappa(y + tu)) = 0$。然而，根据 u的选取，$\lambda(\kappa'(y)u) = \lambda(v) < 0$。我们得到了矛盾。□

注 3.5.7。前述引理说明，在例 3.5.3(a) 的情形下，$\partial M = \emptyset$（以及 $\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$）也成立。它还保证，$U$ 的形式边界是由拓扑边界 $\partial U \cap U$ 产生的，这与例 3.5.3(b) 的情形相同。特别地，如果 U 是闭的，那么在 E 中，U 的形式边界与其拓扑边界 ∂U 重合。

注 3.5.8。我们回顾一下 $E = \mathbb{R}^n$ 上的区域不变性定理：若 $U \subseteq E$ 是一个开子集，且 f: $U \to E$是一个单射连续映射，那么 $f(U)$ 在 E中是开集，且 f: $U \to f(U)$ 是一个同胚（参见例如 [Ha02，定理 2B.3]）。因此，如果 $r = 0$ 和 E 是有限维的，那么定义 3.5.1 中的条件 (A3) 自动成立（可以省略）。由于许多无限维赋范空间的例子都同胚于一个真向量子空间，因此区域不变性定理对于这类空间不再成立（不过对于某些特殊类的连续函数 f，它仍可能成立，见 [Sr29] 和[Tr72]）。在 [Kr76]，中可以找到一个简单的例子：从 ℓ^2 中的开单位球到其自身的连续双射，但它不是开映射。

注 3.5.9.如果 $r = 0$ 和 E 是无限维的，那么由于众所周知的病态现象，条件 (A3)不可省略。
(a) 无限维 Fr´echet 空间 E 中的每个具有非空内部的闭凸子集 U 都同胚于 E（见 [BP75，第 VI 章，定理 62]）。[4] 由于任何 $x \in E$ 都可以通过平移映射到任意 $y \in E$，因此我们推得 U 也是一个齐性拓扑空间（即，对于所有$x, y \in U$，都存在一个同胚 φ: $U \to U$，使得 $\varphi(x) = y$）。特别地，对于 U 内部的任意 $x \in \partial U$ 和 y，存在某个同胚 φ: $U \to U$，使得 $\varphi(x) = y$。

(b) 特别地，(a) 适用于无限维巴拿赫空间中的闭单位球 U $(E, \|\cdot\|)$。我们指出，后者与开球同胚（因为根据 [BP75，第 III 章，定理 6.2]，开球也同胚于 E）。

注 3.5.10。有限维微分几何中的传统带边界流形和带角流形，可以视为粗糙边界流形的特殊情形：

[4] 这一点 ℓ^2 与 ℓ^2 中的一个半空间同胚，已在 [Kl53]中证明。

(a) 带边流形 是一个 C^r-流形 M，具有粗糙边界，该边界以某个 $\mathbb{R}^n$为模型，其图册包含一组坐标图，其值域是 $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty[$的开子集。(b) 带角流形 是一个 C^r-流形 M，具有粗糙边界，该边界以某个 $\mathbb{R}^n$为模型，其图册包含一组坐标图 φ: $U_\varphi \to V_\varphi$，其值域 V_φ 是 $[0, \infty[^n$的开子集。

我们按照普通流形（无边界）的情形，定义粗糙边界流形之间的 C^r-映射。

定义 3.5.11.设 M 和 N 是分别以局部凸空间 E 和 F 为模型的粗糙边界流形。若映射 f: $M \to N$ 满足 f 连续，且对于 M 的所有坐标图 φ 和 N 的所有坐标图 ψ，映射

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon E \supseteq \varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi) \to F \tag{3.23}$$

是 C^r。注意，复合映射的定义域 $\varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi)$ 是 V_φ 的开子集，因此是 E 的一个具有稠密内部的局部凸子集。[5] 我们用 $C^r(M, N)$ 表示从 M 到 N 的所有 C^r-映射的集合。

与普通流形的情形一样，C^r-映射的复合仍是 C^r。

命题 3.5.12. 设 M、N 和 X 是粗糙边界 C^r 流形。若 f: $M \to N$ 和 g: $N \to X$ 是 C^r- 映射，则它们的复合 $g \circ f$: $M \to X$ 也是 C^r。

证明。 映射 $g \circ f$ 是连续的。给定 M 的坐标图 φ: $U_\varphi \to V_\varphi$ 和 X的坐标图 ψ: $U_\psi \to V_\psi$，设 x 是复合 $\psi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$的定义域 $\varphi((g \circ f)^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi)$中的一个元素；该定义域是 V_φ 的开子集，因此是建模空间中的一个具有稠密内部的局部凸子集。设 N 的一个坐标图 κ定义在 $f(\varphi^{-1}(x))$附近。于是

$$\psi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ g \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ f \circ \varphi^{-1})$$

在 V_φ中 x 的某个开邻域上成立，而且这是一个 C^r-映射，因为它是具有稠密内部的局部凸空间中的局部凸子集之间的 C^r-映射的复合。因此，映射 $\psi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ 是局部 C^r 的，因而是 C^r 的。因此 $g \circ f$ 是 C^r。□

注记 3.5.13。 第 3.2 节中针对普通流形（无边界）表述的许多关于 C^r-映射的结果，可直接推广到粗糙边界流形之间的 C^r-映射，原因是 $r \neq \omega$。因此，注 3.2.2、例 3.2.4 和引理 3.2.6 在 M、N、M_1 和 M_2分别是C^r-粗糙边界流形时仍然成立。若将具有稠密内部的局部凸子集 $U \subseteq E$ 视为粗糙边界的 C^r-流形，则例 3.2.3 仍然成立。我们指出，C^r-微分同胚和局部

[5] 因此，此处不会出现习题 1.4.6(a) 中那样的病态情况。

C^r粗糙边界 C^r-流形之间的微分同胚可以分别按照定义 3.2.8 和定义 3.2.9 来定义，只需将其中的 M 和 N 替换为粗糙边界 C^r-流形。若 M 是粗糙边界 C^r-流形，且 $V \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，则习题 3.2.1 仍然成立。

对于具有粗糙边界的流形，我们如下定义子流形。

定义 3.5.14。设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是以局部凸空间 E为模型、具有粗糙边界的 C^r-流形。设 $F \subseteq E$ 是一个闭向量子空间。若子集 $N \subseteq M$ 具有以下性质，则称其为以 F 为模型的 C^r-子流形，位于 M 上：

(S1) 对每个 $x \in N$，都存在 M的一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$，其定义在 x 的邻域上，并且按照以下意义与 N 相适配：

$$\varphi(U_\varphi \cap N) = V_\varphi \cap F$$

并且 $V_\varphi \cap F$在 F中的相对内部在 $V_\varphi \cap F$中稠密。

(S2) 对所有 $x \in N$以及如 (S1) 中所述的坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$和 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$，相对于 F，有 $\varphi(x) \in \partial(V_\varphi \cap F)$ 当且仅当 $\psi(x) \in \partial(V_\psi \cap F)$。

那么，赋予 N 由 M 诱导的拓扑以及包含 $\varphi_N := \varphi|_{U_\varphi \cap N}\colon U_\varphi \cap N \to V_\varphi \cap F$（对 M 的所有坐标图 φ，如 (S1) 所示）的粗糙 F 坐标图的极大 C^r 图册后，N 就是一个带粗糙边界的 C^r 流形。

例如，每个开子集 $N \subseteq M$ 都是一个以 E 为模型的子流形。

3.5.15.（具有指定边界的 C^0 子流形）。在 $r = 0$ 的情形下，假设 (S1) 成立。设 B 是 N 的一个子集，并假设所有满足以下条件的形如 φ_N 的粗糙 F 坐标图构成的集合 $\mathcal{A}_B$

$$(\forall x \in U_\varphi \cap N)\ x \in B \ \Leftrightarrow\ \varphi_N(x) \in \partial(V_\varphi \cap F) \text{ relative } F$$

是 N 的一个粗糙 C^0 图册。那么，赋予 N 由 M 诱导的拓扑以及包含 $\mathcal{A}_B$ 的极大粗糙 C^0 图册后，N 就是一个带粗糙边界的 C^0 流形。我们将其称为带边界子流形 *submanifold with boundary* B。

例如，考虑一个以 E 为模型的带粗糙边界的 C^0 流形、 M 的一个子流形 N，以及一个局部凸空间 Y。那么，利用粗糙 $F \times Y$ 坐标图 $\varphi_N \times \mathrm{id}_Y$ 的图册，$N \times Y$ 可以视为 $M \times Y$ 的一个以 $F \times Y$ 为模型、带边界 $(\partial N) \times \mathrm{id}_Y$ 的子流形。

注 3.5.16. (a) 根据引理 3.5.6，如果 $r \geq 1$，条件 (S2) 自动成立，在这种情况下可以省略。如果 $r = 0$，则必须明确写出。根据区域不变性定理，如果 $r = 0$ 且 F 为有限维，条件 (S2) 也可以省略。

(b) 注意，在（圆周）的情形下，$V_\varphi \cap F$ 是局部凸的，因为它是局部凸集的交（见注 1.4.2）。

(c) 如果 V_φ 在 E 中是开的（例如，如果 M 没有边界），那么 $V_\varphi \cap F$ 在 F 中也是开的，因此它自动具有稠密内部。

(d) 如果 V_φ 不是开集，那么 $V_\varphi \cap F$ 相对于 F 的内部的稠密性是一项真要求，并非自动成立（参见习题 1.4.6(c)）。

(e) 引理 3.2.7 仍然成立，只要 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M、N 和 P 是 C^r-粗糙边界流形，并在证明中将对定义 3.1.10 和命题 3.2.5 的引用分别替换为定义 3.5.14 和命题 3.5.12。

到无边流形的映射的图像提供了子流形的重要例子。

命题 3.5.17。给定 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，设 M 是一个以局部凸空间 E 为模型的 C^r-流形(可能具有粗糙边界)，而 N 是一个以局部凸空间 F 为模型的 C^r-流形(无边界)。设 $f\colon M \to N$ 是一个 C^r-映射。那么图

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \colon x \in M\}$$

是一个以 $M \times N$ 为模型的子流形，其模型空间为 $E \times F$ 的可补向量子空间 $E \times \{0\}$，边界为 $\partial \operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \colon x \in \partial M\}$。

证明。给定 $x \in M$，令 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$ 为 N 的一个坐标图，满足 $f(x) \in U_\psi$，且 $\psi(f(x)) = 0$；这里 V_ψ 是 F 的一个开子集。存在一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$，对应于 M，满足 $x \in U_\varphi$, $\varphi(x) = 0$ 且 $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$；这里 V_φ 是 E 的一个具有稠密内部的局部凸子集。于是 $V_\varphi \times F$ 是 $E \times F$ 的一个具有稠密内部的局部凸子集。映射

$$h\colon V_\varphi \to F, \quad z \mapsto \psi(f(\varphi^{-1}(z)))$$

是 C^r。因此，映射

$$g\colon V_\varphi \times F \to V_\varphi \times F, \ (z, y) \mapsto (z, y - h(z))$$

是 C^r，实际上是一个 C^r-微分同胚，因为这个 C^r-映射

$$V_\varphi \times F \to V_\varphi \times F, \ (z, y) \mapsto (z, y + h(z))$$

是其逆映射。因此

$$W := g(V_\varphi \times V_\psi)$$

是 $V_\varphi \times F$ 的开子集，因此也是 $E \times F$ 的局部凸子集，且具有稠密内部。此外，

$$\theta := g \circ (\varphi \times \psi)\colon U_\varphi \times U_\psi \to W$$

是一个 C^r-微分同胚，因此是 $M \times N$ 的一个坐标图（参见习题 3.2.1 和注记 3.5.13）。根据构造，我们有

$$\theta((U_\varphi \times U_\psi) \cap \operatorname{graph}(f)) = W \cap (E \times \{0\}) = V_\varphi \times \{0\},$$

它是 $E \times \{0\}$ 的一个局部凸子集，且其内部 $V_\varphi^0 \times \{0\}$在 $E \times \{0\}$中稠密。因此， θ 适配于图 graph(f)，从而满足条件 (S1)。相对于 $E \times \{0\}$，我们有 $\partial(V_\varphi \times \{0\}) = (\partial V_\varphi) \times \{0\}$。因此，对于 $(x, y) \in (U_\varphi \times U_\psi) \cap \operatorname{graph}(f)$，有 $\theta(x, y) \in \partial(V_\varphi \times \{0\})$ 当且仅当 $\varphi(x) \in \partial V_\varphi$，而这当且仅当 $x \in \partial M$。若 $r \geq 1$，这表明 graph(f) 是 $M \times N$的一个子流形，以 $E \times \{0\}$为模型，其形式边界如所述。若 $r = 0$，则由前述可知，graph(f) 是 $M \times N$ 的一个子流形，以 $E \times \{0\}$为模型，且具有指定边界$\{(x, f(x)) : x \in \partial M\}$。□

有时，关于普通流形的结果并不适用于粗糙边界流形，因此需要谨慎；例如，对于从 C^r-映射到 C^r-粗糙边界流形的映射，其图不一定是子流形。

例3.5.18. 具有稠密内部的凸子集 $N := [0, \infty[$ of $E := \mathbb{R}$ 可以视为带边界光滑流形，其整体坐标图为 id_N。此外， $M := \mathbb{R}$是一个光滑流形。映射 $f : M \to N, x \mapsto x^2$ 是光滑的；其图 graph(f) 不是带边界光滑流形 $M \times N$ 的子流形（见习题3.5.9）。

命题 3.5.17 的证明无法照搬，因为映射

$$M \times N \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x, y - f(x))$$

（它对应于命题 3.5.17 的证明中的 $g \circ (\varphi \times \psi)$，其中取 $\varphi := \mathrm{id}_M$和 $\psi := \mathrm{id}_N$）的像为 $\{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z \geq -x^2\}$，而它不是局部凸的。

我们将反复使用第二类子流形。

定义 3.5.19。设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是一个以局部凸空间 E 为模型、带粗糙边界的 C^r-流形。若对于每个 $x \in N$，存在一个坐标图 $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$，它是 M 在 x 附近的坐标图，并且 $W_\varphi := \varphi(U_\varphi \cap N)$ 是 E 的一个具有稠密内部的局部凸子集，则称子集 $N \subseteq M$ 为一个全子流形。

注意，对于相对于 E 的边界，我们有

$$W_\varphi \cap \partial W_\varphi = (W_\varphi \cap \partial V_\varphi) \cup (W_\varphi \setminus W_\varphi^0),$$

使用相对于 V_φ的 W_φ 的内部 W_φ^0。因此，对于 $x \in W_\varphi$

$$x \in \partial W_\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{-1}(x) \in \partial M \cup (N \setminus N^0), \tag{3.24}$$

使用 M 的形式边界。因此， N 是一个以 E 为模型、具有粗糙边界的 C^r-流形，其极大 C^r-图册包含粗糙坐标图 $\varphi|_{U_\varphi \cap N}$：对于 φ， $U_\varphi \cap N \to W_\varphi$ 如前；(3.24) 保证了条件 (A3)。

例 3.5.20。相对于 $\mathbb{R}^n$ 上给定范数的每个闭球 $B_\varepsilon(x)$，都是 $\mathbb{R}^n$ 的全子流形。

例 3.5.21. 设 M 是一个带粗糙边界的局部紧 C^r-流形，以局部凸空间 E 为模型（例如，任何有限维无边流形或带 C^r-边界的流形，或任何有限维带角 C^r-流形）。那么 E 是局部紧的，因而是有限维的。若 φ: $U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$是 M在某个 $x \in M$附近的坐标图，则 V_φ 包含一个凸的 $\varphi(x)$-邻域 W。于是 $\varphi^{-1}(W)$包含一个紧的 x-邻域 K。我们在 E 上选取一个范数 $\|\cdot\|$，并找到 $\varepsilon > 0$使得 $V_\varphi \cap B_\varepsilon(\varphi(x)) \subseteq \varphi(K)$。那么 $\varphi(K) \cap B_\varepsilon(\varphi(x))$是紧的。此外，$C = W \cap B_\varepsilon(\varphi(x))$ 是凸的，且其内部非空（因而稠密），相对于 E而言。因此，$\varphi^{-1}(C)$ 是 M 的一个紧全子流形，使得 $x \in (\varphi^{-1}(C))^0$ 相对于 M成立。

3.5.22. 对于 $r \geq 1$，如果 M 是以局部凸空间 E 为模型、带粗糙边界的 C^r-流形，那么切丛 TM 的定义同样适用，其切空间为 $p \in M$ 的 $T_pM \cong E$。同样，切映射也可以按通常方式定义，并具有通常的性质。事实上，如果 $U \subseteq E$、$V \subseteq F$（以及 $W \subseteq H$）是具有稠密内部的局部凸子集，那么定义 3.3.3 和注 3.3.4 仍然成立。如果 M 是带粗糙边界的 C^r-流形，那么定义 3.3.5 和注 3.3.6 也可以照搬；定义 3.3.7 亦然，只需将坐标图替换为粗糙坐标图，便可得到带粗糙边界的 C^{r-1}-流形 TM。注意，由于 $(V_\varphi \times E)^0 = V_\varphi^0 \times E$，(3.9) 中的映射 $T\varphi$ 满足粗糙 C^{r-1}-图册的性质 (A3)（如定义 3.5.1 所述）。它们是粗糙 $E \times E$ 坐标图，其像是具有稠密内部的局部凸子集 $V_\varphi \times E \subseteq E \times E$（在引理 3.3.8(d) 的证明中，这取代了映到开子集上的普通坐标图，而此时得到的是粗糙 C^{r-1}-图册）。同样，在例 3.3.9 至定义 3.3.19 中，都可以将流形替换为带粗糙边界的流形，将局部凸空间的开子集替换为具有稠密内部的局部凸子集，并将坐标图替换为粗糙坐标图。我们还可以定义带光滑边界的 C^∞-流形上的光滑向量场及其李括号。在定义 3.4.1 至引理 3.4.17 中，只需将光滑流形替换为带粗糙边界的光滑流形，将局部凸空间的开子集替换为具有稠密内部的局部凸子集，并将坐标图替换为粗糙坐标图。

引理 3.5.23. 设 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ 和 M 是一个 C^r-流形；若 $r \neq \omega$，则该流形可以有粗糙边界。若 $N \subseteq M$ 是一个子流形（（若$r \neq \omega$，则是全子流形），且 $\pi_{TN}\colon TN \to N$ 是丛投影，那么 TN 是带边界 $\pi_{TN}^{-1}(\partial N)$（ 的 C^{r-1}- 流形 TM的子流形（相应地，是 TM)的全子流形）。此外，作为子流形的 C^{r-1}-流形结构与 TN作为 N的切丛时所具有的 C^{r-1}-流形结构一致。

证明。 见练习 3.5.10。 □

定义 3.5.24.设 M_1 是一个带粗糙边界的 C^k-流形， M_2 是一个带粗糙边界的 C^ℓ-流形，且 N 是一个带粗糙边界的 $C^{k+\ell}$-流形，其中 $k,\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。我们称映射 f: $M_1\times M_2\to N$是 $C^{k,\ell}$，如果对每个 $x=(x_1,x_2)\in M_1\times M_2$，都存在坐标图 φ_j: $U_j\to V_j$，它是 M_j在x_j附近的坐标图（对应于 $j\in\{1,2\}$），以及一个坐标图 ψ: $U_\psi\to V_\psi$，它是 N的坐标图，使得 $f(U_1\times U_2)\subseteq U_\psi$，且 $\psi\circ f\circ(\varphi_1^{-1}\times\varphi_2^{-1})$: $V_1\times V_2\to V_\psi$是 $C^{k,\ell}$。

每个 $C^{k,\ell}$-映射 f 都是连续的，因为限制 $f|_{U_1\times U_2}$ 是连续的。

注 3.5.25。对于定义 3.5.24，只需 $M_1\times M_2$ 是一个拓扑空间，并且我们有 M_1、 M_2和 N 的图册可用。如果 M_1 和 M_2 都是某个 $r\geq\max\{k,\ell\}$下的 C^r-流形，我们可以将$M_1\times M_2$ 视为一个 C^r-流形；但这并非本处所必需。当然，在大多数应用中， M_1 和 M_2 都是光滑流形。

注 3.5.26。设 k， $\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。对于可能具有粗糙边界的流形，我们有:

(a) 如果 M_1 是一个 C^k-流形， M_2 是一个 C^ℓ-流形， N 是一个 $C^{k+\ell}$-流形，f: $M_1\times M_2\to N$是一个 $C^{k,\ell}$-映射， φ_j: $U_j\to V_j$是 M_j的一个坐标图（针对 $j\in\{1,2\}$），且 ψ: $U_\psi\to V_\psi$是 N的一个坐标图，使得 $f(U_1\times U_2)\subseteq U_\psi$，那么 $\psi\circ f\circ(\varphi_1^{-1}\times\varphi_2^{-1})$ 是 $C^{k,\ell}$。插入定义 3.5.24 中的坐标图后，由命题 1.7.26 和 1.7.28 可得此结论。

命题 1.7.33 蕴含:

(b) 若 M_1、 M_2与 N 为 $C^{k+\ell}$-流形，且 f: $M_1\times M_2\to N$ 为 $C^{k+\ell}$，则 f 为 $C^{k,\ell}$。

(c) 若 M_1 与 M_2 为 C^k-流形， N 为一个 C^{k+k}-流形，且映射 f: $M_1\times M_2\to N$ 为 $C^{k,k}$，则 f 为 C^k。

(d) 若 M_1、 M_2与 N 为光滑流形，则 f: $M_1\times M_2\to N$ 为 C^∞ 当且仅当 f 为 $C^{\infty,\infty}$。

命题 1.7.20 利用 (a) 蕴含:

(e) 若 M_1 为一个 C^k-流形， M_2 为一个 C^ℓ-流形，且 $N=N_1\times\cdots\times N_n$ 为 $C^{k+\ell}$-流形的乘积，则映射 $f=(f_1,\ldots,f_n)$: $M_1\times M_2\to N$ 为 $C^{k,\ell}$ 当且仅当其所有分量 $f_1,\ldots,f_n$ 均为 $C^{k,\ell}$。

在局部坐标图中应用命题 1.7.26 和 1.7.28，我们得到链式法则的以下形式:

命题 3.5.27。设 M_1 是一个 C^k-流形， M_2 是一个 C^ℓ-流形， N 是一个带有 k、$\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 的 $C^{k+\ell}$-流形，可能具有粗糙边界。设 f: $M_1\times M_2\to N$ 是一个 $C^{k+\ell}$-映射。则以下结论成立:

(a) 若 L_1 是带粗糙边界的 C^k-流形， L_2 是带粗糙边界的 C^ℓ-流形， g_1: $L_1\to M_1$ 是一个 C^k-映射，且 g_2: $L_2\to M_2$ 是一个 C^ℓ-映射；则$f\circ(g_1\times g_2)$: $L_1\times L_2\to N$ 是一个 $C^{k,\ell}$- 映射。

(b) 若 L 是带粗糙边界的 $C^{k+\ell}$-流形，且 $g\colon\ N \to L$ 是一个 $C^{k+\ell}$-映射，则 $g \circ f\colon\ M_1 \times M_2 \to L$ 是一个 $C^{k,\,\ell}$- 映射。

注记 3.5.28。我们提到，对于 C^k，可以显而易见地定义以一族 $\mathcal{E}$ 局部凸空间为模型、具有粗糙边界的流形，其中 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，使用带有 $E \in \mathcal{E}$ 的粗糙 E坐标图（参见无边界情形的定义 3.2.13）。同样，也可以用直接明了的方式定义这类空间之间的 C^k- $C^{k,\,\ell}$映射；细节留给读者。类似地，对于光滑流形 M、 N以及不必是纯的、具有粗糙边界的 L，也可以定义 $M \times N \to L$ $C^{k,\,\ell}$映射。若 L 具有粗糙边界，命题 3.3.27(b)仍然成立。

光滑正则性与单位分解

了解给定的光滑流形是否具有足够多的某类光滑函数，可能会很有用。我们简要讨论两个概念：光滑正则性和光滑仿紧性。在这些讨论中，基域为 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。

命题 3.5.29. 对于 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，设 M 是一个以实局部凸空间为模型的 C^r-流形（可能带有粗糙边界）。那么下列陈述等价：

(a) M 上的拓扑是关于 $C^r(M,\mathbb{R})$ 的始拓扑。*(b)* 对每个 $x \in M$ 及其邻域 $U \subseteq M$ （其中 x），都存在一个 C^r-函数 $f\colon\ M \to \mathbb{R}$，使得 $f(x) \neq 0$ 且 $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$。*(c)* 对每个 $x \in M$ 及 x-邻域 $U \subseteq M$，都存在一个 C^r-函数$f\colon\ M \to \mathbb{R}$，使得 $f(M) \subseteq [0,1]$、$\mathrm{supp}(f) \subseteq U$，并且对于某个$x$-邻域 $V \subseteq M$，有 $f|_V = 1$。

证明. (a)⇒(c)：始拓扑中的每个 x-邻域 $U \subseteq M$ 都包含形如 $f_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(V_n)$ 的邻域，其中 $n \in \mathbb{N}$,$f_1, \ldots, f_n \in C^r(M,\mathbb{R})$，且 $f_j(x)$ 是 $V_j \subseteq \mathbb{R}$（其中 $j \in \{1,\ldots,n\}$）的邻域。缩小 V_j 后，我们可以假设存在某个 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $j \in \{1,\ldots,n\}$，都有 $V_j =]f_j(x) - \varepsilon, f_j(x) + \varepsilon[$。于是 $g := 1 + \sum_{j=1}^n (f_j - f_j(p))^2 \in C^r(M,\mathbb{R})$ 满足对所有 $y \in M$， $g(y) \geq 1$，且 $g(x) = 1$，以及 $g^{-1}([1, 1+\varepsilon^2[) \subseteq U$。若 $h\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，使得对于某个 1-邻域内的 t，有 $h(t) = 1$，且 $h(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$、$\mathrm{supp}(h) \subseteq]-\infty, 1+\varepsilon^2[$，那么 $f := h \circ g$ 在某个 x-邻域上恒为 1，$\mathrm{supp}(f) \subseteq U$，且 $f(M) \subseteq [0,1]$。

推论“(c)⇒(b)”和“(b)⇒(a)”是平凡的。 □

定义 3.5.30。如果 M 满足命题 3.5.29 的等价条件 (a)–(c)，那么 M 称为 C^r-正则 流形（如果 $r = \infty$，也称为光滑正则）。(b) 中的函数称为鼓包函数；(c) 中的函数称为截断函数。

命题 3.5.31。 设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是一个以实局部凸空间 E为模型的 C^r-流形(可能带有粗糙边界) 。如果 M 是正则拓扑空间，且 E 是 C^r-正则的，那么 M 是 C^r-正则的。值得注意的是，每个带粗糙边界的局部紧 C^r-流形都是 C^r-正则的。

证明。设 $x \in M$和 $U \subseteq M$是一个开 x-邻域。缩小 U后，我们可以假设 U 是 M在 x附近的坐标图 $\varphi\colon U \to V \subseteq E$ 的定义域。由于 M是正则的，存在一个在 M中闭的 x-邻域 $A \subseteq U$。于是 $\varphi(A)$是一个 x-邻域，并包含一个相对开x-邻域 $Q \subseteq V$。因此，对于 E中的某个开 x-邻域 P，有 $Q = V \cap P$。根据命题 3.5.29(b)，存在 $f \in C^r(E,\mathbb{R})$，使得 $f(x) \neq 0$且 $\operatorname{supp}(f) \subseteq P$。因此 $\operatorname{supp}(f) \cap V \subseteq Q \subseteq \varphi(A)$。我们分段定义函数$g\colon M \to \mathbb{R}$：对于开集 $M \setminus A$ 中的 y，令 $g(y) := 0$；对于 $y \in U$，令 $g(y) := f(\varphi(y))$。那么 g是 C^r，$g(x) \neq 0$ 且 $\operatorname{supp}(g) \subseteq A \subseteq U$。因此 M 满足命题 3.5.29 的条件（b）。如果 M 是局部紧的，那么 M是正则的（见命题 A.5.4），其建模空间 E 是局部紧的，因此 E 是有限维的。于是 E 是 C^r-正则的（因为对于某个n，有 $E \cong \mathbb{R}^n$，并且这是一个经典事实：$\mathbb{R}^n$ 存在光滑截断函数）。□

C^r-正则性在有限直积和子流形中得以继承。

定义 3.5.32。 设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是一个以实局部凸空间为模型的 C^r-流形（其边界可以是粗糙的）。M 上的一个 C^r-单位分解 是一个由 C^r-函数 $h_j\colon M \to \mathbb{R}$ 组成的族 $(h_j)_{j\in J}$，满足

(a) 对所有 $j \in J$，$h_j(M) \subseteq [0,1]$；(b) 支集族 $(\operatorname{supp}(h_j))_{j\in J}$ 局部有限；并且 (c) 对每个 $x \in M$，都有 $\sum_{j\in J} h_j(x) = 1$。

如果对每个 $j \in J$，都存在 $i \in I$ 使得 $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_i$，我们就称 $(h_j)_{j\in J}$ 从属于 M 的开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$。如果对 M的每个开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$，都存在一个从属于该覆盖的 C^r-单位分解，我们就称 M 是 C^r-仿紧的。如果 M 是具有 $r = \infty$的 C^r-仿紧空间，我们也称 M 为光滑仿紧。

由 (b)，每个 $x \in M$ 都有一个邻域 W，使得 M 满足

$$J_0 := \{j \in J\colon \operatorname{supp}(h_j) \cap W \neq \emptyset\}$$

是有限的。因此，对于所有 $y \in W$，$\sum_{j\in J_0} h_j(y) = 1$，而 $\sum_{j\in J} h_j(y)$ 中所有其他直和项均为零。

注 3.5.33。注意，每个 C^k-仿紧 C^r-流形都是仿紧的。事实上，对于开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$ 以及从属于该覆盖的 C^r- 单位分解 $(h_j)_{j\in J}$，原像 $h_j^{-1}(]0,\ \infty[)$ 构成一个从属于 $(U_i)_{i\in I}$的局部有限开覆盖。

命题 3.5.34. 每个带有粗糙边界的局部紧、仿紧光滑流形 M都是光滑仿紧的。

证明。设 $(U_i)_{i\in I}$ 是 M 的一个开覆盖。

步骤 1. 若 M 是 σ-紧的，令 L_n 和 O_n 如引理 A.5.5 所述，并应用于 $A := X := M$。对于每个 $x \in X$，存在 $i(x) \in I$，使得 $x \in U_{i(x)}$。若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $x \in L_n$，则命题 3.5.31 给出一个光滑函数 $g_{n,x} \in C_c^\infty(M, \mathbb{R})$，使得 $g_{n,x}(M) \subseteq [0,1]$，$\operatorname{supp}(g_{n,x}) \subseteq U_{i(x)} \cap O_n$ 且 $g_{n,x}(x) = 1$。对于 $x \in L_n$，集合 $g_{n,x}^{-1}(]0,\infty[)$ 构成 L_n 在 O_n 中的开覆盖。由 L_n 的紧致性，我们可以找到一个有限子集 $\Phi_n \subseteq L_n$，使得

$$L_n \subseteq \bigcup_{x\in\Phi_n} g_{n,x}^{-1}(]0,\infty[). \tag{3.25}$$

我们定义 $J := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times \Phi_n$。那么 $(\operatorname{supp}(g_{n,x}))_{(n,x)\in J}$ 是一个局部有限族（参见引理 A.5.6 的证明），由此可知

$$g\colon M \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sum_{(n,x)\in J} g_{n,x}(y)$$

在每个点的某个邻域上都是有限和，因此是光滑的。由 (3.25) 可得，对所有 $x \in M$，$g(x) > 0$。于是，$h_n, x(y) := g_n, x(y)/g(y) \in [0,1]$，对所有 $y \in M$ 都成立；并且 $h_n, x\colon M \to \mathbb{R}$ 对所有 $(n, x) \in J$ 都是光滑函数。对所有 $y \in M$，我们有 $\sum(n, x)\in J h_n, x(y) = \frac{1}{g(y)} \sum(n, x)\in J g_n, x(y) = \frac{1}{g(y)} g(y) = 1$。

步骤 2。一般而言，M 是由一族 $(M_a)_{a\in A}$ 的 σ-紧开子集 $M_a \subseteq M$ 之并组成的（见命题 A.5.8）。由步骤 1，M_a 是光滑抛物紧的，因此存在一个光滑单位分解 $(h_{a,b})_{b\in B_a}$ 定义在 M_a 上，且从属于 $(U_i \cap M_a)_{i\in I}$。令 $g_{a,b}\colon M \to \mathbb{R}$ 为 $h_{a,n}$ 的零延拓。定义 $J := \bigcup_{a\in A} \{a\} \times B_a$。那么 $(g_j)_{j\in J}$ 是 M 上从属于 $(U_i)_{i\in I}$ 的光滑单位分解。□

命题 3.5.35。设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是一个 C^r-流形（可能带有粗糙边界）。则有以下结论：

（a）M 的每个连通分支都是开集。（b）若 M 局部紧，则 M 仿紧，当且仅当它的所有连通分支都是 σ-紧的。

证明。（a）对于每个 $x \in M$，都存在一个坐标图 $\varphi\colon U \to V \subseteq E$。集合 V 局部凸；将 V 缩小后，可假设 V 是凸的，因而道路连通。因此 $U = \varphi^{-1}(V)$ 也是道路连通的，进而是连通的。由此可知，对于 M 的每个点，其所在的每个连通分支 C 都是 M 中的一个邻域。因此 C 在 M 中是开集。

(b) 若每个连通分支都是 σ紧的，则根据命题 A.5.8，M 是仿紧的。若 M 是仿紧的，则 M 是由一族 $M_j{}_{j\in J}$ 两两不交的开子集 $M_j \subseteq M$ 构成的并，而这些开子集都是 σ紧的（见命题 A.5.8）。C 的每个连通分支都包含于某个 M_j中。由于 C 在 M 中是闭的，因而在 M_j中也是闭的，我们由此推得 C 是σ紧的。□

第3.5节练习

习题 3.5.1. 设 M 和 N 是带粗糙边界的 C^r流形。证明，$\partial(M \times N)$是$(\partial M) \times N$与 $M \times(\partial N)$的并。

习题 3.5.2.证明，每个有限维带边界 C^r流形也是带角 C^r流形。

习题 3.5.3. 设 M 和 N 是有限维带边界 C^r流形。证明， $M \times N$ 是带角 C^r流形。若 $\partial N = \emptyset$，证明 $M \times N$ 是带边界 C^r流形。

习题 3.5.4. 设 $f\colon M \to N$ 是 $r \geq 1$之间的一个 C^r微分同胚，其中 C^r是粗糙边界流形。证明 $f(\partial M) = \partial N$。

习题 3.5.5. 证明 $\partial(TM) = (\pi_{TM})^{-1}(\partial M)$。

习题 3.5.6. 设 M 是一个以局部凸空间 E 为模型、带粗糙边界的 C^r-流形。设 $F \subseteq E$ 是闭向量子空间， $N \subseteq M$ 是子集，且 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ of M 是 M 的坐标图，使得

$$\varphi(U_\varphi \cap N) = V_\varphi \cap F.$$

证明 $(V_\varphi \cap F) \cap \partial(V_\varphi \cap F) \subseteq V_\varphi \cap \partial V_\varphi$，其中左侧的边界是相对于 F 形成的。

[若 $x \in (V_\varphi \cap F) \cap \partial(V_\varphi \cap F)$，则 $x \in V_\varphi$。对于每个 x-邻域 $U \subseteq E$，相对于 F 的 x-邻域 $U \cap F$ 都包含一个元素 $y \in F \setminus (V_\varphi \cap F)$。于是 $y \notin V_\varphi$ 且 $y \in U$，从而 $x \in \partial V_\varphi$。]

习题 3.5.7. 设 M 是一个带粗糙边界的 C^r-流形， $N \subseteq M$ 是一个子流形。利用习题 3.5.6，证明 $\partial N \subseteq \partial M$。证明 ∂N 可以是 $N \cap \partial M$ 的真子集。

习题 3.5.8. 设 M 和 N 是定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的解析流形，分别以局部凸空间 E 和 F 为模型。设 $f\colon M \to N$ 是一个解析映射。证明， f 的图是解析流形 $M \times N$ 的子流形，其模型空间为 $E \times \{0\}$。

习题 3.5.9 设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，$C^k$ 给定，$f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$，$x \mapsto x^2$。我们考虑 C^k-映射 $G = \operatorname{graph}(f)$。证明：$G$ 不是带边 C^k-流形 $H := \mathbb{R} \times [0, \infty[$ 的子流形，方法如下：反设我们可以找到一个粗糙的 $\mathbb{R}^2$-坐标图 $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^2$，其属于 H，使得 $(0,0) \in U$ 且

$$\varphi(U \cap G) = V \cap F$$

对某个向量子空间 $F \subseteq \mathbb{R}^2$ 成立；我们将导出矛盾。经过值域中的一次平移后，不妨设 $\varphi(0,0) = (0,0)$。

(a) G 不是 $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ 中的 $(0,\ 0)$-邻域；推导出 $F \neq \mathbb{R}^2$。证明 $F \neq \{0\}$；因此 F 的维数为 1。在值域中进行旋转后，不妨设 $F = \mathbb{R} \times \{0\}$。

(b) 不妨设 $U =]-r,\ r[\times[0,r[$，其中 $r \in]0,\ 1]$，因为 U 包含这样的子集，并且该子集是一个相对开 $(0,\ 0)$-邻域。由于 V 是局部凸的，它包含一个凸的 $(0,\ 0)$-邻域 C，且该邻域在 V 中是相对开的。因此 $G \cap U = \{(x,\ x^2)\colon\ x \in]-r,\ r[\}$ 是连通的。因此 $V \cap F$ 是 $F = \mathbb{R} \times \{0\} \sim \mathbb{R}$ 的连通子集，因而可写成 $I \times \{0\}$，其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个包含 0 的区间。由于 $(G \cap U) \setminus \{(0,\ 0)\}$ 有两个连通分支，$I \setminus \{0\}$ 也有两个连通分支。因此，我们可以找到一个实数 $t > 0$ 使得 $[-t,t] \subseteq I$；缩小 t 后，不妨设 $[-t,t] \times \{0\} \subseteq C$。

(c) 对某些 $x, y \in]-r,r[\setminus\{0\}$，有 $t = \varphi(x,x^2)$ 和 $-t = \varphi(y,y^2)$。因此，(x,x^2) 和 (y,y^2) 属于开子集 $]-r,r[\times]0,r[$。若 $k \geq 1$，则 φ 是 C^k（因为 id_H 也是 H 的一个坐标图）；利用反函数定理（若 $k = 0$，也可利用区域不变性定理），证明 V（因而 C 也）是 $\mathbb{R}^2$ 中 $(-t,0)$ 和 $(t,0)$ 的一个邻域。因此，我们找到 $\varepsilon > 0$ 使得

$$(-t,\varepsilon), (-t,-\varepsilon), (t,\varepsilon), (t,-\varepsilon) \in C.$$

利用 C 的凸性，推出 $[-t,t] \times [-\varepsilon,\varepsilon] \subseteq C \subseteq V$。

(d) 利用反函数定理（或区域不变性定理），推出 $U = \varphi^{-1}(V)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中 $(0,0)$ 的一个邻域。这与 $U =]-r,r[\times[0,r[$ 矛盾；因此 φ 不可能存在。

(e) 利用更为复杂的论证，对 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 可以证明 $\{(x,\ x^2)\colon\ x \in [0,\infty[\}$ 不是将 $[0,\infty[^2$ 视为带粗糙边界的 C^k-流形时的子流形（参见 [Gl21b]）。证明

$$\{(x,x^2)\colon x \in [0,\infty[\}$$

是将 $[0,\infty[^2$ 视为带粗糙边界的 C^0-流形时的子流形。

练习 3.5.10。证明引理 3.5.23。

习题 3.5.11。设 $r = \infty$ 处于习题 3.4.1 的情形，并假设 N 是光滑正则的。证明 X 与 Y 是 f-相关的，当且仅当对每个 $\gamma \in C^\infty$ 有 $(Y.\gamma)\circ f = X.(\gamma\circ f)$（$N,\ \mathbb{R}$）。

练习 3.5.12。(a) 利用分析学中的事实，证明 $\mathbb{R}^n$ 是光滑正则的。(b) Let $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ be a real Hilbert space. Show that $\mathcal{H}$ is smoothly regular.

[提示：映射 $q\colon\ \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $q(x) := \|x\|^2 := \langle x,x\rangle$ 是光滑的。](c)（b）部分可以进一步推广：如果 E 是一个实局部凸空间，其向量拓扑由一组半范数 $\mathcal{P}$ 定义，满足 $p\ x\ = \sqrt{\langle x\ x\rangle_p}$ $\langle\cdot\ \cdot\rangle_p\ \ E\times E \to \mathbb{R}$：$E\ \to\ \mathbb{R}$ 使得（），对于 E 上的一个正半定对称双线性形式，：（p 是希尔伯特半范数），那么 E 具有光滑凸起函数，因为可以将（b）中的论证应用于预希尔伯特空间 $E_p := E/N_p$，并且对于每个光滑映射 f：$E_p \to \mathbb{R}$（其中 N_p 和 α_p：$E \to E_p$, $\alpha_p(x) := x + N_p$ 如附录 B 第 B.4.2 节所述），$f \circ \alpha_p$：$E \to \mathbb{R}$ 都是光滑的。

所有“核”局部凸空间都具有 (c) 中描述的性质，因此许多与分析学相关的非巴拿赫空间也具有这一性质（参见例如 [Pi72] 和 [Tr67]）。

习题 3.5.13。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是一个 C^k-流形（可能带有粗糙边界），且为 C^k-正则。证明：如果 $K \subseteq M$ 是一个紧子集，$U \subseteq M$ 是一个开子集，并且 $K \subseteq U$，则存在一个 C^k- 函数 $h\colon\ M \to [0,1]$，使得

$\operatorname{supp}(h) \subseteq U$，并且对于某个满足 $K \subseteq W$ 的开子集 $W \subseteq M$，有 $h|_W = 1$。[令 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 单调递增且 C^k，其中 $g(t) = 0$ 对所有 $t \leq 0$ 都成立，并且 $g(t) = 1$ 对所有 $t \geq 1/2$ 都成立。对于 $z \in K$，令 $h_z \in C^k(M, \mathbb{R})$ 满足 $h_z(z) = 1$ 且 $\operatorname{supp}(h_z) \subseteq U$。那么，对某个有限子集 $\Phi \subseteq K$，有 $K \subseteq \bigcup_{z\in\Phi} h_z^{-1}(]1/2, \infty[)$。设 $h(x) := g(\sum_{z\in\Phi} h_z(x))$。]

3.6 微分形式

微分形式在本书中发挥着重要作用：它们既可以是李群上的微分形式，也可以是某些李群作用其上的流形上的微分形式。本节将介绍一种处理以局部凸空间为模型的流形上的微分形式的自然方法。与有限维情形相比，主要区别在于：微分形式在局部坐标图中没有自然的坐标描述；此外，一般的局部凸流形上也无法使用光滑单位分解。因此，进行局部化论证时必须谨慎（即使是在巴拿赫流形的情形下）。

如上所示，对于每个光滑流形 M，其上的光滑向量场空间 $\mathcal{V}(M)$ 自然具有李代数结构。我们将在下文看到，每个取值于局部凸空间 E 的光滑 p-形式 $\omega \in \Omega^p(M, E)$ 都会导出一个交错的 p-线性映射

$$\mathcal{V}(M)^p \to C^\infty(M, E), \quad (X_1, \ldots, X_p) \mapsto \omega(X_1, \ldots, X_p).$$

如果 M 具有这样的性质：每个切向量都能延拓为一个光滑向量场（局部总是如此），那么这就会导出一个包含映射，将 $\Omega^p(M, E)$ 映入 $\mathcal{V}(M)$ 的李代数余链空间，其中余链取值于 $\mathcal{V}(M)$-模 $C^\infty(M, E)$。我们将以一种使其与前述对应下的李代数微分（如定义 3.9.1 所述）相对应的方式，定义微分形式上的外导数。全书将始终运用微分形式与李代数上同调之间的联系。在本节中，我们利用这一联系，将关于几何对象（微分形式、李导数和外导数）的断言化简为关于李代数上链的简单断言；后者的证明纯属形式推演。需要时，可在附录 3.8 中快速查阅这些证明。

约定。虽然我们主要关注实数情形，但本节中我们也可以在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上进行讨论。所有流形都是以局部凸 $\mathbb{K}$-向量空间为模型的光滑流形，可以带有（粗糙）边界，也可以不带边界。

定义 3.6.1。如果 M 是一个光滑流形，且 E 是一个局部凸空间，那么定义在 M 上的 E值 p形式 ω 是一个函数 ω，它为每个$x \in M$关联一个 k线性交错映射 $\omega_x\colon T_x(M)^p \to E$，并且在局部坐标图中，映射（$x$，$v_1$，……，$v_p$）$\mapsto \omega_x$（$v_1$，……，$v_p$）是光滑的。更明确地说，我们要求映射$\omega_\varphi\colon V \times Z^p \to E$是光滑的，

$$\omega_\varphi(x, v_1, \dots, v_p) := \omega_{\varphi^{-1}(x)}(T_x\varphi^{-1}(v_1), \dots, T_x\varphi^{-1}(v_p)) \tag{3.26}$$

对于 M的每个坐标图 $\varphi\colon U \to V$都成立，其中 Z是 M的建模空间。我们将 $\Omega^p(M, E)$记作定义在 M上的 E值 p形式空间，并将$\Omega^0(M, E)$与空间 $C^\infty(M, E)$等同，后者是定义在 M上的光滑 E值函数空间。

注 3.6.2. 我们将主要处理满足 $p \in \{0, 1, 2\}$的 p-形式。如前所述，E值0-形式不过是 M上的光滑 E值函数。1-形式的典型例子来自光滑 E值函数 f 的微分：$M \to E$。对任何这样的函数，$\omega_x := df|_{T_xM}$ 定义了一个光滑 E值1-形式 ω，其中 $df\colon TM \to E$ 如定义 3.3.19 所述（我们将在下面的注 3.6.12 中回到这个例子）。二阶及更高阶微分形式的典型例子作为较低阶微分形式的楔积出现，我们现在来定义它们。

定义 3.6.3. 设 E_1, E_2, E_3 为局部凸空间，且

$$\beta\colon E_1 \times E_2 \to E_3$$

是一个连续双线性映射。给定 $p, q \in \mathbb{N}_0$，设 S_{p+q} 为 $\{1, \dots, p+q\}$的所有排列构成的对称群。我们通过$(\omega \wedge \eta)_x := \omega_x \wedge \eta_x$来定义 $\omega \in \Omega^p(M, E_1)$与 $\eta \in \Omega^q(M, E_2)$的楔积$\omega \wedge \eta \in \Omega^{p+q}(M, E_3)$，其中

$$\begin{aligned}&(\omega_x \wedge \eta_x)(v_1, \dots, v_{p+q})\\ &:= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\beta\big(\omega_x(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}), \eta_x(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})\big)\end{aligned}$$

在 $v_1, \dots, v_{p+q} \in T_xM$ 中是交错的（参见习题 3.6.1）。

Then

$$\Omega^p(M, E_1) \times \Omega^q(M, E_2) \to \Omega^{p+q}(M, E_3), \quad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$$

是一个双线性映射。对于 $p = q = 1$，我们只需

$$(\omega \wedge \eta)_x(v_1, v_2) = \beta(\omega_x(v_1), \eta_x(v_2)) - \beta(\omega_x(v_2), \eta_x(v_1)).$$

注 3.6.4。楔积尤其用于以下重要情形：

(a) $\beta\colon \mathbb{K} \times E \to E$ 是 E上的数乘。(b) $\beta\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是结合局部凸拓扑代数的乘法映射。(c) $\beta\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是局部凸拓扑李代数的李括号。在这种情况下，我们也记作 $[\omega, \eta] := \omega \wedge \eta$。

注 3.6.5。我们可以将一个取值于 $\mathbb{K}$的 0-形式解释为一个光滑函数f: $M \to \mathbb{K}$。若 β: $\mathbb{K} \times E \to E$是数乘，则 f与一个 p-形式 $\omega \in \Omega^p(M,E)$的楔积由$(f \wedge \omega)_x = f(x)\omega_x$给出，这里使用的是 $\mathrm{Alt}^p(T_xM,E)$中的数乘。在这种情况下，我们简单地记作 $f\omega := f \wedge \omega$，并注意到 $\Omega^p(M,E)$由此成为一个 $C^\infty(M,\mathbb{K})$-模。若进一步有 $E = \mathbb{K}$，那么两个取值于 $\mathbb{K}$的 0-形式（解释为取值于 $\mathbb{K}$的函数）的楔积由逐点数乘给出，即$(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$，因此与结合代数 $C^\infty(M,\mathbb{K})$中的乘积一致。

我们指出，微分形式的楔积可以有多种彼此一致的定义（有限维情形中也是如此）。这里我们采用 Lang 的约定，这种约定尤其自然（关于这一点的进一步讨论，见 [La99，注 V.3 定义之前。3] ）。

定义 3.6.6。相对于光滑映射 φ: $N \to M$， $\omega \in \Omega^p(M,E)$ 的拉回 $\varphi^*\omega$ 是 $\Omega^p(N,E)$ 上定义的光滑 p-形式，具体定义为 $(\varphi^*\omega)_x := (T_x\varphi)^*\omega_{\varphi(x)}$，即:

$$(\varphi^*\omega)_x(v_1,\dots,v_p) := \omega_{\varphi(x)}(T_x\varphi(v_1),\dots,T_x\varphi(v_p)).$$

注意，链式法则蕴含

$$\mathrm{id}_M^*\,\omega = \omega \quad \text{and} \quad \varphi_1^*(\varphi_2^*\omega) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)^*\omega \tag{3.27}$$

对光滑映射的复合成立。此外，

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta \tag{3.28}$$

由定义可直接得出。对于 $f = \omega \in \Omega^0(M,E)$，我们只需令$\varphi^* f = f \circ \varphi$。

外微分的定义

$$d\colon \Omega^p(M,E) \to \Omega^{p+1}(M,E)$$

比有限维中的定义略微复杂一些。我们采用以下记号：给定开子集 $\omega \in \Omega^p(M,\ E)$ 上的向量场 X_1，……，$X_p \in \mathcal{V}(U)$，我们定义一个光滑映射 $\omega(X_1$，……，$X_p)$: $U \to E$，其定义为

$$\omega(X_1,\dots,X_p)(x) := \omega_x(X_1(x),\dots,X_p(x)).$$

命题 3.6.7。对于 $\omega \in \Omega^p(M,E)$、$x \in M$和 v_0，……，$v_p \in T_x(M)$，我们选取定义在 x 的某个邻域上的光滑向量场 X_i，使得$X_i(x) = v_i$。则

$$\begin{aligned}(d\omega)_x(v_0,\dots,v_p) := &\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(X_i.\omega(X_0,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_p)\big)(x)\\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_p)(x)\end{aligned} \tag{3.29}$$

它不依赖于向量场 X_i 的选取，并定义了一个$(p+1)$-形式$d\omega \in \Omega^{p+1}(M, E)$。

注 3.6.8. 通常，hat $\widehat{\ }$ 表示相应的项需要省略。微分的定义经过专门设计，使得对于 $X_0, \dots, X_p \in \mathcal{V}(M)$，我们有

$$(d\omega)(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i.\omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_p).$$

命题的证明3.6.7. 我们需要验证 (3.29) 的右端不依赖于向量场 X_k 的选取，并且关于 v_k 是交错的。首先证明 $d\omega$ 不依赖于向量场 X_k 的选取，这相当于证明：若一个向量场 X_k 在 x 处为零，则 (3.29) 的右端也为零。[6]

假设 $X_k(x) = 0$。那么 x 中唯一不显然为零的项是

$$\sum_{i \neq k}^{p} (-1)^i \big(X_i.\omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p)\big)(x), \tag{3.30}$$

$$\sum_{i<k} (-1)^{i+k} \omega([X_i, X_k], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_p)(x), \quad \text{and} \tag{3.31}$$

$$\sum_{k<i} (-1)^{i+k} \omega([X_k, X_i], X_0, \dots, \widehat{X_k}, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p)(x). \tag{3.32}$$

在局部坐标图中，我们有

$$\begin{aligned} &\big(X_i.\omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p)\big)(x) \\ &\quad = (d_1\omega)(x, X_i(x))(X_1(x), \dots, \widehat{X_i}(x), \dots, X_p(x)) \\ &\qquad + \sum_{j<i} \omega_x(X_0(x), \dots, dX_j(x)X_i(x), \dots, \widehat{X_i}(x), \dots, X_p(x)) \\ &\qquad + \sum_{j>i} \omega_x(X_0(x), \dots, \widehat{X_i}(x), \dots, dX_j(x)X_i(x), \dots, X_p(x)). \end{aligned}$$

这里，我们将 ω 解释为 $p+1$ 个变量的光滑函数（如3.26中所述）；偏微分 $d_1\omega$ 中的微分方向已写成第二个变量，以便于阅读（另见习题3.6.3）。对于固定的 $i > k$，假设 $X_k(x) = 0$ 意味着只有该项

[6] 事实上，若 $Y_1, \dots, Y_p$ 也是满足 $Y_k(x) = v_k$ 的向量场，我们只需证明：对于 $k = 1, .., p$，用 $X_1, .., X_k, Y_{k+1}, .., Y_p$ 计算 (3.29) 右端所得的表达式，与用 $X_1, .., X_{k-1}, Y_k, .., Y_p$ 计算所得的同一表达式之差为零。

$$\omega_x(X_0(x),\dots,dX_k(x)X_i(x),\dots,\widehat{X}_i(x),\dots,X_p(x))$$

有贡献。鉴于 $X_k(x)=0$，我们有

$$dX_k(x)X_i(x)=dX_k(x)X_i(x)-dX_i(x)X_k(x)=[X_i,X_k](x).$$

这便得到

$$\begin{aligned}&\omega_x(X_0(x),\dots,dX_k(x)X_i(x),\dots,\widehat{X}_i(x),\dots,X_p(x))\\&\quad=-(-1)^k\omega([X_k,X_i],X_0,\dots,\widehat{X}_k,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_p)(x),\end{aligned}$$

因此，(3.30) 和 (3.32) 中的对应项相互抵消；对于 $i<k$，(3.30) 和 (3.31) 中的项也同样如此。这证明 $d\omega$ 由 (3.29) 良好定义。

为说明我们得到一个光滑的 $(p+1)$-形式，我们使用一个局部坐标图，并选取向量场 X_i 作为常向量场。于是

$$(d\omega)_x(v_0,\dots,v_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(d_1\omega)(x,v_i)(v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_p)\qquad(3.33)$$

是 $(x,\ v_0,\ \dots,\ v_p)$ 的光滑函数。

还需证明 $(d\omega)_x$ 是交错的。为此，假设 $v_i=v_j$ 对某个 $i<j$ 成立。由于每个映射 $(d_1\omega)(x,\ v)$ 都是交错的，(3.33) 蕴含

$$\begin{aligned}&(d\omega)_x(v_0,v_1,\dots,v_p)\\&=(-1)^i(d_1\omega)(x,v_i)(v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_p)\\&\qquad+(-1)^j(d_1\omega)(x,v_j)(v_0,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_p)\\&=(-1)^i(d_1\omega)(x,v_i)(v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_p)\\&\qquad-(-1)^i(d_1\omega)(x,v_i)(v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_p)\\&=0.\end{aligned}$$

因此，$(d\omega)_x$ 是交错的，证明完毕。 □

命题 3.6.9。对于每个 $\omega\in\Omega^p(M,E)$，我们有 $d^2\omega:=d(d\omega)=0$。

证明。显然，只需验证 M 具有整体坐标图的情形，因为 M 被开坐标图域覆盖。每个 p-形式 $\omega\in\Omega^p(M,\ E)$ 定义了一个交错 p-线性映射

$$\omega_{\mathfrak{g}}\colon\mathcal{V}(M)^p\to C^\infty(M,E)\quad(X_1,\dots,X_p)\mapsto\omega(X_1,\dots,X_p)\,.\qquad(3.34)$$

因此，$\omega_{\mathfrak{g}}$ 是李代数 $\mathfrak{g}:=\mathcal{V}(M)$ 的一个 p-上链，其取值于 $\mathcal{V}(M)$-模 $C^\infty(M,E)$，其中模结构是由 $X.f:=df\circ X$ 给出的自然结构。通过在整体坐标图中对常向量场取值来考察 p-形式，可见映射 $\omega\mapsto\omega_{\mathfrak{g}}$ 是单射。根据 d 的定义，我们有 $d_{\mathfrak{g}}\omega_{\mathfrak{g}}=(d\omega)_{\mathfrak{g}}$（见注 3.6.8）。现在，由附录 3.8 中的引理 3.9.2(4)，$(d^2\omega)_{\mathfrak{g}}=d_{\mathfrak{g}}^2\omega_{\mathfrak{g}}=0$，从而得到 $d^2\omega=0$。□

注 3.6.10。 验证 $d^2\omega = 0$ 的另一种方法是利用公式 (3.33) 在局部坐标图中直接计算。然后，由 ω 的二阶导数的对称性（定理 1.3.17），可轻易推出 $d^2\omega = 0$ ；参见习题 3.6.5。

定义 3.6.11。将 d 扩展为该空间上的线性自映射

$$\Omega(M,E) := \bigoplus_{p\in\mathbb{N}_0} \Omega^p(M,E)$$

上所有取值于 E 的微分形式，关系 $d^2 = 0$ 意味着该空间

$$Z^p_{\mathrm{dR}}(M,E) := \ker(d|_{\Omega^p(M,E)})$$

闭形式 包含空间 $B^p{}_{\mathrm{dR}}(M,E) := d(\Omega^{p-1}(M,E))$ 中的恰当形式 （其中 $B^0_{\mathrm{dR}}(M,E) := \{0\}$），因此可以定义 E 值德拉姆上同调空间

$$H^p_{\mathrm{dR}}(M,E) := Z^p_{\mathrm{dR}}(M,E)/B^p_{\mathrm{dR}}(M,E)$$

可以定义。

注 3.6.12。 将光滑函数 $f\colon M \to E$ 视为 0 次微分形式，我们可以构造其外微分 $df \in \Omega^1(M,E)$。

(a) 于是外微分 df是由$(df)_x = df|_{TxM}$给出的1-形式（如注3.6.2中已遇到的），其中右端的 $df\colon TM \to E$ 是 f的微分，如定义3.3.19所引入。[7](b) 由于 M 是局部凸的， df 为零意味着函数 f是局部常值的。因此 $Z^0_{\mathrm{dR}}(M,E) \cong H^0_{\mathrm{dR}}(M,E)$是 M上的局部常值函数空间。若 M 有 d 个连通分支，则$H^0_{\mathrm{dR}}(M,E) \cong E^d$。

引理 3.6.13. 若 $\varphi\colon N \to M$是光滑映射，且 $\omega \in \Omega^p(M,E)$，则$d(\varphi^*\omega) = \varphi^* d\omega.$

证明。 首先我们假设 φ是微分同胚。设 $X_0,\dots,X_p \in \mathcal{V}(N)$，并定义 $Y_0,\dots,Y_p \in \mathcal{V}(M)$为 $Y_i(\varphi(x)) := T_x\varphi(X_i(x))$，使得 $Y_i \circ \varphi = T\varphi \circ X_i$。则由引理 3.4.17，对所有 $i, j \in \{0,\dots,p\}$有 $[Y_i,Y_j]\circ\varphi = T\varphi\circ[X_i,X_j]$。此外，我们有

$$\varphi^*(\omega(Y_0,\dots,\widehat{Y_i},\dots,Y_p)) = (\varphi^*\omega)(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_p).$$

对于每个定义在 M 上的光滑函数 f，我们还有如下关系

$$\varphi^*(Y_i.f)(x) = df_{\varphi(x)}(Y_i(\varphi(x))) = df_{\varphi(x)}(T_x(\varphi)X_i(x)) = (X_i.(\varphi^*f))(x)$$

（另见习题 3.4.1(a)），因此结合 (3.29) 可得

$$\varphi^*(d\omega)(X_0,\dots,X_p) = d(\varphi^*\omega)(X_0,\dots,X_p).$$

[7] 符号“*df*”的多次使用不会造成混淆。

由于这一关系在 M、分别在 N 的每个开子集上也成立，我们得出 $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$。上述论证尤其适用于由坐标图定义的局部微分同胚。

为完成一般情形的证明，现在不失一般性地假设 M 和 N 是局部凸空间的开子集（若为粗糙边界流形，则是具有稠密内部的局部凸子集）。由 (3.33)，于是有

$$(d\omega)_y(v_0,\dots,v_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(d_1\omega(y,v_i))(v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_p)$$

对所有 $y\in M$都成立，因此对 $x\in N$，

$$\begin{aligned}&(\varphi^*(d\omega))_x(v_0,\dots,v_p)\\&\quad=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(d_1\omega(\varphi(x),d\varphi(x)v_i))(d\varphi(x)v_0,\dots,d\varphi(x)\widehat{v_i},\dots,d\varphi(x)v_p).\end{aligned}$$

另一方面，链式法则给出

$$\begin{aligned}&(d(\varphi^*\omega))_x(v_0,\dots,v_p)\\&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(d_1\omega(\varphi(x),d\varphi(x)v_i))(d\varphi(x)v_0,\dots,d\varphi(x)\widehat{v_i},\dots,d\varphi(x)v_p)\\&\quad+\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sum_{j<i}\omega_{\varphi(x)}(d\varphi(x)v_0,\dots,d^{(2)}\varphi(x,v_j,v_i),\dots,d\varphi(x)\widehat{v_i},\dots,d\varphi(x)v_p)\\&\quad+\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sum_{j>i}\omega_{\varphi(x)}(d\varphi(x)v_0,\dots,d\varphi(x)\widehat{v_i},\dots,d^{(2)}\varphi(x,v_j,v_i),\dots,d\varphi(x)v_p)\\&=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\big(d_1\omega(\varphi(x),d\varphi(x)v_i)\big)(d\varphi(x)v_0,\dots,d\varphi(x)\widehat{v_i},\dots,d\varphi(x)v_p),\end{aligned}$$

其中，倒数第二行中的各项与其前一行中的项因双线性映射 $d^{(2)}\varphi(x,\ \cdot)$ 的对称性而相互抵消（命题 1.3.17）。由此得证。□

现在，对于任意光滑流形 M 和局部凸空间 E，我们定义李代数 $\mathcal{V}(M)$ 在空间 $\Omega^p(M,\ E)$ 上的一个自然表示，该空间由取值于 E 的 p-形式构成，而此表示由李导数给出。

定义 3.6.14. 对于 $Y\in\mathcal{V}(M)$ 和 $\omega\in\Omega^p(M,E)$，我们通过以下方式定义李导数 $\mathcal{L}_Y\omega\in\Omega^p(M,E)$:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}_Y\omega)_x(v_1,\dots,v_p)\\
&=(Y.\omega(X_1,\dots,X_p))(x)-\sum_{j=1}^{p}\omega(X_1,\dots,[Y,X_j],\dots,X_p)(x) \qquad (3.35)\\
&=Y.\omega(X_1,\dots,X_p)(x)+\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\omega([Y,X_j],X_1,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_p)(x),
\end{aligned}
$$

其中 $X_1,\dots,X_p$ 是定义在 x 的某个开邻域上的光滑向量场，使得 $X_i(x)=v_i$。

为说明右端不依赖于向量场 X_i 的选取，设 $X_i(x)=0$，其中 i。在局部坐标图中，对 x 中的右端求值可得

$$
\begin{aligned}
&(Y.\omega(X_1,\dots,X_p))(x)-\omega(X_1,\dots,[Y,X_i],\dots,X_p)(x)\\
&\quad=\omega(x)(X_1(x),\dots,dX_i(x)Y(x),\dots,X_p(x))\\
&\qquad-\omega(X_1(x),\dots,dX_i(x)Y(x)-dY(x)X_i(x),\dots,X_p(x))\\
&\quad=0.
\end{aligned}
$$

因此，$(\mathcal{L}_Y\omega)_x(v_1,\dots,v_p)$ 定义良好，现在很容易看出，$\mathcal{L}_Y\omega$ 是 E 值的 p 形式，定义在 M 上。事实上，我们可以假设 M 有整体坐标图，且 $X_1,\dots,X_p$ 在该坐标图中为常数；于是 $(\mathcal{L}_Y\omega)_x(v_1,\dots,v_p)$ 由 (3.35) 中的第一项给出，因此关于 $v_1,\dots,v_p$ 是交错的。显然，对每个 $p\in P$，映射 $\mathcal{L}_Y\colon \Omega^p(M,E)\to\Omega^p(M,E)$，$\omega\mapsto\mathcal{L}_Y\omega$ 是线性的。我们也用 $\mathcal{L}_Y$ 表示唯一的线性映射 $\Omega(M,E)\to\Omega(M,E)$，它对每个 p 在 $\Omega^p(M,E)$ 上限制为自映射 $\mathcal{L}_Y$。显然，从 $\mathcal{V}(M)$ 到 $\Omega(M,E)$ 的线性自映射空间的映射 $Y\mapsto\mathcal{L}_Y$ 是线性的。

引入一个进一步的标准记号很有用。

定义 3.6.15。给定 $X\in\mathcal{V}(M)$ 和 $p\geq 1$，我们对 $\omega\in\Omega^p(M,E)$ 定义 $i_X\omega\in\Omega^{p-1}(M,E)$，如下：

$$
(i_X\omega)_x(v_1,\dots,v_{p-1}):=\omega_x(X(x),v_1,\dots,v_{p-1}).
$$

于是，$\omega\mapsto i_X\omega$ $i_X\colon\Omega^p(M,E)\to\Omega^{p-1}(M,E)$ 是一个线性映射。对于 $\omega\in\Omega^0(M,E)=C^\infty(M,E)$，我们令 $i_X\omega:=0$。我们还将 i_X 视为 $\Omega(M,E)$ 上的线性自映射。

命题 3.6.16。对于 $X,Y\in\mathcal{V}(M)$，在 $\Omega(M,E)$上有：

(a) $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]=\mathcal{L}_{[X,Y]}$，也就是说，李导数定义了李代数 $\mathcal{V}(M)$ 在 $\Omega(M,E)$ 上的表示，也定义了它在每个 $\Omega^p(M,E)$上的表示。(b) $[\mathcal{L}_X,i_Y]=i_{[X,Y]}$。(c) $\mathcal{L}_X=d\circ i_X+i_X\circ d$ (嘉当公式)。(d) $\mathcal{L}_X\circ d=d\circ\mathcal{L}_X$。

(e) $\mathcal{L}_X(Z^p_{\mathrm{dR}}(M,E)) \subseteq B^p_{\mathrm{dR}}(M,E)$.

证明。(a)–(d)：只需在 M 的一个开覆盖上验证这些公式，因此可以假设 M 有一个整体坐标图。于是，所有结论都可由附录 3.8 中引理 3.9.2 的相应公式推出，只需将其应用于李代数[8] $\mathfrak{g} := \mathcal{V}(M)$和 $\mathfrak{g}$-模 $V := C^\infty(M,E)$。为说明这一点，回想命题 3.6.9 的证明可知，映射 $\varphi\colon\ \Omega(M,E) \to C_c^\bullet(\mathfrak{g},V)$, $\omega \mapsto \omega_{\mathfrak{g}}$ 是单射，并与 d 和李代数微分 $d_{\mathfrak{g}}$ 交织，即 $(d\omega)_{\mathfrak{g}} = d_{\mathfrak{g}}(\omega_{\mathfrak{g}})$。同样，$\varphi$ 与 $\mathcal{L}$ 以及 $C_c^\bullet(\mathfrak{g},V)$ 上相应的李导数交织，并且它还与 i_X 以及 $C_c^\bullet(\mathfrak{g},V)$ 上相应的插入算子交织。因此，对所有恒等式应用 φ 后，我们可以在 $C_c^\bullet(\mathfrak{g},V)$ 中验证它们。

(e) 可由 (c) 推出。 □

注 3.6.17. 我们以一种适用于以任意局部凸空间为模型的流形的方式，定义了向量场 Y 沿向量值 p-形式 $\omega \in \Omega^p(M,\ E)$ 的李导数 $\mathcal{L}_Y\omega$。对于巴拿赫流形（无边界），还可以用另一种方式描述 $\mathcal{L}_Y\omega$，这种描述能让我们对这一对象有更直观的理解（但本书中不会用到）。在这种情况下，Y 对应一个流 Fl^Y（见定义 2.5.23 和推论 2.5.21）。在每个给定点的局部邻域内，对于较小的 t，Fl_t^Y 定义了一个局部微分同胚，可用来移动微分形式。利用局部坐标图，容易验证

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((\mathrm{Fl}_t^Y)^*\omega)_x(v_1,\dots,v_p) \ =\ (\mathcal{L}_Y\omega)_x(v_1,\dots,v_p) \tag{3.36}$$

（关于标量值形式的情形，参见 [La99，第 V 章，命题 5.1 和 5.2] ）。如果 M 以局部凸空间为模型，且假设 Y 存在局部流（见习题 3.6.15），该公式仍然成立。

注 3.6.18.当然，我们也完全可以在以实局部凸空间为模型的实解析流形上定义实解析微分形式，只需要求映射 (3.26) 为实解析即可。将前面所有构造、结果和证明中的“光滑”一词替换为“实解析”，并将符号 C^∞ 替换为 C^ω，它们便都可直接推广到这种情形。

本节余下部分，我们将更仔细地考察有限维光滑流形上的微分形式。有些经典事实将不加证明地使用，但会给出精确的参考文献。

为了更明确地描述 $\mathbb{R}^n$子集上的微分形式，我们不妨回顾一下经典记号。

[8] 我们在此赋予 $\mathbb{K}$、$\mathfrak{g}$ 和 V 离散拓扑，因为它们的局部凸拓扑未必能使 $C^\infty(M,E)$ 成为拓扑 $\mathcal{V}(M)$-模，参见习题 3.6.14。

定义 3.6.19. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集（或是一个局部凸子集$U \subseteq \mathbb{R}^n$，且其内部稠密）。为引入标准记号，令 $\lambda_j\colon U \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ 表示 $j \in \{1, \dots, n\}$的第 j个坐标投影。记 $dx_j := d\lambda_j$ 为 λ_j的外微分；于是 dx_j 是$\Omega^1(U, \mathbb{R})$中的一个 1-形式，并且 $(dx_j)_x(v_1, \dots, v_n) = v_j$。对于 U上的标量值微分形式$\omega_1, \dots, \omega_k$，我们通过以下方式递归地定义 $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k := (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{k-1}) \wedge \omega_k$$

（括号的选择实际上无关紧要，因为标量值形式的楔积是结合的，见习题 3.6.8）。给定 $\omega \in \Omega^p(U, \mathbb{R})$ 和光滑向量值函数 $f \in C^\infty(M, E)$，我们通过 $(f\omega)_x(v_1, \dots, v_p) = \omega_x(v_1, \dots, v_p) f(x)$ 来定义 $f\omega \in \Omega^p(M, E)$（它是使用数乘 $\mathbb{R} \times E \to E$ 构成的 $f \wedge \omega$）。

显然，对于 $p > n$，$\Omega^p(U, \mathbb{R}) = \{0\}$。对于 $p \le n$，形式 $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ 可用于描述任意 p-形式。

引理 3.6.20。设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开子集（或具有稠密内部的局部凸子集），E 是一个局部凸空间，且 $p \in \{1, \dots, n\}$。

(a) 那么，每个取值于 E 的 p-形式 $\omega \in \Omega^p(U, E)$ 都可以写成

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\,, \tag{3.37}$$

其中，$f_{i_1, \dots, i_p}\colon U \to E$ 是唯一确定的光滑函数，定义在 $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ 上。(b) 特别地，每个取值于 E 的 n-形式 $\omega \in \Omega^p(U, E)$ 都可以写成

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\,,$$

其中，$f\colon U \to E$ 是唯一确定的光滑函数。

证明。 证明用到以下事实：若 $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ 且 $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$，则

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{if } (i_1, \dots, i_p) = (j_1, \dots, j_p) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这是众所周知的结论，可以用归纳法快速验证（例如，利用习题 3.6.7 和 $q = 1$）。我们证明 (b)；(a) 的证明（我们不会用到）类似，留作习题。我们先证明 f 的唯一性。若$\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$，则

$$\omega_x(\tfrac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_p}(x)) = f(x)\,(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_p}(x)\big) = f(x)\,,$$

因此 $f(x)$ 由 ω 确定。为证明 f 存在，我们只需将前面的公式作为 $f(x)$ 的定义。于是 $f = \omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots\dots, \frac{\partial}{\partial x_p})$ 光滑，且满足我们的需要。□

定义 3.6.21. 回顾一下，有限维光滑流形（具有或不具有光滑边界）的 C^∞-图册 $\mathcal{A}$ 称为定向图册，如果对于所有 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{A}$ 以及转移映射 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 的定义域中的所有 x，都有 $\det(\varphi\circ\psi^{-1})'(x) > 0$。若定向图册 $\mathcal{A}$ 在所有定向图册中具有极大性，则称其为一个定向，此时 $(M,\ \mathcal{A})$ 称为定向流形。可定向的连通有限维流形是指存在与给定图册相容的定向的流形。容易看出，可定向流形恰有两种定向。（更多信息参见 [La99，第 XVI 章，第 §3] 节，以及 [dCa92，第 0 章，第 § 4] 节）。

只有当 M 是维数为 p 的定向流形（可以有光滑边界），且 E是麦基完备的，才能对微分形式 $\omega \in \Omega^p(M,\ E)$进行积分。我们需要麦基完备性，以确保每个光滑函数 $f\colon\ Q \to E$ 在立方体 $Q := \prod_{i=1}^p [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^p$ 上都有累次积分

$$\int_Q f(x)\ dx\ =\ \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_p}^{b_p} f(x_1, \ldots, x_p)\ dx_1 \cdots dx_p$$

（见命题 1.8.6及其证明）。为简单起见，本节余下部分只考虑 σ-紧致有限维光滑流形。众所周知，σ-紧致性保证了光滑单位分解的存在性（参见 La99，第 II 章，推论 3.4]，适用于无边流形），这对我们很有用。

定义 3.6.22。设 M 是一个有向或无边界光滑边界的 p维光滑流形，且 $\omega \in \Omega^p(M,\ E)$是一个紧支撑的 E值 p形式，即 $\operatorname{supp}(\omega) := \{x \in M\colon\ \omega_x \neq 0\}$ 是紧的。若存在一个与定向相容的坐标图 $\varphi\colon\ U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^p$，使得 $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U$，则定义

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega = \int_{\varphi(U)} f\ dx,$$

其中，$f \in C^\infty(\varphi(U)\ E)$ 是由下式确定的紧支撑函数

$$((\varphi^{-1})^*\omega)(x) = f(x)\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p\,.$$

积分的存在性由推论 1.8.7 保证。如果 $\operatorname{supp}(\omega)$ 不一定包含在某个坐标图定义域内，我们选择一个光滑单位分解 $(\chi_i)_{i\in I}$，使得每个 $\operatorname{supp}(\chi_i)$ 都包含在某个坐标图定义域内，并定义

$$\int_M \omega\ :=\ \sum_{i\in I} \int_M \chi_i\,\omega\,. \tag{3.38}$$

注意到，(3.38) 的右端是有限和，而且该和中的每个积分都已定义，因为 $\operatorname{supp}(\chi_i\,\omega)$ 包含于某个坐标图定义域中。利用 p 维积分的变换公式，

很容易看出，积分 $\int_M \omega$ 定义良好——它既不依赖于坐标图的选取，也不依赖于单位分解。

我们将使用以下版本的斯托克斯定理：

定理 3.6.23.设 M 是一个定向的、 σ-紧的 p 维光滑流形(可能带有光滑边界)， E 是一个麦基完备局部凸空间，且 ω 是定义在 M 上的紧支撑 E 值$(p-1)$形式。那么

$$\int_M d\omega \;=\; \int_{\partial M} \omega\,, \tag{3.39}$$

其中，边界 ∂M 赋予诱导定向。

更确切地说，右侧的被积函数是 $j^*\omega$，其中 $j\colon \partial M \to M$ 是包含映射。

证明。 我们可以通过应用连续线性泛函来验证 (3.39) 的有效性。因此，(3.39) 成立当且仅当对每个 $\lambda \in E'$，$\int_M \lambda_*(d\omega) = \int_{\partial M} \lambda_*\omega$ ，其中 $(\lambda_*\omega)_x := \lambda \circ \omega_x$。但是 $\lambda_*(d\omega) = d(\lambda_*\omega)$（见习题 3.6.4），而 $\int_M d(\lambda_*\omega) = \int_{\partial M} \lambda_*\omega$ 则由标量值形式的斯托克斯定理得出（见 [La99，第 XVII 章，定理 2.1]）。□

注 3.6.24。上述讨论实际上并不依赖于 σ-紧致性。事实上，有限维流形 M 中的每个紧子集 K 都包含在一个 σ-紧开子集 $N \subseteq M$中，这一点很容易看出。于是 N 存在光滑单位分解，这对我们的目的已足够。

庞加莱引理

作为引理 3.6.13 的推论，闭形式的拉回仍为闭形式，恰当形式的拉回仍为恰当形式。由此可知，每个光滑映射 $f\colon M \to N$ 都会导出定义良好的线性映射（德拉姆上同调的函子性）

$$f^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N,E) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M,E), \quad [\alpha] \mapsto [f^*\alpha].$$

引理 3.6.25（同伦引理）。设 M 和 N 为光滑流形，$F\colon [0,1]\times M \to N$ 为光滑映射， E 为麦基完备局部凸空间。那么诱导的光滑映射 F_0、 $F_1\colon M \to N$满足

$$F_0^* = F_1^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N,E) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M,E) \quad \textit{for} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

证明。令 $J := [0,1]$。我们用 $i_t\colon M \to \{t\}\times M \subseteq J\times M$表示典范嵌入。对于满足 $k \in \mathbb{N}$ 的 $\omega \in \Omega^k(J\times M, E)$，我们将纤维积分$I(\omega) \in \Omega^{k-1}(M,E)$ 定义为

$$I(\omega)_x(v_1,\dots,v_{k-1}) := \int_0^1 \omega_{(t,x)}\big(\tfrac{\partial}{\partial t}, v_1, \dots, v_{k-1}\big)\, dt,$$

也就是说，

$$I(\omega)_x = \int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega_{(t,x)}\,dt$$

在赋予逐点收敛拓扑的连续 E值$(k-1)$-线性映射空间 $\mathcal{L}^{k-1}(T_xM, E)$中。设 $X_0, \dots, X_{k-1} \in \mathcal{V}(M)^{\sim}$，并以典范方式将这些向量场延拓为 $J \times M$上的向量场 $X_i^{\sim\ \sim}$，其第一分量为常数零点。于是我们有 $[X_i, X_j]^{\sim} = [X_i, X_j]^{\sim}$，并由嘉当公式（命题 3.6.16）进一步得到

$$\begin{aligned}
&\big(d_M I(\omega)\big)(X_0, \dots, X_{k-1})(x)\\
&= \int_0^1 \big(d_{J\times M} i_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega\big)(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{k-1})(t,x)\,dt\\
&= \int_0^1 \big(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}}\omega\big)(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{k-1})(t,x)\,dt - \int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial t}}(d_{J\times M}\omega)(\widetilde{X}_0, \dots, \widetilde{X}_{k-1})(t,x)\,dt\\
&= (i_1^*\omega)(X_0, \dots, X_{k-1})(x) - \big(i_0^*\omega\big)(X_0, \dots, X_{k-1})(x)\\
&\qquad\qquad - I(d_{J\times M}\omega)(X_0, \dots, X_{k-1})(x).
\end{aligned}$$

这意味着我们有同伦公式

$$d_M I(\omega) + I(d_{J\times M}\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega. \tag{3.40}$$

对 N上次数为 $k \geq 1$ 的闭形式 α，我们将此公式应用于 $\omega = F^*\alpha$ 并得到

$$\big[F_1^*\alpha - F_0^*\alpha\big] = \big[i_1^*\omega - i_0^*\omega\big] = \big[I(d_{J\times M}\omega)\big] = \big[I\big(F^* d\alpha\big)\big] = 0.$$

对于次数 $k = 0$，空间 $H^0_{\mathrm{dR}}(N, E)$由局部常数函数 f组成；又因 $F_t^* f = f \circ F_t$不依赖于 t，故对 $k = 0$我们也得到 $F_0^* = F_1^*$。□

推论 3.6.26. 若 M 是光滑流形，且 E、F 是局部凸空间，其中假设 E 麦基完备，则投影 $p_M\colon M \times F \to M$定义了一个同构

$$p_M^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(M, E) \to H^k_{\mathrm{dR}}\big(M \times F, E\big), \quad [\alpha] \mapsto \big[p_M^*\alpha\big]$$

对每个 $k \in \mathbb{N}_0$均成立。

证明。 我们考虑光滑映射

$$F\colon M \times F \times [0,1] \to M \times F, \quad (m, x, t) \mapsto (m, tx).$$

于是 $F_1 = \mathrm{id}_{M\times F}$，且 F_0 是到 $M \times \{0\}$上的投影。

包含映射 $i_0\colon M \to M \times F,\ m \mapsto (m,\ 0)$ 满足 $p_M \circ i_0 = \mathrm{id}_M$和 $i_0 \circ p_M = F_0$。根据引理 3.6.25，我们有 $F_0^* = F_1^* = \mathrm{id}$，因此拉回映射 p_M^* 和 i_0^* 在空间 $H^k_{\mathrm{dR}}(M,\ E)$ 与 $H^k_{\mathrm{dR}}(M \times F,\ E)$ 之间诱导出互为逆映射的同构。□

定义 3.6.27。若存在一个光滑映射 $F\colon M\times[0,1]\to M$，使得……，则称光滑流形 M 光滑可缩到一点 $p\in M$。

$$F(x,0)=x \quad \text{and} \quad F(x,1)=p \ \text{ for all } \ x\in M.$$

定理 3.6.28（庞加莱 引理）。设 M 是一个可光滑压缩的流形。那么，任何取值于麦基完备空间、次数至少为一的闭形式都是正合的。

证明。设 $F\colon M\times[0,1]\to M$ 是将 M 收缩到 $p\in M$ 的光滑压缩映射，且 $\alpha\in\Omega^k(M,E)$，$k>0$。由于 $F_0=\mathrm{id}_M$ 且 $F_1=p$ 是常值映射，同伦引理推出 $[\alpha]=\left[F_0^*\alpha\right]=\left[F_1^*\alpha\right]$。但由于 F_1 是常数且 $k>0$，我们有 $F_1^*\alpha=0$。□

推论 3.6.29。设 M 在局部凸空间 F 中是开且星形的。那么，M 上任何取值于麦基完备空间、次数至少为一的闭形式都是正合的。

证明。 相对于使 M 为星形的任意一点作线性收缩。 □

第3.6节习题

习题 3.6.1. 证明在定义 3.6.3 的情形下，$(\omega\wedge\eta)_x$ 是交错的。

习题 3.6.2 $\mathfrak{g}$ $\omega\in$ … 设 (,[.,.]) 为一个局部凸拓扑李代数，且 (,)。证明：由 (,) ( ) ( ) 给出。 $\Omega^1\ M\ \mathfrak{g}\quad [\omega,\omega]=\omega\wedge\omega\quad [\omega,\omega]_x\ v_1\ v_2\ =2[\omega_x\ v_1\ \ \omega_x\ v_2\ ]$

习题 3.6.3 $\omega\in\Omega^p\ M\ E\quad\varphi\ \ U\to V\qquad M\qquad X_0^\varphi\qquad X_p^\varphi\in$ … 设 (,)，: 为其坐标图，且 ,…,(,) 为 ,,( ) 的局部表示，其中以 Z 为模型。设 $x\in M$。利用习题 3.4.1，证明 $(d\omega)_x(X_0(x)\dots,X_p(x))$ 等于 $C^\infty\ V\ Z\qquad X_0\ \dots\ X_p\in\mathcal{V}\ M\qquad M$

$$\sum_{i=0}^{p}X_i^\varphi.(\omega_\varphi\circ(\mathrm{id}_V,X_0^\varphi,\dots,\widehat{X_i^\varphi},\dots,X_p^\varphi))$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega_\varphi\circ(\mathrm{id}_V,[X_i^\varphi,X_j^\varphi],X_0^\varphi,\dots\widehat{X_i^\varphi},\dots,\widehat{X_j^\varphi},\dots,X_p^\varphi)$$

在 $\varphi(x)$ 处取值，记号同 (3.26)。

练习 3.6.4. 设 $\alpha\colon E\to F$ 是局部凸空间之间的连续线性映射，M 是光滑流形，且 $p\in\mathbb{N}_0$。验证 $(\alpha_*\omega)_x:=\alpha\circ\omega_x$ 对每个 $\omega\in\Omega^p(M,E)$ 都定义了一个取值于 F 的 p-形式 $\alpha_*\omega$。验证 $\alpha_*(d\omega)=d(\alpha_*\omega)$。

练习 3.6.5. 直接在局部坐标图中，利用公式 (3.33) 验证 $d^2\omega=0$ 是 $\Omega^p(M,E)$ 上的外微分（M 是以 Z 为模型的光滑流形，E 是局部凸空间）。提示：对于每个 $x\in M$，双线性映射

$$Z^2\to\mathrm{Alt}^p(Z,E),\quad (v,w)\mapsto d_1^{(2)}\omega_x(v,w)$$

（由对 ω 的第一参数 x 求二阶导数得到，如命题 1.3.23 所示）根据命题 1.3.17 是对称的。

习题 3.6.6. 设 $\varphi\colon M \to N$ 是光滑流形之间的光滑映射，$X \in \mathcal{V}(M)$ 和 $Y \in \mathcal{V}(N)$ 是 φ-相关的向量场，E 是局部凸空间，$p \in \mathbb{N}_0$ 且 $\omega \in \Omega^p(N, E)$。证明

$$\varphi^*(i_Y\omega) = i_X(\varphi^*\omega) \quad \text{and} \quad \varphi^*(\mathcal{L}_Y\omega) = \mathcal{L}_X(\varphi^*\omega).$$

习题 3.6.7. 在定义 3.6.3 的情形中，记 $S_{p,q}$ 为满足 $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ 且 $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$ 的所有置换 $\sigma \in S_{p+q}$ 组成的集合。证明 $(\omega \wedge \eta)_x(v_1, \ldots, v_{p+q})$ 可写成

$$\sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \beta\big(\omega_x(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}), \eta_x(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})\big) \tag{3.41}$$

并注意到，元素 $\sigma \in S_{p,q}$ 与 $\{1, \ldots, p+q\}$ 的不相交子集对 (A, B) 一一对应，其中 A 有 p 个元素，B 有 q 个元素，并且 $A \cup B = \{1, \ldots, p+q\}$（将 $\sigma \in S_{p.q}$ 映射为 $\big(\{\sigma(1) \ldots, \sigma(p)\}, \{\sigma(p+1) \ldots, \sigma(p+q)\}\big)$ 是一个适当的双射）。因此，我们可以将 (3.41) 中的和视为对所有此类划分 (A, B) 求和。

习题 3.6.8. 设 $\mathcal{A}$ 是一个局部凸的结合拓扑代数，M 是一个光滑流形。证明，若用代数乘法 $\beta\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\beta(a, b) = ab$ 来定义楔积，则对于所有的 $p, q, r \in \mathbb{N}_0$ 和 $\omega \in \Omega^p(M, \mathcal{A})$、$\eta \in \Omega^q(M, \mathcal{A})$、$\zeta \in \Omega^r(M, \mathcal{A})$，都有 $(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta)$。推导出楔积使 $\Omega(M, \mathcal{A})$ 成为一个结合代数。提示：可以方便地采用前一道习题给出的楔积解释。证明，$(\omega_x \wedge \eta_x) \wedge \zeta_x$ 和 $\omega_x \wedge (\eta_x \wedge \zeta_x)$ 都将 $(v_1, \ldots, v_{p+q+r})$ 映射为

$$\sum_{\sigma \in S_{p,q,r}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega_x(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \eta_x(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \zeta_x(v_{\sigma(p+q+1)}, \ldots, v_{p+q+r}),$$

使用与前一道习题中将集合划分为三个集合时类似的记号。

练习 3.6.9。设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开子集（或具有稠密内部的局部凸子集），E 是局部凸空间。

(a) 证明，若 $f\colon U \to E$ 是光滑映射，则 $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$。(b) 验证引理 3.6.20 的证明中提到的事实，并证明该引理的 (a) 部分。

练习 3.6.10。设 M 是光滑流形（可能具有粗糙边界），E 是局部凸空间，$U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是具有稠密内部的局部凸子集。

(a) 设 $f\colon M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数。利用公式 (3.33)，证明对每个取值于 E 的 1-形式 ω，都有 $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$，并且更一般地，对每个 $\omega \in \Omega^p(M, E)$ 也成立。(b) 利用 (a) 和习题 . . (b)，证明对每个定义在 上的光滑 1-形式 $\omega = \sum_{j=1}^n f_j\, dx_j$ U 3 6 9 ，都有 $d(\sum_{j=1}^n f_j\, dx_j) = \sum_{j \neq i} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j$。

(c) 现在我们利用局部凸空间之间的连续双线性映射 $\beta\colon\ E_1\times E_2\to E_3$ 来定义楔积。证明:

$$d(\omega\wedge\eta)\ =\ d\omega\wedge\eta\ +\ (-1)^p\omega\wedge d\eta\,,$$

对所有 $p,\ q\in\mathbb{N}_0$ 以及 $\omega\in\Omega^p(M,\ E_1),\ \eta\in\Omega^q(M,\ E_2)$。

习题 3.6.11。验证 (3.38) 中的积分定义良好。

习题 3.6.12。验证注 3.6.17 中的公式 (3.36)。

习题 3.6.13。设 M 是一个光滑流形, E 是一个局部凸空间,且 $f\in C^\infty(M,\ E)$。假设对于某个 $m\in M$,有 $df(m)\ =0$ 。证明存在一个对称连续双线性映射

$$d^2f(m)\colon T_m(M)\times T_m(M)\to E$$

它满足:对于 $X,\ Y\in\mathcal{V}(M)$,有

$$(X.(Y.f)(m)=d^2f(m)(X(m),Y(m)).$$

习题 3.6.14. 设 M 是局部凸空间 Z的一个开子集。证明映射

$$\mathcal{V}(M)\times C^\infty(M,\mathbb{R})\to C^\infty(M,\mathbb{R}),\quad (X,f)\mapsto X.f$$

当且仅当 Z 是有限维时,才是连续的。

[如果 Z 是无限维的,请利用连续线性映射 $Z'\ \to\ C^\infty(M,\ \mathbb{R})$、$\lambda\ \mapsto\ \lambda|_M$ 和 $Z\ \to\ C^\infty(M,\ Z)\ \cong\ \mathcal{V}(M)$、 $v\ \mapsto\ (x\ \mapsto\ v)$,构造一个指向习题 B.11.6]的链接。

习题 3.6.15. 设 M 是一个以局部凸空间为模型的光滑流形。设 E 是一个局部凸空间, $p\in\mathbb{N}_0$、 $\omega\in\Omega^p(M,\ E)$ 和 $Y\in\mathcal{V}(M)$ 满足 Y具有局部 C^1-流。对于 $x\in M$ 和 $v_1,\ldots,v_p\in T_xM$,证明 $(\mathcal{L}_Y\omega)_x(v_1,\ldots,v_p)$ 由 (3.36) 给出。 [使用习题 2.5.1 和 2.4.9。]

3.7 向量丛与主丛

本节和下一节为第 4 章做准备。第 4 章致力于构造几类重要的无穷维流形实例。我们定义以局部凸空间为模型的向量丛和主丛,并介绍一些基本事实,着重讨论构造无穷维流形所需的内容(例如映射流形,以及有限维光滑流形递增序列的归纳极限)。

向量丛

我们考虑定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$上的向量空间和流形。

定义 3.7.1. 设 F是一个局部凸空间， $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ 和 M是一个 C^r-流形。一个以 M 为底空间、典型纤维为 F 的 C^r-向量丛是一个 C^r-流形 E，连同一个满射 C^r-映射 $\pi\colon E \to M$，以及在 E_x 上赋予的向量空间结构：对于每个 $x \in M$，$= \pi^{-1}(\{x\})$满足以下局部平凡性条件：对于每个 $x \in M$，存在一个开邻域 $U \subseteq M$ 以及一个C^r-微分同胚 $\theta = (\theta_1, \theta_2)\colon E|_U \to U \times F$，其定义域为 $E|_U := \pi^{-1}(U)$，使得

$$\theta_1 = \pi|_{E|_U} \text{ and } \theta_2|_{E_x}\colon E_x \to F \text{ is an isomorphism for each } x \in U.$$

我们称 θ 为 E 的局部平凡化（并称其为 $E|_U$的平凡化）。如果 E整体上存在平凡化，则称 E 为可平凡化。

注记 3.7.2.(a) 由于 θ 是一个同胚，我们可以推知，在由 E 诱导的拓扑下，E_x 是一个局部凸拓扑向量空间，并且$\theta_2|_{E_x}$ 是拓扑向量空间的一个同构。

(b) 对于如前所述的 M 和 F，若令 $\pi := \mathrm{pr}_1$ 为到第一分量的投影，并赋予 $E_x = \{x\} \times F$ 一种向量空间结构，使双射$\{x\} \times F \to F$，$(x,\ y) \mapsto y$ 成为向量空间同构，则 $E := M \times F$ 成为 C^r 上的向量丛。这类向量丛称为平凡向量丛。值得注意的是， $E = M \times F$ 可平凡化，其平凡化为 id_E。

(c) 在底空间分别为 M 和 N 的 C^r-向量丛 $\pi_E\colon E \to M$ 与 $\pi_H\colon H \to N$ 之间的映射 $f\colon E \to H$，若对每个 $x \in M$，都有 $f(E_x) \subseteq E_{g(x)}$，其中某个 $g(x) \in N$，则称为向量丛映射。于是 $g\colon M \to N$ 是一个C^r-映射（因为对于零截面 $0_E\colon M \to E,\ x \mapsto 0_x$，有 $g = \pi_H \circ f \circ 0_E$），我们也称 f 为一个覆盖 的向量丛映射。若 $M = N$，且 f 是覆盖 id_M 的双射向量丛映射，并且 f^{-1} 也是 C^r，则称 f 为覆盖 id_M 的向量丛同构。例如，映射 $\theta\colon E|_U \to U \times F$ 是局部平凡化，当且仅当它是覆盖 id_U 的向量丛同构，因此向量丛局部同构于平凡向量丛。

例 3.7.3. 如果 M 是一个以 F 为模型、具有 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ 的 C^r-流形，那么它的切丛 TM 是 M 上的一个 C^{r-1}-向量丛，并配有丛投影 $\pi_{TM}\colon TM \to M$，将所有 $v \in T_xM$ 映到 $x \in M$。事实上，

$$\theta_\varphi := (\pi_{TM}|_{TU}, d\varphi)\colon T(U) \to U \times F$$

对于 M 的每个坐标图 $\varphi\colon U \to V \subseteq F$，这是一个局部平凡化，其逆映射为 $U \times F \to TU$，$(x,\ y) \mapsto T\varphi^{-1}(\varphi(x)\ y)$。

注记 3.7.4。 如果 $r \neq \omega$，我们可以允许 M 和 E 是定义 3.7.1 中的 C^r-粗糙边界流形。注记 3.7.2 和例 3.7.3 在这种情况下仍然成立。

我们简要讨论向量丛的限制和拉回。

引理 3.7.5。设 F 是一个局部凸空间，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ 和 E 是一个以 F 为典型纤维、底空间为 C^r 的 C^r-向量丛，其中 C^r 是以局部凸空间 Z 为模型的流形，丛投影为 $\pi\colon\ E \to N$。设 $S \subseteq N$ 是一个以闭向量子空间 $Y \subseteq Z$ 为模型的子流形。那么 $E|_S := \pi^{-1}(S)$ 是 E 的子流形，并且是底空间为 S 、纤维为 F 的 C^r-向量丛，条件是对 $x \in S$ 保留 E_x 上的向量空间结构，并将 π 限制为丛投影 $E|_S \to S$。若 $r \neq \omega$，则可假设 N 具有粗糙边界，并可得出 $E|_S$ 是边界为 $\pi^{-1}(\partial S)$ 的子流形；同样，若 S 是 N 的全子流形，也有此结论。

证明。对于 $x \in S$，存在一个开 x-邻域 $U \subseteq N$ 以及一个局部平凡化 $\theta\colon E|_U \to U \times F$。令 $\theta_2\colon E|_U \to F$为其第二分量。缩小 U后，我们可以假设存在一个适配于 S的 M的坐标图 $\varphi\colon U \to V \subseteq Z$。那么 $\psi := (\varphi \times \mathrm{id}_F) \circ \theta\colon E|_U \to V \times F$是 E的一个坐标图，而 $\psi(E|_S \cap E|_U) = (V \cap Y) \times F =: W$是 $Y \times F$的一个内部稠密的局部凸子集（若 $r = \omega$，则为开子集）。相对于 $Y \times F$，W 的边界为 $(\partial(V \cap Y)) \times F$。对于 $V \in E|_S \cap E|_U$，这意味着当且仅当 $\pi(v) \in \partial S$时，$\psi(v) \in \partial W$；此结论在 $r \neq \omega$的情形下成立。因此，$E|_S$ 是具有所述边界的 S 的子流形。由前述可知，θ 限制为一个 C^r-微分同胚$E|_S \cap E|_U \to (S \cap U) \times F$。后者是一个局部平凡化，因此 $E|_S$是一个向量丛。□

引理 3.7.6. 设 F是一个局部凸空间，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ 是一个以 F 为典型纤维的 C^r-向量丛，其底流形 C^r为以局部凸空间 Z为模型的 N -流形，丛投影为 $\pi\colon\ E \to N$。设 M是一个以局部凸空间 Y为模型的 C^r-流形，且 $f\colon M \to N$是一个 C^r-映射。若 $r \neq \omega$，则 M 和 N 都可以有粗糙边界。对于 $x \in M$，赋予 $\{x\} \times E_{f(x)}$ 向量空间结构，使得 $\{x\} \times E_{f(x)} \to E_{f(x)}, (x, y) \mapsto y$ 是一个同构。于是

$$f^*(E) := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times E_{f(x)}$$

存在唯一的 C^r-向量丛结构，其底空间为 M，典型纤维为 F，以 $Y \times F$为模型，使得 $\pi_{f^*(E)}\colon\ f^*(E) \to M, (x, v) \mapsto x$对 $x \in M, v \in E_{f(x)}$成立，$v \in E_{f(x)}$是丛投影，$\partial f^*(E) = (\pi_{f^*(E)})^{-1}(\partial M)$并且

$$\theta_f\colon f^*(E)|_{f^{-1}(U)} \to f^{-1}(U) \times F,\ (x, v) \mapsto (x, \theta_2(v))$$

对 E的任意局部平凡化 $\theta\colon E|_U \to U \times F$，$f^*(E)$ 的一个局部平凡化。

证明。为方便起见，我们引入一个指标，并将 $\{\theta_i\colon\ i \in I\}$ 记作 E 的所有局部平凡化 $\theta_i\colon\ E|_{U_i} \to U_i \times F$ 的集合。令 $\theta_{i,\,2}\colon\ E|_{U_i} \to F$ 为 θ_i的第二分量。对于 $i, j \in I$，我们有

$$(\theta_i \circ \theta_j^{-1})(x, y) = (x, g_{ij}(x, y)) \quad \text{for all } (x, y) \in (U_i \cap U_j) \times F$$

对于一个光滑的 C^r-函数 $g_{ij}\colon\ U_i\cap U_j\times F\to F$，其关于 y 是线性的。我们赋予$f^*(E)$ 关于以下映射的终拓扑

$$h_i\colon f^{-1}(U_i)\times F\to f^*(E),\ \ (x,y)\mapsto (x,\theta_i^{-1}(f(x),y)).$$

注意 h_i是单射且像为 $\pi_{f^*}^{-1}(U_i)$；反函数将 $v\mapsto (\pi_{f^*}(v),\theta_i(v))$ 映为 $(x,y)\mapsto (x,\theta_i(f(x),y))$。因此 $h_i^{-1}(\operatorname{im}(f_i)\cap\operatorname{im}(f_j))$ 在.....的定义域中是开的，且该映射，

$$(x,y)\mapsto (x,\theta_{i,2}(\theta_j^{-1}(f(x),y)))=(x,g_{ij}(f(x),y))$$

是 $f^{-1}(U_i\cap U_j)\times F$到自身的 C^r-微分同胚，其逆映射为 $h_j^{-1}\circ h_i$。由习题 A.3.1，每个 h_i 具有开像，并且是到其像上的同胚。特别地，h_i 的像中不同的点可由开邻域分离。由于对每个 $i\in I$，$\pi_{f^*(E)}\circ h_i\colon\ f^{-1}(U_i)\times F\to f^{-1}(U_i)$, $(x,y)\mapsto x$是连续的，故映射 $\pi_{f^*(E)}$ 是连续的，从而 $\pi_{f^*(E)}$ 的不同纤维中的所有 v, $w\in f^*(E)$ 均可被分离。因此 $f^*(E)$ 是豪斯多夫的。由于$h_i^{-1}\circ h_j$ 是 C^r-微分同胚，$\operatorname{im}(h_i)$ 与 $\operatorname{im}(h_j)$ 在其交上诱导相同的 C^r-流形结构，该交在两者中均为开（若 $r\neq\omega$，则具有相同的边界）。利用练习 3.1.5 以及对粗糙边界流形的类似论证，我们看到 $f^*(E)$ 是具有所述边界的 C^r-流形。现在 $\Theta_i:=h_i^{-1}$ 是 C^r-微分同胚，并且我们容易看出它是一个局部平凡化，从而 $f^*(E)$ 是 M 上以 F 为典型纤维的 C^r-向量丛。唯一性断言是清楚的，因为局部平凡化决定了 $f^*(E)$ 上的 C^r- 流形结构（参见练习 3.1.5 ）。□

注 3.7.7. 当然，在引理 3.7.5 的情形下，对于包含映射 $j\colon\ S\to N$，有 $E|_S\cong j^*(E)$。

为在第 4.5 节中使用，我们证明，在光滑可缩、 σ-紧的有限维底流形上，所有 C^∞-向量丛都是平凡的。

回顾一下，如果存在一个同伦 $H\colon\ [0,1]\times M\to M$，将 id_M 映到常值函数$c_{x_0}\colon M\to M, x\mapsto x_0$，其中 $x_0\in M$ 为某个值，且 H 是光滑映射，那么称光滑流形 M 为光滑可缩。

注 3.7.8。如果一个 σ-紧有限维光滑流形 M 在如下意义下是可缩的：存在一个同伦 $H\colon\ [0,1]\times M\to M$将 id_M 变为某个 $x_0\in M$对应的常值函数 c_{x_0}，那么 M 就是光滑可缩的（参见例如 [Gl20a, 例 15.4(a)]）。我们不会用到这一事实。

两个引理是有帮助的。

引理 3.7.9. 设 M是一个 C^∞流形，$a<b$属于 $\mathbb{R}$，且 $\pi\colon\ E\to[a,b]\times M$是 $[a,b]\times M$ 上的一个光滑向量丛，其典型纤维是局部凸空间 F。若存在 $\alpha<\beta$属于 $]a,b[$，使得 $E|_{[a,\beta[\times M}$和 $E|_{]\alpha,\,b]\times M}$是可平凡化的光滑向量丛，则 E 是光滑可平凡化的。

证明. 设 $\theta_1\colon E|_{[a,\beta[\times M}\to[\alpha,\beta[\times M\times F$和 $\theta_2\colon E|_{]\alpha,\ b]\times M}\to]\alpha,\ b]\times M\times F$是 C^∞-平凡化，其第二分量分别为$\theta_{1,\ 2}$和$\theta_{2,\ 2}$。于是

$$]\alpha,\beta[\times M\times F\to]\alpha,\beta[\times M\times F,\ (t,x,y)\mapsto\theta_i(\theta_j^{-1}(t,x,y)) \tag{3.42}$$

是一个 C^∞-微分同胚，对于 $(i,j)\in\{(1,2),(2,1)\}$，且关于最后一个自变量是线性的。令 $g_{i,j}\colon\ ]\alpha,\beta[\times M\times F\to F$ 为 (3.42) 中微分同胚的第三个分量；于是

$$\theta_1(\theta_2^{-1}(t,x,y))=(t,x,g_{1,2}(t,x,y)).$$

取 $r<s$ 属于 $]\alpha,\beta[$。存在一个 C^∞-映射 $\tau\colon\ ]\alpha,b]\to\mathbb{R}$，使得 τ 单调递增，且对所有 $t\in[s,b]$，$\tau(t)=s$；对所有 $t\in]\alpha,r]$，$\tau(t)=t$。通过以下方式定义 θ: $E\to[a,b]\times M\times F$

$$\theta(v):=\begin{cases}\theta_1(v) & \text{if } t\in[a,r[;\\ (t,x,g_{1,2}(\tau(t),x,\theta_{2,2}(v))) & \text{if } t\in]\alpha,b]\end{cases}$$

对于 $v\in E$，其中 $(t,x):=\pi(v)$。那么 θ 是一个 C^∞-微分同胚，因为我们很容易验证其逆映射是如下映射：将 $(t,x,y)\in[a,b]\times M\times F$ 映到 $\theta_1^{-1}(t,x,y)$，并在 $t\in[a,r[$ 和 $t\in]\alpha,b]$ 分别成立时映到 $\theta_2^{-1}(t,x,g_{2,1}(\tau(t)\ x,y))$。那么 θ 是 E 的一个全局 C^∞-平凡化。□

引理 3.7.10. 设 M是一个 C^∞-流形，$a<b$属于 $\mathbb{R}$，且 $\pi\colon\ E\to[a,b]\times M$ 是 $[a,b]\times M$ 上的一个光滑向量丛，其典型纤维是一个局部凸空间 F。那么，每个 $x\in M$ 都有一个开邻域 $U\subseteq M$，使得$E|_{[a,b]\times U}$ 可光滑平凡化。

证明。对于每个 $s\in[a,b]$，存在一个开邻域 V_s，它是 $[a,b]\times M$ 中 (s,x) 的开邻域，并且 $E|_{V_s}$ 可光滑平凡化。我们可以假设$V_s=J_s\times U_s$对于开子集 $J_s\subseteq[a,b]$和 $U_s\subseteq M$成立。设 $\delta>0$是紧度量空间$[a,b]$上开覆盖 $(J_s)_{s\in[a,b]}$ 的一个勒贝格数。选取 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，使得对于所有 $j\in\{1,\dots,n\}$，都有 $t_j-t_{j-1}<\delta/3$。令 $t_{-1}:=t_0$，并令 $t_{n+1}:=t_n$。对于每个 $j\in\{1,\dots,n\}$，我们找到$s_j\in[a,b]$，使得

$$[t_{j-2},t_{j+1}]\subseteq J_{s_j},$$

因为左侧区间的长度为 $<\delta$。于是

$$U:=U_{s_1}\cap\cdots\cap U_{s_n}$$

是 M 中 x 的一个开邻域。根据引理 3.7.9 直接进行归纳法可得，对于所有 $j\in\{1,\dots,n\}$，$E|_{[a,t_{j+1}]\times U}$ 都是光滑平凡化的。值得注意的是，$E|_{[a,b]\times U}$ 是光滑平凡化的。□

命题 3.7.11。设 F 为一个局部凸空间，M 为一个 σ-紧的有限维 C^∞-流形，$a<b$属于 $\mathbb{R}$且 $\pi\colon\ E\to[a,b]\times M$为一个典型纤维为 F的光滑向量丛。对于 $t\in[a,b]$，令 $\lambda_t\colon\ M\to[a,b]\times M$为映射 $x\mapsto(t,x)$。则存在光滑向量丛的同构 $\lambda_a^*(E)\to\lambda_b^*(E)$，其定义在 id_M 之上。

证明。 简写 $I := [a,b]$。根据引理 3.7.10， M 有一个由开集 $U \subseteq M$ 组成的覆盖 $\mathcal{U}$ ，使得 $E|_{I\times U}$ 可光滑平凡化。由光滑仿紧性（命题 3.5.34），我们可以找到 M 上的一个光滑单位分解 $(h_j)_{j\in J}$ ，使得对于每个 $j \in J$， $S(j) := \operatorname{supp}(h_j) \subseteq U(j)$，其中某个 $U(j) \in \mathcal{U}$成立。由于 M 是 σ-紧的，只有可数多个 $j \in J$满足 $h_j \neq 0$ 。因此，我们可以假设 J 是可数的，实际上还可假设 $J = \mathbb{N}$。对于 $n \in \mathbb{N}_0$，定义光滑映射

$$g_n := a + (b-a)\sum_{j=1}^{n} h_j \colon M \to I.$$

考虑由光滑映射$f_n \colon M \to I \times M,\, x \mapsto (g_n(x)\ x)$确定的、位于 M 上的拉回丛 $f_n^*(E)$。因此 $f_0 = \lambda_a$。 对于 $n \in \mathbb{N}_0$，其内部

$$W_n := \{x \in M \colon g_n(x) = b\}^0$$

是 M的开子集，使得 $f_n^*(E)$中的开子集 $f_n^*(E)|_{W_n}$与 $\lambda_b^*(E)$中的开子集 $\lambda_b^*(E)|_{W_n}$作为光滑向量丛相重合；因此

$$f_n^*(E)|_{W_n} = \lambda_b^*(E)|_{W_n}.$$

类似地， $f_n^*(E)|_{M\setminus S_n} = \lambda_a^*(E)|_{M\setminus S_n}$ ，其中 $S_n := \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{supp}(h_j)$。现在我们构造一个序列$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ，由 C^∞-向量丛同构组成

$$\alpha_n \colon \lambda_a^*(E) \to f_n^*(E)$$

在id_M 之上，使得对于所有属于 $\mathbb{N}_0$的 $m \geq n$ ，都有

$$\alpha_m(v) = \alpha_n(v) \text{ for all } v \in \lambda_a^*(E)|_{W_n}. \tag{3.43}$$

完成此步骤后，我们便得到一个良定义映射

$$\alpha \colon \lambda_a^*(E) \to \lambda_b^*(E)$$

如果我们将 $v \in \lambda_a^*(E)$ 映射到 $\alpha(v) := \alpha_n(v)$，则与 $n \in \mathbb{N}_0$ 的选择无关，且满足 $v \in \lambda_a^*(E)|_{W_n}$。根据构造， α 是覆盖 id_M 的 C^∞-向量丛同构。

对于 $j \in \mathbb{N}$，我们令 $\theta_j \colon E|_{I\times U(j)} \to I \times U(j) \times F$ 为 $E|_{I\times U(j)}$的 C^∞-平凡化，其第二分量为 $\theta_{j,2} \colon E|_{I\times U(j)} \to F$。我们令 α_0 为恒等映射 $\lambda_a^*(E) \to \lambda_a^*(E)$。为了定义一个 C^∞-向量丛同构

$$\alpha_{n,n-1} \colon f_{n-1}^*(E) \to f_n^*(E) \tag{3.44}$$

在 $n \in \mathbb{N}$ 上沿恒等映射 $_M$ ，回想一下， E 的局部平凡化 θ_n 给出了局部平凡化

$$\Theta_n \colon f_n^*(E)|_{U(n)} \to U(n) \times F,\ (x,y) \mapsto (x, \theta_{n,2}(y))$$

and

$$\Xi_n\colon f_{n-1}^*(E)|_{U(n)} \to U(n)\times F,\ (x,y)\mapsto (x,\theta_{n,2}(y))$$

分别对应拉回丛 $f_n^*(E)$ 和 $f_{n-1}^*(E)$（其中 $x\in U(n)$ 和 $y\in E_{f_n(x)}$，分别为 $y\in E_{f_{n-1}(x)}$）。注意

$$\Theta_n^{-1}(x,z)=(x,\theta_n^{-1}(g_n(x),x,z))$$

对于 $(x,z)\in U(n)\times F$，以及 $\Xi_n^{-1}(x,z)=(x,\theta_n^{-1}(g_{n-1}(x)\ x,z))$。由于如果 $x\in U(n)\setminus S(n)$，则 $g_n(x)=g_{n-1}(x)$，我们看到

$$\Theta_n^{-1}|_{(U(n)\setminus S(n))\times F}=\Xi_n^{-1}|_{(U(n)\setminus S(n))\times F}. \tag{3.45}$$

我们按照 (3.44) 通过 $\alpha_{n,n-1}(v):=v$ 定义 $\alpha_{n,n-1}$，如果 $v\in f_{n-1}^*(E)|_{M\setminus S(n)}$ 并且

$$\alpha_{n,n-1}(v):=(\Theta_n^{-1}\circ\Xi_n)(v)$$

对于 $v\in f_{n-1}^*(E)|_{U(n)}$；由 (3.45) 可知该映射定义良好。根据构造，$\alpha_{n,n-1}$ 是覆盖 id_M 的一个 C^∞-向量丛同构。此外，

$$Y:=f_n^*(E)|_{M\setminus S(n)}=f_{n-1}^*(E)|_{M\setminus S(n)}\text{ and }\alpha_{n,n-1}|_Y=\mathrm{id}_Y\,. \tag{3.46}$$

我们通过以下方式得到一个覆盖 id_M 的 C^∞-向量丛同构 $\alpha_n\colon \lambda_a^*(E)\to f_n^*(E)$

$$\alpha_n:=\alpha_{n,n-1}\circ\cdots\circ\alpha_{1,0}.$$

由于当 $k>n$ 时 S_k 与 W_n 不相交，因此映射 $\alpha_m=\alpha_{m,m-1}\circ\cdots\circ\alpha_{n+1,n}\circ\alpha_n$ 和 α_n 在所有 $m>n$ 的 $\lambda_a^*(E)|_{W_n}$ 上重合。□

推论 3.7.12。设 M 是一个光滑可缩、σ-紧的有限维光滑流形。那么，M 上的每个光滑向量丛 E（(其典型纤维为局部凸空间 F)）都可平凡化。

证明。设 $H\colon [0,1]\times M\to M$ 是一个 C^∞-同伦，从 id_M 到 $c_{x_0}\colon M\to M$，且满足 $x_0\in M$。根据命题 3.7.11，C^∞-向量丛 $E=H(0,\cdot)^*(E)$ 和 $H(1,\cdot)^*(E)$ 在 id_M 上同构。□

截面、标架和法丛

我们将介绍向量丛的截面（进一步探讨请参见第 4.1 节）。法丛是构造管状邻域的一种工具。

定义 3.7.13。考虑一个 C^r-向量丛 $\pi\colon E\to M$，其中$r\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty,\omega\}$。我们称映射 $\sigma\colon M\to E$ 是 E的一个 C^r-截面，若 σ 是 C^r 且对所有 $x\in M$，都有 $\sigma(x)\in E_x$，即 $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_M$。若 W 是 M的一个开子集，且 $\sigma\colon W\to E$ 是一个满足 $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_W$ 的 C^r-映射，则称 σ 为 C^r局部 -截面。

注 3.7.14。(a) 映射 $0_E\colon M \to E$ 将 $x \in M$ 映为向量空间 E_x 中的零向量 0_x，称为 E的零截面；对于每个局部平凡化 $\theta\colon E|_U \to U \times F$，它都可表示为 C^r，即 $0_E|_U = \theta^{-1}(x, 0)$。因此，$0_E$是 E 的一个C^r-截面（有时，也将 $0_E(M) \subseteq E$ 称为零截面）。

(b) 考虑映射 $\sigma\colon M \to E$，满足 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$。若 σ 是一个 C^r-截面，则

$$\sigma_\theta := \theta_2 \circ \sigma|_U \in C^r(U, F) \tag{3.47}$$

对于 E 的每个局部平凡化 $\theta\colon E|_U \to U\times F$ 都成立。反过来，若每个点 $x \in M$ 都有一个开邻域 $U \subseteq M$，使得存在一个平凡化$\theta\colon E|_U \to U\times F$，使得 (3.47) 成立，则 σ 是 C^r（因此是一个 C^r-截面），因为对所有 U 和 θ，都有 $\sigma|_U = \theta^{-1} \circ (\mathrm{id}_U, \theta_2 \circ \sigma|_U)$，如前所述。

定义 3.7.15。设 F 是一个局部凸空间，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ 和 $\pi\colon E \to M$ 是一个 C^r-向量丛，其典型纤维为 F，底空间是一个以局部凸空间 Z 为模型的 C^r-流形 M；若$r \neq \omega$，该流形可以有粗糙边界。设 $Y \subseteq F$ 是一个闭向量子空间。若对于每个 $x \in M$，都存在 E 的一个局部平凡化 $\theta\colon E|_U \to U \times F$，满足 $x \in U$，且 $\theta(H) = U \times Y$，则称子集 $H \subseteq E$ 为 E 的一个向量子丛，其典型纤维为 Y。

我们赋予 $H_x := H \cap E_x$ 向量空间结构，使第二分量 $\theta_2|_{H_x}\colon H_x \to Y$ 成为向量空间同构。于是，$H|_U := \theta^{-1}(U \times Y)$ 具有唯一的以 $Z \times Y$ 为模型（边界为 $H_U \cap \pi^{-1}(\partial M)$）的 C^r-流形结构，使 $\theta_H\colon H|_U \to U \times Y$, $v \mapsto \theta(y)$ 成为一个 C^r-微分同胚。随后，H 具有唯一的 C^r-流形结构（边界为 $H \cap \pi^{-1}(\partial M)$），使每个 $H|_U$ 成为开子流形（参见习题 3.1.5）。于是 θ_H 是一个局部平凡化，因此 H 是 M 上的一个具有典型纤维 Y 和丛投影 $\pi|_H$ 的 C^r-向量丛。

引理 3.7.16。设 F 是一个局部凸空间，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ 和 $\pi\colon E \to M$ 是一个以 F 为典型纤维、定义在 C^r-流形 M 上的 C^r-向量丛，其中 M 以局部凸空间 Z 为模型；当 $r \neq \omega$ 时，该流形可以具有粗糙边界。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $H \subseteq E$ 是满足下述条件的子集：对每个 $x \in M$，$H_x := H \cap E_x$ 是 E_x 的一个 n-维向量子空间。那么，(a) 和(b) 等价：

(a) H 是 E的向量子丛；(b) 对于每个 $x_0 \in M$，都存在一个开 x_0-邻域 $U \subseteq M$ 以及 M的局部C^r-截面 σ_1、…、$\sigma_n\colon U \to E$，使得对于所有 $x \in U$，$\sigma_1(x)$、…、$\sigma_n(x)$ 构成 H_x 的一组基。

在(b)的情形下，$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$称为 H的局部标架 。

证明。设 H 是 E 的一个向量子丛，其典型纤维为 F 的一个 n 维向量子空间 V。设 b_1，……，b_n 是 V 的一组基。若 $\theta\colon E|_U \to U \times F$ 是一个局部平凡化，且 $x_0 \in U$ 和 $\theta(H|_U) = U \times V$，

则函数 $\sigma_j\colon\ U \to H$、 $x \mapsto \theta^{-1}(x,\ b_j)$ 定义了 H 的一个局部标架（$\sigma_1,\ \ldots\ldots,\ \sigma_n$）。因此 (a)⇒(b)。

反之，假设 (b)。对 $x_0 \in M$，令 U与 $\sigma_1,\ \ldots\ldots,\ \sigma_n\colon\ U \to E$如 (b) 中所述。在缩小 U 之后，存在 E 的一个局部平凡化 $\theta\colon\ E|_U \to U \times F$；令 $\theta_2\colon\ U \to F$ 为其第二分量。令 V 为对 $j \in \{1,\ldots,n\}$ 而言 $b_j := \theta_2(\sigma_j(x_0))$ 的 $\mathbb{K}$-线性张成。令 $b_1^*,\ \ldots\ldots,\ b_n^*$ 为V^*的对偶基，它由 $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$（对 $i,\ j \in \{1,\ldots,n\}$）借助克罗内克δ确定。 F 的有限维向量子空间 V 在 F 中有一个拓扑补空间W。对 $v \in V$，$w \in W$，令 $\mathrm{pr}_V(v+w) := v$与 $\mathrm{pr}_W(v+w) := w$。对$x \in U$，我们经由经由得到 $\mathbb{K}$-线性映射 $\alpha_x\colon\ V \to V$与 $\beta_x\colon\ V \to W$

$$\alpha_x(v) := \sum_{j=1}^{n} b_j^*(v)\,\mathrm{pr}_V(\theta_2(\sigma_j(x))) \ \text{ and } \ \beta_x(v) := \sum_{j=1}^{n} b_j^*(v)\,\mathrm{pr}_W(\theta_2(\sigma_j(x)))$$

对于 $v \in V$。那么 $\alpha_{x_0} = \mathrm{id}_V$。由于 $U \ni x \mapsto \alpha_x \in \mathcal{L}(V)$ 是连续的，缩小 U 后，我们可以假设对于所有 $x \in U$， $\alpha_x \in \mathrm{GL}(V)$。注意，映射 $U \times V \to V,\ (x,\ v) \mapsto \alpha_x(v)$ 和 $U \times V \to V,\ (x,\ v) \mapsto \alpha_x^{-1}(v)$ 都是 C^r，映射 $U \times V \to W,\ (x,\ v) \mapsto \beta_x(v)$ 也是如此。现在

$$h\colon U \times F \to E, \quad (x, v+w) \mapsto \sum_{j=1}^{n} b_j^*(v)\sigma_j(x) + \theta^{-1}(x,w)$$

对于 $y \in U,\ v \in V,\ w \in W$ 是一个 C^r-映射。要证明 $h(U \times F) = E|_U$ 和 $h\colon\ U \times F \to E|_U$ 是一个 C^r-微分同胚，只需证明 $\theta(h(U \times F)) = U \times F$ 且 $\theta \circ h$ 是一个 C^r-微分同胚。对于 $a \in V$ 和 $b \in W$ 以及 $x \in U$，我们有

$$\theta(h(x, v+w)) = (x, \alpha_x(v) + \beta_x(v) + w) = (x, a+b)$$

当且仅当 (v,w)

$$v = \alpha_x^{-1}(a) \quad \text{and} \quad w = b - \beta_x(v). \tag{3.48}$$

因此， $\theta \circ h$ 是一个双射，具有 $(\theta \circ h)^{-1}(x, a+b) = (v,w)$，如 (3.48) 所示，它是 $(x,\ a+b)$ 的 aC^r-函数。由此可得， $h^{-1}\colon\ E|_U \to U \times F$是 E的一个局部平凡化。对每个 $x \in U$，根据构造， $h(\{x\} \times V) = H_x$，因此 $h^{-1}(H|_U) = U \times V$。故 H 是一个向量子丛。□

3.7.17.设 M 是一个维数为 n的仿紧有限维光滑流形。那么 M 存在一个黎曼度量，即一个由正定双线性形式 $g_x\colon\ T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ 组成的族 $(g_x)_{x \in M}$，满足

$$V \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \ (x,v,w) \mapsto g_{\varphi^{-1}(x)}(v,w) \tag{3.49}$$

对于每个坐标图 $\varphi\colon\ U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$的 M，都是光滑的。事实上，存在一个光滑单位分解 $(h_j)_{j \in J}$， M 从属于其开覆盖

坐标图定义域（见命题 3.5.34）。因此，对于某个坐标图$\varphi_j\colon\ U_j \to V_j \subseteq \mathbb{R}^n$ 的 M，$\operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_j$。令 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{R}^n$上的一个标量积。于是

$$g_x(v,w) := \sum_{j\in J} h_j(x)\,\langle d\varphi_j(v), d\varphi_j(w)\rangle$$

在 M 上定义一个黎曼度量，将 $h_j(x) = 0$ 视为 0。

命题 3.7.18。设 M 是一个有限维仿紧 C^∞-流形，$(g_x)_{x\in M}$ 是 M 上的一个黎曼度量，$N \subseteq M$ 是一个子流形。对于 $x \in N$，令 $(T_xN)^\perp := \{v \in T_xM : (\forall w \in T_xN)\ g_x(v,w) = 0\}$。那么

$$TN^\perp := \bigcup_{x\in N} (T_xN)^\perp$$

是 $(TM)|_N$ 的一个向量子丛。

我们称 $TN^\perp$ 为 N 的法丛。

证明。令 m 和 n 分别为 M 和 N 的维数。对于 $x_0 \in N$，存在一个坐标图 $\varphi\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^m$，它是 M 在 x_0 附近的坐标图，并且满足 $\varphi(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$。考虑局部平凡化

$$\theta\colon TU \to U \times \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto (\pi_{TM}(v), d\varphi(v))$$

与 φ 相关联的 TM。则 θ 限制为一个局部平凡化

$$\theta_N\colon TU \cap TM|_N \to (U \cap N) \times \mathbb{R}^m$$

与 θ_N 的 $TM|_N(T(U \cap N)) = (U \cap N) \times (\mathbb{R}^n \times \{0\})$。利用 $\mathbb{R}^m$ 中的标准基向量 $e_1, \ldots, e_m$，通过以下方式得到 $TM|_N$ 的一个局部标架 $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$

$$\tau_j(x) := \theta_N^{-1}(x, e_j) \ \text{ for } j \in \{1,\ldots,m\} \text{ and } x \in U.$$

利用格拉姆–施密特正交化，我们得到 $j \in \{1,\ldots,m\}$ 的局部 C^∞-截面 $\xi_j\colon U\cap N \to (TM)|_N$ 和 $\sigma_j\colon\ U\cap N \to (TM)|_N$：

$$\begin{aligned}
\xi_j(x) &:= \tau_j(x) - \sum_{i=1}^{j-1} g_x(\sigma_i(x), \tau_j(x))\,\sigma_i(x),\\
\sigma_j(x) &:= \frac{1}{\sqrt{g_x(\xi_j(x),\xi_j(x))}}\,\xi_j(x)
\end{aligned}$$

对于 $x \in U \cap N$。那么，对所有 $x \in U \cap N$，$\sigma_1(x), \ldots, \sigma_m(x)$ 是 T_xM 的标准正交基，而 $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)$ 是 T_xN 的一组基，这意味着 $\sigma_{n+1}(x), \ldots, \sigma_m(x)$ 是 $(T_xN)^\perp$ 的一组基。因此，$(\sigma_{n+1}, \ldots, \sigma_m)$ 是 $(TN)^\perp$ 的一个局部标架。由此，根据引理 3.7.16，$(TN)^\perp$ 是 $(TM)|_N$ 的一个向量子丛。□

3.7.19. 设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$, M 是一个 C^r-流形；若 $r \neq \omega$，它可以具有粗糙边界。设 F_k 是一个局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间，且 $\pi_k\colon E_j \to M$ 是 M 上的一个 C^r-向量丛，其中 $k \in \{1,2\}$，典型纤维为 F_k。设 $E_{k,x} := \pi_k^{-1}(\{x\})$，其中 $x \in M$。定义

$$E_1 \oplus E_2 := \bigcup_{x \in M} (E_{1,x} \times E_{2,x})$$

作为一个集合，并注意到 $(E_{1,x} \times E_{2,x})_{x \in M}$ 是一个两两不交集合族。我们定义 $\pi(v_1, v_2) := x$，其中 $x \in M$ 且 $(v_1, v_2) \in E_{1,x} \times E_{2,x}$。此外，我们赋予 $(E_1 \oplus E_2)_x = E_{1,x} \times E_{2,x}$ 直积的向量空间结构。若 $\theta_k\colon E_k|_U \to U \times F_k$ 是 $E_k|_U$ 在同一个开子集 $U \subseteq M$ 上的平凡化（$k \in \{1,2\}$），令 $(E_1 \oplus E_2)|_U := \pi^{-1}(U)$，则有一个双射

$$\Theta\colon (E_1 \oplus E_2) \to U \times F_1 \times F_2, \quad (v_1, v_2) \mapsto (\theta_{1,2}(v_1), \theta_{2,2}(v_2)),$$

其中 $\theta_{2,2}\colon E_2|_U \to F_2$ 是 θ_2 的第二分量。于是

$$\Theta^{-1}(x, y_1, y_2) = (\theta_1^{-1}(x, y_1), \theta_2^{-1}(x, y_2)) \text{ for all } (x, y_1, y_2) \in U \times F_1 \times F_2.$$

令 $\mathcal{A}$ 为所有函数 Θ 的集合，与前面一样。令 $(\Theta_i)_{i \in I}$ 为一族双射 $\Theta_i\colon (E_1 \oplus E_2)|_{U_i} \to U_i \times F_1 \times F_2$，满足 $\mathcal{A} = \{\Theta_i\colon i \in I\}$。设 Θ_i 由 $E_k|_{U_i}$ 的平凡化 $\theta_{i,k}$（$k \in \{1,2\}$）得到。令 Z 为 M 的建模空间。

命题 3.7.20。 在3.7.19的情形下，$E_1 \oplus E_2$ 上存在唯一的带边界 $\pi^{-1}(\partial M)$ C^r-流形结构，该结构以 $Z \times F_1 \times F_2$ 为模型，使 $(E_1 \oplus E_2)|_{U_i}$ 成为开子集，并且对每个 $i \in I$，Θ_i 都是一个 C^r-微分同胚。该结构使 $E_1 \oplus E_2$ 成为以 M 为底空间、典型纤维为 $F_1 \times F_2$ 的 C^r-向量丛。

$E_1 \oplus E_2$ 称为 E_1 和 E_2 的惠特尼和。

证明。我们赋予 $E_1 \oplus E_2$ 关于映射 $\Theta_i^{-1}\colon U_i \times F_1 \times F_2 \to E_1 \oplus E_2$（$i \in I$）的终拓扑 $\mathcal{O}$。于是

$$\Theta_i^{-1}(\operatorname{im}(\Theta_j^{-1})) = (U_i \times U_j) \times F_1 \times F_2$$

对所有 i、$j \in I$ 都是开集。我们有 $\theta_{i,1}(\theta_{j\,1}^{-1}, (x, y_1)) = (x, g_{ij}(x, y_1))$，并且对所有 $x \in U_i \cap U_j$ 以及 $y_1 \in F_1$, $y_2 \in F_2$，有 $\theta_{i,2}(\theta_{j\,2}^{-1}, (x, y_2)) = (x, h_{ij}(x, y_2))$，其中 $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \times F_1 \to F_1$ 和 $h_{ij}\colon U_i \cap U_j \times F_2 \to F_2$ 是 C^r-函数。于是

$$(\Theta_i \circ \Theta_j^{-1})(x, y_1, y_2) = (x, g_{ij}(x, y_1), h_{ij}(x, y_2))$$

是 C^r 到 $(x,\ y_1,\ y_2)$ 的映射，$\in U_i \cap U_2 \times F_1 \times F_2$ 因此是一个 C^r-微分同胚，因为其逆映射 $\Theta_j \circ \Theta_i^{-1}$。根据习题 A.3.1，每个映射 Θ_i^{-1} 在 $(E_1 \oplus E_2,\ \mathcal{O})$ 中都有开像，并且是到其像上的同胚。由于

$\pi \circ \Theta_i^{-1}$ 是投影 $(U_1 \times U_2) \times F_1 \times F_2 \to M$，$(x,\ y_1,\ y_2) \mapsto x$，因此$C^r$ 且连续，我们可以用开集将 $v \neq w$ 在 $E_1 \oplus E_2$ 中分离，条件是$\pi(v) \neq \pi(w)$。若 $\pi(v) = \pi(w)$，则 $v,\ w$ 属于开子集 $(E_1 \oplus E_2)|_{U_i}$，其中某个 i使得该开子集同胚于 $U_i \times F_1 \times F_2$，因而是豪斯多夫的。因此$\mathcal{O}$ 是豪斯多夫的，并且 $E_1 \oplus E_2$ 具有唯一的 C^r-流形结构，使得 $(E_1 \oplus E_2)|_{U_i}$ 为开子集，且对每个 $i \in I$， Θ_i 都是一个 C^r-微分同胚（参见练习 3.1.5）。于是每个 Θ_i 都是局部平凡化，而 $E_1 \oplus E_2$ 是一个向量丛。□

主丛

我们定义可能为无限维的主丛，并记录一些基本事实。为简洁起见，我们只讨论光滑主丛。

3.7.21.设 G 是一个群。若 X 是一个集合，则映射

$$\tau\colon X \times G \to X, \quad (x,g) \mapsto x.g$$

若满足 $x.e = x$ 且对所有 $x \in X$ 和 $g_1, g_2 \in G$ 都有 $x.(g_1 g_2) = (x.g_1).g_2$，则称其为右 G-作用（并称 (X,τ) 为右 G-集）。若 (X_1,τ_1) 和 (X_2,τ_2) 是右 G-集，则若映射 $f\colon X_1 \to X_2$ 满足对所有 $(x,g) \in X_1 \times G$ 都有 $f(x.g) = f(x).g$，就称其为等变映射。若 X 是一个光滑流形（可能带有粗糙边界），且 τ 是光滑的，则称 (X,τ) 为光滑 G- 流形。

3.7.22. 设 G 是一个李群， U 是一个光滑流形。 $U \times G$ 是一个光滑的 G-流形，带有光滑的右 G-作用 $\tau\colon (U \times G) \times G \to U \times G$，其定义为 $(x,\ g).h := (x,\ gh)$，其中 $x \in X,\ g,\ h \in G$。这种形式的光滑 G-流形称为平凡光滑 G-主丛（若 U 是带粗糙边界的光滑流形，则称为带粗糙边界）。

一般的主丛在局部看起来像平凡主丛。

定义 3.7.23。设 G 是一个李群， M 是一个光滑流形。光滑 G-流形 P 连同一个满射光滑映射$\pi\colon P \to M$，称为 G-主丛，其底空间为 M，如果对每个 $x \in M$，都存在一个开 x-邻域 $U \subseteq M$ 以及一个 C^∞-微分同胚$\theta\colon P|_U \to U \times G$，定义在 $P|_U := \pi^{-1}(U)$ 上，并满足对所有 $x \in P|_U$ ，$\mathrm{pr}_1(\theta(x)) = \pi(x)$，且它是 G-等变的，即对所有$x \in P|_U$ 和 $g \in G$，有 $\theta(x.g) = \theta(x).g$ 。我们称 θ 为 P 的局部平凡化。如果 P 存在一个平凡化 $\theta\colon P \to M \times G$，则称 P为可平凡化。

注 3.7.24。(a) π 是浸没，因为它在局部看起来像投影$U \times G \to U$。

(b) 同理，我们可以定义带粗糙边界的光滑 G-主丛，只需将 M 和 P 替换为带粗糙边界的光滑流形。

(c) 一个 C^∞ 微分同胚 $\theta\colon P|_U \to U \times G$，其第二分量为 $\theta_2\colon P|_U \to G$，第一分量为 $\pi|_{P|_U}$，当且仅当 $\theta_2\colon P|_U \to G$ 是等变的时，它是一个局部平凡化；这里将光滑群乘法 $\mu\colon G \times G \to G$ 用作 G 在自身上的右 G 作用。

李群的齐性空间是一个基本的例子来源（参见命题 9.1.22）。

引理 3.7.25.设 G 为李群，H 为 G 的闭子群。假设 G/H 被赋予一种光滑流形结构，使典范映射 $q\colon G \to G/H,\ g \mapsto gH$ 成为光滑映射。则下列条件等价：

(a) G 连同右作用 $G \times H \to G,\ (g,h) \mapsto gh$ 与 $q\colon G \to G/H$ 是光滑的 H-主丛。(b) q 是浸没。

此时，对 q 的每个光滑局部截面 $\sigma\colon W \to G$，$\sigma(W)H$ 在 G 中是开的，且映射 $\psi\colon W \times H \to \sigma(W)H,\ (x,h) \mapsto \sigma(x)h$ 是 C^∞-微分同胚。

证明. 由注 3.7.24，(a) 蕴含 (b)。若 (b) 成立，则 q 容许光滑局部截面（见命题 3.3.27(a)）。对引理中的 σ 与 ψ，$\sigma(W)H = q^{-1}(W)$ 在 G 中是开的。由基本群论，ψ 是双射。由于 $q(\sigma(x)h) = x$，易见光滑映射 $\theta\colon \sigma(W) H \to W \times H, g \mapsto (q(g)\ \sigma(q(g))^{-1}g)$ 是 ψ 的逆映射，从而 ψ 是 C^∞-微分同胚，且 θ 是局部平凡化。□

注 3.7.26。设 G 是一个李群。取 $r = \infty$，我们可以定义 G-主丛 $\pi\colon P \to N$ 的限制 $P|_S$ 和拉回 $f^*(P)$，方法与引理 3.7.5 和 3.7.6 中相同，只需在证明中将 E 替换为 P，将 E_x 替换为 $P_x := \pi^{-1}(\{x\})$，将 F 替换为 G，将向量空间替换为光滑的 G-流形，并将线性性替换为等变性。注 3.7.7、引理 3.7.9 和 3.7.10、命题 3.7.11 以及推论 3.7.12 也同样成立，只需作相同的修改。特别是：

命题 3.7.27。若 M 是一个光滑可缩的、σ-紧的有限维光滑流形，且 G 是一个李群，那么每个光滑 G-主丛 $\pi\colon P \to M$ 都可平凡化。□

第 3.7 节习题

习题 3.7.1. 证明在引理 3.7.6 的情形下，$f^*(E) \to E,\ (x,v) \mapsto v$ 是覆盖 f 的 C^r-向量丛映射。

习题 3.7.2.证明注 3.7.7 的断言。

习题 3.7.3.在引理 3.7.6 的情形下，若 N 没有边界，证明 $f^*(E)$ 是以 $Y \times \{0\} \times F \cong Y \times F$为模型的 C^r-流形 $M \times E$的分裂子流形，其中 $Y \times \{0\} \times F \cong Y \times F$是 $Y \times Z \times F$的闭向量子空间。作为子流形的 $f^*(E)$ 上的 C^r-流形结构与命题 3.7.6 中构造的 C^r-流形结构一致。

习题 3.7.4。检查注 3.7.26 的细节。

3.8 喷射、局部加法与管状邻域

二阶微分方程与喷射

光滑巴拿赫流形上的喷射 M 是定义在 TM 上的向量场，可用于在 M 上表述二阶微分方程，并且还具有如下附加性质：如果 γ 是一个解，那么对于所有 $s \in \mathbb{R}$， $t \mapsto \gamma(ts)$ 也是一个解。在本书中，我们只关注将喷射作为获得所谓局部加法（如定义 3.8.11）的一种工具，并将讨论范围限制在实现这一目标所必需的那些方面。

3.8.1. 设 E 是一个巴拿赫空间， $V \subseteq E$ 是一个开子集；按照惯例，我们将 TV与 $V \times E$视为同一对象，其中 $V \times E$是 $E \times E$的一个开子集。因此，我们将 $T^2(V) := T(TV)$视为 E^4的开子集 $T(V \times E) = V \times E \times E \times E$。若 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个包含 0 的开区间，且 $\gamma\colon I \to V$ 是一个 C^1-曲线，则

$$\dot\gamma(t) = (\gamma(t), \gamma'(t)) \in V \times E \quad \text{for} \quad t \in I.$$

若 $\gamma\colon I \to V$是一个 C^2-曲线，则

$$\ddot\gamma(t) = (\dot\gamma)\dot{}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t), \gamma'(t), \gamma''(t)) \in TV \times (E \times E) = T^2V.$$

若 $X\colon TV = V \times E \to T(TV) = TV \times (E \times E)$是一个光滑向量场，并且对所有$(x_0, v_0) \in V \times E$，初值问题

$$\dot y(t) = X(y(t)), \quad y(0) = (x_0, v_0) \tag{3.50}$$

存在一个解 (γ, η)，满足 $\eta = \gamma'$(因此 $\ddot\gamma(t) = X(\gamma(t)\ \gamma'(t))$， $\gamma(0) = x_0$和 $\gamma'(0) = v_0$)，那么我们必有

$$X(x, v) = (x, v, v, f(x, v)) \text{ for all } v \in V \tag{3.51}$$

对于某个光滑函数 $f\colon V \times E \to E$。

3.8.2. 对于 $(x_0, v_0) \in V \times E$，令

$$(\gamma, \eta)\colon I \to V \times E$$

是 (3.50) 的一个解。若 (3.51) 成立，则

$$(\gamma(t), \eta(t), \gamma'(t), \eta'(t)) = (\gamma(t), \eta(t), \eta(t), f(\gamma(t), \eta(t)))$$

对所有 $t \in I$，因此

$$\eta(t) = \gamma'(t)$$

(i.e., $(\gamma, \eta) = \dot\gamma$) and

$$\gamma''(t) = f(\gamma(t), \gamma'(t)). \tag{3.52}$$

反之，如果 $(\gamma(0)\ \gamma'(0)) = (x_0, v_0)$ 且 (3.52) 成立，那么函数 $\dot\gamma$ 满足 (3.50)。

3.8.3. 假设 (3.51) 成立，设 $(\gamma,\gamma')\colon I\to V\times\mathbb{R}^m$ 是 (3.50) 在开区间 I 上的一个解。对于 $s\in\mathbb{R}$,

$$I_s:=\{t\in\mathbb{R}\colon ts\in I\}$$

是 $\mathbb{R}$ 中的一个开区间，使得 $0\in I_s$。考虑光滑函数

$$\gamma_s\colon I_s\to V,\quad t\mapsto\gamma(ts).$$

那么 $(\gamma_s)'(t)=s\gamma'(st)$，且 $(\gamma_s)''(t)=s^2\gamma''(st)$；因此 $(\gamma_s,(\gamma_s)')$ 满足微分方程 $\dot y(t)=X(y(t))$ 当且仅当

$$s^2\gamma''(st)=(\gamma_s)''(t)=f(\gamma(st),s\gamma'(st)),$$

也就是说，$s^2f(\gamma(st)\ \gamma'(st))=f(\gamma(st)\ s\gamma'(st))$。因此 (a) 与 (b) 等价：

(a) 对所有 $(x_0,\ v_0)\in TV$，利用极大解

$$(\gamma,\gamma')=\gamma_{0,x_0,v_0}\colon I\to TV$$

对于 (3.50)，我们有 $(\gamma_s,\ (\gamma_s)')\colon\ I_s\to TV$ 满足微分方程 $\dot y(t)=X(y(t))$（因而满足初值问题 $\dot y(t)=X(y(t)),\ y(0)=(x_0,\ sv_0)$），对所有 $s\in\mathbb{R}$ 均成立。

(b) 满足以下恒等式：

$$f(x,sv)=s^2f(x,v)\ \text{ for all }(x,v)\in V\times\mathbb{R}^m\text{ and }s\in\mathbb{R}.\tag{3.53}$$

定义 3.8.4. 若 E 是巴拿赫空间，且 $V\subseteq E$ 是一个开子集，则称光滑向量场 $X\colon TV\to T^2V$ 为 V 上的喷射，如果它具有形式 (3.51) 且满足 (3.53)。

下面的引理将使我们能够推广到流形。

引理 3.8.5. 设 $\tau\colon V\to W$ 是巴拿赫空间 E 的开子集 V 与 W 之间的一个 C^∞-微分同胚。若 $X\colon TV\to T(TV)$ 是 V 上的喷射，则 $Y:=T(T\tau)\circ X\circ T\tau^{-1}$ 是 W 上的喷射。

证明。我们有

$$T\tau\colon V\times E\to W\times E,\ (x,v)\mapsto(\tau(x),d\tau(x,v))$$

和 $T(T\tau)\colon\ (V\times E)\times(E\times E)\to(W\times E)\times(E\times E)$,

$$\begin{aligned}(x,v,a,b)&\mapsto(T\tau(x,v),dT\tau(x,v,a,b))\\&=(\tau(x),d\tau(x,v),d\tau(x,a),d^{(2)}\tau(x,v,a)+d\tau(x,b)).\end{aligned}$$

对于 $(y,w)\in W\times E$ 令 $(x,v):=T\tau^{-1}(y,w)$；因此 $(y,w)=T\tau(x,v)=(\tau(x)\ d\tau(x,v))$。于是

$$X(T\tau^{-1}(y,w))=X(x,v)=(x,v,v,f(x,v))$$

使用一个如 (3.51) 中的光滑函数 $f\colon V\times E\to E$。相应地,

$$\begin{aligned} Y(y,w) &= T^2\tau(X(x,v)) = (\tau(x), d\tau(x,v), d\tau(x,v), g(y,w)) \\ &= (y,w,w,g(y,w)) \end{aligned}$$

由 $g(y,\ w) := d^{(2)}\tau(x,\ v,\ v) + d\tau(x,\ f(x,\ v))$, 可知 Y具有形式 (3.51)。若将 w 替换为某个 $s\in\mathbb{R}$对应的 sw , 则必须将 v 替换为 sv。因此

$$\begin{aligned} g(y,sw) &= d^{(2)}\tau(x,sv,sv) + d\tau(x,f(x,sv)) \\ &= s^2(d^{(2)}\tau(x,v,v) + d\tau(x,f(x,v))) = s^2 g(y,w); \end{aligned}$$

因此, Y满足 (3.53), 从而 Y是一个喷射。 □

引理 3.8.6。若 $X_1,\dots,X_n$是巴拿赫空间 E的开子集 V上的喷射, 且 $h_1,\dots,h_n\colon V\to\mathbb{R}$ 是光滑函数, 并且满足 $\sum_{j=1}^n h_j = 1$, 则 $\sum_{j=1}^n (h_j\circ\pi_{TV})X_j$ 也是 V上的喷射。

证明。对于每个 j, 我们有 $X_j(x,\ v) = (x,\ v,\ v,\ f_j(x,\ v))$, 其中 f_j是满足 $f_j(x,\ sv) = s^2 f_j(x,\ v)$ 的光滑函数。因此

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{j=1}^n (h_j\circ\pi_{TV})X_j(x,v)\Big) &= \Big(x,v,\sum_{j=1}^n h_j(x)(v,f_j(x,v))\Big) \\ &= \Big(x,v,\sum_{j=1}^n h_j(x)v, \sum_{j=1}^n h_j(x)f_j(x,v)\Big) \\ &= (x,v,v,f(x,v)) \end{aligned}$$

其中 $f(x,\ v) := \sum_{j=1}^n h_j(x)f_j(x,\ v)$。由于对每个 j, $f_j(x,\ sv) = s^2 f_j(x,\ v)$, 因此有 $f(x,\ sv) = \sum_{j=1}^n h_j(x)f_j(x,\ sv) = s^2 f(x,\ v)$。□

注 3.8.7。若 $X\colon TV\to T^2V, (x,\ v)\mapsto(x,\ v,\ v,\ f(x,\ v))$ 是开子集 $V\subseteq E$ 上的喷射, 那么, 对每个 $x\in V$, 初值问题的极大解 η 定义于整个 上

$$\dot y(t) = X(y(t)),\quad y(0) = (x,0)$$

在整个 $\mathbb{R}$ 上都有定义, 并且对所有 $t\in\mathbb{R}$, $\eta(t) = (x,\ 0)$。

事实上, 若令 $\eta(t) := (x,0)$, 其中 $t\in\mathbb{R}$, 则 $\eta(0) = (x,0)$, 且 $\dot\eta(t) = (x,0,0,0)$。由于 $f(x,0) = f(x,00) = 0^2 f(x,0) = 0$, 因此有 $X(\eta(t)) = X(x,0) = (x,0,0,f(x,0)) = (x,0,0,0) = \dot\eta(t)$。

定义 3.8.8。设 M 是以巴拿赫空间 E 为模型的光滑流形。光滑向量场 $X\colon TM\to T(TM)$ 称为 M 上的 喷射 , 如果对于 M 的每个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi\to V_\varphi\subseteq E$, $T^2\varphi\circ X\circ T\varphi^{-1}$ 都是 V_φ 上的喷射。

根据引理 3.8.5，如果 $M = V$ 是 E 的开子集，则定义 3.8.4 和 3.8.8 等价。

命题 3.8.9. 每个以巴拿赫空间为模型的光滑仿紧光滑流形都存在一个喷射。

证明。设 $\mathcal{A}$ 为 M 的极大性 C^∞ 图册，由形如 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$ 的坐标图组成。我们在 M 上选取一个从属于 $(U_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{A}}$ 的光滑单位分解 $(h_j)_{j\in J}$。对每个 $j \in J$；存在一个坐标图 $\varphi_j\colon U_j \to V_j$，使得 $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_j$。于是 $Y_j\colon TV_j \to T(TV_j), (x,\ v) \mapsto (x,\ v,\ v,\ 0)$ 是 V_j 上的喷射，因此 $X_j := T^2(\varphi_j^{-1}) \circ Y_j \circ T\varphi_j$ 是 U_j 上的喷射。我们证明

$$X\colon TM \to T(TM), \quad v \mapsto \sum_{j\in J} h_j(\pi_{TM}(v))X_j(v) \tag{3.54}$$

对每个 $v \in TM$ 都是有限和（如果 $h_j(\pi_{TM}(v)) = 0$，则该直和项应视为 0），并且 X 是一个喷射。给定 $v_0 \in TM$，元素 $x_0 := \pi_{TM}(v_0)$ 有一个开邻域 W，位于 M 中，使得

$$J_0 := \{j \in J\colon W \cap \operatorname{supp}(h_j) \neq \emptyset\}$$

是有限的。若 $j \in J_0$ 且 $x_0 \notin \operatorname{supp}(h_j)$，我们可以用它与 $X \setminus \operatorname{supp}(h_j)$ 的交集替换 W；因此不妨假设对所有 $j \in J_0$，$x_0 \in \operatorname{supp}(h_j) \subseteq U_j$，于是 $U := W \cap \bigcap_{j\in J_0} U_j$ 是 M 中的一个开 x_0-邻域。于是，对于 TM 中开 v_0-邻域 TU 内的所有 v，(3.54) 中满足 $j \in J \setminus J_0$ 的所有直和项都为零；因此

$$X(v) = \sum_{j\in J_0} h_j(\pi_{TM}(v))X_j(v).$$

因此 $X|_{TU}$ 是光滑的，而引理 3.8.6 蕴含 $X|_{TU}$ 是 U 上的一个喷射（对于 $k \in J_0$，在每个点 $T^2(\varphi_k|_U) \circ X|_{TU} \circ T(\varphi_k|_U)^{-1}$ 都是喷射 $T^2(\varphi_k|_U) \circ X_j|_{TU} \circ T(\varphi_k|_U)^{-1}$ 的仿射组合，其中 $j \in J_0$）。□

命题 3.8.10. 设 M 是一个以巴拿赫空间 E 为模型的 C^∞-流形，且 $X\colon TM \to T^2M$ 是一个喷射。则有以下结论：

(a) 若 $\eta\colon I \to TM$ 是微分方程 $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 的一个解，则 $\eta = \dot{\gamma}$ 对 $\gamma := \pi_{TM} \circ \eta$ 成立。*(b)* 对于 TM 上微分方程 $\dot{y}(t) = X(y(t))$ 的流 $\mathrm{Fl}\colon \Omega \to TM$，集合 $\Omega_{1,0} = \{v \in TM\colon (1, 0, v) \in \Omega\}$ 是 TM 的一个开子集，且 $0_M(M) = \{0_x \in T_xM\colon x \in M\} \subseteq \Omega_{1,0}$。*(c)* 映射 $\exp_X\colon \Omega_{1,0} \to M$，$v \mapsto \pi_{TM}(\mathrm{Fl}^{1,0}(v))$ 是光滑的，并且满足 $T_0 \exp_X |_{\Omega\cap T_xM} = \mathrm{id}_{T_xM}$，对所有 $x \in M$ 均成立。

这里 $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times TM$ 是流的定义域；关于记号 Ω、Fl、$\mathrm{Fl}^{1,0}$ 和 $\Omega_{1,\ 0}$，请参见定义 2.5.6。

证明。(a) 我们不妨假设，对于一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$，有 $\eta(I) \subseteq TU_\varphi$，其中该坐标图属于 M；因为 I 可以由这样的区间覆盖。现在

$$Y := T^2\varphi \circ X|_{TU_\varphi} \circ T\varphi^{-1}$$

是 V_φ 上的喷射。由于 $X|_{TU_\varphi}$ 和 Y 是 $T\varphi$-相关的，我们可得 $\zeta := T\varphi \circ \eta$ 满足微分方程 $\dot{y}(t) = Y(y(t))$。因此 $\zeta = \theta$，其中 $\theta := \pi_{TV_\varphi} \circ \zeta = \mathrm{pr}_1 \circ \zeta$（见 3.8.2）。对于

$$\gamma := \pi_{TM} \circ \eta = \pi_{TM} \circ T\varphi^{-1} \circ \zeta = \varphi^{-1} \circ \pi_{TV_\varphi} \circ \zeta = \varphi^{-1} \circ \theta,$$

我们有 $\dot{\gamma} = T\varphi^{-1} \circ \dot{\theta} = T\varphi^{-1} \circ \zeta = \eta$。

(b) 和 (c)：对每个 $x \in M$，我们有 $0_x \in \Omega_{1,0}$，且 $\exp_X(x) = x$（见注 3.8.7；因此 $0_M(M) \subseteq \Omega_{1,0}$。现在 $\Omega_{1,0}$ 是 TM 中的开集，并且 Fl 是光滑的（见推论 2.5.21），由此 $\exp_X$ 是光滑的。对于 $x \in M$ 和 $v \in T_xM$，当 $r > 0$ 足够小时，我们有 $rv \in \Omega_{1,0}$。令 $\eta\colon I \to M$，其中 $[0,1] \subseteq I$ 是初值问题 $\dot{y}(t) = X(y(t))$，$y(0) = rv$ 的一个解。令 $\gamma := \mathrm{pr}_{TM} \circ \eta$，于是由 (a) 可知 $\eta = \dot{\gamma}$。对所有 $s \in [0,1]$，$t \mapsto \eta(st)$ 是以 srv 代替 rv 的初值问题的解。特别地，取 $t = 1$，我们得到

$$\gamma(s) = \pi_{TM}(\eta(st)) = \exp_X(srv).$$

因此

$$\begin{aligned} T_{0_x}(\exp_X|_{T_xM \cap \Omega_{1,0}})(rv) &= [s \mapsto \exp_X(srv)] = [s \mapsto \gamma(s)] \\ &= \dot{\gamma}(0) = \eta(0) = rv. \end{aligned}$$

因此 $T_{0_x}(\exp_X|_{T_xM \cap \Omega_{1,0}})(v) = v$，这意味着 $T_{0_x}(\exp_X|_{T_xM \cap \Omega_{1,0}}) = \mathrm{id}_{T_xM}$。□

映射 $\exp_X$ 称为与该喷射相关联的**指数函数**。

局部加法与管状邻域

局部加法是构造无限维流形结构的重要工具（见第 4.2 节）。我们还将利用它们构造管状邻域（定理 3.8.15）。

定义 3.8.11。设 M 是一个光滑流形。开子集 $U \subseteq TM$ 上的光滑映射 $\Sigma\colon U \to M$ 称为**局部加法**，如果

(a) 对所有 $x \in M$ 和 $\Sigma(0_x) = x$（对于 $0_x \in T_xM$）；并且 (b) 集合 $U' := \{(\pi_{TM}(v), \Sigma(v)) : v \in U\}$ 在 $M \times M$ 中是开集，且映射 $\theta\colon U \to U'$, $v \mapsto (\pi_{TM}(v), \Sigma(v))$ 是一个 C^∞- 微分同胚。

如果此外满足以下条件，我们称 Σ 是标准化的，

$$T_{0_x}(\Sigma|_{T_xM\cap Q}) = \mathrm{id}_{T_xM} \quad \text{for all } x \in M. \tag{3.55}$$

若 M 是一个带有 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 的 $\mathbb{K}$-解析流形，且 Σ 是一个局部加法，并且 θ 是 $\mathbb{K}$-解析流形之间的微分同胚，则称 Σ 为一个 $\mathbb{K}$-解析局部加法。

李群是最早的一类例子。

命题 *3.8.12.* 设 G 是李群，$\mathfrak{g} := T_eG$ 且 $G \times TG \to TG, (g, v) \mapsto g.v := T\lambda_g(v)$ 是由群乘法定义的 G 在 TG 上的光滑左作用。若 $\varphi\colon V \to W$ 是从开零邻域 $V \subseteq \mathfrak{g}$ 到开单位元邻域 $W \subseteq G$ 的 C^∞-微分同胚，且 $\varphi(0) = e$，则 $U := \{v \in TG\colon \pi_{TG}(v)^{-1}.v \in V\}$ 是 TG 的开子集，且 $0_G(G) \subseteq U$，并且光滑映射

$$\Sigma\colon U \to G, \quad v \mapsto \pi_{TG}(v)\varphi(\pi_{TG}(v)^{-1}.v)$$

是局部加法。如果 $T_0\varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$，那么 Σ 是标准化的。如果 G 是一个 $\mathbb{K}$-解析李群，且 φ 是 $\mathbb{K}$-解析流形之间的微分同胚，那么 Σ 是一个 $\mathbb{K}$-解析局部加法。

证明。集合 $U' := \{(\pi_{TG}(v)\ \Sigma(v))\colon v \in U\}$ 等于

$$\bigcup_{g\in G}(\{g\} \times gW) = \{(g, h) \in G \times G\colon g^{-1}h \in W\},$$

因此它在 $G \times G$ 中是开集。映射 θ 是一个 C^∞-微分同胚。我们很容易验证该映射

$$U' \to TG, \quad (g, h) \mapsto g.\varphi^{-1}(g^{-1}h)$$

是 θ 的逆映射，因此 $\theta\colon U \to U'$ 是一个 C^∞-微分同胚。如果 $T_e\varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$，对切映射应用链式法则可得

$$\Sigma|_{U\cap T_gG} = \lambda_g \circ \varphi \circ T\lambda_{g^{-1}},$$

我们得到 $T_{0_g}(\Sigma|_{U\cap T_gG}) = T\lambda_g \circ T_0\varphi \circ T_{0_g}\lambda_{g^{-1}} = \mathrm{id}^{T_gG}$。对于 $\mathbb{K}$-解析情形，在证明中将“C^∞”替换为“$\mathbb{K}$-解析”。□

根据命题 3.5.34，以下命题适用于每个仿紧的有限维光滑流形。

命题 3.8.13。设 M 是一个以巴拿赫空间为模型的光滑仿紧光滑流形。那么 M 承认一个规范化局部加法。

以下引理将在证明中用到。

引理 3.8.14.设 M 是一个以巴拿赫空间为模型的仿紧光滑流形，且 $\Sigma\colon V \to M$是开子集 $V \subseteq TM$上的光滑映射，其中 $0_M(M) \subseteq V$满足

$$T_{0_x}\Sigma|_{T_xM\cap V} = \mathrm{id}_{T_xM} \quad \textit{for all } x \in M. \tag{3.56}$$

那么存在一个开子集 $U \subseteq V$，满足 $0_M(M) \subseteq U$，使得 $\Sigma|_U$是一个规范化局部加法。

证明：若 M 是有限维的，则 M 是由 σ紧开子集构成的拓扑和，因此 $M\times M$ 也如此，从而 $M\times M$是仿紧的（见命题 A.5.8）。在一般情形下，每个 $x\in M$ 都有一个开邻域 U_x，它同胚于 E 的一个开子集，因而可度量化。由于 M是仿紧的，所以是正则的（见命题 A.5.4）；U_x 中包含一个 x 的邻域 A_x，该邻域在 M中是闭的。由仿紧性可知，存在 M 的一个局部有限开覆盖 $(Q_j)_{j\in J}$，它从属于 $(A_x^0)_{x\in M}$。于是 $(Q_j)_{j\in J}$ 也局部有限（见引理 A.5.3(a)），且从属于 $(A_x)_{x\in M}$，因而从属于 $(U_x)_{x\in M}$，这意味着每个集合 Q_j 都可度量化。因此，根据 [Ek89, 定理 4.4.19]，M 可度量化。由此可知，$M\times M$ 可度量化，进而根据斯通定理（见 [Ek89, 定理 4.4.1]），$M\times M$ 是仿紧的。光滑映射 $h := (\pi_{TM}|_V, \Sigma)$ 将 $0_M(M) = \{0_x\colon x\in M\}$ 双射且连续地映到对角线 $\Delta_M := \{(x,x)\colon x\in M\}$ 中，其中 $M\times M$；此外，逆映射 $(x,x)\mapsto 0_x = 0_M(x)$ 也是连续的，因为 $0_M\colon M\to TM, x\mapsto 0_x$是连续的。给定 $x_0\in M$，令 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$为 M上 x_0周围的一个坐标图，使得$\varphi(x_0) = 0$。映射

$$\alpha\colon E\times E \to E\times E, \quad (y,z)\mapsto (y, y+z)$$

是一个拓扑向量空间同构，其逆映射为 $(y,w)\mapsto (y, w-y)$。开集 $T\varphi(TU_\varphi \cap h^{-1}(U_\varphi\times U_\varphi))$ 包含 $W\times W$，其中某个开 0-邻域为 $W\subseteq E$。因此

$$f := \alpha^{-1}\circ(\varphi\times\varphi)\circ h\circ T(\varphi^{-1})\colon W\times W \to E\times E$$

是一个光滑映射。由于对于所有 $y\in W$，$f(y,0) = (y,0)$，我们有

$$df((y,0),(v,0)) = d_1 f(y,0,v) = (v,0) \quad \text{for all} \quad v\in E.$$

由 (3.56) 可知，对于所有$w\in E$，$df((y,0),(0,w)) = d_2 f((y,0)\ w) = (0,w)$。因此，$f'(0,0) = df((0,0)\ \cdot) = \mathrm{id}_{E\times E}$。利用反函数定理，我们推得 f 在 0 处是局部 C^∞-微分同胚，进而 h 在 0_x处是局部 C^∞-微分同胚。因此，存在一个开 0_x-邻域$Q_x\subseteq V$，使得 $h(V)$在 $M\times M$中是开集，且 $h|_{Q_x}\colon Q_x \to h(Q_x)$是一个$C^\infty$-微分同胚。将 V 替换为 $\bigcup_{x\in M} Q_x$后，我们可以假设h 是局部 C^∞-微分同胚。由定理 A.5.9 可知，存在一个开子集$U\subseteq V$，满足 $0_M(M)\subseteq U$，使得 $U' := h(U)$在 $M\times M$中是开集，且 $\theta := h|_U\colon U\to U'$ 是一个同胚。由于 θ 也是局部 C^∞-微分同胚，同胚 θ 是一个 C^∞-微分同胚。□

命题的证明 3.8.13。由命题 3.8.9，存在一个定义在 M上的喷射 X。由命题 3.8.10，其指数函数 exp$x$ 满足引理 3.8.14 的假设。因此，exp$x$ 限制后成为 M上的局部加法。□类似的论证可用于证明以下定理。

定理 3.8.15。设 M 是一个仿紧有限维光滑流形，$N \subseteq M$ 是 M 的闭子流形。那么存在一个光滑向量丛 π： $E \to N$，其底空间为 N；一个开子集 $Q \subseteq E$，满足 $0_N(N) \subseteq Q$；以及一个 C^∞ 微分同胚 ψ： $Q \to P$，其中 $P \subseteq M$ 是某个满足 $N \subseteq P$ 的开子集，并且对所有 $x \in N$，都有 $\psi(0_x) = x$。

在上述情形中，P 称为 M 中 N 的管状邻域。证明表明，E 可取为 M 上某个黎曼度量所对应的法丛（TN）$^\perp \subseteq TM|_N$。

证明。设 Σ: $U \to M$ 是 M 的一个局部加法（见命题 3.8.13），且 g 是 M 上的一个黎曼度量（见 3.7.17）。那么法丛（TN）$^\perp$ 是 $TM|_N$ 的子流形（见命题 3.7.18），而 $TM|_N$ 又是 TM 的子流形（见引理 3.7.5），因此 W:=(TN)$^\perp \cap U$ 在 (TN)$^\perp$ 中是开集。此外，$0_N(N)$ =(TN)$^\perp \cap 0_M(M) \subseteq W$。限制

$$h := \Sigma|_W : W \to M$$

光滑，并将 $0_N(N) = \{0_x : x \in N\}$ 双射且连续地映到 N 上。逆映射 0_N: $N \to 0_N(N)$ 连续。设 i: $N \to M$ 为包含映射。由于 $h \circ O_N = i$，可知对于 $x \in N$，像 im($T_{0_x} h$) 包含 im($T_x(h \circ O_N)$) =im $T_x i = T_x N$。利用光滑包含映射j: ($T_x N$)$^\perp \cap W \to W \subseteq TM$，有 $(h \circ j)(y) = \Sigma|_{(T_x N)^\perp \cap Q}(y)$，因此 im($T_x h$) 也包含 im($T_0(h \circ j)$) =id$_{T_x M}$(($T_x N$)$^\perp$) =($T_x N$)$^\perp$。由于 $T_x M$ =$T_x N \oplus$ ($T_x N$)$^\perp$，可知线性映射

$$T_{0_x} h : T_{0_x}(W) = T_{0_x}((TN)^\perp) \to T_x M$$

是满射，因而是双射，其定义域和值域具有相同的有限维数。对于每个 $x \in N$，反函数定理给出一个开 0_x-邻域 $W_x \subseteq W$，使得 h(W_x) 在 M 中是开集，且$h|_{W_x}$: $W_x \to h$(W_x) 是一个 C^∞-微分同胚。将 W 替换为$\bigcup_{x \in M} W_x$后，可假设 h 是局部 C^∞-微分同胚。利用 M 的仿紧性，定理 A.5.9 给出一个开子集 $Q \subseteq W$，满足 $0_N(N) \subseteq Q$，使得 P:= h(Q) 在 M 中是开集，且 $\psi := h|_Q$: $Q \to P$ 是一个同胚。由于 ψ 也是局部 C^∞-微分同胚，因此 ψ 是一个C^∞-微分同胚。□

注 3.8.16。如果光滑流形 M 存在局部加法，那么它也存在规范化局部加法。

事实上，若 Σ: $U \to M$ 任意，则微分同胚 θ :=(π_{TM}, Σ) : $U \to U' \subseteq M \times M$ 将开集 $T_x M \cap U \subseteq T_x M$ 映到

对每个 $x \in M$，映到 $M \times M$ 的子流形 $(\{x\} \times M) \cap U'$，并且限制后得到这些集合之间的一个 C^∞-微分同胚。因此， $\Sigma|_{T_xM \cap U}$ 是一个映到 M 的开子集上的 C^∞-微分同胚，由此对每个 $x \in M$， $\alpha_x := T_{0_x}(\Sigma|_{T_xM}) \in \mathrm{GL}(T_xM)$，并且

$$f\colon TM \to TM,\ f(v) := \alpha^{-1}_{\pi_{TM}(v)}(v)$$

是一个光滑映射。现在 $\Sigma \circ f\colon\ f^{-1}(U) \to M$是一个规范化局部加法。

引理 3.8.17. 对于 $j \in \{1,2\}$，设 M_j 是一个承认局部加法 $\Sigma_j\colon\ U_j \to M_j$ 的光滑流形。将 $T(M_1 \times M_2)$ 与 $TM_1 \times TM_2$ 视为相同，我们可以将 $\Sigma_1 \times \Sigma_2\colon$ $U_1 \times U_2 \to M_1 \times M_2$ 视为 $M_1 \times M_2$ 的一个局部加法。

证明。事实上，映射 $\psi\colon\ M_1 \times M_2 \times M_1 \times M_2 \to M_1 \times M_1 \times M_2 \times M_2$，$(a,b,c,d) \mapsto (a,c,b,d)$ 是一个 C^∞-微分同胚，而 $\psi \circ (\pi_{TM}, \Sigma_1 \times \Sigma_2) = (\pi_{TM_1}, \Sigma_1) \times (\pi_{TM_2}, \Sigma_2)$ 限制为一个到其开像 $U_1' \times U_2'$ 上的 C^∞-微分同胚，其中 $M := M_1 \times M_2$。□

附录：替代构造

若 $f\colon\ M \to N$ 是流形之间的局部微分同胚，且 $f|_A$ 在子集 $A \subseteq M$上是单射，则我们希望找到 M中包含 A 的一个开邻域 U，使得 $f|_U$ 是单射，从而成为到 N的某个开子集上的微分同胚。我们已经讨论过利用仿紧性的此类情形。在本附录中，我们描述存在 U 的其他情形。作为预备，我们研究拓扑空间之间的局部单射映射。

命题 3.8.18。 设 $f\colon\ X \to Y$ 是豪斯多夫拓扑空间之间的连续映射，且 K 是 X的一个紧子集。假设 $f|_K$ 是单射，并且每个 $x \in K$ 都有一个邻域 $W(x)$ 包含于 X，在其上 f 是单射。那么存在某个开子集 $U \subseteq X$，使得 $f|_U$是单射且 $K \subseteq U$。

证明。我们可以假设 $K \neq \emptyset$。令 J 为所有满足 $K \subseteq U$ 的开子集$U \subseteq X$构成的集合。记 $U \leq V$为 U， $V \in J$当且仅当 $V \subseteq U$，我们得到一个有向集 $(J, \leq)$。如果命题的结论不成立，那么对每个 $U \in J$，我们都可以找到 $x_U \neq y_U \in U$，使得 $f(x_U) = f(y_U)$。我们断言，网 $(x_U, y_U)_{U \in J}$在 $X \times X$中有一个子网，记作 $(x_{U(i)}, y_{U(i)})_{i \in I}$，它收敛到某个 $(x, y) \in K \times K$。如果这成立，那么

$$f(x) = \lim f(x_{U(i)}) = \lim f(y_{U(i)}) = f(y)$$

由连续性可知， $x = y$。对于充分大的 $i \in I$，我们有 $x_{U(i)}, y_{U(i)} \in W(x)$，并可由 $f(x_{U(i)}) = f(y_{U(i)})$ 推得 $x_{U(i)} = y_{U(i)}$，这显然荒谬。因此，命题的结论必定成立。

为证明这一断言，假设它不成立。那么，对于每个 $(x,y) \in K \times K$，都存在一个开 (x,y)-邻域 $V(x,y)$，位于 $X \times X$中；并且存在 $(x,y) \in J$，使得对于所有满足 $U \geq U(x,y)$ 的 $U \in J$，都有 $(x_U, y_U) \notin V(x,y)$。事实上，否则

$$I := \{(V,U) \in \mathcal{V}(x,y) \times J \colon (x_U, y_U) \in V\}$$

就可以通过 $(V,U) \le (V',U')$ 构成一个有向集，只要 $V' \subseteq V$ 和 $U' \subseteq U$ 成立；记$\mathcal{V}(x,y)$ 为 (x,y) 在 $X \times X$ 中的开邻域集。此外，$(x_U, y_U)_{(V,U)\in I}$将是 $(x_U, y_U)_{U\in J}$ 的一个子网，并且收敛到 (x,y)；但我们已经排除了此类子网的存在。因此，$U(x,y)$ 和$V(x,y)$ 确实存在。由 $K \times K$ 的紧致性，存在一个非空有限子集 $\Phi \subseteq K \times K$，使得

$$K \times K \subseteq \bigcup_{(x,y)\in\Phi} V(x,y) =: V.$$

根据华莱士引理，存在开子集 $P, Q \subseteq X$，满足 $K \subseteq P, K \subseteq Q$ 和 $P \times Q \subseteq V$。于是 $W := \bigcap_{(x,y)\in\Phi} U(x,y) \in J$。此外，对所有 $(x,y) \in \Phi$，还有 $U := W \cap P \cap Q \in J$ 和 $U \ge W \ge U(x,y)$，因此 $(x_U, y_U) \notin V(x,y)$，从而 $(x_U, y_U) \notin V$。但 $(x_U, y_U) \in U \times U \subseteq P \times Q \subseteq V$，矛盾。□

此外，若命题 3.8.18 中的 f 是局部同胚，则 $f(U)$ 在 Y 中是开集，且 $f|_U \colon U \to f(U)$ 是一个同胚。同理，我们得到：

推论 3.8.19. 设 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ 与 $f \colon M \to N$ 是以局部凸空间为模型的 C^r-流形之间的局部C^r-微分同胚（或者，若 $r \neq \omega$，则为 C^r-粗糙边界流形之间的局部C^r-微分同胚）。若 $K \subseteq M$ 是紧子集且 $f|_K$ 为单射，则存在开子集$U \subset M$，满足 $K \subseteq U$，使得 f（U）在 N 中为开，且 $f|_U \colon U \to f$（U）是C^r-微分同胚。□

命题 3.8.20.设 X 为豪斯多夫拓扑空间，Y 为局部紧空间，$f \colon X \to Y$ 为连续映射，且 $A \subseteq X$ 为 σ-紧子集，使得 f（A）在 Y 中为闭，且 $f|_A$ 为拓扑嵌入。假设每个 $x \in A$ 在 X 中都有邻域 W（x），使得 $f|_{W(x)}$ 为单射。则对某个满足 $A \subseteq U$ 的开子集 $U \subseteq X$，$f|_U$ 为单射。

证明。根据引理 A.5.5，存在紧子集 $L_j \subseteq f(A)$ 和开子集 $O_j \subseteq Y$，满足 $L_j \subseteq O_j$，使得 $f(A) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} L_j$，并且对于所有 $i,\ j \in \mathbb{N}$，均有 $O_i \cap O_j \neq \emptyset$。令 $K_j := (f|_A)^{-1}(L_j)$，其中 $j \in \mathbb{N}$，且$K_0 := \emptyset$。令 $j \in \mathbb{N}$。将命题 3.8.18 应用于 f 和紧集 $K_{j-1} \cup K_j \cup K_{j+1}$，可得一个开子集 $V_j \subseteq X$，使得

$$K_{j-1} \cup K_j \cup K_{j+1} \subseteq V_j$$

并且 $f|_{V_j}$ 是单射。令 $V_0 := X$。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，

$$U_j := V_{j-1} \cap V_j \cap V_{j-1} \cap f^{-1}(O_j)$$

于是是 X 的开子集，使得 $K_j \subseteq U_j$，因此 $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j =: U$。若 $x,\ y \in U$且 $f(x) = f(y)$，则存在 $i,\ j \in \mathbb{N}$，使得 $x \in U_i$且 $y \in U_j$。于是 $f(x) = f(y) \in O_i \cap O_j$，因此 $|i - j| \le 1$，由此 $\{x, y\} \subseteq U_i \cup U_j \subseteq V_j$，故由 $f|_{V_j}$ 的单射性可得 $x = y$。□

命题 3.8.20 可直接推出以下结论。

推论 *3.8.21.* 设 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ *and* $f\colon M \to N$ *be a* C^r-映射，定义在有限维 C^r-流形之间（若 $r \neq \omega$，则定义在具有粗糙边界的局部紧 C^r-流形之间）。设 $A \subseteq M$ 是一个 σ-紧子集，使得 $f(A)$ 在 N 中闭，且 $f|_A$ 是一个拓扑嵌入。此外，假设每个 $x \in A$ 在 M 中都有一个开邻域 W，使得 $f(W)$ 在 N 中开，且 $f|_W\colon W \to f(W)$ 是一个 C^r-微分同胚。那么存在一个开子集 $U \subseteq M$，满足 $K \subseteq U$，使得 $f(U)$ 在 N 中开，且 $f|_U\colon U \to f(U)$ 是一个 C^r- 微分同胚。□

第 3.8 节练习

习题 3.8.1. 设 M 是一个实解析有限维流形，且 $(g_x)_{x\in M}$是 M 上的黎曼度量，并且按照如下意义是实解析的：对于 M的每个坐标图 $\varphi\colon U \to V$，(3.49) 中的映射都是实解析的。证明，对于 M中任意闭子流形 N， $TN^\perp$ 都是实解析向量丛$(TM)|_N$的向量子丛。

任意 σ-紧有限维实解析流形都可以嵌入 $\mathbb{R}^n$中，其中 $n \in \mathbb{N}$取某个值（参见 [Gr58b]）；拉回欧几里得度量后，便可在 M上得到一个实解析黎曼度量。对于后者，可以用典范方式关联一个喷射 $X\colon TM \to T^2(M)$（参见 [La99，第 V 章，定理 7.1]），且该喷射是实解析的。

习题 3.8.2. 设 M是一个有限维实解析流形，且$X\colon TM \to T^2(M)$是一个实解析喷射。证明，与之关联的指数映射（如命题 3.8.10 中所述）是实解析的。若 M是仿紧的，证明与之关联的局部加法 $\Sigma\colon U \to M$（如命题 3.8.13 的证明中所述）是实解析局部加法。利用这样的局部加法，证明定理 3.8.15 中构造的闭子流形 $N \subseteq M$周围的管状邻域是实解析的，即映射 ψ是一个 C^ω-微分同胚。

习题 3.8.3. 设 M是以巴拿赫空间为模型的 C^∞-仿紧光滑流形。设 $N \subseteq M$为一个子流形。设 $X\colon TM \to T^2(M)$ 为 M上的一个喷射，其构造如命题 3.8.9 的证明所述，但此处使用的是 M中适应于子流形 N的坐标图，而非 M的一般坐标图。证明 $X(TN) \subseteq T^2(N)$ 成立，且 $X|_{TN}\colon TN \to T^2(N)$ 是 N的一个喷射。再证明 $X|_{TN}$ 的指数映射是指数映射 $\exp^X$的一个限制。设 $\Sigma\colon U \to M$为相伴的局部加法，如命题 3.8.13 的证明中所述，它是 $\exp^X$的一个限制。将 $\theta := (\pi_{TM}, \Sigma)$ 视为映到其开像 U'上的 C^∞-微分同胚。若 N在 M中是闭的，证明在缩小 U之后，可使 $\Sigma|_{U\cap TN}$ 成为 N的一个局部加法。在将 U'替换为一个与 $N \times N$相交于相对开集 $\theta(U \cap TN)$ 的开子集之后，还可以进一步使得 $U' \cap (N \times N) = \theta(U \cap TN)$。

3.9 附录：李代数上同调

李代数的上同调是理解如何由给定的李代数 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{a}$ 构造新的李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$、并使得$\mathfrak{a} \trianglelefteq \widehat{\mathfrak{g}}$ 且 $\widehat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{g}$的自然工具。若假定 $\mathfrak{a}$ 为阿贝尔的，则出现这一情形的一个重要特殊情形。我们将特别看到，李代数的阿贝尔扩张如何可由某个上同调空间来参数化。

设 $\mathbb{K}$ 是一个特征零拓扑域（假设所有域运算都是连续的）。拓扑李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathbb{K}$-李代数，同时也是一个拓扑向量空间，且其李括号是连续双线性映射。拓扑 $\mathfrak{g}$-模是一个 $\mathfrak{g}$-模 V，同时也是一个拓扑向量空间，且其模结构视为映射 $\mathfrak{g} \times V \to V$，$(x, v) \mapsto x.v$ 时是连续的。注意，域 $\mathbb{K}$ 上李代数 $\mathfrak{g}$ 的每个模 V，在赋予 $\mathbb{K}$、$\mathfrak{g}$ 和 V 离散拓扑后，都会成为拓扑模。从这个意义上说，以下所有内容尤其适用于特征零域上李代数的一般模。

定义 3.9.1。设 V 是拓扑李代数$\mathfrak{g}$的一个拓扑模。对于 $p \in \mathbb{N}_0$，令 $C_c^p(\mathfrak{g}, V)$ 表示连续交错映射$\mathfrak{g}^p \to V$构成的空间，即取值于模*Lie* 代数 p-上链 V。记作

$$C_c^\bullet(\mathfrak{g}, V) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} C_c^p(\mathfrak{g}, V).$$

注意，$C_c^1(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, V)$ 是连续线性映射空间 $\mathfrak{g} \to V$。我们采用约定 $C_c^0(\mathfrak{g}, V) = V$。于是得到一个链复形，其微分为

$$d_{\mathfrak{g}} \colon C_c^p(\mathfrak{g}, V) \to C_c^{p+1}(\mathfrak{g}, V)$$

在 $f \in C_c^p(\mathfrak{g}, V)$ 上定义为

$$\begin{aligned}(d_{\mathfrak{g}} f)(x_0, \dots, x_p) := &\sum_{j=0}^{p} (-1)^j x_j . f(x_0, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_p),\end{aligned}$$

其中 $\widehat{x}_j$ 表示省略 x_j。注意，$\mathfrak{g}$ 上括号的连续性以及对 V 的作用意味着 $d_{\mathfrak{g}} f$ 是连续的，因此是$C_c^{p+1}(\mathfrak{g}, V)$ 的一个元素，因为 $d_{\mathfrak{g}} f$ 是交错的（见练习 3.9.1）。

对于次数较低的元素，特别有：

$$
\begin{aligned}
p=0:\quad & d_{\mathfrak{g}}f(x)=x.f\\
p=1:\quad & d_{\mathfrak{g}}f(x,y)=x.f(y)-y.f(x)-f([x,y])\\
p=2:\quad & d_{\mathfrak{g}}f(x,y,z)\\
&\quad =x.f(y,z)-y.f(x,z)+z.f(x,y)\\
&\qquad -f([x,y],z)+f([x,z],y)-f([y,z],x)\\
&\quad =\sum_{\text{cyc.}}x.f(y,z)-f([x,y],z),
\end{aligned}
$$

其中我们使用了记号

$$\sum_{\text{cyc.}}\gamma(x,y,z):=\gamma(x,y,z)+\gamma(y,z,x)+\gamma(z,x,y).$$

在此意义下，雅可比恒等式写作 $\sum_{\text{cyc.}}[[x,y],z]=0.$

下面我们将证明 $d_{\mathfrak{g}}^2=0$，因此空间 $Z_c^p(\mathfrak{g},V):=\ker(d_{\mathfrak{g}}|_{C_c^p(\mathfrak{g},V)})$ of p-余循环 包含空间 $B_c^p(\mathfrak{g},V):=d_{\mathfrak{g}}(C_c^{p-1}(\mathfrak{g},V))$ of p-余边界。商空间

$$H_c^p(\mathfrak{g},V):=Z_c^p(\mathfrak{g},V)/B_c^p(\mathfrak{g},V)$$

是 p阶连续上同调空间，其系数取值于 $\mathfrak{g}$ 上的 $\mathfrak{g}$-模 V。我们将 $[f]:=f+B_c^p(\mathfrak{g},V)$ 记作余循环 f的上同调类。

在 $C_c^\bullet(\mathfrak{g},V)$ 上，我们有 $\mathfrak{g}$的自然表示，对于 $x\in\mathfrak{g}\,\text{and}f\in C_c^p(\mathfrak{g},V)$，由李导数给出

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_xf)(x_1,\dots,x_p)&=x.f(x_1,\dots,x_p)-\sum_{j=1}^{p}f(x_1,\dots,[x,x_j],\dots,x_p)\\
&=x.f(x_1,\dots,x_p)+\sum_{j=1}^{p}(-1)^jf([x,x_j],x_1,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p)
\end{aligned}
$$

（见习题 3.9.2）。对于每个 $x\in\mathfrak{g}$，我们还有一个插入映射

$$i_x\colon C_c^p(\mathfrak{g},V)\to C_c^{p-1}(\mathfrak{g},V),\quad \big(i_xf\big)(x_1,\dots,x_{p-1})=f(x,x_1,\dots,x_{p-1}),$$

其中，我们定义 i_x 在 $C_c^0(\mathfrak{g},\ V)\cong V$ 上为 0。

引理 3.9.2. 对于 x、$y\in\mathfrak{g}$，我们有以下恒等式：

(1) $\mathcal{L}_x=d_{\mathfrak{g}}\circ i_x+i_x\circ d_{\mathfrak{g}}$ (Cartan公式)。(2) $[\mathcal{L}_x,i_y]=i_{[x,y]}$。(3) $[\mathcal{L}_x,d_{\mathfrak{g}}]=0$。(4) $d_{\mathfrak{g}}^2=0$。(5) $\mathcal{L}_x(Z_c^p(\mathfrak{g},V))\subseteq B_c^p(\mathfrak{g},V)$。特别地，$H_c^p(\mathfrak{g},V)$ 上的自然 $\mathfrak{g}$作用是平凡的。

证明。(1) 利用插入映射 i_{x_0}，我们可以将余边界算子的公式改写为

$$\begin{aligned}\big(i_{x_0}.d_{\mathfrak{g}}f\big)(x_1,\dots,x_p) =& x_0.f(x_1,\dots,x_p)-\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}x_j.f(x_0,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p)\\ &+\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j}f([x_0,x_j],x_1,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p)\\ &+\sum_{1\le i<j}(-1)^{i+j}f([x_i,x_j],x_0,\dots,\widehat{x}_i,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p)\\ =& x_0.f(x_1,\dots,x_p)-\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}x_j.f(x_0,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p)\\ &-\sum_{j=1}^{p}f(x_1,\dots,x_{j-1},[x_0,x_j],x_{j+1},\dots,x_p)\\ &-\sum_{1\le i<j}(-1)^{i+j}f(x_0,[x_i,x_j],\dots,\widehat{x}_i,\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_p)\\ =&(\mathcal{L}_{x_0}f)(x_1,\dots,x_p)-d_{\mathfrak{g}}\big(i_{x_0}f\big)(x_1,\dots,x_p).\end{aligned}$$

这证明了我们的断言。

(2) $\mathcal{L}_x$ 的显式公式表明，对于 $y=x_1$，有 $i_y\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_x i_y - i_{[x,y]}$.

(3),(4) 设 φ: $C_c^\bullet(\mathfrak{g},V)\to C_c^\bullet(\mathfrak{g},V)$是一个线性映射，存在一个 $\varepsilon\in\{\pm1\}$ 使得对所有 $x\in\mathfrak{g}$ 都有 $\varphi\circ i_x=\varepsilon i_x\circ\varphi$，并且存在一个 $k\in\mathbb{N}$ 使得对每个 $p\in\mathbb{N}_0$都有 $\varphi(C_c^p(\mathfrak{g},V))\subseteq C_c^{p+k}(\mathfrak{g},V)$。我们断言 $\varphi=0$。由于算子i_x: $C_c^p(\mathfrak{g},V)\to C_c^{p-1}(\mathfrak{g},V)$, $x\in\mathfrak{g}$，能够分离这些点，只需证明对每个 $x\in\mathfrak{g}$， $i_x\circ\varphi=\varepsilon\varphi\circ i_x$ 都为零。在 $C_c^0(\mathfrak{g},V)$上，由 i_x的定义可得这一点；而在 $C_c^p(\mathfrak{g},V)$， $p\in\mathbb{N}$上，则可通过归纳法得到。

现在证明（3）。由（1）和（2）可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[x,y]} &= [\mathcal{L}_x,\mathcal{L}_y]=[d_{\mathfrak{g}}\circ i_x,\mathcal{L}_y]+[i_x\circ d_{\mathfrak{g}},\mathcal{L}_y]\\ &= [d_{\mathfrak{g}},\mathcal{L}_y]\circ i_x + d_{\mathfrak{g}}\circ i_{[x,y]} + i_{[x,y]}\circ d_{\mathfrak{g}} + i_x\circ[d_{\mathfrak{g}},\mathcal{L}_y]\\ &= [d_{\mathfrak{g}},\mathcal{L}_y]\circ i_x + \mathcal{L}_{[x,y]} + i_x\circ[d_{\mathfrak{g}},\mathcal{L}_y],\end{aligned}$$

因此， $\varphi:=[d_{\mathfrak{g}},\mathcal{L}_y]$ 与算子 i_x （$\varepsilon=-1$ 和 $k=1$）反交换。因此，前一段中的论证表明 φ 为零，这就是（3）。

为得到（4），我们考虑算子 $\varphi=d_{\mathfrak{g}}^2$。将（3）与Cartan公式结合，可得

$$0=[d_{\mathfrak{g}},\mathcal{L}_x]=d_{\mathfrak{g}}^2\circ i_x - i_x\circ d_{\mathfrak{g}}^2, \tag{C.2}$$

因此上述论证适用于 $\varepsilon=1$ 和 $k=2$。这证明了$d_{\mathfrak{g}}^2=0$。

(5) 由 Cartan公式 (1) 立即得出。 □

定义 3.9.3。拓扑向量空间 V 的线性子空间 W 称为（拓扑）分裂的，如果它是闭的，且存在一个连续线性映射 $\sigma\colon V/W \to V$，使得该映射

$$W \times V/W \to V, \quad (w,x) \mapsto w + \sigma(x)$$

是拓扑向量空间同构。注意，W 的闭性保证商拓扑使 V/W 成为豪斯多夫空间，并且相对于诱导的向量空间结构，它是一个拓扑向量空间。若拓扑向量空间之间的连续线性映射 $f\colon V \to W$ 满足子空间 $\ker(f) \subseteq V$ 和 $\operatorname{im}(f) \subseteq W$ 拓扑分裂，且诱导映射 $V/\ker(f) \to \operatorname{im}(f)$ 是拓扑向量空间同构，则称该映射为（拓扑）分裂。

注 3.9.4。设 $\mathfrak{g}$ 是一个拓扑李代数，并且

$$0 \to V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \to 0$$

是拓扑 $\mathfrak{g}$-模的拓扑分裂短正合列。将 V_1 认作 $\alpha(V_1) \subseteq V_2$，我们得到单射 $\alpha_p\colon C_c^p(\mathfrak{g}, V_1) \to C_c^p(\mathfrak{g}, V_2)$ 和满射 $\beta_p\colon C_c^p(\mathfrak{g}, V_2) \to C_c^p(\mathfrak{g}, V_3)$，它们导出一个短正合列

$$0 \to C_c^\bullet(\mathfrak{g}, V_1) \xrightarrow{\alpha_*} C_c^\bullet(\mathfrak{g}, V_2) \xrightarrow{\beta_*} C_c^\bullet(\mathfrak{g}, V_3) \to 0$$

上链复形的。这些映射可以组合成一个长正合列

$$\begin{aligned} 0 \to H_c^0(\mathfrak{g}, V_1) &\to H_c^0(\mathfrak{g}, V_2) \to H_c^0(\mathfrak{g}, V_3) \\ &\to H_c^1(\mathfrak{g}, V_1) \to H_c^1(\mathfrak{g}, V_2) \to H_c^1(\mathfrak{g}, V_3) \to \dots, \end{aligned}$$

其中，对于 $p \in \mathbb{N}_0$，连接映射

$$\delta\colon H_c^p(\mathfrak{g}, V_3) \to H_c^{p+1}(\mathfrak{g}, V_1)$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$定义为 $\delta([f]) = [d_{\mathfrak{g}} f]$，其中 $f \in C_c^p(\mathfrak{g}, V_2)$ 满足 $\beta \circ f = f$，这意味着当 f 是余循环时，$\operatorname{im}(d_{\mathfrak{g}} f) \subseteq V_1$。

附录 3.8 的习题

习题 3.9.1. 设 $f \in C_c^p(\mathfrak{g}, V)$ 和 $x_0, \dots, x_p \in \mathfrak{g}$。证明：如果存在 $a < b$ 属于 $\{0, \dots, p\}$，使得 $x_a = x_b$，那么 $d_{\mathfrak{g}} f(x_0, \dots, x_p) = 0$。推导出 $d_{\mathfrak{g}} f \in C_c^{p+1}(\mathfrak{g}, V)$。

习题 3.9.2.证明

$$(\mathcal{L}_x(\mathcal{L}_y f) - \mathcal{L}_y(\mathcal{L}_x f))(x_1, \dots, x_p) = (\mathcal{L}_{[x,y]} f)(x_1, \dots, x_p)$$

对所有 $f \in C_c^p(\mathfrak{g}, V)$ 以及 $x, y, x_1, \dots, x_p \in \mathfrak{g}$。

3.10 第3章的注释与评论

本章将有限维流形理论中的相关概念（切空间和切映射；向量场；微分形式）推广到了以局部凸空间为模型的流形情形。很多时候，我们只需从经典定义中选取恰当的定义即可。例如，切向量的几何（运动学）定义和形式定义都适用于无限维流形（而广受欢迎的点导子解释则不适用，因为局部凸空间通常存在过多的点导子，而且光滑单位分解未必存在）。不过，与有限维情形相比，我们也发现了种种差异。现在我们回顾其中最重要的差异，并补充一些背景信息。

– 尽管对于以局部凸空间为模型的流形，我们仍有可用的局部坐标图 φ ，但并没有严格意义上的“局部坐标” $\varphi(p) = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$。因此，所有概念都必须以无坐标的方式引入和讨论。对于巴拿赫流形，这种无坐标的表述已在 Lang 的经典教科书（如 [La99]）中详加阐述。然而，此处还需要进一步偏离经典定义，而这些偏离在巴拿赫情形中并无必要。– 切丛 TM 的定义不会引发任何问题，但对于以非赋范局部凸空间为模型的光滑流形，一般无法在其对偶丛 $T^*M := \bigcup_{x\in M} (T_xM)'$ 上定义典范光滑向量丛结构 M （例如，赋予拓扑对偶空间 $(T_xM)'$ 在有界集上一致收敛的拓扑）。其背后的原因是一个众所周知的难题：对于每个非赋范局部凸空间 E 以及其连续自同态空间 $\mathcal{L}(E)$ 上的每一种向量拓扑，求值映射 $\mathcal{L}(E) \times E \to E$，$(A, x) \mapsto A(x)$ 都是不连续的（参见 [Ms63]和 [KM97，第 2]页）。[Gl07e]给出了一个具体反例；在此情形下， TM 是平凡丛，但 TM 的不同平凡化会在 T^*M 上产生不相容的向量丛结构。由于这类病态现象，一般无法像有限维理论中惯常的做法那样，将1-形式（以及更高阶微分形式）定义为适当光滑向量丛中的光滑截面。然而，正如 Beggs [Bg87],最先指出的，这个问题可以绕开。我们选择了一种尽可能基础、简明的微分形式替代定义。等价地，读者可以将 E值光滑 p形式理解为 M 上的光滑 E值映射 ω : $\bigoplus_{j=1}^{p} TM \to E$，其定义在向量丛 TM的 p重惠特尼和上，并满足对每个 $x \in M$，$\omega|_{(T_xM)^p}$ 都是交错 p线性映射。我们指出，便利分析框架中不存在上述问题。在这一框架下，总可以构造余切丛和张量丛（见 [KM97]）。

– 此外，由于众所周知的病态现象（如习题 2.4.2 和 2.4.3 中所遇到的），并非每个向量场 Y 都有流，因此我们对微分形式的李导数 $\mathcal{L}_Y\omega$ 所作的定义，也不得不偏离有限维流形和巴拿赫流形的传统定义（如注 3.6.17 中所述）。

我们指出，文献中讨论的巴拿赫流形 M 的子流形，通常就是我们所说的分裂子流形，它们以建模空间的一个分裂向量子空间为模型 M （例如，参见 Bourbaki 的著作，其中非分裂子流形被称为拟子流形）。由于在一般的局部凸流形情形下，分裂条件的用处要小得多，我们倾向于不将其纳入子流形的定义，而仅把它作为一个可满足也可不满足的附加条件。

关于以局部凸空间为模型的流形之间的浸入和浸没，更详尽的讨论可参见 [Gl15a]（对于 Fr´echet 流形的情形，则参见 [Ham82] ）。特别是， [Jo 82] 指出，映射 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x^2,\ x^3)$具有浸入的泛性质，但其微分并非处处非零。值得注意的是，将有限维向量空间替换为巴拿赫空间时，命题 3.3.29 也有相应的变体。关于命题 3.7.11 及其推论（涉及光滑可缩基空间上的向量丛）的讨论，参见 [Ha02，第 20–21], 页，其中考察了仿紧拓扑空间上的有限维拓扑向量丛。它们是 [Gl20a, §15]的特殊情形。

关于方便微分学框架下的光滑正则性与光滑仿紧性的详尽讨论，参见 [KM97] 。值得注意的是，每个希尔伯特空间都是光滑仿紧的（参见 [KM97，推论 16.16] 及其中所列参考文献），每个核 Fr´echet 空间和每个核 Silva 空间也都是如此（参见 [KM97，定理 16.10]）。此外，有限维光滑流形的归纳极限 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ （如定理 4.5.1 中所述）也已知是光滑仿紧的（参见 [Gl05c，命题 3. 6]）。

关于代数拓扑中的光滑化技术，参见 [MW09、Wo09、Gl20a]; 另参见 [Hr76]及其中的参考文献。

带角流形可追溯至 [Ce61] 和 [Dou61], ，也曾用于 [Mr80]; 带角巴拿赫流形则在 [MO92] 中得到研究。这里将带粗糙边界的流形作为一个更具包容性的框架引入。黎曼流形的每个强凸紧子集都是全子流形，因此也是带粗糙边界的流形 [RS18]。

我们对喷射以及管状邻域的讨论都受到了 [La99] 的启发。关于便利微分学中的局部加法，参见 [KM97, 42.4]。

4 无穷维流形的基本构造

本章构造了几大类无限维流形。值得注意的是，对于每个紧致光滑流形 M 和仿紧有限维光滑流形 N，我们将集合 $C^k(M,N)$ 中从 M 到 N 的 N 值 C^k 映射构造成光滑流形。更一般地， N 可以是任意具有局部加法的光滑流形。这一构造对无限维李理论至关重要：首先，对于每个李群 K，我们都能在 $C^k(M,K)$ 上得到李群结构，特别是在环群 $C^k(\mathbb{S},K)$ 上（见命题 11.1.1）。其次，光滑微分同胚群 $\mathrm{Diff}(M)$ 是 $C^\infty(M,M)$ 的开子集，而作为开子集的光滑流形结构使其成为李群（见定理 13.1.1）。作为起点，我们为任意以局部凸空间为模型的 C^k 流形 M 和 N 定义 $C^k(M,N)$ 上的拓扑。如果 $N:=F$ 是局部凸空间，那么后一个拓扑使 $C^k(M,F)$ 成为局部凸空间。同样，对于给定的向量丛 $E\to M$，取 $N:=E$，则在 C^k 截面子集 $\Gamma_{C^k}(E)\subseteq C^k(M,E)$ 上诱导的拓扑是局部凸向量拓扑。我们研究这类映射空间或截面空间之间非线性映射的可微性，继续第 1.7 节中开始的讨论。值得注意的是，我们现在也为流形乘积上的函数空间得到了指数律（见第 4.1 节）。在此基础上，我们进行以下构造：

紧致流形上的映射流形。 上文提到的 $C^k(M,\ N)$ 上的光滑流形结构将在第 4.2 节中构造，其中 M 为紧致流形。

流形的细盒积。 对于任意的光滑流形序列 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们在笛卡尔积上构造一种光滑流形结构

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n,$$

它配备了一种比乘积拓扑（也比盒拓扑）更精细的拓扑。这样的流形记作 $\prod_{n\in\mathbb{N}}^{\mathrm{fb}} M_n$，称为细盒积 （见第 4.3 节）。

非紧流形上的映射流形。对于每个 σ紧致有限维光滑流形 M 以及具有局部加法的光滑流形 N，我们证明映射的像

$$\rho\colon C^k(M,N)\to\prod_{n\in\mathbb{N}}^{\mathrm{fb}}C^k(M_n,N),\quad f\mapsto(f|_{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$$

对于 M 由紧的满子流形 M_n构成的每个局部有限覆盖（M_n）$_{n\in\mathbb{N}}$，该像都是一个子流形。我们为 C^k（M，N）赋予光滑流形结构，使ρ 成为到该像上的 C^∞微分同胚；此结构独立于（M_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 的选择（见第 4.4 节）。

有限维流形的直接极限。对于每个递增序列，我们在并集 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}M_n$ 上构造一种自然的光滑流形结构

$$M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots$$

有限维 C^∞ 流形，使得所有包含映射 $M_n\to M_{n+1}$ 都是光滑浸入（见第 4.5 节）。

对于紧 M 上的映射所构成的相应李群 C^k(M，K) 和微分同胚群 Diff(M)，感兴趣的读者可以从第 4.2 节直接跳到第 11 章和第 13 章；对于非紧致 M，第 4.3 节和第 4.4 节是预备知识。构造李群结构不需要其他章节的额外理论。[1] 同样，第 12 章中在有限维李群 $G_1\subseteq G_2\subseteq\cdots$ 的递增并$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n$ 上构造李群结构，只以第 4.5 节为前提。我们已经见识过连续逆代数的单位群，它们是无穷维李群的另一个基本例子来源。此外，第 10 章的部分内容也可以在不借助额外李理论的情况下阅读。本章关于紧开 C^k 拓扑的结果很有用。

4.1 流形上的函数空间与截面空间

现在我们赋予 C^k流形 M与 N之间的 C^k映射集合 C^k(M,N)一个拓扑，即所谓的紧-开 C^k-拓扑。作为特殊情形，我们得到流形上向量值 C^k函数空间上的拓扑，以及向量丛中截面空间上的拓扑。

4.1.1. 一般约定。 我们令 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$，并考虑基域 $\mathbb{K}$上的流形。除非另有说明，第4.1节中所考虑的所有流形均以任意局部凸空间为模型，并且可以具有粗糙边界。

$C^k(M,N)$上的紧-开 C^k-拓扑

若 M 是一个 C^k流形，我们通过 $T^0M:=M$和 $T^jM:=T(T^{j-1}M)$ 定义其迭代切丛，其中 $j\in\mathbb{N}$满足 $j\le k$。

[1] 关于得到性态良好的（正则）李群这一补充信息，使用了第6.1节和第6.4节的基本结果。

定义 4.1.2. 设 M 和 N 是 C^k流形，其中 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。我们将 $C^k(M,N)$ 记为所有 C^k 映射 $f\colon M \to N$ 的集合，并赋予相对于下列映射的始拓扑

$$T^j : C^k(M,N) \to C(T^kM, T^kN),\ f \mapsto T^k f,$$

其中 $C(T^kM, T^kN)$ 赋有紧开拓扑，$T^0 f := f$，且当 $j \geq 1$ 时，$T^j f := T(T^{j-1}f)$。

注 4.1.3. (a) 由于 $C(M, N)$ 是豪斯多夫的，且点求值 $\varepsilon_x\colon C(M, N) \to N, f \mapsto f(x)$ 对所有 $x \in M$ 都连续，因此 $C^k(M, N)$ 也是豪斯多夫的，且点求值 $\varepsilon_x\colon C^k(M, N) \to N$ 连续。

(b) 若 M 和 N 是光滑流形，则 $C^\infty(M, N) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(M, N)$，并且 $C^\infty(M, N)$ 上的拓扑关于包含映射 $C^\infty(M, N) \to C^k(M, N)$ 对 $k \in \mathbb{N}_0$ 是初始的（由引理 A.2.7 可知）。因此

$$C^\infty(M,N) = \varprojlim C^k(M,N)$$

是射影系统 $C^0(M, N) \leftarrow C^1(M, N) \leftarrow \cdots$的射影极限（所有极限映射和粘合映射均为相应的包含映射）。

引理 4.1.4. 设 N、M 和 L 是 C^k-流形，且具有 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，并且$g\colon M \to L$ 是一个 C^k-映射。则有以下结论：

(a) *The map* $C^k(g,N)\colon C^k(L,N) \to C^k(M,N),\ f \mapsto f \circ g$ *is continuous.*
(b) *The map* $C^k(N,g)\colon C^k(N,M) \to C^k(N,L),\ f \mapsto g \circ f$ *is continuous.*

证明. (a)成立，因为对于每个满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}_0$，由引理 A.6.9，$T^j(f \circ g) = T^j f \circ T^j g = C(T^j g, T^j N)(T^j f) \in C(T^j M, T^j N)$ 关于 $f \in C^k(L, N)$ 连续依赖。

(b)成立，因为对于每个满足 $j \leq k$ 的 $j \in \mathbb{N}_0$，由引理 A.6.3，$T^j(g\circ f) = T^j g \circ T^j f = C(T^j N, T^j g)(T^j f) \in C(T^j N, T^j L)$ 关于 $f \in C^k(N, M)$ 连续依赖。□

注 4.1.5。设 M 和 N 是 C^k-流形。

(a) 假设 $S \subseteq M$ 赋有一个 C^k-流形结构，使包含映射 $j\colon S \to M$ 成为一个 C^k-映射（例如，S 可以是 M 的任意开子集，或者 M 是一个无边流形，而 S 是 M 的子流形）。那么限制映射

$$C^k(M,N) \to C^k(S,N),\ f \mapsto f|_S$$

是连续的（因为它与 $C^k(j, N)$ 一致）。

(b) 若 $S \subseteq N$ 是子流形，则 $C^k(M,S)$上的紧开 C^k-拓扑与由 $C^k(M, N)$诱导的拓扑一致。这是因为 T^jS带有由 T^jN诱导的拓扑（见引理 3.5.23），从而对每个满足 $j \leq k$的 $j \in \mathbb{N}_0$，由引理 A.6.5，$C(T^jM, T^jN)$ 在 $C(T^jM, T^jS)$上诱导紧开拓扑。对全子流形 $S \subseteq N$同样成立。

引理 *4.1.6.* 若 $k \in \mathbb{N}_0$，则对所有 $j \in \{0,1,\dots,k\}$，$T^j\colon C^k(M,N) \to C^{k-j}(T^jM,T^jN)$是拓扑嵌入。特别地，映射$T^k\colon C^k(M,N) \to C(T^kM,T^kN)$，$f \mapsto T^kf$是拓扑嵌入；并且若 $k \geq 1$，则 $T\colon C^k(M,N) \to C^{k-1}(TM,TN)$，$f \mapsto Tf$是拓扑嵌入。

证明。 只需证明最后一个断言。根据定义 4.1.2，映射

$$C^k(M,N) \to C(M,N) \times C^{k-1}(TM,TN),\ f \mapsto (f,Tf)$$

是一个拓扑嵌入（参见引理 A.2.7）。令 $\mathcal{O}$ 为 $C^k(M,N)$ 上的紧开 C^k 拓扑，令 $\mathcal{T}$为 $C^k(M,N)$ 上使 $T\colon C^k(M,N) \to C^{k-1}(TM,TN)$ 成为拓扑嵌入的拓扑。由前述内容可知，$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$。若能证明 $\iota\colon (C^k(M,N),\mathcal{T}) \to C(M,N)$ 连续，则可推出 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$（进而也可推出 $\mathcal{O} = \mathcal{T}$）。令 $\pi_N\colon TN \to N$为丛投影，$0_M\colon M \to TM$, $x \mapsto 0 \in T_xM$ 为零截面（二者均为 C^{k-1}）。那么对于所有 $x \in M$，都有 $\pi_N(Tf(0_M(x))) = \pi_N(0_N(f(x))) = f(x)$，因此

$$\iota(f) = f = (C(M,\pi_N) \circ C(0_M,TN))(Tf),$$

它连续依赖于 $f \in (C^k(M,N),\mathcal{T})$（参见引理 A.6.9 和引理 A.6.3）。□

引理 4.1.7。 设 M、N_1和 N_2 是带有 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 的 C^k-流形，且$\mathrm{pr}_i\colon N_1 \times N_2 \to N_i$ 是 $i \in \{1,2\}$ 中到第 i 个分量的投影。那么映射

$$\Phi := (C^k(M,\mathrm{pr}_1), C^k(M,\mathrm{pr}_2))\colon C^k(M,N_1 \times N_2) \to C^k(M,N_1) \times C^k(M,N_2)$$

将 f 映至 $(\mathrm{pr}_1 \circ f,\ \mathrm{pr}_2 \circ f)$ 是一个同胚。

证明。 根据注 4.1.3(b)，只需考虑 $k \in \mathbb{N}_0$。若 $k = 0$，则由引理 A.6.7 可得该断言。现在设 $k \in \mathbb{N}$，并假设以 k 替换 $k-1$ 时该断言成立。由引理 3.2.6，Φ 是一个双射；因此只需证明 Φ 是一个拓扑嵌入。根据引理 4.1.6，这当且仅当 $(T \times T) \circ \Phi\colon C^k(M, N_1 \times N_2) \to C^{k-1}(TM, TN_1) \times C^{k-1}(TM, TN_2)$ 是一个拓扑嵌入。现在

$$\psi := (T\,\mathrm{pr}_1, T\,\mathrm{pr}_2)\colon T(N_1 \times N_2) \to TN_1 \times TN_2$$

是一个 C^{k-1}-微分同胚。因此

$$\begin{aligned} C^{k-1}(TM,T(N_1 \times N_2)) &\sim C^{k-1}(TM,TN_1 \times TN_2) \\ &\sim C^{k-1}(TM,TN_1) \times C^{k-1}(TM,TN_2), \end{aligned}$$

其中，第一个同胚为 $C^{k-1}(TM,\ \psi)$（参见引理 4.1.4(b)），第二个同胚由归纳假设给出。令

Θ：$C^{k-1}(TM,\ T(N_1\times N_2))\ \to C^{k-1}(TM,\ TN_1)\ \times C^{k-1}(TM,\ TN_2)$ 为由此得到的同胚。利用引理 4.1.6，我们推得 $\Theta\circ T\ =(T\times T)\circ\Phi$ 是一个拓扑嵌入。这就完成了归纳步骤。□

引理 4.1.8. 设 M、N_1 和 N_2 是带有 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 g 的 C^k-流形，且 $M\times N_1\to N_2$ 是一个 C^k-映射。那么

$$g_*\colon C^k(M,N_1)\to C^k(M,N_2),\ \ f\mapsto g\circ(\mathrm{id}_M,f)$$

是连续的。

证明。如引理 4.1.7 中所述，将 $C^k(M,M\times N_1)$ 作为拓扑空间与 $C^k(M,M)\times C^k(M,N_1)$ 等同，我们有 $g_*(f)\ =C^k(M,g)(\mathrm{id}_M,f)\ \in C^k(M,N_2)$，由引理 4.1.4(b)，它在 $f\in C^k(M,N_1)$ 中连续。□

引理 4.1.9.给定 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$，设 M 和 N 是 C^k-流形。设$(V_i)_{i\in I}$ 是 M 的一族全子流形，其内部 V_i^0 相对于 M 覆盖 M。那么

$$\rho\colon C^k(M,N)\to\prod_{i\in I}C^k(V_i,N),\ \ f\mapsto(f|_{V_i})_{i\in I}$$

是像为闭集的拓扑嵌入。

证明。 ρ的像是所有满足以下条件的$(\gamma_i)_{i\in I}\ \in\prod_{i\in I}C^k(V_i,N)$的集合：对所有 $i,k\in I$和 $x\in V_i\cap V_k$，$\gamma_i(x)\ =\gamma_j(x)$。后一集合在$\prod_{i\in I}C^k(V_i,N)$中是闭集（参见注 4.1.3(a)）。

剩下要证明的是，紧开 C^k-拓扑 $\mathcal{O}$ 与关于限制映射 $\rho_i\ :=C^k(\eta_i,N)\colon C^k(M,N)\ \to C^k(V_i,N)$（其中 $i\in I$）的始拓扑 $\mathcal{T}$ 一致，其中 $\eta_i\colon V_i\ \to M$是包含映射（它是 C^k）。由于映射 $C^k(\eta_i,N)$由引理 4.1.4(a)可知是连续的，因此有 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{O}$。限制映射

$$r_i\colon C^k(V_i,N)\to C^k(V_i^0,N)$$

由于连续，我们有 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}$关于映射 $r_i\circ\rho_i\colon\ C^k(M,N)\ \to C^k(V_i^0,N),\ \gamma\mapsto\gamma|_{V_i^0}$ 所诱导的 $C^k(M,N)$ 上的始拓扑 $\mathcal{S}$。因此，只要我们能证明 $\mathcal{S}=\mathcal{O},\ \ \mathcal{T}=\mathcal{O}$就成立。将每个 V_i替换为 V_i^0后，我们便可假设每个 V_i 都是 M的开子流形。

对于每个满足 $j\le k$ 的 $j\in\mathbb{N}_0$，集合 T^jV_i 构成 T^jM 关于 $i\in I$ 的一个开覆盖，因此 $C(T^jM,T^jN)$ 上的紧开拓扑相对于限制映射 $\rho_{i,j}\colon C(T^jM,T^jN)\ \to C(T^jV_i,T^jN)$（$i\in I$）是始拓扑（见引理 A.6.11）。由始拓扑的传递性（引理 A.2.7），$C^k(M,N)$ 上的拓扑 $\mathcal{O}$ 相对于映射 $\rho_{i,j}\circ T^j$（针对 $i\in I$ 和 $j\in\mathbb{N}_0$，其中 $j\le k$）是始拓扑。同样由始拓扑的传递性，相对于映射 $\rho_{i,j}\circ T^j\ =T^j\circ\rho_i$（根据前述内容，该拓扑为 $\mathcal{O}$）在 $C^k(M,N)$ 上诱导的始拓扑，与相对于映射 ρ_i 的始拓扑 $\mathcal{T}$ 相同。□

我们再记述一个简单的事实。

引理 4.1.10。设 N 和 M 是 C^k-流形，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。考虑映射 $c\colon N \to C^k(M,N)$，它将 $x \in N$ 映为常值函数$c_x\colon M \to N, y \mapsto x$。则 c 连续。

证明。根据注 4.1.3(b)，我们可以假设 k 是有限的。对于 $k=0$，结论成立，因为对每个紧子集 $K \subseteq M$ 和开子集 $V \subseteq N$，$c^{-1}(\lfloor K,V \rfloor)$ 都是开集（即 V 或 N）。现在假设映射 $C\colon TN \to C^{k-1}(TM,TN)$（它将 $v \in TN$ 映为常值映射$C_v\colon TM \to TN, w \mapsto v$）是连续的。令 $0_N\colon N \to TN$ 为零截面，它将 $x \in N$ 映为 $0_N(x) = 0 \in T_xN$。我们知道 0_N 是 C^{k-1}。由于 $T(c_x) \in C^{k-1}(TM,TN)$ 是对 $x \in N$ 而言的常值映射 $C_{0_N(x)}\colon TM \to TN$，映射$T \circ c\colon N \to C^{k-1}(TM,TN)$ 与 $C \circ 0_N$ 一致，因此连续。映射 $T\colon C^k(M,N) \to C^{k-1}(TM,TN)$ 是拓扑嵌入，由此可知 c 连续。□

流形上的向量值 C^k-函数空间

现在我们考虑 $C^k(M, N)$ 在 N 为局部凸拓扑向量空间这一特殊情形下的情况。

命题 4.1.11. 给定 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，设 M 是一个 C^k-流形，且 F 是一个局部凸空间。那么，紧开 C^k-拓扑(如定义 4.1.2) 所述，使得 $C^k(M,F)$ 成为一个局部凸拓扑向量空间。

证明。令 J 为所有满足 $j \le k$ 的 $j \in \mathbb{N}_0$ 的集合。现在，$TF = F \times F$ 是一个局部凸空间，而 $T\colon C^k(M, F) \to C(TM, TF), f \mapsto (f \circ \pi_M, df)$ 是线性的（其中 $\pi_M\colon TM \to M$ 是丛投影）。更一般地，对于每个 $j \in J$，T^jF 是一个局部凸空间（与 F^{2^j} 同构），且映射$T^j\colon C^k(M, F) \to C(T^jM, T^jF)$ 是线性的，因此拓扑嵌入

$$\Phi\colon C^k(M,F) \to \prod_{j \in J} C(T^jM, T^jF)$$

是线性的。和 Φ 的像一样，$C^k(M, F)$ 也是一个局部凸空间。 □

我们赶紧核实：只要定义 1.7.10 和 4.1.2 中描述的拓扑都有定义，它们就一致。

引理4.1.12。设 E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是具有稠密内部的局部凸子集，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。那么 $C^k(U,F)$ 上的紧开C^k拓扑 $\mathcal{O}$（如定义 4.1.2) 所述）是关于映射 $d_{(j)}\colon C^k(U,F) \to C(U \times E^j, F)$的始拓扑，其中 $f \mapsto d^{(j)}f$ 满足 $j \in \mathbb{N}_0$，且 $j \le k$。

证明。设 $\mathcal{T}$ 是关于映射 $d^{(j)}$ 在 $C^k(U,F)$ 上诱导的始拓扑，其中 $j\in\mathbb{N}_0$ 满足 $j\le k$。

为验证 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{O}$，我们递归地定义连续线性映射

$$\alpha_j\colon F^{2^j}\to F \quad\text{and}\quad \beta_j\colon E^{j+1}\to E^{2^j}$$

其中 $\beta_j(U\times E^j)\subseteq U\times E^{2^j-1}=T^jU$ 对 $j\in\mathbb{N}$ 满足 $j\le k$，定义如下：令 $\alpha_1\colon F\times F\to F$，$(v,\ w)\mapsto w$ 为到第二分量的投影，并令 $\beta_1\colon E\times E\to E\times E$ 为恒等映射。递归地，我们定义

$$\alpha_j:=\alpha_{j-1}\circ \mathrm{pr}_2,$$

其中 $\mathrm{pr}_2\colon F^{2^{j-1}}\times F^{2^{j-1}}\to F^{2^{j-1}}$ 是到第二分量的投影，并且

$$\beta_j(x,y_1,\dots,y_j):=(T\beta_{j-1})((x,y_1,\dots,y_{j-1}),(y_j,0,\cdots,0))$$

对 $x,\ y_1$、.....、$y_j\in E$ 成立。由于 $d^{(0)}f=f=T^0f$，拓扑 $\mathcal{O}$ 使得 $d^{(0)}$ 连续。我们断言

$$d^{(j)}\gamma=\alpha_j\circ(T^j\gamma)\circ\beta_j|_{U\times E^j} \tag{4.1}$$

对所有满足 $j\le k$ 的 $j\in\mathbb{N}$ 都成立。如果这是真的，那么

$$d^{(j)}f=(C(U\times E^j,\alpha_j)\circ C(\beta_j|_{U\times E^j},T^jF))(T^jf)\in C(U\times E^j,F)$$

连续依赖于 $f\in(C^k(U,F),\ \mathcal{O})$，由此我们推出 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{O}$。现在

$$d^{(1)}f=df=\mathrm{pr}_2\circ Tf=\alpha_1\circ Tf\circ\beta_1|_U.$$

回想一下，若 $\theta\colon X\to Y$ 是局部凸空间之间的连续线性映射，则 $d\theta=\theta\circ\mathrm{pr}_2$ 利用到第二个因子上的投影 $\mathrm{pr}_2\colon X\times X\to X$，以及 $T\theta=\theta\times\theta$；特别地，$d\theta$ 与 $T\theta$ 是连续线性的。因此，若 $d^{(j-1)}f=\alpha_{j-1}\circ(T^{j-1}f)\circ\beta_{j-1}|_{U\times E^{j-1}}$ 成立，则

$$d^{(j)}f(x,y_1,\dots,y_j)=d(d^{(j-1)}f)((x,y_1,\dots,y_{j-1})(y_j,0,\dots,0))$$

with

$$\begin{aligned}d(d^{(j-1)}f)&=d(\alpha_{j-1}\circ T^{j-1}f\circ\beta_{j-1}|_{U\times E^{j-1}})\\&=(d\alpha_{j-1})\circ T^jf\circ(T\beta_{j-1})|_{U\times E^{2j-1}}\\&=(\alpha_{j-1}\circ\mathrm{pr}_2)\circ T^jf\circ(T\beta_{j-1})|_{U\times E^{2j-1}},\end{aligned}$$

利用链式法则。因此 (4.1) 对 j 也成立。

为证明 $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{T}$（从而也证明 $\mathcal{O}=\mathcal{T}$），首先注意到 $T^0f=f=d^{(0)}f\in C(U,F)$ 连续依赖于 $f\in(C^k(U,\ F),\ \mathcal{T})$。我们断言，对于每个满足 $j\le k$ 的 $j\in\mathbb{N}$，存在 $m_j\in\mathbb{N},i_a\in\{1,\dots,j\}$，使得对于 $a\in\{1,\dots,m_j\}$，有连续线性映射

$$\alpha_a\colon F \to F^{2^j} \text{ as well as } \beta_a\colon E^{2^j} \to E^{i_a+1}$$

使得 $\beta_a(U \times E^{2^j-1}) \subseteq U \times E^{i_a}$ 且

$$T^j f = \sum_{a=1}^{m_j} \alpha_a \circ d^{(i_a)} f \circ \beta_a|_{T^j U} \text{ for all } f \in C^k(U,F). \tag{4.2}$$

如果这是真的，那么 $T^j f$ 是形如 $(C(T^j U, \alpha_a) \circ C(\beta_a, F))(d^{(i_a)} f) \in C(T^j U, T^j F)$ 的贡献项的有限和，这些贡献项连续依赖于 $f \in (C^k(U, F) \mathcal{T})$。因此 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$。对于 $j = 1$，断言成立，因为

$$T^1 f = Tf = (f \circ \mathrm{pr}_1, df) = \alpha_1 \circ (d^{(0)} f) \circ \beta_1 + \alpha_2 \circ (d^{(1)} f) \circ \beta_2$$

使用线性映射 $\alpha_1\colon F \to F \times F,\ v \mapsto (v, 0)$ 和 $\alpha_2\colon F \to F \times F, v \mapsto (0, v)$，以及 $\beta_1\colon E \times E \to E, (x, y) \mapsto x$ 和 $\beta_2 := \mathrm{id}_{E\times E}$。现在假设 $j \in \mathbb{N}$，其中 $j < k$，并假设断言对 j 成立。将 $T^j f$ 按照 (4.2) 的形式写出。将 T 应用于 (4.2)，由链式法则可得

$$\begin{aligned} T^{j+1} f &= \sum_{a=1}^{m_j} (T\alpha_a) \circ T(d^{(i_a)} f) \circ T\beta_a \qquad (4.3)\\ &= \sum_{a=1}^{m_j} \big((\alpha_a, 0) \circ (d^{(i_a)} f) \circ \mathrm{pr}_1 \circ T\beta_a + (0, \alpha_a) \circ d(d^{(i_a)} f) \circ T\beta_a\big) \end{aligned}$$

如 $T\alpha_a = \alpha_a \times \alpha_a$，其中 $\mathrm{pr}_1\colon E^{i_a+1} \times E^{i_a+1} \to E^{i_a+1}$ 是到第一个因子的投影。现在 $d(d^{(i_a)} f) = d^{(1)} f$ 当 $i_a = 0$ 时成立。若 $i_a \geq 1$，则有

$$d(d^{(i_a)} f) = d^{(i_a+1)} f \circ \theta_{i_a}|_{U \times E^{2i_a+1}} + \sum_{\ell=1}^{i_a} (d^{(i_a)} f) \circ \theta_{i_a,\ell}|_{U \times E^{2i_a+1}}, \tag{4.4}$$

其中 $\theta_{i_a}\colon E^{2i_a+1} \to E^{i_a+2}$，$(x, y_1, \ldots, y_{i_a}, z, w_1, \ldots, w_{i_a}) \mapsto (x, y_1, \ldots, y_{i_a}, z)$，且 $\theta_{i_a,\ell}\colon E^{2i_a+2} \to E^{i_a+1}$ 是由下式给出的映射

$$(x, y_1, \ldots, y_{i_a}, z, w_1, \ldots, w_{i_a}) \mapsto (x, y_1, \ldots, y_{\ell-1}, w_\ell, y_{\ell+1}, \ldots, y_{i_a}).$$

将 (4.4)（以及 $d(d^{(0)} f) = d^{(1)} f$）代入 (4.3) 并展开，可得到如 (4.2) 中所示的有限项之和（其中以 $j+1$ 代替 j）。若 m_{j+1} 是直和项的个数，则可将它们用 $1, \ldots, m_{j+1}$ 编号，从而完成归纳步骤。□

引理 4.1.13。对于每个以拓扑 $\mathbb{K}$ 向量空间为模型的 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 C^k-流形 M，以下结论成立：

(a) 采用逐点乘法，$C^k(M, \mathbb{K})$ 是一个结合的含幺拓扑 $\mathbb{K}$ 代数。

(b) 对于每个局部凸拓扑 $\mathbb{K}$向量空间 E，逐点乘法使 $C^k(M,E)$ 成为一个拓扑 $C^k(M,\mathbb{K})$-模。特别地，对于每个 $f\in C^k(M,\mathbb{K})$，我们得到一个连续线性乘法算子

$$m_f\colon C^k(M,E)\to C^k(M,E),\ \ \gamma\mapsto f\gamma.$$

证明。(a) 设 $\beta\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}, (s,t)\mapsto st$ 是乘法映射。由引理 4.1.4(b)，$C^k(M,\beta)\colon C^k(M,\mathbb{K}\times\mathbb{K})\to C^k(M,\mathbb{K})$ 连续。按照引理 4.1.7，将定义域识别为 $C^k(M,\mathbb{K})\times C^k(M,\mathbb{K})$，即可得到乘法映射 $C^k(M,\mathbb{K})\times C^k(M,\mathbb{K})\to C^k(M,\mathbb{K})$。(b) 的证明沿用相同思路，将 β 替换为数乘映射$\mathbb{K}\times E\to E$。□

引理 4.1.14。设 M 是一个带有 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 的 C^k-流形，F 是一个局部凸空间，其拓扑由一族线性映射$(\lambda_i)_{i\in I}$ $\lambda_i\colon F\to F_i$ 到局部凸空间 F_i 所诱导。那么 $C^k(M,F)$ 上的紧开 C^k-拓扑由映射$C^k(M,\lambda_i)\colon C^k(M,F)\to C^k(M,F_i)$ 对 $i\in I$ 所诱导。

证明。令 $\mathcal{O}$ 为 $C^k(M,F)$ 上的紧开 C^k-拓扑。对于满足 $j\le k$ 的 $j\in\mathbb{N}_0$，$T^jF=F^{2^{j-1}}$ 上的拓扑关于线性映射 $T^j\lambda_i=\lambda_i^{2^{j-1}}$ 是始拓扑，因此 $C(T^jM,T^jF)$ 上的紧开拓扑关于映射 $C(T^jM,T^j\lambda_i)$（$i\in I$）是始拓扑（见引理 A.6.4）。于是，$\mathcal{O}$ 关于映射 $C(T^jM,T^j\lambda_i)\circ T^j$（其中 $T^j\colon C^k(M,F)\to C(T^jM,T^jF)$）是始拓扑。由于对于 $f\in C^k(M,F)$，$T^j(\lambda_i\circ f)=T^j\lambda_i\circ T^jf$，后面的映射与 $\tau_{i,j}\circ C^k(M,\lambda_i)$ 相同，记 $\tau_{i,j}\colon C^k(M,F_i)\to C(T^jM,T^jF_i)$，$g\mapsto T^jg$。$C^k(M,F_i)$ 上关于映射 $\tau_{i,j}$（其中 $k\ge j\in\mathbb{N}_0$）的始拓扑，根据始拓扑的传递性可知，$\mathcal{O}$ 关于映射 $C^k(M,\lambda_i)$ 是始拓扑。□

命题 4.1.15。设 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 是一个局部紧的 C^k-流形，F 是一个局部凸空间。则求值映射

$$\varepsilon\colon C^k(M,F)\times M\to F,\ \ (f,x)\mapsto f(x)$$

是 $C^{\infty,\,k}$，因此 C^k。特别地，当 $k=\infty$ 时，ε 是光滑的。

证明。设 E 是 M 的建模空间。给定 $x_0\in M$，考虑一个坐标图$\varphi\colon M$ 的邻域 x_0 上的 $U_\varphi\to V_\varphi\subseteq E$。将 φ^{-1} 视为到 M 的一个 C^k- 映射，引理 4.1.4(a) 给出了一个连续线性映射

$$(\varphi^{-1})^*:=C^k(\varphi^{-1},F)\colon C^k(M,F)\to C^k(V_\varphi,F).$$

求值映射 ev：$C^k(V_\varphi,F)\times V_\varphi\to F$ 是 $C^{\infty,\,k}$ 根据引理 1.7.25，。因此

$$\varepsilon(f,x)=f(x)=(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))=\mathrm{ev}((\varphi^{-1})^*(f),\varphi(x))$$

是 $C^{\infty,k}$于$(f,x)\in C^k(M,F)\times U_\varphi$中，根据命题 3.5.27(a)。由于 $C^{\infty,k}$于集合 $C^k(M,F)\times U_\varphi$上，而这些集合构成 $C^k(M,F)\times M$的开覆盖，函数 ε 是 $C^{\infty,k}$。□

$C^{k,\ell}(M\times N,F)$ 作为局部凸空间；指数律

我们在向量值 $C^{k,\ell}$-函数的空间上定义一个拓扑，并建立指数律。

定义 4.1.16。设 F 是一个局部凸空间，M 是一个 C^k-流形，N 是一个 C^ℓ-流形，其中 $k,\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。我们赋予向量子空间 $C^{k,\ell}(M\times N,F)\subseteq F^{M\times N}$（由所有 $C^{k,\ell}$-映射 $f\colon M\times N\to F$ 构成）以关于以下映射的初始拓扑

$$(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*\colon C^{k,\ell}(M\times N,F)\to C^{k,\ell}(V_\varphi\times V_\psi,F),$$

其中 $\varphi\colon U_\varphi\to V_\varphi\subseteq E_1$ 遍历 M 的极大 C^k-图册，且 $\psi\colon U_\psi\to V_\psi\subseteq E_2$ 遍历 N 的极大 C^ℓ-图册。

这里 $C^{k,\ell}(V_\varphi\times,V_\psi,F)$ 赋予定义 1.7.17 中所述的紧开 $C^{k,\ell}$-拓扑。

在定义 4.1.16 的情形下，我们有：

引理 4.1.17。若 $\mathcal{A}$ 是 M 的一个 C^k-图册，且 $\mathcal{B}$ 是 N 的一个 C^ℓ-图册，那么

$$\Phi\colon C^{k,\ell}(M\times N,F)\to\prod_{(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}}C^{k,\ell}(V_\varphi\times V_\psi,F),\quad f\mapsto f\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})$$

是一个像为闭集的线性拓扑嵌入。

证明。 Φ 的线性性和单射性显然。Φ 的像由所有 $C^{k,\ell}$-函数族 $f_{\varphi,\psi}\colon V_\varphi\times V_\psi\to F$ 组成，它们满足：对于所有 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{A}$, $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{B}$ 以及 $(x,y)\in(U_{\varphi_1}\cap U_{\varphi_2})\times(U_{\psi_1}\cap U_{\psi_2})$，都有

$$f_{\varphi_1,\psi_1}(\varphi_1(x),\psi_1(x))=f_{\varphi_2,\psi_2}(\varphi_2(x),\psi_2(x)).$$

由于 F 是豪斯多夫空间且点求值连续，我们可得 $\operatorname{im}(\Phi)$ 是闭集。根据紧开 $C^{k,\ell}$-拓扑的定义，对于所有 $(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$，映射 $(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*\colon C^{k,\ell}(M\times N,F)\to C^{k,\ell}(V_\varphi\times V_\psi,F)$ 连续。因此 Φ 连续。设 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的极大 C^k-图册，$\widetilde{\mathcal{B}}$ 是包含 $\mathcal{B}$ 的极大 C^ℓ-图册。为了证明 Φ 是拓扑嵌入，令 $\mathcal{O}$ 为关于 $\{\Phi\}$ 在 $C^{k,\ell}(M\times N,F)$ 上的始拓扑。还需证明 $\mathcal{O}$ 使这些映射

$$(\sigma^{-1}\times\tau^{-1})^*\colon C^{k,\ell}(M\times N,F)\to C^{k,\ell}(V_\sigma\times V_\tau,F)\tag{4.5}$$

~ ~对所有 $(\sigma,\tau)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 都连续。根据引理1.7.43，(4.5) 右端项上的拓扑是关于限制映射 $\rho_{\sigma,\tau,\varphi,\psi}$到 $C^{k,\ell}(\sigma(U_\sigma\cap U_\varphi)\times\tau(U_\tau\cap U_\psi)\ F)$（对 $(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$）的初始拓扑。根据引理 1.7.42，$C^{k,\ell}((\tau\circ\varphi^{-1})\times(\sigma\circ\psi^{-1})\ F)$ 是一个连续映射

$$C^{k,\ell}(V_\varphi\times V_\psi,F)\to C^{k,\ell}(\sigma(U_\sigma\cap U_\varphi)\times\tau(U_\tau\cap U_\psi),F).$$

由于 $\rho_{\sigma,\ \tau,\ \varphi,\ \psi}\circ(\sigma^{-1}\times\tau^{-1})^*=C^{k,\ \ell}((\tau\circ\varphi^{-1})\times(\sigma\circ\psi^{-1})\ F)\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*$是连续的，因此 $(\sigma^{-1}\times\tau^{-1})^*$也是连续的。□

在接下来的两个引理中， F是一个局部凸空间， $k,\ \ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。

引理 4.1.18. 对于任意 $C^{k+\ell}$-流形 M 和 N，包含映射$j\colon\ C^{k+\ell}(M\times N, F) \to C^{k,\ \ell}(M\times N, F)$ 是连续且线性的。

证明. 若 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$是 M的一个坐标图，且 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$是 N的一个坐标图，则 $f\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})\colon V_\varphi\times V_\psi \to F$是 $C^{k+\ell}$，因此由命题 1.7.33(a)可知 $C^{k,\ \ell}$；从而 f是 $C^{k,\ \ell}$。根据命题 1.7.33(a)，包含映射 $j_{\varphi,\ \psi}\colon C^{k+\ell}(V_\varphi\times V_\psi,\ F) \to C^{k,\ \ell}(V_\varphi\times V_\psi,\ F)$ 是连续且线性的。现在我们利用 $C^{k,\ \ell}(M\times N,\ F)$ 上的拓扑是相对于以下映射的初始拓扑这一事实

$$(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*\colon C^{k,\ell}(M\times N, F) \to C^{k,\ell}(V_\varphi\times V_\psi, F).$$

由于

$$(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*\circ j = j_{\varphi,\psi}\circ C^{k+\ell}(\varphi^{-1}\times\psi^{-1}, F)$$

根据引理 4.1.4(a)是连续的，线性映射 j 是连续的。 □

引理 4.1.19。 对于所有 C^k-流形 M 和 N，包含映射$j\colon\ C^{k,\ k}(M\times N, F) \to C^k(M\times N, F)$ 是连续且线性的。

证明。 若 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$是 M的一个坐标图，且 $\psi\colon U_\psi \to V_\psi$是 N的一个坐标图，则$f\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})\colon V_\varphi\times V_\psi \to F$是 $C^{k,\ k}$，因此根据命题 1.7.33(b)， C^k；于是 f是 C^k。根据命题 1.7.33(b)，包含映射 $j_{\varphi,\ \psi}\colon C^{k,\ k}(V_\varphi\times V_\psi,\ F) \to C^k(V_\varphi\times V_\psi,\ F)$ 是连续且线性的。根据紧开 $C^{k,\ k}$-拓扑的定义，映射

$$(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*\colon C^{k,k}(M\times N, F) \to C^{k,k}(V_\varphi\times V_\psi, F)$$

是连续的。现在我们利用 $C^k(M\times N, F)$ 上的拓扑是关于映射 $C^k(\varphi^{-1}\times\psi^{-1}, F)\colon C^k(M\times N, F) \to C^{k,\ell}(V_\varphi\times V_\psi, F)$ 的初始拓扑，这由引理 4.1.4(a) 和 4.1.9 得出。由于

$$C^k(\varphi^{-1}\times\psi^{-1}, F)\circ j = j_{\varphi,\psi}\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*$$

是连续的，线性映射 j 是连续的。 □

4.1.20. 值得注意的是，对于每个局部凸空间 F 以及所有光滑流形 M 和 N， $C^{\infty,\ \infty}(M\times N, F) = C^\infty(M\times N, F)$ 是一个拓扑向量空间，这由引理 4.1.18 和 4.1.19 得出。

命题 4.1.21.设 M 是一个 C^k-流形， N 是一个 C^ℓ-流形，且$k, \ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。设 E_1 和 E_2 分别是 M 和 N 的建模空间，并设 F 是一个局部凸空间。则有以下结论：

(a) 若 $f\colon\ M\times N \to F$为 C^k、$^{\ell}$，则对每个 $x\in M$，有 $f^\vee(x) := f_x := f(x,\cdot) \in C^\ell(N, F)$，且映射 $f^\vee\colon\ M \to C^\ell(N, F)$ 为 C^k。***(b)*** 映射 $\Phi\colon\ C^k$、$^{\ell}(M\times N, F) \to C^k(M, C^\ell(N, F))$， $f \mapsto f^\vee$ 是线性的，并且是拓扑嵌入。

(c) 若 N 为局部紧，或 E_1 与 E_2 均可度量化，则(b) 中的映射Φ 是拓扑向量空间同构。此外，映射$g\colon M \to C^\ell(N,F)$为 C^k，当且仅当映射 $g^\wedge\colon M\times N\to F$（经由 $g^\wedge(x,y):=g(x)(y)$ 定义）为 $C^{k,\ell}$。

(d) 对于 $k=\ell=\infty$，映射 $\Phi\colon C^\infty(M\times N,F)\to C^\infty(M,C^\infty(N,F))$ 是线性的拓扑嵌入。如果 N 是局部紧的，或者 E_1 与 E_2是可度量化的，那么 Φ 是拓扑向量空间的同构。

证明。(a) 根据以局部坐标图表述的定义 3.5.24，引理 1.7.18 蕴含 $f^\vee(x)\colon N\to F$ 是一个 C^ℓ-映射。设 $\mathcal{A}$是 M的坐标图图册，$\mathcal{B}$ 是 N的图册。对于坐标图

$$\varphi\colon U_\varphi\to V_\varphi\subseteq E_1\quad\text{in}\quad\mathcal{A}\quad\text{and}\quad\psi\colon U_\psi\to V_\psi\subseteq E_2\quad\text{in}\quad\mathcal{B},$$

映射 $f_{\varphi,\psi}:=f\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})\colon V_\varphi\times V_\psi\to F$是 $C^{k,\ell}$，因此映射 $f^\vee_{\varphi,\psi}\colon V_\varphi\to C^\ell(V_\psi,F)$ 是 C^k。于是，利用拓扑向量空间的同构 $\psi^*\colon C^\ell(V_\varphi,F)\to C^\ell(U_\varphi,F)$（参见引理 4.1.4(b)），$\psi^*\circ f^\vee_{\varphi,\psi}\circ\varphi$也是 C^k。由引理 4.1.9，映射

$$\rho\colon C^\ell(N,F)\to\prod_{\psi\in\mathcal{B}}C^\ell(U_\psi,F),\quad g\mapsto(g|_{U_\psi})_{\psi\in\mathcal{B}}$$

是一个像为闭集的线性拓扑嵌入。由于$\psi^*\circ f^\vee_{\varphi,\,\psi}\circ\varphi$等于 $\rho\circ f^\vee$的 ψ分量，我们推得 $f^\vee$是 C^k。

(b) 我们很容易验证 Φ 是线性且单射的。紧开$C^{k,\,\ell}$拓扑 $\mathcal{O}$在 $C^{k,\,\ell}(M\times N,\ F)$上是关于映射 $(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*\colon C^{k,\,\ell}(M\times N,\ F)\to C^{k,\,\ell}(V_\varphi\times V_\psi,\ F),\ f\mapsto f\circ(\varphi^{-1}\circ\psi^{-1})$ 对于 $(\varphi,\ \psi)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 的初始拓扑。根据引理 4.1.17，因此也关于以下映射

$$\Theta_{\varphi,\psi}\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^*,$$

使用拓扑嵌入

$$\Theta_{\varphi,\psi}\colon C^{k,\ell}(V_\varphi\times V_\psi,F)\to C^k(V_\varphi,C^\ell(V_\psi,F)),\quad g\mapsto g^\vee$$

如定理 1.7.30 所述。由于

$$C^k(\varphi^{-1},C^\ell(N,F))\colon C^k(U_\varphi,C^\ell(N,F))\to C^k(V_\varphi,C^\ell(N,F))$$

是拓扑向量空间同构（参见引理 4.1.4(a)），且线性映射 $C^k(M,\ C^\ell(N,\ F))\to\prod_{\varphi\in\mathcal{A}}C^k(U_\varphi,\ C^\ell(N,\ F))$, $g\mapsto(g|_{U_\varphi})_{\varphi\in\mathcal{A}}$ 是拓扑嵌入（由引理 4.1.9 ），所以 $C^k(M,\ C^k(N,\ F))$上的拓扑是关于以下线性映射的初始拓扑

$$(\varphi^{-1})^*\colon C^k(M,C^\ell(N,F))\to C^k(V_\varphi,C^k(N,F)),\quad g\mapsto g\circ\varphi^{-1}$$

对于 $\varphi\in\mathcal{A}$。同样，$C^\ell(N,\ F)$ 上的拓扑是关于线性映射 $(\psi^{-1})^*\colon C^\ell(N,\ F)\to C^\ell(V_\psi,\ F)$（其中 $\psi\in\mathcal{B}$）的始拓扑，这意味着 $C^k(V_\varphi,\ C^\ell(N,\ F))$ 上的拓扑是关于以下映射的始拓扑：

映射 $C^k(V_\varphi,\ (\psi^{-1})^*)$: $C^k(V_\varphi,\ C^\ell(N,\ F)) \to C^k(V_\varphi,\ C^\ell(V_\psi,\ F))$（见引理 4.1.14）。因此，使 $C^{k,\ \ell}(M\times N,\ F)$ 上的 $\mathcal{T}$ 成为拓扑嵌入的拓扑，是关于映射的始拓扑

$$C^k(V_\varphi,(\psi^{-1})^*)\circ(\varphi^{-1})^*\circ\Phi=\Theta_{\varphi,\psi}\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})^* \tag{4.6}$$

对于 $(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$。因此 $\mathcal{T}=\mathcal{O}$。

（c）如果 g是 C^k，那么对于所有 $(\varphi,\psi)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$，$g_{\varphi,\psi}:=C^\ell(\psi^{-1},F)\circ g\circ\varphi^{-1}$ 也成立。于是，根据定理 1.7.30，$g^\wedge\circ(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})=(g_{\varphi,\psi})^\wedge$是 $C^{k,\ell}$，从而 $g^\wedge$是 $C^{k,\ell}$。值得注意的是，$g=(g^\wedge)^\vee=\Phi(g^\wedge)\in\mathrm{im}(\Phi)$，因此 Φ 是满射，故为拓扑向量空间同构。反之，如果 $g^\wedge$ 是 $C^{k,\ell}$，那么根据（a），$g=(g^\wedge)^\vee$ 是 C^k。

（d）这是（b）和（c）的特殊情形，因为根据 4.1.20，$C^\infty(M\times N,F)=C^{\infty,\infty}(M\times N,F)$。□

注 4.1.22。(c) 的结论和 (d) 的最后一个结论仍然成立，只要 E_1 和 E_2 是 k_ω- 空间，且 M 和 N 都有坐标图的图册，其值域 V_φ 和 V_ψ 分别是 E_1 和 E_2 的闭子集 A_φ 和 A_ψ 的开子集。

事实上，由习题 A.7.8 的 (a) 部分，闭子集 A_φ 和 A_ψ 是 k_ω-空间。由该习题的 (b) 部分，开子集 $V_\varphi\subseteq A_\varphi$ 中的每个点 x 都有一个开邻域 W_x，它是一个 k_ω-空间。于是，φ 限制为坐标图 $\varphi^{-1}(W_x)\to W_x$，其值域是一个 k_ω-空间。ψ 也同理。因此，我们可以假设所有坐标图的值域都是 k_ω-空间。现在，若我们使用由这类坐标图构成的图册 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，并利用 k_ω-空间的有限直积是 k_ω-空间（见注 A.7.21），因而是 k-空间这一事实，命题 A.7.8 的证明便可照搬。

我们记录一些典型的应用。

命题 4.1.23. 设 $k,\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 M 是定义在 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 上的紧 $C^{k+\ell}$-流形。设 E 和 F 是局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间，$U\subseteq E$ 是一个开子集，且 $g\colon M\times U\to F$ 是一个 $C^{k+\ell}$-映射。那么$g_*\colon C^\ell(M,U)\to C^\ell(M,F),\ f\mapsto g\circ(\mathrm{id}_M,f)$ 是 C^k。

证明。映射 $(g_*)^\wedge\colon C^\ell(M,U)\times M\to F,(f,x)\mapsto g(x,f(x))=g(x,\varepsilon(f,x))$ 是 $C^{k,\ell}$。事实上，g是 $C^{k+\ell}$，求值映射 $\varepsilon\colon C^\ell(M,U)\times M\to U$是 $C^{k,\ell}$（根据命题 4.1.15），而映射 $C^\ell(M,U)\times M\to M,(f,x)\mapsto x$是$_{C^{k,\ell}}$（因为它是 $C^{k+\ell}$）。因此命题 3.5.27(b) 适用。现在，由命题 4.1.21(a)，g_* 是 C^k。□

命题 4.1.24. 设 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty,\omega\},\ \ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 M 是定义在 $\mathbb{K}$上的紧C^ℓ-流形。若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，令 $\mathbb{L}:=\mathbb{C}$；若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，令 $\mathbb{L}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$。设 E和 F 是局部凸拓扑 $\mathbb{L}$-向量空间，且 $U\subseteq E$ 是一个开子集。则有以下结论：

(a) 若 $g\colon U \to F$ 是一个$C^{k+\ell}_{\mathbb{L}}$-映射，则映射

$$C^\ell(M,g)\colon C^\ell(M,U) \to C^\ell(M,F), \quad f \mapsto g \circ f$$

是 $C^k_{\mathbb{L}}$.

(b) 若 $g\colon M \times U \to F$ 具有如下形式：$g = h \circ (q \times \mathrm{id}_U)$ 对于某个 $C^\ell_{\mathbb{K}}$-映射 $q\colon M \to N$ 到一个无边界的 $C^{k+\ell}_{\mathbb{L}}$-流形 N，以及一个 $C^{k+\ell}_{\mathbb{L}}$-映射 $h\colon N \times U \to F$，则 $g_*\colon C^\ell(M, U) \to C^\ell(M, F), f \mapsto g \circ (\mathrm{id}_M, f)$ 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。

证明。 (a) 映射

$$C^\ell(M,g)^\wedge\colon C^\ell(M,U) \times M \to F, \quad (f,x) \mapsto g(f(x)) = g(\varepsilon(f,x))$$

是 $C^{k,\ell}_{\mathbb{K}}$，因为 g 是 $C^{k+\ell}_{\mathbb{K}}$，且求值映射 $\varepsilon\colon C^\ell(M,U) \times M \to U$ 是 $C^{k,\ell}_{\mathbb{K}}$（根据命题 4.1.15），因此命题 3.5.27(b) 适用。于是，根据命题 4.1.21(a)，$C^\ell(M,g)$ 是 $C^k_{\mathbb{K}}$。剩下要证明的是：若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{L} = \mathbb{C}$，则 $C^\ell(M,g)$ 是 $C^k_{\mathbb{C}}$。若 $k \geq 1$，令 $x \in M$，并考虑连续线性点求值 $\varepsilon_x\colon C^\ell(M, F) \to F, f \mapsto f(x)$。对于 $f \in C^\ell(M,U)$ 和 $h \in C^\ell(M,E)$，

$$\varepsilon_x \circ (dC^\ell(M,g)(f,h)) = d(\varepsilon_x \circ C^\ell(M,g))(f,h) = dg(f(x),h(x))$$

关于 h 是 $\mathbb{C}$-线性的，因此 $dC^\ell(M, g)(f, h)$ 也是如此。因此，根据引理 1.4.17，映射 $C^\ell(M, g)$ 是 $C^k_{\mathbb{C}}$（若 $k = 0$，显然也成立）。

(b) 设 H 是 N 的建模空间。对于 $x \in M$，设 $\varphi_x\colon U_x \to V_x \subseteq H$ 是 N 上 $q(x)$ 附近的一个坐标图。于是存在一个紧致满子流形 $M_x \subseteq M$，使得 $x \in M^0_x$ 且 $q(M_x) \subseteq U_x$。于是，对于某个有限子集 $\Phi \subseteq M$，有 $M = \bigcup_{x\in\Phi} M^0_x = M$。设 $\rho_x\colon C^\ell(M, F) \to C^\ell(M_x, F)$ 是对应于 $x \in \Phi$ 的限制映射。映射

$$(\rho_x)_{x\in\Phi}\colon C^\ell(M,F) \to \prod_{x\in\Phi} C^\ell(M_x,F)$$

由于它是一个像为闭集的 $\mathbb{L}$-线性拓扑嵌入，只需证明对于每个 $x \in \Phi$，$\rho_x \circ g_*\colon C^\ell(M, U) \to C^\ell(M_x, F)$ 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。按照引理 4.1.7，将 $C^\ell(M_x, H \times E)$ 识别为 $C^\ell(M_x, H) \times C^\ell(M_x, E)$。现在，$a_x\colon\colon V_x \times U \to F, (z, y) \mapsto h(\varphi_x^{-1}(z), y)$ 是 $C^{k+\ell}_{\mathbb{L}}$，并且

$$(\rho_x \circ g_*)(f) = C^\ell(M_x, a_x)(\varphi \circ q|_{M_x}, f|_{M_x})$$

是 $C^k_{\mathbb{L}}$in f，因为 $C^\ell(M_x, a_x)\colon C^\ell(M_x, V_x \times U) \to C^\ell(M_x, F)$ 是由 (a) 得出的，而限制映射 $C^\ell(M,U) \to C^\ell(M_x, U)$ 是 $C^\infty_{\mathbb{L}}$。□

函数空间 $C^k(M, F)$ 的性质可由下文的命题 4.1.29 涵盖。该命题专门讨论向量丛的截面空间（由推论 4.1.27 可知，平凡丛的特殊情形包括函数空间）。

向量丛中的截面空间

定义 4.1.25。设 $\pi\colon E \to M$ 是一个纤维为 F 的 C^k-向量丛。

(a) 记 $\Gamma_{C^k}(E)$ 为所有 C^k-截面 $\sigma\colon M \to E$ 的集合。我们赋予 $C^k(M,E)$ 紧开 C^k-拓扑，并赋予 $\Gamma_{C^k}(E)$ 由 $C^k(M,E)$ 诱导的拓扑。(b) 若 $\sigma, \tau \in \Gamma^{C^k}(E)$，我们通过如下方式定义映射 $\sigma+\tau\colon M \to E$

$$(\sigma+\tau)(x) := \sigma(x)+\tau(x),$$

利用向量空间 E_x 中的加法。由于对每个局部平凡化 $\theta\colon E|_U \to U\times F$ 有 $(\sigma+\tau)_\theta = \sigma_\theta+\tau_\theta \in C^k(U,F)$，映射 $\sigma+\tau$ 是 C^k，因而为 E 的一个 C^k-截面（见注 3.7.2(b)）。同样，对每个 $\sigma \in \Gamma_{C^k}(E)$ 与$s\in\mathbb{K}$，$(s\sigma)(x) := s\sigma(x) \in E_x$ 定义了 E 的一个 C^k-截面 $s\sigma$。

命题 4.1.26. 设 $\pi\colon E \to M$ 是一个以 F 为典型纤维的 C^k-向量丛，且 $(\theta_i)_{i\in I}$ 是 E的一族局部平凡化 $\theta_i\colon E|_{U_i} \to U_i\times F$，使得 $\bigcup_{i\in I} U_i = M$。则映射

$$\Phi\colon \Gamma_{C^k}(E) \to \prod_{i\in I} C^k(U_i,F),\ \sigma \mapsto (\sigma_{\theta_i})_{i\in I}$$

是线性的，并且是像为闭集的拓扑嵌入(其中 $\sigma_{\theta_i} = \mathrm{pr}_2\circ\theta_i\circ\sigma|_{U_i}$ 如注 3.7.2(b)).

证明. 根据 $\Gamma_{C^k}(E)$上向量空间结构的构造，每个映射 $\sigma \mapsto \sigma_{\theta_i}$ 都是线性的，因而 Φ也是线性的。引理 4.1.4(a)与注 4.1.5(b)表明，映射 $\rho\colon \Gamma_{C^k}(E) \to \prod_{i\in I}\Gamma(E|_{U_i})$，$\sigma\mapsto\sigma|_{U_i}$是拓扑嵌入。现在

$$\psi_i\colon \Gamma_{C^k}(E|_{U_i}) \to C^k(U_i,F),\ \sigma \mapsto (\mathrm{pr}_2\circ\theta_i)\circ\sigma$$

是一个连续双射（由引理 4.1.4(b) 可知），其逆映射为 $f\mapsto\theta_i^{-1}\circ(\mathrm{id}_{U_i},\ f)$；根据引理 4.1.4(b) 和 4.1.7，该逆映射连续。因此，$\Phi = (\prod_{i\in I}\psi_i)\circ\rho$ 是一个拓扑嵌入，因为它是一个同胚与一个拓扑嵌入的复合。给定 $i,\ j\in I$，映射

$$g_{ij}\colon U\times F \to F,\ (x,y)\mapsto(\mathrm{pr}_2\circ\theta_i\circ\theta_j^{-1})(x,y)$$

是 C^k和 $g_{ij}(x,\ \cdot)\colon F\to F$是线性的。$\Phi$ 的像与闭向量子空间

$$\Big\{(f_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}C^k(U_i,F)\colon (\forall i,j\in I)\,(\forall x\in U_i\cap U_j)\,f_i(x)=g_{ij}(x,f_j(x))\Big\}$$

$\prod_{i\in I} C^k(U_i,F)$，因为直接验证可知它包含于该子空间中。反过来，如果 $(f_i)_{i\in I}$ 是后一个向量子空间的元素，那么 $\sigma(x):=\theta_j^{-1}(x,f_j(x))$ 对于 $x\in U_j$ 是良定义的（因为 $\theta_i(\theta_j^{-1}(x,\sigma_j(x)))=(x,g_{ij}(x,\sigma_j(x)))=(x,\sigma_i(x))$，若 $x\in U_i$ 也成立），并且容易验证 $\sigma\in\Gamma_{C^k}(E)$ 和 $\Phi(\sigma)=(f_i)_{i\in I}$。□

将 J 视为单点集，我们可得：

推论 4.1.27. 若 $\pi\colon E\to M$ 是一个可平凡化的 C^k-向量丛，其典型纤维为 f，且 $\theta=(\pi,\theta_2)\colon E\to M\times F$ 是一个平凡化，则

$$\Gamma_{C^k}(E)\to C^k(M,F),\ \sigma\mapsto\sigma_\theta:=\theta_2\circ\sigma$$

是拓扑向量空间的同构。□

引理 4.1.28. 设 $\pi\colon E\to M$ 是一个典型纤维为 F 的 C^k-向量丛，且 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。设 $(M_i)_{i\in I}$ 是 M 的全子流形族 M_i，其相对于 M 的内部覆盖 M。那么

$$\rho\colon\Gamma_{C^k}(E)\to\prod_{i\in I}\Gamma_{C^k}(E|_{M_i}),\ \sigma\mapsto(\sigma|_{M_i})_{i\in I}$$

是线性的，且是像为闭集的拓扑嵌入。若 $E|_{M_i}$ 可平凡化，且 $\theta_i\colon E|_{M_i}\to M_i\times F$ 是一个平凡化，则下面的线性映射也是像为闭集的拓扑嵌入：

$$\Psi\colon\Gamma_{C^k}(E)\to\prod_{i\in I}C^k(M_i,F),\ \sigma\mapsto\mathrm{pr}_2\circ\theta_i\circ\sigma|_{U_i}.$$

证明。根据引理 4.1.9，映射 $C^k(M,E)\to\prod_{i\in I}C^k(M_i,E)$，$f\mapsto(f|_{M_i})_{i\in I}$ 是一个像为闭集的拓扑嵌入。因此，它限制为 $\Gamma_{C^k}(E)$ 上的拓扑嵌入。由于 $\Gamma_{C^k}(E)$ 在 $C^k(M,E)$ 中是闭的，其像在 $\prod_{i\in I}C^k(M_i,E)$ 中也是闭的，因而在子集 $\prod_{i\in I}C^k(M,E|_{M_i})$ 中也闭（根据引理 3.7.5 和注 4.1.3(b)，它在该子集上诱导紧开 C^k-拓扑的乘积），并且在其子集 $\prod_{i\in I}\Gamma_{C^k}(E|_{M_i})$ 中也闭。

为证明最后一个断言，注意到根据推论 4.1.27，$h_i\colon\Gamma_{C^k}(E|_{M_i})\to C^k(M_i,F)$，$\tau\mapsto\mathrm{pr}_2\circ\theta_i\circ\tau$ 是拓扑向量空间的同构。由于 ρ 是像为闭集的线性拓扑嵌入，$\Psi=\left(\prod_{i\in I}h_i\right)\circ\rho$ 也是如此。□

命题 4.1.29。 设 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 $\pi\colon E\to M$ 是局部紧 C^k-流形 M 上的 C^k-向量丛，其典型纤维为 F。

(a) 如果 F 分别是完备、拟完备、序列完备和麦基完备的，那么 $\Gamma_{C^k}(E)$ 也分别是完备、拟完备、序列完备和麦基完备的。

(b) 如果 M 是 σ-紧的，且 F 可度量化，那么 $\Gamma_{C^k}(E)$ 可度量化。(c) 如果 M 是紧的， F 可赋范，且 $k \in \mathbb{N}_0$，那么 $\Gamma_{C^k}(E)$ 可赋范。

证明。令 Z 为 M 的建模空间，其维数有限。令 $(\theta_i)_{i\in I}$ 为一族局部平凡化 $\theta_i\colon E|_{U_i} \to U_i \times F$ of M，使得 $(U_i)_{i\in I}$ 是 M 的一个开覆盖，并且存在一个坐标图 $\varphi_i\colon U_i \to V_i \subseteq Z$；令 Φ 如引理 4.1.28 中所述。映射 $C^k(\varphi_i, F)\colon C^k(V_i, F) \to C^k(U_i, F)$ 是拓扑向量空间同构（参见命题4.1.4(a)）。

(a) 根据命题 1.7.16(a)，$C^k(V_i, F)$ 从 F 继承相应的完备性，因此 $C^k(U_i, F)$、直积 $\prod_{i\in I} C^k(U_i, F)$、其闭向量子空间 $\operatorname{im}(\Phi)$ 以及 $\Gamma_{C^k}(E)$ 也具有该完备性。

(b) 我们将 M 写成紧集的可数并。由于这些集合中的每一个都能被有限个 U_i覆盖，因此可以找到一个可数子集 $J \subseteq I$，使得 $M = \bigcup_{i\in J} U_i$。将 I 替换为 J后，不妨假设 I 是可数的。于是，$\prod_{i\in I} C^k(U_i, F)$作为可度量化空间的可数积是可度量化的（根据命题 1.7.16(b)），因此 $\operatorname{im}(\Phi)$ 和 $\Gamma_{C^k}(E)$ 也是可度量化的。

(c) 如果 M 是紧的，那么每个元素 $x \in M$ 都包含在某个 $i(x) \in I$中的 $U_{i(x)}$里；我们可以找到一个紧凸的 $\varphi_{i(x)}(x)$-邻域 $W_x \subseteq V_{i(x)}$，并得到一个紧的全子流形 $M_x := \varphi_i^{-1}{}_{x\,()}(W_x)$，它在相对于 M的内部 M_x^0中包含x。于是，对某个有限子集 $A \subseteq M$，有 $M = \bigcup_{x\in A} M_x^0$。根据引理 4.1.28，我们有一个线性拓扑嵌入

$$\Psi\colon \Gamma_{C^k}(E) \to \prod_{x\in A} C^k(M_x, F)$$

将 σ映至 $(\mathrm{pr}_2 \circ \theta_{i(x)} \circ \sigma|_{M_x})_{x\in A}$。现在，根据命题 1.7.16(b)，$C^k(W_x, F)$ 可赋范，因此 $C^k(M_x, F)$、$\prod_{x\in A} C^k(M_x, F)$ 和 $\Gamma_{C^k}(E)$ 也可赋范。□

拉回丛中的截面空间

拉回丛的截面空间对于研究映射流形特别有意义。在引理 4.1.31 至命题 4.1.34 中，我们考虑如下设定：

4.1.30. 设 $\pi\colon E \to N$ 是无边界光滑流形 N上的光滑向量丛，其典型纤维为 F。设 M 是某个$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$（可能具有粗糙边界）的 C^ℓ-流形，且 $f\colon M \to N$ 是一个 C^ℓ- 映射。我们考虑引理 3.7.6 中的拉回丛 $f^*(E)$，其丛投影为 $\pi_{f^*(E)}\colon f^*(E) \to M$。回顾习题 3.7.3，$f^*(E)$ 是 C^ℓ-流形 $M \times E$ 的子流形。令 $\mathrm{pr}_2\colon M \times E \to E$ 为到第二个因子的投影。于是

$$\Gamma_f := \{\tau \in C^\ell(M, E)\colon \pi \circ \tau = f\}$$

是 $\prod_{x\in M} E_{f(x)}$的一个向量子空间。我们赋予 Γ_f 由$C^\ell(M, E)$ 诱导的拓扑，并赋予紧开 C^ℓ-拓扑。

引理 4.1.31。 Γ_f 是一个局部凸空间。映射 Φ: $\Gamma_{C^\ell}(f^*(E)) \to \Gamma_f, \sigma \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \sigma$ 是拓扑向量空间的一个同构。

证明。根据引理 4.1.4(b)，映射 $C^\ell(M, \mathrm{pr}_2)$: $C^\ell(M, M \times E) \to C^\ell(M, E)$ 是连续的。它在 $\Gamma_{C^\ell}(f^*(E))$ 上的限制也连续（应用注 4.1.5(b)），且将后一个映射余限制到 Γ_f 得到的映射 Φ 也连续。容易验证， $\Gamma_f \to \Gamma_{C^\ell}(f^*(E))$, $\tau \mapsto (\mathrm{id}_M, \tau)$ 是 Φ 的逆映射。这个映射是连续的，因为它作为映射到 $C^\ell(M, M \times E) \sim C^\ell(M, M) \times C^\ell(M, E)$ 的映射是连续的。因此 Φ 是一个同胚。由于 Φ 是线性的，且 $\Gamma_{C^\ell}(f^*(E))$ 是局部凸空间， Γ_f 是局部凸空间。□

命题 4.1.32。如果 M 是局部紧的，那么求值映射ε: $\Gamma_f \times M \to E, (\tau, x) \mapsto \tau(x)$ 是 $C^{\infty,\ell}$。

证明。给定 $x_0 \in N$，存在一个局部平凡化 θ: $E|_U \to U \times F$ E，其中 $f(x_0)$-邻域 $U \subseteq N$为某个开集。令 pr_F: $U \times F \to F$为投影到第二个因子的投影，并令 $\theta_2 := \mathrm{pr}_F \circ \theta$。于是， $f^{-1}(U)$ 是 M 中的一个开x-邻域；我们可以找到一个坐标图 φ: $U_\varphi \to V_\varphi$，其定义在 M 上且包含 x_0，使得 $U_\varphi \subseteq f^{-1}(U)$。我们证明， ε 是定义在 $\Gamma_f \times M$ 的开子集 $\Gamma_f \times U_\varphi$ 上的 C^∞、$^\ell$。只需证明 $(\theta \circ \varepsilon)(\tau, \varphi^{-1}(x))$ 在 $(\tau, x) \in \Gamma_f \times V_\varphi$ 中是 C^k、$^\ell$。根据引理 1.7.25，求值映射 ε: $C^\ell(V_\varphi, F) \times V_\varphi \to F$ 是 C^∞、$^\ell$。现在

$$\begin{aligned}\theta(\varepsilon(\tau, \varphi^{-1}(x))) &= \theta(\tau(\varphi^{-1}(x))) = (f(\varphi^{-1}(x)), \theta_2(\tau(\varphi^{-1}(x))))\\ &= (f(\varphi^{-1}(x)), \mathrm{ev}(\theta_2 \circ \tau \circ \varphi^{-1}, x)).\end{aligned}$$

映射 h: $\Gamma_f \to C^\ell(V_\varphi, F)$, $\tau \mapsto \theta_2 \circ \tau \circ \varphi^{-1}$ 根据引理 4.1.4 中的 (a) 和 (b) 是连续的，并且 h是线性的。由命题 3.5.27(a)，ev $\circ (h \times \mathrm{id}_{V_\varphi})$ 是 $C^{\infty,\ell}$。映射 $\Gamma_f \times V_\varphi \to M, (\tau, x) \mapsto f(\varphi^{-1}(x))$ 是 C^ℓ，因此是 $C^{\infty,\ell}$，因为它与 τ 无关。利用注 3.5.26(e)， $\theta \circ \varepsilon \circ (\mathrm{id}_{\Gamma_f} \circ \varphi^{-1})$ 是 $C^{k,\ell}$。□

注 4.1.33. 注意，由于 $f^*(E)$ 仅仅是一个 C^ℓ-流形，因此对于 $\ell < \infty$，求值映射$\Gamma_{C^\ell}(f^*(E)) \times M \to f^*(E)$ 的命题 4.1.32 类比并无意义。我们只能问，如果 $f^*(E)$ 是一个光滑流形，那么这个映射是否是 $C^{\infty,k}$。

命题 4.1.34。若 M 是局部紧的，则对每个 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 以及每个 C^k-流形 L，以下结论成立：映射 g: $L \to \Gamma_f$ 是 C^k 的，当且仅当 $g^\wedge$: $L \times M \to E$, $(x, y) \mapsto g(x)(y)$ 是 $C^{k,\ell}$。

证明。根据命题 4.1.32，求值映射 ε: $\Gamma_f \times M \to E$是 $C^{\infty,\ell}$因此 $C^{k,\ell}$。若 g是 C^k，则 $g^\wedge = \varepsilon \circ (g \times \mathrm{id}_M)$ 是 $C^{k,\ell}$，由命题 3.5.27(a) 可知。反过来，假设 $g^\wedge$ 是 $C^{k,\ell}$。令 $\mathcal{A}$ 为 M的所有坐标图 φ: $U_\varphi \to V_\varphi$ 组成的集合，其中存在平凡化 θ_φ: $E|_W(\varphi) \to W(\varphi) \times F$, 使得 $U_\varphi \subseteq f^{-1}(W(\varphi))$。令 $\theta_{\varphi,2}$: $E|_{W(\varphi)} \to F$为 θ_φ的第二分量。那么

$$\Theta_\varphi : : f^*(E)|_{U_\varphi} : f^*(E)|_{U_\varphi} \to U_\varphi \times F, \quad v \mapsto (\mathrm{pr}_{f^*(E)}, (\theta_{\varphi,2} \circ \mathrm{pr}_2)(v))$$

是 $f^*(E)$ 的一个局部平凡化，且 $\mathcal{A}$ 是 M 的一个图册。令 $\Theta_{\varphi,\,2}\colon f^*(E)|_{U_\varphi}\to F$ 为 Θ_φ 的第二分量。根据命题 4.1.26，线性映射

$$\Phi\colon \Gamma_{C^\ell}(f^*(E))\to\prod_{\varphi\in\mathcal{A}}C^\ell(U_\varphi,F),\quad \sigma\mapsto(\Theta_{\varphi,2}\circ\sigma|_{U_\varphi})_{\varphi\in\mathcal{A}}$$

是到其闭像上的同胚。由于

$$(\varphi^{-1})^*\colon C^\ell(U_\varphi,F)\to C^\ell(V_\varphi,F),\quad g\mapsto g\circ\varphi^{-1}$$

是拓扑向量空间的同构，也

$$\Big(\prod_{\varphi\in\mathcal{A}}(\varphi^{-1})^*\Big)\circ\Phi\colon \Gamma_{C^\ell}(f^*(E))\to\prod_{\varphi\in\mathcal{A}}C^\ell(V_\varphi,F)$$

是像为闭集的线性拓扑嵌入。令 $\Psi\colon \Gamma_f\to\Gamma_{C^\ell}(f^*(E))$ 为将 τ 映至 $(\mathrm{id}_M,\ \tau)$ 的拓扑向量空间同构（参见引理 4.1.31）。若 $\prod_{\varphi\in\mathcal{A}}(\varphi^{-1})^*\circ\Phi\circ\Psi\circ g$ 是 C^k，则映射 g 将是 C^k；若能证明 $(\varphi^{-1})^*\circ\Phi\circ\Psi\circ g$ 是 C^k，这一条件便成立。若对每个坐标图 $\psi\colon U_\psi\to V_\psi$（其中 L），$(\varphi^{-1})^*\circ\Phi\circ\Psi\circ g\circ\psi^{-1}$ 都是 C^k，则这一条件便成立。由于对所有 $x\in L$ 和 $y\in U_\varphi$，$g(x)(y)\in E|_{W(\varphi)}$，我们可以构造复合映射

$$h:=\theta_2\circ g^\wedge\circ(\psi^{-1}\times\varphi^{-1})\colon V_\psi\times V_\varphi\to F,$$

其中为 $C^{k,\,\ell}$。由定理 1.7.30 可知，$h^\wedge\colon\ V_\psi\to C^\ell(V_\varphi,\ F)$ 是 C^k。只需再注意到 $(\varphi^{-1})^*\circ\Phi\circ\Psi\circ g\circ\psi^{-1}=h^\wedge$。□

紧支撑截面空间

4.1.35. 从定义 4.1.36 到引理 4.1.41，设 F 是一个局部凸空间，$k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$，且 $\pi\colon\ E\to M$ 是一个以 F 为典型纤维、定义在 C^k 流形 M 上的 C^k-向量丛。

定义 4.1.36. E 的 C^k-截面 $\sigma\colon\ M\to E$ 的支集 $\mathrm{supp}(\sigma)$ 定义为 M 中 $\{x\in M\colon\ \sigma(x)\neq 0_x\}$ 的闭包。

(a) 对于一个闭子集 $L\subseteq M$，我们赋予闭向量子空间

$$\begin{aligned}\Gamma_{C^k_L}(E)&:=\{\sigma\in\Gamma_{C^k}(E)\colon\ \mathrm{supp}(\sigma)\subseteq L\}\\&=\{\sigma\in\Gamma_{C^k}(E)\colon(\forall x\in M\setminus L)\,\sigma(x)=0_x\}\end{aligned}$$

赋予诱导拓扑的 $\Gamma_{C^k}(E)$。

(b) 若 M 是局部紧且 σ-紧的，我们令

$$\Gamma_{C^k_c}(E):=\{\sigma\in\Gamma_{C^k}(E)\colon\mathrm{supp}(\sigma)\text{ is compact}\}.$$

M 的紧子集所成的集合 $\mathcal{K}(M)$ 在包含映射下是有向的，并且对 K，$L\in\mathcal{K}(M)$（满足 $K\subseteq L$）有 $\Gamma_{C^k_K}(E)\subseteq\Gamma_{C^k_L}(E)$。我们给出

$$\Gamma_{C_c^k}(E) = \bigcup_{L\in\mathcal{K}(M)} \Gamma_{C_L^k}(E) = \varinjlim \Gamma_{C_L^k}(E)$$

局部凸归纳极限拓扑。

注 4.1.37。在定义 4.1.36(b) 的情形下，我们有：(a) 若 $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ 是 M的紧耗尽，则 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{K}(M)$中共尾，因此

$$\Gamma_{C_c^k}(E) = \varinjlim \Gamma_{C^k_{K_n}}(E)$$

作为局部凸空间。
(b) 对每个$L \in \mathcal{K}(M)$，包含映射 $\Gamma_{C_L^k}(E) \to \Gamma_{C^k}(E)$都是连续线性映射，因此包含映射 $\Gamma_{C_c^k}(E) \to \Gamma_{C^k}(E)$是连续的（见注 B.13.5(d)）。因此， $\Gamma_{C_c^k}(E)$是豪斯多夫的，并且在 Γ_{C^k}
$_{L}$ (E)上对每个 $L \in \mathcal{K}(M)$都诱导给定的拓扑。
(c) 当然，只有当 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$时， $\Gamma_{C_c^k}(E)$才值得关注。

引理 4.1.38。 若 $L \subseteq M$ 是闭子集且 $U \subseteq M$ 是开子集，使得 $L \subseteq U$ （（或者是满足 $L \subseteq U^0$） 的全子流形），则限制映射 ρ： $\Gamma_{C_L^k}$（E） $\to \Gamma_{C_L^k}$（$E|_U$）是拓扑向量空间同构。

证明。 映射 ρ 是线性的。我们很容易验证它是单射。为证明ρ是满射，令 $\sigma \in \Gamma_{C_L^k}$（$U$）。则 τ（x）：$= \sigma$（x）若 $x \in U$， τ（x）：$= 0_x \in E_x$对 $x \in M \setminus L$ 定义了一个元素 $\tau \in \Gamma_{C_L^k}$（E），使得 ρ（τ） $= \sigma$。根据引理 4.1.28 和 A.2.7，$\Gamma_{C_L^k}$（E）上的拓扑关于 ρ 是始拓扑，且限制映射 r： $\Gamma_{C_L^k}$（E） $\to \Gamma_{C^k}$（$E|_{M\setminus L}$）。由于 r是常数，可以将其省略而不改变始拓扑。因此， $\Gamma_{C_L^k}$（E）上的拓扑关于双射 ρ是始拓扑，从而 ρ 是同胚。□

引理 4.1.39. 再设 π_H: $H \to M$ 是一个以局部凸空间 Y 为典型纤维、基于 M 的 C^k-向量丛。如果 f: $E \to H$ 是一个类为 C^k 、覆盖id_M的向量丛映射，则有以下结论:

(a) 映射

$$\Gamma_{C^k}(f)\colon \Gamma_{C^k}(E) \to \Gamma_{C^k}(H),\ \sigma \mapsto f \circ \sigma$$

是连续线性的，其在每个闭子集 $L \subseteq M$ 上的限制 $\Gamma_{C_L^k}(f)$:$\Gamma_{C_L^k}(E)\to \Gamma_{C_L^k}(H)$ 也如此。
(b) 如果 M 是局部紧且 σ-紧的，那么 $\Gamma_{C_c^k}(f)$:$\Gamma_{C_c^k}(E)\to \Gamma_{C_c^k}(H)$,$\sigma \mapsto f \circ \sigma$ 是连续线性映射。

证明. (a) 由引理 4.1.4(b) 立即可得。

(b) 对于 $L \in \mathcal{K}(M)$， 令 j_L： $\Gamma_{C_L^k}(H) \to \Gamma_{C^k}(H)$ 为连续线性包含映射。映射 $\Gamma_{C_c^k}(f)$ 是线性的，且其在 $\Gamma_{C_L^k}(E)$ 上的限制是连续映射 $j_L \circ \Gamma_{C_L^k}(f)$，对每个 $L \in \mathcal{K}(M)$ 都成立。因此，根据注 B.13.5(d)， $\Gamma_{C_c^k}(f)$ 是连续的。□

引理 4.1.40. 逐点乘法使 $\Gamma_{C^k}(E)$ 成为一个拓扑$C^k(M,\mathbb{K})$-模。特别地，对于每个 $f \in C^k(M,\mathbb{K})$，我们得到一个连续线性乘法算子

$$m_f\colon \Gamma_{C^k}(E) \to \Gamma_{C^k}(E),\ \sigma \mapsto f\sigma.$$

证明。对于 $t \in \mathbb{K}$、$x \in M$ 和 $v \in E_x$，我们可以在向量空间 E_x 中构造乘积 tv。由此得到一个乘法映射 $\mu\colon \mathbb{K}\times E \to E$，它是 C^k（利用局部平凡化即可轻易验证）。令

$$\Phi\colon C^k(M,\mathbb{K}\times E) \to C^k(M,\mathbb{K}) \times C^k(M,E)$$

为引理 4.1.7 中的同胚。根据引理 4.1.4(b)，映射$C^k(M,\mu)\colon C^k(M,\mathbb{K}\times E) \to C^k(M,E)$ 是连续的。因此，映射$C^k(M,\mu)\circ\Phi^{-1}\colon C^k(M,\mathbb{K}) \times C^k(M,E) \to C^k(M,E)$ 也连续；它限制为模乘法 $m\colon C^k(M,\mathbb{K}) \times \Gamma_{C^k}(E) \to \Gamma_{C^k}(E)$。于是 $m_f = m(f,\cdot)$ 也连续。□

在下面的引理中，我们假设基域为 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。

引理 4.1.41。若 M 是 σ-紧且局部紧的，设 $(V_i)_{i\in I}$ 是 M 的一个可数局部有限覆盖，由相对紧的开子集构成，这些子集覆盖 M（或其内部覆盖 M的全子流形 V_i^0）那么

$$\rho\colon \Gamma_{C^k_c}(E) \to \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{C^k}(E|_{V_i}),\ \sigma \mapsto (\sigma|_{V_i})_{i\in I}$$

是一个连续线性映射，并且有一个连续线性左逆。特别地，ρ 是一个像为闭集的线性拓扑嵌入。

证明。首先注意到 ρ 是线性的。由注记 4.1.5(a)，它在每个$L \in \mathcal{K}(M)$上的 $\Gamma_{C^k_L}(E)$都连续，因此 ρ 是连续的（见注 B.13.5(d)）。由命题 3.5.34，可得一个从属于 $(V_i)_{i\in I}$的光滑单位分解 $(h_j)_{j\in J}$。因此，对某个 $i(j)$，有 $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq V_{i(j)} \in I$。令 $J_i := \{j \in J\colon i(j) = i\}$（对 $i \in I$），并定义 $g_i := \sum_{j\in J_i} h_j$。于是 $(g_i)_{i\in I}$ 是一个光滑单位分解，且 $L_i := \operatorname{supp}(g_i) \subseteq V_i$（参见引理 A.5.3(c)）。由引理 4.1.38，限制算子

$$\rho_i\colon \Gamma_{C^k_{L_i}}(E) \to \Gamma_{C^k_{L_i}}(E|_{V_i})$$

是拓扑向量空间同构。因此，$\lambda_i := \rho_i^{-1}\colon \Gamma_{C^k_{L_i}}(E|_{V_i}) \to \Gamma_{C^k_{L_i}}(E) \subseteq \Gamma_{C^k_c}(E)$ 是连续线性映射。根据引理 4.1.40，乘法算子

$$m_i\colon \Gamma_{C^k}(E|_{V_i}) \to \Gamma_{C^k_{L_i}}(E|_{V_i}),\ \sigma \mapsto g_i|_{V_i}\sigma$$

是连续且线性的。因此，对每个 $i \in I$，$\lambda_i \circ m_i\colon \Gamma_{C^k}(E|_{V_i}) \to \Gamma_{C^k_c}(E)$ 是连续线性映射。于是映射

$$\alpha\colon \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{C^k}(E|_{V_i}) \to \Gamma_{C^k_c}(E),\ (\sigma_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} (\lambda_i \circ m_i)(\sigma_i)$$

由引理 B.13.2(a) 可知是连续且线性的。尚需注意到，对所有 $\sigma \in \Gamma_{C^k_c}(E)$ 与 $x \in M$，有 $\alpha(\rho(\sigma))(x) = \sum_{i\in I} g_i(x)\sigma(x) = \sigma(x)$，从而 $(\alpha\circ\rho)(\sigma) = \sigma$ 且 $\alpha\circ\rho$ 是 $\Gamma_{C^k_c}(E)$ 上的恒等映射。□

4.1.42. 设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。设 F_j 为局部凸空间，且 $\pi_j\colon E_j \to M$ 是典型纤维为 F_j 、基于 C^k-流形 M 的 C^k-向量丛，其中 $j \in \{1,2\}$。利用 3.7.19 中描述的惠特尼和的局部平凡化，我们很容易验证：映射

$$p_j\colon E_1 \oplus E_2 \to E_j,\quad (v_1, v_2) \mapsto v_j$$

是覆盖 id_M、属于 C^k 类的向量丛映射，其中 $j \in \{1,2\}$；同样，

$$\lambda_1\colon E_1 \to E_1 \oplus E_2,\ v \mapsto (v, 0_x)$$

其中 $x := \pi_1(v)$，且 $\lambda_2\colon E_2 \to E_1 \oplus E_2, v \mapsto (0_x, v)$，其中 $x := \pi_2(v)$。

引理 4.1.43. 在 4.1.42 的情形下，我们有：

(a) 映射

$$\Phi := (\Gamma_{C^k}(p_1), \Gamma_{C^k}(p_2))\colon \Gamma_{C^k}(E_1 \oplus E_2) \to \Gamma_{C^k}(E_1) \times \Gamma_{C^k}(E_2)$$

是拓扑向量空间同构，其在每个闭子集 $L \subseteq M$ 上的限制也是同构 $\Phi_L := (\Gamma_{C^k_L}(p_1)\ \Gamma_{C^k_L}(p_2))\colon \Gamma_{C^k_L}(E_1 \oplus E_2) \to \Gamma_{C^k_L}(E_1) \times \Gamma_{C^k_L}(E_2)$，

(b) 映射 $\Phi_c := (\Gamma_{C^k_c}(p_1)\ \Gamma_{C^k_c}(p_2))\colon \Gamma_{C^k_c}(E_1 \oplus E_2) \to \Gamma_{C^k_c}(E_1) \times \Gamma_{C^k_c}(E_2)$ 是拓扑向量空间同构，当且仅当 M 是 σ-紧且局部紧的。

证明。 投影 $\mathrm{pr}_j\colon \Gamma_{C^k}(E_1) \times \Gamma_{C^k}(E_2) \to \Gamma_{C^k}(E_j)$ 对于 $j \in \{1,2\}$ 是连续线性的。为证明第一个断言，我们考虑连续线性映射 $\Psi := \Gamma_{C^k}(\lambda_1) \circ \mathrm{pr}_1 + \Gamma_{C^k}(\lambda_2) \circ \mathrm{pr}_2$，并验证 $\Phi\circ\Psi$ 和 $\Psi\circ\Phi$ 分别是 $\Gamma_{C^k}(E_1) \times \Gamma_{C^k}(E_2)$ 和 $\Gamma_{C^k}(E_1 \oplus E_2)$ 上的恒等映射。其他断言的证明方法类似，只需分别将符号 C^k 替换为 C^k_L 和 C^k_c。□

例 4.1.44. 若 F 是一个局部凸空间，$k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 且 M 是一个 C^k-流形，我们可以考虑平凡向量丛 $E := M \times F$，其丛投影为 $\pi := \mathrm{pr}_1\colon M \times F \to M$。令 $\mathrm{pr}_2\colon M \times F \to F$ 为到第二个因子的投影。那么 id_E 是一个整体平凡化，并且

$$\Gamma_{C^k}(E) \to C^k(M, F),\ \sigma \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \sigma \tag{4.7}$$

根据推论 4.1.27，是拓扑向量空间的同构。若在 $C^k_L(M, F) := \{f \in C^k(M, F)\colon f|_{M\setminus L} = 0\}$ 上赋予由

对闭子集 $L \subseteq M$，由 $C^k(M,\ F)$ 诱导的拓扑，那么 (4.7) 中的映射限制为一个同构

$$\Gamma_{C^k_L}(E) \to C^k_L(M,F)$$

拓扑向量空间。如果 M 是 σ-紧且局部紧的，我们可以将 $C^k_c(M,\ F) = \bigcup_{L\in\mathcal{K}(M)} C^k_L(M,\ F)$ 构造成局部凸归纳极限 $\varinjlim C^k_L(M,\ F)$，并由此推出映射

$$\Gamma_{C^k_c}(E) \to C^k_c(M,F),\ \ \sigma \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \sigma$$

是拓扑向量空间同构。在每种情况下，逆映射取 f 到 $(\mathrm{id}_M,\ f)$。由引理 4.1.41 可知，在 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 的情况下，映射

$$C^k_c(M,F) \to \bigoplus_{i\in I} C^k(M_i,F),\ \ f \mapsto (f|_{M_i})_{i\in I}$$

是线性拓扑嵌入且像为闭集；对于每个可数局部有限族 $(M_i)_{i\in I}$，其中各元素都是 M 的相对紧开子集且覆盖 M（或者是相对紧的全子流形，其内部 M_i^0 覆盖 M）。

定义 4.1.45。设 F 是基域为 $\mathbb{C}$ 的局部凸空间。设 M 是基域为 $\mathbb{R}$ 的 C^k-流形，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty,\omega\}$。设 $\pi\colon E \to M$ 是典型纤维为 F 的 C^k-向量丛，并且每个纤维都赋有复向量空间结构 E_x。如果对每个 $x_0 \in M$，都存在一个开 x_0-邻域 $U \subseteq M$ 和一个局部平凡化 $\theta\colon E|_U \to U \times F$，其第二分量对于每个 $x \in U$ 都是 E_x 上的 $\mathbb{C}$-线性的，那么我们称 E 是一个典型纤维为复局部凸空间 F 的 C^k-向量丛。

注 4.1.46。如果 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 和 F 是复向量空间，并将“向量空间”理解为复向量空间、将“线性映射”理解为“复线性映射”，那么本节（以及前一节）的结果和证明仍然成立。类似于引理 4.1.13(a)，我们可以取 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 为基域，但得出结论：$C^k(M,\ \mathbb{C})$ 是一个拓扑 $\mathbb{C}$-代数。类似于引理 4.1.40，如果 E 是基域 $\mathbb{R}$ 上的一个 C^k-向量丛，其典型纤维为复局部凸空间，那么 $\Gamma_{C^k}(E)$ 上具有拓扑 $C^k(M,\ \mathbb{C})$-模结构。

C^k-映射：紧支撑截面空间之间

设 $k,\ \ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，$M$ 是一个 σ-紧的有限维 C^ℓ-流形，且 $\pi_j\colon E_j \to M$ 是 M 上的 C^ℓ-向量丛。我们经常需要处理一个非线性映射 $f\colon \Gamma_{C^\ell_c}(E_1) \to \Gamma_{C^\ell_c}(E_2)$，并且知道它在 $\Gamma_{C^\ell_K}(E_1)$ 上的限制对每个紧子集 $K \subseteq M$ 都是 C^ℓ。我们希望由此推出 f 是 C^k，但遗憾的是，如果没有额外的假设，这是不可能的。

例 4.1.47。双线性映射 $C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\times C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R}), (f,g) \mapsto f\otimes g$，其中 $(f\otimes g)(x,y) := f(x)g(y)$，在其定义域$C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}\times\mathbb{R})$上不连续，尽管它在 $C_K^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \cong C_K^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\times C_K^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$上的限制是连续双线性的，因此对所有紧集 $K\subseteq\mathbb{R}$ 都是 C^∞，参见 [HST01]。

例 4.1.48. 映射 $C_c^\infty(\mathbb{R}) \to C_c^\infty(\mathbb{R}),\ f\mapsto f\circ f - f(0)$ 不连续，尽管它在每个紧子集 $C_K^\infty(\mathbb{R})$ 上的限制都是光滑的（见 [Gl06b]）。

现在我们将介绍一些可以避免此类病态现象的附加假设。考虑以下设定，其中使用基域 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$。

4.1.49.设 $\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 M_j 是一个局部紧 C^ℓ-流形，其中 $j\in\{1,2\}$。设 F_j 是 $\mathbb{L}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 上的局部凸空间，且 $\pi_j\colon E_j\to M_j$ 是 M_j 上的一个 C^ℓ-向量丛，其典型纤维为局部凸拓扑 $\mathbb{L}$-向量空间 F_j，其中 $j\in\{1,2\}$。设 $f\colon \Omega\to\Gamma_{C_c^\ell}(E_2)$ 是开子集 $\Omega\subseteq\Gamma_{C_c^\ell}(E_1)$ 上的一个映射。

定义 4.1.50。考虑 4.1.49 中的映射 f。

(a) 若 $M:=M_1=M_2$，则称映射 f为局部的，若对于所有$\sigma,\tau\in\Omega$以及所有满足 $\sigma|_V=\tau|_V$（其中某个 x-邻域为 $V\subseteq M$）的 $x\in M$，都有 $f(\sigma)(x) = f(\tau)(x)$。(b) 若存在 M_1 的局部有限可数覆盖 $(V_i)_{i\in I}$ 和 M_2 的局部有限可数覆盖 $(W_i)_{i\in I}$，它们均由相对紧开子集构成，且满足

$$(\forall\sigma,\tau\in\Omega)(\forall i\in I)\ \ \sigma|_{V_i}=\tau|_{V_i}\ \Rightarrow\ f(\sigma)|_{W_i}=f(\tau)|_{W_i}.$$

(c) 若每个 $\sigma\in\Omega$ 都有一个开邻域 $Q\subseteq\Omega$，使得 $f|_Q$ 是几乎局部的，则称 f 为局部几乎局部的。

注 4.1.51。(a) 每个局部映射 $f\colon\Omega\to\Gamma_{C_c^\ell}(E_2)$ 都是几乎局部的。事实上，任取 M 的一个由 M 的相对紧开子集构成的局部有限覆盖 $(V_i)_{i\in I}$，并令 $W_i:=V_i$。

(b) 每个几乎局部映射都是局部几乎局部的。

定理 4.1.52。设 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty,\omega\}$和 $f\colon\ \Omega\to\Gamma_{C_c^\ell}(E_2)$ 是 ***4.1.49*** 中的映射。若 f 是局部几乎局部的，且其限制到映射$\Omega\cap\Gamma_{C_K^\ell}(E_1)\to\Gamma_{C_c^\ell}(E_2)$对每个紧集 $K\subseteq M_1$都是 $C^k_{\mathbb{L}}$，则 f是 $C^k_{\mathbb{L}}$。

在证明中，我们利用相关覆盖可以被扩张这一点。

引理 4.1.53。设 X 是一个 σ-紧的局部紧拓扑空间，并设$(V_i)_{i\in I}$ 是由相对紧开子集构成的局部有限族 $V_i\subseteq X$，满足 $\bigcup_{i\in I}V_i = X$。那么存在相对紧开子集$U_i\subseteq M$，使其包含闭包 V_i，且$(U_i)_{i\in I}$ 是局部有限的。

证明。设 $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ 是 X 的一个紧耗尽（见引理 A.4.8），且 $K_0 := \emptyset$。对于 $i \in I$，令

$$n(i) := \max\{n \in \mathbb{N}_0 \colon V_i \cap K_n = \emptyset\}.$$

根据注 A.4.6，存在一个紧子集 $L_i \subseteq X \setminus K_{n(i)}$ 使得$V_i \subseteq L_i^0 =: U_i$。对每个 $x \in X$，我们有 $x \in K_n^0$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$满足条件。由引理 A.5.3(b)，集合 $I_0 := \{i \in \colon V_i \cap K_n \neq \emptyset\}$ 是有限的。对于 $i \in I \setminus I_0$，我们有 $n(i) \geq n$，因此 $U_i \subseteq X \setminus K_{n(i)} \subseteq X \setminus K_n$，从而 $U_i \cap K_n = \emptyset$。□

定理的证明4.1.52。我们证明，对于给定截面 $\sigma_0 \in \Omega$的某个开邻域，f 是 $C_{\mathbb{L}}^k$。将 Ω 替换为更小的开 σ_0邻域后，我们可以假设 f 几乎局部。将 Ω 替换为$\Omega - \sigma_0$，并将 f替换为 $\sigma \mapsto f(\sigma + \sigma_0)$后，我们可以假设 $\sigma_0 = 0$。令 $(V_i)_{i\in I}$和 $(W_i)_{i\in I}$ 如定义 4.1.50(b) 中所述。由引理 4.1.53，存在 M_1 的一个局部有限覆盖 $(U_i)_{i\in I}$，其由相对紧开子集 U_i 构成，且满足 $V_i \subseteq U_i$。由习题 3.5.13，存在 C^ℓ函数 $h_i \colon M \to [0,1]$，使得 $L_i := \operatorname{supp}(h_i) \subseteq U_i$ 且 $h_i|_{V_i} = 1$。由引理 4.1.41，映射

$$\rho_1 \colon \Gamma_{C_c^\ell}(E_1) \to \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{C^\ell}(E_1|_{U_i}), \quad \sigma \mapsto (\sigma|_{U_i})_{i\in I}$$

and

$$\rho_2 \colon \Gamma_{C_c^\ell}(E_2) \to \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{C^\ell}(E_2|_{W_i}), \quad \sigma \mapsto (\sigma|_{W_i})_{i\in I}$$

是具有闭像的 $\mathbb{L}$-线性拓扑嵌入。对于每个 $i \in I$，映射

$$r_i \colon \Gamma_{C^\ell_{L_i}}(E_1) \to \Gamma_{C^\ell_{L_i}}(E_1|_{U_i}), \quad \sigma \mapsto \sigma|_{U_i}$$

根据引理 4.1.38，它是拓扑 $\mathbb{L}$-向量空间的同构。因此$\lambda := \oplus_{i\in I} r_i^{-1}$: $\bigoplus_{i\in I} \Gamma_{C^\ell_{L_i}}(E_1|_{U_i}) \to \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{C^\ell_{L_i}}(E_1)$ 是拓扑 $\mathbb{L}$-向量空间的同构。我们令

$$m_i \colon \Gamma_{C^\ell}(E_1|_{U_i}) \to \Gamma_{C^\ell_{L_i}}(E_1|_{U_i})$$

为乘法算子 $\sigma \mapsto h_i|_{U_i}\sigma$，由引理 4.1.40 可知，它是连续的且为$\mathbb{L}$-线性的。于是，线性映射

$$m := \oplus_{i\in I} m_i \colon \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{C^\ell}(E_1|_{U_i}) \to \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{C^\ell_{L_i}}(E_1|_{U_i})$$

是连续的。对于每个 $i \in I$，集合

$$\Omega_i := \Omega \cap \Gamma_{C^\ell_{L_i}}(E_1)$$

是 $\Gamma_{C^\ell_{L_i}}(E_1)$ 中的一个开零邻域。因此，$Q := (\lambda \circ m \circ \rho_1)^{-1}(\bigoplus_{i\in I} \Omega_i)$ 是 $\Gamma_{C_c^\ell}(E_1)$ 中的一个开零邻域。对于每个 $i \in I$，映射

$$f_i\colon \Omega_i \to \Gamma_{C^\ell}(E_2|_{W_i}),\ \ \sigma \mapsto f(\sigma)|_{W_i}$$

是 $C^\ell_{\mathbb{L}}$，因此根据命题 2.8.1，$\oplus_{i\in I} f_i\colon \bigoplus_{i\in I}\Omega_i \to \bigoplus_{i\in I}\Gamma_{C^\ell}(E_2|_{W_i})$ 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。对于每个 $\sigma\in\Omega\cap Q$ 和 $i\in I$，我们有

$$f(\lambda_i(h_i|_{U_i}\sigma|_{U_i}))|_{W_i} = f(h_i\sigma)|_{W_i} = f(\sigma)|_{W_i}$$

因为 $(h_i\sigma)|_{U_i} = \sigma|_{U_i}$。因此

$$\rho_2\circ f|_{\Omega\cap Q} = \oplus_{i\in I} f_i\circ\lambda\circ m\circ\rho_1|_{\Omega\cap Q},$$

这说明 $\rho_2\circ f|_{\Omega\cap Q}$ 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。然后根据引理 1.3.19 和习题 2.2.4，还可分别得到 $f|_{\Omega\cap Q}$ 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。□

类似下面这样的结果常被称为“ω-引理”。

命题 *4.1.54*。 设 $k,\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$，$M$ 是基域为 $\mathbb{R}$ 的 $C^{k+\ell}$-流形，且 $\pi_j\colon E_j\to M$ 是一个 $C^{k+\ell}$-向量丛，其典型纤维为局部凸实向量空间 F_j，其中 $j\in\{1,2\}$。设 $\Omega\subseteq E_1$ 是一个开子集，且 $f\colon \Omega\to E_2$ 是一个 $C^{k+\ell}$-映射，满足对所有 $x\in M$，$f(\Omega\cap(E_1)_x)\subseteq(E_2)_x$。假设存在一个紧子集 $B\subseteq M$，使得对所有 $x\in M\setminus B$，$f(0_x)=0_x$。那么 $\Gamma_{C^\ell_c}(E_1)\cap C^\ell(M,\Omega)$ 是 $\Gamma_{C^\ell_c}(E_1)$ 的一个开子集，并且下面的映射是 C^k：

$$f_*\colon \Gamma_{C^\ell_c}(E_1)\cap C^\ell(M,\Omega)\to\Gamma_{C^\ell_c}(E_2),\ \ \sigma\mapsto f\circ\sigma.$$

我们特别指出证明中的一个论证。

引理 4.1.55. 设 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 $\pi\colon E\to M$ 是 C^k流形 M上的 σ紧、局部紧的 C^k向量丛。如果 $\Omega\subseteq E$ 是开集，那么$\{\sigma\in\Gamma_{C^k_c}(E)\colon \sigma(M)\subseteq\Omega\}=\Gamma_{C^k_c}(E)\cap C^k(M,\Omega)$是 $\Gamma_{C^k_c}(E)$的开子集。

证明. 设 $(M_i)_{i\in I}$ 是由紧的满子流形 $M_i\subseteq M$ 组成的可数局部有限族，其内部覆盖 M。根据引理 4.1.41，映射

$$\rho\colon \Gamma_{C^k_c}(E)\to\bigoplus_{i\in I}\Gamma_{C^k}(E|_{M_i}),\ \ \sigma\mapsto(\sigma|_{M_i})_{i\in I}$$

是连续的。现在 $C^k(M_i,\Omega)=C^k(M_i,E)\cap\lfloor M_i,\Omega\rfloor$ 在 $C^k(M_i,E)$ 中是开集，因此 $\Gamma_{C^k}(E|_{M_i})\cap C^k(M_i,\Omega)$ 在 $\Gamma_{C^k}(E|_{M_i})$ 中是开集。所以 $\Gamma_{C^k_c}(E)\cap C^k(M,\Omega)=\rho^{-1}\big(\bigoplus_{i\in I}(\Gamma_{C^k}(E|_{M_i})\cap C^k(M_i,\Omega))\big)$ 在 $\Gamma_{C^k_c}(E)$ 中是开集。□

命题的证明 4.1.54。根据引理 4.1.55，定义域是开的。映射 f 是局部的，因此我们只需证明其限制为映射$g\colon \Gamma_{C^\ell_K}(E_1)\cap C^\ell(M,\ \Omega)\to\Gamma_{C^\ell_c}(E_2)$时是 C^k。由于 g的像包含于闭向量子空间$\Gamma_{C^\ell_{K\cup B}}(E_2)$中，而后者也是$\Gamma_{C^\ell}(E_2)$的闭向量子空间，因此只需证明 g 作为到$\Gamma_{C^\ell}(E_2)$的映射是 C^k （见引理 1.3.19）。我们找到一个可数局部有限族$(M_i)_{i\in I}$，由紧

的 M 的全子流形组成，其内部覆盖 M，并且对每个 $i \in I$，都存在局部平凡化 $\theta_i\colon E_1|_{M_i} \to M_i \times F_1$ 和 $\Theta_i\colon E_2|_{M_i} \to M_i \times F_2$。令$\theta_{i,2}$: $E_1|_{M_i} \to F_1$和$\Theta_{i,2}\colon E_2|_{M_i} \to F_2$分别为 θ_i和 Θ_i的第二分量。映射

$$\Gamma_{C^\ell}(E_2) \to \prod_{i\in I} C^\ell(M_i, F_2),\ \ \sigma \mapsto (\Theta_{i,2} \circ \sigma|_{M_i})_{i\in I}$$

根据引理 4.1.28，这是一个线性拓扑嵌入，且像是闭的。因此，根据引理 1.3.19，只需证明

$$g_i\colon \Gamma_{C^\ell_L}(E_1) \cap C^\ell(M, \Omega) \to C^\ell(M_i, F_2),\ \ \sigma \mapsto \Theta_{i,2} \circ f \circ \sigma|_{M_i}$$

对每个 $i \in I$，它都是 C^k。注意，$\Omega_i := \{(x, y) \in M_i \times F_1)\colon \theta_i^{-1}(x, y) \in \Omega\}$ 是 $M_i \times F_1$的一个开子集。我们有

$$\Theta_i(f \circ \theta_i^{-1}(x, y)) = (x, h_i(x, y)) \ \text{ for } (x, y) \in \Omega_i$$

对于一个 $C^{k+\ell}$-映射 $h_i\colon \Omega_i \to F_2$。现在，$Q_i := \{\varphi \in C^\ell(M_i, F_1) : (\mathrm{id}_{M_i}, \varphi)(M_i) \subseteq \Omega_i\}$是 $C^\ell(M_i, F_1)$ 的一个开子集，并且我们证明映射

$$(h_i)_*\colon Q_i \to C^\ell(M_i, F_2);\ \ \varphi \mapsto h_i \circ (\mathrm{id}_{M_i}, \varphi)$$

它是 C^k。事实上，根据命题 4.1.15，求值映射 $\varepsilon_i\colon C^\ell(M_i, F_1) \times M_i \to F_1$ 是 $C^{\infty,\ell}$，因此 $C^{k,\ell}$，于是

$$((h_i)_*)^\wedge(\varphi, x) = h_i(x, \varphi(x)) = h_i(x, \varepsilon_i(\varphi, x))$$

根据注 3.5.26(e) 和命题 3.5.27(b)，有 $C^{k,\ell}$ 属于（φ, x）$\in Q_i \times M_i$。因此，根据命题 4.1.21(c)，h_i 是 C^k。□

对于平凡向量丛，我们可推出：

推论 4.1.56。设 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，$M$ 是一个 σ-紧的局部紧C^ℓ流形，其底域为 $\mathbb{R}$，且 E 是一个局部凸空间。若 $U \subseteq E$ 是开集，则$C^\ell_c(M, U) := \{f \in C^\ell_c(M, E)\colon f(M) \subseteq U\}$是 $C^\ell_c(M, E)$的一个开子集。

证明。</style>平凡向量丛 的子集 是开集。我们将 $\Gamma_c^\ell(M, E)$ 与 $\Gamma_{C^\ell_c}(M \times E)$ 等同，并将 $C^\ell_c(M, F)$ 与 $\Gamma_{C^\ell_c}(M \times F)$ 等同，如例 4.1.44 中所示。于是，$C^\ell_c(M, U)$ 对应于集合

$$\Gamma_{C^\ell_c}(M \times E) \cap C^\ell(M, M \times U),$$

由引理 4.1.55，它在 $\Gamma_{C^\ell_c}(M \times E)$ 中是开的。 □

推论 4.1.57. 设 $k, \ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，$M$ 是基域 $\mathbb{R}$ 上的 σ-紧局部紧$C^{k+\ell}$流形，且 E 以及 F 是局部凸空间。设 $U \subseteq E$ 为开子集，且 $g\colon M \times U \to F$ 为 $C^{k+\ell}$-映射。如果 M 不是紧的，我们假设 $0 \in U$，并且存在一个紧子集 $B \subseteq M$，使得对所有 $x \in M \setminus B$，$f(x, 0) = 0$。那么下列映射是 C^k:

$$g_*\colon C^\ell_c(M, U) \to C^\ell_c(M, F),\quad f \mapsto g \circ (\mathrm{id}_M, f).$$

证明. 如例 4.1.44 中所述，将 $C_c^\ell(M,E)$ 视为 $\Gamma_{C_c^\ell}(M\times E)$，并将 $C_c^\ell(M,F)$ 视为空间$\Gamma_{C_c^\ell}(M\times F)$。利用 $C^{k+\ell}$-映射 $h\colon M\times U\to M\times F, (x,y)\mapsto(x,g(x,y))$，映射 g_*对应于映射

$$h_*\colon \Gamma_{C_c^\ell}(M\times E)\cap C^\ell(M,M\times U)\to\Gamma_{C_c^\ell}(M\times F),\quad \sigma\mapsto h\circ\sigma,$$

根据命题 4.1.54，which is C^k 。 □

以下变体也很有用。

命题 4.1.58。 设 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty,\omega\}$, $\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$, M 是一个 σ-紧、局部紧的 C^ℓ-流形，其底域为 $\mathbb{R}$。对于 $\mathbb{L}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$，设 E 和 F 是局部凸拓扑 $\mathbb{L}$-向量空间，且 $U\subseteq E$ 是开集。那么我们有：
(a) 若 $g\colon U\to F$ 是一个 $C^{k+\ell}_{\mathbb{L}}$-映射，则 $C_c^\ell(M,g)\colon C_c^\ell(M,U)\to C_c^\ell(M,F)$, $f\mapsto g\circ f$ 是一个 $C^k_{\mathbb{L}}$-映射；若 M 非紧，则我们假设此处 $0\in U$ 和 $g(0)=0$。
(b) 考虑一个映射 $g\colon M\times U\to F$，其形式为 $g=h\circ(q\times \mathrm{id}_U)$，其中 $q\colon M\to N$ 到一个无边界的 $C^{k+\ell}_{\mathbb{L}}$-流形 N 是某个 $C^\ell_{\mathbb{K}}$-映射，且 $h\colon N\times U\to F$ 是一个 $C^{k+\ell}_{\mathbb{L}}$-映射。若 M 非紧，假设 $0\in U$，并假设存在一个紧子集 $B\subseteq M$，使得对所有 $x\in M\setminus B$，都有 $h(q(x),0)=0$。那么 $g_*\colon C_c^\ell(M,U)\to C_c^\ell(M,F)$, $f\mapsto g\circ(\mathrm{id}_M,f)$ 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。

证明。(a) 我们首先假设 $k\neq\omega$。设 $(M_i)_{i\in I}$ 是 M_i 的一个局部有限、可数的紧致满子流形族。对于每个 $i\in I$，映射$C^\ell(M_i,g)\colon C^\ell(M_i,U)\to C^\ell(M_i,F)$ 根据命题 4.1.24(a) 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。由于$\rho\colon C_c^\ell(M,F)\to\bigoplus_{i\in I}C^\ell(M_i,F)$, $f\mapsto(f|_{M_i})_{i\in I}$ 是一个具有闭像的线性拓扑嵌入，因此只需证明 $\rho\circ C^\ell(M,g)$ 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。但 $r\colon C_c^\ell(M,U)\to\bigoplus_{i\in I}C^\ell(M_i,U)$, $f\mapsto(f|_{M_i})_{i\in I}$ 是 $C^\infty_{\mathbb{L}}$，并且

$$\rho\circ C_c^\ell(M,g)=\big(\oplus_{i\in I}C^\ell(M_i,g)\big)\circ r$$

是 $C^k_{\mathbb{L}}$，因为右端项中的第一个映射根据命题 2.8.1 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。
情形 $k=\omega,\mathbb{L}=\mathbb{C}$ 与情形 $k=\infty,\mathbb{L}=\mathbb{C}$相同。
若 $k=\omega$ 且 $\mathbb{L}=\mathbb{R}$，则存在 g 的复解析延拓 $h\colon W\to F_{\mathbb{C}}$，定义在开集 $W\subseteq E_{\mathbb{C}}$ 上，并且满足 $U\subseteq W$。于是，$C_c^\ell(M,W)$ 是 $C_c^\ell(M,E_{\mathbb{C}})=C_c^\ell(M,E)_{\mathbb{C}}$中的开集，并且 $C_c^\ell(M,h)\colon C_c^\ell(M,W)\to C_c^\ell(M,F_{\mathbb{C}})=C_c^\ell(M,F)_{\mathbb{C}}$是 $C_c^\ell(M,g)$ 的复解析延拓，因此 $C_c^\ell(M,g)$ 是实解析的。

(b) 设 $(M_i)_{i\in I}$, r 和 ρ 与 (a) 的证明中相同。对于 $i\in I$，令 g_i 为 g 在映射 $M_i\times U\to F$ 上的限制。则 $(g_i)_*\colon C^\ell(M_i,U)\to C^\ell(M_i,F)$ 对每个 $i\in I$ 都是 $C^k_{\mathbb{L}}$，由命题 4.1.24(b) 可知。由于 $\rho\circ g_*=\big(\oplus_{i\in I}(g_i)_*\big)\circ r$，我们推得 g_* 是 $C^k_{\mathbb{L}}$。□

推论 4.1.59. 设 M 是一个带有 $\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 的 $\mathbb{R}$ 上的 σ-紧、局部紧 C^ℓ-流形。设 E_1、E_2 和 F 为局部凸空间，且$\beta\colon E_1\times E_2\to F$ 是连续双线性映射，那么双线性映射$C_c^\ell(M,E_1)\times C_c^\ell(M,E_2)\to C_c^\ell(M,F)$, $(f,g)\mapsto\beta\circ(f,g)$ 也连续。

证明. 将定义域与 $C_c^\ell(M, E_1 \times E_2)$ 等同后，所讨论的映射对应于 $C_c^\ell(M, \beta)$；由于 β 光滑，故该映射连续（见命题 4.1.58(a)）。□

例 4.1.60. 设 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 σ-紧、局部紧 C^ℓ-流形。设 $\mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$。推论 4.1.59 对通常的逐点运算给出以下结论：

(a) $C_c^\ell(M, \mathbb{L})$ 是一个结合的拓扑 $\mathbb{L}$-代数（若 M 非紧，则没有单位元）。（b）若 $\mathcal{A}$ 是一个结合的局部凸拓扑 $\mathbb{L}$-代数，则 $C_c^\ell(M, \mathcal{A})$ 是一个结合的拓扑 $\mathbb{L}$-代数（也是拓扑 $C_c^\ell(M, \mathbb{L})$-代数）；（c）若 $\mathfrak{g}$ 是定义在 $\mathbb{L}$ 上的局部凸拓扑李代数，则 $C_c^\ell(M, \mathfrak{g})$ 也是定义在 $\mathbb{L}$ 上的拓扑李代数。

我们还有以下结论。

命题 4.1.61. 设 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 σ-紧、局部紧 C^ℓ-流形。设 $\mathbb{L} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 和 $\pi\colon E \to M$ 是定义在 M 上的 C^ℓ-向量丛，其典型纤维为局部凸拓扑 $\mathbb{L}$-向量空间 F。则逐点乘法使拓扑 $\mathbb{L}$-向量空间 $\Gamma_{C_c^\ell}(E)$ 成为一个拓扑 $C_c^\ell(M, \mathbb{L})$-模。

证明。对于 $f \in C^\ell(M, \mathbb{L})$ 和 $\sigma \in \Gamma_{C_c^\ell}(E)$，令 $\mu(f, \sigma)(x) := (f\sigma)(x) := f(x)\sigma(x)$，我们得到一个 C^ℓ-截面 $f\sigma$ of E（参见引理 4.1.40），并且很容易验证它具有紧支撑。利用例 4.1.44 和引理 4.1.43(b)，我们将 $C_c^\ell(M, \mathbb{L}) \times \Gamma_{C_c^\ell}(E)$ 识别为 $\Gamma_{C_c^\ell}((M \times \mathbb{L}) \oplus E)$。于是 μ 是一个局部映射，我们只需验证，对于每个紧子集 $K \subseteq M$，其在 $C_K^\ell(M, \mathbb{L}) \times \Gamma_{C_K^\ell}(E)$ 上的限制是连续的。这由模乘法 $C^\ell(M, \mathbb{L}) \times \Gamma_{C^\ell}(E) \to \Gamma_{C^\ell}(E)$ 连续这一事实可知，而这又是引理 4.1.40 的推论。□

第 4.1 节练习

练习 4.1.1。 证明，对于 $k \in \mathbb{N}_0$，m ap

$$C^k(M, N) \hookrightarrow C(T^k(M), T^k(N))_{c.o.}, \quad f \mapsto T^k(f),$$

是一个拓扑嵌入，前提是 $C^k(M,\ N)$ 赋予紧开 C^k-拓扑。

习题4.1.2。 设 $M_1,\ M_2,\ N_1$ 和 N_2 是 C^k-流形，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $\varphi\colon\ M_1 \to M_2$ 和 $\psi\colon\ N_2 \to N_1$ 是 C^k- 微分同胚。证明映射

$$C^k(M_2, N_2) \to C^k(M_1, N_1), \quad f \mapsto \psi \circ f \circ \varphi$$

是关于紧开 C^k拓扑的一个同胚。

习题 4.1.3. 仿照引理 4.1.7，证明对于每个 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$、每个 C^k-流形 M 以及每个由 C^k-流形组成的有限族 $(N_i)_{i\in I}$，$C^k(M, \prod_{i\in I} N_i)$ 与 $\prod_{i\in I} C^k(M, N_i)$ 同胚。

习题 4.1.4. 给定 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，设 M、N、L 和 P 为 C^k-流形，且 $g\colon M \times N \times P \to L$ 为一个 C^k-映射。

(a) 证明映射 $\Phi\colon C^k(M,N) \times P \to C^k(M,L), (f,p) \mapsto g^p \circ (\mathrm{id}_M, f)$ 是连续的，其中 $g^p := g(\cdot, p)$ [注意，按引理 4.1.10 中的记号，$\Phi(f) = C^k(M,g)(\mathrm{id}_M, c_p)$。

(b) 证明即使 $g\colon (M \times N) \times P \to N$ 是 $C^{k,0}$，Φ 也连续；对 $k \in \mathbb{N}_0$ [使用归纳法、引理 A.6.21 以及恒等式

$$T(g^p \circ (\mathrm{id}_M, f)) = T(g^p) \circ (\mathrm{id}_{TM}, Tf).$$

习题 4.1.5. 设 M 是一个有限维 C^k-流形（可能带有粗糙边界），E 和 F 是局部凸空间，$U \subseteq E$ 是一个开子集，$K \subseteq M$ 是一个具有非空内部的紧子集，$k, \ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，且 $g\colon K^0 \times U \to F$ 是一个 $C^{k+\ell}$-函数。那么 $C^k(M, E) \cap \lfloor K, U \rfloor = \{f \in C^k(M, E)\colon f(K) \subseteq U\}$ 是 $C^k(M, E)$ 的一个开子集。利用指数定律 1.7.30，证明

$$\{f \in C^k(M,E)\colon f(K) \subseteq U\} \to C^k(K^0, F),\ f \mapsto g \circ (\mathrm{id}_{K^0}, f|_{K^0})$$

是一个 C^ℓ-映射。

4.2 紧流形上的映射流形

现在，我们在 $C^\ell(M, N)$ 上构造一个光滑流形结构，其中 N 是一个具有局部加法的光滑流形，$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，且 M 是一个可能具有粗糙边界的紧 C^ℓ-流形。映射流形并非纯流形，而是以一族局部凸空间为模型（如定义 3.2.13 中所述）；我们先来介绍这族空间。

4.2.1. 对于 $f \in C^\ell(M, N)$，我们定义 $\Gamma_f := \{\tau \in C^\ell(M, TN)\colon \pi_{TN} \circ \tau = f\}$，如 4.1.30 中所述，其中 $E := TN$。因此 $\Gamma_f \cong \Gamma_{C^\ell}(f^*(TN))$（见引理 4.1.31）。我们令 $\mathcal{E} := \{\Gamma_f\colon f \in C^\ell(M, N)\}$。

定理 4.2.2. 设 N 是一个具有局部加法的光滑流形，$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，且 M 是一个可能具有粗糙边界的紧 C^ℓ-流形。则以下结论成立：

(a) 在集合 $C^\ell(M,N)$ 上存在唯一的光滑流形结构，该结构以 $\mathcal{E}$ 为模型，并满足以下指数律，且对所有 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 均成立：对于每个 C^k-流形 L（其边界可能是粗糙的），映射 $g\colon L \to C^\ell(M,N)$ 是 C^k，当且仅当

$$g^\wedge\colon L \times M \to N, \quad g^\wedge(x,y) := f(x)(y)$$

是一个 $C^{k,\ell}$-映射。

(b) *(a)* 中光滑流形 $C^\ell(M,N)$ 底层的拓扑是紧开 C^ℓ-拓扑。*(c)* 求值映射 $\varepsilon\colon C^\ell(M,N)\times M\to N,(f,x)\mapsto f(x)$ 是 $C^{\infty,\ell}$，因此是 C^ℓ。值得注意的是，对于每个 $x\in M$，点求值 $\varepsilon_x\colon C^\ell(M,N)\to N,f\mapsto f(x)$ 都是光滑的。*(d)* 对于每个 $f\in C^\ell(M,N)$ 和 $v\in T_f(C^\ell(M,N))$，我们有 $(T\varepsilon_x(v))_{x\in M}\in\Gamma_f$，且映射 $\Theta\colon T_f(C^\ell(M,N))\to\Gamma_f,v\mapsto(T\varepsilon_x(v))_{x\in M}$ 是拓扑向量空间的一个同构。

证明。考虑一个局部加法 $\Sigma\colon U\to N$，它适用于 N，开子集 $U':=(\pi_{TN},\Sigma)(U)\subseteq N\times N$以及与之相关的 C^∞-微分同胚 $\theta\colon U\to U',v\mapsto(\pi_{TN}(v),\Sigma(v))$。对于 $f\in C^\ell(M,N)$，

$$O_f:=\Gamma_f\cap C^\ell(M,U)$$

是 Γ_f 的一个开子集，

$$O'_f:=\{g\in C^\ell(M,N)\colon(f,g)(M)\subseteq U'\}$$

是 $C^\ell(M,N)$ 的一个开子集，且映射

$$\psi_f\colon O_f\to O'_f,\quad\tau\mapsto\Sigma\circ\tau$$

是一个同胚，其逆映射为 $\varphi_f\colon O'_f\to O_f,h\mapsto\theta^{-1}\circ(f,h)$。若还有$g\in C^\ell(M,N)$，则 $\psi_g^{-1}\circ\psi_f$ 的定义域是开集 $\psi_f^{-1}(O'_f\cap O'_g)$。根据命题 4.1.34，它在此处光滑，因为映射

$$(\tau,x)\mapsto(\psi_g^{-1}\circ\psi_f)(\tau)(x)=\theta^{-1}(g(x),\Sigma(\tau(x)))\tag{4.8}$$

是 $C^{\infty,\ell}$。因此，$C^\ell(M,N)$ 具有光滑流形结构，使得映射 φ_f 中的每一个都是一个局部坐标图。

注意，根据构造，刚构造出的 $C^\ell(M,N)$ 上的光滑流形结构满足 (b)。如果能够证明，对于所有 $f\in C^\ell(M,N)$，$\varepsilon(\psi_f(\tau)x)$ 在 (τ,x) 中是 $C^{\infty,\ell}$，那么它就满足 (c)。但是

$$\varepsilon(\psi_f(\tau),x)=\Sigma(\tau(x))=\Sigma(\mathrm{ev}(\tau,x)),$$

其中 $\mathrm{ev}\colon\Gamma_f\times M\to TN,(\tau,x)\mapsto\tau(x)$ 是 $C^{\infty,\ell}$根据命题 4.1.32。为说明我们所构造的光滑流形结构满足 (a) 中所述的指数律，设 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$和 $g\colon L\to C^\ell(M,N)$ 是一个映射，其中 L 是一个可能具有粗糙边界的 C^k-流形。如果 g 是 C^k，那么 $g^\wedge=\varepsilon\circ(g\times\mathrm{id}_M)$ 是 $C^{k,\ell}$。反之，如果 $g^\wedge$ 是 $C^{k,\ell}$，设 $x_0\in L$ 和 $f:=g(x_0)$。根据命题 A.6.17，g 作为到 $C(M,N)$ 的映射是连续的，因此 $L\to C(M,N\times N),x\mapsto(f,g(x))$ 是连续的。于是我们可以找到一个开 x_0-邻域 $W\subseteq L$，使得对于所有 $x\in W$，$(f,g(x))\in C(M,U')$，从而 $g(W)\subseteq O'_f$。简写 $h:=\varphi_f\circ g|_W\colon W\to O_f\subseteq\Gamma_f$。那么

$$h^\wedge(x,y)=\varphi_f(g(x))(y)=(\theta^{-1}\circ(f,g(x)))(y)=\theta^{-1}(f(y),g^\wedge(x,y))$$

是 $C^{k,\ell}$，因此根据命题 4.1.34，h 是 C^k。于是 $g|_W=\psi_f\circ h$ 是 C^k，因此 g 也是如此。

(a) 中的唯一性：记 $C^\ell(M,N)'$ 为 $C^\ell(M,N)$，并赋予它另一种满足 (a) 中指数律的光滑流形结构。我们在如下意义下证明光滑流形结构的唯一性：$g:=\mathrm{id}:C^\ell(M,N)'\to C^\ell(M,N)$ 是一个 C^∞-微分同胚。因此，如果我们还假设 $C^\ell(M,N)'$ 以 $\mathcal{E}$ 为模型，那么这些光滑流形结构将一致。由于 $\mathrm{id}:C^\ell(M,N)'\to C^\ell(M,N)'$ 是光滑映射，指数律推出求值映射 $\varepsilon=\mathrm{id}^\wedge:C^\ell(M,N)'\times M\to N$ 是 $C^{\infty,\ell}$。由于 g 满足 $g^\wedge=\varepsilon$，指数律推出 g 是光滑的。交换 $C^\ell(M,N)$ 与 $C^\ell(M,N)'$ 的角色后，我们也可得出 g^{-1} 是光滑的。因此，g 是一个 C^∞-微分同胚。

(d) 根据前述内容，$C^\ell(M,N)$ 上的光滑流形结构与局部加法的选择无关。现在我们假设局部加法 Σ 是标准化的。固定 $f\in C^\ell(M,N)$。只需证明

$$(\Theta\circ T\psi_f)(0,\tau)=\tau\ \text{ for each }\tau\in\Gamma_f,\tag{4.9}$$

也就是说，对所有如前所述的 τ 以及所有 $x\in M$，都有 $(T\varepsilon_x\circ T\psi_f)(0,\tau)=\tau(x)$。这里我们使用 $T\Gamma_f$ 与 $\Gamma_f\times\Gamma_f$ 的自然识别，该识别将 $T_0\Gamma_f$ 与 $\{0\}\times\Gamma_f$ 对应起来。为验证 (4.9)，我们发现使用几何切向量（如定义 3.3.1 和习题 5.2.1 中所述）较为方便。因此，$(0,\tau)$ 对应于几何切向量 $[t\mapsto t\tau]$。我们计算得

$$\begin{aligned}T\varepsilon_xT\psi_f([t\mapsto t\tau])&=T\varepsilon_x([t\mapsto\psi_f(t\tau)])=T\varepsilon_x([t\mapsto\Sigma\circ t\tau])\\&=[t\mapsto\Sigma(t\tau(x))]=[t\mapsto\Sigma|_{U\cap T_{f(x)}N}(t\tau(x))]\\&=T_0\Sigma|_{U\cap T_{f(x)}N}([t\mapsto t\tau(x)])=\tau(x),\end{aligned}$$

最后一个等号使用了 (3.55)。 □

定义 4.2.3。对于定理 4.2.2 中的 M、N 和 ℓ，定理 4.2.2(a) 给出的唯一光滑流形结构称为 $C^\ell(M,N)$ 上的典范光滑流形结构。

注 4.2.4。若 M 和 N 如定理 4.2.2 中所述，L 是一个 C^k-流形（可能具有粗糙边界），且 $h\colon L\times M\to N$ 是一个映射，使得对所有 $x\in L$，$h_x:=h(x,\cdot)\in C^\ell(M,N)$，那么 h 是 $C^{k,\ell}$ 当且仅当该映射

$$h^\vee\colon L\to C^\ell(M,N),\ x\mapsto h_x$$

是 C^k（因为定理 4.2.2(a) 适用于映射 $g:=h^\vee$，其中 $g^\wedge=h$）。

引理 4.2.5。设 N 是一个具有局部加法的光滑流形，$\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$，且 M 是一个紧致光滑流形（可能具有粗糙边界）。若 $W\subseteq N$ 是一个开子集，则 W 具有局部加法

并且由 $C^\ell(M,\ N)$ 在其开子集 $C^\ell(M,\ W)\ = C^\ell(M,\ N)\ \cap \lfloor M,\ W\rfloor$ 上诱导的光滑流形结构，与 $C^\ell(M,\ W)$ 上的典范流形结构一致。

证明。若 $\Sigma\colon\ U\ \to\ N$ 是定义在 $U\ \subseteq\ TN$ 的零截面开邻域上的 N 的局部加法，则 $U'\colon =\ \{(\pi_N(v)\ \Sigma(v))\colon\ v\ \in\ U\}$ 在 $N\times N$ 中是开集，且 $\theta\colon =(\pi_N,\Sigma)\colon\ U\ \to\ U'$ 是一个 C^∞ 微分同胚。于是 $U_W\colon\ =\ U\cap TW$ 是 TW 中零截面的开邻域，$U'_W\ =\ \{(\pi_W(v)\ \Sigma_W(v))\colon\ v\in U_W\} = \theta(U\cap TW)$ 在 $N\times N$ 中是开集（因而在 $W\times W$ 中也如此），且 $\Sigma_W\colon =(\pi_W,\Sigma_W)\colon$ $U_W\to U'_W$ 是一个 C^∞ 微分同胚（因为它与 $\theta|_{U_W}$ 重合）。因此 Σ_W 是 W 的局部加法。由于利用 Σ'_W 构造的 $C^\ell(M,W)$ 的坐标图，与 $C^\ell(M,N)$ 的坐标图 φ_f限制在开子集上的结果相同（如定理 4.2.2 的证明所示），所以 $C^\ell(M,W)$ 上的典范流形结构与作为 $C^\ell(M,N)$ 的开子流形时的光滑流形结构相同。□

引理 4.2.6。设 N_1 和 N_2 是具有局部加法的光滑流形，k、$\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 M 是一个可能具有粗糙边界的紧 C^ℓ-流形。若 $h\colon\ \ N_1\to N_2$ 是一个 $C^{k+\ell}$-映射，则

$$C^\ell(M,h)\colon C^\ell(M,N_1)\to C^\ell(M,N_2),\ \ f\mapsto h\circ f$$

是一个 C^k-映射。特别地，当 h 光滑时，$C^\ell(M,\ h)$ 也是光滑的。

证明。根据指数律（如定理 4.2.2(a) 所述），我们只需证明 $(C^\ell(M,\ h))\hat{}(f,\ x)\ = h(f(x))\ \in N_2$ 在 $(f,\ x)\ \in C^\ell(M,\ N_1)\ \times M$ 中是 C^k、$^\ell$。现在，根据定理 4.2.2(c)，$f(x)$ 在 $(f,\ x)$ 中是 C^k、$^\ell$。因此，利用链式法则（命题 3.5.27），$C^\ell(M,\ h)\hat{}$ 是 C^k、$^\ell$。□

引理 4.2.7。设 N_1 和 N_2 是具有局部加法的光滑流形，k、$\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 M 是一个紧 $C^{k+\ell}$-流形（可能具有粗糙边界）。若 $g\colon\ M\times N_1\to N_2$ 是一个 $C^{k+\ell}$-映射，则

$$g_*\colon C^\ell(M,N_1)\to C^\ell(M,N_1),\ \ f\mapsto g\circ(\mathrm{id}_M,f)$$

是一个 C^k-映射。值得注意的是，只要 g 光滑，g_* 就光滑。

证明。根据指数律（如定理 4.2.2(a) 所述），我们只需证明 $(g_*)\hat{}(f,x)\ =\ g(x,f(x))\ \in\ N_2$ 是 C^k,$^\ell$于 $(f,x)\ \in\ C^\ell(M,N_1)\ \times M$。现在，$x$ 是 C^k,$^\ell$于 (f,x)（因为它是 $C^{k+\ell}$），而 $f(x)$ 根据定理 4.2.2(c) 是 C^k,$^\ell$于 (f,x)。因此，利用链式法则（命题 3.5.27）和注 3.5.26(e)，$(g_*)\hat{}$ 是 C^k,$^\ell$。□

引理 4.2.8. 对于 $j\in\{1,2\}$，设 N_j 是一个允许局部加法的 C^∞-流形。设 M 是一个紧 C^ℓ-流形(可能具有粗糙边界)，且满足 $\ell\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$。那么 $\Phi\colon C^\ell(M,\ N_1\times N_2)\ \to C^\ell(M,N_1)\ \times C^\ell(M,N_2),f\mapsto(\mathrm{pr}_1\circ f,\mathrm{pr}_2\circ f)$ 是一个 C^∞-微分同胚。

证明. 我们知道 Φ 是一个同胚（引理 4.1.7）。根据引理 4.2.6，对于 $j \in \{1,2\}$，映射 $C^\ell(M,\mathrm{pr}_j)$ 是光滑的，因此双射 Φ也光滑。若能证明以下结论，则逆映射 $\Phi^{-1}\colon C^\ell(M,N_1)\times C^\ell(M,N_2) \to C^\ell(M,N_1\times N_2)$ 将是光滑的

$$(\Phi^{-1})^\wedge\colon C^\ell(M,N_1)\times C^\ell(M,N_2)\times M \to N_1\times N_2$$

根据定理 4.2.2(a) 中的指数律，$C^{\infty,\ell}$。但是

$$(\Phi^{-1})^\wedge(f,g,x) = (f(x),g(x))$$

由于其分量是定理 4.2.2(c) 中的求值映射，因此为 $C^{\infty,\ell}$ □

第 4.2 节习题

习题 4.2.1。设 N 是一个光滑的仿紧巴拿赫流形，S 是 N 的一个子流形，且为闭子集，$\ell \in \mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$，并且 M 是一个紧 C^ℓ 流形，它可以有粗糙边界。利用一个与 S 适配的 N 的局部加法（如习题 3.8.3 中所述），证明 $C^\ell(M,S)$ 是 $C^\ell(M,N)$ 的子流形。

4.3 流形的细盒积

作为一种工具，我们在流形的可数直积上构造流形结构。这种“细盒积”很有用，例如可用于研究非紧流形上的映射流形（见第 4.4 节）。对于有限乘积，我们得到通常的乘积流形。对于无限乘积，我们采用的拓扑可能比乘积拓扑更细。我们的设定如下：

4.3.1. 设 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, $r\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty,\omega\}$, I 是一个可数非空集，且对 $i\in I$，M_i 是一个以局部凸空间为模型的 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形，但不一定是纯的。将笛卡尔积 $M := \prod_{i\in I} M_i$ 视为一个集合。

4.3.2. 对于遍历 M_i 的坐标图族 $\varphi_i\colon U_i \to V_i \subseteq E_i$，其中 $\varphi := (\varphi_i)_{i\in I}$ 且满足 $0\in V_i$，我们在 $E_\varphi := \bigoplus_{i\in I} E_i$ 上赋予局部凸直和拓扑。于是，$\bigoplus_{i\in I} V_i := E_\varphi \cap \prod_{i\in I} V_i$ 是 E_φ 中的一个开零邻域（见注记 B.13.1(a)），并赋予其由 E_φ 诱导的拓扑。令 $\mathcal{O}_{\mathrm{fb}}$ 为关于映射的 M 上的终拓扑

$$\Theta_\varphi\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to M,\ (x_i)_{i\in I}\mapsto (\varphi_i^{-1}(x_i))_{i\in I}, \tag{4.10}$$

对所有如前所述的 φ，以及 $U_\varphi := \Theta_\varphi(V_\varphi)$。因此

$$U_\varphi = \Big\{(y_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I} U_i\colon y_i\neq\varphi_i^{-1}(0) \text{ for only finitely many } i\in I\Big\}. \tag{4.11}$$

我们称 $\mathcal{O}_{\mathrm{fb}}$ 为 M上的细盒拓扑。细盒拓扑是豪斯多夫的，因为它比乘积拓扑更细。事实上，考虑投影 $\mathrm{pr}_i\colon\ M \to M_i$ 到第 i 个分量，其中 $i \in I$。利用连续的线性投影 $\pi_i\colon\ E_\varphi \to E_i$到第 i 个分量，我们由对每个 φ，$\mathrm{pr}_i \circ \Theta_\varphi = \varphi_i^{-1} \circ \pi_i|_{V_\varphi}$ 都连续，推得 pr_i 连续。

4.3.3.设 φ 如前，并考虑类似的坐标图族 ψ $\psi_i\colon\ R_i \to S_i \subseteq F_i$。若除有限多个 $i \in I$ 外，对所有 $i \in I$ 均有 $\varphi_i^{-1}(0) = \psi_i^{-1}(0)$，则

$$(\Theta_\varphi)^{-1}(U_\varphi \cap U_\psi) = \bigoplus_{i\in I} \varphi_i(U_i \cap R_i),$$

它是 $\bigoplus_{i\in I} E_i$ 中的一个开 0-邻域。由命题2.8.1，转移映射

$$(\Theta_\varphi)^{-1} \circ \Theta_\psi\colon \bigoplus_{i\in I} \psi_i(U_i \cap R_i) \to \bigoplus_{i\in I} \varphi_i(U_i \cap R_i),\ (x_i)_{i\in I} \mapsto ((\varphi_i \circ \psi_i^{-1})(x_i))_{i\in I}$$

是 $C^r_{\mathbb{K}}$，并且实际上是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚，因而也是一个同胚，因为 $\Theta_\psi^{-1} \circ \Theta_\varphi$ 是逆映射。若对无穷多个 $i \in I$ 有 $\varphi_i^{-1}(0) \neq \psi_i^{-1}(0)$，则 $(\Theta_\varphi)^{-1}(U_\varphi \cap U_\psi) = \emptyset$，且该转移映射平凡地是一个同胚。因此，对所有 φ，$U_\varphi = \Theta_\varphi(V_\varphi)$ 在 $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{fb}})$ 中是开的，且 Θ_φ 是到其像上的同胚（见习题A.3.1）。由前述可知，映射 $\Phi_\varphi := (\Theta_\varphi|^{U_\varphi})^{-1}\colon\ U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E_\varphi$ 是$C^r_{\mathbb{K}}$-相容的，因而构成 M 上一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形结构的图册。

定义 4.3.4. 我们用 M_{fb}表示赋予拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{fb}}$和刚才描述的 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形结构的 M，并将 M^{fb} 称为由 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形族 $(M_i)_{i\in I}$ 构成的细盒积。

引理 4.3.5. 设 I 是一个可数集，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 且 $f_i\colon\ M_i \to N_i$ 是 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形之间的一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-映射，其中 $i \in I$。那么下述映射是 $C^r_{\mathbb{K}}$:

$$f := \prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} M_i \to \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} N_i,\ (x_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i\in I}.$$

证明。设 $x = (x_i)_{i\in I}$ 是 $M := \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} M_i$中的一个元素，$\psi_i\colon\ P_i \to Q_i \subseteq F_i$是 N_i 在 $y_i := f(x_i)$附近的一个坐标图，其中 $i \in I$ 使得 $\psi_i(y_i) = 0$，且$\varphi_i\colon$ $U_i \to V_i \subseteq E_i$ 是 M_i 在 x_i 附近的一个坐标图，其中 $\varphi_i(x_i) = 0$。缩小 U_i 之后，我们可以假设 $f_i(U_i) \subseteq P_i$。令 $\varphi := (\varphi_i)_{i\in I}$ 且$\Phi_\varphi\colon$ $U_\varphi \to \bigoplus_{i\in I} V_i \subseteq \bigoplus_{i\in I} E_i$为 M在 x附近的相应坐标图，如 4.3.3 所示。同样，考虑 $\psi := (\psi_i)_{i\in I}$ 以及 $\prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} N_i$在 $f(x)$附近的相应坐标图$\Phi_\psi\colon$ $U_\psi \to \bigoplus_{i\in I} Q_i \subseteq \bigoplus_{i\in I} F_i$。那么 $\Phi_\psi \circ f \circ (\Phi_\varphi)^{-1}$就是映射

$$\oplus_{i\in I}(\psi_i \circ f_i \circ \varphi_i^{-1})\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to \bigoplus_{i\in} Q_i,\ (z_i)_{i\in I} \mapsto ((\psi_i \circ f_i \circ \varphi_i^{-1})(z_i))_{i\in I},$$

根据命题 2.8.1，这成立。 □

引理 4.3.6. 设 I 是一个可数集，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，且 $M_{i,1}$, $M_{i,2}$ 是 $C^r_{\mathbb{K}}$-流形，其中 $i \in I$。对于 $j \in \{1,2\}$，令 $\mathrm{pr}_{i,j} : M_{i,1} \times M_{i,2} \to M_{i,j}$ 表示到第 j 个分量的投影。则下述映射是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚：

$$\Psi := \left(\prod_{i\in I} \mathrm{pr}_{i,1}, \prod_{i\in I} \mathrm{pr}_{i,2} \right) : \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} (M_{i,1} \times M_{i,2}) \to \left(\prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} M_{i,1} \right) \times \left(\prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} M_{i,2} \right).$$

证明。设 $x = (x_i)_{i\in I} \in M_1 := \prod^{\mathrm{fb}}_{i\in I} M_{i,1}$ 和 $y = (y_i)_{i\in I} \in M_2 := \prod^{\mathrm{fb}}_{i\in I} M_{i,2}$。对于每个 $i \in I$，设 $\varphi_i \colon U_i \to V_i \subseteq E_i$ 是 M_i 的一个坐标图，定义在 x_i 的邻域上，并满足 $\varphi_i(x_i) = 0$；令 $\varphi := (\varphi_i)_{i\in I}$，并设 $\Phi_\varphi \colon U_\varphi \to \bigoplus_{i\in I} V_i \subseteq \bigoplus_{i\in I} E_i$ 为 M_1 的相应坐标图。同样，设 $\psi_i \colon P_i \to Q_i \subseteq F_i$ 是 M_i 的一个坐标图，定义在 y_i 的邻域上，并满足 $\psi_i(y_i) = 0$；令 $\psi := (\psi_i)_{i\in I}$，并设 Φ_ψ：$U_\psi \to \bigoplus_{i\in I} Q_i \subseteq \bigoplus_{i\in I} F_i$ 为 M_2 的相应坐标图。令 $\theta := (\varphi_i \times \psi_i)_{i\in I}$，并令 Φ_θ：$U_\theta \to \bigoplus_{i\in I} (V_i \times Q_i) \subseteq \bigoplus_{i\in I} (E_i \times F_i)$ 为 $M := \prod^{\mathfrak{b}}_{i\in I} (M_{i,1} \times M_{i,2})$ 的相应坐标图。根据引理B.13.2(c)，以下映射是拓扑向量空间同构：

$$\alpha \colon \bigoplus_{i\in I} (E_i \times F_i) \to \bigoplus_{i\in I} E_i \times \bigoplus_{i\in I} F_i, \ (v_i, w_i)_{i\in I} \mapsto ((v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}).$$

它限制为从 $W := \bigoplus_{i\in I} (V_i \times Q_i)$ 到 $V \times Q$ with $V := \bigoplus_{i\in I} V_i$, $Q := \bigoplus_{\in I} Q_i$ 的 $C^r_{\mathbb{K}}$- 微分同胚。现在 $\Psi(U_\theta) = U_\varphi \times U_\psi$ and $(\Phi_\varphi \times \Phi_\psi) \circ \Psi \circ \Phi_\theta^{-1} = \alpha|^{V\times Q}_W$ 是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。因此，Ψ 是一个双射，并且在每一点处都是局部 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚，故 Ψ 是一个 $C^r_{\mathbb{K}}$-微分同胚。□

4.4 非紧流形上的映射流形

现在，我们在 σ-紧致、局部紧流形（可能具有粗糙边界）上的映射集合上构造光滑流形结构。借助适当细盒积中的嵌入，利用由紧致满子流形构成的可数局部有限覆盖，可以将大部分构造归约为第 4.2 节中处理的紧定义域情形。这些流形将以某些局部凸空间 $\Gamma_{f.\ c}$ 为模型；这些空间同构于空间 $\Gamma_{C^\ell_c}(f^*(TN))$，即拉回丛 $f^*(TN)$ 中紧支撑的 C^ℓ-截面，见引理 4.4.3。我们证明以下定理。

定理 4.4.1。设 N 是具有局部加法的光滑流形，$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 且 M 是一个 σ-紧、局部紧的 C^ℓ-流形，它可能具有粗糙边界。设 $\pi_{TN} \colon TN \to N$ 为丛投影。那么 $C^\ell(M, N)$ 具有唯一的光滑流形结构，其模型空间为 $\mathcal{E} := \{\Gamma_{f,c} \colon f \in C^\ell(M, N)\}$ 这一局部凸空间，并且满足：对于每个 $f \in C^\ell(M, N)$ 以及 N 的局部加法 $\Sigma \colon TN \supseteq U \to N$，映射

$$\Gamma_{f,c} \cap C^\ell(M,U) \to C^\ell(M,N),\ \tau \mapsto \Sigma \circ \tau$$

是一个 C^∞-微分同胚，映到 $C^\ell(M,N)$的一个开子集。对于每个由紧致满子流形 K_i 构成的局部有限可数族$(K_i)_{i\in I}$，其内部覆盖 M，我们有一个光滑流形嵌入

$$\rho\colon C^\ell(M,N) \to \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i,N),\ \ f \mapsto (f|_{K_i})_{i\in I}. \tag{4.12}$$

我们还证明：

命题 4.4.2。在定理 4.4.1的情形下，对每个 $x \in M$，点求值ε_x： $C^\ell(M,N) \to N$都是光滑的。对每个 $f \in C^\ell(M,N)$，我们有 $(T\varepsilon_x(v))_{x\in M} \in \Gamma_{f,\,c}$对每个 $v \in T_f(C^\ell(M,N))$，映射

$$\Theta\colon T_f(C^\ell(M,N)) \to \Gamma_{f,c},\ \ v \mapsto (T\varepsilon_x(v))_{x\in M}$$

是拓扑向量空间的同构。

一些辅助结果会有所帮助。我们采用与 4.1.30 中相同的记号。

引理 4.4.3。在定理 4.4.1的情形下，设 $f \in C^\ell(M,N)$。那么，对 M 中的每个紧子集 K，

$$\Gamma_{f,K} := \{\tau \in \Gamma_f\colon (\forall x \in M\setminus K)\ \tau(x) = 0 \in T_{f(x)}N\}$$

是 Γ_f 的闭向量子空间，因此在诱导拓扑下是局部凸空间。$\Gamma_{f,\,c} = \bigcup_K \Gamma_{f,\,K}$ 上的局部凸归纳极限拓扑是豪斯多夫的。

证明。根据命题 4.1.32，点求值 $\mathrm{ev}_x\colon \Gamma_f \to TN,\ \tau \mapsto \tau(x)$ 对于 $x \in M$ 是 C^∞，因此作为到 $T_{f(x)}N$ 的映射，它是连续线性的。于是，$\Gamma_{f,\,K}$ 是 Γ_f 的闭向量子空间。$\Gamma_{f,\,c}$ 上的局部凸归纳极限拓扑使线性包含映射 $\Gamma_{f,\,c} \to \Gamma_f$ 连续（参见注 B.13.5(d)）。由于 Γ_f 是豪斯多夫的，$\Gamma_{f,\,c}$ 也是如此。□

此后，我们在 $\Gamma_{f,\,c}$ 上赋予局部凸归纳极限拓扑。

引理 4.4.4。设 N 是一个光滑流形，$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是一个 σ-紧、局部紧的 C^ℓ-流形，它可以有粗糙边界。对于 $f \in C^\ell(M,N)$，有如下结论：

(a) 双线性映射 $C^\ell(M,\mathbb{R}) \times \Gamma_f \to \Gamma_f,\ (h,\tau) \mapsto h\tau$连续，其中 $(h\tau)(x) = h(x)\tau(x)$。*(b)* 如果 $K \subseteq M$ 是紧致满子流形，那么线性映射 $\Gamma_f \to \Gamma_{f|_K},\ \tau \mapsto \tau|_K$ 连续。*(c)* 如果 K 是 M 的紧致满子流形，且 $L \subseteq K$ 紧，那么$r\colon \Gamma_{f,L} \to \Gamma_{f|_K,L},\ \tau \mapsto \tau|_K$是拓扑向量空间同构。

证明。 (a) 根据引理 4.1.31 中的同构 $\Gamma_{C^\ell}(f^*(TN)) \to \Gamma_f$，由 $\Gamma_{C^\ell}(f^*(TN))$ 是拓扑 $C^\ell(M,\mathbb{R})$- 模这一事实即可得出（见引理 4.1.40 ）。

(b) 有关的映射是限制映射$C^\ell(M,\ TN) \to C^\ell(K,\ TN)$的限制，它是连续的（见注记 4.1.5(a)）。

(c) 由引理 4.1.31 可知，这可由引理 4.1.38 推出。 □

定理的证明 4.4.1. 设 $(K_i)_{i\in I}$ 是 M 中的一个局部有限族，其成员为紧的全子流形，记作 K_i，且它们的内部覆盖 M。由于 M 是 σ-紧的，去掉空集后，我们可以假设 I 是可数的。映射

$$\rho\colon C^\ell(M,N) \to \prod_{i\in I} C^\ell(K_i,N),\ \ f \mapsto (f|_{K_i})_{i\in I}$$

是单射，且其像 im(ρ) 等于

$$\Big\{(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C^\ell(K_i,N)\colon (\forall i,j\in I)\,(\forall x\in K_i\cap K_j)\, f_i(x) = f_j(x)\Big\}. \quad (4.13)$$

事实上，包含映射“⊆”显然成立。若 $(f_i)_{i\in I}$ 属于右端项中的集合，则分段定义 $f(x) := f_i(x)$ if $x \in K_i$ 给出了一个良定义的函数 $f\colon M \to N$，该函数是 C^ℓ，因为$f|_{(K_i)^0} = f_i|_{(K_i)^0}$ 对每个 $i \in I$都是 C^ℓ。于是 $\rho(f) = (f_i)_{i\in I}$。

对每个 $i \in I$，赋予 $C^\ell(K_i,N)$ 典范光滑流形结构，如定理 4.2.2 所述，其模型空间为局部凸空间 $\Gamma_f := \{\tau \in C^\ell(K_i,TN)\colon \pi_{TN}\circ\tau = f\}$for $f \in C^\ell(K_i,N)$ 的集合 $\{\Gamma_f\colon f \in C^\ell(K_i,N)\}$。令 $\Sigma\colon TN \supseteq U \to N$ 为 N 的一个局部加法；按照定义 3.8.11，记 $U' := \{(\pi_{TN}(v),\Sigma(v))\colon v \in U\}$ 和 $\theta := (\pi_{TN}|_U,\Sigma)\colon U \to U'$。对于 $f \in C^\ell(K_i,N)$，考虑 $O_f := \Gamma_f \cap C^\ell(K_i,U)$，$O'_f := \{g \in C^\ell(K_i,N)\colon (f,g) \in C^\ell(K_i,U')\}$，以及 $\psi_f\colon O_f \to O'_f,\ \tau \mapsto \Sigma\circ\tau$，如定理 4.2.2 及其证明中所述。对于 $f \in C^\ell(M,N)$，令 $\Gamma_{f,c}$ 为所有满足 $\pi_{TN}\circ\tau = f$ 且为 $\tau \in C^\ell(M,TN)$ 的元素构成的集合

$$\{x \in M\colon \tau(x) \neq 0_{f(x)} \in T_{f(x)}N\}$$

在 M 中相对紧。定义 $O_f := \Gamma_{f,c} \cap C^\ell(M,U)$，并令 O'_f 为所有满足以下条件的 $g \in C^\ell(M,N)$ 的集合：

$(f,g) \in C^\ell(M,U')$，且 $g|_{M\setminus K} = f|_{M\setminus K}$ 对某个紧子集 $K \subseteq M$ 成立。

于是 $\psi_f\colon O_f \to O'_f,\ \tau \mapsto \Sigma\circ\tau$是一个双射，具有 $(\psi_f)^{-1}(g) = \theta^{-1}\circ(f,\ g)$。线性映射

$$s\colon \Gamma_{f,c} \to \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{f|_{K_i}},\quad \tau \mapsto (\tau|_{K_i})_{i\in I}$$

对于每个紧子集 $L \subseteq M$，该映射在 $\Gamma_{f,\,L}$ 上连续（见引理 4.4.4(b)），因此根据其泛性质（见注 B.13.5(d)），它在局部凸归纳极限 $\Gamma_{f,\,c}$ 上连续。与上文一样，

$$\operatorname{im}(s) = \Big\{(\tau_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{f|_{K_i}} \colon (\forall i,j\in I)(\forall x \in K_i \cap K_j)\, \tau_i(x) = \tau_j(x)\Big\}, \tag{4.14}$$

这是 $\bigoplus_{i\in I} \Gamma_{f|_{K_i}}$ 的一个闭向量子空间。现在我们证明 s 是到其像上的同胚。事实上，映到其像上的余限制存在连续线性右逆。为此，取一个从属于 $(K_i^0)_{i\in I}$ 的 C^ℓ-单位分解 $(h_i)_{i\in I}$，定义在 M 上；于是 $L_i := \operatorname{supp}(h_i)$ 是 K_i 的闭子集，因而是紧的。乘法算子 $\beta_i \colon \Gamma_{f|_{K_i}} \to \Gamma_{f|_{K_i},\,L_i}$，

$\tau \mapsto h_i\tau$ 4 4 4

是连续线性映射（由引理 . . (a) ）。此外，限制算子 $s_i \colon \Gamma_{f,\,L_i} \to \Gamma_{f|_{K_i},\,L_i}$ 是拓扑向量空间同构（引理 4.4.4 (c)）。因此，$s_i^{-1}\circ\beta_i \colon \Gamma_{f|_{K_i}} \to \Gamma_{f,\,L_i} \subseteq \Gamma_{f,\,c}$ 是连续线性映射。由引理 B.13.2(a)，线性映射也

$$\sigma \colon \bigoplus_{i\in I} \Gamma_{f|_{K_i}} \to \Gamma_{f,c},\ (\tau_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} (s_i^{-1}\circ\beta_i)(\tau_i)$$

是连续的。因此，$\sigma|_{\operatorname{im}(s)}$ 是连续且线性的。我们很容易验证 $s\circ\sigma|_{\operatorname{im}(s)} = \mathrm{id}^{\operatorname{im}(s)}$。

简记 $\varphi_i := (\psi_{f|_{K_i}})^{-1}$ 和 $\varphi := (\varphi_i)_{i\in I}$。现在我们使用如下的 C^∞-微分同胚

$$\Theta_\varphi \colon \bigoplus_{i\in I} O_{f|_{K_i}} \to U_\varphi,\ (\tau_i)_{i\in I} \mapsto (\varphi_i^{-1}(\tau_i))_{i\in I} = (\Sigma\circ\tau_i)_{i\in I}$$

如 (4.10) 和 4.3.3 中所述，其逆映射为坐标图

$$\Phi_\varphi \colon U_\varphi \to \bigoplus_{i\in I} O_{f|_{K_i}},\ (g_i)_{i\in I} \mapsto (\varphi_i(g_i))_{i\in I}$$

$\prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i,\ N)$ 在 $(f|_{K_i})_{i\in I}$ 附近的坐标图。对于 $(\tau_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} O_{f|_{K_i}}$，我们有

$$\Theta_\varphi((\tau_i)_{i\in I}) \in \operatorname{im}(\rho) \ \Leftrightarrow\ (\tau_i)_{i\in I} \in \operatorname{im}(s).$$

事实上，对于 $i,\ j \in I$ 和 $x \in K_i \cap K_j$，有 $\Sigma(\tau_i(x)) = \Sigma(\tau_j(x))$ 当且仅当 $\tau_i(x) = \tau_j(x)$，结合 (4.13) 和 (4.14) 即可得出该断言。因此

$$\Phi_\varphi(\operatorname{im}(\rho)\cap U_\varphi) = \operatorname{im}(s) \cap \bigoplus_{i\in I} O_{f|_{K_i}},$$

这表明 $\operatorname{im}(\rho)$ 是 $\prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i,\ N)$ 的子流形。令

$$\Psi_\varphi \colon \operatorname{im}(\rho)\cap U_\varphi \to \operatorname{im}(s) \cap \bigoplus_{i\in I} O_{f|_{K_i}},\ (g_i)_{i\in I} \mapsto \Phi_\varphi((g_i)_{i\in I})$$

为 $\mathrm{im}(\rho)$ 对应的子流形坐标图。于是

$$\rho(O'_f) = \mathrm{im}(\rho) \cap U_\varphi \quad \text{and} \quad s(O_f) = \mathrm{im}(s) \cap \bigoplus_{i\in I} O_{f|_{K_i}}.$$

因此，$\varphi_f = s^{-1} \circ \Psi_\varphi \circ \rho|_{O'_f}\colon O'_f \to O_f$ 是 $C^\ell(M,N)$上以 $\mathcal{E}$（所有 Γ_f 的集合）为模型的光滑流形结构的一个坐标图，它使得$\rho\colon C^\ell(M,N) \to \mathrm{im}(\rho)$成为一个 C^∞-微分同胚。注意，$C^\ell(M,N)$上以 $\mathcal{E}$为模型、并使 ρ成为一个 C^∞-微分同胚的光滑流形结构由这些性质唯一确定。因此，它与 Σ 的选取无关。另一方面，对于给定的局部加法 Σ，这些 φ_f 构成一个 C^∞-图册。由于 φ_f 的定义不涉及覆盖$(K_i)_{i\in I}$，刚刚构造的光滑流形结构与$(K_i)_{i\in I}$的选取无关。□

命题的证明 4.4.2。沿用前述证明中的记号，给定 $x \in M$，对某个 $i \in I$我们有 $x \in K_i$。限制映射$\rho_i\colon C^\ell(M,N) \to C^\ell(K_i,N)$是光滑的（作为 ρ的一个分量）。此外，点求值$\mathrm{ev}_x\colon C^\ell(K_i,N) \to N,\ f \mapsto f(x)$是光滑的，如定理 4.2.2(c)所示。因此 $\varepsilon_x = \mathrm{ev}_x \circ \rho_i$ 是光滑的。现在我们可以逐字重复定理 4.2.2(d)的证明，将 Γ_f 替换为$\Gamma_{f,c}$。□

命题 4.4.5.设 N_1 与 N_2 为容许局部加法的光滑流形，且 k、$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。

(a) 若 M 是一个可能具有粗糙边界的 σ-紧、局部紧 $C^{k+\ell}$-流形，且 $g\colon M \times N_1 \to N_2$ 为一个 $C^{k+\ell}$-映射，则映射$g_*\colon C^\ell(M,N_1) \to C^\ell(M,N_2),\ f \mapsto g \circ (\mathrm{id}_N, f)$ 是 C^k。*(b)* 若 M 是一个可能具有粗糙边界的 σ-紧、局部紧 C^ℓ-流形，且 $h\colon N_1 \to N_2$ 为一个 $C^{k+\ell}$-映射，则映射$C^\ell(M,h)\colon C^\ell(M,N_1) \to C^\ell(M,N_2),\ f \mapsto h \circ f$ 是 C^k。

证明。(a) 设 $(K_i)_{i\in I}$ 为 M 的紧全子流形的可数局部有限族，其内部覆盖 M。则由引理 4.2.7，对每个 $i \in I$，$H_i\colon C^\ell(K_i,N_1) \to C^\ell(K_i,N_2),\ f \mapsto g \circ (\mathrm{id}_{K_i}, f)$ 是 C^k。因此由引理 4.3.5，$H := \prod_{i\in I} H_i\colon \prod^{\mathrm{fb}}_{i\in I} C^\ell(K_i,N_1) \to \prod^{\mathrm{fb}}_{i\in I} C^\ell(K_i,N_2)$ 也是 C^k。现在

$$\rho_j\colon C^\ell(M,N_j) \to \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i,N_j),\ \ f \mapsto (f|_{K_i})_{i\in I}$$

是关于 $j \in \{1,2\}$ 的光滑流形嵌入。因此，如果 $\rho_2 \circ g_*$ 是 C^k，那么 g_* 将是 C^k。但如 $\rho_2 \circ g_* = H \circ \rho_1$ 所示，情况确实如此。

(b) 的证明与 (a) 类似，将 g_* 替换为 $C^\ell(M,h)$，并像引理 4.2.6 中那样取 $H_i := C^\ell(K_i,h)$。□

命题4.4.6。设 M 是一个 σ-紧、局部紧的 C^ℓ-流形，允许具有粗糙边界，且满足 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。设 N_1 和 N_2 为

具有局部加法的光滑流形。那么 $N_1 \times N_2$ 也具有局部加法。令 $\mathrm{pr}j$: $N_1 \times N_2 \to N_j$ 为投影到 $j \in \{1,2\}$ 的第 j 个分量的映射。那么下述映射是一个 C^∞-微分同胚:

$$\Phi := (C^\ell(M, \mathrm{pr}_1), C^\ell(M, \mathrm{pr}_2))\colon C^\ell(M, N_1 \times N_2) \to C^\ell(M, N_1) \times C^\ell(M, N_2).$$

证明。由命题 4.4.5(b)，Φ是光滑的；此外，Φ是一个双射。为说明 Φ^{-1} 是连续的，取 M 的一个可数局部有限族 $K_{ii\in I}$，其元素为紧致满子流形，且其内部覆盖 M。对于 $i \in I$，映射

$$\Phi_i := (C^\ell(K_i, \mathrm{pr}_1), C^\ell(K_i, \mathrm{pr}_2))\colon C^\ell(K_i, N_1 \times N_2) \to C^\ell(K_i, N_1) \times C^\ell(K_i, N_2)$$

是一个 C^∞-微分同胚（见引理 4.2.8）。于是

$$h := \prod_{i\in I} \Phi_i^{-1}\colon \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} (C^\ell(K_i, N_1) \times C^\ell(K_i, N_2)) \to \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i, N_1 \times N_2)$$

由引理 4.3.5 可知是光滑的。由定理 4.4.1，

$$\rho_j\colon C^\ell(M, N_j) \to \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i, N_j), \quad f \mapsto (f|_{K_i})_{i\in I}$$

对于 $j \in \{1,2\}$，它是光滑流形的一个嵌入，并且映射ρ：$C^\ell(M, N_1 \times N_2) \to \prod_{i\in I}{}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i, N_1 \times N_2)$，$f \mapsto (f|_{K_i})_{i\in I}$是一个嵌入。令 Ψ 为 C^∞-微分同胚

$$\prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} (C^\ell(K_i, N_1) \times C^\ell(K_i, N_2)) \to \left(\prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i, N_1)\right) \times \left(\prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} C^\ell(K_i, N_2)\right)$$

由引理 4.3.6。于是 $\rho \circ \Phi^{-1} = \Psi \circ h \circ \Psi^{-1} \circ (\rho_1 \times \rho_2)$是光滑的，从而蕴含 Φ^{-1}的光滑性。□

4.5 有限维流形的直接极限

考虑有限维光滑流形的递增序列 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$，使得包含映射$\lambda_{n,\ m}$: $M_m \to M_n$ 对所有满足 $n \geq m$的 $n,\ m \in \mathbb{N}$ 都是光滑浸入。设

$$d := \sup\{\dim(M_n)\colon n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \quad \text{and} \quad \mathbb{R}^\infty := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R},$$

赋予局部凸直和拓扑。在本节中，我们证明以下定理:

定理 4.5.1。其上存在唯一的光滑流形结构

$$M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \quad modeled\ on \quad \mathbb{R}^d,$$

具有以下性质：对于每个 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 C^k流形 N（其可能具有粗糙边界），映射 $f\colon\ M \to N$ 是 C^k，当且仅当$f|_{M_n}\colon\ M_n \to N$对每个 $n \in \mathbb{N}$都是 C^k。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，包含映射$\lambda_n\colon\ M_n \to M$关于 M上的后一种光滑流形结构是光滑的。M 所承载的拓扑是关于包含映射λ_n: $M_n \to M$ （ $n \in \mathbb{N}$）的终拓扑。

我们将使用以下术语:

定义 4.5.2。设 M 是一个光滑流形， $N \subseteq M$ 是一个子流形。映射 r: $M \to N$ 称为从 M 到 N 的光滑收缩，如果 r 是光滑的，且 $r|_N = \mathrm{id}_N$。

在下面的引理中，对于 $n < m$，我们将 $\mathbb{R}^n$ 与向量子空间 $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m$等同起来。

引理 4.5.3（坐标图的延拓）。设 M 是一个 m 维光滑流形， $N \subseteq M$ 是一个 n 维浸入子流形，且 $\varphi\colon\ U_\varphi \to V_\varphi \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 N 的一个坐标图，并且 U_φ 在 M 中相对紧且光滑可缩。那么存在一个坐标图 ψ: $U_\psi \to V_\psi \subseteq \mathbb{R}^m$，其属于 M，并具有以下性质:

（a） U_ψ 在 M 中相对紧且光滑可缩；（b） $N \cap U_\psi = U_\varphi$、$\mathbb{R}^n \cap V_\psi = V_\varphi$ 和 $\varphi = \psi|_{U_\varphi}$；（c）存在一个从 U_ψ 到 U_φ 的光滑收缩。

证明。令 $\overline{U_\varphi}$ 为 U_φ 在 N 中的闭包。由于 U_φ 是紧的且 M 是豪斯多夫的，包含映射$U_\varphi \to M$ 是一个拓扑嵌入，这意味着 M 和 N 在 U_φ 上诱导相同的拓扑，并且 $j|_{U_\varphi}\colon\ U_\varphi \to M$ 是一个拓扑嵌入。由于 M 局部紧，我们可以找到一个紧子集 $K \subseteq M$，使得 $U_\varphi \subseteq K^0$。由于 K 被有限个可分的图册定义域覆盖，因此 K^0 可分。由于 U_φ 在 U_φ 中是开的，存在一个开子集$W \subseteq M$，使得

$$U_\varphi = \overline{U}_\varphi \cap W. \tag{4.15}$$

将 W 替换为 $W \cap K^0$后，我们可以假设 $W \subseteq K^0$。由 (4.15)，U_φ 在 W中是闭的。上述推理表明， $j|_{U_\varphi}\colon\ U_\varphi \to W$是拓扑嵌入。又由于 $j|_{U_\varphi}\colon\ U_\varphi \to W$ 是浸入，因此它是光滑流形之间的嵌入。于是 U_φ 是 W 的子流形（见命题 3.3.30），也是 W的闭子集。由定理 3.8.15，存在一个C^∞-微分同胚 f: $P \to Q$，它从包含 $U_\varphi \subseteq P$的开子集 $P \subseteq W$ 映到光滑向量丛 E 在 U_φ上的开子集 Q，使得 Q 包含零截面，并且对每个 $x \in U_\varphi$， $f(x) = 0_x \in E_x$。令 $\pi\colon\ E \to U_\varphi$

为丛投影。由推论 3.7.12， E 可平凡化；因此我们可以假设 $E = U_\varphi \times \mathbb{R}^{m-n}$。由于 $(x, 0) \in Q$，对每个 $x \in U_\varphi$，存在开子集 $U_x \subseteq U_\varphi$ 和 $Y_x \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$，使得 $x \in U_\varphi$、$0 \in Y_x$且 $U_x \times Y_x \subseteq Q$。将 Y_x 替换为开凸零邻域后，我们可以假设对所有 $y \in Y_x$ 和 $t \in [0,1]$， $ty \in Y_x$。将 Q替换为 $\bigoplus_{x \in U_\varphi}(U_x \times Y_x)$，并将 P替换为该开集在 f下的原像后，我们可以假设

$$F(t,x,y) := (x, (1-t)y) \in Q \text{ for all } (x,y) \in Q \text{ and } t \in [0,1].$$

映射 $F\colon [0,1] \times Q \to Q$ 是光滑的。令 $h\colon [0,1] \to [0,1]$ 为一个光滑函数，使得对某个 $\varepsilon \in]0, 1/2[$, $h(t) = 0$ 对所有 $t \in [0, \varepsilon[$ 成立，且 $h(t) = 1$对所有 $t \in]1-\varepsilon, 1]$ 成立。由于 U_φ 是光滑可缩的，存在 $x_0 \in U_\varphi$和一个光滑映射 $G\colon [0,1] \times U_\varphi$，使得对所有 $x \in U_\varphi$， $G(0, x) = x$ 且 $G(1, x) = x_0$。考虑映射

$$H\colon [0,1] \times Q \to Q,\ (t,x,y) \mapsto \begin{cases} F(h(2t), x, y) \text{ if } t \in [0, 1/2]; \\ (G(h(2t-1), x), 0) \text{ if } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

由于对所有 $t \in]1/2 - \varepsilon/2, 1/2 + \varepsilon/2[$, $H(t,x,y) = (x, 0)$，我们很容易看出H是光滑的。此外，对所有 $(x,y) \in Q$， $H(0,x,y) = (x,y)$，且 $H(1,x,y) = (x_0, 0)$。因此， Q 是光滑可缩的， $U_\psi := P$也如此。由 (4.15) 可得 $N \cap U_\psi = U_\varphi$。此外，由于 $U_\psi \subseteq W \subseteq K$， U_ψ 是相对紧的。最后， $V_\psi := (\varphi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}})(Q) \subseteq \mathbb{R}^m$ 是一个开集，而 $(\varphi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}}) \circ f\colon U_\varphi \to V_\psi$ 是一个 C^∞-微分同胚；此外，

$$V_\psi \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = (\varphi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m-n}})(Q \cap (U_\varphi \times \{0\})) = \varphi(U_\varphi) \times \{0\} = V_\varphi \times \{0\},$$

由于对所有 $x \in U_\varphi$， $f(x) = (x, 0)$，因此我们有 $\psi(x) = (\varphi(x), 0)$，从而 $\psi|_{U_\varphi} = \varphi$，如果我们将 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$等同起来。

(c) 根据 (b)， U_φ 是 U_ψ的子流形。映射 $\pi \circ f\colon U_\psi \to U_\varphi$ 是一个光滑收缩映射。□

定理 4.5.1 的证明。我们赋予 $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ 关于包含映射 $\lambda_n\colon M_n \to M$ 的终拓扑，从而使其作为拓扑空间成为归纳极限 $\varinjlim M_n$ （见定义 A.7.1 ）。于是 M 是豪斯多夫的（见引理 A.7.6(h)）。设 $d_n := \dim(M_n)$，其中 $n \in \mathbb{N}$。给定 $x_0 \in M$，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x_0 \in M_{n_0}$。设 $\varphi_{n_0}\colon U_{n_0} \to V_{n_0} \subseteq \mathbb{R}^{d_{n_0}}$ 为 M_{n_0} 在 x_0附近的一个坐标图。在缩小 V_{n_0}之后，我们可以假定 V_{n_0} 对某个 $r > 0$ 是球 $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^{d_{n_0}}$，从而 V_{n_0} （因而 U_{n_0}亦然）是光滑可缩的。在用 $r/2$ 替换 r 之后，我们可以假定 U_{n_0} 在 M_{n_0}中相对紧。递归地，利用引理 4.5.3，我们对所有满足 $n > n_0$ 的 $n \in \mathbb{N}$ 找到 M_n 的坐标图 $\varphi_n\colon U_n \to V_n \subseteq \mathbb{R}^{d_n}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$， U_n 在 M_n 中相对紧且光滑可缩，并且 $M_n \cap U_{n+1} = U_n$、$\varphi_n = \varphi_{n+1}|_{U_n}$ 以及 $\mathbb{R}^{d_n} \cap V_{n+1} = V_n$。于是

$$U := \bigcup_{n \geq n_0} U_n$$

在 $\varinjlim_{n\geq n_0} M_n = \varinjlim_{n\geq n_0} M_n$ 中是开的，并且由 $\varinjlim_{n\geq n_0} M_n$ 在 U 上诱导的拓扑使后者成为拓扑空间 $\varinjlim_{n\geq n_0} U_n$（见引理 A.7.6 中的 (a) 与 (b)，以及注 A.7.2(d)）。同样，$V := \bigcup_{n\geq n_0} V_n$ 在 $\bigcup_{n\geq n_0} \mathbb{R}^{d_n} = \mathbb{R}^d$ 中是开的，并且由 $\mathbb{R}^d$ 在 V 上诱导的拓扑使后者成为归纳极限拓扑空间 $\varinjlim_{n\geq n_0} V_n$。由于 $\varinjlim_{n\geq n_0} \varphi_n$ 及其逆映射 $\varinjlim_{n\geq n_0} (\varphi_n^{-1})$ 是连续的（见定义 A.7.8），映射 $\varphi := \varinjlim_{n\geq n_0} \varphi_n \colon U \to V$ 是一个同胚。设 $\mathcal{A}$ 为如此得到的所有同胚 φ 的集合；我们来验证 $\mathcal{A}$ 是 M 的一个 C^∞-图册。为此，再设 $\psi = \varinjlim_{n\geq m_0} \psi_n$ 属于 $\mathcal{A}$，其坐标图为 $\psi_n \colon P_n \to Q_n \subseteq \mathbb{R}^{d_n}$。使得对所有整数 $n \geq m_0$ 有 $M_n \cap P_{n+1} = P_n$、$\mathbb{R}^{d_n} \cap Q_{n+1} = Q_n$ 以及 $\psi_{n+1}|_{P_n} = \psi_n$。设 $P := \bigcup_{n\geq m_0} P_n$。则 $U \cap P$ 在 M 中是开的，并且对所有 $n \geq \max\{n_0, m_0\} =: k_0$ 有 $M_n \cap U \cap P = U_n \cap P_n$，从而 $\varphi(U \cap P) = \bigcup_{n\geq k_0} \varphi_n(U_n \cap P_n)$。由于

$$(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi_n(U_n \cap P_n)} = (\psi_n \circ \varphi_n^{-1})|_{\varphi_n(U_n \cap P_n)}$$

对每个 $n \geq k_0$ 都是光滑的，命题 2.7.1 表明双射

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U \cap P) \to \psi(U \cap P)$$

是光滑的。同样，逆映射 $\varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap P) \to \varphi(U \cap P)$ 也是光滑的，因此 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是一个 C^∞-微分同胚。因此，$\mathcal{A}$ 是 M 上以 $\mathbb{R}^d$ 为模型的一个 C^∞-图册，我们赋予 M 相应的极大C^∞-图册。根据终拓扑的定义，对于每个 $n_0 \in \mathbb{N}$，$\lambda_{n_0} \colon M_{n_0} \to M$ 都是连续的。对于每个 $x_0 \in M_{n_0}$ 以及上述的坐标图 $\varphi = \varinjlim_{n\geq n_0} \varphi_n$，我们有 $\lambda_n(U_n) \subseteq U$，且对于包含映射 $j \colon \mathbb{R}^{d_{n_0}} \to \mathbb{R}^d$，有 $\varphi \circ \lambda_n \circ \varphi_{n_0}^{-1} = j|_{V_{n_0}}$，因此 λ_n 是 C^∞。现在考虑映射 $f \colon M \to N$ 到一个具有粗糙边界的 C^k-流形 N，其中 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。如果 f 是 C^k，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$f|_{M_n} = f \circ \lambda_n$ 都是 C^k。反过来，假设对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$f|_{M_n}$ 都是 C^k。根据引理 A.7.3(a)，f 是连续的。令 $x_0 \in M$，并令 $\psi \colon U_\psi \to V_\psi \subseteq F$ 是 N 在 $f(x_0)$ 附近的一个坐标图。令 $\varphi = \varinjlim_{n\geq n_0} \colon U \to V$ 是 M 在 x_0 附近的一个坐标图，如上所述。则 $Q := \varphi(U \cap f^{-1}(U_\psi))$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的开集，并且

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{Q \circ V_n} = \psi \circ f|_{M_n} \circ \varphi_n^{-1}|_{Q \circ V_n}$$

对于每个 $n \geq n_0$，都是 C^k，由命题 2.7.1 可得 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}|_Q \colon Q \to F$ 是 C^k。因此，f 是 C^k。□

引理 4.5.4。设 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ 和 $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ 是有限维光滑流形的递增序列，且所有包含映射$M_n \to M_{n+1}$ 和 $N_n \to N_{n+1}$ 都是浸入。赋予 $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$和 $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ 定理 4.5.1中所述的光滑流形结构。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 C^k-映射$f_n \colon M_n \to N_n$ 的序列，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $f_{n+1}|_{M_n} = f_n$。那么 $f \colon M \to N$，

$$f(x) := f_n(x) \text{ if } x \in M_n$$

是一个良定义映射，并且 C^k。

4.5.5. 我们将引理 4.5.4 中的映射记作 $\varinjlim f_n := f$。

证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，根据定理 4.5.1，包含映射 $\lambda_n\colon M_n \to M$ 和 $j_n\colon N_n \to N$ 都是光滑的。因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$f \circ \lambda_n = j_n \circ f_n$ 都是 C^k。于是，根据定理 4.5.1，f 是 C^k。□

引理 4.5.6。设 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ 和 $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ 是有限维光滑流形的递增序列，且所有包含映射 $M_n \to M_{n+1}$ 和 $N_n \to N_{n+1}$ 都是浸入。赋予 $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$、$N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$，以及

$$P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (M_n \times N_n)$$

具有定理4.5.1中所述的光滑流形结构。于是，映射 $\Psi\colon P \to M \times N$，$(x, y) \mapsto (x, y)$ 到乘积流形是一个 C^∞-微分同胚。

证明。由引理 A.7.9，Ψ是一个同胚。对于 $(x_0, y_0) \in P$，存在$n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x_0 \in M_{n_0}$ 且 $y_0 \in N_{n_0}$。令 $\varphi = \varinjlim^{n\geq n_0} \varphi_n\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$为定理 4.5.1 证明中的一个坐标图，其中 $\varphi_n\colon U_n \to V_n \subseteq \mathbb{R}^{d_n}$。令 $\psi = \varinjlim_{n\geq n_0} \psi_n\colon R \to Q \subseteq \mathbb{R}^e$ 为 N 的相应坐标图，其中 $\psi_n\colon R_n \to Q_n \subseteq \mathbb{R}^{e_n}$。对于整数 $n > n_0$，令 $a_n := d_n - d_{n-1}$ 且 $b_n := e_n - e_{n-1}$。令 α_n 为从

$$\mathbb{R}^{d_n} \times \mathbb{R}^{e_n} = \left(\mathbb{R}^{d_{n_0}} \oplus \bigoplus_{j=n_0+1}^{n} \mathbb{R}^{a_n}\right) \times \left(\mathbb{R}^{e_{n_0}} \oplus \bigoplus_{j=n_0+1}^{n} \mathbb{R}^{b_n}\right)$$

到 $(\mathbb{R}^{d_{n_0}} \times \mathbb{R}^{e_{n_0}}) \oplus \bigoplus_{j=n_0+1}^{n} (\mathbb{R}^{a_n} \times \mathbb{R}^{b_m}) = \mathbb{R}^{d_n+e_n}$，它将元素 $(x_{n_0}, \ldots\ldots, x_n, y_{n_0}, \ldots\ldots, y_n)$ 映射为 $(x_{n_0}, y_{n_0}, \ldots\ldots, x_n, y_n)$。于是，$\theta_n := \alpha_n \circ (\varphi_n \circ \psi_n)$ 是乘积流形递增序列$M_n \times N_n$的相容坐标图，并由 $T := \bigcup_{n\geq n_0} (U_n \times R_n)$ 到 $S := \bigcup_{n\geq n_0} \theta_n(V_n \times Q_n) \subseteq \mathbb{R}^{d+e}$ 的映射，我们得到 P 的一个坐标图 $\theta := \varinjlim_{n\geq n_0} \theta_n\colon T \to S \subseteq \mathbb{R}^{d+e}$。从 $\mathbb{R}^{d+e} = (\mathbb{R}^{d_{n_0}} \times \mathbb{R}^{e_{n_0}}) \oplus \bigoplus_{j>n_0} (\mathbb{R}^{a_j} \times \mathbb{R}^{b_j})$ 到的映射β

$$\left(\mathbb{R}^{d_{n_0}} \oplus \bigoplus_{j>n_0} \mathbb{R}^{a_j}\right) \times \left(\mathbb{R}^{e_{n_0}} \oplus \bigoplus_{j>n_0} \mathbb{R}^{b_j}\right) = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^e$$

将 $(x_j, y_j)_{j\geq n_0}$ 映射为 $((x_j)_{j\geq n_0}, (y_j)_{j\geq n_0})$ 是拓扑向量空间的同构。根据构造，我们有 $\beta(S) = V \times Q$，因此映射$\beta|_S\colon S \to V \times Q$ 是一个 C^∞-微分同胚。由于 $(\varphi \times \psi) \circ \Psi \circ \theta^{-1} = \beta|_S$，我们推得 $\Psi|_R\colon R \to U \times P$是一个 C^∞-微分同胚。断言得证。□

4.6 第 4 章的注释与评论

C^k-函数空间、 C^k-截面以及 C^k-映射流形是无穷维分析学和几何中的中心对象。对于紧致光滑流形 M、有限维光滑流形 N 和 $\ell \in \mathbb{N}_0$， $C^\ell(M,N)$上的巴拿赫流形结构最早由 Eells [Ee58, Ee66]构造。Palais [Pa68]研究了纤维丛中的各种截面类，以及截面空间之间的映射。Omori 及其合作者将光滑映射的李群视为巴拿赫流形的递减序列之交（见 [OMY82, Omo97] 及后续研究）。对于带角的旁紧光滑流形 M 和有限维光滑流形 N， $C^\infty(M,N)$上的光滑流形结构最早由 Michor 构造（见 [Mr80]）。关于便利分析框架下的映射流形，参见 [KM97]。与 [Ne06a], 一样，我们以 $C^k(M,N)$上的紧开C^k-拓扑为起点，而不考虑 $C^k(M,N)$上的流形结构。命题 4.1.21 改进了 [Alz13, AlS15, Alz19]中关于 $C^k,^\ell$-映射空间的指数律。我们针对紧 M构造 $C^\ell(M,N)$上的光滑流形结构，改进了 [AGS20]中的构造。对于 σ-紧 M，我们采用 [Gl21b] 和 [GS22], 中的方法；这些文献还讨论了 $C^k,^\ell$-映射的光滑流形 $C^k,^\ell(M_1 \times M_2, N)$，以及关于 n 变量函数的类似结果。在紧定义域上，可以得到如下形式的指数律：$C^k,^\ell(M_1 \times M_2, N) \cong C^k(M_1, C^\ell(M_2,N))$。细盒积见 [Gl21b]，并应用于 [Gl20a, GS22]。

让我们简要回顾一般拓扑学中大盒积和小盒积的概念。对于一族拓扑空间 $(X_j)_{j\in J}$，可以在 $\prod_{j\in J} X_j$ 上赋予盒拓扑，其基由开子集 $U_j \subseteq X_j$ 的乘积 $\prod_{j\in J} U_j$ 构成。若 $(X_j,x_j)_{j\in J}$ 是一族带基点拓扑空间，可以考虑子集 $\square_{j\in J}(X_j,x_j)$，它由所有满足对除有限多个 $j \in J$ 之外的所有 $y_j = x_j$ 均成立的族 $(y_j)_{j\in J}$ 构成，并在其上赋予诱导拓扑。更多信息请参见 [BR10] 。流形乘积 $\prod_{j\in J} M_j$ 上的细盒拓扑比盒拓扑更细，而且可以是真正更细，即使 J 可数也是如此。例如，$\prod_{n\in\mathbb{N}}^{\mathrm{fb}} \mathbb{R}$ 中 0 的道路连通分支等于 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$，而在盒拓扑下，$\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ 是路径连通的。这些现象类似于 $C^\infty(M,N)$ 上从 $\mathcal{D}$-拓扑转向细 $\mathcal{D}$-拓扑的过程，见 [Mr80, §4]。李群 G_j 的某些“弱直积”由 [Gl03b] 引入。我们将对可数 J 使用它们，并采用记号 $\bigoplus_{j\in J} G_j$（见命题 11.2.2）；作为拓扑群，它们此时与 $\square_{j\in J}(G_j,e)$ 一致。有关定理 4.4.1 中所用 $C^\ell(M,N)$ 上拓扑的其他描述，尤其是针对 $\ell = \infty$ 的描述，请参见 [HS17] 和 [Mr80]（相关的一种更粗拓扑也可参见 [Il03] ）。

了解一些简单的附加假设很有帮助；这些假设能确保，若非线性映射 $f\colon C_c^\infty(\mathbb{R}) \to C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在每个紧子集 $K \subseteq \mathbb{R}$ 上限制到 $C_K^\infty(\mathbb{R})$ 后都是光滑的，那么该映射本身也是光滑的；向量丛中紧支撑光滑截面空间的开子集之间的映射也同样如此。局部映射和几乎局部映射的概念是在

[Gl05d, Gl03c, Gl04b]中发展起来的；另见 [Gl21c] ，其中给出了带参数的一个变体（应用于[PzS21]）。正如定理 4.1.52 中所见，关键在于将紧支撑截面空间线性嵌入到一个适当的局部凸直和的闭向量子空间中（如引理 4.1.41 所示）。这种嵌入也用于“拼接映射”这一替代方法，该方法由 [Gl03c, Gl04b] 发展，并应用于 [Sme15]。没有这些工具时， [Gl13b],在关于 f 的较宽松条件下讨论了截面空间之间的映射，如上述命题 4.1.54 中所述。一个有趣的例子是测试函数的卷积 $(f,g) \mapsto f * g$，它是连续双线性的光滑映射 $C_c^\infty(\mathbb{R}) \times C_c^\infty(\mathbb{R}) \to C_c^\infty(\mathbb{R})$，但在其定义域 $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}\times\mathbb{R})$ 上既不是局部映射，也不是几乎局部映射（见 [HST01, Gl12a]）。关于有限维李群上的卷积的类似问题，参见 [BG14]。还需指出，对于局部映射$f\colon \Gamma_{C^k}(E_1) \to \Gamma_{C^k}(E_2)$，若该映射 C^1，对于定义域中的 σ 和底流形 M中的 x ，元素 $f(\sigma)(x) \in E_2$仅取决于盖托导数 $\delta^j_\varphi(x)(\theta_2 \circ \sigma \circ \varphi^{-1})$，其中 $j \in \mathbb{N}_0$满足 $j \leq k$；这里， $\theta\colon E_1|_U \to U \times F_1$是 E_1 的局部平凡化，且 $x \in U$ ； $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi$ 是 M在 x附近的坐标图。利用微积分基本定理，这可由以下事实推出： $df(\tau,\cdot)$是一个线性局部映射，因此适用 [Da15] 中所述的 Peetre 定理的适当版本（原始结果见 [Ptr59]）。

在少数情况下，对于非紧致的 M，也可以在 $C^\ell(M,N)$ 上构造与紧开 C^ℓ-拓扑相容的光滑流形结构，例如当 K 是正则李群时，可在 $C^\infty(\mathbb{R},K)$ 上构造此类结构 [NeW08b] （推广参见 [Alz13, Alz21, GS22]）。

作为有限维拓扑流形的递增并（赋予归纳极限拓扑）的拓扑空间，最早由 [Han71] 讨论。 [NRW91] 和 [KM97] 在一些重要情形下研究了有限维李群的递增并（更多详情见第 12 章）。 [Gl03a, Gl05c] 则将有限维流形的递增并构造成了流形。

第二部分

一般李理论

5 局部凸李群

在本专著中，我们遵循这样一种理念：无限维李群的定义应尽可能简单。因此，自然的做法是将李群定义为一个局部凸流形 G，并赋予其群结构，使得乘法和求逆都是光滑映射。这是有限维李理论中熟悉的定义，唯一的区别在于我们允许更广泛的模型空间。在有限维情形，甚至在巴拿赫空间背景下，如果要求流形结构和群运算是解析的，也会得到相同的对象。但一般而言，情况不再如此，事实上，许多有趣的无限维群并不具有解析李群结构。

对于任意李群 G，单位元处的切空间 $T_e(G)$ 带有自然的李代数结构，该结构由 G上的左不变向量场的李括号导出。由此，我们得到从李群范畴到局部凸拓扑李代数范畴的李函子**L**。这一过程将在第 5.1 节中说明。

接下来，在第5.2节中，我们将讨论李群 G在其李代数上的伴随表示 Ad。理解这一表示的最佳方式，是将其视为切群 $T(G)$ 对自身的共轭作用的限制。这里我们利用切丛 $T(G)$ 带有一种自然李群结构，该结构由 G 上乘法的切映射定义。我们还会讨论半直积，并证明 $T(G) \cong \mathbf{L}(G) \rtimes_{\mathrm{Ad}} G$。

第5.3节提供了一系列工具，用于在群上构造李群结构或流形结构。这里一种自然的策略是构造一个包含单位元的坐标图，使群运算在其中光滑。在许多情况下，这足以确定一个全局李群结构。

在第 5.5 节中，我们介绍从流形 M 到李群 G 的光滑函数 $f\colon M \to G$ 的对数导数。若 M 连通，则此类函数由其对数导数及其在 M 中某一点的取值唯一确定。这立即带来若干推论，尤其是连通李群之间的态射 φ 由 $\mathbf{L}(\varphi)$ 决定。与经典的有限维理论相比，我们更加重视对数导数，因为一般情况下指数函数并不一定存在。

我们用第5.6节讨论一般局部凸李群背景下的指数映射 $\exp_G\colon \mathbf{L}(G) \to G$ 。我们探讨不同类型群的各种指数映射。正如这些例子所示，指数函数不一定是局部微分同胚，因此有许多李群不具有自然图册。这是无限维李理论必须面对的一项重大困难。在第7章中，我们将研究局部指数李群这一类群；对于它们，这种病态现象不会出现。

预备知识：无限维流形的基础知识，例如切丛与切映射。在第5.3节中，我们还需要覆盖空间理论中的一些事实，例如万有覆盖空间的存在性以及提升的存在性。我们还将需要流形上时变向量场的积分曲线的基本事实。

5.1 李群及其李代数

在本节中，我们定义局部凸李群。我们说明李代数及相应的李函子如何定义，并描述一些基本性质，例如李括号与群乘法在局部坐标图中的泰勒展开之间的关系。

5.1.1 李群的定义

群上有两类附加结构。第一层是与群结构相容的拓扑结构，由此引出拓扑群的概念；第二层是可微结构，由此引出李群的概念。

定义5.1.1。(a) 拓扑群是一个豪斯多夫空间 G ，赋有群结构，且乘法映射和求逆映射是连续的。

(b) 李群是一个局部凸流形 G，赋有群结构，且乘法映射和求逆映射都是光滑的。由于光滑映射是连续的，每个李群也都是拓扑群。

此外，如果 G 是 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 上的 $\mathbb{K}$解析流形或 $\mathbb{C}$上的 $\mathbb{K}$解析流形，且群运算是 $\mathbb{K}$解析的，我们就称 G为 $\mathbb{K}$解析李群。

(c) 如果 G和 H 是拓扑群，那么群同态$\varphi\colon\ G \to H$ 称为拓扑群态射，若 φ 是连续的。此外，如果 G 和 H 是李群，那么群同态 $\varphi\colon\ G \to H$称为李群态射，若 φ 是光滑的。

在本书中，我们采用以下记号：我们用 e 表示 G的单位元。对 $g \in G$，我们记 $\lambda_g\colon\ G \to G, x \mapsto gx$ 为左平移

乘法 由 g给出，而 ρ_g： $G \to G, x \mapsto xg$则表示由 g给出的右乘 。二者均为 G 的微分同胚（练习 3.2.3）。我们记

$$m_G \colon G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy$$

乘法映射的和

$$\eta_G \colon G \to G, \quad x \mapsto x^{-1}$$

求逆。

例 5.1.2。（向量群）每个局部凸空间 E 相对于加法和显然的流形结构，都是一个阿贝尔李群。

向量群（E，$+$）构成了最基本的李群。接下来一个自然的类别是代数的单位群。这引出了连续逆代数的概念，它在 20 世纪 50 年代出现（参见 [Wa54a], [Wa54b]）：

定义 5.1.3。(a) 局部凸代数是一个局部凸空间 $\mathcal{A}$，赋有连续双线性乘法 $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，$(a, b) \mapsto ab$，且该乘法满足结合律。含幺局部凸代数 $\mathcal{A}$ 若其单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是开集，且求逆是连续映射 $\mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}$，$a \mapsto a^{-1}$，则称为连续逆代数（简称 cia）。

(b) 如果 $\mathcal{A}$ 是一个不含幺的局部凸代数，那么我们可以通过 $x * y := x + y + xy$ 在 $\mathcal{A}$ 上得到一个幺半群结构，其中 0 是单位元。在这种情况下，我们将 $\mathcal{A}^\times$ 记作 $(\mathcal{A}, *)$ 的单位群，并称 $\mathcal{A}$ 为 非含幺连续逆代数，如果 $\mathcal{A}^\times$ 是开集且求逆映射 $\eta_{\mathcal{A}}$： $\mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}$ 是连续的。

如果 $\mathcal{A}_+ := \mathcal{A} \times \mathbb{K}$ 是一个含幺局部凸代数，其乘法为 $(x, t)(x', t') := (xx' + tx' + t'x, tt')$，那么映射 $(\mathcal{A}, *) \to \mathcal{A} \times \{1\}$，$a \mapsto (a, 1)$ 是幺半群同构，并且容易看出，$\mathcal{A}_+$ 是连续逆代数，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是一个（不一定含幺的）连续逆代数（习题 5.1.5）。

例 5.1.4.（单位群作为李群）设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的连续逆代数，$\mathcal{A}^\times$ 为其单位群。作为 $\mathcal{A}$的开子集，群$\mathcal{A}^\times$ 带有自然流形结构。$\mathcal{A}$ 上的乘法是双线性且连续的，因而为光滑映射。因此 $\mathcal{A}^\times$ 的乘法是光滑的，剩下只需证明求逆 η: $\mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times$ 是光滑的。由于 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数，η 是连续的。

对于 $a, b \in \mathcal{A}^\times$，我们有 $b^{-1} - a^{-1} = a^{-1}(a - b)b^{-1}$，从而对于 $t \in \mathbb{R}$ 我们得到

$$\eta(a+th) - \eta(a) = (a+th)^{-1} - a^{-1} = a^{-1}(-th)(a+th)^{-1} = -ta^{-1}h(a+th)^{-1}.$$

因此，η 处处可微，且

$$d\eta(a)(h) = -a^{-1}ha^{-1}. \tag{5.1}$$

现在， η 的连续性意味着 $d\eta$: $\mathcal{A}^\times \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是连续的，因而 η 是一个 C^1-映射。由（5.1），我们进一步推得，若 η 是 C^k，则 $d\eta$ 也是 C^k，因此 η 是 C^{k+1}。归纳地可知， η 是光滑的。

在某些情况下，如果 $\mathcal{A}^\times$ 不是开集，也有可能在含幺局部凸代数的单位元群 $\mathcal{A}^\times$ 上获得李群结构（参见例 5.3.9）。

注 5.1.5。由于考虑不假设为豪斯多夫的流形也有意义（参见 [Pa57], [La99]），因此值得注意的是，这并不会导致得到更大的李群类。

事实上，设 G 是一个不一定满足豪斯多夫性的"李群"。那么G 特别是一个拓扑群，它具有一个单位元邻域 U ，该邻域同胚于局部凸空间的一个开子集。由于 U 满足豪斯多夫性, 并且由于 $\{e\}$ 中的子群 G与所有 e-邻域的交集重合（习题 C.2.3）， $\{e\}$ 在 U 中的闭性意味着$\{e\} \cap U = \{e\}$ 是闭的，从而 G 是一个豪斯多夫拓扑群（习题 C.2.4）。

5.1.2 李群的李代数

现在我们来定义李群的李代数。

定义 5.1.6。（李群的李代数）李群 G 上的向量场 X 称为左不变，如果

$$X \circ \lambda_g = T(\lambda_g) \circ X \colon G \to T(G) \tag{5.2}$$

对每个 $g \in G$ 都成立，即对每个 $g \in G$， X 都与自身 λ_g 相关。我们用 $\mathcal{V}(G)^l$ 表示 $\mathcal{V}(G)$ 中左不变向量场的集合。向量场 X 的左不变性尤其意味着，对每个 $g \in G$，都有 $X(g) = T_e(\lambda_g)X(e)$。

对每个 $x \in \mathfrak{g}$，我们定义向量场 $x_l \in \mathcal{V}(G)$ 为 $x_l(g) := T_e(\lambda_g)x$。于是，对 $h \in G$，有

$$x_l(gh) = T_e(\lambda_{gh})x = T_h(\lambda_g)T_e(\lambda_h)x = T_h(\lambda_g)x_l(h),$$

也就是说， $x_l \in \mathcal{V}(G)^l$ 是唯一满足 $x_l(e) = x$ 的左不变向量场。这意味着映射

$$\mathrm{ev}_e \colon \mathcal{V}(G)^l \to T_e(G), \quad X \mapsto X(e)$$

是一个线性双射。如果 X, Y 是左不变的，则(5.2)意味着它们与自身λ_g-相关，并且它们的李括号 $[X, Y]$ 继承这一性质。我们得出结论： G 上的左不变向量场集合 $\mathcal{V}(G)^l$ 是 G上所有光滑向量场的李代数 $\mathcal{V}(G)$的一个李子代数。由于该映射

$$T_e(G) \to \mathcal{V}(G)^l, \quad x \mapsto x_l$$

是一个线性同构，其逆映射为ev_e: $X \mapsto X(e)$，我们由此在 $T_e(G)$上得到一个李括号，其定义为

$$[x, y] := [x_l, y_l](e).$$

根据定义，该李括号满足

$$[x_l, y_l] = [x, y]_l. \tag{5.3}$$

为了证明 $T_e(G)$ 上的李括号是连续的，令 $E := T_e(G)$，并选择 G 的一个局部 E 坐标图 (φ, U)，使得 $\varphi(e) = 0$ 且 $T_e(\varphi) = \mathrm{id}_E$。对于 $x \in T_e(G)$，我们于是得到一个光滑向量场

$$\widetilde{x}_l := T(\varphi) \circ x_l \circ \varphi^{-1} \tag{5.4}$$

在 $V := \varphi(U)$ 上。我们将 $T(V) \cong V \times E$ 和 $T^2(V) \cong T(V) \times T(E) \cong V \times E^3$ 视为相同。于是，相关向量场引理 3.4.17 蕴含

$$\begin{aligned}[x, y] = [x_l, y_l](e) &= [\widetilde{x}_l, \widetilde{y}_l](0) = d\widetilde{y}_l(0)\widetilde{x}_l(0) - d\widetilde{x}_l(0)\widetilde{y}_l(0) \\ &= d\widetilde{y}_l(0)x - d\widetilde{x}_l(0)y.\end{aligned} \tag{5.5}$$

显然，函数

$$\psi\colon E \times V \to E, \quad (x, z) \mapsto \widetilde{x}_l(z) = T(\varphi)x_l(\varphi^{-1}(z)) = T(\varphi)T(m_G)(0_{\varphi^{-1}(z)}, x)$$

是光滑的，因此 $(x, y) \mapsto d\widetilde{x}_l(0)y$ 是连续双线性的，从而 $E \cong T_e(G)$ 上的括号是连续的。

李代数

$$\mathbf{L}(G) := (T_e(G), [\cdot, \cdot])$$

称为李群的李代数 G。为简化记号，我们也将使用 $\mathfrak{g}$来代替$\mathbf{L}(G)$。

如果存在某个李群 G，使得 $\mathfrak{g} \cong \mathbf{L}(G)$ 成立，则称局部凸李代数 $\mathfrak{g}$ 可积 。

引理 5.1.7。设 E、F 和 X 为局部凸空间，$U \subseteq E \times F$ 为一个开0-邻域，且 $f\colon U \to X$ 为一个 C^3-函数，使得

$$f(x, 0) = \alpha(x) \quad \textit{and} \quad f(0, y) = \beta(y)$$

对于$(x, 0)$、$(0, y) \in U$ 以及线性函数 $\alpha\colon E \to X$ 和 $\beta\colon F \to Y$，分别成立。则 f 在 (0,0) 处的二阶泰勒多项式具有如下形式

$$(x, y) \mapsto \alpha(x) + \beta(y) + \gamma(x, y),$$

其中 $\gamma\colon E \times F \to X$ 是一个连续双线性映射，并且对于 $(x, y) \in E \times F$，我们有

$$\gamma(x, y) = \tfrac{\partial^2}{\partial s \partial t}\big|_{s,t=0} f(sx, ty).$$

证明。 对于 f 在 $(0,0)$ 处的泰勒多项式的一阶项，我们的假设得出

$$df(0,0)(x,y) = df(0,0)(x,0) + df(0,0)(0,y) = \alpha(x) + \beta(y).$$

二阶项 $\gamma\colon\ E \times F \to X$ 是二次的，而我们的假设意味着

$$\gamma(x,0) = \gamma(0,y) = 0 \quad \text{for} \quad x \in E, y \in F.$$

令 $B\colon (E \times F) \times (E \times F) \to X$ 为满足下述条件的唯一连续双线性映射

$$\gamma(x,y) = B((x,y),(x,y)).$$

那么 $0 = B((x,0),(x,0)) = B((0,y),(0,y))$ 表明

$$\gamma(x,y) = B((x,0),(0,y)) + B((0,y),(x,0)) = 2B((x,0),(0,y)),$$

是双线性的。特别地，我们得出 $f(sv,\ tw)$ 的二阶泰勒多项式为 $s\alpha(v) + t\beta(w) + ts\gamma(v,\ w)$，这就证明了所述结论。□

注 5.1.8。（李括号与泰勒展开）

令 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$，并取 G 的一个 $\mathfrak{g}$ 坐标图 (φ, U)，使得 $\varphi(e) = 0$ 且 $T_e(\varphi) =$恒等映射$_{\mathfrak{g}}$。记 $V := \varphi(U)$。于是我们得到一个光滑映射

$$\begin{aligned} D := \{(x,y) \in V \times V\colon \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y) \in U\} &\to \mathfrak{g}, \\ (x,y) &\mapsto x * y := m(x,y) := \varphi\big(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)\big). \end{aligned}$$

(a) 我们考虑 m 在 $(0,0) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 处的泰勒展开。由 $0 * 0 = 0$ 可知，常数项为零，因此

$$x * y = b_1(x,y) + b_2(x,y) + b_3(x,y) + \ldots \quad \text{where} \quad b_k = \frac{1}{k!}\delta^k_{(0,0)} m$$

是次数为 k 的连续齐次多项式。

由 $x = x * 0 = 0 * x$ 可知，引理 5.1.7 蕴含

$$b_1(x,y) = x + y$$

并且 b_2 是双线性的，且满足

$$b_2(x,y) = \tfrac{\partial^2}{\partial s \partial t}\big|_{s,t=0}\ sx * ty.$$

为计算右端，我们首先注意到

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}\ x * ty &= \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}\ \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(ty)) \\ &= T(\varphi)T_e(\lambda_{\varphi^{-1}(x)})y = T(\varphi)y_l(\varphi^{-1}(x)) = \widetilde{y_l}(x), \end{aligned}$$

（参见（5.4））， 因此

$$b_2(x,y) = \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}\ \widetilde{y}_l(tx) = d\widetilde{y}_l(0)x.$$

由此结合（5.5）可得

$$[x,y] = d\widetilde{y}_l(0)x - d\widetilde{x}_l(0)y = b_2(x,y) - b_2(y,x),$$

也就是说， $\mathfrak{g}$ 的李括号是双线性映射 b_2的反对称部分。

(b) 设 $\eta(x) = x^{-1} = s_1(x) + s_2(x) + \cdots$表示求逆映射在 0 处的泰勒展开。由 $x * x^{-1} = 0$ 可得

$$0 = x * (s_1(x) + s_2(x) + \cdots) = \big(x + s_1(x)\big) + \big(s_2(x) + b_2(x, s_1(x))\big) + \cdots .$$

由此得到

$$s_1(x) = -x \quad \text{and} \quad s_2(x) = -b_2(x, s_1(x)) = b_2(x,x) \tag{5.6}$$

因为 b_2 是双线性的。

(c) 如果 x 和 y 充分接近 0，则由(b)以及泰勒多项式链式法则，可得共轭映射的泰勒展开:

$$\begin{aligned}(x*y)*x^{-1} &= (x + y + b_2(x,y) + \cdots) * (-x + b_2(x,x) + \cdots)\\ &= (x + y - x) + b_2(x,y) + b_2(x,x) + b_2(x+y,-x) + \cdots\\ &= y + b_2(x,y) - b_2(y,x) + \cdots = y + [x,y] + \cdots\end{aligned} \tag{5.7}$$

因此，对于交换子 $(x,y) := x * y * x^{-1} * y^{-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}&x * y * x^{-1} * y^{-1} = (y + [x,y] + \cdots) * (-y + b_2(y,y) + \cdots)\\ &= [x,y] + b_2(y,y) + b_2(y,-y) + \cdots = [x,y] + \cdots\end{aligned} \tag{5.8}$$

现在我们来考察上文例子中所讨论的李群的李代数。

例 5.1.9。(a) 如果 G 是阿贝尔李群，那么注 5.1.8 中的双线性映射b_2: $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是对称的，这意味着 $\mathbf{L}(G) = \mathfrak{g}$是阿贝尔的。特别地，这适用于局部凸空间 E的加法李群 $(E,+)$。

(b) 设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数。那么

$$\varphi\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}, x \mapsto x - \mathbf{1}$$

是 $\mathcal{A}^\times$的整体坐标图，满足 $\varphi(\mathbf{1}) = 0$。在此坐标图中，群乘法由下式给出

$$x * y := \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) = (x+\mathbf{1})(y+\mathbf{1}) - \mathbf{1} = x + y + xy.$$

按照注 5.1.8 的术语，我们于是有 $b_2(x,y) = xy$，因此$\mathbf{L}(\mathcal{A}^\times) = (\mathcal{A}, [\cdot,\cdot])$, 其中 $[x,y] = xy - yx$ 是结合代数 $\mathcal{A}$ 上的交换子括号。

正如我们将在例 5.6.9 中看到的，任何连续逆代数都具有指数函数

$$\exp\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\times, \quad x \mapsto e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

由收敛幂级数定义，该幂级数定义了一个光滑映射。此外，这个幂级数

$$\log(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (g - \mathbf{1})^n$$

在$\mathbf{1}$的一个邻域内定义了一个光滑函数，并且 $\log \circ \exp|_U = \mathrm{id}_U$在某个开零邻域上成立，因此 log 在单位群 $\mathcal{A}^\times$ 上定义了一个坐标图。可以证明，相应的乘积

$$x * y := \log(\exp x \exp y)$$

由豪斯多夫级数给出

$$\begin{aligned} x * y &= x + \sum_{\substack{k,m \geq 0 \\ p_i + q_i > 0}} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_1} (\operatorname{ad} y)^{q_1} \dots (\operatorname{ad} x)^{p_k} (\operatorname{ad} y)^{q_k} (\operatorname{ad} x)^m}{(k+1)(q_1 + \dots + q_k + 1) p_1! q_1! \dots p_k! q_k! m!} y \\ &= x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [y, x]] + \dots \end{aligned}$$

特别地，在这种情况下，$-b_2(x, y) = \frac{1}{2}[x, y]$ 是斜对称的。

现在我们转而讨论局部李群的同态，由此可以将李代数的赋值理解为一个函子。

命题 5.1.10。 如果 $\varphi\colon \ G \to H$ 是李群态射，那么

$$\mathbf{L}(\varphi) := T_e(\varphi)\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$$

是李代数的连续同态。

证明。 令 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $x_l(g) = T_e(\lambda_g)(x)$ 为 G 上相应的左不变向量场。对于每个 $g \in G$，我们都有 $\varphi \circ \lambda_g = \lambda_{\varphi(g)} \circ \varphi$. 这意味着

$$T_g(\varphi) x_l(g) = T_g(\varphi) T_e(\lambda_g) x = T_e(\lambda_{\varphi(g)}) T_e(\varphi)(x) = \big(\mathbf{L}(\varphi)(x)\big)_l(\varphi(g)),$$

因此， x_l 上的向量场 G 和 $\big(\mathbf{L}(\varphi)x\big)_l$ 上的向量场 H 是 φ-相关的。根据引理 3.4.17，对于 $x,\ y \in \mathbf{L}(G)$，向量场 $[x_l, y_l]$ 和$[\mathbf{L}(\varphi)x)_l,\ (\mathbf{L}(\varphi)y)_l]$ 也分别是 φ-相关的。在 e 处取值，我们得到

$$[\mathbf{L}(\varphi)x, \mathbf{L}(\varphi)y] = [\mathbf{L}(\varphi)x, \mathbf{L}(\varphi)y]_l(e) = T_e(\varphi)([x_l, y_l](e)) = \mathbf{L}(\varphi)[x, y].$$

因此，$\mathbf{L}(\varphi)$ 是李代数同态。它的连续性由 φ 的光滑性可知。□

推论 5.1.11.若将李群 G 对应到其李代数 $\mathbf{L}(G)$，并将李群态射 φ: $G \to H$ 对应到线性映射 $\mathbf{L}(\varphi) := T_e(\varphi)$，那么 $\mathbf{L}$ 就定义了一个从李群范畴到拓扑李代数范畴的函子。

证明。 我们已经看到，$\mathbf{L}(\varphi)$ 是拓扑李代数的一个态射。由链式法则可直接得到 $\mathbf{L}(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}^{\mathbf{L}(G)}$以及 $\mathbf{L}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \mathbf{L}(\varphi_1) \circ \mathbf{L}(\varphi_2)$，从而得证。□

注 5.1.12。$\mathbf{L}$ 的函子性特别意味着，对于每个李群同构 φ: $G \to H$，映射 $\mathbf{L}(\varphi)$: $\mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ 都是李代数同构。特别地，对于每个李群 G，我们得到一个群同态

$$\mathbf{L}\colon \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathbf{L}(G)), \quad \varphi \mapsto \mathbf{L}(\varphi).$$

与 G 在自身上的共轭作用 $G \to \mathrm{Aut}(G)$ $g \mapsto c_g$ 复合后，我们由此得到一个同态 $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathbf{L}(G))$，它定义了 G 的伴随表示，该表示将在下一节中作更详细的研究。

第 5.1 节习题

习题 5.1.1。 设 G 为一个李群。李群 G 上的向量场 X 称为 *right invariant*，如果对每个 $g \in G$ 都成立 $X \circ \rho_g = T(\rho_g) \circ X\colon G \to T(G)$。我们用 $\mathcal{V}(G)^r$ 表示 G 上右不变向量场的集合。证明:

(1) G 上右不变向量场的空间 $\mathcal{V}(G)^r$ 是 $\mathcal{V}(G)$ 的李子代数。(2) $(\eta_G)_*\colon \mathcal{V}(G)^l \to \mathcal{V}(G)^r$, $X \mapsto T(\eta_G) \circ X \circ \eta_G^{-1}$ 是李代数同构。(3) 求值映射 $\mathrm{ev}_e\colon \mathcal{V}(G)^r \to T_e(G)$ 是一个线性同构，并诱导出李代数反同构，即

$$\mathrm{ev}_e([X, Y]) = -[\mathrm{ev}_e(X), \mathrm{ev}_e(Y)].$$

提示：使用 (2) 和 $T_e(\eta_G)x = -x$。
(4) 令 x_r 表示满足 $x_r(e) = x$ 的唯一右不变向量场。则对于 x, $y \in T_e(G)$，有 $[x_r, y_r] = -[x, y]_r$。

习题 5.1.2。 证明每个含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 都是连续逆代数。提示：对于 $\|x\| < 1$，Neumann 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 给出了元素 $e - x$ 的一个逆映射。

习题 5.1.3。 设 G 为一个李群。证明 G 的所有连通分支都是微分同胚的。提示：映射 $\lambda_g\colon G \to G$, $x \mapsto gx$ 是微分同胚。

习题 5.1.4。 设 G 和 H 为拓扑（李）群，且 $\varphi\colon G \to H$ 为群同态。证明：如果存在一个开单位元邻域 $U \subseteq G$，使得 φ 在其上连续（光滑），那么 φ 是连续的（光滑的）。

习题 5.1.5。设 $\mathcal{A}$ 为一个局部凸 $\mathbb{K}$-代数，并在 $\mathcal{A}_+$ 上定义乘积 $=\mathcal{A}\times\mathbb{K}$：$(x,\ t)(x',\ t'):=(xx'+tx'+t'x,\ tt')$。证明，对于乘法

$$a*b:=a+b+ab$$

在 $\mathcal{A}$ 上，映射 $(\mathcal{A},\ *)\ \to\mathcal{A}\times\{1\},\ a\mapsto(a,\ 1)$ 是幺半群同构，并且 $\mathcal{A}_+$ 是连续逆代数，当且仅当 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数。

习题 5.1.6. 设 $\varphi\colon\ G\to H$ 是巴拿赫–李群之间的满态射。证明，φ 是覆盖态射，当且仅当 $\mathbf{L}(\varphi)$ 是巴拿赫–李群的同构。

习题 5.1.7. (a) 设 $m\colon\ G\times G\to G$ 是流形 G 上的光滑结合乘法，且单位元为 e。证明，在 $(e,\ e)$ 处的微分为

$$T_{(e,e)}(m)\colon T_e(G)\times T_e(G)\to T_e(G),\quad (v,w)\mapsto v+w.$$

(b) 证明，巴拿赫–李群定义中求逆的光滑性是多余的，因为可以将反函数定理应用于映射

$$G\times G\to G\times G,\quad (x,y)\mapsto(x,xy)$$

其在 (e,e) 处的微分由映射 $(v,w)\ \mapsto(v,v+w)$ 给出。

习题 5.1.8. 设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $\varphi\colon\ U_G\to\mathfrak{g}$ 是一个局部坐标图，满足 $\varphi(e)\ =0$。证明：

(1) 对于局部乘法 $x*y:=\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)),\ \ x*y*x^{-1}*y^{-1}$ 在 $(0,0)$ 处的二阶泰勒多项式是李括号 $[x,y]$。(2) 利用 (1) 证明：对每个李群态射 $\varphi\colon\ G\to H$，映射 $d\varphi(e)$ 是李代数同态。提示：利用泰勒多项式链式法则，比较 $\varphi(x)*\varphi(y)*\varphi(x)^{-1}*\varphi(y)^{-1}$ 与 $\varphi(x*y*x^{-1}*y^{-1})$ 的二阶泰勒多项式。

5.2 伴随作用与半直积

伴随表示 $\mathrm{Ad}\colon\ G\to\mathrm{Aut}(\mathbf{L}(G))\ g\mapsto\mathbf{L}(c_g)$ 是李群的一个重要结构特征。它对阿贝尔李群而言是平凡的，一般则可视为给出 G的非交换性的一种线性图景。为了正确理解伴随作用，宜引入切丛 $T(G)$ 上的自然群结构，它由 G 的乘法的切映射得到。切丛是加法群 $(\mathbf{L}(G)\ +)$ 与 G 的半直积，其中 G 通过伴随表示作用。在本节中，我们介绍有关伴随表示、切丛以及李群的半直积的基本事实。

5.2.1 伴随表示

在专门讨论伴随表示之前，先从有关李群作用的一些基本观察入手是有益的。下面的命题描述了如何将李群 G 在流形 M 上的光滑作用联系到一个李代数同态 $\mathbf{L}(G) \to \mathcal{V}(M)$，即相应的无穷小作用。我们还进一步将局部凸空间上的每个光滑表示 $\pi\colon\ G \to \mathrm{GL}(E)$ 与其导出表示相联系。

命题 5.2.1（导出作用）。设 G 是一个李群，M 是一个光滑流形，E 是一个局部凸空间。

(i) 若 $\sigma\colon M \times G \to M$ 是 G 在 M 上的光滑右作用，则

$$\dot\sigma\colon \mathbf{L}(G) \to \mathcal{V}(M), \qquad \dot\sigma(x)_p := T_{(p,e)}(\sigma)(0,x)$$

定义了一个李代数同态。

(ii) 若 $\sigma\colon G \times M \to M$ 是 G 在 M 上的光滑左作用，则

$$\dot\sigma\colon \mathbf{L}(G) \to \mathcal{V}(M), \qquad \dot\sigma(x)_p := -T_{(e,p)}(\sigma)(x,0)$$

定义了一个李代数同态。

(iii) 若 $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(E)$ 是 G 在 E 上的光滑表示，即 $\sigma(g,v) := \pi(g)v$ 定义了 G 在 E 上的光滑作用，则

$$\mathbf{L}(\pi)(x)v := T_{(e,v)}(\sigma)(x,0) = -\dot\sigma(x)(v)$$

定义了李代数同态 $\mathbf{L}(\pi)\colon \mathbf{L}(G) \to \mathfrak{gl}(E)$。

证明。(i) 取 $p \in M$，并记 $\sigma^p\colon\ G \to M, g \mapsto p.g := \sigma(p,g)$ 为 p 的光滑轨道映射。于是 $\sigma^p \circ \lambda_g = \sigma^{p.g}$ 得出

$$T(\sigma^p)(x_l(g)) = T_e(\sigma^{p.g})x = \dot\sigma(x)_{p.g} = \dot\sigma(x)_{\sigma^p(g)},$$

这意味着向量场 x_l 和 $\dot\sigma(x)$ 是 σ^p-相关的。我们得出，对于 $x, y \in \mathbf{L}(G)$，向量场 $[x_l, y_l] = [x,y]_l$ 和 $[\dot\sigma(x)\ \dot\sigma(y)]$ 也 φ^p-相关（引理 3.4.17）。由此得到

$$[\dot\sigma(x), \dot\sigma(y)](p) = T_e(\sigma^p)[x,y]_l(e) = T_{(p,e)}(\sigma)(0,[x,y]) = \dot\sigma([x,y])(p).$$

（ii）若 σ 是左作用，则 $\sigma^\vee(m,\ g) := \sigma(g^{-1},\ m)$ 定义了一个右作用，且 $T_e(\eta_G)x = -x$ 意味着

$$\dot\sigma(x) = -T_{(e,p)}(\sigma)(x,0) = T_{(p,e)}(\sigma^\vee)(0,x),$$

因此该断言由（i）得证。

（iii）对于线性向量场 $X_A(x) = Ax$、$X_B(x) = Bx$、$A,\ B \in \mathcal{L}(E)$，我们有

$$[X_A, X_B](x) = dX_B(x)X_A(x) - dX_A(x)X_B(x) = BAx - ABx = -[A,B]x,$$

因此，相应映射 $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{V}(E)\ A \mapsto -X_A$ 是李代数同态。因此 (iii) 由 (ii) 得出。□

命题 5.2.2。 设 G 是一个李群， TG 是它的切丛。那么切映射

$$T(m_G)\colon TG \times TG \to TG, \quad (v_g, w_h) \mapsto T(\rho_h)v_g + T(\lambda_g)w_h,$$

对于 $v_g \in T_g(G)$ $w_h \in T_h(G)$，在 TG 上定义一个李群结构，其单位元为 $0 \in T_e(G)$，求逆为 $T(\eta_G)$。

此外，零截面 $\sigma\colon G \to TG$、 $g \mapsto 0_g$以及丛投影 $\pi\colon TG \to G$ 都是带有 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$的李群态射。

证明。 我们将 $T(G\times G)$ 规范地识别为 $T(G)\times T(G)$（参见注记 3.3.15）。由于乘法映射 $m_G\colon G \times G \to G$ 是光滑的，其切映射也同样光滑

$$T(m_G)\colon T(G \times G) \cong TG \times TG \to TG.$$

令 $\varepsilon_G\colon G \to G, g \mapsto e$为常值同态。于是，群公理可由以下关系表示

(a) $m_G \circ (m_G \times \mathrm{id}_G) = m_G \circ (\mathrm{id}_G \times m_G)$（结合律），(b) $m_G \circ (\eta_G, \mathrm{id}_G) = m_G \circ (\mathrm{id}_G, \eta_G) = \varepsilon_G$（求逆），以及 (c) $m_G \circ (\varepsilon_G, \mathrm{id}_G) = m_G \circ (\mathrm{id}_G, \varepsilon_G) = \mathrm{id}_G$（单位元）。
将函子 T 作用于这些关系，我们看到 $T(m_G)$ 在 $T(G)$ 上定义了一个李群结构，其中 $T(\eta_G)$ 是求逆， $0_e \in T_e(G)$ 是单位元。

两个元素 $v_g \in T_g(G)$ 和 $w_h \in T_h(G)$ 的乘积可写为

$$\begin{aligned} v_g \cdot w_h &= T(m_G)(v_g, w_h) = T(m_G)(v_g, 0_h) + T(m_G)(0_g, w_h) \\ &= T(\rho_h)v_g + T(\lambda_g)w_h \in T_{gh}(G). \end{aligned}$$

由此特别可得， π 是一个群同态；由 $0_g \cdot 0_h = T(\rho_h)0_g + T(\lambda_g)0_h = 0_{gh}$ 还可推出，零截面 σ 是一个群同态。二者均为光滑映射，并且根据定义满足 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$。□

定义 5.2.3。设 G 是一个李群。由 $T(G)$ 上的李群结构，我们得到一个光滑左作用

$$G \times T(G) \to T(G), \quad (g, v) \mapsto gv := T(\lambda_g)v$$

以及一个光滑右作用

$$T(G) \times G \to T(G), \quad (v, g) \mapsto vg := T(\rho_g)v.$$

限制到 e中的切向量，我们得到微分同胚

$$G \times \mathfrak{g} \to T(G), \quad (g, x) \mapsto gx \quad \text{and} \quad \mathfrak{g} \times G \to T(G), \quad (x, g) \mapsto xg.$$

定义 5.2.4.设 G 是李代数为 $\mathfrak{g}$的李群。则对每个$g \in G$，映射

$$c_g \colon G \to G, \quad x \mapsto gxg^{-1},$$

是一个光滑自同构，因此诱导出一个连续线性自同构

$$\mathrm{Ad}(g) := \mathbf{L}(c_g) \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

从而得到 伴随表示 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$。 注意

$$\mathrm{Ad}(g_1 g_2) = \mathbf{L}(c_{g_1 g_2}) = \mathbf{L}(c_{g_1} c_{g_2}) = \mathbf{L}(c_{g_1})\,\mathbf{L}(c_{g_2}) = \mathrm{Ad}(g_1)\,\mathrm{Ad}(g_2)$$

这立即由$\mathbf{L}$的函子性得到。

如果我们通过零截面将 G 识别为 TG 的一个子集，那么根据 TG 上的乘法（命题 5.2.2），我们有关系式

$$\mathrm{Ad}(g)x = gxg^{-1} \quad \text{for} \quad g \in G, x \in \mathfrak{g} = T_e(G),$$

这尤其意味着，由伴随表示定义的伴随作用 $\sigma_{\mathrm{Ad}}\colon G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，$(g,\ x) \mapsto \mathrm{Ad}(g)x$ 是光滑的。

命题 5.2.5.伴随表示的导出表示 $\mathbf{L}(\mathrm{Ad})$ 由下式给出

$$\mathrm{ad}\, x(y) = [x, y].$$

特别地，对于 $g \in G$ 以及 x、$y \in \mathfrak{g}$，我们有如下关系

$$T_{(g,y)}(\sigma_{\mathrm{Ad}})(gx, z) = \mathrm{Ad}(g)([x, y] + z).$$

证明.为计算线性映射 $\mathbf{L}(\mathrm{Ad})(x)$，我们考虑局部坐标图$\varphi\colon\ U \to G$，其中 $\varphi(0) = e$，且 $d\varphi(e) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$，以及局部乘法$x * y = \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y))$。由注 5.1.8 与引理 5.1.7，我们得到

$$\mathbf{L}(\mathrm{Ad})(x)y = \tfrac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} sx * ty * (sx)^{-1} = \tfrac{\partial^2}{\partial s \partial t}\big|_{s,t=0} sx * ty * (sx)^{-1} = [x, y].$$

由于 Ad 是群同态，故有

$$T_{(g,y)}(\sigma_{\mathrm{Ad}})(gx, z) = \mathrm{Ad}(g) \circ T_{(e,y)}(\sigma_{\mathrm{Ad}})(x, z) = \mathrm{Ad}(g)([x, y] + z). \qquad \square$$

例 5.2.6.(a) 若 $G = \mathcal{A}^\times$ 是连续逆代数的单位群（参见例 5.1.9(b)），则共轭映射 $c_g(a) = gag^{-1}$ 在由包含映射 $\mathcal{A}^\times \hookrightarrow \mathcal{A}$ 给出的典范坐标图中是线性的，由此可得

$$\mathrm{Ad}(c_g)x = gxg^{-1} \quad \text{for} \quad g \in \mathcal{A}^\times, x \in \mathcal{A} \cong \mathbf{L}(G).$$

(b) 如果 E 是巴拿赫空间，那么其上的有界线性算子代数 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ 是巴拿赫代数，因此尤其是连续逆代数。其单位群是由 E 上的可逆连续线性算子构成的群 $\mathrm{GL}(E)$。其李代数是 $\mathfrak{gl}(E) = (\mathcal{L}(E)\ [\cdot,\cdot])$，由 (a) 的特例可知，该群的伴随作用由 $\mathrm{Ad}(g)x = gxg^{-1}$ 给出。

(c) 进一步将 $E = \mathbb{K}^n$ 专门化为 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 后，前述论证也适用于矩阵群 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 和 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$。

5.2.2 半直积

从两个给定的李群 G 和 H 构造一个新的李群，最简单的方法是赋予乘积流形 $G \times H$ 以下乘法

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

由此得到的群称为李群 G 和 H的直积。这里， G 和 H 可视为 $G \times H$ 的正规子群，且乘法映射是双射。若放宽这一条件，只要求其中一个因子是正规子群，便得到李群的半直积这一概念，我们将在本小节中讨论它。

定义 5.2.7。 设 N和 G为李群，且 α: $G \to$Aut(N)是一个群同态，它定义了 G在 N上的光滑作用（g, n） $\mapsto \alpha(g)(n)$。那么，乘积流形 $N \times G$ 在乘法运算下构成一个群

$$(n, g)(n', g') := (n\alpha(g)(n'), gg')$$

以及求逆运算

$$(n, g)^{-1} = (\alpha(g^{-1})(n^{-1}), g^{-1}).$$

由于乘法和求逆都是光滑的，这个群是一个李群，称为关于 α，的 N 与 G 的半直积。我们将这个群记作 $N \rtimes_\alpha G$.

命题 5.2.8。 半直积群 $N \rtimes_\alpha G$的李代数为

$$\mathbf{L}(N \rtimes_\alpha G) \cong \mathbf{L}(N) \rtimes_{\mathbf{L}(\alpha^L)} \mathbf{L}(G),$$

其中，$L(\alpha^L) : L(G) \to der(L(N))$ 是与光滑表示 α^L: $G \to Aut(N)$ 相对应的 $L(G)$ 在 $L(N)$ 上的导出表示，该表示定义为 $\alpha_g^L := L(\alpha_g) \in Aut(L(N))$，其中 $g \in G$。

证明。 G 在 N 上的光滑作用诱导出 G 在切丛 $T(N)$ 上的光滑作用（习题 5.2.1），因此在 $T_e(N) \cong \mathbf{L}(N)$ 上，我们得到光滑表示 $g \mapsto \alpha_g^L$。首先证明 im($\mathbf{L}(\alpha^L)$) $\subseteq$ der($\mathbf{L}(N)$)。对于 $x \in \mathbf{L}(G)$，设 γ: $[0, 1] \to G$ 是一条光滑曲线，且 $\gamma(0) = e$ ，并且 $\gamma'(0) = x$。对于 $y, z \in \mathbf{L}(N)$，于是有

$$\alpha^L_{\gamma(t)}[y, z] = [\alpha^L_{\gamma(t)} y, \alpha^L_{\gamma(t)} z]$$

对每个 $t \in [0, 1]$。对于导数 $D_x := \mathbf{L}(\alpha^L)x = \frac{d}{dt}_{t=0} \alpha^L_{\gamma(t)}$ in $t = 0$，由乘积法则可得

$$D_x[y, z] = [D_x y, z] + +[y, D_x z],$$

使得 $D_x \in$ der($\mathbf{L}(N)$)。

接下来，我们选择 N 的局部坐标图 (φ_N, U_N)，以及 G 的局部坐标图 (φ_G, U_G)，满足

$$\varphi_N(0) = e, \quad T_0(\varphi_N) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(N)}, \quad \varphi_G(0) = e \quad \text{and} \quad T_0(\varphi_G) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)},$$

使得乘法

$$(n, g)(n', g') := (n\alpha_g(n'), gg')$$

可以在局部坐标中表示为

$$(x, y) * (x', y') = (x * \widetilde{\alpha}_y(x'), y * y'),$$

其中 $\widetilde{\alpha}_y(x) = \varphi_N(\alpha_{\varphi_G(y)}(\varphi_N^{-1}(x)))$. 对于函数 $f(x, y) = \widetilde{\alpha}_y(x)$，我们有

$$f(x, 0) = \widetilde{\alpha}_0(x) = x \quad \text{and} \quad f(0, y) = \widetilde{\alpha}_y(0) = 0.$$

因此，引理 5.1.7 和

$$\tfrac{\partial^2}{\partial s \partial t}\big|_{s,t=0}\ \widetilde{\alpha}_{ty}(sx) = \tfrac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}\ \widetilde{\alpha}(ty)^L x = D_y x$$

推出 f 在 (0,0) 处的二阶泰勒多项式为

$$x + D_y x.$$

我们得出，$(x, y) * (x', y')$ 在 $((0, 0),(0, 0))$ 处的二阶泰勒多项式具有如下形式

$$(x + x' + D_y x' + b_2^N(x, x'), y + y' + b_2^G(y, y')),$$

从而我们由注 5.1.8 得到

$$\begin{aligned} &[(x, y), (x', y')] \\ &= (D_y x' + b_2^N(x, x'), b_2^G(y, y')) - (D_{y'} x + b_2^N(x', x), b_2^G(y', y)) \\ &= (D_y x' - D_{y'} x + [x, x'], [y, y']). \end{aligned}$$

这就证明了该断言。 □

例 5.2.9. 设 E 为巴拿赫空间，$\mathrm{Aff}(E)$ 为其仿射群。平移子群同构于 $(E, +)$，由此得到一个群同构

$$\mathrm{Aff}(E) \cong E \rtimes_\alpha \mathrm{GL}(E),$$

其中 $\alpha(g)v = gv$ 表示一般线性群 $\mathrm{GL}(E)$ 在 E 上的典范作用。由于这一作用是光滑的，$\mathrm{Aff}(E)$ 具有自然李群结构。其李代数为

$$\mathfrak{aff}(E) := \mathbf{L}(\mathrm{Aff}(E)) \cong E \rtimes_{\mathbf{L}(\alpha)} \mathfrak{gl}(E), \quad \text{where} \quad \mathbf{L}(\alpha)(X)v = Xv.$$

我们以关于半直积识别的一些观察结束本节。

注 5.2.10. 若 $G := N \rtimes_\alpha G$ 是一个半直积，则

$$\pi\colon \widehat{G} \to G, \quad (n,g) \mapsto g, \qquad \sigma\colon G \to \widehat{G}, \quad g \mapsto (e,g)$$

和 $\iota\colon N \to G,\ n \mapsto (n,\ e)$ 是李群态射，其中 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$，且$\rightsquigarrow \iota$ 是从 N 到其初始子流形 $\ker \pi$ （属于 G）的同构。

命题 5.2.11. 设 N、G 和 G 是李群，并且

$$\pi\colon \widehat{G} \to G, \quad \sigma\colon G \to \widehat{G} \quad and \quad \iota\colon N \to \widehat{G}$$

是李群态射，其中 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_G$，且 ι 是从N 到核 π 的同构，而后者是 G的初始子流形。于是

$$\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(N), \quad \alpha_g(n) := \iota^{-1}(\sigma(g)\iota(n)\sigma(g)^{-1})$$

定义了 G 在 N 上的光滑作用，并且映射

$$\Phi\colon N \rtimes_\alpha G \to \widehat{G}, \quad (n,g) \mapsto \iota(n)\sigma(g)$$

是李群同构。

证明。 由于 σ 是光滑的，赋值

$$\sigma\colon G \times \widehat{G} \to \widehat{G}, \quad (g,x) \mapsto \sigma(g)x\sigma(g)^{-1}$$

定义了 G 在 G上的光滑作用，而正规子群 $\mathrm{im}(\iota) = \ker \pi$在此作用下是不变的。由于它是一个初始子流形，限制

$$\sigma|_{G \times \ker \pi}\colon G \times \ker \pi \to \ker \pi$$

是光滑的。因此， α 定义了 G 在 N上的光滑作用。于是我们可以构造半直积群 $N \rtimes_\alpha G$。直接计算可得， Φ 是群同态。此外 $(\pi \circ \Phi)(n,\ g) = g$ 意味着 Φ 是双射，其逆映射由 $\Phi^{-1}(x) = \big(\iota^{-1}(x\sigma(\pi(x))^{-1})\ \pi(x)\big)$. 给出。由此特别可知， Φ 是一个微分同胚，因此是李群同构。□

例 5.2.12. 设 G 为一个李群， $T(G)$ 为其切李群（命题 5.2.2）。此外，设 $\sigma\colon G \to T(G)$ 为零截面，$\pi\colon T(G) \to G$为丛投影。那么， σ和 π是李群态射，并且 $T_e(G) = \mathfrak{g} = \ker \pi$是 $T(G)$ 的初始子流形，该子群上的群结构由下式给出

$$T_{(e,e)}(m_G)(x,y) = T(\rho_e)x + T(\lambda_e)y = x + y$$

（命题 5.2.2）。现在由命题 5.2.11 可推出， $T(G)$ 是一个半直积 $\mathfrak{g} \rtimes_\alpha G$，其中

$$\alpha_g x = \sigma(g) x \sigma(g)^{-1} = \mathbf{L}(c_g)x = \mathrm{Ad}(g)x$$

（定义 5.2.4）。

对于其李代数，由命题 5.2.8 和 5.2.5 可得

$$\mathbf{L}(T(G)) \cong |\mathfrak{g}| \rtimes_{\mathbf{L}(\mathrm{Ad})} \mathfrak{g} \cong |\mathfrak{g}| \rtimes_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g},$$

其中，也可以将 $|\mathfrak{g}|$ 视为 $\mathfrak{g}$ 底层的局部凸空间，并将其看作一个阿贝尔李代数。

利用 $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\varepsilon$ 上的对偶数代数，其中 $\varepsilon^2 = 0$，可得

$$\mathbf{L}(T(G)) \cong T(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[\varepsilon],$$

其中右侧的括号由 $\mathbb{R}[\varepsilon]$ 上双线性延拓的 $\mathfrak{g}$ 上的括号给出：

$$[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab.$$

第 5.2 节习题

我们在上文已经看到，李群的切丛具有自然李群结构。下面的习题将这一构造推广到光滑作用。

习题 5.2.1。设 $\sigma\colon\ G \times M \to M$ 是李群 G 在光滑流形 M 上的光滑作用。那么切映射 $T\sigma\colon\ TG \times TM \to TM$ 是李群 TG 在 TM 上的光滑作用。提示：群作用的定义性质可以写成

$$\sigma \circ (m_G \times \mathrm{id}_M) = \sigma \circ (\mathrm{id}_G \times \sigma)\colon G \times G \times M \to M$$

and

$$\sigma \circ (\varepsilon_G \times \mathrm{id}_M) = \mathrm{pr}_M\colon G \times M \to M, \quad (g, m) \mapsto m.$$

现在应用函子 T。

习题 5.2.2。（$T^2(G)$ 上的乘法）证明， $T(G)$ 在其李代数 $\mathbf{L}(T(G)) \cong \mathbf{L}(G) \times \mathbf{L}(G)$ 上的伴随表示由下式给出

$$\mathrm{Ad}(x, g)(v, w) = (\mathrm{Ad}(g)v + [x, \mathrm{Ad}(g)w], \mathrm{Ad}(g)w).$$

由此得出， $T^2(G)$ 的乘法：$= T(T(G))$，其中记 $T(G) \cong \mathbf{L}(G) \rtimes_{\mathrm{Ad}} G$，满足交换子公式

$$\begin{aligned}&\big((0,0),(v,e)\big)\big((0,w),(0,e)\big)\big((0,0),(v,e)\big)^{-1}\big((0,w),(0,e)\big)^{-1}\\ &= \big(\mathrm{Ad}(v,e)(0,w),(0,e)\big)\big((0,-w),(0,e)\big) = \big(([v,w],0),(0,e)\big),\end{aligned}$$

将 $T^2(G)$ 上的群交换子与 $\mathbf{L}(G)$ 上的李括号联系起来。

习题 5.2.3. 设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数，$\mathcal{A}^\times$ 是其单位群，它是一个李群。以典范方式将 $T(\mathcal{A}^\times)$ 认作乘积集$\mathcal{A}^\times \times \mathcal{A}$，并证明 $T(\mathcal{A}^\times)$ 上的李群结构由下式给出

$$(a,x)(b,y) = (ab, ay + xb).$$

习题 5.2.4。设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数，$\mathbb{R}[\varepsilon]$ 是对偶数代数。证明张量积代数

$$T(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \otimes \mathbb{R}[\varepsilon] \cong \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}\varepsilon$$

是一个连续逆代数，且 $T(\mathcal{A})^\times \cong T(\mathcal{A}^\times)$。

习题 5.2.5。设 G 和 N 是李群，且 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(N)$ 是一个态射，它定义了 G 在 N 上的光滑作用。证明我们可以在乘积流形 $G \times N$ 上定义李群结构，使得

$$(g,n)(g',n') := (gg', \alpha_{g'}^{-1}(n)n').$$

将此群记为 $G \ltimes_\alpha N$。进一步证明

$$\Phi\colon N \rtimes_\alpha G \to G \ltimes_\alpha N, \quad (n,g) \mapsto (g, \alpha_g^{-1} n)$$

是李群同构。

习题 5.2.6. 设 E 是一个局部凸空间，G 是一个李群。考虑一个同态 $\sigma\colon G \to$一般线性群(E) $g \mapsto \sigma_g$。证明：如果 G 在 E 上对应的作用在 $G \times E$ 中 $(e, 0)$ 的某个开邻域 $U_G \times U_E$ 上是光滑的，那么该作用就是光滑的。提示：先证明在 $U_G \times E$ 上的光滑性，并利用所有映射 σ_g 都是光滑的。

5.3 在群上构造李群结构

本小节介绍一些在群上构造李群结构的方法：从某个“单位元邻域”上的流形结构出发，并要求群运算在 e附近是光滑的。这里给出的结果对于有限维群而言是经典的，相应的证明也很容易推广。

5.3.1 从局部数据得到李群

下面的定理是拓扑背景下引理 C.1.4 的光滑版本。在本书中，它是我们在群上构造李群结构的主要工具。

定理 5.3.1. 设 G 是一个群，$U = U^{-1}$ 是包含 e 的对称子集。进一步假设 U 是一个光滑流形，并且

(L1) $D\colon = \{(x、y) \in U \times U\colon xy \in U\}$ 是一个开子集，且乘法$m_U\colon D \to U$、$(x、y) \mapsto xy$ 是光滑的，

(L2) 求逆映射 $\eta_U\colon\ U \to U$、$u \mapsto u^{-1}$ 是光滑的，并且，(L3)对于每个 $g \in G$，存在一个开 e-邻域 $U_g \subseteq U$，使得$c_g(U_g) \subseteq U$，且共轭映射 $c_g\colon\ U_g \to U$、$x \mapsto gxg^{-1}$是光滑的。

于是，G 上存在唯一的李群结构，使得包含映射 $U \hookrightarrow G$ 是到 G的某个开子集上的微分同胚。

此外，若 U 生成 G，则(L1/2) 蕴含(L3)。

证明。由引理 C.1.4 可知，G 上存在唯一的群拓扑，使得包含映射 $U \hookrightarrow G$ 是一个开嵌入。

现在转而讨论流形结构。设 $V = V^{-1} \subseteq U$ 是一个包含 $VV \times VV \subseteq D$的开e-邻域，且存在一个局部凸空间 E以及 U的一个 E-坐标图 (φ, V)。对于 $g \in G$，我们考虑映射

$$\varphi_g\colon gV \to E, \quad \varphi_g(x) = \varphi(g^{-1}x)$$

它是一个将 gV同胚到开子集 $\varphi(V) \subseteq E$上的同胚。我们断言，$(\varphi_g, gV)_{g\in G}$ 是 G的一个光滑图册。

令 g_1，$g_2 \in G$并设 $W\coloneqq g_1V \cap g_2V$。若 $W \neq \emptyset$，则 $g_2^{-1}g_1 \in VV^{-1} = VV$。映射的光滑性

$$\psi := \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}^{-1}|_{\varphi_{g_1}(W)}\colon \varphi_{g_1}(W) \to \varphi_{g_2}(W)$$

由下式给出

$$\psi(x) = \varphi_{g_2}(\varphi_{g_1}^{-1}(x)) = \varphi_{g_2}(g_1\varphi^{-1}(x)) = \varphi(g_2^{-1}g_1\varphi^{-1}(x))$$

可由乘法 $VV \times VV \to U$ 的光滑性推出。这证明坐标图 $(\varphi_g,\ gU)_{g\in G}$ 构成了 G 的光滑图册。此外，这一构造表明，G 的所有左平移都是光滑映射，因为对于 g，$h \in G$，$\varphi_g \circ \lambda_h = \varphi_{h^{-1}g}$。

这一构造还表明，对于 $g \in G$，共轭作用 $c_g\colon\ G \to G$ 在 e 的某个邻域内是光滑的。由于所有左平移都是光滑的，并且

$$c_g \circ \lambda_x = \lambda_{c_g(x)} \circ c_g,$$

c_g 在 $x \in G$ 的某个邻域内的光滑性由此可得。因此，所有共轭作用以及所有右乘也都是光滑的。求逆的光滑性可由其在 V 上的光滑性，以及左右乘法都是光滑的这一事实推出。最后，乘法的光滑性可由其在 $e \times e$ 中的光滑性推出，因为

$$g_1xg_2y = g_1g_2c_{g_2^{-1}}(x)y.$$

由此得出，G 是一个李群。

接下来我们证明，$U \hookrightarrow G$ U 的包含映射是一个微分同胚。因此，设 $x \in U$，并回顾开子集 $U_x = U \cap x^{-1}U$。那么 λ_x 限制为

一个光滑映射 $U_x \to U$，其像为 $U_{x^{-1}}$。它的逆映射也是光滑的。因此我们得到一个微分同胚 $\lambda_x^U\colon\ U_x \to U_{x^{-1}}$。由于 $\lambda_x\colon\ G \to G$ 也是一个微分同胚，包含映射 $\lambda_x \circ \lambda_{x^{-1}}^U\colon\ U_{x^{-1}} \to G$ 也是一个微分同胚。由于 x 是任意的，U 到 G 中的包含映射是一个微分嵌入。

李群结构的唯一性显而易见，因为李群之间每个局部微分同胚的双射同态都是微分同胚（参见习题 5.1.4）。

最后，假设 G 由 U生成。我们证明，此时 (L3) 是 (L1) 和 (L2) 的推论。对每个 $g \in U$，存在一个开 e邻域 U_g，使得 $gU_g \times \{g^{-1}\} \subseteq D$。于是 $c_g(U_g) \subseteq U$，而 m_U 的光滑性意味着 $c_g|_{U_g}\colon\ U_g \to U$ 是光滑的。因此，对每个$g \in U$，共轭作用 c_g 在 e的某个邻域内是光滑的。由于所有这些 g 构成 G的一个子幺半群，且包含 U，它便对每个$n \in \mathbb{N}$都包含 U^n，因而包含整个 G，因为 G 由 $U = U^{-1}$生成。因此 (L3) 得以满足。□

推论 5.3.2。设 G 为一个群，$N \trianglelefteq G$ 为 G 的正规子群，并且 $N \trianglelefteq G$ 带有李群结构。则当且仅当对于每个 $g \in G$，限制映射 $c_g|_N$ 是 N的光滑自同构时，G 上存在唯一的李群结构，使得 N 为开子群。

证明。如果 N 是李群 G的开正规子群，那么显然 G 的所有内自同构限制到 N上都是光滑自同构。

反之，设 N 是群 G的正规子群，其中 G是一个李群，并且 G的所有内自同构限制到 N上都是光滑自同构。于是，我们可以将定理 5.3.1应用于 $U = N$，从而在 G 上得到唯一的李群结构，使得包含映射 $N \to G$ 是到 G的一个开子群上的微分同胚。□

注 5.3.3。如果在定理 5.3.1中，$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 和 U 被赋予 $\mathbb{K}$解析流形结构，那么在所有假设中用 $\mathbb{K}$解析性替代光滑性，按照相同的推理，我们可以在 G上得到一个 $\mathbb{K}$解析李群结构，并且 U 是一个开子流形。

5.3.2 李群的覆盖

在本小节中，我们将说明，对于李群 G，覆盖以及对离散子群取商都具有自然李群结构。这为将具有给定李代数的李群分类为某个万有覆盖群的商群提供了方法。

推论 5.3.4. 设 $\varphi\colon\ G \to H$ 是拓扑群之间的覆盖。若 G 或 H 是李群，则另一个群具有唯一的李群结构，使得 φ 是一个局部微分同胚的李群态射。

证明. 设 $U_G \subseteq G$ 是一个开对称的 e 邻域，使得 $\varphi|_{U_G}$ 是到 H 的开子集 U_H 上的同胚。此外，我们假设 y $U_G^3 \cap \ker \varphi = \{1\}$。

首先假设 G 是一个李群。然后我们将定理 5.3.1 应用于 U_H，并赋予它一种流形结构，使得 $\varphi|_{U_G}$ 是一个微分同胚。于是由 $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$可得 (L2)。为验证乘法映射的光滑性

$$m_{U_H} \colon D_H := \{(a,b) \in U_H \times U_H \colon ab \in U_H\} \to U_H,$$

我们首先注意到，若 $x,\ y \in U_G$满足 $(\varphi(x)\ \varphi(y)) \in D_H$，即 $\varphi(xy) \in U_H$，则存在一个 $z \in U_G$，使得 $\varphi(xy) = \varphi(z)$，并且

$$xyz^{-1} \in {U_G}^3 \cap \ker(\varphi) = \{e\}$$

可得 $z = xy$。因此，对于 $D_H = (\varphi \times \varphi)(D_G)$，我们有

$$D_G := \{(x,y) \in U_G \times U_G \colon xy \in U_G\}$$

而 m_H 的光滑性可由乘法m_{U_G}的光滑性推出： $D_G \to U_G$ 且 $m_{U_H} \circ (\varphi \times \varphi) = \varphi \circ m_{U_G}$. 为验证 (L3)，我们注意到 φ 的满射性意味着，对于每个 $h \in H$，都存在一个元素$g \in G$，使得 $\varphi(g) = h$。现在我们选取一个开 e-邻域 $U_g \subseteq U_G$，使得$c_g(U_g) \subseteq U_G$，并令 $U_h := \varphi(U_g)$。

反过来，如果 H 是李群，那么我们将定理 5.3.1 应用于 U_G，并赋予其流形结构，使得 $\varphi|_{U_G}$ 是到U_H 的微分同胚。同样，(L2) 立即成立，而 (L1) 则由 $(\varphi\circ\varphi)(D_G) \subseteq D_H$ 以及 $m_{U_H} \circ (\varphi \circ \varphi) = \varphi \circ m_{U_G}$. 的光滑性得出。对于 (L3)，我们任取 U_G 中满足 $c_g(U_g) \subseteq U$ 的一个开 e-邻域 U_g。于是，$c_g|_{U_g}$ 的光滑性由 $\varphi \circ c_g = c_{\varphi(g)} \circ \varphi$. □的映射的光滑性得出。

推论 5.3.5。 如果 G 是一个连通李群，且 $q_G \colon G \to G$ 是其万有覆盖空间，那么 G 上存在唯一的李群结构，使得 q_G 是一个光滑覆盖同态。

证明。 我们首先需要在万有覆盖空间 $\widetilde{G}$ 上构造一个（拓扑）群结构。取一个元素 $\widetilde{e} \in q_G^{-1}(e)$。于是，乘法映射 $\widetilde{m}_G \colon G \times G \to G$ 可唯一提升为连续映射 $\widetilde{m}_G \colon G \times G \to G$，且满足 $\widetilde{m}_G(\widetilde{e},\ \widetilde{e}) = \widetilde{e}$ ([Bre93，定理 III.4.1])。为了证明乘法映射 $\widetilde{m}_G$ 具有结合性，我们注意到

$$\begin{aligned}
&q_G \circ \widetilde{m}_G \circ (\mathrm{id}_{\widetilde{G}} \times \widetilde{m}_G) = m_G \circ (q_G \times q_G) \circ (\mathrm{id}_{\widetilde{G}} \times \widetilde{m}_G) \\
&= m_G \circ (\mathrm{id}_G \times m_G) \circ (q_G \times q_G \times q_G) = m_G \circ (m_G \times \mathrm{id}_G) \circ (q_G \times q_G \times q_G) \\
&= q_G \circ \widetilde{m}_G \circ (\widetilde{m}_G \times \mathrm{id}_{\widetilde{G}}),
\end{aligned}$$

使得这两个连续映射

$$\widetilde{m}_G \circ (\mathrm{id}_{\widetilde{G}} \times \widetilde{m}_G),\ \ \widetilde{m}_G \circ (\widetilde{m}_G \times \mathrm{id}_{\widetilde{G}}) \colon \widetilde{G}^3 \to G,$$

是同一个映射 $G^3 \to G$ 的提升，并且都将 $(\widetilde{e},\ \widetilde{e},\ \widetilde{e})$ 映射到 $\widetilde{e}$。因此，提升的唯一性意味着 $\widetilde{m}_G$ 是结合的。类似地，我们得到 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$唯一提升 $\widetilde{\eta}_G$: $G \to G$，它是求逆映射 $\eta_G \colon G \to G$ 的提升，且满足 $\widetilde{\eta}_G(\widetilde{e}) = \widetilde{e}$:

$$\widetilde{m}_G \circ (\eta_G \times \mathrm{id}_{\widetilde{G}}) = \widetilde{e} = \widetilde{m}_G \circ (\mathrm{id}_{\widetilde{G}} \times \eta_G).$$

$\widetilde{\ }$因此，$\widetilde{m}_G$ 在 G上定义了一个拓扑群结构，使得$\sim q_G \colon\ G \to G$ 是拓扑群的覆盖态射。现在可以应用推论 5.3.4。□

命题 5.3.6。若 $\varphi \colon\ G \to H$ 是连通李群的态射，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$且 $q_G \colon\ G \to G$、$q_H \colon\ H \to H$ 是单连通覆盖，则存在唯一的李群态射$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\varphi} \colon\ G \to H$，满足 $q_H \circ \widetilde{\varphi} = \varphi \circ q_G$。

$\widetilde{\ }$证明。根据 [Bre93，定理 III.4，1], 映射 $\varphi \circ q_G \colon\ G \to H$ 有唯一的连续提升$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\varphi} \colon\ G \to H$，满足 $\widetilde{\varphi}(e) = e$。于是

$$m_{\widetilde{H}} \circ (\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\varphi}) \colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{H} \tag{5.9}$$

是连续的，并将 $(e,\ e)$ 映射到 e。连续映射也同样如此

$$\widetilde{\varphi} \circ m_{\widetilde{G}} \colon \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{H}. \tag{5.10}$$

鉴于

$$\begin{aligned} q_H \circ \widetilde{\varphi} \circ m_{\widetilde{G}} &= \varphi \circ q_G \circ m_{\widetilde{G}} = \varphi \circ m_G \circ (q_G \times q_G) \\ &= m_H \circ (\varphi \times \varphi) \circ (q_G \times q_G) = m_H \circ (q_H \circ \widetilde{\varphi} \times q_H \circ \widetilde{\varphi}) \\ &= q_H \circ m_{\widetilde{H}} \circ (\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\varphi}), \end{aligned}$$

映射 (5.9) 和 (5.10) 是到 H 的同一映射的提升，因此它们相等。这意味着 $\widetilde{\varphi}$ 是一个群同态。

根据定义，$\widetilde{\varphi}$ 是连续的；又因为 q_H 是局部微分同胚，且$q_H \circ \widetilde{\varphi}$ 是光滑的，所以 $\widetilde{\varphi}$ 在单位元邻域内光滑，从而处处光滑（习题 5.1.4；另见习题 5.3.3）。□

定理 5.3.7（具有相同覆盖群的李群）。设$\sim q_G \colon\ G \to G$ 是连通李群 G的万有覆盖态射。那么以下断言成立：

(i) $\ker q_G \cong \pi_1(G)$ 是一个离散中心子群，因此是阿贝尔群。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$(ii) $G \cong G/\Gamma$ 对于离散中心子群 $\Gamma \subseteq Z(G)$。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$(iii) 对于两个离散子群 $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq Z(G)$，群 G/Γ_1 与 $G/\Gamma_2$$\widetilde{\ }$同构，当且仅当存在一个自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$。

(iv)$\mathrm{Aut}(G)$ 在 $Z(G)$ 上的作用可通过群 $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ 的作用分解，该群由外自同构构成，其中

$$\mathrm{Inn}(\widetilde{G}) := \{c_g \colon g \in \widetilde{G}\}$$

是由内自同构组成的正规子群。该群的轨道在 $Z(G)$的离散子群集合中的轨道，参数化了以万有覆盖群 G为覆盖群的连通李群的同构类。

(v)提升 G 的自同构到 $\widetilde{G}$ 给出一个嵌入 $\mathrm{Aut}(G) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G)$其像与$\ker q_G$的正规化子一致：

$$N_{\mathrm{Aut}(\widetilde{G})}(\ker q_G) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\widetilde{G}) \colon \varphi(\ker q_G) = \ker q_G\}.$$

证明。 (i) 由于 $\ker q_G$ 是连通群G的离散正规子群，根据习题 C.2.10，它是中心的。由该群中元素作用的左乘给出覆盖 $G \to G$的覆盖变换，从而得到群同构 $\pi_1(G) \cong \ker q_G$。特别地，我们看到 $\pi_1(G)$是阿贝尔群。

(ii) 由 $G \cong G/\ker q_G$ 与 (i) 得出。

(iii) 由命题 5.3.6 得出。

(iv) 由于内自同构的正规子群 $\mathrm{Inn}(G) := \{c_g \colon g \in G\}$ automorphisms 在 $Z(G)$ 上平凡作用，$\mathrm{Aut}(G)$ 在 $Z(G)$ 上的作用通过 $\mathrm{Out}(G)$ 的一个作用而分解。

(v) 每个自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 提升为唯一自同构 $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(G)$，这由习题 C.2.11 得出。反之， G的一个自同构是这样的提升，当且仅当它正规化 $\ker q_G$。 □

例 5.3.8. 设 E 为局部凸空间，从而 $(E, +)$ 是一个李群。于是，对每个离散子群 $\Gamma \subseteq E$，商群 E/Γ带有自然李群结构（推论 5.3.4）。

我们将在下文的命题 5.6.17 中看到，所有具有指数函数的连通阿贝尔李群都具有这种形式。

(a) 特别地，我们得到有限维环面

$$\mathbb{T}^d \cong \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d.$$

(b) 我们考虑可数维向量空间 $E := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$，其基为 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$，并赋予最细局部凸拓扑，即 E 上的每个半范数都是连续的。于是，子群 $\Gamma := \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$（由该基生成的自由阿贝尔群）是离散的，因为 $]-1,\ 1[^{\mathbb{N}} \cap E$ 是 E 中的一个凸零邻域，与 Γ 的交集仅为 $\{0\}$。因此，商

$$\mathbb{T}^{(\mathbb{N})} := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$$

带有自然李群结构。该群是有限维环面的有向并。

(c) 若 $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 被赋予乘积拓扑，则子群$\Gamma := \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 不是离散的，因为 Γ 中的序列$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到0。商群 $\mathbb{T}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 是一个紧群，显然不是李群，因为每个紧李群都以局部紧空间为模型，因而为有限维（[Ru91，定理1.22]）。

然而，群 $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ 上的拓扑可以加细为李群拓扑。在巴拿赫空间 $E := \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ 中，所有有界序列构成该空间，并赋予上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$；所有有界 $\mathbb{Z}$ 值序列组成的子群 $\Gamma := \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ 是离散的，因此商群

$$\mathbb{T}^{\mathbb{N}} \cong \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})/\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$$

继承了李群结构。$\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ 上相应的拓扑比乘积拓扑细得多。

例 5.3.9。(a) 设 $\mathcal{A}$ 是一个交换幺局部凸代数，且具有指数函数

$$\exp_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\times,$$

也就是说，$\exp_{\mathcal{A}} \colon (\mathcal{A}, +) \to (\mathcal{A}^\times, \cdot)$ 是群同态，且 $T_0(\exp_{\mathcal{A}}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$。

那么，$\Gamma_{\mathcal{A}} := \ker(\exp_{\mathcal{A}})$ 是 $\mathcal{A}$ 的闭子群，且不包含任何直线。假设 $\Gamma_{\mathcal{A}}$ 是离散的。那么，$Q := \mathcal{A}/\Gamma_{\mathcal{A}}$ 带有自然李群结构（例 5.3.8 ），且指数函数分解为一个单射 $Q \hookrightarrow \mathcal{A}^\times$。因此，我们可以应用推论 5.3.2，在群 $\mathcal{A}^\times$ 上定义李群结构，使其单位连通分支为 $\exp_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \cong Q$，且 $\exp_{\mathcal{A}}$ 是覆盖态射。

(b) 设 M 是一个有限维的 σ紧流形。那么由所有连续函数 $M \to \mathbb{C}$组成的空间$\mathcal{A} := C(M, \mathbb{C})_{c.o.}$，赋予由以下半范数定义的紧子集上一致收敛拓扑

$$p_K(f) := \sup\{|f(k)| \colon k \in K\}, \quad K \subseteq M \ \text{ compact},$$

是一个局部凸代数。

若 M 非紧致，则存在定义在M上的无界连续函数。这意味着单位群 $\mathcal{A}^\times$ 不是开集，因为对于每个无界函数 $f \colon M \to \mathbb{C}$，当某个$\lambda \in \mathbb{C}$ 任意接近 0 时，元素 $e + \lambda f$ 都不可逆。由此可知，$\mathcal{A}$ 是连续逆代数，当且仅当 M 紧致；在这种情况下，它甚至是一个含幺巴拿赫代数。

我们记

$$\exp_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\times = C(M, \mathbb{C}^\times), \quad f \mapsto e^f$$

$\mathcal{A}$的指数函数，显然是光滑的。它的核

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = \ker(\exp_{\mathcal{A}}) = C(M, 2\pi i\mathbb{Z}) \cong C(M, \mathbb{Z})$$

是离散的，当且仅当 M 只有有限个连通分支（习题 5.3.2）。若情况如此，则由 (a) 可知， $\mathcal{A}^\times$ 携带一种李群结构，使得 $\exp_{\mathcal{A}}$ 是覆盖映射。

一个典型例子是 $M=\mathbb{R}$ 和 $\mathcal{A}=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$，其中

$$\mathcal{A}^\times = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^\times) \cong C_*^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^\times)\times\mathbb{C}^\times,$$

其中 C_*^∞表示将 0 映到 1、分别映到 0 的函数。由于 $C_*^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^\times)$ 的所有元素都唯一提升为 $C_*^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 中的元素，并且这诱导了紧开拓扑下的一个同胚，我们得到

$$\mathcal{A}^\times \cong C_*^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})\times\mathbb{C}^\times.$$

对于 $M=\mathbb{N}$，我们有 $\mathcal{A}\cong\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$，而 $\Gamma_{\mathcal{A}}\cong\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 不是离散的。

如果 M 连通且 σ-紧，那么不难看出，对数导数

$$\delta\colon \mathcal{A}^\times\cong C^\infty(M,\mathbb{C}^\times)\to Z^1_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{C}),\quad f\mapsto\frac{df}{f}$$

诱导了 $\mathcal{A}^\times/\mathbb{C}^\times$ 到由周期包含于 $2\pi i\mathbb{Z}$ 的闭1-形式组成的群 $Z^1_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{Z})$ 的拓扑同构，并且单位元的弧连通分支$\mathcal{A}_a^\times$被映到恰当1-形式的集合（参见下文推论 6.1.14）。我们得出结论，作为拓扑群，

$$\pi_0(\mathcal{A}^\times)\cong\mathcal{A}^\times/\mathcal{A}_a^\times\cong H^1_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}(\pi_1(M),\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}(H_1(M),\mathbb{Z}),$$

当且仅当奇异上同调群关于逐点收敛拓扑是离散的

$$H^1_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}(H_1(M),\mathbb{Z})$$

是有限生成的（参见 [NeW08b]）。这表明， $\mathcal{A}^\times$ 中单位元的弧连通分支是开集，当且仅当阿贝尔群 $H^1_{\mathrm{sing}}(M,\ \mathbb{Z})$ 是有限生成的。

对于 $M:=\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$，群 $H_1(M)\cong\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ 的秩为无限，$H^1_{\mathrm{sing}}(M,\ \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ 不是离散的，但 M 是连通的，因此 $\mathcal{A}^\times$ 具有李群结构，其底层拓扑比由 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}^\times$上诱导的子空间拓扑更精细。

第5.3节习题

习题 5.3.1. 设 G 是阿贝尔群， $N\le G$ 是带有李群结构的子群。那么， G 上存在唯一的李群结构，使得 N 是开子群。

习题 5.3.2. 设 M 是一个拓扑有限维流形。证明，群 $C(M,\ \mathbb{Z})_{c.o.}$（带有紧开拓扑）是离散的，当且仅当 M 只有有限个连通分支。

习题 5.3.3。 设 M、 N和 X 是光滑流形， $q\colon M\to N$是光滑覆盖映射， $F\colon X\to M$是连续映射。证明： F光滑当且仅当 $q\circ F$光滑。

5.4 映射群与微分同胚群

本节针对一个光滑流形和一个李群 K，在群 $C^r(M,\ K)$上引入紧开 C^r拓扑，它是紧开拓扑的一种合适加细。若 M 是紧的（可能带边界），且 K 是李群，那么这种拓扑与该群上的自然李群结构相容。本节的概述独立于第 4 章中更详尽的讨论；后者是讨论第 6.4 节、第 11 章和第 13 章中的正则性等更技术性结果所必需的。此外，局部到整体方法是一种重要的替代方案，可避免在一般的映射集合上赋予流形结构。

定义 5.4.1。（可微映射群作为拓扑群）设M 为光滑流形，K 为李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$，且 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。我们赋予群 $G := C^r(M,\ K)$紧开 C^r-拓扑（定义 4.1.2）。

我们已经知道，K 的切丛 TK 是一个李群（命题 5.2.2）。重复这一过程，我们便能在所有高阶切丛 T^nK上得到李群结构。对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，利用紧开拓扑（定义 4.1.2），我们由此得到拓扑群 $C(T^nM,\ T^nK)_{c.o.}$。我们还注意到，对于两个光滑映射 $f_1,\ f_2\colon M \to K$，函子性 T 给出

$$T(f_1 \cdot f_2) = T(m_G \circ (f_1 \times f_2)) = T(m_G) \circ (Tf_1 \times Tf_2) = Tf_1 \cdot Tf_2.$$

因此包含映射

$$C^r(M,K) \hookrightarrow \prod_{n=0}^{r} C(T^nM, T^nK)_{c.o.}, \quad f \mapsto (T^nf)_{0 \le n \le r}$$

是一个群同态，因此右端乘积拓扑的逆映射在 $C^r(M,\ K)$ 上给出了一个群拓扑。因此，即使 M 和 K 是无限维的，紧开 C^r-拓扑仍使 $C^r(M,\ K)$ 成为一个拓扑群。

定理 5.4.2。设 K 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$，M 是一个紧流形（可能带边界），并且 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。则 $C^r(M, K)$ 带有一个与紧开 C^r-拓扑相容的李群结构，其李代数为 $C^r(M, \mathfrak{k})$，并赋予逐点括号。

证明。（概要）设 $G := C^r(M, K)$ 与 $\mathfrak{g} := C^r(M, \mathfrak{k})$。$G$ 上的李群结构可借助定理 5.3.1 如下构造。设 $\varphi_K\colon U_K \to \mathfrak{k}$为 K的一个坐标图。则集合 $U_G := \{f \in G\colon f(M) \subseteq U_K\}$ 是 G的一个开子集。此外，假设 $e \in U_K$ 且 $\varphi_K(e) = 0$。则映射

$$\varphi_G\colon U_G \to \mathfrak{g}, \quad f \mapsto \varphi_K \circ f$$

定义了 G 的一个坐标图 (φ_G, U_G)（参见习题4.1.2）。为应用定理 5.3.1，必须验证在该坐标图中求逆是一个光滑映射，并且乘法映射

$$D_G := \{(f,g) \in U_G \times U_G \colon fg \in U_G\} \to U_G$$

是光滑的，并且共轭映射在某个 e-邻域 U_G 中是光滑的（命题4.1.23）。为了计算这个群的李代数，我们观察到，对于 $m \in M$，局部坐标中的乘法为

$$\begin{aligned}(f *_G g)(m) &:= \varphi_G\Big(\varphi_G^{-1}(f)\varphi_G^{-1}(g)\Big)(m) = \varphi_K\big(\varphi_K^{-1}(f(m))\varphi_K^{-1}(g(m))\big)\\ &= f(m) *_K g(m) = f(m) + g(m) + b_{\mathfrak{k}}(f(m), g(m)) + \cdots .\end{aligned}$$

根据注 5.1.8，这意味着 $b_{\mathfrak{g}}(f, g)(m) = b_{\mathfrak{k}}(f(m), g(m))$，因此

$$\begin{aligned}[f,g](m) &= b_{\mathfrak{g}}(f,g)(m) - b_{\mathfrak{g}}(g,f)(m)\\ &= b_{\mathfrak{k}}(f(m),g(m)) - b_{\mathfrak{k}}(g(m),f(m)) = [f(m),g(m)].\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{L}(C^r(M, K)) = C^r(M, \mathfrak{k})$，赋予逐点定义的李括号。□

例5.4.3。设 M 是一个紧流形，$\mathfrak{g} = \mathcal{V}(M)$ 是其上的光滑向量场所成的李代数。现在我们说明如何将群 $\mathrm{Diff}(M)$ 构造成一个以 $\mathfrak{g}$ 为模型的李群。

我们将在第 13 章看到，尽管 $\mathrm{Diff}(M)$ 有一个光滑的指数映射，但它并不是从 $\mathfrak{g}$中的一个零邻域到 G中的一个单位元邻域的局部微分同胚。因此，我们无法用它来为 G 定义坐标图。不过，这个问题很容易解决。

设 g 是 M 上的一个黎曼度量，$\mathrm{Exp}\colon TM \to M$ 是它的指数函数，它将 $v \in T_m(M)$ 赋到点 $\gamma(1)$，其中 $\gamma\colon [0,1] \to M$ 是一条测地线段，满足 $\gamma(0) = m$ 且 $\gamma'(0) = v$。于是我们得到一个光滑映射

$$\Phi\colon TM \to M \times M, \quad v \mapsto (m, \operatorname{Exp} v), \quad v \in T_m(M).$$

存在零截面的一个开邻域 $U \subseteq TM$，使得 Φ 将 U 微分同胚地映到 $M \times M$ 中对角线的一个开邻域。现在

$$U_{\mathfrak{g}} := \{X \in \mathcal{V}(M) \colon X(M) \subseteq U\}$$

是 Fr´echet 空间 $\mathcal{V}(M)$ 的一个开子集，我们定义一个映射

$$\varphi\colon U_{\mathfrak{g}} \to C^\infty(M, M), \quad \varphi(X)(m) := \operatorname{Exp}(X(m)).$$

显然，$\varphi(0) = \mathrm{id}_M$。可以证明，将 $U_{\mathfrak{g}}$ 缩小为 C^1拓扑下 $\mathcal{V}(M)$ 中足够小的一个零邻域后，我们可以达到

使得 $\varphi(U_{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathrm{Diff}(M)$。要证明 $\mathrm{Diff}(M)$ 带有一种李群结构，且 φ 是一个坐标图，必须验证通过 φ将群运算转移到 $U_{\mathfrak{g}}$ 后，它们在一个零邻域内是光滑的，这样便可应用下文的定理 5.3.1。由此，我们在 $\mathrm{Diff}(M)$ 上得到一种李群结构。

由 $U_{\mathfrak{g}} \times M \to M, (X, m) \mapsto \varphi(X)(m) = \mathrm{Exp}(X(m))$ 的光滑性可知，典范左作用 $\sigma\colon \mathrm{Diff}(M) \times M \to M, (\varphi, m) \mapsto \varphi(m)$ 在 $\mathrm{Diff}(M)$ 的某个单位元邻域内是光滑的，因而是光滑的，因为它是由光滑映射构成的作用。相应的李代数同态

$$\dot{\sigma}\colon \mathbf{L}(\mathrm{Diff}(M)) \to \mathcal{V}(M)$$

由下式给出

$$\dot{\sigma}(X)(m) = -T\sigma(X, 0_m) = -(d\,\mathrm{Exp})_{0_m}(X(m)) = -X(m),$$

即 $\dot{\sigma} = -\mathrm{id}_{\mathcal{V}(M)}$。由此得到

$$\mathbf{L}(\mathrm{Diff}(M)) = (\mathcal{V}(M), [\cdot, \cdot])^{\mathrm{op}}.$$

这个“错误”的符号源于我们将 $\mathrm{Diff}(M)$ 视为从左侧作用于 M 的群。如果将其视为从右侧作用的群，则得到相反的乘法

$$\varphi * \psi := \psi \circ \varphi,$$

and

$$\mathbf{L}(\mathrm{Diff}(M)^{\mathrm{op}}) \cong (\mathcal{V}(M), [\cdot, \cdot])$$

由命题 5.2.1 可知。$\mathrm{Diff}(M)$ 的切丛可识别为集合

$$T(\mathrm{Diff}(M)) := \{X \in C^\infty(M, TM)\colon \pi_{TM} \circ X \in \mathrm{Diff}(M)\},$$

其中映射

$$\pi\colon T(\mathrm{Diff}(M)) \to \mathrm{Diff}(M), \quad X \mapsto \pi_{TM} \circ X$$

是丛投影。于是

$$T_\varphi(\mathrm{Diff}(M)) := \pi^{-1}(\varphi) = \{X \in C^\infty(M, TM)\colon \pi_{TM} \circ X = \varphi\}$$

是微分同胚 φ处的切空间。群$T(\mathrm{Diff}(M))$中的乘法由公式给出

$$X \cdot Y := \pi_{T^2M} \circ TX \circ Y,$$

其中 $\pi_{T^2M}\colon\ T^2M \to TM$是自然投影。注意，

$$\pi_{TM} \circ (X \cdot Y) = \pi_{TM} \circ \pi_{T^2M} \circ TX \circ Y = \pi_{TM} \circ X \circ \pi_{TM} \circ Y$$

这表明 π 是一个群同态。将 $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ 视为 $T_\varphi(\mathrm{Diff}(M))$ 中的原点，我们得到

$$X \cdot \varphi = \pi_{T^2M} \circ TX \circ \varphi = X \circ \varphi \text{和} \varphi \cdot X = \pi_{T^2M} \circ T\varphi \circ X = T\varphi \circ X.$$

特别地，这导出如下公式

$$\mathrm{Ad}(\varphi)X = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \tag{5.11}$$

对于 $\mathrm{Diff}(M)$ 在 $T_0(\mathrm{Diff}(M)) = \mathcal{V}(M)$ 上的伴随作用。

注 5.4.4。对于开域 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的紧支撑微分同胚群 $G := \mathrm{Diff}_c(M)$，其流形结构可以描述得特别明确。这里，如果微分同胚 $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ 的集合 $\{x \in M\colon \varphi(x) \neq x\}$ 在 M 中相对紧，我们就称它是紧支撑的。该群的流形结构以紧支撑光滑向量场的李代数 $\mathfrak{g} := \mathcal{V}_c(M)$ 为模型。现在

$$U := \{X \in \mathcal{V}_c(M)\colon \mathrm{id}_M + X \in \mathrm{Diff}(M)\}$$

结果是 $\mathcal{V}_c(M)$ 的一个开子集，因此我们得到一个坐标图

$$\varphi\colon U \to \mathrm{Diff}_c(M), \quad X \mapsto \mathrm{id}_M + X.$$

在这个坐标图中，乘法具有特别简单的形式

$$\begin{aligned} X * Y = \varphi^{-1}(\varphi(X) \circ \varphi(Y)) &= (\mathrm{id}_M + X) \circ (\mathrm{id}_M + Y) - \mathrm{id}_M \\ &= X \circ (\mathrm{id}_M + Y) + Y = X + Y + dX \cdot Y + \cdots, \end{aligned}$$

因此，$\mathfrak{g}$ 上的李括号由下式给出

$$[X, Y] = dX \cdot Y - dY \cdot X, \quad [X, Y](m) = dX(m)Y(m) - dY(m)X(m), m \in M$$

（参见注 5.1.8）。特殊情形 $M = \mathbb{R}^n$ 已在 [Gl05d] 中讨论。一般情形的讨论与此类似；关于所有固定边界上每一点的紧凸子集 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ 的 C^∞-微分同胚所构成的李群 $\mathrm{Diff}_{\partial M}(M)$，可比较 [GN17] 中的类似讨论；关于凸多面体的微分同胚群，则可参见 [Gl23]。

5.5 Maurer–Cartan形式

本节将介绍贯穿全书并发挥关键作用的一些工具：Maurer–Cartan形式和对数导数。我们已经看到，李群 G 的切丛 $T(G)$ 本身具有李群结构，并且零截面 $\sigma\colon G \to T(G)$ 和丛投影$\pi\colon T(G) \to G$都是李群同态（例 5.2.12）。这意味着乘法映射

$$G \times \mathbf{L}(G) \to T(G), \quad (g, x) \mapsto gx$$

是一个微分同胚，其逆映射可以写成一对映射 $(\pi,\ \kappa_G)$，其中 $\kappa_G\colon T(G) \to \mathbf{L}(G)$ 是一个取值于 $\mathbf{L}(G)$ 的 1-形式，称为（左）*Maurer– Cartan*形式。将其与 Maurer–Cartan形式复合后，我们为每个光滑函数 $f\colon M \to G$ 关联其对数导数

$$\delta(f) := \kappa_G \circ T(f) = f^*\kappa_G \colon TM \to \mathbf{L}(G)$$

在 $\Omega^1(M,\ \mathbf{L}(G))$ 中。

这些概念之所以重要，是因为它们使我们能够为流形上的群值光滑函数微积分发展一些基本工具。特别是，我们可以得到乘积法则和商法则，并由此推出强有力的唯一性结论，例如：若 M 连通，则仅凭 $\delta(f)$ 和 M 中某一点处的取值，就能唯一确定 f。这又对李群有有趣的应用，即连通李群之间的同态 $\varphi\colon G \to H$ 可由 $\mathbf{L}(\varphi)$ 唯一确定。

这里我们只讨论这些概念中与“微分”有关的方面。更精细的“积分”方面将在关于正则李群的第 6 章中讨论。我们暂且搁置这些问题，因为李代数值 1- 形式的积分需要目标群具备一些额外性质，而这些性质自然地由正则性这一概念来刻画。

5.5.1 对数导数

定义 5.5.1. 将切丛 $T(G)$的乘法限制到子集 $G \times T(G)$上，其中我们将 G 与零截面等同，特别地，我们得到 G 在 $T(G)$上的一个光滑作用，简记为$(g, v) \mapsto gv$。

李群 G 的（左）*Maurer–Cartan*形式 $\kappa_G \in \Omega^1(G,\mathbf{L}(G))$定义为

$$\kappa_G(v) := \pi(v)^{-1}v,$$

其中 $\pi\colon T(G) \to G$ 是丛投影。这意味着对 $g \in G$ 以及 $x \in \mathbf{L}(G) \cong T_e(G)$，有 $\kappa_G(gx) = x$。该1-形式的光滑性由 G 在 $T(G)$上的作用的光滑性得出。对于左不变向量场$x_l(g) = gx$，我们得到常值函数 $\kappa_G(x_l(g)) = x$。

设 M 为光滑流形， G为具有李代数$\mathbf{L}(G)$的李群。对于元素$f \in C^\infty(M, G)$，我们如下定义一个光滑的取值于$\mathbf{L}(G)$的1-形式 $\delta(f) \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$：

$$\delta(f) = \kappa_G \circ T(f) = f^*\kappa_G.$$

这意味着，对于每个 $m \in M$ 和 $v \in T_m(M)$，我们都有

$$\delta(f)_m(v) := f(m)^{-1}T_m(f)(v),$$

其符号表示为

$$\delta(f) = f^{-1}.df.$$

这个 1-形式称为 f 的（左）对数导数。注意，$\kappa_G = \delta(\mathrm{id}_G)$；有时会将其写作“$\kappa_G = g^{-1}.dg$”，但我们不会使用这种极易引起歧义的记号。

我们通过 $\delta^r(f) = df.f^{-1} = f^*\kappa_G^r$ 定义右对数导数，其对应的右毛𫚉–卡当形式为 $\kappa_G^r(v) = v\pi(v)^{-1}$，其中乘积是指 $T(G)$ 的群结构。

例 5.5.2. (a) 若 $G = (E, +)$ 是局部凸空间 E 的加法群，则我们按通常方式将 $T(E)$ 等同于 $E \times E$，并且在这些坐标下我们有

$$\kappa_E(x, v) = v.$$

因此，对任意光滑函数 $f\colon M \to E$，对数导数 $\delta(f)$ 与 f 的微分 df 一致。

(b) 若 $G = \mathcal{A}^\times$ 是连续逆代数的单位群，并且我们将 $T(\mathcal{A}^\times) \cong \mathcal{A}^\times \times \mathcal{A}$ 等同，则

$$\kappa_{\mathcal{A}^\times}(g, v) = g^{-1}v.$$

因此，对任意光滑函数 $f\colon M \to \mathcal{A}^\times$，我们在逐点意义下有 $\delta(f) = f^{-1}.df$。

引理 5.5.3。（商与乘积法则）对于 $f, g \in C^\infty(M, G)$，以下断言成立：

（i）映射 $f^{-1}\colon M \to G, m \mapsto f(m)^{-1}$ 是光滑的，且

$$\delta(f^{-1}) = -\operatorname{Ad}(f)\delta(f) = -\delta^r(f).$$

（ii）我们有以下乘积与商法则：

$$\delta(fg) = \delta(g) + \operatorname{Ad}(g^{-1})\delta(f), \qquad \delta^r(fg) = \delta^r(f) + \operatorname{Ad}(f)\delta^r(g),$$

and

$$\delta(fg^{-1}) = \operatorname{Ad}(g)(\delta(f) - \delta(g)).$$

证明。尽管该引理可由附录 E 中的引理 D.1.9 推出，我们仍给出一个直接证明，以使用较少的概念背景。

记作 $fg = m_G \circ (f, g)$，由

$$T_{(g,h)}(m_G)(v, w) = vh + gw$$

（命题 5.2.2）得到关系

$$T(fg) = T(m_G) \circ (T(f), T(g)) = T(f) \cdot g + f \cdot T(g)\colon M \to T(G),$$

由此立即得到

$\delta(fg) = (fg)^{-1}\cdot(T(f)\cdot g + f\cdot T(g)) = g^{-1}\cdot\delta(f)\cdot g + \delta(g) = \mathrm{Ad}(g)^{-1}.\delta(f) + \delta(g).$

对于右对数导数，我们类似地得到

$$\delta^r(fg) = (T(f)\cdot g + f\cdot T(g))\cdot(fg)^{-1} = \delta^r(f) + \mathrm{Ad}(f).\delta^r(g).$$

接下来我们注意到

$$\delta^r(f) = T(f)\cdot f^{-1} = f\cdot(f^{-1}\cdot T(f))\cdot f^{-1} = \mathrm{Ad}(f).\delta(f).$$

由乘积法则和 $\delta(ff^{-1}) = 0$，可得 $\delta(f^{-1})$ 的公式；再将其与乘积法则结合，即可得到商法则。□

引理 5.5.4. (唯一性引理) 假设 M 是连通的。对于 $f_1, f_2 \in C^\infty(M, G)$，关系 $\delta(f_1) = \delta(f_2)$ 等价于存在一个满足 $f_2 = \lambda_g \circ f_1$ 的 $g \in G$。特别地

$$\delta(f_1) = \delta(f_2) \quad \textit{and} \quad f_1(m_0) = f_2(m_0) \quad \textit{for some} \quad m_0 \in M$$

推出 $f_1 = f_2$。

证明。 首先注意，对于任意光滑函数 $f : M \to G$，都有 $\delta(\lambda_g \circ f) = f^*\lambda_g^*\kappa_G = f^*\kappa_G = \delta(f)$。

若 $\delta(f_1) = \delta(f_2)$，则由商法则可得 $\delta(f_1 f_2^{-1}) = 0$，因此 $f_1 f_2^{-1}$是局部常数（引理 1.2.7）。□

下面，对于流形 M 和局部凸李代数 $\mathfrak{g}$，我们定义括号

$$\Omega^1(M,\mathfrak{g}) \times \Omega^1(M,\mathfrak{g}) \to \Omega^2(M,\mathfrak{g}), \quad (\alpha,\beta) \mapsto [\alpha,\beta]$$

by

$$[\alpha,\beta]_p(v,w) := [\alpha_p(v),\beta_p(w)] - [\alpha_p(w),\beta_p(v)] \quad \text{for} \quad v,w \in T_p(M).$$

注意 $[\alpha,\beta] = [\beta,\alpha]$。

引理 5.5.5. 对于每个 $f \in C^\infty(M,G)$，*1*-形式 $\alpha := \delta(f)$ 满足 ***Maurer–Cartan*** 方程

$$d\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha] = 0. \tag{MC}$$

证明。 首先我们证明 $\kappa_G = \delta(\mathrm{id}_G)$ 满足 Maurer–Cartan 方程。只需在左不变向量场 x_l, y_l 上计算 $d\alpha$，其中 $x, y \in \mathfrak{g}$。由于 $\kappa_G(x_l) = x$ 是常数，我们有

$$\begin{aligned} d\kappa_G(x_l,y_l) &= x_l\kappa_G(y_l) - y_l\kappa_G(x_l) - \kappa_G([x_l,y_l]) = -\kappa_G([x,y]_l) = -[x,y] \\ &= -\tfrac{1}{2}[\kappa_G,\kappa_G](x_l,y_l). \end{aligned}$$

因此 $\alpha = f^*\kappa_G$ 满足

$$d\alpha = f^*d\kappa_G = -\tfrac{1}{2}f^*[\kappa_G,\kappa_G] = -\tfrac{1}{2}[f^*\kappa_G, f^*\kappa_G] = -\tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha],$$

这就是 Maurer–Cartan 方程。 □

5.5.2 李群同态

引理 5.5.6. 设 $\varphi\colon G \to H$ 是一个李群态射。那么

$$\delta(\varphi) = \varphi^* \kappa_H = \mathbf{L}(\varphi) \circ \kappa_G,$$

并且对每个光滑映射 $f\colon M \to G$，我们有

$$\delta(\varphi \circ f) = \mathbf{L}(\varphi) \circ \delta(f).$$

证明。对于 $g \in G$，我们有 $\varphi \circ \lambda_g = \lambda_{\varphi(g)} \circ \varphi$，这意味着对于 $g \in G$ 和 $x \in \mathbf{L}(G)$,

$$\delta(\varphi)(gx) = \varphi(g)^{-1} T_g(\varphi)(gx) = T_e(\varphi)x = \mathbf{L}(\varphi)x.$$

这意味着 $\delta(\varphi) = \mathbf{L}(\varphi) \circ \kappa_G$。

第二个断言由下式得出

$$(\varphi \circ f)^* \kappa_G = f^* \varphi^* \kappa_G = f^*(\mathbf{L}(\varphi) \circ \kappa_G) = \mathbf{L}(\varphi) \circ (f^* \kappa_G) = \mathbf{L}(\varphi) \circ \delta(f). \quad \square$$

命题 5.5.7. 若 G 连通，且 φ_1、$\varphi_2\colon G \to H$ 是李群态射，满足 $\mathbf{L}(\varphi_1) = \mathbf{L}(\varphi_2)$，则 $\varphi_1 = \varphi_2$。

证明. 由引理 5.5.6 可知，$\delta(\varphi_1) = \mathbf{L}(\varphi_1) \circ \kappa_G = \mathbf{L}(\varphi_2) \circ \kappa_G = \delta(\varphi_2)$，因此唯一性断言由唯一性引理 5.5.4 得出。□

上述观察有一些有趣的推论：

推论 5.5.8. 若 G 是连通李群，则 $\ker$ 伴随表示 $= Z(G)$。

证明. 设 $c_g(x) = gxg^{-1}$。由命题 5.5.7，对 $g \in G$ 而言，条件 $c_g = \mathrm{id}_G$ 与 $\mathbf{L}(c_g) =$ 伴随表示$(g) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)}$ 等价。由此即得该断言。□

命题 5.5.9。连通李群 G 是阿贝尔群，当且仅当其李代数是阿贝尔李代数。

证明。阿贝尔李群的李代数是阿贝尔李代数，这一点已在例 5.1.9(a)中指出。反过来，假设$\mathbf{L}(G)$是阿贝尔李代数。

根据前面的推论，我们必须证明对每个 $g \in G$，$\mathrm{Ad}(g) = e$成立。取 $x \in \mathbf{L}(G)$，并考虑一条光滑曲线$\gamma\colon [0,1] \to G$，满足 $\gamma(0) = e$ 且 $\gamma(1) = g$。对于 $\eta(t) := \mathrm{Ad}(\gamma(t))x$，根据命题 5.2.5，我们有

$$\eta'(t) = T(\sigma_{\mathrm{Ad}})(\gamma(t)\delta(\gamma)_t, 0) = \mathrm{Ad}(\gamma(t))[\delta(\gamma)_t, x] = 0,$$

使得 η 是常数。这表明 $\mathrm{Ad}(g)x = \eta(1) = \eta(0) = x$。 □

在下面的第15.1节中，我们将把前述结果推广到幂零李群与可解李群。下面的引理将李群之间映射的乘法性与 Maurer–Cartan形式联系起来。

引理 5.5.10。设 U 是李群 G 的一个开 e-邻域， H 是一个李群， $\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ 是拓扑李代数之间的连续态射，且 $\varphi\colon U \to H$ 是一个光滑映射，满足

$$\varphi(e_G) = e_H \quad \textit{and} \quad \varphi^*\kappa_H = \psi \circ \kappa_G.$$

设 $V \subseteq U$ 是一个开、连通、对称的 e-邻域，且满足 $V \cdot V \subseteq U$。那么

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \textit{for all} \quad x, y \in V.$$

证明。 设 $x \in V$。鉴于 $V \cdot V \subseteq U$，我们得到一个光滑映射

$$f = \lambda_{\varphi(x)^{-1}} \circ \varphi \circ \lambda_x \colon V \to H, \quad y \mapsto \varphi(x)^{-1}\varphi(xy).$$

那么 $f(e_G) = e_H$ 且

$$\begin{aligned}\delta(f) &= \delta(\lambda_{\varphi(x)^{-1}} \circ \varphi \circ \lambda_x) = \delta(\varphi \circ \lambda_x) = \lambda_x^*\varphi^*\kappa_H \\ &= \lambda_x^*(\psi \circ \kappa_G) = \psi \circ (\lambda_x^*\kappa_G) = \psi \circ \kappa_G = \delta(\varphi).\end{aligned}$$

由于 V 连通，且 $f(e_G) = \varphi(e_G)$，由唯一性引理 5.5.4 可得 $f = \varphi|_V$。这意味着，对于 $x, y \in V$.□， $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$。

命题 5.5.11。设 G 和 H 为李群。假设 G 是连通的，且 $\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ 是拓扑李代数的一个态射。若 $\varphi\colon G \to H$ 是光滑映射，并且

$$\varphi(e_G) = e_H \quad \textit{and} \quad \varphi^*\kappa_H = \psi \circ \kappa_G, \tag{5.12}$$

那么 φ 是李群同态。

证明。 应用前述引理，其中取 $V = U = G$。 □

定理5.5.12。设 G 是一个 1-连通李群， H 是一个李群。此外，设 $\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ 是局部凸李代数的一个态射。假设在 G 中存在一个开 e-邻域，以及一个光滑映射 $\varphi\colon U \to H$ ，满足

$$\varphi(e_G) = e_H \quad \textit{and} \quad \varphi^*\kappa_H = \psi \circ \kappa_G|_U. \tag{5.13}$$

于是存在李群态射 $\eta\colon G \to H$ ，它在每个满足 $V \cdot V \subseteq U$ 的连通开对称 e-邻域 V 上与φ 一致。特别地，我们有

$$\mathbf{L}(\eta) = \psi.$$

证明。设 $V \subseteq G$ 是满足 $V \cdot V \subseteq U$ 的连通开对称 e-邻域。于是引理 5.5.10 推出 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$，其中 $x, y \in V$。现在由命题 C.2.1 可得 $\varphi|_V$ 的一个延拓 $\eta\colon G \to H$，它是群同态。由于 φ 光滑，同态 η 在单位元邻域内光滑，因此处处光滑，也就是说，它是一个李群态射。其微分满足

$$\mathbf{L}(\eta) = T_e(\varphi) = (\varphi^* \kappa_H)(e) = \psi \circ \kappa_G(e) = \psi.$$

若 V' 是 G 中另一个连通开对称 e-邻域，且满足$V'V' \subseteq U$，则 $\varphi|_{V'}$的延拓给出一个李群态射$\eta'\colon G \to H$，并满足$\mathbf{L}(\eta') = \psi$。于是 G 的连通性蕴含 $\eta = \eta'$（命题 5.5.7），从而 $\eta|_{V'} = \eta'|_{V'} = \varphi|_{V'}$. □

第 5.5 节习题

习题 5.5.1. 设 G、H为李群，假定 G连通，并设$\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ $g \mapsto \alpha_g$是定义 G在 H上光滑作用的同态。对于光滑映射 $f\colon G \to H$，下列条件等价：

(1) f 是一个 *(left) crossed homomorphism*,

$$f(xy) = f(x) \cdot \alpha_x(f(y)) \quad \text{for} \quad x, y \in G.$$

(2) $f(e) = e$ 和 $\delta(f) \in \Omega^1(G, \mathbf{L}(H))$ 是 *equivariant*，即，

$$\lambda_g^* \delta(f) = \mathbf{L}(\alpha_g) \circ \delta(f)$$

对每个 $g \in G$。

(3) $(f, \mathrm{id}_G)\colon G \to H \rtimes_\alpha G$ 是一个同态 .

提示：将唯一性引理应用于形如 $f \circ \lambda_x$, $x \in G$ 的函数。

习题 5.5.2。设 G, H 是李群，假设 G 连通，并设 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(H)$ $g \mapsto \alpha_g$ 是一个同态，它定义了 G 在 H 上的光滑作用。对于一个光滑映射 $f\colon G \to H$，以下条件等价：

(1) f 是一个 *right crossed homomorphism*,

$$f(xy) = \alpha_y^{-1}(f(x)) \cdot f(y) \quad \text{for} \quad x, y \in G.$$

(2) $f(e) = e$ 和 $\delta(f) \in \Omega^1(G, \mathbf{L}(H))$ 是 *right equivariant*，即，

$$\rho_g^* \delta(f) = \mathbf{L}(\alpha_g^{-1}) \circ \delta(f)$$

对每个 $g \in G$。

(3) $(\mathrm{id}_G, f)\colon G \to G \rtimes_\alpha H$是一个同态。

提示：将唯一性引理应用于形如 $f \circ \rho_y$, $y \in G$ 的函数。

练习 5.5.3。设 G 是一个李群，$\varepsilon > 0$ 和 $\gamma\colon [0, \varepsilon] \to G$ 是一个 C^1-曲线，且对 $0 \le t \le \varepsilon$ 有 $\delta(\gamma)_t = x$。证明：

(a) $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$，对于 $0 \le t,\ s,\ t+s \le \varepsilon$。(b) $\gamma(t) := \lim_{n\to\infty} \gamma(t/n)^n$ 对于 $t > 0$ 定义了一个 G的单参数半群，即 $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$，对于 $t,\ s \ge 0$。(c) $\gamma(t) := \gamma(-t)$，对于 $t \le 0$ 定义了一个光滑单参数群，且 $\gamma'(0) = x$。

5.6 李群的指数函数

李群的指数函数是有限维李理论以及巴拿赫–李群理论中的关键工具。对于局部凸李群，指数映射的性质则要差得多。一般而言，它们并非局部微分同胚，因此许多李群都没有自然图册。这是无限维李理论中必须面对的一项重大困难。在第7章中，我们将研究不会出现这种病态的局部指数李群。在本节中，我们先初步考察指数映射。特别地，我们推导其对数导数的一个显式公式。

5.6.1 指数映射的一些例子

定义 5.6.1。对于具有李代数 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$ 的李群 G，如果光滑函数 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ 满足：对每个 $x \in \mathfrak{g}$，曲线 $\gamma_x(t) := \exp_G(tx)$ 是一个光滑的单参数群，且 $\gamma_x'(0) = x$，则称其为 G 的指数函数。

由定义立即可见，任何指数函数都满足

$$T_0(\exp_G) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)}\,. \tag{5.14}$$

引理 5.6.2。如果 $\exp_G\colon \mathbf{L}(G) \to G$ 是一个在单位元邻域内光滑的函数，并且对每个 $x \in \mathfrak{g}$，曲线 $\gamma_x(t) := \exp_G(tx)$ 是一个满足 $\gamma_x'(0) = x$ 的单参数群，那么 $\exp_G$ 是一个指数函数。

证明。设 $x \in \mathfrak{g}$ 和 U 如定义 7.1.1 中所述。则存在一个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\frac{1}{n}x \in U$。现在函数

$$nU \to G, \quad y \mapsto \Big(\exp_G\big(\frac{y}{n}\big)\Big)^n = \exp_G y$$

在 x 的某个邻域内光滑，因此 $\exp_G$ 是光滑的。 □

由于任意李群态射 $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ 都由 $\mathbf{L}(\gamma) = \gamma'(0)$ 唯一确定（命题 5.5.7），我们有：

命题 5.6.3。李群 G 至多有一个指数函数。

指数函数的唯一性就讲到这里；其存在性是一个更为困难的问题（参见下文例 5.6.8）。

关系 $T_0(\exp_G) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)}$ 在局部凸空间背景下，不如在有限维或巴拿赫空间背景下那样有用。对于巴拿赫–李群，由反函数定理可知，$\exp_G$ 将 $\mathfrak{g}$ 中的某个开零邻域限制为一个开 e 邻域的微分同胚

在 G 中，因此我们可以利用指数函数获得 e 附近的坐标图。下面（例 5.6.11）将看到，这一结论对一般的 Fr´echet–李群并不成立，因为不存在一般性的反函数定理，而且 $\exp_G$ 的像不一定是 G 中的单位元邻域。

注记 5.6.4. 若 $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ 是光滑同态，且 $x = \gamma'(0) = \mathbf{L}(\gamma)1$，那么由 $\gamma'(t) = \gamma(t)\gamma'(0)$ 可知 $\delta(\gamma)$ 是常数（参见引理 5.5.6），因此 γ 是该初值问题的唯一解

$$\gamma(0) = e \quad \text{and} \quad \gamma'(t) = \gamma(t)x. \tag{5.15}$$

反过来，假设光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ 满足 $\delta(\gamma) = x$，其中某个 $x \in \mathbf{L}(G)$。用微分形式表示，这意味着 $\gamma^*\kappa_G = \delta(\gamma) = \kappa_{\mathbb{R}} \cdot x$，其中 $\kappa_{\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{R}$的 Maurer–Cartan形式。这又可以解释为线性映射 $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbf{L}(G)$ $t \mapsto tx$的 $\gamma^*\kappa_G = \psi \circ \kappa_{\mathbb{R}}$，而命题 5.5.11 表明 γ 是李群同态。

由此可知，指数函数的存在性等价于存在一个满足 (5.15) 的解 γ_x，其中 $x \in \mathfrak{g}$（由引理 5.5.4 可知该解唯一），且 $\gamma_x(1)$ 关于 x 光滑依赖。

例 5.6.5. 若 $G = (E, +)$ 是一个局部凸空间，则 $\exp_E := \mathrm{id}_E$ 是一个指数函数，因为对每个 $x \in E$，$\gamma_x(t) := tx$ 是一个光滑的单参数群。

如果 $G = E/\Gamma$ 对 Γ 的一个离散子群成立，那么前面的观察表明，商映射 $E \to E/\Gamma$ 是 G 的一个指数函数。

例 5.6.6. 若 $\mathcal{A}$ 是一个含幺巴拿赫代数，且 $\mathcal{A}^\times$ 是其单位群，则指数级数

$$\exp_{\mathcal{A}}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

在每个球上都一致收敛，因此定义了一个解析（从而也是光滑的）函数 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$。

由绝对收敛级数的柯西乘积公式（习题 5.6.1），我们得到关系

$$\exp_{\mathcal{A}}(x + y) = \exp_{\mathcal{A}}(x) \exp_{\mathcal{A}}(y)$$

对于可交换元素 x，$y \in \mathcal{A}$。这尤其意味着

$$\exp_{\mathcal{A}}(x) \exp_{\mathcal{A}}(-x) = e = \exp_{\mathcal{A}}(-x) \exp_{\mathcal{A}}(x),$$

因此 $\mathrm{im}(\exp_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{A}^\times$，并且由此还可知，曲线 $\gamma_x(t) := \exp_{\mathcal{A}}(tx)$ 是同态。由此

$$\exp_{\mathcal{A}^\times}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\times, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

是巴拿赫–李群 $\mathcal{A}^\times$ 的指数函数（有关连续逆代数的一般化，参见例 5.6.9）。

例 5.6.7.设 K 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$，M 是一个紧流形（可能带边界），且 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。在定理 5.4.2 中，我们已经看到，$C^r(M, K)$ 带有一种与紧开 C^r-拓扑相容的李群结构，其李代数是空间 $C^r(M, \mathfrak{k})$，并赋予逐点括号。

假设 $\exp_K\colon \mathfrak{k} \to K$ 是 K 的光滑指数映射。我们断言

$$\exp\colon C^r(M,\mathfrak{k}) \to C^r(M,K), \quad \xi \mapsto \exp_K \circ \xi$$

是 $C^r(M, K)$ 的一个指数函数。显然，对于每个 $\xi \in C^r(M, \mathfrak{k})$，曲线 $\gamma_\xi(t) := \exp(t\xi) = \exp_K \circ t\xi$ 是 $C^r(M, K)$ 的一个单参数群。只需证明 exp 在 $C^r(M, \mathfrak{k})$ 的某个零邻域内光滑（引理 5.6.2）。

在定理 5.4.2 的证明中，我们得到 $G := C^r(M, K)$ 的坐标图如下。设 $\varphi_K\colon U_K \to \mathfrak{k}$ 是 K 的一个坐标图，且 $\varphi_K(e) = 0$。那么集合$U_G := \{f \in G\colon f(M) \subseteq U_K\}$ 是 G 的一个开子集，而 $\varphi_G\colon U_G \to \mathfrak{g}$，$f \mapsto \varphi_K \circ f$ 定义了 G 的一个坐标图 (φ_G, U_G)。

显然，$V := \{\xi \in C^r(M, \mathfrak{k})\colon \xi(M) \subseteq \exp_K^{-1}(U_K)\}$ 是 $C^r(M, \mathfrak{k})$ 中的一个开 0-邻域，经 exp 映射后落在 U_G 中。此外，$\varphi_G(\exp \xi) = \varphi_K \circ \exp_K \circ \xi$，因此根据命题 4.1.23，$\varphi_G \circ \exp|_V$ 的光滑性即可得出。

未解决问题：目前，一个重要的开放问题是：每个以麦基完备空间为模型的李群是否都有指数函数。下面的例子表明，若没有完备性这一假设，要找到没有指数函数的李群是很容易的。这并不令人意外，因为任何求解常微分方程的方法都基于完备性假设。

例 5.6.8。（一个没有指数函数的李群）令 $\mathcal{A}$ 表示巴拿赫代数 $C([0,1], \mathbb{C})$ 中所有有理函数构成的子代数，并赋予上确界范数 $\|f\| := \sup_{0\le t\le 1} |f(t)|$。由于元素 $f \in \mathcal{A}$ 可逆当且仅当 $\operatorname{im}(f) \subseteq \mathbb{C}^\times$，单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是开集；又因为 $C([0,1], \mathbb{C})$ 是巴拿赫代数，所以 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数，进而可知 $\mathcal{A}^\times$ 是一个李群。

如果 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{A}^\times$ 是一个光滑单参数群，那么它也是 $C([0,1], \mathbb{C}^\times)$ 的单参数群，因此具有形式 $\gamma(t) = e^{tf}$，其中 $f = \gamma'(0) \in \mathcal{A}$ 是某个连续函数（例 5.6.6）。对于 $f \in \mathcal{A}$，函数e^f 是有理函数，当且仅当 f 是常数。这意味着李群 $\mathcal{A}^\times$ 没有指数函数；相应地，只有常值函数能生成光滑单参数群。

例 5.6.9.令 $G := \mathcal{A}^\times$ 为麦基完备连续逆代数的单位群。那么，由于 $\mathcal{A}^\times$ 是开集，对于

每个 $a \in \mathcal{A}$，谱 Spec(a) 都是一个紧子集（且非空）； [Gl02b] 中证明了（另见第 10 章），全纯函数演算与巴拿赫代数中的情形相同。因此，我们得到一个解析指数函数

$$\exp_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\times}, \quad x \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^{\zeta} \cdot (\zeta \mathbf{1} - x)^{-1} \, d\zeta,$$

其中 Γ 是围绕 Spec(x)的任意分段光滑围道。这里我们将$\mathcal{A}$ 视为其复化 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$中的闭子代数，而 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$也是连续逆代数（推论 10.3.7）。根据

$$\exp_{\mathcal{A}}(tx) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^{t\zeta} \cdot (\zeta \mathbf{1} - x)^{-1} \, d\zeta,$$

由于 $e_t(z) := e^{tz}$ 定义了一个连续同态 $\mathbb{R} \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$（ $\mathbb{C}$上全纯函数构成的 Fr´echet 代数），并且全纯函数演算给出了一个连续代数同态

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}, \quad f \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\zeta) \cdot (\zeta \mathbf{1} - x)^{-1} \, d\zeta,$$

可知 $\gamma_x(t) := \exp_{\mathcal{A}}(tx)$是一个单参数群，因此 $\exp_{\mathcal{A}}$ 确实是李群 $\mathcal{A}^{\times}$的指数函数。此外，指数级数在 Fr´echet 代数 $\mathcal{O}(\mathbb{C})$中的收敛性意味着

$$\exp_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

在 $\mathcal{A}$中也成立。

下面的命题给出了一类有趣例子的指数函数。这类例子仍然相当简单，但也已经展现出非巴拿赫–李群的指数函数所面临的诸多问题。

命题 5.6.10。设 E 是麦基完备空间， K 是具有指数函数 $\exp_K$ 的李群，并设 $\alpha\colon K \to \mathrm{GL}(E)$ 定义了 K 在 E上的光滑线性作用。那么，半直积李群 $G := E \rtimes_{\alpha} K$ 的指数函数为

$$\exp_G(v, x) := (\beta(x)v, \exp_K(x)) \quad \textit{with} \quad \beta(x)v = \int_0^1 \alpha_{\exp_K(sx)} v \, ds.$$

证明。 考虑 K中的单参数群 $t \mapsto \exp_K(tx)$，可知只需在 $K = \mathbb{R}$ 的特殊情形下验证该断言。

首先我们注意到， G 中的曲线 $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$ 是光滑同态，当且仅当存在一个 $a \in \mathbb{R}$ ，使得 $\eta(t) = at$ 并且

$$\xi(t_1+t_2)=\xi(t_1)+\alpha_{at_1}\xi(t_2) \quad \text{for} \quad t_1,t_2\in\mathbb{R},$$

也就是说，$\xi\colon \mathbb{R}\to E$ 是关于 $\mathbb{R}$ 通过 $t.v:=\alpha_{at}v$ 在 E 上的作用的交叉同态。根据习题 5.5.1，这等价于导数 $\xi'\colon \mathbb{R}\to E$ 的等变性，而这又等价于

$$\xi'(t)=\alpha_{at}\xi'(0).$$

这又等价于

$$\xi(t)=\int_0^t \alpha_{as}v\,ds \quad \text{for} \quad v=\xi'(0).$$

因此，我们可以将 G 的光滑单参数群描述为

$$\gamma(t)=\Big(\int_0^t \alpha_{as}v\,ds, at\Big), \quad \text{where} \quad \gamma'(0)=(v,a).$$

这又意味着映射

$$\exp_G(v,a):=\Big(\int_0^1 \alpha_{as}v\,ds, a\Big)$$

是 G 的一个指数映射，因为它的光滑性可由命题 4.1.21 得出。□

注意，对于 $t\neq 0$，我们也可以写作

$$\beta(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \alpha_s\,ds,$$

因此，$\beta(t)$ 是 α 在 0 与 t之间的区间上的平均值。

例 5.6.11. 设 $G=E\rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 如前述命题所述。从 $\exp_G$ 的显式公式可以清楚地看出，对于 $t\neq 0$，$(w,t)\in \operatorname{im}(\exp_G)$ 等价于 $w\in \operatorname{im}(\beta(t))$。我们得出结论：$\exp_G$ 在某个 0 邻域上是单射，当且仅当 $\beta(t)$ 在 t 接近 0 时是单射；并且它满射到 G中的某个 e邻域，当且仅当 $\beta(t)$ 在 t 接近 0 时是满射（参见问题 8.4.8）。

注意，对于 $t\lambda\neq 0$，特征向量方程 $Dv=\lambda v$ 意味着

$$\beta(t)v=\int_0^1 e^{st\lambda}v\,ds=\frac{e^{t\lambda}-1}{t\lambda}v,$$

因此，$\beta(t)v=0$ 等价于 $t\lambda\in 2\pi i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$。

（a）对于 Fr´echet 空间 $E=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 以及由 $D(z_n)=(2\pi i n z_n)$ 给出的对角算子 D，我们看到，对于 $e_n=(\delta_{mn})_{m\in\mathbb{N}}$，$\beta(\frac{1}{n})e_n=0$成立，并且 $e_n\notin \operatorname{im}\big(\beta(\frac{1}{n})\big)$。由此可知，$(e_n,\frac{1}{n})$不包含在像中

$\exp_G$ 的像中，并且由于 $(e_n, \frac{1}{n}) \to (0,0)$，$G$ 的单位元，$\operatorname{im}(\exp_G)$ 不包含 G 的任何单位元邻域。因此，Fr´echet–李群 $G = E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的指数映射在 0 处既非局部单射，也非局部满射。

(b) 对于 Fr´歇空间 $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 和由 $D(z_n) = (nz_n)$ 给出的对角算子 D，所有算子 $\beta(t)$ 都是可逆的，并且映射

$$\widetilde{\beta}\colon \mathbb{R} \times E \times E, \quad (t, v) \mapsto (\beta(t)v, \beta(t)^{-1}v)$$

是光滑的。这意味着 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ 是一个微分同胚。

5.6.2 指数映射的自然性

现在我们回到对指数函数的一般讨论。

命题 5.6.12. 若 $\varphi\colon G \to H$ 是具有指数函数的李群态射，则下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \uparrow{\scriptstyle \exp_G} & & \uparrow{\scriptstyle \exp_H} \\ \mathbf{L}(G) & \xrightarrow{\mathbf{L}(\varphi)} & \mathbf{L}(G). \end{array}$$

证明。对于每个 $x \in \mathbf{L}(G)$ 和 $\gamma_x^G(t) := \exp_G(tx)$，映射 $\varphi \circ \gamma_x^G\colon \mathbb{R} \to H$ 是光滑群同态，且 $(\varphi \circ \gamma_x^G)'(0) = \mathbf{L}(\varphi)x$。由于这唯一确定了 $\varphi \circ \gamma_x^G$，可得 $\varphi \circ \gamma_x^G = \gamma^H_{\mathbf{L}(\varphi)x}$，因此在 $t = 1$ 中取值可得 $\varphi(\exp_G(x)) = \exp_H(\mathbf{L}(\varphi)x)$。□

命题 5.6.13。设 $\varphi\colon G \to H$ 是李群的一个覆盖态射。

(i) 若 $\exp_G$ 是 G 的一个指数函数，则 $\exp_H := \varphi \circ \exp_G \circ \mathbf{L}(\varphi)^{-1}$ 是 H 的一个指数函数。(ii) 若 H 有一个指数函数 $\exp_H$，则 G 有一个指数函数 $\exp_G$，且 $\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ \mathbf{L}(\varphi)$。

证明。(i) 这是由定义以及 $\mathbf{L}(\varphi)$ 是一个拓扑同构这一事实立即得出的。

(ii) 设 $\exp_G\colon \mathbf{L}(G) \to G$ 是映射 $\exp_H \circ \mathbf{L}(\varphi)\colon \mathbf{L}(G) \to H$ 在满足 $\exp_G(0) = e$ 的条件下的唯一提升。那么 $\exp_G$ 是光滑的（练习 5.3.3），并且满足

$$\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ \mathbf{L}(\varphi).$$

此外，对于每个 $x \in \mathbf{L}(G)$，曲线 $\widetilde{\gamma}_x(t) := \exp_G(tx)$ 是将 0 映射到 e 的单参数群 $\varphi(\widetilde{\gamma}_x(t)) = \exp_H(t\,\mathbf{L}(\varphi)x)$ 的唯一连续提升。因此，命题 5.3.6 表明 $\widetilde{\gamma}_x$ 是一个单参数群。由 $\mathbf{L}(\varphi)\widetilde{\gamma}_x'(0) = \mathbf{L}(\varphi)x$，我们推出 $\widetilde{\gamma}_x'(0) = x$，这表明 $\exp_G$ 是 G 的一个指数函数。□

定理 5.6.14。每个巴拿赫–李群都有一个（光滑的）指数函数。

证明。 **步骤 1：** X 上的每个左不变向量场都是完备的。

令 $g \in G$ 和 $\gamma\colon I \to G$ 为 $X \in \mathcal{V}(G)^l$ 的唯一极大积分曲线，且满足 $\gamma(0) = g$（参见 [La99]）。

对每个 $h \in G$，我们都有关系式 $T(\lambda_h) \circ X \circ \lambda_h^{-1} = X$，这意味着 $\eta := \lambda_h \circ \gamma$ 也是 X 的一条积分曲线。令 $h = \gamma(s)g^{-1}$，其中 $s > 0$ 任取。于是

$$\eta(0) = (\lambda_h \circ \gamma)(0) = h\gamma(0) = hg = \gamma(s),$$

由积分曲线的唯一性可知，对区间 $I \cap (I - s)$ 内所有 t，都有 $\gamma(t + s) = \eta(t)$。鉴于 I 的极大性，现在可得 $I - s \subseteq I$，进而可得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $I - ns \subseteq I$，因此区间 I 向下无界。对某个 $s < 0$ 应用同样的论证，可知 I 也向上无界。因此 $I = \mathbb{R}$，这意味着 X 是完备的。

St第 2 步： 现在我们定义指数函数 tion

$$\exp_G\colon \mathbf{L}(G) \to G, \quad \exp_G(x) := \gamma_x(1),$$

其中 $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to G$ 是左不变向量场 x_l的唯一极大积分曲线，满足 $\gamma_x(0) = e$。这意味着 γ_x 是以下初值问题的唯一解

$$\gamma(0) = e, \quad \gamma'(t) = x_l(\gamma(t)) = \gamma(t)x \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R},$$

因此是一个单参数群（注记 5.6.4）。

步骤 3： $\exp_G$ 是光滑的。

映射 $\Psi\colon \mathbf{L}(G) \times G \to T(G), \ (x, \ g) \mapsto x_l(g) = gx$ 是光滑的，因为 $T(G)$上的乘法是光滑的。若将切丛 $T(\mathbf{L}(G) \times G)$与 $T(\mathbf{L}(G)) \times T(G)$等同，则它可解释为乘积流形$\mathbf{L}(G) \times G$上的光滑向量场。于是，$\Psi$的积分曲线具有如下形式：$\gamma(t) = (x, \ \gamma_G(t))$，其中 γ_G 是向量场x_l的一条积分曲线。因此，步骤 1 蕴含 Ψ 是完备向量场，进而其整体流

$$\mathbb{R} \times \mathbf{L}(G) \times G \to \mathbf{L}(G) \times G, \quad (t, x, g) \mapsto (x, g \exp_G(tx))$$

是光滑的（见推论 2.5.20）。将其限制到 $\{1\} \times \mathbf{L}(G) \times \{e\}$ 后，$\exp_G$ 的光滑性便随之成立。 □

命题 5.6.15。若 G 是一个具有指数函数且其像为单位元邻域的李群，那么由$\exp_G(\mathbf{L}(G))$ 生成的子群 $\langle \exp_G(\mathbf{L}(G)) \rangle$ 与 G的单位连通分支 G_0 相同。

证明。由于 $\operatorname{im}(\exp_G)$ 是一个单位元邻域，由指数像生成的子群 $H := \langle \exp_G(\mathbf{L}(G)) \rangle$ 是一个 e-邻域。对每个 $x \in \mathbf{L}(G)$，$\exp_G(-x) = \exp_G(x)^{-1}$ 成立，由此可知它确实是一个子群。由习题 C.2.2(3)可推出，H 是 G的开闭子群，因此包含 G_0。

另一方面，$\exp_G$ 是连续的，因此它将连通空间 $\mathbf{L}(G)$ 映射到 G 的单位连通分支 G_0，从而得到 $H \subseteq G_0$，进而得到等式。□

引理 5.6.16。设 G 是具有光滑指数映射的李群。

(i) 若 $x, y \in \mathbf{L}(G)$ 可交换，则 $\exp_G(x+y) = \exp_G(x)\exp_G(y)$。
(ii) 对每个 $g \in G$，$\exp_G \circ \operatorname{Ad}(g) = c_g \circ \exp_G$。

证明。(i) 若 $x, y \in \mathbf{L}(G)$ 可交换，则我们先考虑光滑曲线

$$\eta\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{g}, \quad t \mapsto \operatorname{Ad}(\gamma_y(t))x.$$

根据命题 5.2.5，其导数为

$$\eta'(t) = T_{(\gamma_y(t),x)}(\sigma_{\mathrm{Ad}})(\gamma_y(t)y, 0) = \operatorname{Ad}(\gamma_y(t))[y,x] = 0.$$

因此，对每个 t，伴随表示$(\gamma_y(t))x = x$，从而引理 5.5.3(ii) 蕴含

$$\delta(\gamma_x \cdot \gamma_y) = \delta(\gamma_y) + \operatorname{Ad}(\gamma_y)^{-1}\delta(\gamma_x) = y + \operatorname{Ad}(\gamma_y)^{-1}x = y + x,$$

由此得到 $\gamma_{x+y} = \gamma_x \cdot \gamma_y$（注记 5.6.4），并最终得到

$$\exp_G(x+y) = \gamma_{x+y}(1) = \gamma_x(1)\gamma_y(1) = \exp_G x \exp_G y.$$

（ii）由命题 5.6.12 结合 $H = G$ 与 $\varphi = c_g$ 得出。 □

5.6.3 具有指数函数的阿贝尔李群

下面的命题刻画了具有指数函数的连通阿贝尔李群。由于所有已知的、具有麦基完备李代数的李群都是正则的，因而具有指数函数，该命题适用于所有这些群。

命题 5.6.17.设 A 是以麦基完备空间 $\mathfrak{a}$为模型的连通阿贝尔李群。则 A 具有指数函数，当且仅当对 $\mathfrak{a}$的离散子群 Γ_A 成立$A \cong \mathfrak{a}/\Gamma_A$。

证明。 如果 Γ_A 是 Mackey完备局部凸空间 $\mathfrak{a}$ 的离散子群，且 $A := \mathfrak{a}/\Gamma_A$ 是拓扑商群，那么 A具有自然李群结构（推论 5.3.4），商映射 $q_A\colon \mathfrak{a} \to A$ 可视为 A 的指数映射，也可视为万有覆盖映射。特别地，A 具有指数映射。

反过来，假设 A 是一个以麦基完备空间为模型、具有指数映射 $\exp_A$ 的连通阿贝尔李群。首先我们断言 $\exp_A$ 是满射。根据引理 5.6.16(i)，$\exp_A\colon (\mathfrak{a}, +) \to A$ 是李群态射。令 $a \in A$，并考虑一条光滑路径 $\gamma\colon [0,1] \to A$，满足 $\gamma(0) = e$ 且 $\gamma(1) = a$。那么，对数导数 $\xi := \delta(\gamma)$ 是一个光滑映射 $[0,1] \to \mathfrak{a}$，我们考虑光滑路径

$$\eta(t) := \exp_A\Big(\int_0^t \xi(s)\,ds\Big)$$

它还满足 $\delta(\eta) = \xi$，因为 $\delta(\exp_A) = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$（引理 5.5.6）。这里我们利用了 $\mathfrak{a}$ 的 Mackey 完备性，以确保光滑曲线 ξ 的黎曼积分存在。现在，$\eta(0) = \gamma(0) = e$ 意味着

$$a = \gamma(1) = \eta(1) = \exp_A\Big(\int_0^1 \xi(s)\,ds\Big) \in \mathrm{im}(\exp_A)$$

（引理 5.5.4）。

令 $q_A\colon \widetilde{A} \to A$ 表示一个万有覆盖同态，且 $\mathbf{L}(q_A) = \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathfrak{a}}$。那么命题 5.6.13 表明，$A$ 具有指数函数 $\widetilde{\exp}_{\widetilde{A}}\colon \mathfrak{a} \to A$，且 $\exp_A = q_A \circ \widetilde{\exp}_{\widetilde{A}}$。由于 A 是单连通的，李代数同态 $\mathrm{id}_{\mathfrak{a}}\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ 可积分为李群同态 $\widetilde{L}\colon A \to \mathfrak{a}$，且 $\mathbf{L}(L) = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$。事实上，Maurer–Cartan 形式的闭性意味着存在唯一的光滑函数 $L\colon A \to \mathfrak{a}$，满足 $L(e) = 0$ 和 $dL = \kappa_{\widetilde{A}}$，因此命题 5.5.11 表明 L 是一个同态。现在我们有

$$L \circ \exp_{\widetilde{A}} = \exp_{\mathfrak{a}} \circ \mathbf{L}(f) = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}} \circ \mathrm{id}_{\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}},$$

因此，$\exp_{\widetilde{A}} \circ L$ 在 $\mathrm{im}(\exp_{\widetilde{A}}) = \mathfrak{a}$ 上的限制是恒等映射，这也推出 $\widetilde{\exp}_{\widetilde{A}} \circ L = \mathrm{id}_{\widetilde{A}}$。是李群之间的 $A \cong \mathfrak{a}$，从而 $\exp_A$ 是一个覆盖态射，因此 $\Gamma_A := \ker(\exp_A) \subseteq \mathfrak{a}$ 是离散的，且 $A \cong \mathfrak{a}/\Gamma_A$。□

注记 5.6.18。如果我们不知道连通单连通阿贝尔李群 A 的指数函数 $\exp_A\colon \mathfrak{a} \to A$ 是光滑的，那么前述命题的证明就行不通。由于 $\mathfrak{a}$ 是阿贝尔的，由引理 5.6.16(i) 可知

$$\exp_A\colon (\mathfrak{a}, +) \to A$$

是一个群同态。若 $\mathfrak{a}$ 麦基完备，则李代数同态 $\mathrm{id}_{\mathfrak{a}}\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ 可积分为光滑群同态 $L\colon A \to \mathfrak{a}$，满足 $\mathbf{L}(L) = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$ 且 $L \circ \exp_A = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$。因此，$\exp_A \circ L$ 在 $\mathrm{im}(\exp_A)$ 上的限制是恒等映射，但没有理由认为 $\exp_A$ 是光滑的或是微分同胚。有趣的是，我们总能得到光滑函数 L，它可以视为对数函数；但 $\exp_A$ 的光滑性似乎更为深奥。

注 5.6.19. 命题 5.6.17 特别适用于有限维连通阿贝尔李群 A，因此 $A \cong \mathfrak{a}/\Gamma$，其中 $\Gamma \subseteq \mathfrak{a}$ 是离散子群。根据习题 5.6.4，存在 $\mathfrak{a}$ 的一组基 $v_1, \dots, v_n$，使得 $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_k$ 对某个 $k \leq n$ 成立。由此我们得到乘积结构

$$A \cong \mathfrak{a}/\Gamma \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k \cong \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

5.6.4 指数函数的导数

为了得到指数函数的（对数）导数公式，我们首先注意到，$T(\exp_G)$ 是切群 TG 的指数函数。

引理 5.6.20. 如果 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ 是一个指数函数，那么

$$T(\exp_G)\colon T\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \to TG$$

是切群 TG 的指数函数。

证明。对于 $t \in \mathbb{R}$，我们考虑光滑映射 $E_t\colon \mathfrak{g} \to G, E_t(x) = \exp_G(tx)$.它们满足关系

$$E_t \cdot E_s = E_{t+s} \quad \text{for} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

应用切函子，我们得到关系式

$$T(E_t) \cdot T(E_s) = T(E_{t+s}) \quad \text{for} \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{5.16}$$

我们得出，对于 $(x,\ y) \in T\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$，光滑曲线

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to TG, \quad \gamma(t) = T(E_t)(x, y) = T(\exp_G)(tx, ty)$$

是一个单参数群。现在

$$\begin{aligned}\gamma'(0) &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} T(\exp_G)(tx, ty) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \exp_G(tx) + \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} T_0(\exp_G)ty \\ &= (x, 0) + (0, y) = (x, y)\end{aligned}$$

这意味着 $T(\exp_G)$ 是 $T(G)$ 的一个指数函数（参见定义 5.6.1）。

□

定义 5.6.21。 设 G 是一个带有指数函数的李群，且 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$。那么，$\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中的单参数群 $\mathrm{Ad}(\exp_G(tx))$ 的无穷小生成元为 $\operatorname{ad} x$（命题 5.2.5），因此我们也可以写成

$$\mathrm{Ad}(\exp_G(tx)) = e^{t \operatorname{ad} x} \tag{5.17}$$

（参见命题 D.2.8）。此外，如果 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的，那么算子值积分

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x) := \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}\,dt \tag{5.18}$$

逐点存在，因为曲线 $t \mapsto e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}y$ 是光滑的，而积分表示线性映射 $y \mapsto \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}y\,dt.$。注意，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$与 $\mathrm{ad}\,x$可交换，因此

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)\circ \mathrm{ad}\,x = \mathrm{ad}\,x\circ\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}\,\mathrm{ad}\,x\,dt = \mathbf{1} - e^{-\,\mathrm{ad}\,x}. \tag{5.19}$$

我们还注意到

$$e^{\mathrm{ad}\,x}\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \int_0^1 e^{(1-t)\,\mathrm{ad}\,x}\,dt = \int_0^1 e^{t\,\mathrm{ad}\,x}\,dt = \kappa_{\mathfrak{g}}(-x). \tag{5.20}$$

定理 5.6.22. 若 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的，且 $\exp_G\colon \mathfrak{g}\to G$ 是指数函数，则

$$\delta(\exp_G)(x) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}\,dt. \tag{5.21}$$

证明。 **第一种证明：** 首先回顾一下， $T(G) \cong (\mathfrak{g},+) \rtimes_{\mathrm{Ad}} G$ 是阿贝尔李群 $(\mathfrak{g},+)$ 与 G的半直积，其中 G 通过伴随表示作用于 $\mathfrak{g}$ （例 5.2.12）。若 $\mathfrak{g}$ 麦基完备，则由命题 5.6.10 得到显式公式

$$T(\exp_G)(y,x) = \exp_{T(G)}(y,x) = (\beta(x)y, \exp_G(x))$$

with

$$\beta(x) = \int_0^1 \mathrm{Ad}(\exp_G(sx))\,ds = \int_0^1 e^{s\,\mathrm{ad}\,x}\,ds = \kappa_{\mathfrak{g}}(-x).$$

结合 (5.20)，我们得出

$$\begin{aligned}\delta(\exp_G)_x y &= \exp_G(x)^{-1}\cdot T(\exp_G)(x,y) = \exp_G(-x)\cdot\kappa_{\mathfrak{g}}(-x)y\cdot\exp_G(x)\\ &= e^{-\,\mathrm{ad}\,x}\kappa_{\mathfrak{g}}(-x)y = \kappa_{\mathfrak{g}}(x)y.\end{aligned}$$

第二种证明： 对于 $t\in\mathbb{R}$，函数 $E_t\colon \mathfrak{g}\to G, x\mapsto \exp_G(tx)$ 在 $\mathfrak{g}$上逐点满足 $E_{t+s} = E_tE_s$。乘积法则（引理 5.5.3 ）表明

$$\delta(E_{t+s}) = \delta(E_s) + \mathrm{Ad}(E_s)^{-1}\delta(E_t).$$

对于这条光滑曲线

$$\psi\colon \mathbb{R}\to\mathfrak{g},\quad \psi(t) := \delta(\exp_G)_{tx}(ty) = \delta(E_t)_x y$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\psi(t+s) &= \delta(E_{t+s})_x(y) = \delta(E_s)_x(y) + \mathrm{Ad}(E_s)^{-1}\delta(E_t)_x(y)\\ &= \psi(s) + \mathrm{Ad}(\exp_G(-sx))\psi(t) = \psi(s) + e^{-s\,\mathrm{ad}\,x}\psi(t).\end{aligned}$$

我们有 $\psi(0) = 0$ 且

$$\psi'(0) = \lim_{t\to 0}\delta(\exp_G)_{tx}(y) = \delta(\exp_G)_0(y) = y,$$

因此，对 t in 0 求导，得到 $\psi'(s) = e^{-s\,\mathrm{ad}\,x}y$.现在由 $\delta(\exp_G)_x(y) = \psi(1) = \int_0^1 \psi'(s)\,ds$ 可得结论。□

注5.6.23。 若 G 是麦基完备连续逆代数的单位群 $\mathcal{A}^\times$ （参见例 5.6.9），则我们将 $T(G)$ 与 $\mathcal{A}^\times \times \mathcal{A}$ 等同，并注意到 $\mathrm{ad}\ x = \lambda_x - \rho_x$ 和 $e^{\mathrm{ad}\,x}y = e^x y e^{-x}$. 因此，(5.21) 可写为

$$T_x(\exp_G)y = e^x \int_0^1 e^{-tx} y e^{tx}\,dt = \int_0^1 e^{(1-t)x} y e^{tx}\,dt.$$

注 5.6.24。 若 $\mathfrak{g}$ 是巴拿赫–李代数，则 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 可表示为收敛幂级数

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}(\mathrm{ad}\,x)^k.$$

这意味着，对于整函数，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = f(\mathrm{ad}\ x)$ 成立

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}z^k = \frac{1-e^{-z}}{z}.$$

由于 $f^{-1}(0) = 2\pi i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$，且根据谱映射定理（[Ru91，定理 10.28]），$\mathrm{Spec}(\kappa_{\mathfrak{g}}(x)) = f(\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}\ x))$,

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Spec}(\mathrm{ad}\,x)\cap 2\pi i\mathbb{Z} \subseteq \{0\}.$$

在一般情形下，这一观察的部分结论仍然成立。若 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的，则$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 不是单射，当且仅当存在某个 $n\in\mathbb{N}$ 满足

$$\ker((\mathrm{ad}\,x)^2 + 4\pi^2 n^2\mathbf{1}) \neq \{0\} \tag{5.22}$$

（命题 D.2.14）。若 $\mathfrak{g}$ 是复李代数，这意味着某个$2\pi i n \in 2\pi i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 是 $\mathrm{ad}\,x$ 的特征值。

仔细考察 (5.18) 可得关于指数函数行为的以下结果（有限维情形参见 [LaTi66] ）：

命题 5.6.25。设 G 是一个具有指数函数的李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。则对于 x、$y\in\mathfrak{g}$，以下断言成立：

(i) 若 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)y = 0$，则

$$\exp_G(e^{t\,\mathrm{ad}\,y}x) = \exp_G(x) \quad \textit{for all} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii)如果 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 不是单射，且 $\mathfrak{g}$ 麦基完备，那么在 x的任意邻域内，$\exp_G$ 都不是单射。(
iii) *If* $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 是单射，*t hen*
(a) $\exp_G(y) = \exp_G(x)$ 蕴含 $[x, y] = 0$ 且 $\exp_G(x - y) = e$。(b) $\mathrm{Ad}(\exp_G(x)) = \mathrm{id} \iff x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。(c) $\exp_G(x) = e$ 蕴含 $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。

(iv) 假设0 是孤立的，在$\exp_G^{-1}(e)$中。那么， x 在$\exp_G^{-1}(\exp_G(x))$中孤立，当且仅当 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 是单射。
(v) 如果 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 是阿贝尔子代数，那么$\exp_G|_{\mathfrak{a}}\colon \mathfrak{a} \to G$ 是李群态射。其核 $\Gamma_{\mathfrak{a}} := \ker(\exp_G|_{\mathfrak{a}})$ 是 $\mathfrak{a}$的闭子群，其中所有 C^1-曲线都是常数。它与 $\mathfrak{a}$ 的每个有限维子空间的交都是一个离散子群。

证明。 (i) 我们考虑光滑曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$，定义如下：

$$\begin{aligned}\gamma(t) &:= \exp_G(e^{t\,\mathrm{ad}\,y}x) = \exp_G(\mathrm{Ad}(\exp_G(ty))x)\\ &= \exp_G(ty)\exp_G(x)\exp_G(-ty).\end{aligned}$$

我们证明，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\gamma'(t) = 0$，这意味着 γ 是常数。令 $\beta(t) := \mathrm{Ad}(\exp_G(ty))x = e^{t\,\mathrm{ad}\,y}x$。那么

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(\beta(t)) = \mathrm{Ad}(\exp_G(ty)) \circ \kappa_{\mathfrak{g}}(x) \circ \mathrm{Ad}(\exp_G(ty))^{-1}$$

（习题 5.6.9）蕴含

$$\begin{aligned}\delta(\gamma)_t &= \delta(\exp_G)_{\beta(t)}\beta'(t) = \delta(\exp_G)_{\beta(t)}\,\mathrm{Ad}(\exp_G(ty))[y, x]\\ &= \kappa_{\mathfrak{g}}(\beta(t))\,\mathrm{Ad}(\exp_G(ty))[y, x] = \mathrm{Ad}(\exp_G(ty))\kappa_{\mathfrak{g}}(x)[y, x]\\ &= -\,\mathrm{Ad}(\exp_G(ty)) \circ \mathrm{ad}\,x \circ \kappa_{\mathfrak{g}}(x)(y) = 0\end{aligned}$$

（习题 5.6.9）。
(ii) 如果 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 不是单射，那么 $\mathfrak{g}$ 的麦基完备性蕴含存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 \neq y \in \mathfrak{g}$，使得

$$(\mathrm{ad}\,x)^2 y = -4\pi^2 n^2 y.$$

（命题 D.2.14）。现在 $[x, y] \neq 0$ 和 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(y) = 0$，因此由 (i) 可知，非恒定曲线 $e^{\mathbb{R}\,\mathrm{ad}\,y}x$ 包含于 $\exp_G^{-1}(\exp_G(x))$ 中。因此，$\exp_G$ 在 x 的任意邻域内都不是单射。

(iii) (a) 我们考虑 (i) 中的曲线 $\gamma(t) := \exp_G(e^{t\,\mathrm{ad}\,y}x)$，并回顾

$$\delta(\gamma)_t = \mathrm{Ad}(\exp_G(ty))\kappa_{\mathfrak{g}}(x)[y, x].$$

进一步，

$$\gamma(t) = \exp_G(ty)\exp_G(x)\exp_G(-ty) = \exp_G(ty)\exp_G(y)\exp_G(-ty) = e$$

这意味着 $\gamma'(t) = 0$，因此 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 的单射性推出 $[y, x] = 0$。接着，由引理 5.6.16 可得

$$\exp_G(x - y) = \exp_G(x)\exp_G(y)^{-1} = e.$$

(iii) (b) 由 (5.19) 得到 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x) \circ \operatorname{ad} x = e - e^{-\operatorname{ad} x}$，因此 $e^{\operatorname{ad} x} = e$等价于 $\operatorname{ad} x = 0$，因为 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 可逆。

(iii) (c) 由 (b) 得出。

(iv) 若 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 不是单射，则 (ii) 下方的论证表明，x 在 $\exp_G^{-1}(\exp_G(x))$ 中不是孤立的。反过来，假设 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 是单射。由 (iii) 可知，$\exp_G(y) = \exp_G(x)$ 蕴含 $\exp_G(x - y) = e$。若 0 在 $\exp_G^{-1}(e)$ 中是孤立的，则可得 x 在 $\exp_G^{-1}(\exp_G(x))$ 中是孤立的。

(v) 由于 $\mathfrak{a}$ 是阿贝尔的，$\exp_G$ 在 $\mathfrak{a}$ 上的限制是一个光滑群同态 $\mathfrak{a} \to G$，其核为 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$（引理 5.6.16）。因此，$\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 是 $\mathfrak{a}$的闭子群。由于 $\mathbf{L}(\exp_G|_{\mathfrak{a}})$ 是包含映射 $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$，它是单射，这又意味着每条曲线 $\gamma\colon [0,1] \to \Gamma_{\mathfrak{a}}$的导数都属于 $\ker\mathbf{L}(\exp_G|_{\mathfrak{a}}) = \{0\}$。因此，$\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 中的每条 C^1-曲线都是常数。若 $E \subseteq \mathfrak{a}$是有限维的，那么 $E \cap \Gamma_{\mathfrak{a}}$ 是 E 的闭子群，且不包含非平凡向量子空间，因此它必定是离散的（习题 5.6.8）。□

推论 5.6.26。设 G 是具有指数函数的李群，李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 是对称子集，使得对每个 $x \in U + U$，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 都是单射。那么，对于 x、$y \in U$，

$$\exp_G x = \exp_G y \quad\Longleftrightarrow\quad x - y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \quad \textit{and} \quad \exp_G(x - y) = e.$$

证明。如果 $x - y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 满足 $\exp_G(x - y) = e$，那么我们有

$$\exp_G y = \exp_G(x + (y - x)) = \exp_G x \exp_G(x - y) = \exp_G x$$

（引理 5.6.16(i)）。

反过来，假设 $x, y \in U$ 满足 $\exp_G x = \exp_G y$。那么命题 5.6.25 推出 $\exp_G(x - y) = e$。由于 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x - y)$ 可逆，我们进一步得到 $x - y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。□

注 5.6.27。(a) 请注意，在前述推论的情形下，我们总可以假设 $U + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = U$，因为子集 $V := U + \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 也是对称的，并且关系 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x + z) = \kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 蕴含着对每个 $x \in V + V = U + U + \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 都是单射。

此外，若我们假设闭子群 $\Gamma_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})} := \ker(\exp_G|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})})$ 与 $U + U$ 的交集仅为 $\{0\}$，则可推出 $\exp_G$ 在 U 上是单射。

(b) 若 G是巴拿赫–李群，且 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$带有一个满足$\|[x,y]\| \le \|x\| \cdot \|y\|$的范数，则 $\|\operatorname{ad} x\| \le \|x\|$。因此，$\|x\| < 2\pi$ 蕴含$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$可逆（注 5.6.24）。若 $\exp_G|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$ 是单射，即 $Z(G)$是单连通的，则由推论 5.6.26 可知，$\exp_G$ 在开球 $B_\pi := \{x \in \mathfrak{g}$上是单射（参见 [LaTi66]）。一般而言，我们可以令

$$\delta_G := \inf\{\|x\| \colon 0 \neq x \in \Gamma_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}\}$$

从而得到 $\exp_G$ 在半径为 $r := \min\{\pi, \frac{\delta_G}{2}\}$ 的球上是单射（参见[GN03];—[Bel04，注 2.3]）。

注 5.6.28。对于给定的带有指数函数的李群G，判断 0 是否是 $\exp_G^{-1}(e)$ 中的孤立点，是一个重要的问题。如果 $\exp_G$ 在 $\mathfrak{g}$的某个零邻域上是单射，这当然成立。目前，我们不知道任何李群 G，使得 0 不是 $\exp_G^{-1}(e)$ 中的孤立点。

这一性质也可以解释为态射$\gamma\colon\ \mathbb{T} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to G$具有某种刚性。对于任意这样的态射 γ，我们有 $\exp_G(\mathbf{L}(\gamma)1) = e$；反过来，任意 $x \in \exp_G^{-1}(e)$，都定义了一个态射$\gamma_x\colon \mathbb{T} \to G$，其定义为 $\gamma_x(t+\mathbb{Z}) \colon = \exp_G(tx)$。因此，如果任何一个与平凡态射 C^1相近的态射 $\mathbb{T} \to G$ 实际上都是平凡的，那么 0 就是 $\exp_G^{-1}(e)$ 中的孤立点。

如果 0 在 $\operatorname{Exp}_G^{-1}(e)$ 中是孤立的，那么特别可以推出，闭子群

$$\Gamma_Z := \{x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \colon \exp_G x = e\}$$

$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是闭的，这是我们将在其他语境中反复遇到的性质。根据命题 5.6.25，对于满足 $\exp_G x = e$ 的 $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，算子 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 不是单射。

Sternberg 的例子

形式微分同胚群是重要的原幂零李群例子，即幂零李群的射影极限。对于 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$，我们用 $\mathbf{Gf}_n(\mathbb{K})$ 表示形式微分同胚 $\mathbb{K}^n$ 中固定 0 的群。该群的元素由如下形式的形式幂级数表示

$$\varphi(x) = gx + \sum_{|\mathbf{m}|>1} c_{\mathbf{m}} x^{\mathbf{m}}, \quad \text{where} \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),$$

$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$，以及

$$|\mathbf{m}| := m_1 + \ldots + m_n, \quad x^{\mathbf{m}} := x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}, \quad c_{\mathbf{m}} \in \mathbb{K}^n.$$

群运算由幂级数的复合给出。如果 $g = E_n$ 是单位矩阵，我们称 φ原幺幂。容易看出，原幺幂形式微分同胚构成一个原幂零李群 $\mathbf{Gf}_n(\mathbb{K})_1 = \varprojlim G_k$，其中 G_k 是通过复合如下形式的多项式得到的有限维幂零李群

$$\varphi(x) = x + \sum_{1<|\mathbf{m}|\leq k} c_{\mathbf{m}} x^{\mathbf{m}}$$

模去 $> k$ 阶项。所有固定 0 的 $\mathbb{K}^n$ 形式微分同胚所构成的群 $\mathbf{Gf}_n(\mathbb{K})$ 是一个半直积

$$\mathrm{Gf}_n(\mathbb{K}) \cong \mathrm{Gf}_n(\mathbb{K})_1 \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),$$

其中，线性自同构群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 通过共轭作用发挥作用。由于该作用是光滑的，$\mathrm{Gf}_n(\mathbb{K})$ 是一个 Fr´echet–李群（定义 5.2.7）。

例 5.6.29. 群 $\mathrm{Gf}_n(\mathbb{C})$ 已由 Sternberg 在 [St61],中研究；他特别证明，对于 $n = 1$，元素

$$\varphi_m(x) = e^{\frac{2\pi i}{m}} x + px^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, p \in \mathbb{C}^\times,$$

不包含在指数函数的像中。这一点特别值得关注，因为 $\varphi_m \to e$ 在李群 $\mathrm{Gf}_n(\mathbb{C})$ 中，从而该群中指数函数的像不是单位元邻域。对该群指数函数的详细分析学也可参见 Lewis 的论文 [Lew39]；另见 [Rob02]。

为了看出 φ_m 不在 $\mathrm{Gf}_n(\mathbb{C})$ 的指数函数的像中，只需在有限维可解商群 $G_{m+1} \rtimes \mathbb{C}^\times$中验证这一点，即模去 $m+2$ 阶项。子群 $H := \mathbb{C}x^{m+1} \rtimes \mathbb{C}^\times$与带有乘法的 $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^\times$ 同构

$$(z, w)(z', w') = (z + w^{-m} z', ww')$$

因为 $w(w^{-1}x)^{m+1} = w^{-m}x^{m+1}$. 其指数函数由下式给出

$$\exp_H(z, w) = \Big(\frac{e^{-wm} - 1}{(-wm)} z, e^w\Big) = \Big(\frac{1 - (e^w)^{-m}}{wm} z, e^w\Big)$$

（参见命题 5.6.10）。由此可知，$\varphi_m \in H$ 不包含在指数像中。

任何满足 $\exp \xi = \varphi_m$ 的元素 $\xi \in \mathfrak{g}_{m+1} \rtimes \mathbb{C}$ 都必须包含在平面 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x, x^{m+1}\}$ 中。事实上，$Z := \mathbb{C}x^{m+1}$ 在幂零群 G_{m+1} 中是中心的，而作用 $w_0 := e^{\frac{2\pi i}{m}}$ 在 $\mathfrak{g}_m \cong \mathfrak{g}_{m+1}/\mathbb{C}x^{m+1}$ 上的特征值为

$$w_0^{m-1}, w_0^{m-2}, \ldots, w_0,$$

都不等于 1。因此，可解李代数 $\mathfrak{g}_m \rtimes \mathbb{C}$ 的指数函数在 $(0, \frac{2\pi i}{m})$ 上是正则的（参见注 5.6.24）。因此，任何满足 z 的

$$\exp_{G_m}(z) = \exp_{G_m}\Big(0, \frac{2\pi i}{m}\Big)$$

具有 (a, b) 的形式 $\in \mathfrak{g}_m \rtimes \mathbb{C}$，其中 (a, b) 与 w_0 对易（命题 5.6.25），但这意味着 $a = 0$。因此，任何满足 $\exp_{G_{m+1}} \xi = \varphi_m$ 的 $\xi \in \mathfrak{g}_{m+1} \rtimes \mathbb{C}$ 都包含于 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x, x^{m+1}\}$ 中。证明至此完成。

第5.6节习题

习题 5.6.1（柯西乘积公式）。设 X, Y, Z 为巴拿赫空间，且 β: $X \times Y \to Z$ 是一个连续双线性映射。假设 $x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 在 X 中绝对收敛，且 $y := \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 在 Y 中绝对收敛。那么

$$\beta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \beta(x_k, y_{n-k}).$$

习题 5.6.2（柯西乘积公式）。设 X, Y, Z 为局部凸空间，其中 Z 是序列完备的，且 β: $X \times Y \to Z$ 是连续双线性映射。假设 $x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 在 X 中绝对收敛，且 $y := \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 在 Y 中绝对收敛。那么

$$\beta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \beta(x_k, y_{n-k}).$$

提示：将此验证归约到巴拿赫情形（习题 5.6.1）。不妨设 Z 是巴拿赫空间。接着证明 β 可经由双线性映射 $\widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to Z$ 分解，其中 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 是巴拿赫空间。

习题 5.6.3。设 E 是实拓扑向量空间。证明每个连续群同态 γ: $(\mathbb{R}, +) \to (E, +)$ 都可写成 $\gamma(t) = tv$，其中 $v \in E$。

习题 5.6.4。证明，对于每个离散子群 $D \subseteq \mathbb{R}^n$，都存在一组线性无关元素 $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$，使得 $D = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{Z} v_i$。对 $\dim(\operatorname{span} D)$ 使用归纳法，并按以下步骤进行：

(1) 证明 D 是闭的。(2) 将问题化归为 $\operatorname{span} D = \mathbb{R}^n$。(3) 每个紧子集 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 都与 D 相交于一个有限子集。(4) 假设 $\operatorname{span} D = \mathbb{R}^n$，且存在 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $f_1, \ldots, f_n$，它包含于 D 中，使得超平面 $F := \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ 满足 $F \cap D = \mathbb{Z} f_1 + \ldots + \mathbb{Z} f_{n-1}$。证明

$$\delta := \inf\left\{\lambda_n > 0 \colon (\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}) \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in D\right\} > 0.$$

提示：只需假设对于 $i = 1, \ldots, n$，有 $0 \le \lambda_i \le 1$。
(5) 对 n 使用归纳法，求出满足 (4) 的 f_1、……、f_n，并选取 $f_n' := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in D$，使得 $\lambda_n = \delta$。证明 $D = \mathbb{Z} f_1 + \ldots + \mathbb{Z} f_{n-1} + \mathbb{Z} f_n'$。

习题 5.6.5。（连通阿贝尔巴拿赫李群的结构）（参见命题 5.6.17）设 A 是一个连通阿贝尔巴拿赫–李群。证明：

(1) $\exp_A$: $(\mathbf{L}(A), +) \to A$ 是李群的覆盖态射。(2) $\Gamma_A := \ker \exp_A$ 是 $(\mathbf{L}(A), +)$ 的离散子群，并且 $A \cong \mathbf{L}(A)/\Gamma_A$。(3) 若 $\dim A < \infty$，则对某个 k、$m \ge 0$ 有 $A \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^m$。
提示：习题 5.6.4。

习题 5.6.6.（可除群）如果阿贝尔群 D 满足以下条件，则称其为 *divisible*：对于每个 $d \in D$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个 $a \in D$ 使得 $a^n = d$。证明：

(1) 若 G 是阿贝尔群，H 是子群，且 $f\colon H \to D$ 是到可除群 D 中的一个同态，则存在一个将 f 延拓为同态 $\widetilde{f}\colon G \to D$ 的延拓。提示：利用佐恩引理，将问题归结为 G 由 H 和另一个元素生成的情形。(2) 若 G 是阿贝尔群，且 D 是一个可除子群，则对于某个 G 的子群 H，有 $G \cong D \times H$。提示：将 $\mathrm{id}_D\colon D \to D$ 延拓为同态 $f\colon G \to D$，并令 $H := \ker f$。

习题 5.6.7. （一般阿贝尔巴拿赫–李群）设 A 是一个阿贝尔巴拿赫–李群。证明：

(1) A 的 A_0 的单位连通分支是可除的（参见命题 5.6.17）。(2) $A \cong A_0 \times \pi_0(A)$，其中 $\pi_0(A) := A/A_0$。(3) 若 $\dim A < \infty$，则存在一个离散阿贝尔群 D 和 k，$m \in \mathbb{N}_0$，使得 $A \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^m \times D$。

习题 5.6.8. 设 E 是一个有限维空间，$\Gamma \subseteq E$ 是一个闭子群。证明，若 Γ 不是离散的，则 Γ 包含一个非平凡向量子空间。提示：若 Γ 不是离散的，则存在一个由非零元素组成的序列 (γ_n)，它在 Γ 中收敛到 0。在 E 上取一个范数 $\|\cdot\|$，并证明我们可以假设 $v_n := \frac{\gamma_n}{\|\gamma_n\|}$ 在 $(E, \|\cdot\|)$ 的单位球面中收敛到某个 v。然后证明 $\mathbb{R}v \subseteq \Gamma$。

习题 5.6.9。设 $\mathfrak{g}$ 是一个麦基完备李代数，$x \in \mathfrak{g}$ 使得 $\operatorname{ad} x$ 生成 $e^{t \operatorname{ad} x}$ 的一个光滑单参数自同构群 $\mathfrak{g}$，且 $\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$。证明：

(1) $\operatorname{ad}(\varphi(x))$ 也在 $\mathfrak{g}$ 上生成一个光滑单参数群，并且有

$$\varphi \circ e^{\operatorname{ad} x} \circ \varphi^{-1} = e^{\operatorname{ad} \varphi(x)}.$$

(2) $\kappa_{\mathfrak{g}}(\varphi(x)) = \varphi \circ \kappa_{\mathfrak{g}}(x) \circ \varphi^{-1}$ 对 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x) := \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt$ 成立。

习题 5.6.10。设 X 是一个巴拿赫空间，且 G 是一个有限维连通李群，$\pi\colon G \to \mathrm{GL}(X)$ 是一个忠实表示；当 $\mathrm{GL}(X)$ 赋予从巴拿赫代数 $\mathcal{L}(X)$ 继承的一致拓扑时，该表示是连续的，并且 $\pi(G)$ 是有界的。通过以下步骤证明 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 是一个紧李代数：

(1) π 是李群的光滑同态。特别地，我们有李代数$\mathbf{L}(\pi)$的一个表示：$\mathfrak{g} \to \mathcal{L}(X)$。
(2) $\|x\| := \|\mathbf{L}(\pi)(x)\|$ 在 $\mathfrak{g}$上定义了一个范数，而 $\mathrm{Ad}(G)$关于此范数是有界的。(3) $\mathrm{Ad}(G)$具有紧闭包，因此 $\mathfrak{g}$ 是一个紧李代数。

此外，若 X 是希尔伯特空间，则甚至可以证明存在一个与拓扑相容且在 G 下不变的标量积，使得 π 关于此标量积成为酉表示。这可以通过证明所有相容标量积的集合是一个 Bruhat–Tits空间，再应用 Bruhat–Tits不动点定理（[La99]）来实现。

习题 5.6.11.设 $\mathfrak{n}$ 是一个配备 BCH乘法的二步幂零李代数

$$x * y := x + y + \frac{1}{2}[x, y].$$

进一步令 $D \in \mathrm{der}(\mathfrak{n})$，且 $\mathfrak{g} := \mathfrak{n} \rtimes_D \mathbb{R}$ 计算群 $G := (\mathfrak{n}, *) \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 关于 $\alpha(t) := e^{tD}$ 的指数函数。

习题 5.6.12.（巴拿赫–李群中的挠元）设 G 是一个巴拿赫–李群，并

$$E_n(G) := \{g \in G \colon g^n = e\}$$

记为阶整除 n 的那些元素构成的闭子集。证明每个$E_n(G)$ 都带有巴拿赫流形结构，并且 G 的单位连通分支G_0 在 $E_n(G)$[1] 的每个连通分支上传递作用。

提示：验证以下断言：

（1）对于 $g \in E_n(G)$，考虑以下闭子空间

$$\mathfrak{a} := \ker(\mathrm{Ad}(g) - \mathbf{1}) \quad \text{and} \quad \mathfrak{b} := \ker(\mathbf{1} + \mathrm{Ad}(g) + \cdots + \mathrm{Ad}(g)^{n-1}) = \mathrm{im}(\mathrm{Ad}(g) - \mathbf{1}).$$

证明 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$。提示：对于 $z \in \mathbb{C}$，$(z^n - 1) = (z - 1)(z^{n-1} + \cdots + z + 1)$，且 $\mathrm{Ad}(g)$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的复线性扩张是可对角化的。

(2) 对于映射

$$F \colon \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to G, \quad F(x, y) := \exp(y) g \exp(x) \exp(-y)$$

存在开零邻域 $U_{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}$ 和 $U_{\mathfrak{b}} \subseteq \mathfrak{b}$，使得 $F|_{U_{\mathfrak{a}} \times U_{\mathfrak{b}}}$ 是到 G 的一个开子集上的微分同胚。提示：证明

$$T_{(x,y)}(F)(v, w) = g.(v + \mathrm{Ad}(g)^{-1} w - w)$$

并使用反函数定理。

(3) 若 $U_{\mathfrak{a}}$ 足够小，且 $(x, y) \in U_{\mathfrak{a}} \times U_{\mathfrak{b}}$，则 $F(x, y) \in E_n(G)$ 等价于 $x = 0$。

(4) 推出 $E_n(G)$ 是 G 的子流形，并且 G_0-共轭轨道是 $E_n(G)$ 的连通分支。

第5.7节 第5章的注释与评论

在对李群的讨论中，我们基本上遵循 [Mil82、Mil84], ，但与流形一样，我们不假设李群的模型空间是完备的（[Gl02a]）。

第5.3节： 定理 5.3.1 是关于有限维群的一个经典结果的无限维版本（参见 [Ch46], §14，命题 2；或 [Ti83],第14页）。**第5.6节：** 命题 5.6.17 归功于 Michor/Teichmann（[MT99]）。

我们对指数函数导数的介绍受到 Grabowski 论文 [Grb93] 的启发。注 5.6.23中关于巴拿赫代数指数函数微分的公式，早已出现在 Michael 的论文 [MicA45] 中，而更早的版本已经发表于 [Kn30]。

[1] 关于有限维李群的情形，参见 [AW08] 。

指数函数的整体性质，尤其是其满射性问题，是一个相当复杂的问题，很大程度上取决于所考虑群的具体性质（参见 [Wue03, Wue05]）。

对于有限维李群，最基本的一般性结果是：若G 是李代数 $\mathfrak{g}$为紧的连通李群，则 $\exp_G$ 是满射（[Ho65]）。由于 $\mathfrak{g}$的紧致性等价于存在一个在 $\mathrm{Ad}(G)$下不变的标量积 $\mathfrak{g}$，进而可在 G上得到双不变黎曼度量，因此，$\exp_G$ 的满射性可由黎曼几何中的霍普夫–里诺定理或极大环面定理推出；该定理断言，每个紧李群都是其极大环面的并集。

将紧李代数的概念自然推广到巴拿赫空间背景，可将实巴拿赫–李代数 $(\mathfrak{g}, \|\cdot\|)$ 称为椭圆的，如果 $\mathfrak{g}$ 上的范数在内自同构群 $\mathrm{Inn}(\mathfrak{g}) := \langle e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$的作用下不变（参见 [Ne02c，定义 IV.3]）。有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 关于某个范数是椭圆的，当且仅当它是紧的。在这种情况下，要求存在不变标量积会得到相同的李代数类；但在无限维背景下，情况则不同。此处，存在一个不变标量积使 $\mathfrak{g}$ 成为实希尔伯特空间，由此得到希尔伯特–李代数的结构，或者说，紧型 L^*-代数的结构。简单希尔伯特–李代数可以分类，而且每个希尔伯特–李代数都是由简单理想及其中心构成的希尔伯特空间直和（参见 [Sc60], [Sc61], [dlH72], [CGM90], [Neh93], [St99]）。特别是，分类结果表明，每个希尔伯特–李代数都可以实现为复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上斜厄米–施密特算子所构成的希尔伯特–李代数 $\mathfrak{u}_2(\mathcal{H})$的闭子代数。

椭圆李代数的范围要大得多。它包含任意 C^*代数 $\mathcal{A}$ 的斜厄米元素构成的代数$\mathfrak{u}(\mathcal{A})$，尤其包含希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的全酉群$\mathrm{U}(\mathcal{H})$的李代数 $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$。

虽然李代数紧的有限维连通李群具有满射指数函数，但对于具有椭圆李代数的连通巴拿赫–李群，这一点不再成立。这是 Putnam 和 Winter 在 [PW52]中发现的一个相当引人注目的现象：实无限维希尔伯特空间的正交群$\mathrm{O}(\mathcal{H})$是一个具有椭圆李代数的连通巴拿赫–李群，但它的指数函数并不是满射。事实上，超平面 $E \subseteq \mathcal{H}$ 上的反射 $g \in \mathrm{O}(\mathcal{H})$不属于指数像，因为任何 $X \in \mathfrak{o}(\mathcal{H})$若满足$e^X = g$，就与$g$交换，因此 $X^\top = -X$ 和 $\dim E^\perp = 1$ 导出 $X|_{E^\perp} = 0$，这与$g|_{E^\perp} = -\mathrm{id}$矛盾。这与复希尔伯特空间上的酉群$\mathrm{U}(\mathcal{H})$的指数函数总是满射这一事实形成对比。

巴拿赫空间的离散子群： 李群的离散中心子群，尤其是巴拿赫空间的离散子群，在李理论中发挥着重要作用。ADG对闭子群，特别是离散子群进行了系统研究。在此背景下，以下内容具有根本重要性：

对巴拿赫空间中的离散子群，尤其是离散子群的系统研究已在 [ADG94]中展开。在这一背景下，以下内容具有根本重要性：

定理 5.7.1。 ([ADG94，定理 1。1]) 对于可分完备度量拓扑向量空间 E 的闭子群 Γ，以下条件等价：

(a) Γ 是离散的。(b) Γ 是局部紧的且不含直线。(c) Γ 是可数的。(d) $\Gamma \cong \mathbb{Z}^{(J)}$ 对某个集合 J 成立，即 Γ 是自由阿贝尔群。

论文 [ADG94] 还包含关于序列空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的闭子群的结果，这些结果后来被纳入 K.H.Hofmann 和 S. Morris 在有限维李群的射影极限背景下建立的弱完备空间（形如 $\mathbb{R}^J$、 J 为某个集合的空间）的系统对偶理论（[HoM07]）。我们还提及 [ADG94，定理 4]，其中断言：巴拿赫空间 E 含有闭的、非离散的全不连通子群，当且仅当它包含 $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ 的一个副本，即零序列空间。一个方向很容易看出，因为对于每个序列$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$，子群

$$\Gamma := \{b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \colon (\forall n \in \mathbb{N})\, b_n \in \mathbb{Z}a_n\} \subseteq c_0$$

是 c_0 的一个非离散、弱闭且闭的全不连通子群。**满态射：** 若巴拿赫–李群之间的态射 $f\colon G \to H$ 满足：对于任意两个巴拿赫–李群之间的态射 h_1、$h_2\colon H \to L$，只要 $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ 成立，就有 $h_1 = h_2$ 成立，则称其为满态射。每个值域稠密的态射都是满态射，但也有许多有趣的满态射值域并不稠密，例如将博雷尔子群包含到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 中的包含映射（[PU21，定理 6.3]）。关于无限维群的若干范畴中满态射的最新讨论，参见 [PU21]。

6 正则李群

由于常微分方程的基本理论完全适用于巴拿赫流形，对于任意巴拿赫–李群 G 以及任意连续曲线ξ: $[0,1] \to \mathbf{L}(G)$，初值问题

$$\gamma(0) = e, \quad \gamma'(t) = \gamma(t)\xi(t) \tag{6.1}$$

存在唯一解（符号说明见定义 5.2.3）。除了巴拿赫–李群这一类之外，没有一般性结果能够保证此类初值问题存在解，即使对于常数曲线 ξ 也是如此。一方面，对于许多特定类别的李群，可以根据所考虑的群，通过直接方法证明方程 (6.1) 存在解。另一方面，我们不知道有任何一个以麦基完备空间为模型的李群 G，使得对于某条光滑曲线 ξ，方程 (6.1) 没有解。本章引入的正则李群概念，为处理这一问题提供了自然的公理化背景。

特别是，我们将看到，如何利用李群的正则性，将微积分基本定理推广到李群值光滑函数；该推广刻画了连通流形 M 上所有由 G 值光滑函数的对数导数产生的$\mathbf{L}(G)$值 1-形式。

由此可以解决许多可积性问题。例如，对于从单连通李群 G 的李代数到正则李群 H 的李代数的每个连续李代数同态 ψ: $\mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$，都存在唯一的李群态射 φ，满足 $\mathbf{L}(\varphi) = \psi$。一个重要的推论是，所有具有相同李代数的单连通正则李群作为李群彼此同构。

所有巴拿赫–李群，以及所有由麦基完备向量空间模离散子群得到的李群商群，都是正则的；反过来，正则李群的李代数是麦基完备的。不过，目前尚未发现任何以麦基完备空间为模型的非正则李群。

记号： 在本章中，我们记 $I := [0,1]$，而 $C^k_*(I, G)$ 表示从 G 出发的所有 C^k-路径的集合。

预备知识： 第 1.1–1.3 节和第 1.6 节，以及第 3 章和第 5 章。

6.1 正则性与基本定理

本节将介绍如何利用李群的正则性，为李群值光滑函数建立微积分基本定理。这将为许多可积性问题提供解。例如，对于从连通单连通李群 G 的李代数到正则李群 H的李代数的每个同态 $\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$，都存在唯一的李群态射 φ，满足 $\mathbf{L}(\varphi) = \psi$。

6.1.1 正则李群

我们将引入一系列正则性条件，称为 C^k-正则性，其中对于 $k \leq r$，C^r-正则性由 C^k-正则性推出。这些概念中最重要的是 C^∞-正则性，由 J. Milnor 在[Mil82]中引入。讨论更强的 C^k-正则性概念，主要是因为它们能提供额外信息，在应用中尤为有用。唯一性引理 5.5.4 以及对数导数的乘积与商法则（引理 5.5.3）都至关重要。它们同样适用于 C^{k+1}-函数（带有 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$），证明完全相同。在这种情况下，对数导数是一个$C^k$类的李代数值 1-形式。将其应用于 C^{k+1}-路径 $\gamma\colon [0,1] \to G$时，对数导数会给出一个 C^k形式，可以将其识别为 C^k-路径 $\delta(\gamma)\colon [0,1] \to \mathfrak{g}, t \mapsto \gamma(t)^{-1}\dot{\gamma}(t)$，其中使用的是由左平移继承的 G 在 TG 上的光滑左作用。

定义 6.1.1. 设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。李群 G（其李代数为 $\mathfrak{g}$）称为 C^k-半正则，如果对于每个 $\xi \in C^k(I, \mathfrak{g})$，初值问题

$$\gamma(0) = e, \quad \delta(\gamma) = \gamma^{-1}\dot{\gamma} = \xi \tag{6.2}$$

存在解 γ_ξ，且该解属于 $C^{k+1}(I, G)$。此外，如果相应的演化映射

$$\mathrm{evol}_G\colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to G, \quad \xi \mapsto \gamma_\xi(1)$$

是光滑的，则称 G 为 C^k-正则。根据唯一性引理 5.5.4，方程 (6.2) 的解只要存在就是唯一的。如果 G 是 C^k-半正则的，我们记

$$\mathrm{Evol}_G\colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}(I, G), \quad \xi \mapsto \gamma_\xi$$

为相应的李群值曲线层面上的映射。如果 G 可由上下文确定，我们就简化记号，也用 evol 和 Evol 分别代替 evol_G 和 Evol_G。群 G 称为正则，如果它是 C^∞-正则的。

注 6.1.2. (a) 任意正则李群 G都有一个光滑指数函数

$$\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G \quad \text{by} \quad \exp_G(x) := \gamma_x(1),$$

其中 $x \in \mathfrak{g}$ 被视为一个常值函数 $I \to \mathfrak{g}$。指数函数是光滑函数 evol_G 在常值函数的拓扑子空间 $\mathfrak{g} \subseteq C^\infty(I, \mathfrak{g})$ 上的限制，因此它是光滑的。

(b) 假设 G 是 C^k-半正则的。对于 $\xi \in C^k(I,\mathfrak{g})$、$0 \le s \le 1$ 和 $\eta(t) := \gamma_\xi(st)$，有 $\delta(\eta)(t) = s\xi(st)$。因此，我们得到关系 $S(\xi,s)(t) := s\xi(st)$

$$\mathrm{Evol}_G(\xi)(s) = \gamma_\xi(s) = \mathrm{evol}_G(S(\xi,s)).$$

若 $k=\infty$ 和 G 正则，下面证明我们可以得到一个光滑映射

$$C^\infty(I,\mathfrak{g}) \times I \to G, \quad (\xi,s) \mapsto \mathrm{Evol}(\xi)(s).$$

为了验证这一断言，我们需要验证映射的光滑性

$$S\colon C^\infty(I,\mathfrak{g}) \times I \to C^\infty(I,\mathfrak{g}), \quad S(\xi,s)(t) := s\xi(st)$$

由于求值映射 $\mathrm{ev}: I\times C^\infty(I,\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ 是光滑的（命题 4.1.15），映射

$$I \times C^\infty(I,\mathfrak{g}) \times I \to \mathfrak{g}, \quad (s,\xi,t) \mapsto s\xi(st)$$

也光滑。由此可推出 S 是光滑的（命题 4.1.21）。

(c) 对于 $k \le r$，李群 G 的 C^k-正则性蕴含其 C^r-正则性，因为包含映射 $C^r(I,\mathfrak{g}) \to C^k(I,\mathfrak{g})$ 是连续线性的，因而是光滑的。

我们将在下文的定理 6.3.4 中看到，巴拿赫–李群是正则的；并将在命题 6.3.2 中看到，正则李群的李代数是麦基完备的。由于证明这些事实需要一些关于第 6.2 节中介绍的映射群的更多信息，我们先仔细考察较简单的阿贝尔群情形。

命题 6.1.3. 设 E 是一个局部凸空间，且 $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$。那么李群 $(E,+)$ 是 C^k-正则的，当且仅当 E 是麦基完备的。

证明。 如果 $(E,+)$ 是 C^k-正则的，那么对于每条光滑曲线 $\xi\colon [0,1] \to E$，都存在一条光滑曲线 $\eta\colon [0,1] \to E$，使得 $\eta' = \xi$，因此 E 是麦基完备的。

反之，如果 E 是麦基完备的，那么每条 C^1-曲线 $\xi\colon [0,1] \to E$ 都有积分，由此得到一个连续线性映射

$$\mathcal{I}\colon C^k(I,E) \to C^{k+1}_*(I,E), \quad \xi \mapsto \Big(t \mapsto \int_0^t \xi(s)\,ds\Big).$$

现在，$\mathrm{evol}_E(\xi) = \mathcal{I}(\xi)(t)$ 意味着 $(E,+)$ 的 C^k-正则性。 □

下面的引理是一个有效工具，可根据局部数据验证李群的正则性。

引理 6.1.4。（局部正则性判据）设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。假设对于开集 ξ 中的每个 ξ，（6.2）都有解。若其解存在于开0邻域 $U \subseteq C^k([0,1],\mathfrak{g})$，则它对每个 $\xi \in C^k([0,1],\mathfrak{g})$ 都有解。若演化映射

$$\mathrm{evol}_G\colon C^k([0,1],\mathfrak{g}) \to G, \quad \xi \mapsto \gamma_\xi(1)$$

关于 U 光滑，则它在整个 $C^k([0,1],\mathfrak{g})$ 上都光滑。

证明。设 $\xi \in C^k([0,1],\mathfrak{g})$。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{0,\dots,n-1\}$，我们定义

$$\xi_i^n \in C^k([0,1],\mathfrak{g}) \quad \text{by} \quad \xi_i^n(t) := \frac{1}{n}\xi\Big(\frac{i+t}{n}\Big).$$

于是对每个 $m \le k$，都有：

$$\frac{d^m}{dt^m}\xi_i^n(t) = \frac{1}{n^{m+1}}\xi^{(m)}\Big(\frac{i+t}{n}\Big).$$

我们得出，对于 $n \to \infty$，序列 $\frac{d^m}{dt^m}\xi_i^n$ 在 $C^0([0,1],\mathfrak{g})$ 中一致地趋于 0（关于 i），因此 ξ_i^n 在 $C^k([0,1],\mathfrak{g})$ 中一致地趋于 0（关于 i）。特别地，存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得对于 $i = 0,\ 1,\ \dots\dots,\ N-1,\ \ \xi_i^N \in U$。

我们定义一条路径 $\gamma_\xi\colon\ [0,1] \to G$ 如下

$$\gamma_\xi(t) := \gamma_{\xi_0^N}(1)\cdots\gamma_{\xi_{i-1}^N}(1)\gamma_{\xi_i^N}(nt-i) \quad \text{for} \quad \frac{i}{n} \le t \le \frac{i+1}{n}$$

并注意到 $\delta(\gamma_\xi)$ 在整个 $[0,1]$ 上都有定义，且等于 ξ。现在我们令

$$\mathrm{Evol}_G(\xi) := \gamma_\xi \quad \text{and} \quad \mathrm{evol}_G(\xi) := \gamma_\xi(1).$$

由于对于每个 i，赋值 $\xi \mapsto \xi_i^N$是线性且连续的，因此存在 ξ 的一个开邻域 V，使得对于每个 $\eta \in V$和 $i = 0,\ 1,\ \dots\dots,\ N-1,\ \ \eta_i^N \in U$ 成立。只需证明 evol_G 在 V上是光滑的，而这可由以下事实推出：

$$\mathrm{evol}_G(\eta) = \mathrm{evol}_G(\eta_0^N)\cdots\mathrm{evol}_G(\eta_{N-1}^N)$$

是 N 个光滑函数的乘积。 □

前述引理表明，李群的正则性是一个局部性质。因此，它立即推出：

命题 6.1.5. 设 $\varphi\colon\ G \to H$ 是李群的覆盖态射。如果其中一个群是某个 $k \in \mathbb{N}_0$ 意义下的 C^k-正则群，那么另一个群也同样是 C^k-正则群。特别地，C^k-正则李群的万有覆盖群是 C^k-正则的。

6.1.2 李群值函数的基本定理

定义 6.1.6. 设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ =**L(**G**)**。如果存在一个光滑函数f: $M \to G$，使得 $\delta(f) = \alpha$，则称一个取值于 $\mathfrak{g}$ 的 1-形式 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 可积。若每个点 $m \in M$ 都有一个开邻域 U，使得 $\alpha|_U$ 可积，则称 1-形式 α 为局部可积。

现在我们转而为证明取值于李群 G （其李代数为 $\mathfrak{g}$）的函数的基本定理做准备。

引理 6.1.7。 若 G 是 C^k-正则的， $x \in \mathfrak{g}$ 且 $\xi \in C^k([0,1], \mathfrak{g})$，则初值问题

$$\eta'(t) = [\eta(t), \xi(t)], \quad \eta(0) = x \tag{E1}$$

有唯一解，其表达式为

$$\eta(t) = \mathrm{Ad}(\gamma_\xi(t))^{-1} x. \tag{E2}$$

证明。 对于 γ（t）：$= \gamma_\xi$（t），由引理 5.5.3(i) 得

$$\delta(\gamma^{-1})_t = -\mathrm{Ad}(\gamma(t))\delta(\gamma)_t = -\mathrm{Ad}(\gamma(t))\xi(t).$$

我们用 (E2) 定义 η。那么 η 是一个 C^{k+1}曲线，满足

$$\eta'(t) \ = \mathrm{Ad}(\gamma(t))^{-1}[-\mathrm{Ad}(\gamma(t))\xi(t), x] = [\mathrm{Ad}(\gamma(t))^{-1}x, \xi(t)] = [\eta(t), \xi(t)]$$

（命题 5.2.5）。

现在令 β 为 (E1) 的任意一个解，并考虑曲线

$$\zeta(t) := \mathrm{Ad}(\gamma(t))\beta(t).$$

那么 $\zeta(0) = \beta(0) = x$，由命题 5.2.5 可得

$$\begin{aligned} \zeta'(t) \ &= \mathrm{Ad}(\gamma(t))[\delta(\gamma)_t, \beta(t)] + \mathrm{Ad}(\gamma(t))\beta'(t) \\ &= \mathrm{Ad}(\gamma(t))\big([\xi(t), \beta(t)] + \beta'(t)\big) = 0. \end{aligned}$$

因此， ζ 是等于 x的常数，我们得到

$$\beta(t) = \mathrm{Ad}(\gamma(t))^{-1}\zeta(t) = \mathrm{Ad}(\gamma(t))^{-1}x = \eta(t). \qquad \square$$

在转向更一般的情形之前，我们先仔细考察光滑函数 $I^2 \to G$，其中 $I = [0,1]$ 是单位区间。

引理 6.1.8。 (i)一个光滑的 $\mathfrak{g}$ 值1形式

$$\alpha = v\,dx + w\,dy \in \Omega^1(I^2, \mathfrak{g}) \quad \textit{with} \quad v, w \in C^\infty(I^2, \mathfrak{g})$$

满足 *Maurer–Cartan* 方程当且仅当

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} = [v, w]. \tag{6.3}$$

(ii)假设 α 满足 *Maurer–Cartan* 方程。

(a)若 $f\colon I^2 \to G$ 光滑，且 $\delta(f)(\partial_y) = w$，并且对 $x \in I$ 成立 $\delta(f)(\partial_x)(x,0) = v(x,0)$，则 $\delta(f) = \alpha$。

(b) 由下式定义的光滑函数 $f\colon I^2 \to G$:

$$f(x,0) := \gamma_{v(\cdot,0)}(x) \quad and \quad f(x,y) := f(x,0) \cdot \gamma_{w(x,\cdot)}(y)$$

满足 $\delta(f) = \alpha$。

证明。 (i) 为了计算 α 的 Maurer–Cartan 方程，我们首先注意到

$$\tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha]\big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\big) = \Big[\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big),\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big] = [v,w],$$

并得到

$$\begin{aligned} d\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha] &= \frac{\partial v}{\partial y} dy\wedge dx + \frac{\partial w}{\partial x} dx\wedge dy + [v,w]dx\wedge dy \\ &= \big(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + [v,w]\Big)dx\wedge dy. \end{aligned}$$

(ii) (a) 我们记

$$\delta f = \widehat{v}dx + wdy \quad \text{with} \quad \widehat{v}(x,0) = v(x,0) \quad \text{for} \quad x \in I.$$

δf 的 Maurer–Cartan 方程为

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} = [\widehat{v},w],$$

因此，用 (6.3) 减去该方程可得

$$\frac{\partial(v-\widehat{v})}{\partial y} = [v-\widehat{v},w].$$

由于 $(v-\widehat{v})(x,0) = 0$，将引理 6.1.7 的唯一性断言应用于$\eta_x(t) := (v-\widehat{v})(x,t)$，可知 $(v-\widehat{v})(x,y) = 0$对所有 $x,y \in I$均成立，进而得到 $v = \widehat{v}$，这意味着 $\delta(f) = vdx + wdy = \alpha$。

(b) 由于映射 $I \to C^\infty(I,\mathfrak{g})\ x \mapsto w(x,\cdot)$ 是光滑的（命题 4.1.21），注 6.1.2(b) 蕴含 f 是一个光滑函数。根据构造，它满足 (a) 的假设，因此 $\delta(f) = \alpha$。□

引理 6.1.9。设 U 是局部凸空间 E的一个开凸子集，G 是李代数为 $\mathfrak{g}$ 的正则李群，并且 $\alpha \in \Omega^1(U,\mathfrak{g})$ 满足 *Maurer–Cartan* 方程。那么 α 是可积的。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $x_0 = 0 \in U$。对于 $x \in U$，接下来考虑光滑曲线

$$\xi_x\colon I \to \mathfrak{g}, \quad t \mapsto \alpha_{tx}(x).$$

那么映射 $U \to C^\infty(I, \mathfrak{g})$, $x \mapsto \xi_x$ 是光滑的，因为映射

$$U \times I \to \mathfrak{g}, \quad (x,t) \mapsto \xi_x(t)$$

是光滑的（命题 4.1.21）。因此该函数

$$f\colon U \to G, \quad x \mapsto \operatorname{evol}(\xi_x)$$

是光滑的。

首先我们证明，对每个 $s \in I$, $f(sx) = \gamma_{\xi_x}(s)$ 成立。由注 6.1.2 可得

$$S(\xi_x, s)(t) = s\xi_x(st) = \alpha_{stx}(sx) = \xi_{sx}(t),$$

由此得到 $f(sx) = \gamma_{\xi_{sx}}(1) = \gamma_{\xi_x(s\cdot)}(1) = \gamma_{\xi_x}(s)$。

对于 $x, x+h \in U$，我们考虑光滑映射

$$\beta\colon I \times I \to U, \quad (s,t) \mapsto t(x+sh)$$

以及光滑函数 $F := f \circ \beta$。于是前述考虑蕴含$F(s,0) = f(0) = e$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) &= \frac{d}{dt} f(t(x+sh)) = \frac{d}{dt}\gamma_{\xi_{x+sh}}(t) = F(s,t)\xi_{x+sh}(t) \\ &= F(s,t)\alpha_{t(x+sh)}(x+sh) = F(s,t)(\beta^*\alpha)_{(s,t)}\big(\frac{\partial}{\partial t}\big).\end{aligned}$$

正如我们在引理 6.1.8(ii) 中所见，这些关系导致

$$\delta(F) = \beta^*\alpha \quad \text{on} \quad I \times I.$$

因此我们得到

$$\frac{\partial}{\partial s} f(x+sh) = \frac{\partial}{\partial s} F(s,1) = F(s,1)\alpha_{x+sh}(h) = f(x+sh)\alpha_{x+sh}(h),$$

并且对于 $s = 0$，这导致 $T_x(f)(h) = f(x)\alpha_x(h)$,从而 $\delta(f) = \alpha$。 □

命题 6.1.10.设 M 为连通流形， G 为具有李代数 $\mathfrak{g}$ 的李群，且 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 为1-形式。若 α 局部可积，则$\widehat{\ }$存在连通覆盖 $q\colon M \to M$，使得 $q^*\alpha$ 可积。此外，若 M 单连通，则 α 可积。

证明。 我们考虑乘积集 $P := M \times G$ 及其两个投影映射 $F\colon P \to G$和 $q\colon P \to M$。我们如下定义 P上的拓扑。对于每一对(U, f)，其中 $U \subseteq M$是一个开子集，$f\colon U \to G$是一个光滑函数，且 $\delta(f) = \alpha|_U$，图 $\Gamma(f, U) := \{(x, f(x)) : x \in U\}$是 P的一个子集。

步骤 1：我们断言，集合 $\Gamma(f,U)$构成P上的拓扑 τ的一组基。事实上，设 $p=(m,g)\in\Gamma(f_1,U_1)\cap\Gamma(f_2,U_2)$。我们选取一个包含于 $U_1\cap U_2$且包含 m的连通开邻域 U。那么，$f_1(m)=f_2(m)=g$以及 $\delta(f_1|_U)=\delta(f_2|_U)=\alpha|_U$ 蕴含 U 上的 $f_1=f_2$（引理 5.5.4），因此$p\in\Gamma(f_1|_U,U)\subseteq\Gamma(f_1,U_1)\cap\Gamma(f_2,U_2)$。这就证明了我们的断言。我们赋予 P拓扑 τ。

步骤 2：τ 是豪斯多夫的：显然，投影 $q\colon P\to M$ 关于 τ是连续的。因此，只需证明两个不同的点 (m,g_1)、$(m,g_2)\in P$可以被开子集分离。若 U是 m 的一个连通开邻域，且 α 在其上可积，则可找到一个光滑函数 $f_1\colon U\to G$，使得 $f_1(m)=g_1$ 且 $\delta(f_1)=\alpha$。现在，$f_2:=g_2g_1^{-1}f_1$满足 $f_2(m)=g_2$且 $\delta(f_2)=\alpha$。因此，$\Gamma(f_1,U)$ 是 (m,g_1) 的一个开邻域，而 $\Gamma(f_2,U)$ 是 (m,g_2) 的一个开邻域。若二者相交，则存在一点 $x\in U$，使得 $f_1(x)=f_2(x)$，于是 U的连通性意味着 $f_1=f_2$，这与 $g_1\neq g_2$ 矛盾（引理 5.5.4）。因此，P是豪斯多夫的。

步骤 3： 限制 $q|_{\Gamma(f,U)}$ 是同胚。我们已经知道，q是连续的。令 $\sigma:=(\mathrm{id}_U,\ f)\colon U\to\Gamma(f,\ U)\subseteq P$。于是，对于每个基本邻域 $\Gamma(g,\ V)$，有

$$\sigma^{-1}(\Gamma(g,V))=\{x\in U\cap V\colon f(x)=g(x)\}.$$

根据引理 5.5.4 的唯一性断言，后一个集合是开的，因此 σ 是连续的。现在 $q\circ\sigma=\mathrm{id}_U$ 意味着，$q|_{\Gamma(f,U)}$ 是到 U 上的同胚。

步骤 4： 映射 $q\colon P\to M$是一个覆盖：令 $x\in M$。由于 α是可积的，存在 x 的一个连通开邻域 U_x，使得 $\alpha|_{U_x}$是可积的。于是，对每个 $g\in G$，存在一个光滑函数 $f_g\colon U_x\to G$，满足 $f_g(x)=g$且 $\delta(f_g)=\alpha|_U$。现在，正如我们在步骤 1 中所见，$q^{-1}(U)=U\times G=\bigcup_{g\in G}\Gamma(f_g,\ U)$ 是 P的开子集的不交并；而在步骤 3 中，我们已经看到，它在这些集合中的每一个上的限制都是同胚。因此，q 是一个覆盖。

步骤 5： 由此，根据定理 3.2.10(a)，我们得出 P 具有自然流形结构，使得 q 是一个局部微分同胚。对于这一流形结构，函数 $F\colon P\to G$ 是光滑的，因为对于每个基本开子集 $\Gamma(f,\ U)$，U连通，相应限制映射的逆映射由下式给出：

$$\sigma_{(f,U)}:=(q|_{\Gamma(f,U)})^{-1}\colon U\to\Gamma(f,U),\quad x\mapsto(x,f(x)),$$

并且 $F\circ\sigma_{(f,U)}=f$是光滑的。此外，$f\circ q=F|_{\Gamma(f,U)}$推出

$$\delta(F)=q^*\delta(f)=q^*\alpha$$

在每个集合 $\Gamma(f,\ U)$ 上成立，因此在整个 P 上也成立。

取定一点 $m_0\in M$。那么，P中（$m_0,\ e$）的连通分支 M是具有所需性质的 M 的连通覆盖流形。如果

此外， M 是单连通的，那么 q 是平凡覆盖，因而是一个微分同胚，且 α 是可积的。□

令 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$。若 $\gamma\colon I=[0,1]\to M$ 是分段光滑环路，则$\gamma^*\alpha \in \Omega^1(I, \mathfrak{g}) \cong C^\infty(I, \mathfrak{g})$，因此 $\mathrm{evol}_G(\gamma^*\alpha) \in G$ 有定义，因为假设 G 是正则的。

引理 6.1.11. 假设 M 连通，且 $\alpha \in \Omega^1(M,\mathfrak{g})$ 局部可积。取 $m_0 \in M$。那么，元素 $\mathrm{evol}_G(\gamma^*\alpha)$ 在端点固定的同伦下保持不变，并且

$$\mathrm{per}_\alpha^{m_0}\colon \pi_1(M,m_0)\to G,\quad [\gamma]\mapsto \mathrm{evol}_G(\gamma^*\alpha)$$

是一个群同态。

证明。令 $q_M\colon M\to M$ 表示 M 的单连通覆盖流形，并取一个基点 $\widetilde{m}_0 \in M$，使得 $q_M(\widetilde{m}_0) = m_0$。那么， $\mathfrak{g}$ 值的1-形式 $q_M^*\alpha$ 在 M 上也满足 Maurer–Cartan 方程，因此命题 6.1.10 $f\colon M\to G$ 推出存在唯一的光滑函数 $\widetilde{\delta}(f) = q_M^*\alpha$ 且 $f(\widetilde{m}_0) = e$。

我们记

$$\sigma\colon \pi_1(M,m_0)\times \widetilde{M}\to \widetilde{M},\quad (d,m)\mapsto d.m=\sigma_d(m)$$

表示基本群 $\pi_1(M,m_0)$ 在 M 上的左作用。于是

$$\delta(\widetilde{f}\circ\sigma_d)=\sigma_d^*q_M^*\alpha=q_M^*\alpha=\delta(\widetilde{f})$$

对每个 $d\in\pi_1(M,m_0)$，都蕴含一个函数的存在性

$$\chi\colon \pi_1(M,m_0)\to G\quad \text{with}\quad \widetilde{f}\circ\sigma_d=\chi(d)\cdot\widetilde{f},\quad d\in\pi_1(M,m_0).$$

对于 $d_1,d_2\in\pi_1(M,m_0)$，我们于是有

$$\widetilde{f}\circ\sigma_{d_1d_2}=\widetilde{f}\circ\sigma_{d_1}\circ\sigma_{d_2}=(\chi(d_1)\cdot\widetilde{f})\circ\sigma_{d_2}=\chi(d_1)\cdot(\widetilde{f}\circ\sigma_{d_2})=\chi(d_1)\chi(d_2)\cdot\widetilde{f},$$

因此 χ 是一个群同态。

现在我们选取一个分段光滑的 $\widetilde{\gamma}\colon I\to M$，满足 $q_M\circ\widetilde{\gamma}=\gamma$，并注意到

$$\delta(\widetilde{f}\circ\widetilde{\gamma})=\widetilde{\gamma}^*\delta(\widetilde{f})=\widetilde{\gamma}^*q_M^*\alpha=\gamma^*\alpha,$$

因此

$$\chi([\gamma])=\widetilde{f}([\gamma].\widetilde{m}_0)=\widetilde{f}(\widetilde{\gamma}(1))=\mathrm{evol}_G(\gamma^*\alpha).$$

证明到此结束。 □

定义 6.1.12。 对于每个局部可积的 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$，同态

$$\mathrm{per}_\alpha := \mathrm{per}_\alpha^{m_0} \colon \pi_1(M, m_0) \to G \quad \text{with} \quad \mathrm{per}_\alpha^{m_0}([\gamma]) = \mathrm{evol}_G(\gamma^*\alpha),$$

对于每个分段光滑回路 $\gamma\colon\ I \to M$ 属于 m_0，称为 关于 的周期同态。

下面的定理是针对取值于正则李群的函数的微积分基本定理的一个版本。

定理 6.1.13（李群值函数的基本定理）。设 M 为一个光滑流形， G 为一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $\alpha \in \Omega^1(M,\ \mathfrak{g})$。则以下断言成立：

(i)若 G 正则，则 α 局部可积当且仅当它满足 *Maurer–Cartan* 方程。(ii)若 α 局部可积，则(a)若 M 是1-连通的，则 α 可积。(b) 若 M 连通且 $m_0 \in M$，则$\mathrm{per}_\alpha^{m_0}$ 消失当且仅当 α 可积。

证明。(i) 若 α 局部可积，则由引理 5.5.5 可知它满足 Maurer–Cartan 方程。反过来，若它满足 Maurer–Cartan 方程，则由引理 6.1.9 可知它局部可积，前提是 G 正则。

(ii) (a) 是命题 6.1.10。

(ii) (b) 在引理 6.1.11 的证明中构造的函数 $\widetilde{f}$ 可通过 M 上的一个光滑函数分解，当且仅当周期同态平凡。这就推出了 (b)。□

推论 6.1.14。 设 M 是一个光滑连通流形， E 是一个 *Mackey* 完备的局部凸空间， $\Gamma \subseteq E$ 是一个离散子群， $G := E/\Gamma$，且$\alpha \in \Omega^1(M, E)$。则以下断言成立：

(i) α 局部可积，当且仅当 α 是闭的。(ii) α 可积为一个光滑的 G值函数，当且仅当 α 沿分段光滑回路的所有积分都包含在 Γ 中。

证明。 证明中只需注意到，命题 6.1.3 表明G是正则的，且 $\mathrm{evol}_G(\xi) = q_G\big(\int_0^1 \xi(s)\ ds\big)$。□

注 6.1.15。(a) 如果 M 是一维的，那么 M 上每个取值于 $\mathfrak{g}$ 的 2-形式都为零，因此

$$[\alpha, \beta] = 0 = d\alpha$$

对于 $\alpha, \beta \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$。因此，所有 1-形式都平凡地满足 Maurer–Cartan 方程。

(b) 若 M 是复流形， G是复正则李群，且 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 是全纯1-形式，那么对于任意满足 $\delta(f) = \alpha$ 的光滑函数 $f\colon M \to G$， f 的微分在每一点都是复线性的，因此f 是全纯的。反过来，任意全纯函数 f 的对数导数都是全纯1-形式。

此外，若 M 是一条复曲线，即一维复流形， G 是复正则李群，且 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 是全纯1-形式，那么与 (a) 中相同的论证表明，全纯2-形式 $[\alpha, \alpha]$ 和 $d\alpha$ 为零，因此 Maurer–Cartan 方程自动成立。

下面的定理是引入正则李群概念的核心动机之一。

定理 6.1.16（积分定理——正则情形）。若 H 是正则李群， G 是 *1*-连通李群，且 $\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ 是李代数的连续同态，则存在唯一的李群同态 $\varphi\colon G \to H$，满足 $\mathbf{L}(\varphi) = \psi$。

证明。 唯一性断言由命题 5.5.7 得出，且不需要 H的正则性。

在 G 上，我们考虑由 $\alpha := \psi \circ \kappa_G$给出的光滑$\mathbf{L}(H)$值 1-形式。它满足 Maurer–Cartan 方程，这一点由下式可知

$$d\alpha = \psi \circ d\kappa_G = -\tfrac{1}{2}\psi \circ [\kappa_G, \kappa_G] = -\tfrac{1}{2}[\psi \circ \kappa_G, \psi \circ \kappa_G] = -\tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha].$$

因此，基本定理蕴含存在唯一的光滑函数 $\varphi\colon G \to H$，满足 $\delta(\varphi) = \alpha$且 $\varphi(e_G) = e_H$。鉴于命题 5.5.11，函数 φ 是李群态射，并且显然有$\mathbf{L}(\varphi) = \alpha_e = \psi$。□

推论6.1.17。如果 G_1 和 G_2 是具有同构李代数的正则1-连通李群，那么 G_1 和 G_2 同构。

证明。 设 $\psi\colon \mathbf{L}(G_1) \to \mathbf{L}(G_2)$是一个李代数同构。则存在唯一的李群态射 $\varphi\colon G_1 \to G_2$，使得 $\mathbf{L}(\varphi) = \psi$；同理，存在一个态射 $\widehat{\varphi}\colon G_2 \to G_1$，使得 $\mathbf{L}(\widehat{\varphi}) = \psi^{-1}$。于是$\mathbf{L}(\varphi\circ\widehat{\varphi}) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G_2)}$和$\mathbf{L}(\widehat{\varphi}\circ\varphi) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G_1)}$推出 $\widehat{\varphi}\circ\varphi = \mathrm{id}_{G_1}$ 和 $\varphi\circ\widehat{\varphi} = \mathrm{id}_{G_2}$（命题 5.5.7）。因此 φ是李群同构。□

推论 6.1.18。 如果 G是一个1-连通正则李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，那么

$$\mathbf{L}\colon \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), \quad \varphi \mapsto \mathbf{L}(\varphi)$$

是一个群同构。

定理6.1.19（具有相同李代数的正则李群）。设$\mathfrak{g}$ 为某个正则李群的李代数。则存在一个1-连通李群 G ，其李代数为 $\mathfrak{g}$ ，且在同构意义下唯一。每一个以 $\mathfrak{g}$ 为李代数的连通正则李群都同构于一个商G/Γ，其中 $\Gamma \subseteq Z(G)$ 是一个离散子群。对于两个离散子群Γ_1、 $\Gamma_2 \subseteq Z(G)$，群 G/Γ_1 与 G/Γ_2 同构当且仅当存在自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ，使得 $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$。

证明。 命题 6.1.5 表明存在一个 1-连通正则李群 G ，其李代数为 $\mathfrak{g}$ ；由推论 6.1.18 可知它在同构意义下唯一。对于任意李代数同构于 $\mathfrak{g}$的连通正则李群 H ，推论 6.1.18 进一步表明，其万有$\widetilde{\text{覆盖群}}$ H 同构于 G。现在，其余断言由定理 5.3.7 得出。□

6.2 关于李代数值 1-形式的更多内容

下文中，对于局部凸空间 E，我们用 $\Omega^1_{C^k}(M,\ E)$ 表示 M 上取值于 E 的 p-形式空间，其中的形式属于 $C^k(k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ 类；也就是说，相应的函数 $T(M) \to E$属于 C^k 类（定义 3.6.1）。我们利用 $\Omega^1_{C^k}(M,\ E)$ 到局部凸空间 $C^k(TM,\ E)$ 的线性嵌入为该空间赋予拓扑，且该嵌入的像是闭的。

引理 6.2.1。设 M 是紧致光滑流形（可以带边界）， K 是李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$。那么，对于每个 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，李群 $C^r(M, K)$ 在 $\Omega^1_{C^r}(M, \mathfrak{k})$ 上的作用由 $(g, \alpha) \mapsto \mathrm{Ad}(g).\alpha$ 给出，且是光滑的。

证明。 设 $d =$ 的维数为 M。由于 M 的每个覆盖 $(U_i)_{i\in I}$ 都是由紧子流形（带边界）组成，这些子流形与 d 维球微分同胚，其内部构成一个图册，并给出一个线性拓扑嵌入

$$\Omega^1_{C^r}(M, \mathfrak{k}) \hookrightarrow \prod_{i\in I} \Omega^1_{C^r}(U_i, \mathfrak{k}) \cong \prod_{i\in I} C^r(U_i, \mathfrak{k})^d$$

且像为闭集（参见引理 4.1.9），因此只需证明 $C^r(M, K)$ 在每个空间 $C^r(U_i, \mathfrak{k})$ 上的作用是光滑的，该作用定义为

$$(g, f) \mapsto \mathrm{Ad}(g).f = \sigma_{\mathrm{Ad}} \circ (g, f), \quad (\mathrm{Ad}(g).f)(m) := \mathrm{Ad}(g(m))f(m)$$

该作用是光滑的。此作用可经由以下李群态射分解

$$C^r(M, K) \twoheadrightarrow C^r(U_i, K)$$

（习题 6.4.5），对于李群 $G := C^r(U_i, K)$，它与 $\cong C^r(U_i, \mathfrak{k})$ 在 $\mathbf{L}(G)$ 上的伴随作用一致，该作用是光滑的。这就证明了引理。□

引理 6.2.2。设 U 是局部凸空间 E 的一个开子集， F 是一个局部凸空间，M 是一个紧流形（带边界）， $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，且 $\alpha \in \Omega^1(U, F)$。那么映射

$$C^r(M, U) \to \Omega^1_{C^{r-1}}(M, F), \quad f \mapsto f^*\alpha$$

若将 $C^r(M, U)$ 视为 $C^r(M, E)$的开子集，则它是光滑的。

证明。 该映射的两个分量

$$\begin{aligned} C^r(M, U) &\to C^{r-1}(TM, TU) \cong C^{r-1}(TM, U) \times C^{r-1}(TM, E), \\ f &\mapsto Tf = (f \circ \pi, df) \end{aligned}$$

都是连续线性映射的限制，因此是光滑的。由于 $f^*\alpha = \alpha \circ Tf$，由 α 的光滑性可得断言，而这意味着映射

$$\alpha_* \colon C^{r-1}(TM, TU) \to C^{r-1}(TM, F), \quad h \mapsto \alpha \circ h$$

若将 $\Omega^1_{C^{r-1}}(M, F)$ 赋予 $C^{r-1}(TM, F)$ 的闭子空间拓扑，则它是光滑的（引理 4.2.6）。□

命题 6.2.3。对于任意李群 K （其李代数为 $\mathfrak{k}$）、任意紧流形 M （带边界）以及任意 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，左对数导数

$$\delta \colon C^r(M, K) \to \Omega^1_{C^{r-1}}(M, \mathfrak{k})$$

相对于 $C^r(M, K)$ 上的李群结构是一个光滑映射，并且

$$T_e(\delta) = d \colon C^r(M, \mathfrak{k}) \to \Omega^1_{C^{r-1}}(M, \mathfrak{k}), \quad \xi \mapsto d\xi. \tag{6.4}$$

证明。 由引理 6.2.1，我们已经知道，李群$G := C^r(M, K)$ 通过 $f.\alpha := \mathrm{Ad}(f).\alpha$ 对 $\Omega^1_{C^r}(M, \mathfrak{k})$ 的作用是光滑的。由于包含映射 $C^r(M, K) \to C^{r-1}(M, K)$ 是李群的光滑态射（习题 6.4.3）， G 对 $\Omega^1_{C^{r-1}}(M, \mathfrak{k})$ 的作用也光滑。

乘积法则 $\delta(\eta\gamma) = \delta(\gamma) + \mathrm{Ad}(\gamma)^{-1}.\delta(\eta)$ 表示 δ 是李群 $C^r(M, K)$ 对 $\Omega^1_{C^{r-1}}(M, \mathfrak{k})$ 的光滑作用下的右交叉同态（参见习题 5.5.2 和 6.4.4）。因此，只需验证它在单位元的某个邻域内的光滑性。

设 (φ_K, U_K) 是 K 的单位元邻域的坐标图，且 $T_e(\varphi_K) = \mathrm{id}_{\mathfrak{k}}$，因此 (φ_G, U_G) 满足

$$U_G := \lfloor M, U_K \rfloor = \{\gamma \in G \colon \gamma(M) \subseteq U_K\}, \quad \varphi_G(\gamma) := \varphi_K \circ \gamma$$

是李群 G 的单位元邻域的一个坐标图。那么我们有一个映射

$$\begin{aligned} C^r(M, \varphi_K(U_K)) &\to \Omega^1_{C^{r-1}}(M, \mathfrak{k}), \\ \xi &\mapsto \delta(\varphi_K^{-1} \circ \xi) = (\varphi_K^{-1} \circ \xi)^* \kappa_K = \xi^*(\varphi_K^{-1})^* \kappa_K \end{aligned}$$

其光滑性由引理 6.2.2 得出。

现在，(6.4) 可由以下事实推出：对于每个 $m \in M$ 和 $v \in T_m(M)$，都有 $\beta := (\varphi_K^{-1})^* \kappa_K$ 满足关系 $\beta_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{k}}$，且

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} (t\xi)^* \beta v = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \beta_{t\xi(m)}(t d\xi(m) v) &= \lim_{t \to 0} \beta_{t\xi(m)} d\xi(m) v \\ &= \beta_0 d\xi(m) v = d\xi(m) v. \end{aligned}$$

□

对于每个李代数 $\mathfrak{g}$，闭交换子代数 $D^1(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是一个理想，使得 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}} := \mathfrak{g}/D^1(\mathfrak{g})$ 是阿贝尔的，并且商映射 $p\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ 是连续的李代数态射。若 G 是李代数为 $\mathfrak{g}$ 的单连通李群，我们现在可以询问是否存在一个同态 $p_G\colon G \to (\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}, +)$，使其积分 p。若 G 是局部指数的，则根据下文定理 7.2.9，p_G 的存在性可以得到保证，但一般而言，该定理并不适用。即使 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的，也无法保证 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ 是麦基完备的，因此定理 6.1.16 也不适用。尽管如此，我们仍有：

命题 6.2.4。若 G 是一个 1-连通李群，其李代数 $\mathfrak{g}$ 麦基完备，则存在唯一的同态 $p_G\colon G \to (\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}, +)$，使得 $\mathbf{L}(p_G) = p\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ 是商映射。若 $\gamma\colon [0,1] \to G$ 是一条始于 e 的光滑路径，则

$$p_G(\gamma(1)) = p\Big(\int_0^1 \delta(\gamma)_t \, dt \Big). \tag{6.5}$$

证明。设 E 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ 的完备化。于是 E 特别是麦基完备的，因此由定理 6.1.16 可知，存在唯一的李群态射 $p_G\colon G \to E$，满足 $\mathbf{L}(p_G) = p$。若 $\gamma\colon [0,1] \to G$ 是一条始于 e 的光滑路径，则

$$\frac{d}{dt} p_G(\gamma(t)) = p(\delta(\gamma)_t),$$

并且由于 $\int_0^1 \delta(\gamma)_t \, dt$ 在 $\mathfrak{g}$ 中存在，基本定理推出 (6.5)。这表明 $p_G(G) \subseteq \mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$。为证明 p_G 实际上是一个取值于 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ 的光滑映射，设 $\varphi\colon U \to G$ 是 G 的一个坐标图，其中 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个开零邻域，且 $\varphi(0) = e$。于是

$$\sigma\colon U \to C^\infty_*([0,1], G), \quad \sigma(x)(t) := \varphi(tx)$$

是一个光滑映射，现在给出显式公式

$$p_G(\varphi(x)) = p\Big(\int_0^1 \delta(\sigma(x))_t \, dt \Big)$$

而 δ（命题 6.2.3）的光滑性表明，p_G 在 $\varphi(U)$ 上是光滑的，因此光滑。□

推论 6.2.5.若 G 是一个 1-连通李群，其李代数 $\mathfrak{g}$ 麦基完备且具有指数映射，则

$$\{x \in \mathfrak{g} \colon \exp_G(x) = e\} \subseteq \overline{D}^1(\mathfrak{g}).$$

证明。我们应用前述命题，取 $\gamma(t) = \exp(tx)$，得到 $0 = p_G(\exp x) = p(x)$，从而 $x \in \ker p = D^1(\mathfrak{g})$。 □

推论 6.2.6。若 G 是单连通巴拿赫–李群，则

$$\{x \in \mathfrak{g} \colon \exp_G(x) = e\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D}^n(\mathfrak{g}).$$

证明。此时 $p_G \colon G \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ 是商映射，且 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ 可缩。因此核 $N := \ker(q_G)$ 满足

$$\pi_{k-1}(N) \cong \pi_k(\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}) = \{0\} \quad \text{for} \quad k = 1, 2$$

（推论 14.1.10 及随后的注）。我们得出，以 $D^1(\mathfrak{g})$ 为李代数的李群 N 也是单连通的。因此我们可以迭代使用推论 6.2.6，从而得到该断言。 □

6.3 群与李代数中的路径

在上一节的技术准备之后，我们现在转向正则李群的一些细节。首先，我们比较 evol_G 和 Evol_G 的光滑性要求，并证明对于李代数为 $\mathfrak{g}$ 的正则李群 G，映射 $\mathrm{Evol}_G \colon C^\infty(I, \mathfrak{g}) \to C^\infty_*(I, G)$ 是一个微分同胚。我们还将确定连通阿贝尔正则李群的结构，并证明巴拿赫–李群是 C^0-正则的。

注 6.3.1。设 G 是一个 C^k-正则李群。那么演化映射

$$\mathrm{Evol}_G \colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}(I, G), \quad \xi \mapsto \gamma_\xi$$

的值属于由 G 取值的 C^{k+1} 曲线所构成的李群。

如果 Evol_G 光滑，那么 evol_G 也光滑，因为求值映射

$$\mathrm{ev} \colon C^{k+1}(I, G) \to G, \quad f \mapsto f(1)$$

是光滑的（习题 6.4.5 或定理 4.2.2(c)）。反过来，设 G 正则。我们回顾注 6.1.2：

$$\mathrm{Evol}_G(\xi)(s) = \gamma_\xi(s) = \mathrm{evol}_G(S(\xi, s)) \quad \text{for} \quad S(\xi, s)(t) = s\xi(st)$$

并且该

$$S \colon C^\infty(I, \mathfrak{g}) \times I \to C^\infty(I, \mathfrak{g})$$

是光滑的。因此，映射 $(\xi, s) \mapsto \mathrm{Evol}_G(\xi)(s)$ 是光滑的，而这又意味着

$$\mathrm{Evol}_G \colon C^\infty(I, \mathfrak{g}) \to C^\infty(I, G)$$

（见定理 4.2.2(a)）。

下面的命题给出了正则性的一个自然必要条件。目前，作者尚未发现任何以麦基完备空间为模型的非正则李群 G。找到这样一个例子是该理论的中心开放问题之一。

关于群 $C^\tau_*(I, G)$上的李群结构，我们参见习题6.4.7。

命题 6.3.2.若 G 是正则李群，则其李代数 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的，并且

$$\mathrm{Evol}_G \colon C^\infty(I, \mathfrak{g}) \to C^\infty_*(I, G)$$

与$\mathrm{Evol}_G^{-1} = \delta$是微分同胚。

证明。 根据命题 6.2.3，映射

$$\delta \colon C^\infty(I, G) \to \Omega^1(I, \mathfrak{g}) \cong C^\infty(I, \mathfrak{g})$$

是光滑的，且有 $T_e(\delta)\xi = \xi'$。由于 G 是正则的，演化映射

$$\mathrm{Evol}_G \colon C^\infty(I, \mathfrak{g}) \to C^\infty_*(I, G)$$

也是光滑的（注 6.3.1），并且

$$\mathrm{Evol}_G \circ \delta = \mathrm{id}_{C^\infty_*(I,G)} \quad \text{and} \quad \delta \circ \mathrm{Evol}_G = \mathrm{id}_{C^\infty(I,\mathfrak{g})}\,.$$

因此，对每个 $\xi \in C^\infty(I, \mathfrak{g})$，光滑曲线 $\eta := T_0(\mathrm{Evol}_G)\xi \in C^\infty(I, \mathfrak{g})$ 满足 $\eta' = T_e(\delta)\eta = \xi$，这意味着 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的。□

定理 6.3.3（连通正则阿贝尔李群）。 连通阿贝尔李群 A 是正则的，当且仅当它同构于麦基完备空间 $\mathfrak{a}$ 除以离散子群 Γ 所得的商群$\mathfrak{a}/\Gamma$。

证明。 正则性显然可传递到所有商群 $\mathfrak{a}/\Gamma$，其中$\Gamma \subseteq \mathfrak{a}$ 是麦基完备空间 $\mathfrak{a}$ 的一个离散子群。

反过来，如果 A 是一个李代数为 $\mathfrak{a}$ 的连通正则阿贝尔李群，那么由命题 6.3.2 可知 $\mathfrak{a}$ 是麦基完备的。由于 A有指数函数 $\exp_A \colon \mathfrak{a} \to A$（注 6.1.2），命题 5.6.17 现在推出它具有 $\mathfrak{a}/\Gamma_A$ 的形式，其中 $\Gamma_A = \ker(\exp_A) \subseteq \mathfrak{a}$ 是一个离散子群。□

现在我们可以验证所有巴拿赫–李群都是 C^0-正则的。

定理 6.3.4。每个巴拿赫–李群 G 都是 C^0-正则的。此外，对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，

$$\mathrm{Evol}_G \colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}_*(I, G), \quad \xi \mapsto \gamma_\xi,$$

是一个 C^∞-微分同胚。

证明。 **步骤 1：** 固定 $k \in \mathbb{N}_0$。那么对数导数

$$\delta \colon C^{k+1}(I, G) \to C^k(I, \mathfrak{g}), \quad \gamma \mapsto \gamma^{-1}.\dot{\gamma} = \delta(\gamma) = \gamma^* \kappa_G$$

是光滑的，正如我们在命题 6.2.3 中所见。这里我们给出另一种更直接的论证。我们在命题 5.2.2 中已经看到，对于任意李群 G，切丛 $T(G)$都继承自然李群结构。我们还有一个映射

$$C^{k+1}(I, G) \to C^k(I, T(G)), \quad \gamma \mapsto \dot{\gamma},$$

不难看出这是一个李群态射（习题 6.4.6）。我们用 $\pi \colon T(G) \to G$表示丛投影。那么 Maurer–Cartan形式 $\kappa_G \colon T(G) \to \mathfrak{g}$就是半直积 $T(G) \cong G \ltimes \mathfrak{g}$中到第二个因子的投影，并满足余循环恒等式

$$\kappa_G(v \cdot w) = \kappa_G(w) + \mathrm{Ad}(\pi(w)^{-1}) \kappa_G(v),$$

因此它是李群的右交叉同态。由此它诱导出一个光滑的李群交叉同态 $(\kappa_G)_* \colon C^k(I, T(G)) \to C^k(I, \mathfrak{g})$（习题 6.4.4）。现在结论由 $\delta(\gamma) = \kappa_G \circ \dot{\gamma}$得出。

步骤 2： 我们得到一个光滑的双射映射 $\delta \colon C^{k+1}_*(I, G) \to C^k(I, \mathfrak{g})$。由命题 6.2.3，我们进一步知道 $T_e(\delta)\xi = \xi'$，这定义了一个拓扑同构 $C^{k+1}_*(I, \mathfrak{g}) \to C^k(I, \mathfrak{g})$（参见命题 6.3.2），其逆映射是积分映射

$$\mathcal{I} \colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}_*(I, \mathfrak{g}), \quad \mathcal{I}(\xi)(t) := \int_0^t \xi(s)\, ds.$$

由乘积法则 $\delta(\gamma_1 \gamma_2) = \delta(\gamma_2) +$伴随表示$(\gamma_2)^{-1}.\delta(\gamma_1)$，我们进一步推得

$$T_\gamma(\delta)(\xi.\gamma) = \mathrm{Ad}(\gamma)^{-1}.\xi',$$

因此，所有微分 $T_\gamma(\delta)$ 都是线性拓扑同构，所以根据反函数定理， δ 是一个 C^∞-微分同胚。因此，其逆映射也是一个 C^∞-微分同胚。根据构造，这个逆映射就是演化映射

$$\mathrm{Evol}_G \colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}_*(I, G).$$

因此 G 是 C^k-正则的。 □

6.4 建立李群正则性的工具

现在我们给出一些结果，这些结果通常能让我们轻松地证明所考虑的李群具有正则性。我们将把这些工具应用于映射群、微分同胚群、李群的盒积以及有限维李群的归纳极限。以下刻画很有用。在这些例子中，我们将利用蕴含关系 (b)⇒(a) 来推导 C^0-正则性。

定理 6.4.1。设 G 为李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。则 （a）与（b）等价：

（a） G 是 C^0-正则的。（b） G 是 C^0-半正则的， $\mathfrak{g}$ 是积分完备的，并且Evol： $C(I, \mathfrak{g}) \to G$ 在0处连续。

在良好情形下，子群从周围的李群继承正则性。我们只会将以下结果应用于李子群。但更一般地，它对所谓的严格初始李子群也成立（如定义 9.1.5 中的定义），[1] 具体形式如下。

命题 6.4.2。设 G 为李群， $\mathfrak{g}$ 为其李代数，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。设 H 为 G 的一个子群，并赋予其李群结构，使包含映射 $\iota\colon\ H \to G$ 既成为李群的 C^∞-初始态射，又成为某个 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的 C^ℓ-初始态射，其中 $\ell \leq k+1$。假设存在一个集合 J、对于 $j \in J$ 的李群 G_j，以及光滑群同态 $\alpha_j\colon\ G \to G_j$ 和 $\beta_j\colon\ G \to G_j$，使得

$$H = \{g \in G\colon (\forall j \in J)\ \alpha_j(g) = \beta_j(g)\}. \tag{6.6}$$

那么，以下结论成立：

(a) 若 G是 C^k-半正则的，则 H 也具有 C^k-半正则性。(b) 若 G 是 C^k-正则的，则 H 也具有 C^k-正则性。

为准备证明，我们现在陈述并证明若干辅助结果。作为副产品，这些结果还表明：

命题 6.4.3。对于 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$， C^k-半正则李群 G 是C^k-正则的，当且仅当映射 $\mathrm{Evol}\colon\ C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}(I, G)$ 是光滑的。

证明。 Evol 的光滑性蕴含 $\mathrm{evol} = \mathrm{ev}_1 \circ \mathrm{Evol}$ 的光滑性，因为求值映射 $\mathrm{ev}_1\colon\ C^{k+1}(I, G) \to G, \theta \mapsto \theta(1)$ 是光滑的（见定理 4.2.2(c)）；因此 G 是 C^k-正则的。反过来，如果 G 是 C^k-正则的，那么 $\mathrm{evol}\colon\ C^k(I, \mathfrak{g}) \to G$ 是光滑的，因此根据下面引理的 (f) 部分， $\mathrm{Evol}\colon\ C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}(I, G)$ 也将是光滑的。□

[1] 我们需要在 C^k-初始李群态射的定义中纳入流形 M *with boundary*。

注记 6.4.4。注意，如果某个李群 G 是 C^k-半正则的，其中 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，那么映射

$$\delta\colon C_*^{k+1}(I,G) \to C^k(I,\mathfrak{g})$$

是一个双射。我们令 $\odot$ 为 $C^k(I,\mathfrak{g})$ 上的群乘法，使 δ 成为群同构。对于所有 $\gamma, \eta \in C^k(I,\mathfrak{g})$，我们有

$$(\gamma \odot \eta)(t) = \eta(t) + \mathrm{Ad}_{\mathrm{Evol}(\eta)(t)^{-1}}(\gamma(t))$$

对所有 $t \in I$ 都成立（参见引理 5.5.3），因此

$$\gamma \odot \eta = \eta + \mathrm{Ad}_{\mathrm{Evol}(\eta)^{-1}}(\gamma)$$

如果我们记

$$\mathrm{Ad}_\theta(\gamma) := C^k(I, \mathrm{Ad}^\wedge)(\theta,\gamma)$$

对于 γ（同前）和 $\theta \in C^k(I, G)$，利用伴随作用 $\mathrm{Ad}^\wedge\colon G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，$(g, y) \mapsto \mathrm{Ad}_g(y)$ 以及映射

$$C^k(I,\mathrm{Ad}^\wedge)\colon C^k(I,G) \times C^k(I,\mathfrak{g}) \to C^k(I,\mathfrak{g}),\ (f,g) \mapsto \mathrm{Ad}^\wedge \circ (f,g)$$

它由命题 4.1.58(b) 可知是光滑的。特别地，右平移

$$\rho_\eta\colon C^k(I,\mathfrak{g}) \to C^k(I,\mathfrak{g}),\ \ \gamma \mapsto \gamma \odot \eta$$

是一个连续仿射线性映射，因而是光滑的。事实上，ρ_η 是一个 C^∞-微分同胚，因为光滑映射$\rho_{\eta^{-1}}$ 是它的逆映射。此外，

$$d\rho_\eta(\gamma,\gamma_1) = \mathrm{Ad}_{\mathrm{Evol}(\eta)^{-1}}(\gamma_1) \tag{6.7}$$

由前述仿射线性映射的线性部分给出。这些观察结果将在下面的讨论中发挥重要作用。

注记 6.4.5。我们还将使用映射

$$S\colon C^k(I,\mathfrak{g}) \times I \to C^k(I,G)$$

由 $S(\gamma, s)(t) = s\gamma(st)$ 给出。利用求值映射 $\mathrm{ev}\colon C^k(I,\mathfrak{g}) \times I \to \mathfrak{g}$，映射

$$S^\wedge\colon (C^k(I,\mathfrak{g}) \times I) \times I \to \mathfrak{g},\quad ((\gamma,s),t) \mapsto s\gamma(st)$$

可以写成

$$S^\wedge((\gamma,s),t) = s\,\mathrm{ev}(\gamma, st).$$

由于 ev 是 C^k（见引理 1.7.25 和命题 1.7.33），这意味着$S^\wedge$ 是 C^k，因此 $C^{0,k}$（见命题 1.7.33(a)），由此可知，作为到 $C^k(I,\mathfrak{g})$ 的映射，S 是连续的（使用指数律（定理 1.7.30(a)））。由于在第一个变量上是线性的，连续映射 $S\colon C^k(I,\mathfrak{g}) \times I \to C^k(I,\mathfrak{g})$ 是 $C^{\infty,0}$（见引理 1.7.23 和推论 1.7.22）。

备注 6.4.6. 设 G 是一个李群，且 $\varphi\colon U \to V$ 是从一个开 e-邻域 $U \subseteq G$ 到一个开 0-邻域 $V \subseteq \mathfrak{g}$ 的 C^∞-微分同胚，使得 $\varphi(e) = 0$ 且 $d\varphi|_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$。设 Σ 是命题 3.8.12 所给出的 G 上的局部加法，其中以 φ^{-1} 代替 φ应用该命题。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。记$f\colon I \to G$为常值映射 $t \mapsto e$。那么，在定理 4.2.2(a) 的证明中构造的 $C^k(I,G)$ 的坐标图 φ_f，是映射 $C^k(I,\varphi)\colon C^k(I, U) \to C^k(I,V)$，$\gamma \mapsto \varphi \circ \gamma$。

引理 6.4.7。设 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, G 是一个 C^k-半正则李群，$\mathfrak{g}$ 是其李代数。则以下结论成立。

(a) 若 *evol:* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to G$ 在零点连续，则 *Evol :* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to C(I,G)$ 在零点连续。*(b)* 若映射 *Evol :* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to C(I,G)$ 在零点连续，则 *Evol:* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to C(I,G)$ 连续。*(c)* 若 $j \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 满足 $j \leq k+1$，且 $U \subseteq C^k(I,\mathfrak{g})$ 是一个开零邻域，使得限制映射 $\mathit{Evol}|_U\colon U \to C^j(I,G)$ 对某个 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 是 C^ℓ，则 *Evol :* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to C^j(I,G)$ 是 C^ℓ。*(d)* 若 $j \in \mathbb{N}_0$ 满足 $j < k$，且 *Evol :* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to C^j(I,G)$ 光滑，则 *Evol:* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to C^{j+1}(I,G)$ 光滑。*(e)* 若对某个开零邻域 $U \subseteq C^k(I,\mathfrak{g})$，$\mathit{Evol}|_U\colon U \to C(I,G)$ 光滑，则 *Evol:* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to C^{k+1}(I,G)$ 光滑。*(f)* 若 *evol* 光滑，则 *Evol :* $C^k(I,\mathfrak{g}) \to C^{k+1}(I,G)$ 光滑。

证明。（a）设 P 是 $C(I,G)$ 中的一个单位元邻域。缩小 P 后，我们可以假设对于某个单位元邻域 $Q \subseteq G$，有 $P = C(I,Q)$。由于 evol: $C^k(I,\mathfrak{g}) \to G$ 在零点连续，存在一个开零邻域$V \subseteq C^k(I,\mathfrak{g})$，使得 evol$(V) \subseteq Q$。由于映射 $S\colon C^k(I,\mathfrak{g}) \times I \to C^k(I,\mathfrak{g})$ 连续，且对于每个 $s \in I$，都有 $S(0,s) = 0 \in V$，我们看到 $\{0\} \times I$ 是开集 $S^{-1}(V)$ 的子集。华莱士引理（引理 A.4.3）给出一个开零邻域 $W \subseteq C^k(I,\mathfrak{g})$，使得

$$W \times I \subseteq S^{-1}(V).$$

于是，对于每个 $\gamma \in W$，我们有

$$\mathrm{Evol}(\gamma)(s) = \mathrm{evol}(S(\gamma,s)) \in \mathrm{evol}(V) \subseteq Q$$

对于每个 $s \in I$，因此 Evol$(\gamma) \in C(I, Q) = P$。

(b) 对于 $\zeta \in C(I, G)$，令 $\rho_\zeta\colon C(I, G) \to C(I, G)$ 为右平移映射。由于

$$\mathrm{Evol}\colon (C^k(I,\mathfrak{g}),\odot) \to C^{k+1}_*(I,G) \subseteq C(I,G)$$

是群同态，因此 Evol$\circ\, \rho_\eta = \rho_\zeta \circ$ Evol，其中 $\zeta :=$ Evol(η)。所以 Evol $= \rho_\zeta \circ$ Evol$\circ\, \rho_\eta^{-1}$在 η 连续，当且仅当它在 0 连续。

(c) 对于每个 $\eta \in C^k(I, \mathfrak{g})$，集合 $U\eta := \rho_\eta(U)$ 是一个开 η-邻域，因为 ρ_η 是一个 C^∞-微分同胚，因而也是一个同胚。记 $\zeta :=$Evol(η)，公式

$$\mathrm{Evol}|_{U\eta} = \rho_\zeta \circ \mathrm{Evol}|_U \circ \rho_\eta^{-1}|_{U\eta}$$

表明 $\mathrm{Evol}|_{U\eta}$ 是 C^ℓ。

(d) 设 $\varphi\colon U \to V$ 是从一个开 e邻域$U \subseteq G$ 到开零邻域 $V \subseteq \mathfrak{g}$ 的 C^∞ 微分同胚，使得 $\varphi(e) = 0$ 且 $d\varphi|_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$。设 $W_1 \subseteq U$ 是一个开 e邻域，使得 $W_1W_1 \subseteq U$ 且$W := \varphi(W_1)$。于是我们得到一个光滑映射

$$\mu\colon W \times W \to V,\ (x,y) \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y))$$

它在局部坐标图中表示群乘法。利用关于第二个变量的偏微分，我们得到一个光滑映射

$$\tau\colon W \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ (x,y) \mapsto d_2\mu(x,0,y).$$

因此，映射

$$h := C^j(I,\tau)\colon C^j(I,W) \times C^j(I,\mathfrak{g}) \to C^j(I,\mathfrak{g}),\ (f,g) \mapsto \tau \circ (f,g)$$

是光滑的（见命题 4.1.24(a)）。由于 $\mathrm{Evol}\colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^j(I, G)$ 是连续的，集合 $O := \{\gamma \in C^k(I, \mathfrak{g})\colon \mathrm{Evol}(\gamma) \in C^j(I, W_1)\}$ 是 $C^k(I, \mathfrak{g})$中的开单位元邻域。如备注 6.4.6 所述，映射

$$C^{j+1}(I,\varphi)\colon C^{j+1}(I,W_1) \to C^j(I,W),\ f \mapsto \varphi \circ f$$

是一个 C^∞-微分同胚。因此，如果我们能证明 $C^{j+1}(I, \varphi) \circ \mathrm{Evol}|_O$ 是光滑的，那么 $\mathrm{Evol}|_O$ 作为到 $C^{j+1}(I, G)$ 的映射也将是光滑的（故由 (c)，Evol 也光滑）。考虑包含映射 $\mathrm{incl}\colon C^{j+1}(I, \mathfrak{g}) \to C(I, \mathfrak{g})$，以及映射$D\colon C^{j+1}(I, \mathfrak{g}) \to C^j(I, \mathfrak{g}),\ f \mapsto f'$。我们知道线性映射

$$(\mathrm{incl}, D)\colon C^{j+1}(I,\mathfrak{g}) \to C(I,\mathfrak{g}) \times C^j(I,\mathfrak{g})$$

是一个像为闭集的拓扑嵌入。因此，如果 $C^{j+1}(I, \varphi) \circ \mathrm{Evol}|_O$作为到 $C^{j+1}(I, \mathfrak{g})$ 的映射是光滑的（由于 Evol 到 $C(I, G)$ 的映射是光滑的，这一点成立），并且 $D \circ C^{j+1}(I, \varphi) \circ \mathrm{Evol}|_O$ 是光滑的，那么它作为到 $C(I, \mathfrak{g})$ 的映射也将是光滑的。我们断言，后一个映射与.....一致

$$h \circ ((C^j(I,\varphi) \circ \mathrm{Evol}|_O) \times \mathrm{incl}),$$

使用右端项上的光滑映射 $\mathrm{Evol}\colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^j(I, G)$。由于该映射是光滑映射的复合，因此它是光滑的。

剩下的就是证明该断言。对于 $\gamma \in O$，简记 $\eta := \mathrm{Evol}(\gamma)$ 和$\zeta := \varphi \circ \eta$。令 $x \in W$ 且 $z := \varphi^{-1}(x)$。写作 $\lambda_x := \mu(x, \cdot)\colon W \to V$，我们有 $\lambda_x = \varphi \circ \lambda_z \circ \varphi^{-1}|_W$，因此

$$\tau(x,y) = d\lambda_x(0,y) = d\varphi T\lambda_z T\varphi(0,y) = d\varphi(zy).$$

给定 $t \in I$，我们取 $x := \zeta(t)$ 和 $y := \gamma(t)$。于是 $z = \eta(t)$。我们得到

$$h(\zeta,\gamma)(t) = (\tau\circ(\zeta,\gamma))(t) = \tau(\zeta(t),\gamma(t)) = d\varphi(\eta(t)\gamma(t)) = d\varphi(\dot\eta(t))$$
$$= \frac{d}{dt}(\varphi\circ\eta)(t) = \zeta'(t).$$

因此， $D(\varphi\circ\eta) = D(\zeta) = h(\zeta, \gamma)$，其中 $\eta = \mathrm{Evol}(\gamma)$ 且 $\zeta = \varphi\circ\eta$，如所需。

(e) 由 (c)，映射 Evol : $C^k(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 是光滑的。因此，根据 (d) 和归纳法，对于每个满足 $j \le k+1$ 的 $j \in \mathbb{N}_0$，Evol: $C^k(I, \mathcal{G}) \to C^j(I, G)$ 都是光滑的。若 k 是有限的，我们可以选择 $j = k+1$。若 $k = \infty$，则利用指数律（定理 1.7.30(a) ），可推得

$$(\mathrm{Evol})^\wedge\colon C^\infty(I,\mathfrak{g})\times I \to G,\ (\gamma,t)\mapsto \mathrm{Evol}(\gamma)(t)$$

对每个 $j\in\mathbb{N}_0$ 都是一个 C^∞, ^{j}-映射，因此 C^∞, $^\infty$。因此，再次利用定理 1.7.30(a)，映射 Evol: $C^\infty(I, \mathfrak{g}) \to C^\infty(I, G)$ 是 C^∞。

(f) 根据备注 6.1.2(a)，对所有 $\gamma \in C^k(I, \mathfrak{g})$ 和 $s \in I$，Evol$(\gamma)(s)$ = evol$(S(\gamma, s))$ 成立，因此

$$\mathrm{Evol}^\wedge\colon C^k(I,\mathfrak{g})\times I\to G,\ (\gamma,s)\mapsto \mathrm{Evol}(\gamma)(s)$$

其形式为 Evol$^\wedge$ = evol $\circ S$。由于 S 是一个 C^∞, ^{0}-映射（见备注 6.4.5），且 evol 光滑，链式法则表明 Evol$^\wedge$ = evol $\circ S$ 是 C^∞, ^{0}（见命题 3.5.27(a)）。因此，Evol : $C^k(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 是光滑的（根据指数律，即定理 4.2.2(a)）。于是，根据 (d)，Evol: $C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}(I, g)$ 也是光滑的。□

引理 6.4.8。设 G 是一个 C^0-半正则李群，并且求值映射 Evol: $C(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 是连续的。若 $\mathfrak{g}$ 是积分完备的，则 Evol: $C(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 是一个光滑映射。

证明。步骤 1。令 φ: $U \to V$ 以及 W_1、W 和 μ: $W \times W \to V$ 如引理 6.4.7(d)的证明中所述。由于 Evol: $C(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 是连续的，我们得到一个开零邻域 $O \subseteq C(I, \mathfrak{g})$，使得对于所有 $\gamma \in O$，Evol$(\gamma) \in C(I, U)$。映射 $C(I, \varphi)$: $C(I, U) \to C(I, V)$，$\theta \mapsto \varphi\circ\theta$ 是一个 C^∞-微分同胚（见备注 6.4.6）。因此，如果我们能够证明

$$h := C(I,\varphi)\circ \mathrm{Evol}\,|_O\colon O\to C(I,F)$$

是 C^1，那么 Evol $|_O$: $O \to C(I, G)$ 也将是 C^1，因此根据引理 6.4.7(c)，Evol: $C(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 将是 C^1。我们断言，h 在 0 处存在所有方向导数，并且 $\alpha := dh(0, \cdot)$: $C(I, \mathfrak{g}) \to C(I, \mathfrak{g})$ 是连续的。如果这是真的，那么 h 将是 C^1。为此，令 $\gamma \in O$；由于 Evol 是从 $(C(I, \mathfrak{g}), \odot)$ 到 $C(I, G)$ 的群同态，我们有

$$\rho_{\mathrm{Evol}(\gamma)}\circ \mathrm{Evol}\circ\rho_{\gamma^{-1}} = \mathrm{Evol}$$

因此，在某个开 γ-邻域 $O' \subseteq O$ 上，

$$\begin{aligned} h|_{O'} &= C(I,\varphi)\circ\rho_{\mathrm{Evol}(\gamma)}\circ C(I,\varphi^{-1})\circ C(I,\varphi)\circ \mathrm{Evol}\circ\rho_{\gamma^{-1}}|_{O'} \\ &= (C(I,\varphi)\circ\rho_{\mathrm{Evol}(\gamma)}\circ C(I,\varphi^{-1}))\circ h\circ\rho_{\gamma^{-1}}|_{O'}. \end{aligned}$$

由于 $\rho_{\gamma^{-1}}$ 是连续仿射线性映射，根据习题 1.2.5 和 1.4.5，我们可知，对于所有 $\gamma_1 \in C(I,\mathfrak{g})$，方向导数 $dh(\gamma,\gamma_1)$ 在 γ 处均存在，且其表达式为

$$d\big(C(I,\varphi)\circ\rho_{\mathrm{Evol}(\gamma)}\circ C(I,\varphi^{-1})\big)\big(0,\alpha(T\rho_{\gamma^{-1}}(\gamma,\gamma_1))\big),$$

它是 (γ,γ_1) 的连续函数。

为证明此断言，我们借助坐标图 φ 将 U 与 V 视为相同对象，以简化记号。因此，0 现在是 G 的单位元。设 $\alpha\colon C(I,\mathfrak{g})\to C(I,\mathfrak{g})$ 是由下式给出的连续线性映射

$$\alpha(\gamma)(t)=\int_0^t \gamma(s)\,ds.$$

考虑光滑映射 $W\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，$(x,y)\mapsto x.y:=d\lambda_x(0)(y)$，其中 $\lambda_x\colon W\to V, z\mapsto xz$ 是由 x 给出的左平移。对于 $\gamma\in C(I,\mathfrak{g})$ 且 $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ 接近 0 的情形，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Evol}(\tau\gamma)(t) &= \int_0^t (\mathrm{Evol}(\tau\gamma))'(s)\,ds = \int_0^t \mathrm{Evol}(\tau\gamma)(s).(\tau\gamma(s))\,ds \\ &= \tau\int_0^t \mathrm{Evol}(\tau\gamma)(s).\gamma(s)\,ds, \end{aligned}$$

根据 Evol 的定义。因此

$$\Delta_\tau := \frac{\mathrm{Evol}(\tau\gamma)-\mathrm{Evol}(0)}{\tau}-\alpha(\gamma)=\frac{\mathrm{Evol}(\tau\gamma)}{\tau}-\alpha(\gamma)$$

满足

$$\Delta_\tau(t)=\int_0^t \big(\mathrm{Evol}(\tau\gamma)(s).\gamma(s)-\gamma(s)\big)\,ds=\int_0^t f(\mathrm{Evol}(\tau\gamma)(s),\gamma(s))\,ds,$$

关于 $f\colon W\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，$f(x,y):=x.y-y$。为证明 $\Delta_\tau\to 0$ 属于 $C(I,\mathfrak{g})$（从而完成证明），我们来说明：对于 $\mathfrak{g}$ 上的每个连续半范数 p，存在 $\rho>0$，使得 $[-\rho,\rho]\gamma\subseteq\Omega$，并且

$$\|\Delta_\tau\|_{p,\infty}:=\sup_{t\in I}p(\Delta_\tau(t))\le 1 \tag{6.8}$$

对所有满足 $|\tau|\le\rho$ 的 $\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。现在，对于所有 $=0$ 以及 $f(0,y)$，$f(x,0)=0$，由此存在定义在 $\mathfrak{g}$ 上的连续半范数 q_1 和 q_2，使得 $B_1^{q_1}(0)\subseteq W$，并且对于所有 $x\in B_1^{q_1}(0)$ 和 $y\in\mathfrak{g}$，$p(f(x,y))\le q_1(x)q_2(y)$（参见引理 1.6.28；鉴于 f 关于第二个变量的线性，后者不必限制在 0 周围的 q_2-球内）。由于

$q_2(\gamma([0,1]))$ 是紧的，因此我们可以找到 $C \geq 1$，使得对于所有 $s \in I$，$q_2(\gamma(s)) \leq C$。由于 Evol 在零点连续，我们可以找到一个零邻域 $Q \subseteq \Omega$，使得对于所有 $\eta \in Q$，$\mathrm{Evol}(\eta) \in C(I, B^{q_1}_{1/C}(0))$。缩小 ρ 后，我们可以假设 $[-\rho,\rho]\gamma \subseteq Q$。于是

$$p(\Delta_\tau(t)) \leq \int_0^t p(f(\mathrm{Evol}(\tau\gamma)(s), \gamma(s))\, ds \leq 1 \text{ for all } \tau \in [-\rho,\rho] \setminus \{0\},$$

与 $p\big(f(\mathrm{Evol}(\tau\gamma)(s)\ \gamma(s))\big) \leq q_1(\mathrm{Evol}(\tau\gamma)(s))q_2(\gamma(s)) \leq \frac{1}{C}C \leq 1$ 相同。

步骤 2。我们用归纳法证明，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，Evol: $C(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 都是 C^j，因此是光滑的。$j = 1$ 的情形已在步骤 2 中证明。由于 Evol 是从 $(C(I, \mathfrak{g}) \odot)$ 到 $C(I, G)$ 的群同态，对于每个 $\gamma \in C(I, \mathfrak{g})$，我们有 $\rho_{\mathrm{Evol}(\gamma)} \circ \mathrm{Evol} \circ \rho_{\gamma^{-1}} = \mathrm{Evol}$。由于 Evol 是 C^1，取切映射可得 $T\mathrm{Evol} = T\rho_{\mathrm{Evol}(\gamma)} \circ T\mathrm{Evol} \circ T\rho_{\gamma^{-1}}$，因此

$$T\,\mathrm{Evol}(\gamma, \gamma_1) = (T\rho_{\mathrm{Evol}(\gamma)} \circ T\,\mathrm{Evol})(0, C(I, (\mathrm{Ad})^\wedge)(\mathrm{Evol}(\gamma), \gamma_1))$$

对所有 γ，$\gamma_1 \in C(I, \mathfrak{g})$，利用 (6.7)。如果对某个 $j \in \mathbb{N}$，Evol 是 C^j，则公式表明 $T\mathrm{Evol}$ 是 C^j。现在，Evol 为 C^1，且 $T\mathrm{Evol}$ 是一个 C^j-映射，因此 Evol 是一个 C^{j+1}-映射。□

定理 6.4.1 的证明。(a)⇒(b)：若 G是 C^0-正则的，则 G是 C^0-半正则的，且 evol $= \mathrm{ev}_1 \circ \mathrm{Evol}$ 连续，因为求值映射 $C^1(I, G) \to G, f \mapsto f(1)$ 连续（定理 4.2.2(c)）。为证明 $\mathfrak{g}$ 积分完备，将 Evol 视为到 $C^1(I, g)_*$的映射。对.....应用链式法则

$$\delta \circ \mathrm{Evol} = \mathrm{id}_{C(I,\mathfrak{g})},$$

我们由命题 6.2.3 推得，对于每个 $\gamma \in C^1(I, \mathfrak{g})_*$，都有 $\gamma = T_e\delta(T_0\,\mathrm{Evol}(\gamma))) = (T_0\,\mathrm{Evol}(\gamma))'$，因此 $\eta := T_0\,\mathrm{Evol}(\gamma)$ 是 $C^1(I, \mathfrak{g})$ 中的一个元素，满足 $\eta' = \gamma$。因此，对于所有 $t \in I$，$\eta(t)$ 是弱积分 $\int_0^t \gamma(s)\, ds$。值得注意的是，$\int_0^1 \gamma(s)\, ds$ 在 $\mathfrak{g}$ 中存在。

(b)⇒(a)：如果 G 是 C^0-半正则的，并且 evol : $C(I, \mathfrak{g}) \to G$ 在零点连续，那么根据引理 6.4.7 的(a)和(b)部分，Evol : $C(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 是连续的。由于我们假设 $\mathfrak{g}$ 是积分完备的，引理 6.4.8 表明，Evol: $C(I, \mathfrak{g}) \to C(I, G)$ 是光滑的。因此，利用求值映射 $\mathrm{ev}_1 : C(I, G) \to G, f \mapsto f(1)$ 的光滑性（见定理 4.2.2(c)），evol $= \mathrm{ev}_1 \circ \mathrm{Evol}$ 是光滑的。因此 G 是 C^0-正则的。□

为准备命题 6.4.2 的证明，我们记录一个初等事实。

引理 6.4.9。设 $\alpha : G \to H$ 是李群态射。则对于每个 $\eta \in C^1(I, G)$，有 $\delta(\alpha \circ \eta) = \mathbf{L}(\alpha) \circ \delta(\eta)$。

证明。简记 $\zeta := \alpha \circ \eta$。对于每个 $g \in G$，我们有 $\alpha \circ \lambda_g = \lambda_{\alpha(g)} \circ \alpha$，因此 $T\alpha \circ T\lambda_g = T\lambda_{\alpha(g)} \circ T\alpha$。将这个线性映射作用于 $\dot{\eta}(t) \in L(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 满足 $\dot{\zeta}(t) = \delta(\zeta)(t)$ □：$(t)^{-1}$ 时的切向量 $\dot{\eta}(t)$，得到 $T\alpha\delta(\ )(t)\ (\ (t))^{-1}(T\alpha\dot{\eta}(t))\ (\ )\ (\ )\ (\ )(\ )$。

命题 6.4.2 的证明。(a) 令 $\iota\colon H \to G$ 为包含映射，它是一个李群态射，其切映射 $\mathbf{L}(\iota)\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h} := \mathbf{L}(G)$ 与 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 之间是单射。给定 $\gamma \in C^k(I, \mathfrak{h})$，令 $\eta := \mathrm{Evol}_G(\mathbf{L}(\iota) \circ \gamma) \in C^{k+1}(I, G)$。对于所有 $j \in J$，我们有

$$\alpha_j \circ \iota = \beta_j \circ \iota$$

因此 $\mathbf{L}(\alpha_j) \circ \mathbf{L}(\iota) = \mathbf{L}(\alpha_j \circ \iota) = \mathbf{L}(\beta_j \circ \iota) = \mathbf{L}(\beta_j) \circ \mathbf{L}(\iota)$。因此，

$$\delta(\alpha_j \circ \eta) = \mathbf{L}(\alpha_j) \circ \delta(\eta) = \mathbf{L}(\alpha_j) \circ \mathbf{L}(\iota) \circ \gamma = \underline{(}\beta_j) \circ \mathbf{L}(\iota) \circ \gamma,$$

由此 $\alpha_j \circ \eta = \beta_j \circ \eta$。因此，对所有 $t \in I$，$\eta(t) \in H$。于是 $\eta|^H$：根据 C^ℓ-初始性，$I \to H$ 是一个 C^ℓ-映射。由于

$$\mathbf{L}(\iota) \circ \gamma = \delta(\eta) = \delta(\iota \circ \eta|^H) = \mathbf{L}(\iota) \circ \delta(\eta|^H),$$

$L(\iota)$ 的单射性意味着 $\delta(\eta|^H) = \gamma$，从而 $\eta|^H = \mathrm{Evol}(\gamma)$。

（b）由（a）可知，$\mathrm{evol}_H = (\mathrm{evol}_G \circ C^k(I, \mathbf{L}(\iota)))|^H$。利用 $\mathrm{evol}_G \circ C^k(I, \mathbf{L}(\iota))\colon C^k(I, \mathfrak{h}) \to G$ 是一个像包含于 H 中的光滑映射，利用 C^∞-初始性，我们看到 evol_H 是光滑的。□

由引理 6.4.9，我们还可推出以下结论：由于 $\mathbf{L}(\alpha_j \circ \eta) = \mathbf{L}(\alpha_j) \circ \delta(\eta)$。

引理 6.4.10。设 G 为李群，$\gamma\colon I \to \mathbf{L}(G)$ 为连续路径，且 $\eta\colon I \to G$ 为 C^1。假设

$$\delta(\alpha_j \circ \eta) = \mathbf{L}(\alpha_j) \circ \gamma \quad \textit{for all } j \in J$$

对于一族 $(\alpha_j)_{j \in J}$ 李群态射 $\alpha_j\colon G \to G_j$，满足映射 $\mathbf{L}(\alpha_j)\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(G_j)$ 在 $\mathbf{L}(G)$ 上分离点。则 $\delta(\eta) = \gamma$。□

我们记录一个简单的推论。该主题将在定理 9.5.6 中再次讨论。

引理 6.4.11。设 G_1 和 G_2 为李群，且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。

(a) 若 G_1 和 G_2 是 C^k-半正则的，则李群 $G := G_1 \times G_2$ 也同样是 C^k-半正则的。记 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$。若 $\mathrm{pr}^j\colon G \to G_j$，$(g_1, g_2) \mapsto g_j$ 表示关于 $j \in \{1, 2\}$ 的投影，则

$$\mathrm{Evol}_G(\gamma) = (\mathrm{Evol}_{G_1}(\gamma_1), \mathrm{Evol}_{G_2}(\gamma_2))$$

对所有 $\gamma \in C^k(I, \mathfrak{g})$，其中 $\gamma_j := \mathbf{L}(\mathrm{pr}^j) \circ \gamma$。

(b) 若 G_1 和 G_2 均为 C^k-正则，则 G 也为 C^k-正则。

证明。简记 $\mathfrak{g}_j := \mathbf{L}(G_j)$ 为 $j \in \{1, 2\}$。

(a) 给定 $\gamma \in C^k(I, \mathfrak{g})$，我们有 $\gamma_j := \mathbf{L}(\mathrm{pr}^j) \circ \gamma \in C^k(I, \mathfrak{g}_j)$。那么 $\eta := (\mathrm{Evol}(\gamma_1), \mathrm{Evol}(\gamma_2))\colon I \to G_1 \times G_2 = G$，

$$t \mapsto (\mathrm{Evol}(\gamma_1)(t), \mathrm{Evol}(\gamma_2)(t))$$

是一个 C^k-映射，使得 $\delta(\mathrm{pr}_j \circ \eta) = \delta(\mathrm{Evol}(\gamma_j)) = \gamma_j = \mathbf{L}(\mathrm{pr}_j) \circ \gamma$，因此$\eta = \mathrm{Evol}(\gamma)$，由引理 6.4.10 可知。

(b) 根据 (a)，对于所有 $\gamma \in C^k(I, \mathfrak{g})$，我们有 $\mathrm{evol}_G(\gamma) = (\mathrm{evol}^{G_1}(\mathbf{L}(\mathrm{pr}_1) \circ \gamma, \mathbf{L}(\mathrm{pr}_2) \circ \gamma)$。由于 $\mathrm{evol}^{G_j}\colon C^k(I, \mathfrak{g}_j) \to G_j$ 光滑，且这些线性映射

$$C^k(I, \mathbf{L}(\mathrm{pr}_j))\colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^k(I, \mathfrak{g}_j), \quad \gamma \mapsto \mathbf{L}(\mathrm{pr}_j) \circ \gamma$$

根据推论 1.7.13，这些映射是连续的，因而也是光滑的，因此我们可得 $\mathrm{evol}_G\colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to G$ 光滑。□

备注 6.4.12。根据引理 3.3.14(b)，李代数同态 $\theta := (\mathbf{L}(\mathrm{pr}_1), \mathbf{L}(\mathrm{pr}_2))\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(G_1) \times \mathbf{L}(G_2)$ 是拓扑向量空间同构。若通过 θ 将 $\mathbf{L}(G)$ 与 $\mathbf{L}(G_1) \times \mathbf{L}(G_2)$ 视为相同，则 $\mathbf{L}(\mathrm{pr}_j)$ 对应于投影 $\pi_j\colon \mathbf{L}(G_1) \times \mathbf{L}(G_2) \to \mathbf{L}(G_j)$，即投影到第 j 个分量。因此，在引理 6.4.11(a) 的情形下，我们可以将 $\gamma \in C^k(I, \mathfrak{g})$ 视为有序对 $(\gamma_1, \gamma_2) \in C^k(I, \mathfrak{g}_1) \times C^k(I, \mathfrak{g}_2)$，并对 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in C^k(I, \mathfrak{g})$ 写作 $\mathrm{Evol}_G(\gamma) = (\mathrm{Evol}^{G_1}(\gamma_1), \mathrm{Evol}^{G_2}(\gamma_2))$。

第 6 章习题

习题 6.4.1. 设 G 是一个正则李群，且 $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ 是一个子群。假设该子群

$$G^\Gamma := \{g \in G\colon (\forall \gamma \in \Gamma)\ \gamma(g) = g\}$$

是一个李子群。证明 G^Γ 是正则的。

习题 6.4.2. 设 M 是一个有限维流形，E 是一个局部凸空间，且 $\Omega^p_{C^r}(M, E)$ 是 E 值 p 阶 C^r 类微分形式的空间。证明映射

$$\Phi\colon \Omega^p_{C^r}(M, E) \to C^r(M, E)^{\mathcal{V}(M)^p}, \quad \Phi(\omega)(X_1, \ldots, X_p) := \omega(X_1, \ldots, X_p)$$

是局部凸空间之间的拓扑嵌入。

习题 6.4.3. 设 $r \le s \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, M 是一个紧流形，K 是一个李群。证明包含映射 $C^s(M, K) \hookrightarrow C^r(M, K)$ 是李群态射。

习题 6.4.4. 设 G 和 N 是李群，并假设同态 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(N)$ 定义了 G 在 N 上的光滑作用。证明，对于每个紧流形 M 和任意 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，规定 $(f.\xi)(m) := f(m).\xi(m)$ 定义了李群 $C^r(M, G)$ 在李群 $C^r(M, N)$ 上的光滑作用，并且任意光滑交叉同态 $\chi\colon G \to N$ 都诱导出一个光滑交叉同态

$$\chi_*\colon C^k(M, G) \to C^k(M, N), \quad f \mapsto \chi \circ f$$

（参见习题 5.5.2）。

习题 6.4.5. 设 G 是一个李群，且 $\varphi\colon M_1 \to M_2$ 是带边界的紧流形之间的光滑映射。证明，对于每个 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，映射

$$\varphi^*\colon C^r(M_2, K) \to C^r(M_1, K), \quad f \mapsto f \circ \varphi$$

是李群态射。

习题 6.4.6. 证明，对于任意李群 G 和 $k \in \mathbb{N}$，映射

$$C^k(I, G) \to C^{k-1}(I, TG), \quad \gamma \mapsto \gamma'$$

若赋予 TG 典范李群结构（命题 5.2.2），则它是李群态射。

习题 6.4.7. 设 K 是李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$；M 是有限维流形，且 $X \subseteq M$ 是一个紧闭包子集。证明，对每个 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，群

$$C^r_X(M, K) := \{f \in C^r(M, K)\colon (\forall m \in M \setminus X)\ f(m) = e\}$$

具有自然李群结构，其李代数为 $C^r_X(M, \mathfrak{k})$。提示：仿照 $X = M$、M 紧的情形构造坐标图。

习题 6.4.8. 设 M 是一个光滑流形，H 是一个正则李群，而 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{h})$ 是 MC 方程的一个解。证明：

(1) 对任意微分同胚 $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$，有

$$\mathrm{per}_\alpha^{m_0}(\varphi^*\alpha) = \mathrm{per}_\alpha^{\varphi(m_0)}(\alpha) \circ \pi_1(\varphi, m_0)\colon \pi_1(M, m_0) \to H.$$

(2)设 G 是一个李群，通过 $g.m = \sigma_g(m)$ 从左平移光滑作用于 M，并且分别通过自同构 $\rho_H(g)$ 和 $\rho_{\mathfrak{h}}(g)$ 作用于 H 和 $\mathfrak{h}$。若满足以下条件，则称 α 为等变形式：

$$\sigma_g^*\alpha = \rho_{\mathfrak{h}}(g) \circ \alpha$$

对每个 $g \in G$ 都成立。证明，若 α 是等变的，则

$$\rho_H(g) \circ \mathrm{per}_\alpha^{m_0}(\alpha) = \mathrm{per}_\alpha^{g.m_0}(\alpha) \circ \pi_1(\sigma_g, m_0)\colon \pi_1(M, m_0) \to G.$$

此外，若 m_0 被 G 固定且 G 连通，则

$$\mathrm{im}(\mathrm{per}_\alpha^{m_0}) \subseteq H^G.$$

习题 6.4.9. 证明引理 6.1.7 也可由引理 2.5.13 直接推出，其中应用的光滑右作用为 $\mathfrak{g} \times G \to \mathfrak{g}$，$(y, g) \mapsto$ 伴随表示$_{g^{-1}}(y)$。

6.5 第 6 章的注释与评述

定理 6.1.16 是 [Mil84] 中的定理 8.1。事实上，这一定理是定义正则性概念时的指导性动机之一。关于 G值 C^k映射的基本定理（定理 6.1.13）的一个版本可以

在 [Alz13, Alz21] 中找到。关于 Kriegl–Michor 便利设置下的正则李群，参见 [KM97]。许多例子类的正则性在 [KM97b] 和 [Gl12b] 中得到了确立。更强的正则性，如 L^1正则性和 L^∞正则性，最近在 [Gl15b] 中进行了研究（另见 [Nik21], [GH23], 和 [GSu23]）；对于 L^1正则性，需要一个光滑的演化 Evol: $L^1(I,\mathfrak{g}) \to C(I,G)$，其值取于绝对连续的 G值路径组成的群中。在巴拿赫–李群的情形下，甚至可以用一个由非原子的 $\mathfrak{g}$值向量测度构成的巴拿赫空间替换 $L^1(I,\mathfrak{g})$，并考虑作为连续 G值有界变差函数的演化（见 [GSS24]）。Hanusch [Hn22] 将许多新思想引入了正则性理论。特别地，获得了 C^k正则性的刻画。这些刻画涉及李群的某些完备性性质。 [Gl17, Gl19a] 研究了无限维李群关于其左一致结构的完备性。定理 6.4.1 在 [Hn22], 中得到，部分基于 [Gl12b] 的先前工作。Trotter 乘积公式和交换子公式（如有限维李理论中熟知的那样）以一种强形式推广到了 L^∞正则李群 [Gl15b], , 也推广到了 C^0正则李群 [Hn20]。每个 C^0半正则 Fr´echet–李群都是 C^0正则的 [Hn19]。

正则性是一种自然的假设，它提供了许多方法，使我们能够从无穷小层面过渡到整体层面。这一正则性概念由 Milnor [Mil84]提出。它弱于 μ-正则性（另见 [Ne06a]），后者由 Omori 等人在 [OMY82, OMY83a] 中引入（综述见 [KYM85] ，而在 Fr¨olicher 群背景下的讨论见 [Te02] ），但对于李理论的核心应用而言，它仍然足够强。

7 局部指数李群

本章将讨论具有指数函数的李群 G，该函数性质良好：它将 $\mathbf{L}(G)$ 中的某个零邻域微分同胚地映到 G 中的一个 e-邻域。我们称这类李群为局部指数李群。根据反函数定理，所有巴拿赫李群，尤其是所有有限维李群，都是局部指数的。局部指数李群这一类群还包含种类繁多的其他有趣群，例如，对于麦基完备连续逆代数 $\mathcal{A}$，矩阵群 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$，以及取值于任意局部指数李群 K 的紧流形上光滑映射所成的群 $C^\infty(M,K)$。甚至，具有局部指数结构群 K 的紧流形上主丛的规范群 $\mathrm{Gau}(P)$也都是局部指数的。这些类型的群、它们的积分子群（参见第 9.2 节）以及它们的中心扩张，一直是我们系统研究局部指数李群的主要动机。正如我们将在第 9 章看到的，局部指数性的假设使我们能够为子群发展出一套强有力的李理论；此外，还可以刻画那些能够构造李群商群的正规子群。

存在一些正则 Fr´echet–李群，它们并非局部指数。一个著名的例子是圆的微分同胚群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$，但也有更简单的例子，例如半直积 $G = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ with$\alpha(t)((z_n)) = (e^{itn} z_n)$（例 5.6.11）。

如果指数映射 $\exp_G\colon \mathbf{L}(G) \to G$ 是整体微分同胚，则称李群为指数的，这一条件远强于局部指数性。此类群的重要类别来自单连通有限维幂零李群（[HiNe12]），但事实证明，指数李群这一类在射影极限下封闭，因此还包含与幂零李代数的射影极限（即射影极限的幂零李代数）相关的有趣的单连通群。

预备知识：第5章

7.1 局部指数李群的例子

在本节开头，我们介绍几类最重要的局部指数李群：紧流形上的可微映射群

以及连续逆代数的单位元群。我们还给出一些具体例子，后文将反复用它们来展示各种不良行为。特别是，我们将看到一个解析的指数李群，但其李代数上的相应全局乘法并非解析的。我们还会遇到一个指数李群，其李代数包含一些不受伴随作用保持的闭理想。

7.1.1 局部指数李群

定义 7.1.1。 若李群 G局部指数 ，则称其为局部指数李群；这意味着它有一个指数函数 $\exp_G\colon \mathbf{L}(G) \to G$ ，并且存在一个开零邻域$U \subseteq \mathbf{L}(G)$，使得 $\exp_G|_U$ 是到 G 的一个开 e-邻域上的微分同胚。

若李群 G 有一个指数函数，且该函数是整体微分同胚 $\exp_G\colon \mathbf{L}(G) \to G$，则称其为指数李群 。

命题7.1.2。每个巴拿赫–李群都是局部指数李群。特别地，每个有限维李群都是局部指数李群。

证明。 由 $T_0(\exp_G) = \mathrm{id}^{\mathbf{L}(G)}$ 可知，结论由巴拿赫流形的反函数定理得出。□

命题 7.1.3。若 E 是局部凸空间，且 $\Gamma \subseteq E$ 是离散子群，则 E/Γ 是局部指数李群。反过来，对于任意连通阿贝尔局部指数李群 G，指数函数 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ 是光滑同态，且 $\ker(\exp_G)$ 是一个离散子群，其中 $G \cong \mathfrak{g}/\ker\exp_G$。

证明。 商群 E/Γ 是局部指数的这一点，源于如下事实：对于这些群，$\mathbf{L}(E/\Gamma) \cong E$，且商映射 $q\colon E \to E/\Gamma$ 是一个指数函数（例 5.6.5）。

反过来，若 G 是连通阿贝尔局部指数李群，则其李代数 $\mathfrak{g}$ 也是阿贝尔的（例 5.1.9），因此 $\exp_G\colon (\mathfrak{g}, +) \to G$ 是群同态（引理 5.6.16）。 G 的局部指数性意味着 $\exp_G$ 是一个核为离散子群的覆盖态射，因此 $\exp_G$ 可通过一个李群同构 $\mathfrak{g}/\ker(\exp_G) \to G$ 分解。□

例 7.1.4。(a) 麦基完备连续逆代数的单位群是局部指数的（参见定理 10.1.15 及其证明）： 我们回顾例 5.6.9，其中指出，每个复麦基完备连续逆代数的单位群 $\mathcal{A}^\times$ 都有一个解析指数函数

$$\exp_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\times,$$

由全纯函数演算定义。子集

$$\Omega := \{a \in \mathcal{A}\colon \operatorname{Spec}(a) \cap]-\infty, 0] = \emptyset\}$$

是 $\mathcal{A}^\times$ 中的一个开**1**邻域，并且利用满足 $\log(1) = 0$ 的复对数函数 $\log\colon \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0] \to \mathbb{C}$，我们得到全纯函数

$$\log_{\mathcal{A}}\colon \Omega \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \log(\zeta)(\zeta \mathbf{1} - x)^{-1}\, d\zeta,$$

其中 Γ 是围绕 x 的围道，位于 $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$。现在，谱映射定理意味着，当谱半径 $\rho(x)$ 足够小时，$(\log_{\mathcal{A}} \circ \exp_{\mathcal{A}})(x) = x$ 成立，并且对于每个 $x \in \Omega$，$(\exp_{\mathcal{A}} \circ \log_{\mathcal{A}})(x) = x$。我们得出结论：单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是局部指数的。

如果 $\mathcal{A}$ 是实连续逆代数，那么利用其复化 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 是连续逆代数这一事实（推论 10.3.7），可以看出 $\log_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\Omega \cap \mathcal{A}^\times) \subseteq \mathcal{A}$，并且 $\log_{\mathcal{A}} := \log_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}|_\Omega$ 是 $\exp_{\mathcal{A}} = \exp_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}|_{\mathcal{A}}$ 的光滑局部逆。

(b) 如果 M 是一个紧流形（可能带边界），且 K 是一个具有指数函数的李群，那么例 5.6.7 表明，李群 $G := C^r(M, K)$，$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 具有由下式给出的指数函数

$$\exp_G\colon C^r(M, \mathfrak{k}) \to C^r(M, K), \quad \xi \mapsto \exp_K \circ \xi.$$

此外，若 K 是局部指数的，则定理 5.4.2 的证明表明，我们可以用 $\exp_G$ 来定义 G的坐标图，因此 G是局部指数的。

(c) 更大一类光滑映射群可由主丛的规范群 构成。若 $q\colon P \to M$ 是结构群为 K的光滑主丛，且 $\sigma\colon P \times K \to P$，$(p, k) \mapsto \sigma_k(p) = p.k$ 表示 K 在 P上的右作用，则

$$\mathrm{Gau}(P) := \{\varphi \in \mathrm{Diff}(P)\colon q \circ \varphi = q,\ (\forall k \in k)\ \varphi \circ \sigma_k = \sigma_k \circ \varphi\}$$

称为该丛的规范群，其元素称为规范变换。根据 $q \circ \varphi = q$，每个规范变换 φ 都可写为 $\varphi(p) = p.f(p)$，其中 $f\colon P \to K$ 是某个光滑函数；由 $\varphi \circ \sigma_k = \sigma_k \circ \varphi$可得 $kf(p.k) = f(p)k$，即，

$$f(p.k) = k^{-1} f(p) k \quad \text{for} \quad p \in P, k \in K. \tag{7.1}$$

反过来，每个满足 (7.1) 的光滑函数 $f\colon P \to K$ 都定义了一个规范变换：$\varphi_f(p) := p.f(p)$。此外，

$$\begin{aligned}\varphi_{f_1}(\varphi_{f_2}(p)) &= \varphi_{f_2}(p).f_1\big(\varphi_{f_2}(p)\big) = p.(f_2(p) f_1(p.f_2(p)))\\ &= p.(f_1(p) f_2(p)) = \varphi_{f_1 f_2}(p)\end{aligned}$$

这意味着我们有一个群同构 $C^\infty(P, K)^K \to \mathrm{Gau}(P)$ $f \mapsto \varphi_f$，其中

$$C^\infty(P, K)^K := \{f \in C^\infty(P, K)\colon (\forall p \in P)(\forall k \in K)\ f(p.k) = k^{-1} f(p) k\}.$$

因此，我们可以将 Gau(P) 视为群 $C^\infty(P,K)$ 的一个子群，并赋予其逐点乘积运算。如果丛 P 是平凡的，那么存在一个光滑的整体截面 $\sigma\colon M\to P$，且映射

$$C^\infty(P,K)^K \to C^\infty(M,K),\quad f\mapsto f\circ\sigma$$

是一个群同构。

Ch. Wockel（[Wo07a]）的结果表明，(b) 甚至可以推广到规范群：若 K 是局部指数的且 M 是紧的，则 Gau(P) 带有自然李群结构，从而成为一个局部指数李群（另见 [SJ13]）。这可通过证明以下映射

$$C^\infty(P,\mathfrak{k})^K := \{\xi\in C^\infty(P,\mathfrak{k})\colon (\forall k\in K)\ \xi\circ\sigma_k = \mathrm{Ad}(k)^{-1}\circ\xi\}$$

映射

$$\mathfrak{gau}(P) := C^\infty(P,\mathfrak{k})^K \to C^\infty(P,K)^K \cong \mathrm{Gau}(P),\quad \xi\mapsto \exp_K\circ\xi$$

是局部同胚，并且可用于在 Gau(P) 上定义局部指数李群结构（另见 [OMY83a，命题 6.6]）。

若 M 不是紧的，则子群

$$\mathrm{Gau}_c(P)\trianglelefteq \mathrm{Gau}(P)$$

由所有满足以下条件的元素 $\varphi\in$ Gau(P) 组成：子集$\{p\in P\colon\ \varphi(p)\neq p\}$ 在 q 下的像是相对紧的；若 K 是局部指数的，则它带有局部指数李群结构。

7.1.2 一些指数李群

接下来，我们更仔细地考察指数李群。对于任意具有李代数 $\mathfrak{g}$ 的指数李群 G，我们可以利用微分同胚 $\exp_G\colon\ \mathfrak{g}\to G$，在 $\mathfrak{g}$ 上定义李群结构，方法如下：

$$x*y := \exp_G^{-1}(\exp_G x\exp_G y).$$

于是，($\mathfrak{g}$, $*$) 是一个李群，且 $\mathbf{L}(\mathfrak{g},\ *)\ =\ \mathfrak{g}$，并且 $\mathfrak{g}$ 上的乘法满足

$$tx*sx = (t+s)x\quad \text{for}\quad t,s\in\mathbb{R}, x\in\mathfrak{g}. \tag{7.2}$$

这意味着 $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ 是该群的一个指数函数。反过来，如果，
$*$ 在带有单位元 0 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上定义李群结构，则 $\mathrm{id}_\mathfrak{g}$ 是指数函数，当且仅当满足 (7.2)。从这个意义上说，指数李群可以等同于带有满足 (7.2) 的李群结构的局部凸李代数，而下文的定理 7.1.6 意味着，李代数结构完全决定了

$\mathfrak{g}$ 。我们称这类李代数为指数的。在下文的定理 7.3.10 中，我们将特别看到，每个局部凸幂零李代数都是指数的。

借助第 5.5 节中的工具，我们可以立即证明，每个李代数 $\mathfrak{g}$ 至多带有一个相应的指数李群结构。为此，我们需要：

命题 7.1.5. 设 $(\mathfrak{g}_1, *)$ 与 $(\mathfrak{g}_2, *)$ 为两个指数李代数，且 $\psi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 为李代数的连续同态。则$\psi\colon (\mathfrak{g}_1, *) \to (\mathfrak{g}_2, *)$ 是李群同态。

证明. 鉴于

$$\delta(\psi)(x) = \kappa_{\mathfrak{g}_2}(\psi(x)) \circ \psi = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)}\, dt \circ \psi = \psi \circ \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt = \psi \circ \kappa_{\mathfrak{g}_1}(x),$$

命题 5.5.11 表明 ψ 是李群同态。 □

由此，我们得到如下唯一性结果：

定理 7.1.6（指数李群唯一性定理）。同一个局部凸李代数 $\mathfrak{g}$ 上的两个指数李群结构 $(\mathfrak{g}, *_1)$ 和 $(\mathfrak{g}, *_2)$ 相同。

例 7.1.7。一个典型的非幂零实指数李群是二维群 $G = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$，其乘法为

$$(x, y)(x', y') = (x + e^y x', y + y').$$

它同构于实直线仿射群的单位连通分支 $\mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ （参见例 5.2.9）。它的指数映射为

$$\exp_G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \exp_G(x, y) = \Big(\frac{e^y - 1}{y} x, y\Big)$$

（参见命题 5.6.10）。这是一个整体微分同胚，其逆映射为

$$\log_G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \log_G(x, y) = \Big(\frac{y}{e^y - 1} x, y\Big)$$

（习题 7.1.1）。在李代数层面上，我们有

$$[(x, y), (x', y')] = (yx' - y'x, 0),$$

使得生成元 $e_1 = (1,0)$ 和 $e_2 = (0,1)$ 满足 $[e_2, e_1] = e_1$，这立即意味着 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$ 是可解但非幂零的。

例 7.1.8。我们介绍一个指数 Fr´echet–李群 G，它是解析的，其指数函数是解析的，但其逆映射并非解析的（Fr´echet 空间上不存在解析的反函数定理），且相应的乘法在 $\mathfrak{g}$上并非解析的。

设 $H = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R} \cong \mathbf{Aff}(\mathbb{R})_0$ 如例 7.1.7 中所示，并令

$$G := H^{\mathbb{N}} = (\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R})^{\mathbb{N}},$$

赋予其直积群结构。我们赋予 G 流形结构，方法是将其与 Fr´echet 空间 $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ 认同。这样一来， G 就成为一个解析流形。由于定义乘法的幂级数在全局范围内收敛， G 的乘法是解析的，求逆映射也同样如此；在每个分量上，它由下式给出

$$(x, y)^{-1} = (-e^{-y}x, -y).$$

从这个意义上说， G 是一个解析李群。

G 的指数映射由下式给出

$$\exp_G(x, y)_n = \Big(\frac{e^{y_n} - 1}{y_n} x_n, y_n\Big),$$

而且这个映射是解析的，因为相应的幂级数在全局范围内收敛。对于逆函数，我们得到

$$\exp_G^{-1}(x, y)_n = \Big(\frac{y_n}{e^{y_n} - 1} x_n, y_n\Big),$$

但这个映射不是解析的，因为实解析函数的幂级数

$$y \mapsto \frac{y}{e^y - 1}$$

仅在从 -2π 到 2π的区间上收敛，而无穷多个此类区间的乘积在 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$中不是开子集。

由指数图得到的李代数 $\mathfrak{h}$ 上的乘法 $*$ 由下式给出

$$\begin{aligned}(x, y) * (x', y') &= \log(\exp_G(x, y) \exp_G(x', y')) \\ &= \log\Big(\frac{e^y - 1}{y} x + e^y \frac{e^{y'} - 1}{y'} x', y + y'\Big) \\ &= \Big(\frac{y + y'}{e^{y+y'} - 1}\Big(\frac{e^y - 1}{y} x + e^y \frac{e^{y'} - 1}{y'} x'\Big), y + y'\Big)\end{aligned}$$

特别是

$$(0, y) * (1, 0) = \log(e^y, y) = \Big(\frac{ye^y}{e^y - 1}, y\Big) = \Big(\frac{y}{1 - e^{-y}}, y\Big).$$

因此，上述论证表明，乘积李代数 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}^{\mathbb{N}}$ 上的乘法不是解析的。

注 7.1.9。设 E 是一个 Mackey完备局部凸空间，且$\alpha\colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群(E) 是作用在 E 上的一个光滑 $\mathbb{R}$-作用，因此我们可以构造半直积李群 $G := E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$。群 G 的指数函数为

$$\exp_G(v,t) := (\beta(t)v, t) \quad \text{with} \quad \beta(t) = \int_0^1 \alpha_{st}\, ds$$

（命题 5.6.10）。由此公式立即可知，$\exp_G$ 是双射，当且仅当对每个 $t \in \mathbb{R}$, 算子 $\beta(t) \in \mathcal{L}(E)$都是双射；在这种情况下，$\exp_G$ 的逆映射由下式给出

$$\log_G(v,t) = (\beta(t)^{-1}v, t).$$

因此，$\exp_G$ 是微分同胚，当且仅当 $\beta(\mathbb{R}) \subseteq$ 一般线性群(E)，且曲线 $\beta\colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群(E)是光滑的，也就是说

$$\widetilde{\beta}\colon \mathbb{R} \times E \to E \times E, \quad (t,v) \mapsto (\beta(t)v, \beta(t)^{-1}v)$$

$\widetilde{\ }$是光滑的。根据命题 D.2.12(2)，映射 $\beta_1\colon (t,v) \mapsto \beta(t)v$ 是$\widetilde{\ }$光滑的，而定理 D.4.1 表明，若映射 $\beta_2\colon (t,v) \mapsto \beta(t)^{-1}v$ 连续，则它是光滑的。

现在我们转向这种形式的指数李代数的一个具体例子。

例 7.1.10。令 $E \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 为 1-周期函数的闭子空间，$\mu \in \mathbb{R}^\times$，并考虑同态 $\alpha\colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群(E)，其定义为

$$(\alpha_t f)(x) := e^{\mu t} f(x+t).$$

相应的 $\mathbb{R}$-作用于 E 是光滑的，这可由映射 $(t, f, x) \mapsto e^{\mu t} f(x+t)$ 的光滑性推出（命题 4.1.21）；而后者又可由 $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 的求值映射的光滑性推出（引理 4.1.15）。按照注 D.2.3 中的含义理解指数映射，我们有 $\alpha_t = e^{tD}$, 其中 $Df = \mu f + f'$。函数 $e_n(x) = e^{2\pi i n x}, n \in \mathbb{Z}$ 是 D 和 α 的特征函数，其

$$De_n = (\mu + 2\pi i n)e_n \quad \text{and} \quad \alpha_t e_n = e^{t(\mu+2\pi i n)} e_n.$$

对于算子 $\beta(t)$，这给出 $\beta(t)e_n = \beta_n(t)e_n$，其中

$$\beta_n(t) = \int_0^1 e^{st(\mu+2\pi i n)}\, ds = \begin{cases} 1 & \text{for } t = 0 \\ \frac{e^{t(\mu+2\pi i n)}-1}{t(\mu+2\pi i n)} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

函数 $\beta_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是解析的，因此特别是光滑的。为了证明相应的算子 $\beta(t)$ 可逆，我们考察 E 的傅里叶变换表示，得到

$$E = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \colon (\forall k \in \mathbb{N}) \lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0 \Big\}$$

其拓扑由半范数定义

$$p_k\Big(\sum_n a_n e_n\Big) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} (|n|+1)^k |a_n|.$$

相应的巴拿赫空间

$$E_k := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \colon p_k(a) < \infty\}$$

满足 $E \cong \varprojlim E_k$. 我们记 $q_k \colon E \to E_k$ 为典范映射，它是连续且单射的。

对于序列 $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，规定 $T_c(e_n) := c_n e_n$，当且仅当对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在某个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $C_{k,\,m} > 0$，使得

$$p_k\Big(\sum_n a_n c_n e_n\Big) \le C_{k,m} p_m\Big(\sum_n a_n e_n\Big).$$

将其应用于基元素 e_n，这个不等式便得到

$$|c_n|(1+|n|)^k \le C_{k,m}(1+|n|)^m,$$

这意味着 (c_n) 是多项式增长的。反过来，若 (c_n) 是多项式增长的：$|c_n| \le M(1+|n|^m)$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$, $M > 0$ 成立，那么对每个 $k \in \mathbb{N}$，我们都有

$$|c_n||n|^k \le M(1+|n|^m)|n|^k \le M'|n|^{m+k}$$

对于某个 $M' > 0$，这意味着 T_c 可延拓为 E上的有界算子。如果每个 c_n 都非零，且序列$c^{-1} = (c_n^{-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ 也具有多项式增长，则算子 T_c 可逆。

因此，为了证明 $\beta(t) \in$ 属于一般线性群(E)，我们必须证明每个序列 $(\beta_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ 及其逆映射都具有多项式增长。对于满足 $r \le |t| \le R$的 $t \ne 0$，我们有

$$|\beta_n(t)| = \frac{|e^{t(\mu+2\pi i n)} - 1|}{|t(\mu + 2\pi i n)|} \le \frac{e^{t\mu}+1}{|t|\mu} \le \frac{e^{R\mu}+1}{r\mu}$$

and

$$|\beta_n(t)^{-1}| = \frac{|t(\mu+2\pi i n)|}{|e^{t(\mu+2\pi i n)} - 1|} \le \frac{|t|(|\mu| + 2\pi|n|)}{|e^{t\mu} - 1|} \le \frac{R(|\mu| + 2\pi|n|)}{\min(|e^{R\mu}-1|, |e^{r\mu}-1|)},$$

这意味着 $\beta(t)$ 属于一般线性群(E)，并且我们对$r \le |t| \le R$有一致估计，这表明 $\beta(t)$ 可延拓为一般线性群(E_k)中的连续线性算子，$k \in \mathbb{N}$，且 $\beta(t)^{-1}$ 可延拓为

$\sim\mathcal{L}(E_{k+1},\ E_k)$。为验证映射 β_2的连续性，只需对$\widehat{}$中的每个 k验证相应映射 $q_k\circ\beta_2\colon\ \mathbb{R}\times E\to E_k$，的连续性。正如我们刚才所见，该映射可分解为映射 γ: $\mathbb{R}\times E_{k+1}\to E_k$. 。对于$\delta(t):=\beta(t)^{-1}|_{E_{k+1}}^{E_k}$，有 $\gamma(t,\ v)=\delta(t)v$。上述估计表明 δ是局部有界的。另一方面，对于每个 $n\in\mathbb{Z}$，映射 $t\mapsto\delta(t)e_n$ 都是连续的，而 e_n 张成了 E_{k+1}的一个稠密子空间。由此很容易推出 γ 是连续的（习题 7.1.3）。进而可知$\sim$ $\sim\beta_2$ 是连续的，因此 β_2 是光滑的（定理 D.4.1）。我们由此得出 $\beta\colon\ \mathbb{R}\to$ 一般线性群(E)是光滑的，因此 G 是一个指数李群。

第 7.1 节习题

习题 7.1.1. 令 G为赋予 $\mathbb{R}^2$ 以下乘法所得到的二维群

$$(x,y)(x',y')=(x+e^y x',y+y').$$

证明

(a) $G\cong\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_+$是 $\mathbb{R}$上的保定向仿射映射群。(b) G 是指数李群。其指数函数为

$$\exp_G\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \exp_G(x,y)=\Big(\frac{e^y-1}{y}x,y\Big),$$

并且其逆映射为

$$\log_G\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \log(x,y)=\Big(\frac{y}{e^y-1}x,y\Big).$$

习题 7.1.2。设 G 是赋予乘法后得到的三维群：$\mathbb{C}\times\mathbb{R}$

$$(x,y)(x',y')=(x+e^{iy}x',y+y').$$

证明这是一个非指数型的三维可解李群。其指数映射为

$$\exp_G\colon\mathbb{C}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}\times\mathbb{R},\quad \exp_G(x,y)=\Big(\frac{e^{iy}-1}{iy}x,y\Big).$$

确定指数映射的像、奇点，以及所有满足 $\exp_G(x,y)=\exp_G(x',y')$ 的数对 $((x,\ y),\ (x',\ y'))$。

群 G 在几何中自然出现，作为单位连通分支 $\mathrm{Mot}_2(\mathbb{R})_0$ 的万有覆盖；$\mathrm{Mot}_2(\mathbb{R})$ 是由关于欧几里得度量的所有（仿射）等距变换 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 构成的欧几里得运动群。覆盖映射

$$q\colon G\to\mathrm{Mot}_2(\mathbb{R})_0\quad\text{ is given by }\quad q(x,y)z:=x+e^{iy}z,$$

若以标准方式将欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 等同 .

习题 7.1.3。设 X 是一个拓扑空间，E，F 是巴拿赫空间，并考虑一个局部有界映射 $\varphi\colon\ X\to\mathcal{L}(E,\ F)$。假设使映射 $\varphi^v\colon\ X\to F,\ x\mapsto\varphi(x)v$ 连续的所有 $v\in E$ 在 E 中稠密。那么映射 $\widehat{\varphi}\colon\ X\times E\to F,\ (x,\ v)\mapsto\varphi(x)(v)$ 是连续的。

提示：$\|\varphi(x)(v)-\varphi(x')(v')\|\le\|\varphi^v(x)-\varphi^v(x')\|+\|\varphi(x')\|\|v-v'\|$。

7.2 局部指数李群同态

本节的主要结果是定理 7.2.4，它断言局部指数李群之间的连续同态都是光滑的；并且，单连通局部指数李群的李代数 $\mathbf{L}(G) \to$ 到具有指数函数的群 H 的李代数 $\mathbf{L}(H)$ 的任意同态 $\mathbf{L}(G)$ 都可以积分为李群同态。由于局部指数李群未必是正则的，这些结果补充了关于正则李群的相应结果，例如定理 6.1.16。

7.2.1 自动光滑性

我们先讨论单参数群的情形。

引理 7.2.1。若 G 是局部指数的，且 $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ 是连续单参数群，则 γ 是光滑的，并且存在唯一的 $x \in \mathbf{L}(G)$，使得 $\gamma(t) = \operatorname{Exp}_G(tx)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立。

证明。设 $U = -U$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的一个凸零邻域，使得 $\exp_G|_U$ 是到 G 的一个开子集上的微分同胚，并令 $U_1 := \frac{1}{2}U$。由于 γ 在 0 处连续，存在一个 $\varepsilon > 0$，使得 $\gamma([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \exp_G(U_1)$。于是 $\alpha(t) := (\exp_G|_U)^{-1}(\gamma(t))$ 定义了一个连续曲线 $\alpha\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to U_1$，且当 $|t| \le \varepsilon$ 时，$\exp(\alpha(t)) = \gamma(t)$。对于任意这样的 t，我们有

$$\exp_G\left(2\alpha(\tfrac{t}{2})\right) = \exp_G(\alpha(\tfrac{t}{2}))^2 = \gamma(\tfrac{t}{2})^2 = \gamma(t) = \exp_G(\alpha(t)),$$

因此，$\exp_G$ 在 U 上的单射性给出 $\alpha(\frac{t}{2}) = \frac{1}{2}\alpha(t)$。对于 $|t| \le \varepsilon.$，由归纳法可得

$$\alpha(\tfrac{t}{2^k}) = \tfrac{1}{2^k}\alpha(t) \quad \text{for} \quad |t| \le \varepsilon, k \in \mathbb{N}. \tag{7.3}$$

特别地，对于 $|t| \le \frac{\varepsilon}{2^k}.$，我们得到 $\alpha(t) \in \frac{1}{2^k}U_1$。对于满足 $|n| \le 2^k$ 且 $|t| \le \frac{\varepsilon}{2^k}$ 的 $n \in \mathbb{Z}$，现在有 $|nt| \le \varepsilon$, $n\alpha(t) \in \frac{n}{2^k}U_1 \subseteq U_1$，并且

$$\exp_G(n\alpha(t)) = \gamma(t)^n = \gamma(nt) = \exp_G(\alpha(nt)).$$

因此，$\exp_G$ 在 U_1 上的单射性给出

$$\alpha(nt) = n\alpha(t) \quad \text{for} \quad n \le 2^k, |t| \le \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{7.4}$$

结合（7.3）和（7.4），可得

$$\alpha(\tfrac{n}{2^k}t) = \tfrac{n}{2^k}\alpha(t) \quad \text{for} \quad |t| \le \varepsilon, k \in \mathbb{N}, |n| \le 2^k.$$

由于所有数 $\frac{nt}{2^k}$、$n \in \mathbb{Z}$、$k \in \mathbb{N}$、$|n| \le 2^k$ 的集合在区间 $[-t, t]$ 中稠密，α 的连续性意味着

$$\alpha(t) = \frac{t}{\varepsilon}\alpha(\varepsilon) \quad \text{for} \quad |t| \le \varepsilon.$$

特别地， α 是光滑的，且对某个 $x \in \mathfrak{g}$ 具有 $\alpha(t) = tx$ 的形式。因此对 $|t| \le \varepsilon$ 有 $\gamma(t) = \exp_G(tx)$，但随后对 $n \in \mathbb{N}$ 成立的 $\gamma(nt) = \exp_G(ntx)$ 导致对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $\gamma(t) = \exp_G(tx)$。□

命题 7.2.2。设 G 是一个局部指数李群。对于 $x, y \in \mathbf{L}(G)$，T*rotter* 乘积公式

$$\exp_G(x+y) = \lim_{n\to\infty} \Big(\exp_G\big(\frac{x}{n}\big) \exp_G\big(\frac{y}{n}\big) \Big)^n$$

以及C*ommutator* 公式

$$\exp_G([x,y]) = \lim_{n\to\infty} \Big(\exp_G\big(\frac{x}{n}\big) \exp_G\big(\frac{y}{n}\big) \exp_G\big(-\frac{x}{n}\big) \exp_G\big(-\frac{y}{n}\big) \Big)^{n^2}$$

成立。

证明。 为验证乘积公式，我们首先注意到，当 n充分大时，有

$$\Big(\exp_G\big(\frac{x}{n}\big) \exp_G\big(\frac{y}{n}\big) \Big)^n = \exp_G\Big(n\big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n}\big)\Big),$$

其中 $m(x,y) := x * y := \exp_G^{-1}(\exp_G x \exp_G y)$ 表示指数坐标下的局部乘法。因此只需证明

$$n \cdot \frac{x}{n} * \frac{y}{n} \to x + y,$$

但这由 $dm_{(0,0)}(x,y) = x + y$ (注 5.1.8) 得出。

对于交换子公式，我们同样注意到

$$\Big(\exp_G\big(\frac{x}{n}\big) \exp_G\big(\frac{y}{n}\big) \exp_G\big(-\frac{x}{n}\big) \exp_G\big(-\frac{y}{n}\big) \Big)^{n^2} = \exp_G\Big(n^2\big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n} * \frac{-x}{n} * \frac{-y}{n}\big)\Big),$$

因此我们必须验证

$$[x,y] = \lim_{n\to\infty} n^2\big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n} * \frac{-x}{n} * \frac{-y}{n}\big).$$

这是由以下事实得出的：交换子映射 $x * y * (-x) * (-y)$ 的二阶泰勒多项式与李括号 $[x,y]$(注 5.1.8(c)) 一致。□

在介绍自动光滑性定理之前，我们先给出一个便于判定群同态光滑性的判据。

命题 7.2.3。设 G_1 和 G_2 为具有指数映射的李群，且 $\varphi\colon G_1 \to G_2$ 为群同态。若 G_1 是局部指数的，则以下条件等价：

(a) φ 在 G_1的某个单位元邻域内光滑。(b) φ 光滑。(c) 存在连续线性映射 $\psi\colon \mathbf{L}(G_1) \to \mathbf{L}(G_2)$ 满足

$$\exp_{G_2} \circ \psi = \varphi \circ \exp_{G_1}. \tag{7.5}$$

证明。(a) $\Rightarrow$ (b)：（参见习题 5.1.4）设 U 是 G_1的一个开 e邻域，使得 $\varphi|_U$ 光滑。由于每个左平移 λ_g 都是一个微分同胚，$\lambda_g(U) = gU$ 是 g的开邻域，并且我们有

$$\varphi(gx) = \varphi(g)\varphi(x), \quad \text{i.e.,} \quad \varphi \circ \lambda_g = \lambda_{\varphi(g)} \circ \varphi.$$

因此，U 上 φ 的光滑性蕴含着 gU上 φ 的光滑性，从而 φ光滑。

(b) $\Rightarrow$ (c)：若 φ 光滑，则根据命题 5.6.12，$\psi := \mathbf{L}(\varphi)$ 满足 (7.5)。

(c) $\Rightarrow$ (a)：若 ψ 是满足 (7.5) 的连续线性映射，那么 $\exp_{G_1}$ 是局部微分同胚这一事实以及 ψ 的光滑性蕴含 (a)。□

定理 7.2.4（自动光滑性定理）。局部指数李群之间的每个连续同态 $\varphi\colon G \to H$ 都是光滑的。

证明。对 $x \in \mathbf{L}(G)$，令 $\gamma_x(t) := \exp_G(tx)$。则 $\varphi \circ \gamma_x\colon \mathbb{R} \to H$ 是一个连续单参数群，因此可写成

$$\varphi \circ \gamma_x = \gamma_{\psi(x)} \quad \text{for some} \quad \psi(x) \in \mathbf{L}(H)$$

（引理 7.2.1）。我们得到

$$\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ \psi. \tag{7.6}$$

利用 Trotter 乘积公式（命题 7.2.2），我们看到 ψ 是线性的。由于 $\exp_G$ 和 $\exp_H$ 是局部微分同胚，且 φ 是连续的，$\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ 是连续的。现在命题 7.2.3 表明 φ 是光滑的，并且 $\psi = \mathbf{L}(\varphi)$ 由 $T_0(\exp_{G_j}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_j}$ for $j = 1, 2$. □

对于不是局部指数的李群，我们仍然有任何 C^1-同态都是光滑的（习题 7.2.1），但我们还没有发现李群之间存在不是光滑的连续同态的例子。

推论 7.2.5。拓扑群 G 至多具有一种局部指数型李群结构。

定义 7.2.6。鉴于前面的推论，我们可以将局部指数李群视为一类特殊的拓扑群。更确切地说，局部指数李群范畴是拓扑群范畴的一个全子范畴。从这个意义上说，如果一个拓扑群是局部指数的，我们就称它为局部指数李群。

我们以一个判据结束本小节，该判据用于判断局部指数李群之间的态射是否为开映射。

命题 7.2.7。 对于局部指数李群的态射 $\varphi\colon G_1 \to G_2$，以下断言成立：

(1) $\ker \mathbf{L}(\varphi) = \{x \in \mathbf{L}(G_1)\colon \exp^{G_1}(\mathbb{R}x) \subseteq \ker \varphi\}$。(2) φ 是开映射，当且仅当 $\mathbf{L}(\varphi)$ 是开映射，即线性商映射。(3)若 $\mathbf{L}(\varphi)$ 是拓扑同构且 φ 是双射，则 φ 是李群同构。

证明。 (1) 条件 $x \in \ker \mathbf{L}(\varphi)$ 等价于

$$\{e\} = \exp_{G_2}\big(\mathbb{R}\,\mathbf{L}(\varphi)x\big) = \varphi\big(\exp_{G_1}(\mathbb{R}x)\big).$$

(2) 首先假设 φ 是开映射。由于 $\exp^{G_i}$, $i = 1,2$ 是局部微分同胚，

$$\exp_{G_2} \circ \mathbf{L}(\varphi) = \varphi \circ \exp_{G_1} \tag{7.7}$$

这意味着存在 $\mathbf{L}(G_1)$ 中的某个零邻域，在该邻域上 $\mathbf{L}(\varphi)$ 是开映射，因此 $\mathbf{L}(\varphi)$ 是开集。

反之，若 $\mathbf{L}(\varphi)$ 是开映射，则由 (7.7) 可知，存在一个开 e-邻域 U_1，使得在 G_1 中，$\varphi|_{U_1}$ 是开映射。我们断言，这意味着 φ 是开映射。事实上，设 $O \subseteq G_1$ 是开集且 $g \in O$。则存在 G_1 的一个开 e-邻域 U_2，满足 $gU_2 \subseteq O$ 且 $U_2 \subseteq U_1$。于是 $\varphi(O) \supseteq \varphi(gU_2) = \varphi(g)\varphi(U_2)$，并且由于 $\varphi(U_2)$ 在 G_2 中是开集，我们可知 $\varphi(O)$ 是 $\varphi(g)$ 的一个邻域，因此 $\varphi(O)$ 是开集，因为 $g \in O$ 是任意的。

(3) 由关系 $\exp^{G_2} \circ \mathbf{L}(\varphi) = \varphi \circ \exp^{G_1}$ 以及 φ 的双射性，我们推出群同态 φ^{-1} 满足

$$\varphi^{-1} \circ \exp_{G_2} = \exp_{G_1} \circ \mathbf{L}(\varphi)^{-1},$$

因此，命题 7.2.3 表明 φ^{-1} 也是光滑的。 □

定理 7.2.8。 若 $\varphi\colon G_1 \to G_2$ 是局部指数 *Fr´échet*–李群之间的态射，且 $\mathbf{L}(\varphi)\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 是满射，则 φ 有一个连续局部截面。

证明。 令 $\exp^{G_j}\colon \mathfrak{g}_j \to G_j$ 表示指数映射，$U_j \subseteq \mathfrak{g}_j$ 是一个开凸单位元邻域，使得 $\exp_{G_j}|_{U_j}$ 是到 G_j 的某个开子集上的微分同胚。于是，根据迈克尔定理（[Bou87, 第 II 章，第 4.7 节，命题 12]），存在一个连续截面 $\sigma_L\colon \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}_1$。因此

$$\sigma_G := \exp_{G_1} \circ \sigma_L|_{U_2} \circ (\exp_{G_2}|_{U_2})^{-1}\colon \exp_{G_2}(U_2) \to G_1$$

是 φ 在 $\exp^{G_2}(U_2)$ 上的连续截面。 □

7.2.2 积分李代数态射

请注意，在下面的定理中，我们并不假设目标群H是局部指数的，只假设它具有指数函数。

定理 7.2.9（积分定理）。设 H 是一个具有指数函数的李群， G 是一个1-连通局部指数李群，并且$\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ 是一个连续李代数同态。那么存在唯一的光滑同态 $\eta\colon G \to H$，使得$\mathbf{L}(\eta) = \psi$。

证明。取 $U \subseteq \mathbf{L}(G)$ 为一个开零邻域，使得 $\exp_G|_U$ 是到 G的开子集 $W := \exp_G U$ 上的微分同胚。考虑光滑函数

$$\varphi := \exp_H \circ \psi \circ (\exp_G|_U)^{-1}\colon W \to H,$$

满足

$$\varphi \circ \exp_G|_U = \exp_H \circ \psi.$$

对于 φ的左对数导数 $\delta(\varphi) = \varphi^* \kappa_H$，该恒等式在$U$ 上导出

$$\exp_G^* \varphi^* \kappa_H = \psi^* \exp_H^* \kappa_H = \psi^* \delta(\exp_H).$$

对于 $x \in U$，我们进一步由习题 7.2.5 得到

$$\begin{aligned}
\big(\psi^* \delta(\exp_H)\big)_x &= \delta(\exp_H)_{\psi(x)} \circ \psi = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)}\, dt \circ \psi \\
&= \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)} \circ \psi \, dt = \int_0^1 \psi \circ e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt = \psi \circ \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt \\
&= \psi \circ \delta(\exp_G)_x = \psi \circ (\exp_G^* \kappa_G)_x = (\exp_G^*(\psi \circ \kappa_G))_x.
\end{aligned}$$

因此，我们在 U 上得到关系 $\exp_G^* \varphi^* \kappa_H = \exp_G^*(\psi \circ \kappa_G)$。由于 $\exp_G|_U$ 是到 $\exp_G(U)$ 上的微分同胚，因此可得

$$\delta(\varphi) = \varphi^* \kappa_H = \psi \circ \kappa_G$$

在 $\exp_G(U)$ 上。现在，引理 5.5.10 蕴含存在一个开对称的 e-邻域 $W_1 \subseteq W$，满足 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$，其中 $x,\ y \in W_1$。由于 G 是单连通的，命题 C.2.1 给出了将 $\varphi|_{W_1}$ 延拓为同态 $G \to H$ 的延拓 η。于是我们有 $\mathbf{L}(\eta) = \delta(\varphi)_e = \psi$，这证明了存在性。由 G 的连通性（命题 5.5.7），可知满足 $\mathbf{L}(\eta) = \psi$ 的 η 是唯一的。□

推论 7.2.10。如果 G_1 和 G_2 是李代数同构的1-连通局部指数李群，那么 $G_1 \cong G_2$。

证明。将定理 7.2.9 应用于同构 $\psi\colon \mathbf{L}(G_1) \to \mathbf{L}(G_2)$ 及其逆映射 $\psi^{-1}\colon \mathbf{L}(G_2) \to \mathbf{L}(G_1)$，得到态射 $\varphi_1\colon G_1 \to G_2$和$\varphi_2\colon G_2 \to G_1$，且满足 $\mathbf{L}(\varphi_1) = \psi$ 和 $\mathbf{L}(\varphi_2) = \psi^{-1}$。由命题 5.5.7 可得 $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_{G_2}$ 和$\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathrm{id}_{G_1}$，因此 φ_1 是一个同构。□

推论 7.2.11。若 G 是一个1-连通局部指数李群，则映射

$$\mathbf{L}\colon \operatorname{Aut}(G) \to \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$$

是群同构。

定理 7.2.12（具有相同李代数的局部指数群）。设 $\mathfrak{g}$ 是一个局部指数李群的李代数。那么存在一个单连通李群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且在同构意义下唯一。每个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通局部指数李群都同构于一个商群 G/Γ，其中 $\Gamma \subseteq Z(G)$ 是离散子群。对于两个离散子群 Γ_1、$\Gamma_2 \subseteq Z(G)$，群 G/Γ_1 和 G/Γ_2 同构，当且仅当存在一个自同构 $\varphi \in \operatorname{Aut}(G) \cong \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$，使得 $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$。

证明。由命题 6.1.5 可知，存在一个单连通局部指数李群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$；而根据推论 7.2.10，可知它在同构意义下唯一。对于任意一个连通局部指数李群 H，若其李代数同构于 $\mathfrak{g}$，则其万有 $\widetilde{\ }$ 覆盖群 H 同构于 G。其余断言由定理 5.3.7 得出。□

注 7.2.13。给定 G_0 和离散群 Γ，那么确定所有单位连通分支为 G_0、分支群为 $\pi_0(G)$ 的李群 $G \cong \Gamma$，等价于对所有李群扩张进行分类

$$\mathbf{1} \to G_0 \hookrightarrow G \twoheadrightarrow \Gamma \to \mathbf{1}$$

（参见定义 9.5.5），也就是描述集合 $\mathbf{Ext}(\Gamma, G_0)$。HiNe12 第 18] 章讨论了这类扩张问题；另见下文定义 9.5.5。

注 7.2.14。定理 7.2.9 保证，对于任意连续同态 $\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$，它从局部指数连通李群 G 的李代数映到带指数函数的李群 H 的李代数，存在唯一的李群态射 $\widetilde{\eta}\colon G \to H$，满足 $\mathbf{L}(\widetilde{\eta}) = \psi$。这里我们将 G 和 G 的李代数视为相同，因此万有覆盖态射 $q_G\colon G \to G$ 满足 $\mathbf{L}(q_G) = \mathrm{id}^{\mathbf{L}(G)}$。于是周期同态

$$\operatorname{per}_\psi := \widetilde{\eta}|_{\pi_1(G)}\colon \pi_1(G) \to H$$

是 η 存在的障碍：$G \to H$ 使得 $\mathbf{L}(\eta) = \psi$。事实上，若 η 存在，则 $\widetilde{\eta} = \eta \circ q_G$ 意味着 per_ψ 消失。反过来，若 per_ψ 消失，则 $\widetilde{\eta}$ 可经由某个 η 分解，且满足 $\eta \circ q_G = \widetilde{\eta}$，因此 $\mathbf{L}(q_G) = \mathrm{id}^{\mathbf{L}(G)}$ 给出 $\mathbf{L}(\eta) = \psi$。

7.2.3 局部 k-指数李群

积分定理 7.2.9 自然地推广到一大类非局部指数群。

定义 7.2.15。具有指数函数的李群 G 称为局部 k-指数的，若其李代数 $\mathfrak{g}$ 是满足以下条件的闭子空间的拓扑直和

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$$

使得映射

$$\Phi\colon \mathfrak{g} \to G, \quad x = x_1 + \ldots + x_k \mapsto \exp_G(x_1) \cdots \exp_G(x_k)$$

在 0 处是局部微分同胚。

例 7.2.16。在例 5.6.11 中，我们看到，形如 $G = E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的李群，其中 $\alpha\colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群 (E) 定义了对局部凸空间 E 的光滑 $\mathbb{R}$- 作用，不一定是局部指数的。然而，它们当然是局部 2-指数的。更一般地，两个局部指数李群 N 和 G 的任意半直积李群 $N \rtimes_\alpha G$ 都是局部 2-指数的。

定理 7.2.17（积分定理——局部 k-指数情形）。

设 H 是具有指数函数的李群， G 是1连通的局部 k-指数李群，且 $\psi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(H)$ 是李代数的连续同态。则存在唯一的光滑同态 $\eta\colon G \to H$ ，满足 $\mathbf{L}(\eta) = \psi$。

证明。 将 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$ 写成闭子空间的拓扑直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$，使得映射

$$\Phi\colon U \to G, \quad x = x_1 + \ldots + x_k \mapsto \exp_G(x_1) \cdots \exp_G(x_k)$$

将形如 $U = U_1 + \cdots + U_k$ 的开连通零邻域微分同胚地映到开子集 $W \subseteq G$，其中 $U_j \subseteq \mathfrak{g}_j$ 是开对称零邻域。我们考虑光滑函数

$$\varphi\colon W \to H, \quad \exp_G(x_1) \cdots \exp_G(x_k) \mapsto \exp_H(\psi(x_1)) \cdots \exp_H(\psi(x_k)).$$

对于 $x \in U$，由习题 7.2.5 可得

$$\delta(\exp_H)_{\psi(x)} \circ \psi = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)}\, dt \circ \psi = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)} \circ \psi\, dt$$
$$= \int_0^1 \psi \circ e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt = \psi \circ \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt = \psi \circ \delta(\exp_G)_x.$$

因此，根据乘积法则， $\varphi \circ \Phi$ 的左对数导数为

$$\begin{aligned}\delta(\varphi\circ\Phi)_x v &= \delta(\exp_H)_{\psi(x_k)}\psi(v_k) + e^{-\operatorname{ad}\psi(x_k)}\delta(\exp_H)_{\psi(x_{k-1})}\psi(v_{k-1}) + \cdots \\ &\qquad + e^{-\operatorname{ad}\psi(x_k)}\cdots e^{-\operatorname{ad}\psi(x_2)}\delta(\exp_H)_{\psi(x_1)}\psi(v_1) \\ &= \psi\delta(\exp_G)_{x_k}v_k + e^{-\operatorname{ad}\psi(x_k}\psi\delta(\exp_G)_{x_{k-1}}v_{k-1} + \cdots \\ &\qquad + e^{-\operatorname{ad}\psi(x_k)}\cdots e^{-\operatorname{ad}\psi(x_2)}\psi\delta(\exp_G)_{x_1}v_1 \\ &= \psi\Big(\delta(\exp_G)_{x_k}v_k + e^{-\operatorname{ad}x_k}\delta(\exp_G)_{x_{k-1}}v_{k-1} + \cdots \\ &\qquad + e^{-\operatorname{ad}x_k}\cdots e^{-\operatorname{ad}x_2}\delta(\exp_G)_{x_1}v_1\Big) \\ &= \big(\psi\circ\delta(\Phi)_x\big)v.\end{aligned}$$

这意味着

$$\Phi^*\delta(\varphi) = \delta(\varphi\circ\Phi) = \psi\circ\delta(\Phi) = \Phi^*(\psi\circ\kappa_G),$$

而这又导出了

$$\delta(\varphi) = \psi\circ\kappa_G.$$

现在，引理 5.5.10 表明，存在一个开对称e邻域 $W_1 \subseteq W$，使得 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ 对于 $x,\ y \in W_1$成立。由于 G是单连通的，命题 C.2.1 给出了将 $\varphi|_{W_1}$ 延拓为同态 $G\to H$的延拓 η。于是我们有 $\mathbf{L}(\eta) = \delta(\varphi)_e = \psi$，这证明了存在性。由 G的连通性可知，满足 $\mathbf{L}(\eta) = \psi$ 的 η 是唯一的（命题 5.5.7）。□

7.2.4 带李代数的拓扑群

我们在上文已经看到，拓扑群 G 至多具有一种局部指数李群结构。因此，一个自然的问题是，如何从拓扑群 G中恢复“李群结构”。下面的命题恢复了李代数底下的局部凸空间。

对于拓扑群 G，我们将 $\mathfrak{L}(G) := \operatorname{Hom}_c(\mathbb{R}, G)$ 记作单参数群的集合，并赋予紧开拓扑。如果 G 是局部指数李群，根据引理 7.2.1，我们已经看到映射

$$\Gamma\colon \mathbf{L}(G)\to\mathfrak{L}(G),\quad x\mapsto\gamma_x,\quad \gamma_x(t) = \exp_G(tx)$$

是一个双射。现在我们证明，它与两侧的拓扑也是相容的。

命题 7.2.18。对于任意局部指数李群 G，映射 Γ 是一个同胚。

证明。 (1) 首先，我们注意到该映射

$$(\exp_G)_*\colon C(\mathbb{R},\mathbf{L}(G))_{c.o.}\to C(\mathbb{R},G)_{c.o.},\quad \xi\mapsto\exp_G\circ\xi$$

关于紧开拓扑是连续的。事实上，对于每个紧子集 $K \subseteq G$ 和每个开子集 $O \subseteq G$，集合

$$(\exp_G)_*^{-1}(\lfloor K, O \rfloor) = \lfloor K, \exp_G^{-1}(O) \rfloor$$

在 $C(\mathbb{R}, \mathbf{L}(G))_{c.o.}$ 中是开集。

(2) 接下来注意到，对于每个拓扑向量空间 E，映射

$$\mathrm{ev}\colon \mathfrak{L}(E,+) \to E, \quad \gamma \mapsto \gamma(1)$$

是一个同胚，其逆映射由 $\mathrm{ev}^{-1}(x)(t) = tx$ 给出。

求值映射的连续性可由 $\mathrm{ev}^{-1}(O) \supseteq \lfloor \{e\}, O \rfloor$ 对每个开子集 $O \subseteq E$ 得出。关于双射性，请参见引理 7.2.1。为证明 ev^{-1} 连续，也就是说 ev 是开映射，注意到对每个紧子集 $K \subseteq \mathbb{R}$ 和每个开子集 $O \subseteq E$，我们有

$$\mathrm{ev}(\lfloor K, O \rfloor) = \{x \in E\colon K \cdot x \subseteq O\},$$

这是 E 的一个开子集，因为数乘 $\mathbb{R} \times E \to E$ 连续，且 K 紧。

结合 (1) 和 (2)，可知对于每个具有指数函数的李群，$\Gamma = (\exp_G)_* \circ \mathrm{ev}^{-1}$ 是连续的。

(3) 为了证明逆映射 $\Gamma^{-1}\colon \gamma \mapsto \gamma'(0)$ 也是连续的，我们需要 G 是局部指数的。设 $U_G \subseteq G$ 是一个开单位元邻域，且存在一个平衡开凸零邻域 $U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$，使得 $\exp_G|_{2U_{\mathfrak{g}}}\colon 2U_{\mathfrak{g}} \to U_G$ 是一个微分同胚。

考虑 $\gamma = \gamma_x \in \mathfrak{L}(G)$。于是存在某个 $\varepsilon > 0$ 使得 $[0,\varepsilon]x \subseteq U_{\mathfrak{g}}$，这意味着 γ_x 包含于开子集 $\lfloor [0,\varepsilon],\ \exp_G(U_{\mathfrak{g}}) \rfloor$ of$\mathfrak{L}(G)$ 中。

对于任意 $\gamma_y \in \lfloor [0,\varepsilon],\ \exp_G(U_{\mathfrak{g}}) \rfloor$，我们有 $\exp_G([0,\varepsilon]y) \subseteq \exp_G(U_{\mathfrak{g}})$。我们断言 $\varepsilon y \in U_{\mathfrak{g}^\circ}$。如果并非如此，那么存在某个正的$t < \varepsilon$ 使得 $ty \in 2U_{\mathfrak{g}} \setminus U_{\mathfrak{g}^\circ}$ 于是

$$\exp_G(ty) \in \exp_G([0,\varepsilon]y) \subseteq \exp_G(U_{\mathfrak{g}}),$$

再结合 $\exp_G$ 在 $2U_{\mathfrak{g}}$ le 上的单射性，便会导致矛盾；因此断言成立。我们得出 $y \in \varepsilon^{-1}U_{\mathfrak{g}}$，因此

$$\Gamma^{-1}(\lfloor [0,\varepsilon], \exp_G(U_{\mathfrak{g}}) \rfloor) \subseteq \varepsilon^{-1}U_{\mathfrak{g}}.$$

在 $\lfloor [0,\varepsilon],\ \exp_G(U_{\mathfrak{g}}) \rfloor$ 上，映射 Γ^{-1} 由连续映射给出

$$\gamma_z \mapsto z = \frac{1}{\varepsilon}\exp_G^{-1}(\gamma_z(\varepsilon)),$$

这表明，$\gamma_y \to \gamma_x$ 在紧集上一致地蕴含 $y \to x$。这证明 Γ^{-1} 在 γ_x中是连续的。□

将$\mathbf{L}(G)$与 $\mathfrak{L}(G) = \mathrm{Hom}_c(\mathbb{R}, G)$等同起来，$\mathbf{L}(G)$的数乘可写为

$$(\lambda\alpha)(t) := \alpha(\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathrm{Hom}_c(\mathbb{R}, G), \tag{7.8}$$

并且由命题 7.2.2 可知，加法和李括号可在单参数群层面上写为

$$(\alpha + \beta)(t) := \lim_{n\to\infty} \left(\alpha(\frac{t}{n})\beta(\frac{t}{n})\right)^n \tag{7.9}$$

and

$$[\alpha, \beta](t^2) := \lim_{n\to\infty} \left(\alpha(\frac{t}{n})\beta(\frac{t}{n})\alpha(-\frac{t}{n})\beta(-\frac{t}{n})\right)^{n^2}. \tag{7.10}$$

在 [HoM05 中，HoM07], Hofmann 和 Morris 以（7.8）—（7.10）为出发点，研究一类引人注目的拓扑群：

定义 7.2.19。设 G 是一个拓扑群，且 $\mathfrak{L}(G) := \mathrm{Hom}_c(\mathbb{R}, G)$ 是单参数群构成的集合，并赋予紧开拓扑。若（7.8）—（7.10）中的极限对 $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_c(\mathbb{R}, G)$ 存在，属于 $\mathfrak{L}(G)$，加法和括号是连续映射 $\mathfrak{L}(G) \times \mathfrak{L}(G) \to \mathfrak{L}(G)$，并且相对于数乘（7.8）、加法（7.9）和括号（7.10），$\mathfrak{L}(G)$ 是一个实李代数，则称 G 为具有李代数的拓扑群。这意味着 $\mathfrak{L}(G)$ 是一个拓扑李代数。G 的指数函数定义为

$$\exp_G \colon \mathfrak{L}(G) \to G, \quad \gamma \mapsto \gamma(1).$$

在 [BCR81 第 1.5], 节中，Boseck、Czichowski 和 Rudolph 通过限制到单参数群来定义拓扑群上的光滑函数，由此得到 (7.9)-(7.10)，并假设 $\mathfrak{L}(G)$ 可以与 e 中光滑函数芽代数的导子集等同。

用这些术语来说，我们刚刚看到，任何局部指数李群都是具有李代数的拓扑群。由于 $\mathbb{R}$ 是连通的，拓扑群 G 具有李代数，当且仅当其单位连通分支 G_0 具有李代数。在 [HoM05 定理 2.3] 中也指出，任何阿贝尔拓扑群都是具有李代数的群，其中 $\mathfrak{L}(G)$ 上的加法是逐点乘法，而括号是平凡的。下面给出一个稍作推广的结果：

定理 7.2.20。每个 2 步幂零拓扑群都有李代数。

证明。（略述）交换子映射 $c\colon G \times G \to Z(G)$ 是一个交错双同态。然后通过直接计算可得公式

$$(\alpha + \beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)c(\alpha(t), \beta(-\tfrac{t}{2})) \quad \text{and} \quad [\alpha, \beta](t) = c(\alpha(1), \beta(t)),$$

可用于验证所有要求。 □

注 7.2.21. 更一般地，实际上可以证明每个幂零拓扑群 G 都有一个李代数。关键在于霍尔公式（[Bou89，第 2]章），并结合这样一个事实：由有限个单参数群生成的幂零群都是李群。后一结果在 [MS75]，中得到证明，不过这篇论文中的论证并不容易理解。

第 7.2 节习题

习题 7.2.1。设 G 和 H 为李群，且 $\varphi\colon G \to H$ 是一个 C^1-映射的同态。证明 φ 是光滑的。
提示：使用归纳法证明：如果 φ 是 C^k，那么它是 C^{k+1}：证明在切丛 TG 上，对于 $g \in G$ 和 $x \in \mathfrak{g}$，有如下关系

$$T(\varphi)(g.x) = \varphi(g).T_e(\varphi)x.$$

由此关系推出：如果 φ 是 C^k，那么 $T(\varphi)$ 是 C^k，从而 φ 是 C^{k+1}。

习题 7.2.2。设 G 是一个局部指数李群，且 $\gamma\colon [0,\varepsilon] \to G$ 是一条曲线，其 $\gamma(0) = e$，并且在 0 处可微。证明

$$\exp(\gamma'(0)) = \lim_{n\to\infty} \gamma(1/n)^n.$$

利用这一关系，不借助局部 $*$-乘法，直接证明 Trotter 乘积公式。

习题 7.2.3. 设 G 是一个有限维李群。证明存在 $x_1,\ldots,x_n \in \mathbf{L}(G)$，使得映射

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \to G, \quad \Phi(t_1,\ldots,t_n) := \exp_G(tx_1)\cdots\exp_G(t_nx_n)$$

在 0 处是局部微分同胚。利用这一事实，直接由引理 7.2.1 推导出，任意从 $G \to H$ 到任意李群 H 的连续同态 φ都是光滑的。

习题 7.2.4.设 G 是一个连通局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $q_G\colon G \to G$ 是一个万有覆盖映射，满足 $\mathbf{L}(q_G) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ (推论 5.3.5)。按照推论 7.2.11 中的方式，将群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 和 $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$ 视为相同。
(1) 说明如何为每个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 关联一个周期同态

$$\mathrm{per}_\alpha\colon \pi_1(G) \to Z(G)$$

满足以下性质：$\mathrm{per}_\alpha = e$ （常值同态）等价于某个 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 的 $\alpha = \mathbf{L}(\varphi)$。

(2) 证明 $\mathrm{Aut}(G) \cong \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\widetilde{G})\colon \varphi(\ker q_G) = \ker q_G\}$.

习题 7.2.5。设 $\psi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是 ad-可积李代数之间的连续同态（参见定义 D.2.17）。那么每个 $x \in \mathfrak{g}$ 都满足关系

$$\psi \circ e^{\operatorname{ad} x} = e^{\operatorname{ad}\psi(x)} \circ \psi.$$

提示：证明曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{h}$, $\gamma(t)\colon = e^{-t\operatorname{ad}\psi(x)} \circ \psi \circ e^{t\operatorname{ad} x}y$ 是常数。

7.3 Baker–Campbell–Dynkin–Hausdorff公式

在有限维理论和巴拿赫–李理论中，与豪斯多夫级数相关的形式体系发挥着重要作用，因为它提供了一种非常直接的方式，让我们能够从李代数这一无穷小层次过渡到局部层次。非解析指数李群的存在表明，一般而言，我们需要更精细的工具来完成这一过渡。

本节将讨论豪斯多夫级数及其应用。我们首先证明，对于任意幂零李代数 $\mathfrak{g}$，任意相应的指数群结构（$\mathfrak{g}$，$*$）均由豪斯多夫级数给出

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [y, x]] + \dots .$$

由此特别可知，该结构由李代数结构唯一确定，而且实际上是多项式，其次数有界于 $\mathfrak{g}$的幂零长度。

在第7.3.2小节中，我们将证明其逆命题，即豪斯多夫级数在每个局部凸幂零李代数上定义了一种多项式群结构。在无限维背景下，原幂零李代数是幂零李代数的一种自然推广，而我们关于幂零李代数的结果立即表明，所有原幂零李代数也都是指数的。原幂零李代数和群的典型例子来自形式微分同胚群及向量场群，我们将在第7.3.3小节中对此进行较为详细的讨论。

在下文的小节 8.4.1 中，我们将运用关于豪斯多夫级数所得的信息，证明所有巴拿赫–李代数实际上都是局部指数的，因为豪斯多夫级数局部收敛，并在充分小的零邻域上定义结合乘法。

本节最后给出一个结果：尽管指数局部李群中的乘法不一定是解析的，但它在零点处的泰勒级数总是与豪斯多夫级数一致。

7.3.1 指数幂零李群的 BCH 公式

我们先对“幂零”函数演算作一些说明；它相当初等，却足以处理幂零李代数。我们的总体策略是将一般情形归结为幂零情形。

设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺结合 $\mathbb{K}$-代数，其中 $\mathbb{K}$ 是任意特征为零的域。记

$$\mathbb{K}[X] := \{a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d \colon d \in \mathbb{N}_0, a_j \in \mathbb{K}\}$$

关于以 $\mathbb{K}$ 为底、含一个不定元 X 的多项式环，以及

$$\mathbb{K}[[X]] := \Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \colon a_k \in \mathbb{K} \Big\}$$

关于 X 的形式幂级数环。那么，对于每个 $a \in \mathcal{A}$ ，都有唯一的代入同态

$$\eta_a \colon \mathbb{K}[X] \to \mathcal{A}, \quad f(X) \mapsto f(a).$$

此外，若 a 是幂零的，则此代入同态可延拓为一个同态

$$\eta_a \colon \mathbb{K}[[X]] \to \mathcal{A}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i a^i,$$

其定义是有意义的，因为 a 的充分高次幂会消失。接下来我们回顾复合映射

$$\mathbb{K}[[X]] \times X\mathbb{K}[[X]] \to \mathbb{K}[[X]], \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$

定义在 $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i X^i$ 上，其定义为

$$(f \circ g)(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i g(X)^i,$$

这是有意义的，因为 $g(X)^i$ 只含次数为 $\geq i$的项。

引理 7.3.1. 若 $a \in \mathcal{A}$ 是幂零的， $f \in \mathbb{K}[[X]]$ 和 $g \in X\mathbb{K}[[X]]$，则 $g(a)$也是幂零的，并且

$$f(g(a)) = (f \circ g)(a).$$

证明。假设 $a^N = 0$。将 $g(X) = Xh(X)$ 写成 $h(X) \in \mathbb{K}[[X]]$，可知 $g(a)^N = a^N h(a)^N$ 为零，因此 $g(a)$ 是幂零的。因此，$f(g(a))$ 有定义。对于 $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i X^i$，我们有

$$f(g(a)) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i g(a)^i = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i g^i \Big)(a) = (f \circ g)(a),$$

其中只有有限多个直和项非零。 □

引理 7.3.2。对于幂级数

$$\Phi(X) = \frac{1 - e^{-X}}{X} := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{X^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^k}{(k+1)!} \in \mathbb{Q}[[X]]$$

and

$$\Psi(X) = \frac{(X+1)\log(X+1)}{X} := (X+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} X^k \in \mathbb{Q}[[X]],$$

该关系

$$\Psi(e^X - 1)\Phi(X) = 1 \quad \textit{holds in} \quad \mathbb{Q}[[X]].$$

证明。 由于幂级数 Φ 和 Ψ 在复数域 $\mathbb{C}$ 中 0 的某个邻域内定义了复解析函数，因此只需验证相应函数满足所述关系。若 $|z| < \log 2$，则 $|e^z - 1| < 1$，并由 $\log(e^z) = z$ 得到关于单位圆上 1 附近的全纯对数函数的关系，该函数由对数幂级数定义

$$\Psi(e^z - 1)\Phi(z) = \frac{e^z z}{e^z - 1}\frac{1 - e^{-z}}{z} = 1. \qquad \square$$

命题 7.3.3。对于结合含幺代数 $\mathcal{A}$ 中的任意幂零元 a，元素 $e^a - e$ 是幂零的，$\Phi(a)$ 是幺幂的，因此可逆，并且有

$$\Phi(a)^{-1} = \Psi(e^a - 1).$$

现在，我们推导出幂零李代数上的任意指数李群结构的一个显式公式，称为*Baker–Campbell–Dynkin–Hausdorff*公式。

定理 7.3.4。设 $(\mathfrak{g}, *)$ 是一个指数李群，且 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数。那么，乘积由*BCH*公式给出

$$\begin{aligned} x * y &= x + \sum_{\substack{k,m \geq 0 \\ p_i + q_i > 0}} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_1}(\operatorname{ad} y)^{q_1} \dots (\operatorname{ad} x)^{p_k}(\operatorname{ad} y)^{q_k}(\operatorname{ad} x)^m}{(k+1)(q_1 + \dots + q_k + 1)p_1!q_1! \dots p_k!q_k!m!} y \\ &= x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [y, x]] + \dots \end{aligned}$$

前述定理中的幂级数称为豪斯多夫级数。

证明。在转向显式公式之前，我们先从一个已包含全部信息的积分公式入手。我们断言，对于 x，$y \in \mathfrak{g}$，有

$$x * y = x + \int_0^1 \Psi(e^{\operatorname{ad} x} e^{t \operatorname{ad} y} - e) y \, dt. \tag{7.11}$$

对于 $t \in \mathbb{R}$，考虑 $\gamma(t) := x * ty \in \mathfrak{g}$. 我们关注 $\gamma(1) = x * y$ 的一个显式公式。利用命题 7.3.3 和定理 5.6.22（应用于 $\exp_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$），可得:

$$\gamma'(t) = T_0(\lambda_{\gamma(t)})y = \kappa_{\mathfrak{g}}(\gamma(t))^{-1}y = \Phi(\operatorname{ad}\gamma(t))^{-1}y = \Psi(e^{\operatorname{ad}\gamma(t)} - e)y.$$

利用

$$e^{\operatorname{ad}\gamma(t)} = e^{\operatorname{ad}(x*ty)} = \operatorname{Ad}(x * ty) = \operatorname{Ad}(x)\operatorname{Ad}(ty) = e^{\operatorname{ad} x} e^{t \operatorname{ad} y}$$

（参见定义 5.6.21），由此得到

$$x * y = \gamma(1) = \gamma(0) + \int_0^1 \gamma'(t)\,dt = x + \int_0^1 \Psi(e^{\operatorname{ad} x} e^{t \operatorname{ad} y} - e)y\,dt.$$

只需将（7.11）的被积函数展开为级数（实际上，由于 $\mathfrak{g}$ 的幂零性，这是一个有限和）：

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Psi\big(\exp(\operatorname{ad} x)\exp(\operatorname{ad} ty) - e\big)y\,dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\big(\exp(\operatorname{ad} x)\exp(\operatorname{ad} ty) - \mathrm{id}\big)^k}{(k+1)}\big(\exp(\operatorname{ad} x)\exp(\operatorname{ad} ty)\big)y\,dt \\
&= \int_0^1 \sum_{\substack{k\geq 0 \\ p_i+q_i>0}} \frac{(-1)^k}{(k+1)} \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_1}(\operatorname{ad} ty)^{q_1}\ldots(\operatorname{ad} x)^{p_k}(\operatorname{ad} ty)^{q_k}}{p_1!q_1!\ldots p_k!q_k!}\exp(\operatorname{ad} x)y\,dt \\
&= \sum_{\substack{k,m\geq 0 \\ p_i+q_i>0}} \frac{(-1)^k}{(k+1)} \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_1}(\operatorname{ad} y)^{q_1}\ldots(\operatorname{ad} x)^{p_k}(\operatorname{ad} y)^{q_k}(\operatorname{ad} x)^{m}y}{p_1!q_1!\ldots p_k!q_k!m!}\int_0^1 t^{q_1+\ldots+q_k}\,dt \\
&= \sum_{\substack{k,m\geq 0 \\ p_i+q_i>0}} \frac{(-1)^k(\operatorname{ad} x)^{p_1}(\operatorname{ad} y)^{q_1}\ldots(\operatorname{ad} x)^{p_k}(\operatorname{ad} y)^{q_k}(\operatorname{ad} x)^{m}y}{(k+1)(q_1+\ldots+q_k+1)p_1!q_1!\ldots p_k!q_k!m!}.
\end{aligned}$$

□

推论 7.3.5。若（$\mathfrak{g}, *$）$= \varprojlim$（$\mathfrak{g}_j, *$）是幂零指数李群的射影极限，则 $\mathfrak{g}$ 上的乘积 $*$ 由豪斯多夫级数给出。

7.3.2 BCH 乘法的结合性

现在我们转向逆向问题：在每个幂零有理李代数 $\mathfrak{g}$上，豪斯多夫级数定义了一个多项式乘积 $x * y$ ，当 $[x, y] = 0$时满足$x * y = x + y$。由此特别可以推出

$$tx * sx = (t + s)x \quad \text{for} \quad t, s \in \mathbb{Q},$$

但从幂级数的显式形式中，并不能清楚看出该乘积实际上是结合的。本节将说明这一点，而不深入讨论形式幂级数论证。我们改用前一小节中的唯一性结果。

定义 7.3.6。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺结合代数。 $\mathcal{A}$ 的滤过是由 $\mathcal{A}$ 的子空间构成的序列 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ，满足

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{A}, \quad \bigcap_n \mathcal{F}_n = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_n\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_{n+m}.$$

特别地，每个 $\mathcal{F}_n$ 都是 $\mathcal{A}$的理想。

命题 7.3.7。设 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是代数 $\mathcal{A}$ 的一个滤过，其中所有商代数 $\mathcal{A}_n := \mathcal{A}/\mathcal{F}_n$ 均为有限维，并在原—李射影极限代数 $\mathcal{A} := \varprojlim \mathcal{A}_n \subseteq \prod_n \mathcal{A}_n$ 上赋予射影极限拓扑。令 $\mathcal{F}_1 := \varprojlim \mathcal{F}_1/\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}$。那么，闭仿射子空间 $U := \mathbf{1} + \mathcal{F}_1$ 是 $\mathcal{A}^\times$ 的一个子群，并且在诱导的乘法下是一个李群。其指数映射

$$\exp_U \colon \widehat{\mathcal{F}}_1 \to \mathbf{1} + \widehat{\mathcal{F}}_1, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

是一个微分同胚，并且对于 x、$y \in \mathcal{F}_1$，乘积

$$x * y = \exp_U^{-1}(\exp_U(x)\exp_U(y))$$

由豪斯多夫级数给出。

证明。理想 $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ 是幂零的，因为该理想中任意元素的所有 n重乘积都为零。因此，对于 $x \in \mathcal{F}_1/\mathcal{F}_n$，我们可以通过 $\mathbf{1}+x+\ldots+x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$得到 $\mathbf{1}-x$ 的逆映射。于是，$\mathcal{A}_n$ 的单位群包含 $\mathbf{1}+\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_n$。对于任意 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_1$，元素 $\mathbf{1}-x_n \in \mathbf{1}+\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}_n^\times$可逆，且其逆映射由几何级数给出。这意味着，在 $\mathcal{A}$中的，我们有

$$\mathbf{1} - x \in \widehat{\mathcal{A}}^\times \quad \text{with} \quad (\mathbf{1}-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

其中，级数在 $\mathcal{A}$ 中的收敛性源于它在每个商代数 $\mathcal{A}_n$中都是有限的。由此可知，仿射子空间 U 包含于 $\mathcal{A}^\times$中；又由于 $\mathcal{F}_1$ 是 $\mathcal{A}$的理想，即典范同态 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_1$的核，因此 U 是 $\mathcal{A}^\times$的子群。

U 实际上是一个李群，这源于其（双线性）乘法和求逆的光滑性。求逆由几何级数给出，其光滑性则源于该级数与投影到代数 $\mathcal{A}_n$上的映射复合后的光滑性；这些复合是多项式（引理 1.3.20）。

我们同样看到，$\exp_U$ 定义了一个光滑映射，其 $\mathcal{A}_n$分量是次数为 $\leq n$的多项式。它的逆映射为

$$\log_U \colon U \to \widehat{\mathcal{F}}_1, \quad \mathbf{1} - x \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

由于其所有 $\mathcal{A}_n$ 分量都是多项式，该函数也是光滑的。关系 $\exp_U \circ \log_U = \mathrm{id}_U$和 $\log_U \circ \exp_U = \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{F}}_1}$ 分别源自结合代数中幂零元和幺幂元的 exp 与 log 的相应关系（习题 7.3.2）。

我们得出，U 是一个指数李群，并且由于它是幂零李群 $\mathbf{1}+\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_1$ 的射影极限，根据定理 7.3.4，$x*y$ 的 $\mathcal{A}_n$ 分量由豪斯多夫级数给出，这意味着 $x*y$ 在射影极限代数 $\mathcal{F}_1$ 中是 $\widehat{\ }$ 由豪斯多夫级数给出的。□

例 7.3.8。令 $\mathcal{A}:=\mathcal{F}_{\mathrm{ass}}(x_1,\dots,x_N)$ 为由 n 个生成元构成的自由结合代数。那么 $\mathcal{A}$ 具有自然的滤过

$$\mathcal{F}_n:=\operatorname{span}\{s_1\cdots s_m\colon s_i\in\{x_1,\dots,x_N\},m\geq n\}.$$

每个商 $\mathcal{A}_m:=\mathcal{A}/\mathcal{F}_m$ 都是有限维的，因此前述命题 7.3.7 适用。代数

$$\widehat{\mathcal{F}}_{\mathrm{ass}}(x_1,\dots,x_N):=\varprojlim\mathcal{A}_n$$

可以识别为生成元 $x_1,\dots,x_N$ 上的非交换形式幂级数代数。此外，$\mathcal{F}_1$ 是一个超平面理想，由 $x_1,\dots,x_N$ 拓扑生成。

由命题 7.3.7 可推出，豪斯多夫级数在 $\widehat{\mathcal{F}_1}$ 上定义了一种指数李群结构。

利用 Poincar´e–Birkhoff–Witt 定理，很容易看出，由 $x_1,\dots,x_N$ 中的李多项式生成的闭子空间，就是由 $x_1,\dots,x_N$ 生成的完备自由李代数 $\widehat{\mathcal{F}_{\mathrm{Lie}}(x_1,\dots,x_N)}$（练习 7.3.3）。因此我们得到：

定理 7.3.9。豪斯多夫级数在由 $x_1,\dots,x_N$ 生成的完备自由李代数 $\widehat{\mathcal{F}_{\mathrm{Lie}}(x_1,\dots,x_N)}$ 上定义了一种指数李群结构。

下面的定理补充了定理 7.3.4，表明它实际上适用于所有幂零李群。

定理 7.3.10。在每个幂零局部凸李代数 $\mathfrak{g}$ 上，豪斯多夫级数定义了一种指数李群结构。

证明。对于 $a,b\in\mathfrak{g}$，我们通过豪斯多夫级数（定理 7.3.4）定义 $a*b$，从而在 $\mathfrak{g}$上得到一个多项式二元运算。于是有

$$ta*sa=(t+s)a\quad\text{for}\quad a\in\mathfrak{g},t,s\in\mathbb{R}.$$

特别地，$0*a=a*0=a$ 和 $a*(-a)=(-a)*a=0$。对于 $a,b,c\in\mathfrak{g}$，存在唯一的李代数态射

$$\varphi\colon\widehat{\mathcal{F}}_{\mathrm{Lie}}(x_1,x_2,x_3)\to\mathfrak{g}\quad\text{with}\quad x_1\mapsto a,x_2\mapsto b,x_3\mapsto c.$$

现在，$\mathfrak{g}$ 上乘积的结合律由定理 7.3.9 得出：

$$\begin{aligned}(a*b)*c&=(\varphi(x_1)*\varphi(x_2))*\varphi(x_3)=\varphi(x_1*x_2)*\varphi(x_3)=\varphi((x_1*x_2)*x_3)\\&=\varphi(x_1*(x_2*x_3))=\varphi(x_1)*(\varphi(x_2)*\varphi(x_3))=a*(b*c).\end{aligned}$$

我们得出结论：$(\mathfrak{g},*)$ 是一个指数李群。□

推论7.3.11。如果 $\mathfrak{g}$ 是任意幂零的 $\mathbb{Q}$-李代数，那么 *BCH* 乘法在 $\mathfrak{g}$ 上定义了一个群结构，满足

$$tx * sx = (t+s)x \quad for \quad x \in \mathfrak{g}, s, t \in \mathbb{Q}.$$

证明。 由于幂零李代数的每个有限子集都生成一个有限维子代数（习题 7.3.6），只需对有限维李代数验证该断言。若 $\dim \mathfrak{g} < \infty$，我们将 $\mathfrak{g}$ 嵌入实（局部凸）李代数 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$，并应用定理 7.3.10，得知由豪斯多夫级数定义的乘法是结合的。□

7.3.3 原幂零李代数

作为上述一般理论的一个应用，我们简要讨论指数李代数的射影极限。

命题 7.3.12。指数李代数的射影极限是指数的。

证明。 (a) 首先考虑直积这一特殊的射影极限情形。相应的有向集是 J的有限子集集。设 $(\mathfrak{g}_j)_{j\in J}$ 是一族指数李代数， $\mathfrak{g} := \prod_{j\in J} \mathfrak{g}_j$是它们的拓扑乘积，它是一个局部凸李代数。为证明 $\mathfrak{g}$ 是指数的，令 $m_j\colon \mathfrak{g}_j \times \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_j$ 定义 $\mathfrak{g}_j$ 上的指数李群结构。于是乘积映射

$$m\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (x,y) = ((x_j),(y_j)) \mapsto (m_j(x_j,y_j))_{j\in J}$$

在 $\mathfrak{g}$ 上定义指数李群结构。

(b) 现在设 $\mathfrak{g} = \varprojlim \mathfrak{g}_j$ 是指数李代数族 $(\mathfrak{g}_j)_{j\in J}$ 的任意射影极限。那么，命题 7.1.5 表明，相应的李代数态射 $\varphi_{ij}\colon \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_i$ 也是相应群结构之间的态射。因此， $\mathfrak{g}$ 是直积李群 $\prod_{j\in J}(\mathfrak{g}_j, *)$ 的一个 $*$-子群。由此，我们在 $\mathfrak{g}$ 上得到一个指数李群结构，且 $\mathbf{L}(\mathfrak{g}, *) = \mathfrak{g}$。□

结合前述命题与定理 7.3.10，可得：

推论7.3.13。原幂零李代数，即幂零李代数的射影极限，都是指数的。

例 7.3.14。前述推论适用于许多有趣的情形，并由此推出某些幂零预群具有自然李群结构。

一类重要的例子如下。设 E 是一个有限维 $\mathbb{K}$-向量空间，令 $P_d(E)$表示所有次数为 d的齐次多项式函数 $E \to E$ 所构成的空间。那么，对于每个 $n \geq 2$，空间

$\mathfrak{g}_n := \oplus_{k=2}^{n} P_k(E)$具有自然的李代数结构，对于 $f \in P_i(E)$和 $g \in P_j(E)$，该结构定义为

$$[f,g](x) := \begin{cases} df(x)g(x) - dg(x)f(x) & \text{for } i+j-1 \le n \\ 0 & \text{for } i+j-1 > n. \end{cases}$$

这是对空间 $C^\infty(E,\ E)$ 上自然李括号的一种修改：改变符号并省略所有次数为 $> n$ 的项。由

$$[P_i(E), P_j(E)] \subseteq P_{i+j-1}(E),$$

可立即得出，每个 $\mathfrak{g}_n$ 都是幂零李代数。对于 $n < m$，我们有一个自然投影

$$\varphi_{nm} \colon \mathfrak{g}_m \to \mathfrak{g}_n,$$

它是李代数同态。射影极限李代数$\mathfrak{g} := \varprojlim \mathfrak{g}_n$ 可以识别为空间：以 dim(E) 个变量表示的、取值于 E 的形式幂级数，且从次数 2 开始。

为了得到与 $\mathfrak{g}_n$ 对应的自然李群，我们考虑集合G_n 中所有满足 $\xi \in \mathfrak{g}_n$ 的多项式映射 $f = \mathrm{id}_E + \xi \colon E \to E$。在 G_n 上，我们通过复合定义群结构，然后省略所有阶数为 $> n$ 的项：

$$f \# g := (f \circ g)_{\le n} \quad \text{with} \quad g_{\le n} := g_2 + g_3 + \ldots + g_n. \tag{7.12}$$

显然，id_E 是关于此乘法的单位元。根据泰勒多项式链式法则（命题 1.6.21），对于f，g，$h \in G_n$，我们得到结合律条件：

$$\begin{aligned} f\#(g\#h) &= (f \circ (g \circ h)_{\le n})_{\le n} = (f \circ (g \circ h))_{\le n} \\ &= ((f \circ g) \circ h)_{\le n} = ((f \circ g)_{\le n} \circ h)_{\le n} = (f\#g)\#h. \end{aligned}$$

这表明 $(G_n, \#, \mathrm{id}_E)$ 是一个幺半群。对于 $k < n$，省略阶为$> k$ 的项后，可得幺半群同态 $\varphi_{kn} \colon G_n \to G_k$.

为证明 $(G_n, \#, \mathrm{id}_E)$ 确实是一个群，令 $f \in G_n$并假设$g \in G_n$满足条件，使得 $g \circ f - \mathrm{id}_E$在阶为 k的项之前均为零。模去次数为 $k+1$的项后，我们得到

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{\le k} &= (g_k \circ f)_{\le k} + \sum_{j=1}^{k-1} (g_j \circ f)_{\le k} = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} (g_j \circ f)_{\le k} \\ &= g_k + \mathrm{id}_E + \sum_{j=2}^{k-1} (g_j \circ f)_k. \end{aligned}$$

因此，要求 $g \circ f - \mathrm{id}_E$ 在 $k+1$ 阶项之前消失，便得到条件

$$g_k = -\sum_{j=2}^{k-1} (g_j \circ f)_k.$$

归纳地，我们由此找到一个元素 $g \in G_n$ with $g\#f = \mathrm{id}_E$，即 f 的左逆。

接下来，我们构造 f的一个右逆 h 。同样，假设 $k > 1$，并且 $f \circ h - \mathrm{id}_E$在 k阶项之前均为零。模去$\geq k+1$次项后，我们得到

$$\begin{aligned}(f \circ h)_{\leq k} &= h_{\leq k} + \sum_{j=2}^{k} (f_j \circ h)_{\leq k} = h_{\leq k} + \sum_{j=2}^{k} (f_j \circ h_{\leq k-1})_{\leq k} \\ &= \mathrm{id}_E + h_k + \sum_{j=2}^{k} (f_j \circ h_{\leq k-1})_k.\end{aligned}$$

Thus

$$h_k := -\sum_{j=2}^{k} \left(f_j \circ h_{\leq k-1}\right)_k$$

等价于（$f \circ h$）$_{\leq k} = \mathrm{id}_E$.。因此，归纳地，我们在 G_n中得到 f 的一个右逆h 。现在有

$$h = (g\#f)\#h = g\#(f\#h) = g,$$

也就是说，左逆与右逆重合，这表明 G_n 是一个群。由于前面的构造表明求逆是一个光滑映射，因此我们看到G_n 实际上是一个李群。回想一下，有限维群 G_n 中的求逆光滑性可由反函数定理推出（习题 5.1.7）。

对于 $\eta \in \mathfrak{g}_n$ 和 $\xi \in P_n(E)$，我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_E + \eta)\#(\mathrm{id}_E + \xi) &= \mathrm{id}_E + \xi + \big(\eta \circ (\mathrm{id}_E + \xi)\big)_{\leq n} \\ &= \mathrm{id}_E + \xi + \eta = (\mathrm{id}_E + \xi)\#(\mathrm{id}_E + \eta),\end{aligned}$$

因此， $Z_n := \mathrm{id}_E + P_n(E)$ 是 G_n中的中心元素。因此， G_n 是 G_{n-1} 以 Z_n为核的中心扩张，由此归纳可知，每个群 G_n 都是幂零的。

为了证明 $\mathfrak{g}_n$ 是 G_n 的李代数，我们首先利用泰勒公式更明确地写出 G_n 中的复合:

$$\xi(x + \eta(x)) = \xi(x) + d\xi(x)(\eta(x)) + \ldots + \frac{1}{n!}(d^n\xi)(x)(\eta(x), \ldots, \eta(x)).$$

对于 $f = \mathrm{id}_E + \xi$ 和 $g = \mathrm{id}_E + \eta$，由此得到

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= x + \eta(x) + \xi(x + \eta(x)) \qquad (7.13)\\ &= x + \eta(x) + \xi(x) + d\xi(x)(\eta(x)) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}(d^k\xi)(x)(\eta(x), \ldots, \eta(x)).\end{aligned}$$

根据前面的公式，我们已经可以看出， G_n 上的左不变向量场在 $f = \mathrm{id}_E + \xi$ 中由下式给出

$$\eta_l(f) = f.\eta = T_{\mathrm{id}_E}(\lambda_f)\eta = df(\cdot)\eta = \eta + d\xi(\cdot)\eta.$$

将 $\xi = \sum_{j=2}^{n} \xi_j$ 和 $\eta = \sum_{i=2}^{n} \eta_i$ 展开为次数为 j的齐次项，我们得到如下形式的项

$$(d^k\xi_j)(x)(\eta_{i_1}(x), \ldots, \eta_{i_k}(x)),$$

这些项是次数为 $j - k + i_1 + \ldots + i_k \geq j + k \geq 4$的齐次项。由 (7.13) 可立即推出，($\mathrm{id}_E$,$\mathrm{id}_E$) 中乘法的二次泰勒多项式为

$$(\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta + d\xi(\cdot)\eta.$$

这得出李括号

$$[\xi, \eta](x) = d\xi(x)\eta(x) - d\eta(x)\xi(x)$$

(注 5.1.8)。

现在我们讨论指数函数

$$\exp_{G_n} : \mathfrak{g}_n \to G_n,$$

它是通过对左不变向量场 ξ_l 在 G_n 上进行“积分”得到的，忽略 $> n$阶的项。由于 G_n 是有限维幂零单连通李群，我们事先知道其指数函数是一个微分同胚，因为它的万有覆盖群是（$\mathfrak{g}_n$，$*$），其中 $*$ 是 $\mathfrak{g}_n$ 上的 BCH 乘法（推论6.1.17）。对于 $\xi \in \mathfrak{g}_n$，我们希望求解初值问题

$$\gamma'(t) = \gamma(t)\xi = d\gamma(t)(\cdot)\xi, \quad \gamma(0) = \mathrm{id}_E,$$

这将导出皮卡迭代：

$$\gamma_0 = \mathrm{id}_E, \quad \gamma_{k+1}(t) = \mathrm{id}_E + \int_0^t d\gamma_k(s)(\cdot)\xi \; ds.$$

由于右端关于 γ_k 是线性的，归纳可知， $\gamma_k(t)$ 是关于 t 的 $\leq k$ 次多项式。对于 $\gamma_k(t) = \sum_{j=0}^{k} a_j^k t^j$，我们对每个 k 都得到 $a_0^k = \mathrm{id}_E$，以及递推关系

$$a_{j+1}^{k+1} = \frac{1}{j+1} da_j^k(\cdot)\xi \quad \text{for} \quad j \leq k,$$

这表明， a_j^k 是直接由 $a_0^{k-j} = \mathrm{id}_E$得到的。特别地，我们看到，对于 $k \geq j$，$a_j^k = a_j^j$。忽略 $\geq n$阶的项后，我们进一步看到，经过 n 步皮卡迭代便得到一个不动点： $\gamma(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$ 其中

$$a_0 = \mathrm{id}_E,\ a_1 = \xi,\ a_2 = \tfrac{1}{2} d\xi(\cdot)\xi \quad \text{and} \quad a_{j+1} = \frac{1}{j+1} da_j(\cdot)\xi, \quad j < n.$$

现在我们构造射影极限群 $G := \varprojlim G_n \cong \mathrm{id}_E + \mathfrak{g}$，其流形结构由其作为仿射空间的结构赋予，平移群为 $\mathfrak{g}$。由于群 G_n 的指数映射与取极限的过程相容，我们看到 G 是一个具有原幂零李代数的指数李群。群 G 可以与所有固定 0 且一阶项为 id_E的 E 的形式微分同胚所成的集合等同。同样，$\mathfrak{g}$ 可以与 E 上常数项为零的形式向量场李代数等同。用小节 5.6.4 的术语来说，对于 $E \cong \mathbb{R}^n$，我们有 $G \cong \mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})$。

第 7.3 节习题

习题 7.3.1。证明每个幂零李代数 $\mathfrak{g}$ 都是局部有限的，即 $\mathfrak{g}$ 的每个有限子集所生成的李子代数都是有限维的。

习题 7.3.2。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺实代数，$\mathcal{A}_n$ 是 $\mathcal{A}$ 的幂零元集合，且 $\mathcal{A}_u := \mathbf{1} + \mathcal{A}_n$ 是 $\mathcal{A}$ 的幺幂元集合。考虑映射

$$\mathrm{Exp}\colon \mathcal{A}_n \to \mathcal{A},\ \ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \mathrm{Log}\colon \mathcal{A}_u \to \mathcal{A},\ \ \mathbf{1} - x \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

证明：

(1) $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathcal{A}_u$ 以及 $\mathrm{Log}(\mathcal{A}_u) \subseteq \mathcal{A}_n$：提示：对于某些与 x 交换的 y 和 z，有 $\mathrm{Exp}(x) - \mathbf{1} = xy$ 以及 $\mathrm{Log}(\mathbf{1} - x) = xz$。(2) $\mathrm{Exp} \circ \mathrm{Log} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_u}$。提示：引理 7.3.1 以及 $\exp(\log X)) = X$ in $\mathbb{R}[[X]]$。(3) $\mathrm{Log} \circ \mathrm{Exp} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_n}$。提示：引理 7.3.1 以及 $\log(\mathbf{1} + (\exp X - \mathbf{1})) = X$ in $\mathbb{R}[[X]]$。

习题 7.3.3。设 X 是一个集合，令 $\mathcal{A}(X)$ 表示 X 上由自由向量空间 $\mathbb{K}^{(X)}$ 生成的自由结合的 $\mathbb{K}$-代数，即张量代数。我们将典范映射记作 $\delta\colon X \to \mathcal{A}$。证明，由 $\delta(X)$ 生成的李子代数 $L(X) \subseteq \mathcal{A}(X)$ 是 X 上的自由李代数；也就是说，对于每个映射 $\alpha\colon X \to \mathfrak{g}$ 到李代数 $\mathfrak{g}$，都存在唯一的李代数同态 $\widehat{\alpha}\colon L(X) \to \mathfrak{g}$，使得 $\widehat{\alpha} \circ \delta = \alpha$。提示：利用嵌入 $\mathfrak{g} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$ 到包络代数中（Poincar´e–Birkhoff–Witt 定理）。

习题 7.3.4。每个巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 都具有一个相容范数。提示：若对于某个 $C > 0$，有 $\|[x, y]\| \le C\|x\|\|y\|$。

练习 7.3.5。我们考虑例 7.3.14 的特殊情形，其中 $E = \mathbb{R}$。接着，我们将 $\mathfrak{g}_n$ 视为多项式 $\mathfrak{g}_n = \mathrm{span}\{x^2, \dots, x^n\}$ 构成的空间，并将群 G_n 视为仿射空间 $G_n := x + \mathfrak{g}_n$。$G_n$ 上的群结构由复合给出，然后略去所有阶数为 $> n$ 的项。对于 $n = 2$，3，4 和 5：

(1) 给出群 G_n 中复合的显式公式。(2) 给出指数函数 $\exp^{G_n}\colon \mathfrak{g}_n \to G_n$ 的显式公式。(3) 证明 G_n 的指数函数可以通过截断皮卡迭代得到。

习题7.3.6。证明幂零李代数的每个有限子集都生成一个有限维子代数（参见习题 15.1.8）。

7.4 第7章的注释与评论

7.1： 局部指数李群的概念以自然的方式推广了巴拿赫–李群的概念。正如我们在本章中所看到的，巴拿赫–李群的许多重要性质都适用于以局部凸空间为模型的局部指数李群。在 Robart 的论文[Rb97], 中，局部指数李群被称为第一类群，但我们更倾向于使用“局部指数”这一更具说明性的术语。

7.2: 局部 k 指数李群的概念（参见定理 7.2.17）受到 J. Mical 的论文 [Mi92, Mi94], 的启发；他甚至研究指数因子的无穷积；另见 [Rob02，第 4 节.1]。

对于（局部）巴拿赫–李群，自动光滑性定理早已见于 [Bir38], ；对于 BCH–李群（定义 15.7.2），则见于[Gl02c]（另见 [Mil84]，其中给出了定理陈述但未附证明）。关于巴拿赫代数单位群的单参数群这一特殊情形 $\mathbb{R} \to \mathcal{A}^\times$，结果归功于南云 [Nag36] 和 Nathan [Nat35]。在拓扑群的背景下，还存在“自动连续性”结果，即由可测性推出群同态的连续性（参见 [KR07, Ro09, Ro19], [NP00]）

积分定理对于巴拿赫–李群而言归功于 Maissen [Ms62, Satz 10.3]。

正如 $E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 例 5.6.11 中的非局部指数半直积所示，局部指数性并不是一种扩张性质。不过，可以证明局部指数性至少在中心扩张下得以保持（第15.4.4节）。

7.3: 在 [ScF90a], 中，F. Schur 推导出了递推公式，用于求出描述李群在典范坐标（即指数图）下乘法的级数中的各直和项。他还证明了由这些递推关系给出的级数局部收敛；反过来，这可以用来得到 BCH 乘法的结合性。他的方法与我们对局部指数李代数的处理颇为相近：他通过对一个形如 $f^*\kappa_{\mathfrak{g}} = \kappa_{\mathfrak{g}}$with $f(0) = x$ 的偏微分方程积分，从 Maurer–Cartan形式导出了该级数，而该方程的唯一解就是局部群中的左乘 $f = \lambda_x$。

豪斯多夫级数由坎贝尔在 [Cam97、Cam98] 以及 [Hau06] 中作了更为明确的表述。豪斯多夫在形式层面上处理豪斯多夫级数，表明对数函数($e^x e^y$)的形式展开可以用李多项式来表示。其部分结果此前已由Baker [Bak01、Bak05]得到。关于豪斯多夫级数中所有项均为李括号的一个较新的简短论证，见 [Ei68] 。关于豪斯多夫级数与BCH公式各方面的广泛讨论，我们参阅Bonfiglioli与Fulci所著的出色专著 [BF12] 。关于对数函数($e^x e^{2y} e^x$)中y-齐次项的一种新方法，我们参阅 [ML18]。

在定理 8.4.1中讨论与巴拿赫–李代数相伴的指数局部李群时，我们给出的估计并非最优。在 [Bou89中，

第2章，第7.2节，命题1/2], 证明了在较弱条件 $\|x\|+\|y\|+\|z\|<\log _{3} 2$ 下，三重乘积是结合的。

8 李群局部理论

为了进一步发展局部指数李群理论，我们必须更仔细地考察局部李群。这尤其引出了指数局部李群的概念。全局和局部的“局部指数性”概念之所以相关，是因为每个局部指数李群都包含任意小的对称 e-邻域，而这些邻域都是指数局部李群。指数局部李群的李代数称为局部指数李代数，它们是局部指数群的李代数的自然候选对象。巴拿赫–李代数中豪斯多夫级数的局部收敛性意味着每个巴拿赫–李代数都是局部指数的。

在局部指数群的背景下，自然的可积性问题是：哪个局部指数李代数是某个局部指数李群的李代数？我们因此称它为可扩张的。由于每个局部指数李代数都属于某个指数局部李群，前述问题涉及从局部对象过渡到全局对象。从这个意义上说，它更是一个可扩张性问题，而非可积性问题，因此要容易处理得多。本章尤其证明，对于每个局部指数李代数 $\mathfrak{g}$，商 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 都是可扩张的。基于这一结果，我们将在第15.5节根据周期群推导出局部指数李代数可积性的一般判据。

8.1 局部李群

对于任意李群 G，我们都将其李代数$\mathbf{L}(G)$与之关联起来；这是附属于全局对象 G 的无穷小结构。在许多情况下，在无穷小层次与全局层次之间设置一个中间的局部层次是很有益的。这便引出了局部李群的概念。李群的每个开对称 1-邻域都是一个局部李群，但也存在无法嵌入全局李群的局部李群（见第 9.4 节）。尽管如此，我们仍可通过函子方式将一个李代数 $\mathbf{L}(G)$与任意局部李群 G 关联起来。局部李群与其李代数之间的联系，对于指数局部李群这一特殊类别尤为重要；指数局部李群是局部指数李群的局部变体（参见第7章）。

8.1.1 局部李群及其李代数

首先，我们回顾局部群的抽象概念。

定义 8.1.1. 设 G 为一个集合， $D \subseteq G \times G$ 为其子集， $e \in G$，且

$$m_G \colon D \to G, (x, y) \mapsto x * y$$

为一个映射。若乘积 $x * y$ 是定义的，则称之为 $(x, y) \in D$。如果满足以下条件，则称 G，分别地，(G, D, m_G, e) 为一个局部群：
(Loc1) 假设 (x, y)、$(y, z) \in D$。如果 $(x * y, z)$ 或 $(x, y * z) \in D$，那么二者都包含于 D，且 $(x * y) * z = x *(y * z)$。(Loc2) 对每个 $x \in G$，我们有 (x, e)、$(e, x) \in D$，且 $x * e = e * x = x$。(Loc3) 对每个 $x \in G$，存在一个元素 $x^{-1} \in G$，使得 (x, x^{-1})、$(x^{-1}, x) \in D$，且 $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$。
(Loc4) 如果 $(x, y) \in D$，那么 $(y^{-1}, x^{-1}) \in D$。

群的许多熟知性质同样适用于局部李群。

注 8.1.2. 设 (G, D, m_G, e) 是一个局部群。
(a) (Loc3) 中要求的逆元是唯一的：设 $x, y, z \in G$ 满足 $(x, y), (z, x) \in D$，其中 $x * y = e = z * x$，也就是说， y 是 x 的右逆，而 z 是左逆。那么

$$z = z * e = z * (x * y) = (z * x) * y = e * y = y$$

这表明 $y = z$ 是 x 的唯一逆映射。
(b) 假设 $(x, y) \in D$。我们总有 $(y, y^{-1}) \in D$ 和 $(x, y * y^{-1}) = (x, e) \in D$，因此

$$(x * y) * y^{-1} = x * (y * y^{-1}) = x * e = x$$

由 (Loc1) 得出。由此进一步可得

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = ((x * y) * y^{-1}) * x^{-1} = x * x^{-1} = e,$$

因此 (a) 推出

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}. \tag{8.1}$$

(c) 幂等元的唯一性：设 $x \in G$ 满足 $(x, x) \in D$ 和 $x * x = x$。那么

$$e = x * x^{-1} = (x * x) * x^{-1} = x * (x * x^{-1}) = x * e = x,$$

使得 e 是 G中唯一的幂等元。

定义 8.1.3. 局部李群是一个局部群 (G, D, m_G, e)，其中G 是局部凸流形，D 是 $G \times G$的开子集，且乘法 $m_G\colon D \to G$ 和求逆 $\eta_G\colon G \to G, x \mapsto x^{-1}$ 均为光滑映射。

若 (G, D_G, m_G, e_G) 与 (H, D_H, m_H, e_H) 是局部李群，则光滑映射 $\varphi\colon G \to H$ 称为局部李群态射，如果 $\varphi(e_G) = e_H$，$(\varphi \times \varphi)(D_G) \subseteq D_H$，且 $m_H \circ (\varphi \times \varphi) = \varphi \circ m_G$，即

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y) \quad \text{for} \quad (x, y) \in D_G.$$

下面的注说明了这一术语:

注 8.1.4.(a) 设 G 为一个群，$U \subseteq G$ 为包含单位元 e的对称子集。则 (U, D_U, m_U, e) 是一个局部群，如果我们令

$$D_U := \{(x, y) \in U \times U\colon x * y \in U\} \quad \text{and} \quad m_U := m_G|_{D_U}.$$

更一般地，若 (G, D, m_G, e) 是一个局部群，且 $U \subseteq G$ 是包含 e的对称子集，则 (U, D_U, m_U, e) 是一个局部群，对于

$$D_U := \{(x, y) \in D \cap (U \times U)\colon x * y \in U\} \quad \text{and} \quad m_U := m_G|_{D_U}$$

（习题 8.4.1）。

（b）此外，如果 G 是李群且 $U \subseteq G$ 是开集，那么 (U, D, m_U, e) 是一个局部李群。

由定理 5.3.1，我们立即得到以下关于在包含局部李群的群上赋予李群结构的存在性结果。

定理 8.1.5。设 (U, D_U, m_U, e) 是一个局部李群，并假设 G 是一个群，且存在一个局部群的单射 $\iota\colon U \to G$，使得

$$D_U = \{(x, y) \in U\colon \iota(x)\iota(y) \in \iota(U)\}.$$

那么 G 上存在唯一的李群结构，使得包含映射 $U \hookrightarrow G$ 是到 G 的一个开子集上的微分同胚。

现在我们转而定义局部李群的李代数。尽管由于乘法并非处处有定义，局部概念比全局概念需要更加谨慎处理，但全局情形中的关键事实仍适用于局部情形。

定义 8.1.6.（局部李群的李代数）设 G 是一个局部李群。对于 $x \in G$，定义左乘

$$\lambda_x\colon D_x := \{y \in G\colon (x, y) \in D\} \to G, \quad y \mapsto x * y$$

以及右乘

$$\rho_y\colon D^y := \{x \in G\colon (x, y) \in D\} \to G, \quad x \mapsto x * y.$$

定义域 D_x 和 D^y 分别是包含 e 和 x^{-1} 的 G 与 y^{-1} 的开子集。

设 $(x, y) \in D$，从而定义了 $x * y$。由 (Loc1) 可推得，当 $z \in D_{x*y} \cap D_y$ 时，$\lambda_{x*y}(z) = \lambda_x(\lambda_y(z))$。特别地，在 e 的一个邻域上有$\lambda_{x*y} = \lambda_x \circ \lambda_y$，这导致

$$T_e(\lambda_{x*y}) = T_y(\lambda_x) \circ T_e(\lambda_y). \tag{8.2}$$

同样可得

$$T_e(\rho_{y*x}) = T_y(\rho_x) \circ T_e(\rho_y). \tag{8.3}$$

现在，对于每个 $x \in \mathfrak{g} = T_e(G)$，我们定义相应的左不变向量场 $x_l \in \mathcal{V}(G)$ 如下:

$$x_l(g) := T_e(\lambda_g)(x).$$

对于 $h \in D_g$，我们有

$$x_l(gh) = T_e(\lambda_{gh})(x) = T_h(\lambda_g)(x)T_e(\lambda_h)(x) = T_h(\lambda_g)(x)x_l(h),$$

即,

$$x_l \circ \lambda_g = T(\lambda_g) \circ x_l|_{D_g}.$$

这意味着向量场 x_l 与 λ_g 关于 $x_l|_{D_g}$ 相关。因此，对于$x, y \in \mathfrak{g}$ 李括号 $[x_l, y_l]$ 也与 λ_g 关于 $[x_l, y_l]|_{D_g}$ 相关（引理 3.4.17）。特别地，由此可知该向量场是左不变的:

$$[x_l, y_l](g) = T_e(\lambda_g)[x_l, y_l](e) \quad \text{for} \quad g \in G.$$

我们得出结论: G 上所有左不变向量场构成的集合 $\mathcal{V}(G)^l$，是由 G 上所有光滑向量场组成的李代数 $\mathcal{V}(G)$ 的李子代数。由于映射

$$\mathfrak{g} \to \mathcal{V}(G)^l, \quad x \mapsto x_l$$

是一个线性同构，其逆映射为 ev_e: $X \mapsto X(e)$，因此我们可在 $\mathfrak{g}$ 上定义李括号:

$$[x, y] := [x_l, y_l](e)$$

（参见习题 8.4.2）。根据定义，该李括号满足 $[x_l, y_l] = [x, y]_l$; 我们将在下文的注 8.1.7 中看到它是连续的。李代数

$$\mathbf{L}(G) := \mathbf{L}(G, D, m_G, e) := (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$$

称为局部李群 G的李代数。

注 8.1.7。（李括号与泰勒展开）

设 E 是一个局部凸空间，$G \subseteq E$ 是一个带有局部李群结构的开零邻域（G，D_G，m_G，0）。对于（x，y），$\in D$我们记作 $x * y = m_G$（x，y）。

我们考虑（0，0）$\in E\times E$中乘法的泰勒展开。鉴于 $0*0=0$，常数项消失，因此

$$x*y=b_1(x,y)+b_2(x,y)+b_3(x,y)+\dots,\qquad \text{where}\qquad b_k=\frac{1}{k!}\delta^k_{(0,0)}m_G$$

是次数为 k 的连续齐次多项式。按照与注 5.1.8 中完全相同的论证，我们看到 $b_1(x,\ y)=x+y$，且 b_2 是双线性的，满足

$$[x,y]=b_2(x,y)-b_2(y,x).$$

对于求逆映射在 0 处的泰勒展开 $\eta(x)=x^{-1}=s_1(x)+s_2(x)+\cdots$，我们还可推出

$$s_1(x)=-x\qquad\text{and}\qquad s_2(x)=-b_2(x,s_1(x))=b_2(x,x)\tag{8.4}$$

理由与注 5.1.8 中相同。

现在我们转而讨论局部李群同态。

命题 8.1.8. 若 $\varphi:(G,D_G,m_G,e)\to(H,D_H,m_H,e)$ 是局部李群态射，则

$$\mathbf{L}(\varphi):=T_e(\varphi):\ \mathbf{L}(G)\to\mathbf{L}(H)$$

是一个连续的李代数同态。

证明。令 $x\in\mathbf{L}(G)$ 和 $x_l(g)=T_e(\lambda_g)(x)$ 为 G 上对应的左不变向量场。我们有 $\varphi((D_G)_g)\subseteq(D_H)_{\varphi(g)}$，并且在 $(D_G)_g$ 上有

$$\varphi\circ\lambda_g=\lambda_{\varphi(g)}\circ\varphi\qquad\text{for}\qquad g\in G.$$

这意味着

$$T_g(\varphi)x_l(g)=T_g(\varphi)T_e(\lambda_g)x=T_e(\lambda_{\varphi(g)})T_e(\varphi)(x)=\big(\mathbf{L}(\varphi)(x)\big)_l(\varphi(g)),$$

因此，D_g 上的向量场 x_l 和 $D_{\varphi(g)}$ 上的 $\big(\mathbf{L}(\varphi)x\big)_l$ 是 φ-相关的。由引理 3.4.17 可知，对于 $x,y\in\mathbf{L}(G)$，向量场 $[x_l,y_l]$ 和$[(\mathbf{L}(\varphi)x)_l,(\mathbf{L}(\varphi)y)_l]$ 在 D_g 上也都是 φ-相关的。在 e 处求值，得到

$$[\mathbf{L}(\varphi)x,\mathbf{L}(\varphi)y]=[\mathbf{L}(\varphi)x,\mathbf{L}(\varphi)y]_l(e)=T_e(\varphi)[x_l,y_l](e)=\mathbf{L}(\varphi)[x,y].$$

因此，$\mathbf{L}(\varphi)$ 是李代数同态。它的连续性由 φ 的光滑性推出。□

我们指出，局部李群的李代数只取决于它的“芽 e”：

推论 8.1.9。若(G, D_G, m_G, e)是一个局部李群，$U \subseteq G$是一个开对称的e-邻域，$D_U := m_G^{-1}(U) \cap (U \times U)$，且$m_U := m_G|_{D_U}$，则$(U, D_U, m_G, e)$是一个局部李群，并且包含映射$i_U\colon U \to G$诱导出一个同构

$$\mathbf{L}(i_U)\colon \mathbf{L}(U) \to \mathbf{L}(G)$$

局部凸李代数。

注记 8.1.10。作为链式法则的直接推论，我们得到

$$\mathbf{L}(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)} \quad \text{and} \quad \mathbf{L}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \mathbf{L}(\varphi_1) \circ \mathbf{L}(\varphi_2)$$

对于两个可复合的局部李群态射φ_1和φ_2。因此，$\mathbf{L}$定义了一个从局部李群范畴到局部凸李代数范畴的函子。

定义 8.1.11。若存在一个局部李群G，使得$\mathbf{L}(G) \cong \mathfrak{g}$，则称局部凸李代数$\mathfrak{g}$局部可积。

局部可积性的概念将可积性问题分为两个部分：要判断一个李代数是否可积，我们可以先考察其局部可积性，然后再考察相应局部群到全局李群中的嵌入（即扩张问题）（参见定理 8.1.5）。

定义 8.1.12.（伴随表示）设G是一个局部李群。对于(x, y)、(y, x^{-1})和$(xy, x^{-1}) \in D$，定义

$$c_x(y) := (xy)x^{-1} = x(yx^{-1}).$$

那么c_x是在e的某个e-邻域上定义的光滑映射，并且$c_x(e) = e$。我们断言，若$(x, y) \in D$，则

$$c_x \circ c_y = c_{xy} \tag{8.5}$$

在e的某个邻域上成立。事实上，若$z \in G$充分接近e，则有(x, yz)，(y, z)，(z, y^{-1})，(yz, y^{-1})，$(x, c_y(z))$，$(c_y(z)\ x^{-1})$，$(xc_y(z)\ x^{-1}) \in D$，由此得到

$$\begin{aligned} c_x(c_y(z)) &= \big(x((yz)y^{-1})\big)x^{-1} = \big((x(yz))y^{-1}\big)x^{-1} = \big(((xy)z)y^{-1}\big)x^{-1} \\ &= ((xy)z)(y^{-1}x^{-1}) = ((xy)z)(xy)^{-1} = c_{xy}(z). \end{aligned}$$

固定$x \in G$。如果z_1，z_2足够接近e，则$c_x(z_1)$和$c_x(z_2)$均有定义，并且我们有

$$\begin{aligned} c_x(z_1z_2) &= (x(z_1z_2))x^{-1} = ((xz_1)z_2)x^{-1} = ((xz_1)(x^{-1}(xz_2)))x^{-1} \\ &= \big(c_x(z_1)(xz_2)\big)x^{-1} = c_x(z_1)c_x(z_2). \end{aligned}$$

因此，存在某个对称的 e-邻域 $U_x \subseteq G$，使得$c_x\colon U_x \to G$ 是局部李群态射，而推论 8.1.9 意味着 $\mathbf{L}(c_x)\colon \mathfrak{g} \cong \mathbf{L}(U_x) \to \mathfrak{g}$ 是李代数的自同构。

G 的伴随表示定义为

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto \mathbf{L}(c_g) = T_e(\rho_g)^{-1} \circ T_e(\lambda_g) = T_{g^{-1}}(\lambda_g) \circ T_e(\rho_{g^{-1}}).$$

注意到，(8.5) 蕴含 $\mathrm{Ad}(gh) = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h)$，其中 $(g, h) \in D$。由于我们还有 $\mathrm{Ad}(e) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$，因此若将群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 视为局部群，则 Ad 是局部群同态。

注 8.1.13。 设 $(G, D, m, 0)$ 是一个局部李群，其中 G 是某个局部凸空间中的开零邻域。

对于共轭映射的二阶泰勒多项式，由泰勒多项式链式法则（命题 1.6.21）和注 8.1.7 可得：

$$\begin{aligned}(x * y) * x^{-1} &= (x + y + b_2(x, y) + \cdots) * (-x + b_2(x, x) + \cdots) \\ &= (x + y - x) + b_2(x, y) + b_2(x, x) + b_2(x + y, -x) + \cdots \\ &= y + b_2(x, y) - b_2(y, x) + \cdots \\ &= y + [x, y] + \cdots\end{aligned}$$

因此，对于交换子，我们得到

$$\begin{aligned}(x * y * x^{-1}) * y^{-1} &= (y + [x, y] + \cdots) * (-y + b_2(y, y) + \cdots) \\ &= [x, y] + b_2(y, y) + b_2(y, -y) + \cdots \\ &= [x, y] + \cdots\end{aligned}$$

8.1.2 Maurer–Cartan形式及其应用

定义 8.1.14。 设 (G, D, m_G, e) 是一个局部李群。我们定义 Maurer–Cartan形式 $(G, \mathfrak{g})$ 为

$$(\kappa_G)_g := T_g(\lambda_{g^{-1}}) = T_e(\lambda_g)^{-1}$$

（参见（8.2））。这尤其意味着，对于每个左不变向量场x_l，函数 $\kappa_G(x_l) = x$ 是常数。

设 M 是一个光滑连通流形，$f\colon M \to U$ 是一个光滑函数。我们按照定义 5.5.1 将 f 的对数导数定义为

$$\delta(f) := f^*\kappa_G \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}).$$

逐点而言，这意味着

$$\delta(f)_m = (\kappa_G)_{f(m)} \circ T_m(f) = T_e(\lambda_{f(m)})^{-1} \circ T_m(f).$$

引理 8.1.15。 若 G 是一个局部李群，$g \in G$，且 $\lambda_g\colon\ D_g \to G$ 是相应的左乘，则在 D_g上有：

$$\lambda_g^* \kappa_G = \delta(\lambda_g) = \kappa_G|_{D_g}.$$

证明。 对于 $h \in D_g$，由 (8.2) 得到

$$\delta(\lambda_g)_h = T_e(\lambda_{gh})^{-1} T_h(\lambda_g) = T_e(\lambda_h)^{-1} T_h(\lambda_g)^{-1} T_h(\lambda_g) = T_e(\lambda_h)^{-1} = (\kappa_G)_h.$$

□

引理 8.1.16。 设 (G, D_G, m_G, e) 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的局部李群，且 M 是一个光滑连通流形。对于 $f, g \in C^\infty(M, G)$，定义

$$M_{f,g} := (f,g)^{-1}(D_G) \quad \textit{and define} \quad f \cdot g := m_G \circ (f,g)\colon M_{f,g} \to G.$$

对于 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$，我们将 $\mathrm{Ad}(f)\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 定义为

$$(\mathrm{Ad}(f)\alpha)_m := \mathrm{Ad}(f(m)) \circ \alpha_m \quad \textit{for} \quad m \in M.$$

于是下列断言成立：

(i) $\delta(f \cdot g) = \delta(g) + \mathrm{Ad}(g)^{-1}\delta(f)$ 在 $M_{f,\ g}$ (乘积法则)。
(ii) $\delta(f^{-1}) = -\mathrm{Ad}(f)\delta(f)$ (商法则)。

证明。 由链式法则和 (8.2)，可得

$$\begin{aligned}
&\delta(f \cdot g)_m = T_e(\lambda_{f(m)g(m)})^{-1} T_m(f \cdot g) \\
&= T_e(\lambda_{g(m)})^{-1} T_{g(m)}(\lambda_{f(m)})^{-1} \big(T_{g(m)}(\lambda_{f(m)}) T_m(g) + T_{f(m)}(\rho_{g(m)}) T_m(f)\big) \\
&= T_e(\lambda_{g(m)})^{-1} T_m(g) + T_e(\lambda_{g(m)})^{-1} T_{g(m)}(\lambda_{f(m)})^{-1} T_{f(m)}(\rho_{g(m)}) T_m(f) \\
&= \delta(g)_m + T_e(\lambda_{g(m)})^{-1} T_e(\rho_{g(m)}) T_e(\lambda_{f(m)})^{-1} \circ T_m(f) \\
&= \delta(g)_m + \mathrm{Ad}(g(m))^{-1} \circ \delta(f)_m.
\end{aligned}$$

(ii) 鉴于 $M_{f,\ f^{-1}} = M$，(i) 推出

$$0 = \delta(e) = \delta(f \cdot f^{-1}) = \delta(f^{-1}) + \mathrm{Ad}(f)\delta(f),$$

这得到 $\delta(f^{-1}) = -$伴随表示$(f)\delta(f)$。 □

引理 8.1.17。 (唯一性引理) 设(G, D_G, m_G, e) 是一个局部李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 M 是一个光滑连通流形。若 $f, g \in C^\infty(M, G)$ 满足$(g, f^{-1})(M) \subseteq D_G$，且 $\delta(f) = \delta(g)$，则对某个 $x \in G$，$g = \lambda_x \circ f$成立。

证明。 根据假设，我们有 $M_{g,\ f^{-1}} = M$，因此引理 8.1.16 中的两个公式给出

$$\delta(g \cdot f^{-1}) = \delta(f^{-1}) + \mathrm{Ad}(f)\delta(g) = -\mathrm{Ad}(f)\delta(f) + \mathrm{Ad}(f)\delta(f) = 0.$$

因此，在每个 $m \in M$ 中，$T_m(g \cdot f^{-1}) = 0$，所以 $g \cdot f^{-1}$ 恒等于某个 $x \in G$。这意味着，对于所有 $m \in M$，$g(m) = x \cdot f(m)$。□

命题 8.1.18。设 $(G_1、D_1、m_1、e)$ 和 $(G_2、D_2、m_2、e)$ 为局部李群，设 ψ: $\mathbf{L}(G_1) \to \mathbf{L}(G_2)$ 为李代数的连续同态，并设 f: $G_1 \to G_2$ 为光滑映射，满足 $\delta(f) = \psi \circ \kappa_{G_1}$ 且 $f(e) = e$。则存在一个开 e-邻域 $U \subseteq G_1$，使得 $U \times U \subseteq D_1$，并且

$$f(x * y) = f(x) * f(y) \quad for \quad x, y \in U.$$

证明。取一个足够小的开对称 e-邻域 $E \subseteq G_2$，使得$E \times E \subseteq D_2$，并取一个连通开 e-邻域 $U \subseteq G_1$，满足 $U \times U \subseteq D_1$且 $f(U * U) \subseteq E$。

固定 $x \in U$。我们考虑函数

$$h := \lambda_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \lambda_x \colon U \to E, \quad y \mapsto f(x)^{-1} f(x * y)$$

并断言 $h = f|_U$。事实上，由引理 8.1.15 可得

$$\delta(h) = h^* \kappa_{G_2} = \lambda_x^* f^* \lambda_{f(x)^{-1}}^* \kappa_{G_2} = \lambda_x^* f^* \kappa_{G_2} = \lambda_x^* (\psi \circ \kappa_{G_2}) = \psi \circ \kappa_{G_2} = \delta(f).$$

由于 U 连通且 $f(e) = h(e) = e$，由唯一性引理 8.1.17 $h = f|_U$ 可得，进而得到对于 x，$y \in U$，$f(x*y) = f(x)*f(y)$。□

8.1.3 局部李群上的等变微分形式

定义 8.1.19。设 (G, D, m_G, e) 是一个局部李群，E 是一个局部凸空间。进一步假设给定一个局部群同态 ρ_E: $G \to \mathrm{GL}(E)$，使映射 $G \times E \to E$,$(g, v) \mapsto g.v := \rho_E(g)v$ 是光滑的。那么我们称 E 为一个光滑 G-模。

如果满足等变 条件，即对每个 $g \in G$ 都有如下关系，我们称 $\alpha \in \Omega^p(G, E)$ 为一个 p-形式:

$$\lambda_g^* \alpha = \rho_E(g) \circ \alpha|_{D_g}.$$

我们用 $\Omega^p(G, E)^G \subseteq \Omega^p(G, E)$ 表示等变 p-形式构成的子空间。若 E 是平凡模，则等变形式是 G 上取值于 E 的左不变形式。等变 p-形式 α 由相应的元素 $\alpha_e \in C_c^p(\mathfrak{g}, E) = \mathrm{Alt}^p(\mathfrak{g}, E)$ 唯一确定:

$$\alpha_g(T_e(\lambda_g)x_1, \ldots, T_e(\lambda_g)x_p) = \rho_E(g) \circ \alpha_e(x_1, \ldots, x_p) \tag{8.6}$$

对于 $g \in G$，$x_i \in \mathfrak{g}$。

反过来，(8.6) 对每个 $\omega \in C_c^p(\mathfrak{g}, E)$ 唯一定义了一个等变的 p-形式 ω^{eq}，它定义在 G 上，并满足 $\omega_e^{\mathrm{eq}} = \omega$。

命题 8.1.20。对于每个 $\omega \in C_c^p(\mathfrak{g}, E)$，$p \in \mathbb{N}_0$，我们有关系式$d(\omega^{\mathrm{eq}}) = (d_{\mathfrak{g}}\omega)^{\mathrm{eq}}$。特别地，求值映射

$$\mathrm{ev}_e \colon \Omega^p(G, E)^G \to C_c^p(\mathfrak{g}, E), \quad \omega \mapsto \omega_e$$

定义了一个从 G 上的等变 E 值微分形式链复形 $(\Omega^\bullet(G, E)^G, d)$ 到第 *3.8* 节讨论的连续 E 值李代数复形 $(C_c^\bullet(\mathfrak{g}, E)\ d_{\mathfrak{g}})$ 的同构。

证明。 对于 $g \in G$，在 G 的开子集 D_g 上，我们有：

$$\lambda_g^* d\omega^{\mathrm{eq}} = d\lambda_g^* \omega^{\mathrm{eq}} = d(\rho_E(g) \circ \omega^{\mathrm{eq}}) = \rho_E(g) \circ (d\omega^{\mathrm{eq}}),$$

这表明 $d\omega^{\mathrm{eq}}$ 是等变的。

对于 $x \in \mathfrak{g}$，我们将 G 上对应的左不变向量场记为 x_l 。根据 (8.6)，只需计算 $d\omega^{\mathrm{eq}}$ 在单位元处作用于由左不变向量场组成的 $(p+1)$ 元组上的值。由

$$\omega^{\mathrm{eq}}(x_{1,l}, \ldots, x_{p,l})(g) = g.\omega(x_1, \ldots, x_p),$$

我们得到

$$\big(x_{0,l}.\omega^{\mathrm{eq}}(x_{1,l}, \ldots, x_{p,l})\big)(e) = x_0.\omega(x_1, \ldots, x_p),$$

因此

$$\begin{aligned}
&\big(d\omega^{\mathrm{eq}}(x_{0,l}, \ldots, x_{p,l})\big)(e) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \big(x_{i,l}.\omega^{\mathrm{eq}}(x_{0,l}, \ldots, \widehat{x_{i,l}}, \ldots, x_{p,l})\big)(e) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega^{\mathrm{eq}}([x_{i,l}, x_{j,l}], x_{0,l}, \ldots, \widehat{x_{i,l}}, \ldots, \widehat{x_{j,l}}, \ldots, x_{p,l})(e) \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i x_i.\omega(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_p) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j], x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_p) \\
&= (d_{\mathfrak{g}}\omega)(x_0, \ldots, x_p).
\end{aligned}$$

这就证明了我们的断言。 □

8.2 指数局部李群

在深入探讨局部指数李群的整体李论之前，我们需要仔细考察它们的局部版本，即指数局部李群。稍后我们将看到，局部指数李群中的适当单位元邻域构成指数局部李群，但反过来一般并不成立。并非每个指数局部李群都可扩张，也就是说，并非每个指数局部李群都由一个整体的局部指数李群得到。

本节最重要的结果如下：第一个结果是，局部指数李代数之间的任意连续同态都会诱导相应指数局部李群之间的同态。在巴拿赫–李代数这一经典情形中，这是局部群结构由豪斯多夫级数给出这一事实的直接推论。由于一般而言局部乘法并非解析的，我们必须

采用不同的方法来得到这一结果。关键工具是指数局部李群的 Maurer–Cartan形式的显式公式以及唯一性引理 5.5.4。李代数同态会导出群同态这一事实的一个重要推论是，相应指数局部李群的芽是唯一的；也就是说，任何两个对应于同一李括号的局部乘法，在某个零邻域上都相同。这一点颇为惊人，因为它意味着乘法完全由其在原点处的二阶导数决定。由这一唯一性结果，我们推出局部乘法的泰勒级数就是豪斯多夫级数。

下文中，我们总将局部李群 $(G,\ D,\ m_G,\ e)$ 中的乘法记作 $x * y := m_G(x,\ y)$，其中 $(x,\ y) \in D$。

8.2.1 基本事实与若干例子

定义 8.2.1。指数局部李群是形如 $(G,\ D,\ m,\ 0)$ 的局部李群，其中 G 是局部凸空间 $\mathfrak{g}$中的一个开平衡零邻域；对于 $x \in U$和 $t,\ s,$ $t + s \in [-1, 1]$，有 $(tx,\ sx) \in D$，且

$$tx * sx = (t + s)x. \tag{8.7}$$

指数局部李群的李代数 $\mathbf{L}(G) = \mathbf{L}(G,\ D,\ m,\ 0)$ 称为局部指数李代数。

引理 8.2.2。设 G 是一个局部指数李群，且 $U \subseteq \mathbf{L}(G)$ 是一个平衡0邻域，使得$\exp_G|_U$ 是到 G的某个开子集上的微分同胚。则 $(U, m_U, D, 0)$ 关于..... 是一个指数局部李群

$$D := \{(x, y) \in U \times U\colon\ \exp_G x \exp_G y \in \exp_G(U)\}$$

and

$$x * y := m_U(x, y) := (\exp_G|_U)^{-1}(\exp_G(x) \exp_G(y)).$$

证明。 显然，$(U, m_U, D, 0)$ 是一个与 G 的局部子群 $\exp_G(U)$ 同构的局部群（注 8.1.4）。

对每个 $x \in U$ 和 $t, s, t + s \in [-1, 1]$，我们有 $tx, sx, (t + s)x \in U$，因为U 是平衡的。现在

$$\exp_G(tx) \exp_G(sx) = \exp_G((t + s)x) \in \exp_G(U)$$

这意味着 $(tx, sx) \in D$ 且 $(tx) * (sx) = (t + s)x$。 □

例 8.2.3。(a) 设 $\mathfrak{g}$ 是一个巴拿赫–李代数。在下面的定理 8.4.1 中，我们将看到，对于 $\mathfrak{g}$ 上的任意范数 $\|\cdot\|$，若该范数定义了拓扑并满足 $\|[x, y]\| \le \|x\| \cdot \|y\|$（对 $x,\ y \in \mathfrak{g}$），则集合

$$U := \Big\{ x \in \mathfrak{g} \colon \|x\| < \frac{\log 2}{8} \Big\}$$

具有指数局部李群的结构，其乘法由豪斯多夫级数给出

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}[x,[x,y]] + \frac{1}{12}[y,[y,x]] + \dots,$$

在 $U \times U$ 上收敛。由此可得，巴拿赫–李代数是局部指数的。

(b) 有限维李代数特别是巴拿赫的，因此是局部指数的。

(c) 对每个实数 $\varepsilon > 0$，区间 $G :=]-\varepsilon,\ \varepsilon[\subseteq \mathbb{R}$ 关于加法及 $D := \{(x,\ y) \in G^2 \colon x + y \in G\}$. 构成一个指数局部李群

更一般地，局部凸空间 E 的每个平衡子集 G 关于加法都是一个指数局部李群。

注记 8.2.4。 设 $(G,\ D,\ m,\ 0)$ 是一个指数局部李群。

(a) 对于 $x \in G$，我们有 $x * (-x) = (-x) * x = (1-1)x = 0$ 对所有 $x \in \mathfrak{g}$ 均成立，因此求逆由下式给出

$$x^{-1} = -x. \tag{8.8}$$

(b) 根据注 8.1.7，求逆的泰勒级数中的二阶项为 $b_2(x,\ x)$，但由于 $x^{-1} = -x$ 是线性的，我们得到 $b_2(x,\ x) = 0$。因此 $b_2(x,\ x) = 0$，这意味着 b_2 是斜对称的，从而

$$b_2(x,y) = \frac{1}{2}[x,y]. \tag{8.9}$$

(c) 对于 $x \in G$，令 $S := \sup\{t \in \mathbb{R} \colon tx \in G\} \in [0,\infty]$。我们断言

$$tx * sx = (t+s)x \quad \text{for} \quad |t|, |s|, |t+s| < S. \tag{8.10}$$

事实上，若 $|t|,\ |s|,\ |t+s| < S$，则存在一个 $T \in \mathbb{R}$ 满足

$$|t|, |s|, |t+s| < T < S.$$

由于 G 是平衡的，$y := Tx \in G$，并且我们有

$$tx * sx = \frac{t}{T}Tx * \frac{s}{T}Tx = \frac{t}{T}y * \frac{s}{T}y = \Big(\frac{t}{T} + \frac{s}{T}\Big)y = \frac{t+s}{T}y = (t+s)x.$$

显然，条件 $|t|, |s|, |t+s| < S$ 对于 (8.10) 成立也是必要的，否则 tx, sx 或 $(t+s)x$ 不包含在 G 中。

（d）对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \frac{1}{n}G$，我们断言

$$x^n := x * (x * (x * \dots))$$

恰好等于 nx。我们通过归纳法论证，对于 $k \le n$，有 $x^k = kx$。当 $k = 1$ 时，无需证明。假设 $k < n$ 且 $x^k = kx$。于是 $kx \in \frac{k}{n}G$ 且 $k+1 \le n$，因此由（c）可知

$$x * x^k = x * (kx) = (k+1)x.$$

例 8.2.5。设 M 是一个紧致光滑流形（带边界），且 $(G, D, m, 0)$ 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的指数局部李群。那么，对每个 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，$C^r(M, \mathfrak{g})$ 在赋予紧开 C^r-拓扑后，都是一个局部凸拓扑李代数。子集 $C^r(M, G)$ 在 $C^r(M, \mathfrak{g})$ 中是开集，并且在逐点乘法下具有局部群结构

$$(f * g)(x) := f(x) * g(x).$$

此乘法是光滑的（参见定理 5.4.2），并在 $C^r(M, G)$ 上定义了一个李代数为 $C^r(M, \mathfrak{g})$ 的指数局部李群结构（另见习题 8.4.8）。

命题 8.2.6。设 $(G, D, m_G, 0)$ 是一个指数局部李群，且 $x, y \in \mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$。那么，我们有以下Trotter 乘积公式

$$x + y = \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n}\Big)$$

以及 交换子公式

$$[x, y] = \lim_{n\to\infty} n^2\Big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n} * \frac{-x}{n} * \frac{-y}{n}\Big).$$

证明。 Trotter 乘积公式由下式得出

$$x + y = T_{(0,0)}(m_G)(x, y) = \lim_{n\to\infty} n \cdot m_G\Big(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \Big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n}\Big).$$

对于交换子公式，我们回顾注 8.1.7：交换子的泰勒展开在 (0,0) 处满足

$$x * y * (-x) * (-y) = [x, y] + \cdots.$$

现在，二阶泰勒公式给出

$$\lim_{n\to\infty} n^2\Big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n} * \frac{-x}{n} * \frac{-y}{n}\Big) = [x, y]. \qquad \square$$

8.2.2 局部群同态与李代数同态

在本小节中，我们首先证明线性定理：任意指数局部李群之间的连续同态都是某个李代数同态的限制，因此特别是光滑的。然后我们讨论逆命题，并证明李代数同态也定义了局部李群之间的同态。

下面的引理讨论线性定理的单参数情形。它是引理 7.2.1 的局部版本。

引理 8.2.7。 设$(G, D, m, 0)$是一个指数局部李群， $\varepsilon > 0$，并且

$$\gamma\colon]-\varepsilon,\varepsilon[\to G \subseteq \mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$$

一个连续映射，满足

$$\gamma(t+s) = \gamma(t) * \gamma(s) \quad for \quad |t|, |s|, |t+s| < \varepsilon.$$

那么存在唯一的元素 $x \in \mathfrak{g}$，使得

$$\gamma(t) = tx \quad for \quad |t| < \varepsilon.$$

证明。 首先我们注意到， $\gamma(0) = \gamma(0) * \gamma(0)$ 蕴含 $\gamma(0) = 0$ （注记 8.1.2(c)）。对于 $|t| < \frac{\varepsilon}{n}$ 和 $\gamma(t) \in \frac{1}{n}G$，我们有

$$n\gamma(t) = \gamma(t)^n = \gamma(nt) \tag{8.11}$$

（注 8.2.4(d)），其中最后一个等式可按照注 8.2.4(d) 中的方法通过归纳法得出。

由于 γ 在 0 处连续，因此存在某个 $T \in]0, \varepsilon[$，使得对 $|t| \le T$，有 $\gamma(t) \in \frac{1}{2}G$，从而 $\gamma(2t) = \gamma(t) * \gamma(t) = 2\gamma(t)$。令 $s \in \mathbb{R}$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 满足$2^{-N}|s| \le T$。那么

$$2^k\gamma(2^{-N-k}s) = 2^{k-1}\gamma(2^{-N-(k-1)}s) = \ldots = 2\gamma(2^{-N-1}s) = \gamma(2^{-N}s)$$

对于 $k \in \mathbb{N}$ （注 8.2.4(d)）表明极限

$$\delta(s) := \lim_{n\to\infty} 2^n\gamma(2^{-n}s)$$

存在，因为序列最终为常数。对于$|s| \le 2^N T$，我们有

$$\delta(s) = 2^N\gamma(2^{-N}s).$$

因此 $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$是连续函数，且对于 $|s| \le T$，有 $\delta(s) = \gamma(s)$。

根据定义，对每个 $s \in \mathbb{R}$，现在都有 $\delta(2s) = 2\delta(s)$ 成立。对于 $k \in \mathbb{N}$和 $s \in \mathbb{R}$，结合 (8.11) 进一步得到

$$\delta(ks) = \lim_{n\to\infty} 2^n\gamma(2^{-n}ks) = \lim_{n\to\infty} 2^n k\gamma(2^{-n}s) = k\delta(s).$$

这意味着

$$\delta(ts) = t\delta(s) \quad \text{for} \quad t \in 2^{\mathbb{Z}}\mathbb{N}.$$

由于 $2^{\mathbb{Z}}\mathbb{N}$ 在 $]0,\infty[$ 中稠密，且 δ 连续，因此对于$t \ge 0$，我们得到 $\delta(t) = t\delta(1)$。此外， $\gamma(-t) * \gamma(t) = \gamma(0) = 0 = \gamma(t) * \gamma(-t)$ 推出 $\gamma(-t) = \gamma(t)^{-1} = -\gamma(t)$。由此，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，我们得到 $\delta(-t) = -\delta(t)$。这证明了对于 $|t| \le T$，$\gamma(t) = t\delta(1)$。

为看出此公式对每个$t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, 均成立，考虑所有满足 $\gamma(t) = tx$的 $t \in [0,\varepsilon[$ 所成集合中0的连通分支 I 。其闭性

由 $s \mapsto \gamma(s) - sx$的连续性可得。我们断言它也是 $[0, \varepsilon[$的一个开子集。取 $t \in I$。若 $t = 0$，则 t是 I在 $[0, \varepsilon[$中的内点。若 $t > 0$，则 $\gamma(t) = tx$，并且我们选取 $0 < h < \min(\varepsilon - t, t)$，使得$(t + h)x \in G$。现在对 $s < h$，由注记 8.2.4(c)可得：

$$\gamma(t + s) = \gamma(t) * \gamma(s) = tx * sx = (t + s)x.$$

因此，I是 $[0, \varepsilon[$, 中的开集，而 $[0, \varepsilon[$ 的连通性推出了 $I = [0, \varepsilon[$。同样，对于所有 $t \in]-\varepsilon,\ 0]$，我们得到 $\gamma(t) = tx$。

x 的唯一性由 $\gamma'(0) = x$得出。 □

下面的定理表明，指数局部群的连续同态是线性映射的限制，因此特别是光滑的。

定理 8.2.8（线性定理）。设（G、D_G、m_G、0）和（H、D_H、m_H、0）为指数局部李群，且 $\varphi\colon\ G \to H$ 是局部群同态。则存在李代数的连续同态 $\psi\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，满足 $\varphi = \psi|_G$。特别地，φ 是光滑的。

证明。令 $x \in \mathfrak{g}$，并选择 $\varepsilon > 0$ 使得 $tx \in G$ 对 $|t| < \varepsilon$成立。鉴于

$$\varphi(tx) * \varphi(sx) = \varphi(tx * sx) = \varphi((t + s)x) \quad \text{for} \quad |t|, |s|, |t + s| < \varepsilon,$$

引理 8.2.7 蕴含存在唯一的元素 $\psi(x) \in \mathfrak{h}$，使得 $\varphi(tx) = t\psi(x)$，其中 $|t| < \varepsilon$。对于 $x \in G$，我们可以选择 $\varepsilon > 1$，由此得到 $\psi(x) = \varphi(x)$。

我们还有 $\psi(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\varphi(tx)$，这立即得到$\psi(0) = 0$，并且对于 $\lambda \in \mathbb{R}^\times$，得到

$$\psi(\lambda x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\varphi(t\lambda x) = \lambda \lim_{t\to 0} \frac{1}{t\lambda}\varphi(t\lambda x) = \lambda\psi(x). \tag{8.12}$$

由于 $\psi|_G = \varphi$ 是连续的，(8.12) 蕴含 ψ 在 $\mathfrak{g}$上连续。

根据 G中的 Trotter 乘积公式，分别地，根据 H（命题 8.2.6），我们现在得到

$$\begin{aligned}
\psi(x + y) &= \lim_{n\to\infty} \psi\Big(n\big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n}\big)\Big) = \lim_{n\to\infty} n\psi\Big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} n\varphi\Big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\Big(\varphi\big(\frac{x}{n}\big) * \varphi\big(\frac{y}{n}\big)\Big) = \lim_{n\to\infty} n\Big(\psi\big(\frac{x}{n}\big) * \psi\big(\frac{y}{n}\big)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{\psi(x)}{n} * \frac{\psi(y)}{n}\Big) = \psi(x) + \psi(y).
\end{aligned}$$

这表明 ψ 是线性的。此外，交换子公式推出

$$\begin{aligned}\psi([x,y]) &= \lim_{n\to\infty} \psi\Big(n^2\big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n} * \frac{-x}{n} * \frac{-y}{n}\big)\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n^2\psi\Big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n} * \frac{-x}{n} * \frac{-y}{n}\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n^2\varphi\Big(\frac{x}{n} * \frac{y}{n} * \frac{-x}{n} * \frac{-y}{n}\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n^2\Big(\varphi\big(\frac{x}{n}\big) * \varphi\big(\frac{y}{n}\big) * \varphi\big(\frac{-x}{n}\big) * \varphi\big(\frac{-y}{n}\big)\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n^2\Big(\psi\big(\frac{x}{n}\big) * \psi\big(\frac{y}{n}\big) * \psi\big(\frac{-x}{n}\big) * \psi\big(\frac{-y}{n}\big)\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n^2\Big(\frac{\psi(x)}{n} * \frac{\psi(y)}{n} * \frac{-\psi(x)}{n} * \frac{-\psi(y)}{n}\Big) = [\psi(x),\psi(y)]. \quad \square\end{aligned}$$

引理 8.2.9。若$(G, D, m, 0)$是指数局部李群，则其李代数 $\mathfrak{g}$ 是ad-可积的，也就是说，对于每个 $x \in \mathfrak{g}$，线性算子$\operatorname{ad} x$ 生成一个光滑的 $\mathbb{R}$-作用 $\alpha\colon \mathbb{R} \to$一般线性群$(\mathfrak{g})$ $t \mapsto e^t$伴随表示^x，且 $\alpha'(0) =$伴随表示 x。对于每个 $x \in G$,

$$\operatorname{Ad}(x) = e^{\operatorname{ad} x}.$$

证明。令 Ad: $G \to$Aut$(\mathfrak{g})$ $g \mapsto$**L**(c_g) 为局部群 G 在其李代数 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示（参见定义 8.1.12）。根据定理 8.2.8，我们有

$$\operatorname{Ad}(x)(y) = (x * y) * x^{-1} = c_x(y)$$

当 y 充分接近 0 时。现在我们得到一个定义良好的群同态

$$\alpha_x\colon \mathbb{R} \to \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}), \quad t \mapsto \lim_{n\to\infty} \operatorname{Ad}\Big(\frac{tx}{n}\Big)^n$$

其中，当 $|t| \le 1$ 时，$\alpha_x(t) =$Ad(tx)（习题 8.4.9）。

为了证明 α_x 定义了一个光滑作用，只需证明它在某个零邻域内光滑，因为每个 $\alpha_x(t)$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的连续线性自同构，因此特别是一个光滑映射。根据映射$\alpha_x(t)$的线性性，只需进一步证明映射

$$\mathbb{R} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \quad (t, y) \mapsto (\alpha_x(t)y, \alpha_x(t)^{-1}y) = (\alpha_x(t)y, \alpha_x(-t)y)$$

在某个零邻域内光滑；这是由当 t 和 y 充分小时，$\alpha_x(t)y = (tx * y) * (-tx)$得出的。

下文将用到这一点：$c_x(y)$ 关于 y 的线性性意味着，$c_x(y)$ 在 (0,0) 处的泰勒展开中，n 阶项关于 x 的阶为 $n-1$，并且

$$c_x(y) = x * y * (-x) = y + [x, y] + \cdots + \frac{1}{n!}(\operatorname{ad} x)^n y + \cdots$$

（参见注 8.1.7）。由于 $\alpha_x(\mathbb{R}) \subseteq$Aut$(\mathfrak{g})$，导数 $\alpha_x'(0)$ 是 $\mathfrak{g}$的连续导子（命题 D.2.22）。当 y 充分小时，我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_x'(0)y &= \lim_{n\to\infty} n\big(\alpha_x(\frac{1}{n}) - \alpha_x(0)\big)y = \lim_{n\to\infty} n\big(\frac{x}{n} * y * \frac{-x}{n} - y\big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\big(y + \frac{1}{n}[x,y] + \cdots - y\big) = [x,y].\end{aligned}$$

这意味着 $\alpha_x'(0) = \operatorname{ad} x$ （在 $\mathfrak{g}$ 上逐点成立），因此 $\mathfrak{g}$ 是 ad-可积的。 □

下面的命题是关键：局部指数李代数的李代数结构决定了 (0,0) 中局部乘法的芽。它表明，左乘的微分由李括号决定。令人惊叹的是，这里只假设乘法是光滑的；一般而言，光滑函数的芽并不能由其在任意一点的泰勒级数决定。这个结果是定理 5.6.22（关于指数函数的导数）的李代数版本。我们回顾定义 8.1.14：局部李群 (G, D, m, e) 的 Maurer–Cartan形式 κ_G 定义为 $(\kappa_G)_g = T_e(\lambda_g)^{-1}$。

命题 8.2.10. *若 $(G, D, m_G, 0)$ 是指数局部李群，且 $x \in G$，则 Maurer–Cartan形式 κ_G 由以下算子值积分给出*

$$(\kappa_G)_x = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt,$$

按逐点意义解释。

证明。 固定 $t, s \in \mathbb{R}$ 使得 $|t|, |s| < 1$。于是

$$f_{t+s} \colon G \to \mathfrak{g}, \quad x \mapsto (t+s)x = tx * sx$$

是一个光滑函数，可写为 $f_{t+s} = f_t \cdot f_s$，其中 $f_t(x) := tx$ 且 $f_s(x) = sx$。对于 $x \in G$，我们考虑光滑曲线

$$\psi \colon [0,1] \to \mathfrak{g}, \quad t \mapsto (\kappa_G)_{tx}(ty) = t(\kappa_G)_{tx}(y) = \delta(f_t)_x(y),$$

满足 $\psi(0) = 0$ 且 $\psi'(0) = \lim_{t\to 0} t^{-1}\psi(t) = (\kappa_G)_0(y) = y$. 利用左平移对数导数的乘积公式（引理 8.1.16），结合注 8.2.9，我们得到

$$\begin{aligned}\psi(t+s) &= \delta(f_{t+s})_x(y) = \delta(f_t * f_s)_x(y)\\ &= \delta(f_s)_x(y) + \operatorname{Ad}(f_s(x))^{-1}\delta(f_t)_x(y) = \psi(s) + \operatorname{Ad}(sx)^{-1}\psi(t)\\ &= \psi(s) + e^{-s \operatorname{ad} x}\psi(t).\end{aligned}$$

对 $t = 0$ 求导，得到微分方程

$$\psi'(s) = e^{-s \operatorname{ad} x}\psi'(0) = e^{-s \operatorname{ad} x} y,$$

其唯一解为

$$\psi(s) = \psi(0) + \int_0^s e^{-t \operatorname{ad} x} y\, dt = \int_0^s e^{-t \operatorname{ad} x} y\, dt.$$

现在由 $\psi(1) = (\kappa_G)_x y$ 可得该断言。 □

注记 8.2.11. (a) 设 $(G, D, m_G, 0)$ 是一个指数局部李群。我们将乘法映射 $m_G\colon D \to G$ 视为流形 D 上的一个光滑函数，其值属于局部李群 G。令

$$p_j\colon G \times G \to G, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_j, \quad j = 1, 2,$$

表示这些投影。我们将 p_1, p_2 视为光滑函数 $D \to G$，并注意到 $(p_1, p_2)(D) = D$。因此，对数导数的乘积法则（引理 8.1.16）意味着

$$\delta(m_G) = \delta(p_2) + \mathrm{Ad}(p_2)^{-1}\delta(p_1).$$

由命题 8.2.10 可得

$$\delta(p_1)_{(x,y)} = (\kappa_G)_x \circ p_1 = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt \circ p_1$$

and

$$\delta(p_2)_{(x,y)} = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} y}\, dt \circ p_2,$$

由此得到

$$\delta(m_G)_{(x,y)} = \Big(e^{-\operatorname{ad} y} \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt, \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} y}\, dt\Big) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})^2 \cong \mathcal{L}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

(b) 设 G 是一个李群，其指数函数为 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$。我们要计算函数的对数导数

$$m_G \circ (\exp_G \times \exp_G)\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to G.$$

使用 (a) 中的记号，该函数是 $\exp_G \circ p_1$ 与 $\exp_G \circ p_2$的乘积，因此乘积法则以及 $\delta(\exp_G)_x = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt$（定理 5.6.22）可得

$$\begin{aligned}\delta\big(m_G \circ (\exp_G \times \exp_G)\big) &= \delta((\exp_G \circ p_1) \cdot (\exp_G \circ p_2)) \\ &= \delta(\exp_G \circ p_2) + \mathrm{Ad}(\exp_G \circ p_2)^{-1}\delta(\exp_G \circ p_1).\end{aligned}$$

代入 $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$，由此得到

$$\begin{aligned}&\delta\big(m_G \circ (\exp_G \times \exp_G)\big)_{(x,y)} \\ &= \Big(e^{-\operatorname{ad} y} \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt, \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} y}\, dt\Big) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})^2 \cong \mathcal{L}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathfrak{g}).\end{aligned}$$

定理 8.2.12. 设 $(G, D_G, m_G, 0)$ 和 $(H, D_H, m_H, 0)$ 是指数型局部李群，且 $\psi\colon \mathfrak{g} = \mathbf{L}(G) \to \mathfrak{h} = \mathbf{L}(H)$ 是李代数的连续同态。令 D_0 表示包含 $(\psi \times \psi)^{-1}(D_H)$ 的连通分支，其中 $(0, 0)$。那么

$$\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y) \quad \textit{for} \quad (x, y) \in D_0.$$

对于 $G = \mathfrak{g}$ 和 $H = \mathfrak{h}$，特别有 $D_0 = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$，因此 $\psi\colon (\mathfrak{g}, *) \to (\mathfrak{h}, *)$ 是指数李群之间的一个同态。

证明。 设 $D := D_G \cap (\psi \times \psi)^{-1}(D_H)$。在 D 上有两个光滑函数

$$f_1 \colon D \to H, (x,y) \mapsto \psi(x * y) \quad \text{and} \quad f_2 \colon D \to H, (x,y) \mapsto \psi(x) * \psi(y)$$

满足 $f_1(0,0) = 0 = f_2(0,0)$。

我们断言 $\delta(f_1) = \delta(f_2)$。首先注意，在 $G \cap \psi^{-1}(H)$ 上有

$$\delta(\psi)_x = (\kappa_H)_{\psi(x)} \circ \psi = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)}\, dt \circ \psi = \psi \circ \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt = \psi \circ (\kappa_G)_x$$

（习题 7.2.5 和命题 8.2.10），即 $\delta(\psi) = \psi \circ \kappa_G$。由此得到

$$\delta(f_1) = \delta(\psi \circ m_G) = m_G^* \delta(\psi) = m_G^*(\psi \circ \kappa_G) = \psi \circ (m_G^* \kappa_G) = \psi \circ \delta(m_G).$$

另一方面，我们有

$$\delta(f_2) = \delta(m_H \circ (\psi \times \psi)) = (\psi \times \psi)^* \delta(m_H).$$

利用注记 8.2.11，在 $(x, y) \in D$ leads to

$$\begin{aligned}
\delta(f_2)_{(x,y)} &= \delta(m_H)_{(\psi(x),\psi(y))} \circ (\psi \times \psi) \\
&= \left(e^{-\operatorname{ad} \psi(y)} \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)}\, dt, \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(y)}\, dt\right) \circ (\psi \times \psi) \\
&= \psi \circ \left(e^{-\operatorname{ad} y} \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt, \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} y}\, dt\right) \\
&= \psi \circ \delta(m_G)_{(x,y)} = \delta(f_1)_{(x,y)}.
\end{aligned}$$

现在，由唯一性引理 8.1.17 可知， f_1 和 f_2 在 D 中包含 (0,0) 的连通分支 D_0 上重合。对于 $G = \mathfrak{g}$ 和 $H = \mathfrak{h}$，我们有 $D = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$，因此 $D_0 = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$。□

前述定理还有一个“半局部”版本：

定理 8.2.13。 设$(G, D_G, m_G, 0)$是一个李代数为$\mathfrak{g}$的指数局部李群，H 是一个具有指数函数$\exp_H \colon \mathfrak{h} \to H$的李群，并且 $\psi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是李代数的连续同态。令 D_0 表示 D_G 中包含$(0,0)$的连通分支。则

$$\exp_H(\psi(x * y)) = \exp_H(\psi(x)) \exp_H(\psi(y)) \quad \textit{for} \quad (x,y) \in D_0.$$

证明。 令 $\varphi := \exp_H \circ \psi \colon G \to H$，我们得到两个光滑函数

$$f_1 \colon D_G \to H, (x,y) \mapsto \varphi(x * y) \quad \text{and} \quad f_2 \colon D_G \to H, (x,y) \mapsto \varphi(x)\varphi(y)$$

满足 $f_1(0,0) = e = f_2(0,0)$。

为了证明 $\delta(f_1) = \delta(f_2)$，我们利用定理 5.6.22 得到

$$\delta(\varphi)_x = \delta(\exp_H)_{\psi(x)} \circ \psi = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)}\, dt \circ \psi = \psi \circ \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt = \psi \circ (\kappa_G)_x$$

（习题 7.2.5 和命题 8.2.10），即 $\delta(\varphi) = \psi \circ \kappa_G$。由此可得

$$\delta(f_1) = \delta(\varphi \circ m_G) = m_G^* \delta(\varphi) = m_G^*(\psi \circ \kappa_G) = \psi \circ (m_G^* \kappa_G) = \psi \circ \delta(m_G).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} \delta(f_2) &= \delta(m_H \circ (\varphi \times \varphi)) = \delta(m_H \circ (\exp_H \times \exp_H) \circ (\psi \times \psi)) \\ &= (\psi \times \psi)^* \delta(m_H \circ (\exp_H \times \exp_H)). \end{aligned}$$

利用注 8.2.11(b)，并在 $(x, y) \in D$ 中求值，可得

$$\begin{aligned} \delta(f_2)_{(x,y)} &= \delta(m_H \circ (\exp_H \times \exp_H))_{(\psi(x),\psi(y))} \circ (\psi \times \psi) \\ &= \left(e^{-\operatorname{ad} \psi(y)} \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(x)}\, dt, \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} \psi(y)}\, dt \right) \circ (\psi \times \psi) \\ &= \psi \circ \left(e^{-\operatorname{ad} y} \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt, \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} y}\, dt \right) \\ &= \psi \circ \delta(m_G)_{(x,y)} = \delta(f_1)_{(x,y)}. \end{aligned}$$

现在，唯一性引理 8.1.17 表明，f_1 与 f_2 在包含 (0,0) 的 D_G 的连通分支 D_0 上重合。□

作为定理 8.2.12 的一个重要推论，(0,0) 处乘法的芽由李括号决定。这一点相当引人注目，因为并未假定 $*$-乘法是解析的。

定理 8.2.14（指数局部群芽的唯一性）。设 $(G, D_G, m_G, 0)$ 与 $(H, D_H, m_H, 0)$ 为具有相同李代数 $\mathfrak{g} \supseteq G$ 的两个指数局部李群，H 与 D_0 为包含 $(0,0)$ 的 $D_G \cap D_H$ 的连通分支。则

$$m_G(x, y) = m_H(x, y) \quad \textit{for all} \quad x, y \in D_0.$$

证明。我们将前述定理应用于 $\psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$，得到 $D_G \cap (\psi \times \psi)^{-1}(D_H) = D_G \cap D_H$。□

推论 8.2.15。设 $\mathfrak{g}$ 是一个幂零局部凸李代数，$G \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的指数局部群。那么，对于包含 $(0,0)$ 的 D_G 的连通分支中的每一对 (x, y)，乘积 $x * y$ 由豪斯多夫级数给出。

证明。这可通过将定理 8.2.14 应用于 $\psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 和 $H = (\mathfrak{g}, *)$ 得出，其中 $*$ 是 BCH 乘积（定理 7.3.10）。在此情形下，

$$D_G \cap (\psi \times \psi)^{-1}(D_H) = D_G. \qquad \square$$

8.3 局部指数李代数

本节中，我们将视角从局部转向无穷小层面，也就是说，从指数局部李群转向它们的李代数，称为局部指数李代数。本节的第一个主要结果是刻画局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 中使 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 成为局部指数的理想 $\mathfrak{n}$ 。正如我们将在第 9.4 节看到的，这一刻画对于理解局部指数李群 G 的哪些正规子群 N 会导出李群商群 G/N 至关重要。本节的第二个主要结果是伴随可扩大性定理：对于任意局部指数李代数 $\mathfrak{g}$，商 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是可扩张的；这一点可通过在由 $e^{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}$ 生成的 $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ 子群上赋予局部指数李群结构来证明。

定义 8.3.1。李代数 $\mathfrak{g}$ 称为局部指数的，如果它是某个指数局部李群的李代数；也就是说，如果存在一个开对称零邻域 $G \subseteq \mathfrak{g}$，它具有指数局部李群 G 的结构，且$\mathbf{L}(G) = \mathfrak{g}$。

下面的引理根据局部乘法给出了闭局部指数子代数的刻画。

引理 8.3.2。设 $\mathfrak{h}$ 是局部指数李代数 $\mathfrak{g}$的李子代数。如果 $\mathfrak{h}$是局部指数的，那么存在一个指数局部李群 $G \subseteq \mathfrak{g}$，使得

$$m_G(D_G \cap (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})) \subseteq \mathfrak{h}. \tag{8.13}$$

反过来，若满足此条件且 $\mathfrak{h}$ 是闭的，则 $\mathfrak{h}$ 是局部指数的。

证明。 (a) 我们先假设 $\mathfrak{h}$ 是局部指数的。设 $H \subseteq \mathfrak{h}$和 $G_1 \subseteq \mathfrak{g}$ 是指数局部李群。那么定理 8.2.12 推出，对于 $(x,\ y) \in D_0$，$D_H \cap D_{G_1}$中 $(0,\ 0)$ 的连通分支是 $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$的一个开子集，并且有 $x *_H y = x *_{G_1} y.$。选取一个满足下列条件的指数局部李子群 $G \subseteq G_1$

$$(G \times G) \cap (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}) \subseteq D_0.$$

对于 $(x,\ y) \in D_G \cap (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})$，我们于是有 $x *_G y = x *_{G_1} y = x *_H y \subseteq \mathfrak{h}.$

(b) 如果 G 满足 (8.13)，那么 $H := G \cap \mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{h}$ 中的一个开平衡 0 邻域，而 $D_H := D_G \cap (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})$ 经由 $m_H := m_G|_{D_H}$ 映射到 $\mathfrak{h}$中。如果 $\mathfrak{h}$ 是闭的，那么 m_H 是光滑映射，现在不难看出 $(H,\ D_H,\ m_H,\ 0)$ 是 $\mathfrak{h}$中的一个指数局部李群。□

命题 8.3.3。（局部指数子代数的逆像）设$\psi\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是局部指数李代数之间的态射，且 $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{h}$ 是一个闭局部指数子代数。则 $\psi^{-1}(\mathfrak{h}_1)$ 是局部指数的。特别地，核ψ 是局部指数的。

证明。首先，我们利用引理 8.3.2 找到一个指数局部李群 $H \subseteq \mathfrak{h}$，使得

$$m_H(D_H \cap (\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_1)) \subseteq \mathfrak{h}_1.$$

接下来，我们为（x，y）选择一个指数局部李群 $G \subseteq \mathfrak{g}$，其具有 ψ（G）$\subseteq H$、ψ（D_G）$\subseteq D_H$ 以及 ψ（$x * y$）$= \psi$（x）$* \psi$（y）（定理 8.2.12）。然后，对于逆像 $\mathfrak{g}_1$，我们得到$= \psi^{-1}$（$\mathfrak{h}_1$），并且（x，y）$\in D_G \cap$（$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$）满足关系

$$\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y) \in \mathfrak{h}_1,$$

因此 $x * y \in \mathfrak{g}_1$。由于 $\mathfrak{g}_1$ 是闭的，引理 8.3.2 现在表明 $\mathfrak{g}_1$ 是局部指数的。□

推论 8.3.4。设 ψ_j：$\mathfrak{g}_j \to \mathfrak{h}$、$j = 1$、$2$ 是局部指数李代数之间的态射。那么等化子

$$\mathfrak{e} := \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \colon \psi_1(x_1) = \psi_2(x_2)\}$$

是局部指数的。

证明。 我们将前述命题应用于局部指数李代数之间的态射 $\psi_1 \times \psi_2$: $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$，并注意到对角线$\Delta_{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ 是一个闭局部指数子代数。□

超越巴拿赫–李群的范畴后，李理论面临的最棘手问题之一是：存在这样的光滑作用$\mathbb{R}$ 于局部凸空间 E 上，其无穷小生成元使闭子空间 F 保持不变，但整个单参数群却不保持它不变（参见例 D.2.11）。在李代数的语境中，这引出了稳定性的概念：

定义 8.3.5。若 ad-可积分李代数$\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$（参见引理 8.2.9）稳定，则称之为

$$e^{\operatorname{ad} x}\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \quad \text{for all } x \in \mathfrak{h}.$$

若理想 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 稳定，则称之为

$$e^{\operatorname{ad} x}\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \quad \text{for all } x \in \mathfrak{g}.$$

引理 8.3.6。若 α: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是 *ad*-可积分李代数之间的态射，则$\operatorname{im}(\alpha)$是 $\mathfrak{h}$ 的稳定子代数，而$\ker(\alpha)$ 是稳定理想。

此外，若 $G \subseteq \mathfrak{g}$ 和 $H \subseteq \mathfrak{h}$ 是指数局部李群，且$\alpha(G) \subseteq H$，则

$$(\kappa_G)_x(\ker(\alpha)) = \ker(\alpha)$$

对所有 $x \in G$。

证明。 由于 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 是 ad-可积的，因此 $e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}}$ 和 $e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} \mathfrak{h}}$ 有定义，并且对于每个 $x \in \mathfrak{g}$，我们有

$$\alpha \circ e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x} = e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} \alpha(x)} \circ \alpha$$

（习题 7.2.5），这直接意味着 $\operatorname{im}(\alpha)$ 是一个稳定子代数，而 $\ker \alpha$ 是一个稳定理想。

现在设 $G \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个指数局部李群。由 $(\kappa_G)_x = \kappa_{\mathfrak{g}}(x)$（命题 8.2.10），我们推出 $\alpha \circ (\kappa_G)_x = (\kappa_H)_{\alpha(x)} \circ \alpha_\cdot$。由于 $(\kappa_G)_x$ 和 $(\kappa_H)_{\alpha(x)}$ 可逆，因此可得

$$\ker \alpha = \ker(\alpha \circ (\kappa_G)_x) = (\kappa_G)_x^{-1}(\ker \alpha). \qquad \square$$

例 8.3.7. 我们回顾例 7.1.10 中的指数 Fr´echet–李群 $G = E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$，其中 E 是光滑 1-周期函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的空间，而 $(\alpha_t f)(x) = e^{\mu t} f(x + t)$ 是在 E 上的光滑 $\mathbb{R}$- 作用，其无穷小生成元为 $Df = \mu f + f'$。

令 $M \subseteq [0, 1]$ 为一个非稠密开子集，并令

$$E_M := \{f \in E \colon f|_M = 0\}.$$

那么 E_M 是 E 的一个闭子空间，且 $DE_M \subseteq E_M$，但对于某个 $t \in \mathbb{R}$，$\alpha(t)(E_M) \not\subseteq E_M$。因此，$\mathfrak{h}_M := E_M \rtimes_D \mathbb{R} \leq \mathfrak{g} = E \rtimes_D \mathbb{R}$ 是指数 Fr´echet– 李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个不稳定闭子代数。

例 8.3.8。 令 $V := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$，并考虑由 $\alpha_t(f)(x) = f(x + t)$ 给出的单参数群 $\alpha \colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群(V)。那么 $\mathbb{R}$ 在 V 上光滑作用，因此我们可以构造相应的半直积群

$$G := V \rtimes_\alpha \mathbb{R}.$$

这是一个李群，其光滑指数映射由下式给出

$$\exp(v, t) = \Big(\int_0^1 \alpha_{st} v \, ds, t \Big),$$

其中

$$\Big(\int_0^1 \alpha_{st} v \, ds \Big)(x) = \int_0^1 v(x + st) \, ds.$$

李代数 $\mathfrak{g}$ 具有相应的半直积结构 $\mathfrak{g} = V \rtimes_D \mathbb{R}$，其中 $Dv = v'$，即

$$[(f, t), (g, s)] = (tg' - sf', 0).$$

在 $\mathfrak{g} \cong V \rtimes \mathbb{R}$ 中，我们现在考虑子代数 $\mathfrak{h} := V_{[0,1]} \rtimes \mathbb{R}$，其中

$$V_{[0,1]} := \{f \in V \colon \operatorname{supp}(f) \subseteq [0, 1]\}.$$

那么 $\mathfrak{h}$ 显然是 $\mathfrak{g}$ 的闭子代数。它并不稳定，因为 $\alpha_{-t}V_{[0,1]} = V_{[t,t+1]}$. 由 $\exp\mathfrak{h}$ 生成的 G 的子群包含 $\{0\} \rtimes \mathbb{R}$、$V_{[0,1]}$，因此也包含所有区间 $V_{[t,t+1]}$，这意味着 $\langle \exp\mathfrak{h} \rangle = C_c^\infty(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$。

引理 8.3.6 表明，包含映射 $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ 不能积分为带有指数函数的李群同态 $\varphi\colon\ H \to G$，使得 $\mathbf{L}(\varphi)$ 为包含映射 $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$。

定理 8.3.9（局部指数李代数的商定理）。设 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 为局部指数李代数$\mathfrak{g}$的闭理想。则商李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数的，当且仅当 $\mathfrak{n}$ 是稳定的，并且存在一个 0-邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$，使得对所有 $x \in U$ 都有 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$。

证明。设 $q\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 表示商态射。若 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数的，则引理 8.3.6 表明 $\mathfrak{n}$ 是稳定理想，并且当 $x \in \mathfrak{g}$ 充分接近 0 时有 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$。

反过来，假设 $G \subseteq \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个凸子集，且为指数局部李群，并且对于所有 $x \in G$，$\mathfrak{n}$ 都满足 $\kappa_G(x)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$。设$U \subseteq G$ 是一个凸对称零邻域，使得 U 中元素的所有四重乘积在 G 中都有定义且满足结合律。

取 x、x'、$x'' \in U$，并假设 $y := x'' - x' \in \mathfrak{n}$。对于曲线

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathfrak{g}, \quad t \mapsto x * (x' + ty)$$

于是，对于 $(a$、$b) \in D_G$，我们得到 $T_b(\lambda_a)T_0(\lambda_b) = T_0(\lambda_{a*b})$，以及关于 $\mathfrak{n}$的不变性条件:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= T_{(x'+ty)}(\lambda_x)y = T_0(\lambda_{x*(x'+ty)})T_0(\lambda_{x'+ty})^{-1}y \\ &= \kappa_G(x*(x'+ty))^{-1}\kappa_G(x'+ty)(y) \in \mathfrak{n}.\end{aligned}$$

由此可得

$$x * x'' = x * (x' + y) = \gamma(1) \in \gamma(0) + \mathfrak{n} = x * x' + \mathfrak{n}.$$

进一步得到

$$\begin{aligned}x'' * x &= (-x) * (x * x'') * x = e^{-\operatorname{ad} x}(x * x'') \in e^{-\operatorname{ad} x}(x * x' + \mathfrak{n}) \\ &= x' * x + e^{-\operatorname{ad} x}\mathfrak{n} = x' * x + \mathfrak{n}\end{aligned}$$

因为 $\mathfrak{n}$是一个稳定理想。因此，光滑映射

$$U \times U \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \quad (x, x') \mapsto x * x' + \mathfrak{n} \tag{8.14}$$

在凸集 $U \times U$ 与子空间 $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$ 的陪集的交集上为常数。令 $q\colon\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 表示商映射，并令 $Q := q(U)$，它是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 中一个开对称凸零邻域。我们置

$$D_Q := \{(q(x), q(y)) \in Q \times Q\colon\ q(x * y) \in Q\},$$

并得到一个定义良好的乘法映射

$$m_Q\colon D_Q \to Q, \quad (q(x), q(y)) \mapsto q(x) * q(y) := q(x * y).$$

根据引理 1.3.21，映射 (8.14) 是光滑的，因此它也是光滑的。由于 U 中的三重乘积有定义且满足结合律，很容易得出 $(Q,\ D_Q,\ m_Q,\ 0)$ 是一个指数局部李群，其李代数为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$。□

结合引理 8.3.6 和定理 8.3.9，我们得到：

推论 8.3.10（典范分解）。若 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是局部指数李代数之间的态射，则 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}/\ker\alpha$ 是局部指数的，且 α 可经由一个单射态射 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 分解。因此，我们得到分解 $\alpha = \underline{\alpha} \circ q$，其中 $q\colon \mathfrak{g} \to \underline{\mathfrak{g}}$ 是商映射，而 $\underline{\alpha}$ 是单射。

推论 8.3.11。若 $\mathfrak{g}$ 是局部指数的，且 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是一个闭理想，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数的，当且仅当

(i) $\mathfrak{n} \supseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$，(ii) $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，

或(iii) $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是巴拿赫–李代数。

证明。(i) 若 $\mathfrak{n}$ 是一个包含所有交换子的闭理想，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是阿贝尔的，因此是局部指数的，且 $x * y := x + y$。

(ii) 若 $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，则我们考虑对于 $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 和 $x \in \mathfrak{g}$，满足下式的曲线$\gamma(t) := e^{t \operatorname{ad} x} z$

$$\gamma(0) = z, \quad \gamma'(t) = e^{t \operatorname{ad} x}[x, z] = 0,$$

这意味着 $e^{\operatorname{ad} x} z = z$。由此可知，每个中心理想 $\mathfrak{n}$ 都是稳定的，并且对每个 $x \in \mathfrak{g}$ 都满足 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$。现在我们应用定理 8.3.9。(iii) 这由例 8.2.3(a) 得出。□

推论 8.3.12。设 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是局部指数李代数 $\mathfrak{g}$的一个闭理想。假设 $\mathfrak{n}$ 是稳定的，且存在一个0-邻域$U \subseteq \mathfrak{g}$，使得对所有 $x \in U$，都有 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$。那么 $\mathfrak{n}$ 是局部指数的。

证明。根据定理 8.3.9，$\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数的，因此商映射 $q\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数李代数之间的态射，结论由命题 8.3.3 得出。□

下面的定理是局部指数李代数（分别地，李群）理论中的一个关键结果。对于非巴拿赫李群，伴随群没有理由一定是真正的李群；但对于局部指数群（分别地，李代数），该定理尤其表明，伴随群并不存在病态。

定理 8.3.13（伴随可扩大性定理）。对于每个局部指数李代数 $\mathfrak{g}$，群 $G_{\mathrm{ad}} := \langle e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 都具有局部指数李群的结构，其李代数为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} := \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，且指数函数

$$\mathrm{Exp}\colon \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to G_{\mathrm{ad}}, \quad x + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \mapsto e^{\mathrm{ad}\,x}.$$

特别地，0 在$\mathrm{Exp}^{-1}(e)$ 中是孤立的，并且 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是{$x \in \mathfrak{g}$的开子集： $e^{\mathrm{ad}\,x} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$}。此外， G_{ad}在 $\mathfrak{g}$上的典范作用是光滑的。

证明。 由推论 8.3.11，我们已经知道李代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 是局部指数的。根据引理 8.2.9，$\mathfrak{g}$ 是 ad-可积的，因此我们可以考虑群 $G_{\mathrm{ad}} := \langle e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}} \rangle \subseteq$ 一般线性群(g)。映射

$$\mathrm{Exp}\colon \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to G_{\mathrm{ad}}, \quad \overline{x} := x + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \mapsto e^{\mathrm{ad}\,x}$$

由于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ = 属于 ad 的核，该映射是良定义的。

设 $G \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$的指数局部李群。此外，设 $U \subseteq G$ 是一个凸对称开零邻域，使得 U 中元素的所有四重乘积都有定义且满足结合律。设 q: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 是商同态。我们在定理 8.3.9 的证明中已经看到，若将$x := q(x)$与 $y := q(y)$的乘积定义为 $x * y := x * y$，则$V := q(U) \subseteq \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 是一个李代数为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 的指数局部李群。

对于 $x, y \in U$，由 $\mathrm{Ad}(x) = e^{\mathrm{ad}\,x}$（引理 8.2.9）可得

$$\mathrm{Exp}(\overline{x})\,\mathrm{Exp}(\overline{y}) = e^{\mathrm{ad}\,x} e^{\mathrm{ad}\,y} = \mathrm{Ad}(x)\,\mathrm{Ad}(y) = \mathrm{Ad}(x{*}y) = e^{\mathrm{ad}(x*y)} = \mathrm{Exp}(\overline{x}{*}\overline{y}),$$

因此，Exp 限制为局部群的一个同态 $V \to G_{\mathrm{ad}}$。

我们要证明 Exp 在 V 的某个合适子集上是单射。首先注意，对于满足 $\mathrm{Ad}(x) = e^{\mathrm{ad}\,x} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 的 $x \in G$，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}\,dt$ 的可逆性以及关系

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x) \circ \mathrm{ad}\,x = e^{\mathrm{ad}\,x} - \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} = 0$$

（参见定义 5.6.21 中的 (5.19)）推出 $\mathrm{ad}\ x = 0$。由于 $e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{z}(\mathfrak{g})} = \{\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\}$ 平凡成立，我们得出

$$\mathrm{Ad}^{-1}(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) = G \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

若$\overline{-x}, \overline{y} \in V$ 满足 $(-x) * y \in U$，且 $\mathrm{Exp}(x) = \mathrm{Exp}(y)$，则

$$e^{\mathrm{ad}((-x)*y)} = \mathrm{Exp}((-\overline{x}) * \overline{y}) = \mathrm{Exp}(-\overline{x})\,\mathrm{Exp}(\overline{y}) = \mathrm{Exp}(\overline{x})^{-1}\,\mathrm{Exp}(\overline{y}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$

并且 $z := (-x) * y \in U \cap \mathrm{Ad}^{-1}(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。接下来注意到 $x * z = x * ((-x) * y) = y$。

对于每个 $a \in G$ 和 $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，我们有 $e^{\mathrm{ad}\,a} z = z$，因此 $\kappa_G(a) z = z$。将此应用于曲线 $\eta(t) = a * tz$，其中 $t \in [0,1]$ 且 $a,\ z \in U$，可得

$$\eta'(t) = T_0(\lambda_{a*tz})z = \kappa_G(a*tz)^{-1}z = z,$$

由此得到 $a*z = \eta(1) = a+z$。特别地，我们得到 $y = x*z = x+z$，因此 $x = y$。

设 $V_1 \subseteq V$ 是一个平衡开零邻域，且

$$V_1 \times V_1 \subseteq D_V := \{(\overline{x},\overline{y}) \in V^2 \colon x*y \in U\}.$$

那么，前面的论证表明 $\mathrm{Exp}|_{V_1}$ 是单射，因此可以将其视为群 G_{ad} 的一个子集。由于 G_{ad} 由 $\mathrm{Exp}(V_1)$ 生成，V_1 上乘法和求逆的光滑性保证了 G_{ad} 上存在唯一的李群结构，使得 Exp 在单位元邻域内定义一个坐标图（定理 5.3.1）。由构造可立即得出，$\mathrm{Exp}\colon \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \to G_{\mathrm{ad}}$ 是该群的指数函数，因而 G_{ad} 是局部指数的。

最后，我们证明 G_{ad} 在 $\mathfrak{g}$ 上的作用是光滑的。映射

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad (x,y) \mapsto x*y*(-x) = e^{\operatorname{ad} x}y = \exp_{G_{\mathrm{ad}}}(\operatorname{ad} x)y$$

（引理 8.2.9）在 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 中 $(0,0)$ 的某个邻域上是光滑的。因此，引理 1.3.21 表明，相应映射 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 在一个零邻域内是光滑的。由于 G_{ad} 是局部指数的，习题 5.2.6 现在推出，G_{ad} 在 $\mathfrak{g}$ 上的典范作用 α 是光滑的。□

推论 8.3.14。每个具有平凡中心的局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 都是可扩张的。

由关系 $\mathrm{Ad}(\exp_G x) = e^{\operatorname{ad} x}$ 以及命题 7.2.3，我们立即得到：

推论 8.3.15。对于每个局部指数李群，伴随表示定义了一个局部指数李群之间的态射 $\mathrm{Ad}\colon G \to G_{\mathrm{ad}}$。

我们将在第15.5节看到，定理 8.3.13 有一个有趣的推论：可以根据某个子群的离散性来刻画局部指数李代数 $\mathfrak{g}$的可积性，该子群称为其中心中的周期群。在这一背景下，前述定理的要点是，它将局部指数李代数的可扩张性问题归结为中心扩张 $\mathfrak{g}$ of $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 的可扩张性。

命题 8.3.16。设 $\mathfrak{g}$ 是一个局部指数李代数，$|\mathfrak{g}|$ 是其底层局部凸空间，且 G_{ad} 是一个李代数为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} := \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 的单连通局部指数李群。那么 $|\mathfrak{g}| \rtimes G_{\mathrm{ad}}$ 是一个局部指数李群。

证明。首先，我们由伴随可扩张性定理 8.3.13 回顾 G_{ad} 的存在性，该定理已经断言此群在 $\mathfrak{g}$ 上的作用是光滑的。因此 $|\mathfrak{g}| \rtimes_\alpha G_{\mathrm{ad}}$ 是一个李群。

由命题 8.2.10，我们知道任意指数局部李群 $U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$ 的Maurer–Cartan形式由下式给出

$$\kappa_x = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt. \tag{8.15}$$

特别地，映射

$$U_{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (x, y) \mapsto \kappa_x y = T_0(\lambda_x^*)^{-1} y = T_x(\lambda_{-x}^*) y$$

是光滑的，并且映射

$$U_{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (x, y) \mapsto \kappa_x^{-1} y = T_0(\lambda_x^*) y$$

同样是光滑的。用与命题 5.6.10 的证明中相同的论证，现在可得

$$\exp(y, \operatorname{ad} x) := (\kappa_{-x} y, e^{\operatorname{ad} x})$$

是半直积群 $|\mathfrak{g}| \rtimes_\alpha G_{\mathrm{ad}}$ 的指数函数。这里我们不必假设 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的，因为积分 (8.15) 在 $\mathfrak{g}$ 中逐点自动存在（亦见引理 5.6.20，关于当 G 存在时 $TG \cong |\mathfrak{g}| \rtimes G$ 的指数函数）。由于 G_{ad} 是局部指数的，且映射 $(y, \operatorname{ad} x) \mapsto (\kappa_{-x}^{-1} y, \operatorname{ad} x)$ 是光滑的，结论随之成立。 □

半直积李代数 $\mathfrak{h} := |\mathfrak{g}| \rtimes_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 是局部指数的，这一点也可由 $\mathfrak{h} \cong (|\mathfrak{g}| \rtimes_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g})/\{0\} \times \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 以及 $T\mathfrak{g} \cong |\mathfrak{g}| \rtimes_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$ 是局部指数的这一事实推出（引理 8.4.4 与推论 8.3.11）。

8.4 豪斯多夫级数与局部指数李代数

本节致力于讨论有关豪斯多夫级数的两个结果。在第一个小节中，我们证明，对于巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，该级数在某个零邻域上收敛，并且定义了一个解析局部群（定理 8.4.1）。在第二个小节中，我们证明，对于任意指数局部李群，(0，0) 中乘法的泰勒级数都与豪斯多夫级数相同，无论后者是否收敛。

8.4.1 巴拿赫–李代数

设 $\mathfrak{g}$ 是一个巴拿赫–李代数。称 $\mathfrak{g}$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 为**相容的**，如果它诱导出 $\mathfrak{g}$ 上给定的拓扑并且满足

$$\|[x, y]\| \le \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{for all } x, y \in \mathfrak{g}.$$

从现在起，我们固定 $\mathfrak{g}$上的一个相容范数（参见习题 7.3.4），并注意到这意味着在巴拿赫代数 $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ 中，我们有 $\|\operatorname{ad} x\| \le \|x\|$。

我们想证明，豪斯多夫级数在所有满足 $\|x\|+\|y\|<\log 2$ 的有序对 $(x,\ y)\in \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 上收敛。

步骤 1. 我们首先注意到，对于带有次乘性范数的（结合）巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 中的元素 a, b，有

$$\|e^a-\mathbf{1}\|=\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|a\|^k}{k!}=e^{\|a\|}-1.$$

由此可得

$$\|e^ae^b-\mathbf{1}\|\leq\|(e^a-\mathbf{1})e^b\|+\|e^b-\mathbf{1}\|\leq(e^{\|a\|}-1)e^{\|b\|}+e^{\|b\|}-1=e^{\|a\|+\|b\|}-1.$$

特别地，我们得出

$$\|a\|+\|b\|<\log 2\quad\Rightarrow\quad\|e^ae^b-\mathbf{1}\|<1.$$

步骤 2. 现在我们转向幂级数

$$\Psi(X)=\frac{(X+1)\log(X+1)}{X}=(X+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}X^k\in\mathbb{R}[[X]],$$

其收敛半径为 1。于是，对于含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 中满足 $\|a\|<1$ 的每个元素 a，我们定义

$$\Psi(a):=(a+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}a^k$$

并注意到

$$\|\Psi(a)\|\leq\|a+1\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\|a\|^k=(\|a\|+1)\frac{-\log(1-\|a\|)}{\|a\|}.$$

右侧的函数在区间 $[0,1[$ 上递增，因为它由系数非负的幂级数定义。

步骤 3。回到巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，我们假设$\|x\|+\|y\|<\log 2$。那么步骤 1 表明，对所有 $t\in[0,1]$，都有 $\|e^{\operatorname{ad}x}e^{t\operatorname{ad}y}-\mathbf{1}\|<1$，因此 $\Psi(e^{\operatorname{ad}x}e^{t\text{伴随表示}y}-1)$ 有定义。于是我们可以定义

$$x*y:=x+\int_0^1\Psi(e^{\operatorname{ad}x}e^{t\operatorname{ad}y}-\mathbf{1})y\,dt$$

因为被积函数是 t 中的连续函数。检查定理 7.3.4 证明的后半部分可知，我们可以展开右端的绝对收敛幂级数 Ψ 和 $e^{\operatorname{ad}x}$ 等，从而恰好得到豪斯多夫级数。由此得出，当 $\|x\|+\|y\|<\log 2$ 时，该级数收敛到 $x*y$。

步骤 4。 现在我们进一步假设 $\|x\|+\|y\|<\log 32$。于是，对于 $t\in[0,1]$, 我们得到：

$$\|e^{\operatorname{ad} x}e^{t\operatorname{ad} y}-\mathbf{1}\|\le e^{\|x\|+\|y\|}-1\le\tfrac{3}{2}-1=\tfrac{1}{2},$$

因此

$$\|\Psi(e^{\operatorname{ad} x}e^{t\operatorname{ad} y}-\mathbf{1})\|\le\frac{3}{2}\frac{\big(-\log(1-\frac{1}{2})\big)}{\frac{1}{2}}=3\log 2.$$

我们得出 $\|x*y\|\le\|x\|+3\log 2\cdot\|y\|$. 对于 $\|x\|,\ \|y\|<\frac{1}{8}\log 2$, 这意味着

$$\|x*y\|<\tfrac{1}{8}\log 2+\tfrac{3}{8}\log 2\log 2\le\tfrac{1}{2}\log 2.$$

根据步骤 3，这表明，对于

$$\|x\|,\|y\|,\|z\|<\frac{\log 2}{8},$$

两个乘积 $(x*y)*z$和 $x*(y*z)$ 都由关于 x、 y 和 z的收敛幂级数定义。

由定理 7.3.9 可知，豪斯多夫级数在三个变量上的完备自由李代数上定义了一种指数李群结构。因此，将其投影到模掉 $n+1$阶项的商上，我们看到定义 $(x*y)*z$和 $x*(y*z)$ 的幂级数在$n+1$阶项之前一致。由于 n 是任意的，且级数收敛，两个乘积相同。

我们将上述讨论的结果归纳为以下定理：

定理 8.4.1.设 $\mathfrak{g}$ 是一个巴拿赫–李代数，配备相容范数$\|\cdot\|$，并且

$$U:=\Big\{x\in\mathfrak{g}\colon\|x\|<\frac{\log 2}{8}\Big\}.$$

那么，豪斯多夫级数在 上定义了一个解析乘法

$$\{(x,y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\colon\|x\|+\|y\|<\log 2\},$$

并且，对于 x、 y、 $z\in U$，两个迭代乘积 $(x*y)*z$和 $x*(y*z)$均由收敛的豪斯多夫级数定义，且二者相等。令

$$D:=\{(x,y)\in U\colon x*y\in U\}$$

由此，我们得到一个指数局部李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，逆元由 $x^{-1}=-x$ 给出。

证明。 只需证明关于局部群的最后一个断言。

由于 $x*y=x+y$ 对所有满足 $[x,y]=0$ 的配对都成立，因此特别有 $x*(-x)=0$，并且

$$tx*sx=(t+s)x\quad\text{for}\quad|t|,|s|\le 1.$$

由此可直接推出 (Loc1)-(Loc3)。为验证 (Loc4)，令 $(x,\ y) \in D$。为了说明 $(-y,\ -x) \in D$，我们断言 $(-y) * (-x) = -(x * y)$，因此由 $U = -U$ 可得 (Loc4)。该关系

$$(-y) * (-x) = -(x * y)$$

对所有满足 $\|x\| + \|y\| < \log 2$ 的数对 $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 成立，因为它对两个生成元的完备自由李代数上指数群结构中的BCH乘法成立，这意味着级数 $-(x * y)$ 与 $(-x) * (-y)$ 的齐次项彼此重合。

鉴于这些注，其余断言容易得出。 □

定义 8.4.2. 一个*BCH–*李代数 是具有如下性质的局部凸李代数：豪斯多夫级数 $x * y = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, y)$ 对某个开零邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 在 $U \times U$上收敛，并在 U 中的某个零邻域上定义一个解析指数局部群结构。

注 8.4.3.(a) BCH 李代数特别是局部指数的。

(b) 前述定理特别说明，巴拿赫–李代数都是 BCH 代数。

(c) 如果 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数的射影极限，那么它就是 BCH 代数。事实上，我们已经知道 $\mathfrak{g}$ 是指数的（推论7.3.13），且全局乘法 $*$ 由收敛的豪斯多夫级数给出。其复化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$也同样如此，因此 $*\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$定义了一个复解析映射。将其限制到 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$，便得到一个实解析映射。这证明了 $\mathfrak{g}$是 BCH 代数。

8.4.2 局部指数李代数

设 $(G, D, m, 0)$ 是一个指数局部李群，并考虑其乘法映射在 (0,0) 处的泰勒级数

$$x * y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x, y) \tag{8.16}$$

其在 (0,0) 处的乘法映射。我们已经知道，

$$b_1(x, y) = x + y \quad \text{and} \quad b_2(x, y) = \frac{1}{2}[x, y]$$

（注记 8.2.4）。本小节的主要结果指出，(8.16) 就是豪斯多夫级数。

引理 8.4.4. 设$(G, D, m_G, 0)$ 是一个指数局部李群，并将空间 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)|\mathfrak{g}|$ 记为赋有零李括号的空间。那么$(TG, TD, Tm_G, 0_0)$ 是一个指数局部李群，其李代数为 $T\mathfrak{g}\colon = |\mathfrak{g}| \rtimes_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$。

证明。 将切函子 T应用于局部李群 $(G, D, m_G, 0)$，我们在定义域 $TD \subseteq TG \times TG \cong T(G \times G)$ 上得到一个光滑乘法 $Tm_G\colon TD \to TG$。首先我们证明由此得到一个局部李群（参见习题 8.4.3）。

在定义域上

$$D^1 := \{(x, y, z) \in G^3 \colon (x, y), (y, z), (x * y, z) \in D\},$$

结合律条件 (Loc1) 可写为

$$m_G \circ (m_G \times \mathrm{id}_G) = m_G \circ (\mathrm{id}_G \times m_G)\colon D^1 \to G.$$

应用 T，我们得到

$$Tm_G \circ (Tm_G \times \mathrm{id}_{TG}) = Tm_G \circ (\mathrm{id}_{TG} \times Tm_G)$$

on

$$T(D^1) = \{(x, y, z) \in T(G)^3 \colon (x, y), (y, z), (x * y, z) \in T(D)\} = (TD)^1.$$

结合以下观察：对于 $(x,\ y) \in T(D)$，关系

$$(Tm_G(x, y), z) \in T(D)$$

蕴含 $(x,\ Tm_G(y,\ z)) \in T(D)$，反之亦然，由此可得 TG 的 (Loc1)。

对于每个 $x \in TG$，显然有 $(x,\ 0_0)$，$(0_0,\ x) \in TD$ with

$$x * 0_0 = (Tm_G)(x, 0_0) = x = (Tm_G)(0_0, x) = 0_0 * x,$$

这就是 (Loc2)。

为验证 (Loc3)，我们记 $\eta_G\colon\ G \to G$ 为求逆映射，它满足

$$m_G \circ (\eta_G \times \mathrm{id}_G) = m_G \circ (\mathrm{id}_G \times \eta_G) = 0.$$

应用 T 得到

$$Tm_G \circ (T\eta_G \times \mathrm{id}_{TG}) = Tm_G \circ (\mathrm{id}_{TG} \times T\eta_G) = 0_0,$$

这意味着求逆映射 $T\eta_G = \eta_{TG}$ 满足 TG 的 (Loc3)。

最后一个条件 (Loc4) 意味着 D 在映射下是不变的

$$F\colon G \times G \to G \times G, \quad (x, y) \mapsto (\eta_G(y), \eta_G(x)),$$

这意味着 TD 在.....下是不变的

$$TF\colon TG{\times}TG \to TG{\times}TG, \quad (x, y) \mapsto (T\eta_G(y), T\eta_G(x)) = (\eta_{TG}(y), \eta_{TG}(x)),$$

而这就是 TG 的 (Loc4)。

为证明 Tm_G 满足指数性条件

$$tx * sx = (t+s)x \quad \text{for} \quad |s|, |t|, |s+t| \le 1, \tag{8.17}$$

我们用 μ_s 表示乘以 $s \in \mathbb{R}$，用 $\Delta_G(x) := (x,\ x)$ 表示对角映射。于是 (8.17) 可写为

$$m_G \circ (\mu_t \times \mu_s) \circ \Delta_G = \mu_{t+s} \quad \text{for} \quad |s|, |t|, |s+t| \le 1.$$

应用切函子 T，得到

$$Tm_G \circ (T\mu_t \times T\mu_s) \circ T\Delta_G = T\mu_{t+s}. \tag{8.18}$$

接下来我们注意到，$(T\mu_s)(x,v) = (sx, sv)$ 是向量空间 $T\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 上的数乘，数为 s。此外，$T\Delta_G = \Delta_{TG}$，因此 (8.18) 就是局部群 $(TG, TD, Tm_G, 0_0)$ 的 (8.17)。

为了确定局部群 TG 的李代数，我们回忆一下，TG 上的乘积由下式给出

$$(x,v) * (x',v') = (x * x', T_{x'}(\lambda_x)v' + T_x(\rho_{x'})v).$$

由于 $T_{x'}(\lambda_x)v'$ 关于 v' 是线性的，对于 $x = 0$，常数项为 v'，并且对于 $x' = 0$，有 $T_0(\lambda_x)v' = v' + \frac{1}{2}[x,v'] + \cdots$，因此 Tm_G 在 (0,0) 处的二阶泰勒多项式由下式给出

$$\Big(x + x' + \tfrac{1}{2}[x,x'], v + v' + \tfrac{1}{2}[x,v'] - \tfrac{1}{2}[x',v]\Big).$$

因此，$T\mathfrak{g}$ 上的李括号由下式给出

$$[(x,v),(x',v')] = ([x,x'], [x,v'] - [x',v]).$$

这意味着 $T\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \ltimes_{\mathrm{ad}} |\mathfrak{g}|$。 □

为了迭代前述引理中的构造，我们首先将李代数 $T\mathfrak{g} := \mathbf{L}(TG) \cong |\mathfrak{g}| \rtimes_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$ 改写如下。对偶数 $\mathbb{R}[\varepsilon]$ 构成一个 2 维实代数 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\varepsilon$，满足 $\varepsilon^2 = 0$。利用这个交换代数，我们通过将 $\mathbb{R}$ 标量扩张到 $\mathbb{R}[\varepsilon]$，得到对 $T\mathfrak{g}$ 的描述：

$$T\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[\varepsilon] = \varepsilon\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{g} \cong |\mathfrak{g}| \rtimes_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}.$$

迭代这一过程，我们得到一列指数局部李群

$$(T^nG, T^nD, T^nm_G, 0) \quad \text{with} \quad \mathbf{L}(T^nG) \cong T^n\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} T^n(\mathbb{R}),$$

其中

$$T^n(\mathbb{R}) := \mathbb{R}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n], \quad \varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_j\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = 0.$$

在高阶切丛 T^nG 上，我们有对称群 S_n 的自然作用，其不动点集是 n 阶喷射丛 J^nG。在李代数层面，我们有

$$J^n\mathfrak{g} := (T^n\mathfrak{g})^{S_n} \cong (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} T^n(\mathbb{R}))^{S_n} \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} T^n(\mathbb{R})^{S_n},$$

其中 S_n 通过置换生成元 ε_1、……、ε_n 来作用于 $T^n(\mathbb{R})$。此作用的不动点集是由以下元素张成的含幺子代数

$$\delta^{(k)} := \sum_{i_1<\ldots<i_k} \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k},$$

满足

$$\delta^{(k)}\delta^{(\ell)} = \begin{cases} \binom{k+\ell}{k}\delta^{(k+\ell)} & \text{for } k+\ell \le n \\ 0 & \text{for } k+\ell > n. \end{cases}$$

限制到 J^nG上，S_n作用的自然性意味着 $J^n\mathfrak{g}$是 $T^n\mathfrak{g}$ 的子代数，并且 m_G 诱导出一个光滑乘法

$$J^n(m_G)\colon J^n(D) \to J^n(G),$$

从而使 $J^n(G)$成为一个指数局部李群。

定理 8.4.5。 设$(G, D, m_G, 0)$ 是一个指数局部李群。那么，乘法 m_G 在$(0,0)$ 处的泰勒级数与豪斯多夫级数一致。

证明。 显然，只需证明 m_G 在$(0,0)$处的 n喷射，等于豪斯多夫级数$\sum_{r,s\le n} H_{r,s}(x,y)$中所有次数不超过 n 的项之和，其中$H_{r,s}(x,y)$表示在 x 中次数为 r 且在 y中次数为s的齐次直和项。

就上文所引入的术语而言，光滑函数 f 在点 x 处的 n-喷射对 δ 满足：$= \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n$：

$$\begin{aligned}(J^n f)(x+\delta h) &= (T^n f)(x + \varepsilon_1 h + \cdots + \varepsilon_n h) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \delta^{(k)} (d^k f)(x)(h,\ldots,h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta^k}{k!} (d^k f)(x)(h,\ldots,h).\end{aligned}$$

由此，我们可以通过在 $x+\delta h$ 处对 $J^n f$ 求值，得到 f 在 x 处的 n 阶泰勒多项式。因此我们需要证明

$$(J^n m_G)(\delta x, \delta y) = \sum_{k=0}^{n} \delta^k \sum_{r+s=k} H_{r,s}(x,y).$$

为验证这一关系，令 $\varepsilon_{T^n(\mathbb{R})}\colon\ T^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 为增广同态。这是唯一的代数同态 $T^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，其核是由元素 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$生成的超平面理想。与 $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$进行张量积后，得到李代数的同态 $E := \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \otimes \varepsilon_{T^n(\mathbb{R})}\colon\ T^n\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} T^n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$。于是有

$$\ker E \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} (\ker \varepsilon_{T^n(\mathbb{R})}),$$

并且由于 $\ker \varepsilon_{T^n(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i T^n(\mathbb{R})$ 是幂零交换代数，$\ker E$ 是幂零李代数。因此，定理 7.1.6 表明，$\ker E$ 上的乘法由豪斯多夫级数给出。于是特别地，在 $J^n\mathfrak{g}$ 中得到关系

$$(J^n m_G)(\delta x, \delta y) = \delta x * \delta y = \sum_{r,s\le n} H_{r,s}(\delta x, \delta y) = \sum_{r,s\le n} \delta^{r+s} H_{r,s}(x,y),$$

至此，证明完成。 □

第 8 章的开放问题

问题 8.4.6。（商定理的假设）设$\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是局部指数李代数 $\mathfrak{g}$的闭理想。

（1） $\mathfrak{n}$ 的稳定性对于 $\mathfrak{n}$ 是局部指数的是否必要？（2） $\mathfrak{n}$ 的稳定性是否意味着，对于某个 0 邻域中的所有 x ，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$ 成立？（3）假设 $\mathfrak{n}$ 是稳定且局部指数的。这是否意味着当 x 接近 0 时，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{n}) =\mathfrak{n}$成立?

下面的问题阐述了前一个问题的泛函分析本质。

问题 8.4.7. 设 E 是一个麦基完备空间， $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 在 E 上的一个光滑作用， $D = \alpha'(0)$ 是它的无穷小生成元。设

$$\beta(t) := \int_0^1 \alpha(st)\, dt.$$

我们假设，对于 $|t| \le \varepsilon$，有 $\beta(t) \in \mathrm{GL}(E)$，且相应映射$\sim\beta$:
$[-\varepsilon, \varepsilon] \times E \to E \times E$是光滑的。设 $W \subseteq E$是一个在 $\alpha(\mathbb{R})$作用下不变的闭子空间，这显然意味着，对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\beta(t)(W) \subseteq W$。这是否意味着

$$\beta(t)(W) = W \quad \text{for} \quad |t| \le \varepsilon? \tag{8.19}$$

注意， W 是 $\mathfrak{g} = E \rtimes_D \mathbb{R}$的一个闭理想，而条件$\alpha(\mathbb{R})(W) \subseteq W$ 等价于该理想的稳定性。对于接近 0 的 x ，条件$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(W) = W$等价于 (8.19)。

对于局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 中的每个闭稳定理想 $\mathfrak{n}$以及$x \in \mathfrak{g}$ ，我们都能得到一个光滑的 $\mathbb{R}$-作用，它作用于 $E := \mathfrak{g}$ ，定义为 $\alpha(t) := e^{t \operatorname{ad} x}$，且相应算子 $\beta(t)$等于 $\kappa_{\mathfrak{g}}(-tx)$。这一对应关系表明，李理论问题 8.4.6(2)与算子论问题密切相关；后者仅涉及一种非常简单的二步可解李代数。

由于对于每个光滑 $\mathbb{R}$模 E，都有一个等变嵌入 $E \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}, E)$，因此，形如 $E = C^\infty(\mathbb{R}, V)$且满足$(\alpha_t f)(x) = f(t + x)$和 $Df = f'$的光滑模至关重要。

问题 8.4.8。（单参数群与局部指数性）设$\alpha\colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群(E)定义了 $\mathbb{R}$ 在麦基完备局部凸空间上的光滑作用，且 $D := \alpha'(0)$是其无穷小生成元。请用无穷小生成元 D刻画 $G := E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的局部指数性。

将指数函数写为 $\exp_G(v,\ t) = (\beta(t)v,\ t)$，其中 $\beta(t) = \int_0^1 \alpha(st)\ ds$（命题 5.6.10），我们得到曲线 $\beta\colon\ \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$。我们正在寻找如下算子 D 的刻画：存在某个 $T > 0$ 使得

(1) $\beta(]-T, T[) \subseteq \mathrm{GL}(E)$, and
(2) $\widetilde{\beta}\colon\ ]-T, T[\times E \to E, (t, v) \mapsto \beta(t)^{-1}v$ is smooth.

注意，$(t,\ v) \mapsto \beta(t)v$ 总是光滑的。如果 E 是巴拿赫空间，那么 G 是巴拿赫–李群，因而是局部指数的。在此情形下，D 是有界算子，并且对每个 $t \neq 0$都有：

$$\beta(t) = \frac{1}{t}\int_0^t e^{sD}\,ds = \frac{1}{t}\frac{e^{tD} - \mathbf{1}}{D} = \frac{e^{tD} - \mathbf{1}}{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} D^k.$$

由于 $\beta\colon\ \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ 关于 $\mathcal{L}(E)$ 上的算子范数是连续的，$\beta(0) = e$，且一般线性群(E)是开的，条件 (1) 和 (2) 立即成立。此外，谱定理意味着

$$\mathrm{Spec}(\beta(t)) = \left\{ \frac{e^{t\lambda} - 1}{t\lambda} \colon \lambda \in \mathrm{Spec}(D) \right\},$$

这意味着，如果 t 足够小，则 $\beta(t)$ 可逆。

问题 8.4.9.刻画局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 的局部指数闭子代数 $\mathfrak{h}$ 。根据引理 8.3.6，稳定性是必要条件。我们还需要当 $x \in \mathfrak{h}$ 接近 0 时满足 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ 。这两个条件是否充分?

第 8 章习题

习题 8.4.1。设 (G, D, m_G, e) 是一个局部群，且 $U \subseteq G$ 是包含 e 的对称子集。证明 (U, D_U, m_U, e) 是一个局部群，且】【。

$$D_U := \{(x, y) \in D \cap (U \times U)\colon xy \in U\} \quad \text{and} \quad m_U := m_G|_{D_U}.$$

习题 8.4.2. 设 E 是一个向量空间，$\mathfrak{g}$ 是一个李代数，且 $\varphi\colon\ E \to \mathfrak{g}$ 是一个线性同构。证明：

$$[x, y] := \varphi^{-1}([\varphi(x), \varphi(y)])$$

在 E 上定义一种李代数结构，使得 $\varphi\colon\ E \to \mathfrak{g}$ 是李代数同构。

习题 8.4.3。证明：在局部李群 G的切丛 $T(G)$ 上，存在一种局部李群结构 $(TG,\ TD,\ Tm_G,\ 0_e)$。对于这种李群结构，零截面 $\sigma\colon G \to TG$和丛投影 $\pi_G\colon TG \to G$都是局部李群态射，并满足 $\pi_G \circ \sigma_G = \mathrm{id}_G$。

习题 8.4.4。设 $(G,\ D,\ m_G,\ e)$ 是一个局部李群，D_0是 D 中 $(e,\ e)$ 的连通分支。假设 G 是连通的。证明限制 $m_G^0 := m_G|_{D_0}$ 满足 (Loc2)、(Loc3) 和 (Loc4)。

习题 8.4.5。（局部群同态）设 $(G,\ D_G,\ m_G,\ e_G)$ 和 $(H,\ D_H,\ m_H,\ e_H)$ 是局部群，且 $\varphi\colon G \to H$ 是一个映射，满足

$$(\varphi \times \varphi)(D_G) \subseteq D_H$$

and

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y) \quad \text{for} \quad (x, y) \in D_G.$$

证明 $\varphi(e_G) = e_H$.

习题 8.4.6。设 $(G,\ D,\ m_G,\ e)$ 是一个局部群。局部群最微妙的要点之一，是迭代乘积的结合律是否成立。设 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G 的一个递减局部子群序列，满足

$$G_0 = G, \quad G_n \times G_n \subseteq D \quad \text{and} \quad G_n * G_n \subseteq G_{n-1} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.$$

证明：

(1) 对于 $x,\ y,\ z \in G_2$，乘积 $(x * y) * z$和 $x * (y * z)$ 有定义且相等。(2) 对于 G_n中的元素，所有 n重乘积（以任意顺序）都有定义，并且是结合的。提示：对于 x_1，.....，$x_n \in G_n$，定义

$$x_1 * x_2 * \cdots * x_n := (\cdots((x_1 * x_2) * x_3) * \cdots x_n)$$

并用归纳法继续证明。

习题 8.4.7。设 $(G,\ D,\ m_G,\ 0)$ 是一个局部李群，其中 G 是局部凸空间 $\mathfrak{g}$的一个开子集。若 $b(x,\ y)$ 是阶为 2 的泰勒多项式 $x * y = x + y + b(x,\ y)$ 中的二阶项，则置

$$[x, y] := b(x, y) - b(y, x) \quad \text{for} \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

直接证明，不使用向量场：

(1) $\mathfrak{g}$ 上的括号 $[\cdot,\cdot]$ 是连续的、双线性的并且是交错的。(2) 求逆在 0 处的二阶泰勒展开为

$$x^{-1} = -x + b(x, x) + \ldots.$$

(3) 共轭映射在 (0,0) 处的二阶泰勒展开为

$$c_x(y) := (x * y) * x^{-1} = x * (y * x^{-1}) = y + [x, y] + \ldots.$$

（4）交换子映射在（0，0）处的二阶泰勒展开为

$$(x, y) := x * y * x^{-1} * y^{-1} = [x, y] + \ldots.$$

（5）我们有交换子映射在（0，0，0）处的三阶泰勒展开：

$$((x,y),c_y(z)) = \big[[x,y],z\big] + \dots$$

提示：泰勒多项式链式法则（命题 1.6.21）、(1) 与 (2)。(6) 对于充分接近 0 的 x,y,z，我们有 Hall 恒等式

$$((x,y),c_y(z)) * ((y,z),c_z(x)) * ((z,x),c_x(y)) = e.$$

(7) 括号 $[\cdot,\cdot]$ 满足雅可比恒等式。

习题 8.4.8. 设 M 为紧致光滑流形（带边界），G 为局部李群。证明：对每个 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，赋予紧开 C^r-拓扑的群 $C^r(M,G)$ 具有由逐点乘法给出的自然局部李群结构。

习题 8.4.9. 设 V 为局部凸空间，$D \in \mathfrak{gl}(V)$ 为连续线性算子。假设对某个 $\varepsilon > 0$，曲线

$$\alpha\colon [-\varepsilon,\varepsilon] \to \mathrm{GL}(V)$$

在如下意义下是光滑的：映射

$$\widehat{\alpha}\colon [-\varepsilon,\varepsilon]\times V \to V\times V, \quad (t,v)\mapsto (\alpha(t)(v),\alpha(t)^{-1}(v))$$

是光滑的，并且 α 满足初值问题

$$\alpha'(t) = \alpha(t)\circ D, \quad \alpha(0) = \mathrm{id}_V\,.$$

证明：

(1) $\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$，其中 $|t|,\ |s|,\ |t+s| \le \varepsilon$。(2) $\alpha(\frac{t}{n})^n = \alpha(t)$，其中 $|t| \le \bar{\varepsilon}$。(3) $\alpha(t) := \lim_{n\to\infty} \alpha\big(\frac{t}{n}\big)^n$ 将 α 延拓为在 V 上的光滑 $\mathbb{R}$ 作用。

9 李群的子群与商群

理解李群的子群在何种程度上具有自然的李群结构，是李理论中的基本问题之一。同样，人们也希望了解在什么条件下，李群关于闭正规子群取商后仍是李群。显然，正规子群的闭性是商群成为豪斯多夫空间的必要条件；对于有限维群，这一条件已经足够。然而，即使对于巴拿赫–李群，情况也更加复杂。

本章致力于研究这两个问题，共分为四节。第一节介绍李群子群与商群的一般内容，给出相关定义和概念，并在无限维背景下推导出一些有限维理论中熟知的结果。这通常意味着要找出一组合适的假设，使相关构造得以成立。这里我们将子群 $H \leq G$称为**李子群**，前提是它是 G 的子流形，因此它本身也是一个李群。我们还讨论了李子群 H满足哪些充分条件时，商群 G/H 具有自然流形结构；此时我们称 H 为**分裂李子群**。

在第 9.2 节和第 9.3 节中，我们将重点讨论局部指数李群的子群与商群。这是因为局部指数性的假设提供了必要的框架，使我们能够建立关于子群与商群的有力一般性结果。

局部指数李群有两类自然的子群。第一类是积分子群，由那些子群组成 $H \leq G$ ：对于它们，存在一个局部指数李代数的单射态射 $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbf{L}(G)$，使得 $H = \langle \exp_G \mathfrak{h} \rangle$ 带有局部指数李群结构，且 $\mathbf{L}(H) = \mathfrak{h}$。这些群是有限维李群的积分子群（有时称为“解析子群”）的自然推广。重要的一点是，对于积分子群理论，在很大程度上，只需 G 有指数函数且 $\mathfrak{h}$ 是局部指数的，这使我们能够将一些主要定理推广到局部指数群这一类之外。第二类自然的子群是那些赋予从 G 继承的拓扑后成为局部指数李群的子群。由于任一拓扑群至多带有一种局部指数李群结构，

我们称这些群为局部指数李子群。任何闭的局部指数李子群都是子流形，因此是上述意义下的李子群；这一条件等价于其李代数的闭性（在有限维情形下这一点自动成立）。

商群将在第 9.4 节讨论。我们特别证明，对于巴拿赫–李群 G 的闭正规子群 N，商群 G/N 是巴拿赫–李群，当且仅当 N 是 Banach–Lie 子群。如果 G 仅为局部指数的，我们还必须假设$\mathbf{L}(G)/\mathbf{L}(N)$ 是局部指数李代数，才能在 G/N 上得到李群结构。

本章最后将讨论一些开放问题，涉及商群上的流形结构、李群作用的轨道，以及这一领域现有的信息。

预备知识：第 1.1–1.3 节和第 1.6 节，以及第3章（第 1–4 节）、第5章（第 1–3 节）、第 6 章（第 1 节）和第 7 章（第 2 节）。

9.1 一般李群的子群

为了发展一套灵活的无限维李理论，以尽可能少的限制来建立这些概念是很重要的，同时仍保留有趣结构中的关键部分。本着这一精神，我们首先讨论李群 G的一个一般子群 H 的李代数。在非常一般的层面上，我们还可以问：群 G的一个子群 H 是否带有一种李群结构，该结构由 G 的流形结构所决定，其意义是：从光滑流形 M 到 H 的映射$M \to H$ 是光滑的，当且仅当它作为映射 $M \to G$是光滑的。我们称这些李群为初始李子群。由于该定义很容易推出每个子群至多带有一种初始李群结构，一个重要问题是找出充分准则，使得给定子群带有初始李子群结构。令人惊讶的是，这个问题的答案在惊人的一般性下是肯定的。反过来，要证明子群上不存在初始李群结构则相当困难。

我们以齐次空间 G/H上流形结构的一般构造来结束本节。

9.1.1 子群的微分李代数

为李群 G 的子群 H 赋予李群结构的第一步，是为 H 找到一个自然的李代数候选。下面，我们用 $C^1_*([0,1],\ G)$ 表示所有满足 $\gamma(0) = e$ 的 C^1-曲线 $\gamma\colon [0,1] \to G$ 的集合。现在我们将验证，以下定义为 任意子群 $H \le G$ 给出了一个李代数：

$$\mathbf{L}^d(H) := \{\alpha'(0) \in \mathbf{L}(G) = T_e(G) \colon \alpha \in C^1_*([0,1], G),\ \mathrm{im}(\alpha) \subseteq H\}. \tag{9.1}$$

为了证明这始终是一个李代数，我们需要下面的命题及其推论。

命题 9.1.1. 设 E、F 为局部凸空间，设 $U \subseteq E$ 为一个开0-邻域，且 $f \in C^3(U,F)$ 满足 $f(0) = 0$ 与 $\delta_0 f = 0$。则对每个满足 $\eta(0) = 0$ 的 $\eta \in C^1([0,1],U)$，规定 $\gamma(t) := f(\eta(\sqrt{t}))$ 定义一条 C^1-曲线 $[0,1] \to F$，且

$$\gamma'(0) = \frac{1}{2}\delta_0^2 f(\eta'(0)). \tag{9.2}$$

证明. 显然，γ 在 $]0,1]$ 中为 C^1，尚需证明它在 0 处可微，且 γ' 是连续的。由 f 在 0 处的泰勒展开，我们得到

$$f(h) = \frac{1}{2}\delta_0^2 f(h) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 \delta_{th}^3 f(h)\, dt$$

（定理 1.6.14）。因此我们有

$$\frac{f(\eta(s))}{s^2} = \frac{1}{2}\delta_0^2 f\Big(\frac{\eta(s)}{s}\Big) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 s\delta_{t\eta(s)}^3 f\Big(\frac{\eta(s)}{s}\Big)\, dt.$$

由于 $\widetilde{\eta}(0) := \eta'(0)$ 给出曲线 $\widetilde{\eta}(s) := {}^{\eta(s)}s$ 到 $[0,1]$，的连续延拓，我们得出

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(\eta(s))}{s^2} = \frac{1}{2}\delta_0^2 f(\eta'(0)).$$

因此，γ 在 0 处可微，其 $\gamma'(0)$ 由（9.2）给出。在 $t \neq 0$ 中，我们有

$$\gamma'(t) = df\big(\eta(\sqrt{t}), \eta'(\sqrt{t})\big) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

它在 $]0,1]$上连续。记

$$\gamma'(t) = h(1) \quad \text{with} \quad h(s) = df\big(s\eta(\sqrt{t}), \eta'(\sqrt{t})\big) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

我们得到

$$\gamma'(t) = \int_0^1 h'(s)\, ds = \frac{1}{2}\int_0^1 d^{(2)} f\Big(s\eta(\sqrt{t}), \eta'(\sqrt{t}), \frac{\eta(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\Big)\, ds.$$

由于 η 在 0 处可微，且 $d^{(2)}f$ 连续，因此被积函数可延拓为 $[0,1]^2$, 上的连续函数，从而得到

$$\lim_{t\to 0} \gamma'(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 d^{(2)} f(0, \eta'(0), \eta'(0))\, ds = \frac{1}{2}\delta_0^2 f(\eta'(0)) = \gamma'(0). \qquad \square$$

推论 9.1.2. 令 $\alpha, \beta \in C^1_*([0,1], G)$ 和

$$\gamma(t) := \alpha(\sqrt{t})\beta(\sqrt{t})\alpha(\sqrt{t})^{-1}\beta(\sqrt{t})^{-1}.$$

于是 $\gamma \in C^1_*([0,1],\ G)$ 其中 $\gamma'(0) = [\alpha'(0)\ \beta'(0)]$。

证明。 在 G 的局部坐标图 $(\varphi,\ U)$ 中表示所有内容，其中 $\varphi(e) = 0$ 且$T_e(\varphi) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)}$，我们应用命题 9.1.1，取

$$\eta(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \quad \text{and} \quad \gamma(t) = f(\eta(\sqrt{t})) \quad \text{for} \quad f(x,y) = x*y*x^{-1}*y^{-1}.$$

由注 5.1.8 可知，$df(0,\ 0) = 0$ 且 $\frac{1}{2}\delta_0^2 f(x,\ y) = [x, y]$，因此结论成立。 □

命题 9.1.3。 设 $H \leq G$ 是李群 G 的一个子群。那么

$$\mathbf{L}^d(H) = \{\alpha'(0) \in \mathbf{L}(G) \colon \alpha \in C^1_*([0,1], G),\ \mathrm{im}(\alpha) \subseteq H\}$$

是$\mathbf{L}(G)$的李子代数。

证明。 若 $\alpha, \beta \in C^1_*([0,1], G)$，则

$$(\alpha\beta)'(0) = \alpha'(0) + \beta'(0), \quad (\alpha^{-1})'(0) = -\alpha(0),$$

并且，对于 $0 \leq \lambda \leq 1$，曲线 $\alpha_\lambda(t) := \alpha(\lambda t)$ 满足 $\alpha'_\lambda(0) = \lambda\alpha'(0)$。因此，$\mathbf{L}^d(H)$ 是$\mathbf{L}(G)$ 的实线性子空间。

利用推论 9.1.2，我们看到曲线

$$\gamma(t) := \alpha(\sqrt{t})\beta(\sqrt{t})\alpha(\sqrt{t})^{-1}\beta(\sqrt{t})^{-1}$$

其中 $\gamma(0) = e$ 是 C^1，且 $\gamma'(0) = [\alpha'(0)\ \beta'(0)]$。因此，$\mathbf{L}^d(H)$ 是$\mathbf{L}(G)$ 的李子代数。□

我们用上标 d 表示“可微”，以便将$\mathbf{L}^d(H)$ 与李群的李代数区分开来。稍后，我们将介绍另一种定义子群李代数的方法，该方法适用于局部指数李群的闭子群。

注 9.1.4。 对于李群 G 的子群 H 中任意一条 C^1-曲线 $\alpha\colon [0,1] \to H$，连续曲线 $\delta(\alpha) \in C^0([0,1], \mathbf{L}(G))$ 的取值都在$\mathbf{L}^d(H)$ 中。事实上，对于任意 $t_0 \in [0,1]$，C^1-曲线 $\beta(t) := \alpha(t_0)^{-1}\alpha(t_0 + t)$ 满足$\beta(0) = e$ 且 $\beta'(0) = \delta(\alpha)_{t_0}$。注意，$\beta$ 定义在 $[-t_0, 1 - t_0]$ 上，而不是 $[0,1]$，上，但可以通过重新参数化轻松调整。

反过来，如果 H 是 G 的子群，并且

$$\alpha \in C^1_*([0,1], G) \quad \text{with} \quad \delta(\alpha) \in C^0([0,1], \mathbf{L}^d(H)),$$

尚不清楚必须对 H 施加何种自然的附加条件，才能得出 $\alpha(1) \in H$。我们将在下文看到，正则性这一概念有助于解决该问题。

9.1.2 初始李子群

在本小节中，我们简要讨论初始李子群这一相当弱的概念。作为其定义中所内建的泛性质的推论，这种结构只要存在便是唯一的。我们在两种情形下证明其存在性：若 H 中的每条 C^1-弧都是常数，以及若 H 是中心且 G满足某些温和的附加条件。

定义 9.1.5。（初始李子群）李群的单射态射 $\iota\colon H \to G$ 称为 C^k-初始（$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$），如果对于任意从一个 C^k-流形 M 到 G 的 C^k-映射 $f\colon M \to G$，只要 $\operatorname{im}(f) \subseteq \iota(H)$，相应映射 $\iota^{-1} \circ f\colon M \to H$ 就是 C^k。

于是我们称 H 为一个 C^k-初始李子群，而对于 $k = \infty$，则简称为初始。若此外 $\mathbf{L}(\iota)$ 是单射，我们称 H 为严格初始。回想一下，对于 $k < \infty$，此条件自动成立。

下文中，我们通常将 H 与 G 的子群 $\iota(H)$ 等同起来。从这个意义上说，我们将单射光滑映射 ι 视为 H 上的李群结构，并用 H^L 表示赋予此李群结构的 G 的子群 H。由下文的引理 9.1.7 可知，此结构是唯一的。

定义 9.1.6. 下面的引理表明，初始李群结构的存在性只取决于子群 H（将其视为 G 的子集）。因此，将具有初始子群结构的子群 $H \subseteq G$ 称为初始子群是合理的。

引理9.1.7.李群 G 的任意子群 H 至多具有一种初始李子群结构。

证明. 若 $\iota'\colon H' \hookrightarrow G$ 是初始李子群，且其值域与 $\iota\colon H \to G$ 的值域相同，则 $\iota^{-1} \circ \iota'\colon H' \to H$ 和 $\iota'^{-1} \circ \iota\colon H \to H'$ 都是光滑李群态射，因此 H 和 H' 同构。□

例9.1.8.（一个非初始子群；[Gl08a，定理 2.3]）我们将局部凸空间 $G := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 视为阿贝尔李群，并赋予其乘积拓扑。我们断言，$H = \ell^\infty$（由有界序列构成的子群）不具有初始李子群结构。

设 $\iota\colon N \to G$ 是一个 C^∞-初始李子群，且 $\iota(N) = H$。我们赋予 H 从 G 继承的子空间拓扑，使其成为一个局部凸空间，进而成为一个李群；包含映射 $j\colon H \to G$ 光滑且为拓扑嵌入。由 ι 的泛性质，映射 $k := \iota^{-1} \circ j\colon H \to N$ 是李群态射。接下来注意到，余限制 $\zeta := \iota|^H\colon N \to H$ 连续，因此 $k = \zeta^{-1}$ 蕴含 ζ 是同胚，或者说，ι 是拓扑嵌入。

因此，我们可以将 H 和 N 视为拓扑群。子群 $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n]^{\mathbb{N}}$ 是 σ-紧的，因为根据 Tychonoff定理，立方体 $[-n, n]^{\mathbb{N}}$ 是紧的。作为度量空间的子空间，H 也是正则的。对于

光滑流形 N，其在 0 附近存在坐标图，从而意味着其切空间 $T_0(N)$ 包含一个 σ-紧零邻域，因而局部凸空间 $T_0(N)$ 是 σ-紧的。

现在我们证明切映射 $T_0(\iota)\colon T_0(N) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是满射。取 $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 并考虑光滑曲线

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad g(t) = (\sin(ty_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

由于 g 按分量光滑，它是 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中的一条光滑曲线。由于其值域包含于 H，存在一条光滑曲线 $h\colon \mathbb{R} \to N$ 满足 $g = \iota \circ h$，从而 $y = g'(0) \in T_0(\iota)$。$T_0(\iota)$ 的满射性现在蕴含 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是 σ-紧的，因此将贝尔定理应用于完备度量空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，可推出 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是局部紧的，这是荒谬的。

引理 9.1.9. 设 H 是正则李群，且 $j\colon H \to G$ 是李群的单射态射，使得 $\mathbf{L}(j)$ 是具有闭值域的拓扑嵌入。假设对每条光滑曲线 $\gamma\colon [a,b] \to G$，当 $\gamma([a,b]) \subseteq j(H)$ 时，曲线 $\gamma^H := j^{-1} \circ \gamma$ 是光滑的。则 j 定义了 G 的一个初始李子群。

证明。设 M 是一个光滑流形，且 $\varphi \in C^\infty(M, G)$，其中 $\operatorname{im}(\varphi) \subseteq j(H)$。我们需要证明 $j^{-1} \circ \varphi\colon M \to H$ 是光滑的。由于这一断言是局部的，只需假设 $U := M$ 是局部凸空间 E 中的一个开圆形零邻域，并且 $\varphi(0) = e$。我们将 $\mathfrak{h} := \operatorname{im}(\mathbf{L}(j))$ 记为通过嵌入 $\mathbf{L}(H)$ 得到的 $\mathfrak{g}$ 的麦基完备子代数。

我们的假设蕴含 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式 $\delta(\varphi)$ 取值于 $\mathfrak{h}$，且由于 $\mathfrak{h}$ 是闭的，它定义了 $\Omega^1(U, \mathfrak{h})$ 的一个元素。由于它满足 Maurer–Cartan 方程，U 是单连通的，并且 H 是正则的，因此存在一个光滑映射 $\varphi^H\colon U \to H$，满足 $\delta(\varphi^H) = \delta(\varphi)$ 且 $\varphi^H(0) = e$（定理 6.1.13）。由唯一性引理 5.5.4 可知 $j \circ \varphi^H = \varphi$，因此 $j^{-1} \circ \varphi = \varphi^H$ 是光滑的。□

引理 9.1.10. 若 $\iota_H\colon H \to G$ 是某个 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 的 C^k-初始李子群，则以下断言成立：

(i) 对于 $k = 1$，有 $\mathbf{L}^d(H) = \operatorname{im}(\mathbf{L}(\iota_H))$。(ii)若 H 是正规子群，则 G 在 H 上的共轭作用是 C^k。

证明。(i) 若 H 是 C^1-初始的，则

$$C^1_*([0,1], H) = \{\alpha \in C^1_*([0,1], G)\colon \operatorname{im}(\alpha) \subseteq H\}$$

这意味着 $\mathbf{L}(\iota_H)(\mathbf{L}(H)) = \mathbf{L}^d(H)$。

(ii) 共轭映射 $G \times H \to G, (g,h) \mapsto ghg^{-1}$ 是一个光滑映射，其取值属于 H，因此作为映射 $G \times H \to H$ 是光滑的。□

引理 9.1.11. $\mathbf{L}^d(Z(G)) \subseteq \mathfrak{z}(\mathbf{L}(G))$.

证明。 每个 $\gamma \in C^1_*([0,1], G)$，其中 $\operatorname{im}(\gamma) \subseteq Z(G)$，都满足对每个 t，$\operatorname{Ad}(\gamma(t)) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)}$，因此

$$0 = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \operatorname{Ad}(\gamma(t))x = [\gamma'(0), x]$$

对每个 $x \in \mathbf{L}(G)$（命题 5.2.5），因此 $\gamma'(0) \in \mathfrak{z}(\mathbf{L}(G))$。 □

命题 9.1.12。设 G 是一个李群，$H \subseteq G$ 是一个子群，且具有如下性质：H 中所有的 C^1-弧都是常数。则对于任意 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，离散拓扑使 H 成为 G 的一个 C^k-初始李子群。

证明。将赋予离散拓扑的群 H 记为 H_d 。若 M 是一个光滑流形，且 $f\colon M \to G$ 是一个 C^k-映射，并满足 $f(M) \subseteq H$，则 f 是局部常值的，因为 H 中每条 C^1- 弧都是常数。因此映射 $f\colon M \to H_d$ 是局部常值的，故而光滑。□

在推论 9.3.4 中，我们将看到，在局部指数李群 G 的闭子群 H 中，如果 H 的所有单参数子群都是平凡的，那么所有 C^1-弧都是常数。这引出了巴拿赫–李群 $G := L^2([0,1], \mathbb{R})$ 中子群 $H := L^2([0,1], \mathbb{Z})$ 这个具体例子，其中所有 C^1-曲线都是常数（例 9.3.5）。

命题 9.1.13。设 G 是一个具有指数函数的李群，且其子群

$$\Gamma_Z := \{x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\colon \exp_G x = e\} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \tag{9.3}$$

是离散的，并且 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 麦基完备。那么，$Z(G)$ 是一个初始李子群，其中 $\exp|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$ 诱导出一个同构 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})/\Gamma_Z \to Z(G)_0$。

证明。 首先注意到，指数函数

$$\exp_Z := \exp_G|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}\colon \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to Z(G)$$

是一个群同态，而我们的假设意味着 $Z := \mathfrak{z}(\mathfrak{g})/\Gamma_Z$具有自然李群结构（例 5.3.8）。光滑函数 $\exp_Z\colon \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to G$ 可分解为李群的一个单射态射$\iota\colon Z \to G$，其像是 $Z(G)$ 的子群 $\exp_G \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，且其微分 $\mathbf{L}(\iota)$ 是嵌入 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$。现在，我们在 $Z(G)$ 上赋予李群结构，使得 $\exp_G \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是一个与 Z 同构的开子群，并将这个李群记为 $Z(G)^L$ （推论 5.3.2）。那么包含映射

$$\iota\colon Z(G)^L \to G$$

是具有单射微分的李群单射态射。

为了证明这在 $Z(G)$ 上定义了一个初始李群结构，设 $f\colon M \to G$ 是一个光滑映射，满足 $f(M) \subseteq Z(G)$，并固定一点 $m_0 \in M$。为了证明 $f\colon M \to Z(G)^L$ 在 m_0 的某个邻域内是光滑的，我们可以

不失一般性，假设 M 是局部凸空间中的一个开凸子集，且 $f(m_0) = e$。那么左对数导数 $\delta(f) \in \Omega^1(M, \mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ 是定义在 M 上的光滑 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 值 1-形式（引理 9.1.11）。由于 $\delta(f)$ 满足 Maurer–Cartan 方程

$$d(\delta(f)) + \frac{1}{2}[\delta(f), \delta(f)] = 0,$$

（引理 5.5.5），$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是阿贝尔群这一事实意味着 $\delta(f)$ 是闭的。由于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是麦基完备的，且 M 是单连通的，因此存在一个光滑函数 $f_1\colon M \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，使得 $df_1 = \delta(f)$ 且 $\exp_Z(f_1(m_0)) = f(m_0)$（基本定理 6.1.13）。那么光滑函数

$$f_2 := \exp_Z \circ f_1 \colon M \to Z(G)^L$$

满足 $\delta(f_2) = df_1 = \delta(f)$ 和 $f_2(m_0) = f(m_0)$，从而 $f_2 = f$，这意味着 $f\colon M \to Z(G)^L$ 是光滑的。□

下面的例子表明，一般而言，中心 $Z(N)$ 作为拓扑子群，并不是李群，因为它可能是一个全不连通的非离散子群。作者所知的所有以麦基完备空间为模型的李群都满足命题 9.1.13 的要求，因此，对于所有这些李群 G，中心 $Z(G)$ 是一个初始李子群。

例 9.1.14。我们考虑李群

$$G := \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rtimes \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{with} \quad ((z_n),(t_n)) * ((z'_n),(t'_n)) := ((z_n + e^{t_n} z'_n), (t_n + t'_n)),$$

其中，$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 和 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上的局部凸结构由乘积拓扑给出。我们注意到，G 是由同构于 $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{R}$的群构成的无限拓扑乘积，其乘法定义为

$$(z,t) * (z',t') = (z + e^t z', t + t').$$

因此，G的中心为

$$Z(G) = \{0\} \times (2\pi i\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}.$$

这个群是全不连通的，但不是离散的，因此相对于子空间拓扑，它不是李群。因此，李群的中心虽然是闭的，却不一定是李群。

由于 $Z(G)$ 是全不连通的，$Z(G)$ 关于离散拓扑是初始的。

注 9.1.15。如果 G 具有一个在某个零邻域内为单射的指数函数，那么由 (9.3) 可知，0 在 Γ_Z 中是孤立的，因此 Γ_Z 是离散的。因此，前述命题尤其适用于局部指数李群，特别是巴拿赫–李群。

问题 9.1.16。找出一个带有指数函数的李群 G，使得闭子群 $\Gamma_Z = \ker(\exp|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 不是离散的。

9.1.3 李子群

在本书中，我们将遇到李群的几个“尼斯”子群类。其中一类由那些 H 属于 G 子流形的子群组成：

定义 9.1.17。李群 G 中的子群 H，其李代数为 $\mathfrak{g}$，若 H 是 G 的子流形，则称为一个 **李子群**；也就是说，存在一个闭子空间 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 和一个 $\mathfrak{g}$ 坐标图 (φ, U)，使得 $e \in U$ 且 $\varphi(U \cap H) = \varphi(U) \cap \mathfrak{h}$。

由于流形的每个子流形都带有自然流形结构，从而成为初始子流形（定义 3.3.22），我们立即得到：

命题 9.1.18。李群 G 的每个李子群 H，在其自然流形结构下都是一个李群。此外，它是 C^1-初始的。

证明。乘法映射 $m_H\colon H \times H \to H$ 是光滑的，因为 H 是 G 的初始子流形，而 m_H 是光滑映射 $m_G\colon G \times G \to G$ 在 $H \times H$ 上的限制。类似地，我们可以看出求逆 η_H 是光滑的。因此，H 在其自然流形结构下是一个李群。

为描述这个流形结构，取 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 以及 G的一个 $\mathfrak{g}$坐标图（φ, U），其中 $e \in U$ 满足$\varphi(U \cap H) = \varphi(U) \cap \mathfrak{h}$。那么，$H$的坐标图由以下映射给出

$$\psi_h\colon h(U \cap H) = (hU) \cap H \to \varphi(U) \cap \mathfrak{h}, \quad g \mapsto \varphi(h^{-1}g).$$

接下来证明 H 是 C^1-初始的。设 $f\colon M \to G$ 是一个取值于 H的 C^1-映射。要证明余限制 $f\colon M \to H$ 是 C^1，只需考察某个元素 $m_0 \in M$的足够小的邻域。将 f替换为函数 $m \mapsto f(m_0)^{-1} f(m)$后，不妨设 $f(M) \subseteq U$（其中 U 如上方定义所述）。那么 $\widehat{f} := \varphi \circ f\colon M \to \mathbf{L}(G)$ 是 C^1且取值于 $\mathfrak{h}$，因此 $\mathfrak{h}$ 的闭性蕴含其到 $\mathfrak{h}$ 的余限制是C^1。因此 $f = \psi_e^{-1} \circ \widehat{f}\colon M \to H$ 是一个 C^1-映射。□

注 9.1.19. (a) 设 $H \leq G$ 是一个李子群，且 (φ, U) 是定义 9.1.17 中的 G 的一个坐标图。那么，其上的局部乘法 $x * y := \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)$

$$D := \{(x, y) \in \varphi(U) \times \varphi(U)\colon \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y) \in U\}$$

满足

$$x * y \in \mathfrak{h} \quad \text{for} \quad (x, y) \in D \cap (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}) \tag{9.4}$$

and

$$x^{-1} \in \mathfrak{h} \quad \text{for} \quad x \in \mathfrak{h} \cap \varphi(U). \tag{9.5}$$

由注 5.1.8 可知，这意味着 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个闭李子代数，且同构于 $\mathbf{L}(H)$。

反过来，若 $\mathfrak{h} \leq \mathbf{L}(G)$ 是一个闭李子代数，并且存在满足 (9.4) 和 (9.5) 的坐标图 $(\varphi,\ U)$，那么我们将定理 5.3.1 应用于嵌入 $\varphi^{-1}\colon\ \varphi(U) \cap \mathfrak{h} \to G$。这会在由 $\varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \mathfrak{h})$ 生成的子群 $H := \langle \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \mathfrak{h}) \rangle$ 上赋予一种李群结构，该子群是 G 的子群。正如我们将在下文的例 9.3.20 中看到的，这并不总会得到 G 的一个子流形。

(b) 通过仅要求 $H \leq G$ 是一个子群，可以得到一种较弱的“李子群”概念；对于该子群，存在一个单位元邻域 U^H，其包含 e 的 C^∞-弧连通分支 U_0^H 是 G 的子流形（参见 [KYM85，第 45] 页）。然后，我们可以使用定理 5.3.1，在 H 上赋予李群结构，使得某个单位元邻域与 U_0^H 中的一个单位元邻域微分同胚。

9.1.4 李群的商群

本小节汇集了一些关于（正规）子群上的李群结构及商群的一般内容。特别地，我们给出一个关于正规子群 $N \trianglelefteq G$ 的条件，以确保商群 G/N 是一个流形，并且商映射 $q\colon\ G \to G/N$ 在 G 上定义了光滑 N-主丛结构。

定义 9.1.20。（分裂李子群）设 G 是一个李群。若子群 H 携带一种李群结构，使得包含映射 $i\colon\ H \hookrightarrow G$ 是李群的单射态射，并且存在某个局部凸空间 E 的开子集 U 以及一个光滑映射 $\sigma\colon\ U \to G$，满足 $\sigma(0) = e$，使得映射

$$\mu\colon U \times H \to G, \quad (x,h) \mapsto \sigma(x)i(h)$$

是到 G 的开子集上的微分同胚。因此，集合 $\mu(U \times H) = \sigma(U)H$ 是子群 H 在 G 中的管状邻域，而 μ 为该管状邻域提供乘积坐标。

引理 9.1.21. 李群 G的每个分裂李子群 H 都是一个子流形，因此也是一个李子群。

证明。 这直接源于如下事实：对于每个 $x \in U$（如定义中所述），集合 $\{x\} \times H$ 是 $U \times H$的一个子流形，因此 H 是 G的一个子流形。□

命题 9.1.22.对于李群 G中子群 H 上的李群结构，以下条件等价：

(i) H 是一个分裂李子群。(ii) H 在 G 上的典范右作用由$(g,h) \mapsto gh$ 定义；在商空间 G/H上选取适当的流形结构后，它定义了一个光滑的 H-主丛。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii): 我们的假设特别意味着 i 是单射，且 $H \cong i(H)$是 G的一个闭子群。因此，我们将 H 与 i的像视为同一对象。令 $M := G/H$ 表示 G 除以闭子群 H 所得的拓扑商空间，并注意到商拓扑使 M 成为豪斯多夫空间（习题 C.2.7）。我们需要证明 M 是一个光滑流形，并且商映射 q: $G \to M, g \mapsto gH$在 G 上定义了光滑 H-主丛的结构。

设 U 是某个局部凸空间 E 的开子集，并且 $\sigma\colon U \to G$ 是一个光滑映射，满足 $\sigma(0) = e$ ，使得映射

$$\mu\colon U \times H \to G, \quad (x,h) \mapsto \sigma(x)i(h)$$

是到 G 的某个开子集上的微分同胚。令 $W := \mu(U \times H) = \sigma(U)H$，并记 $p_U\colon W \to U$ 为满足对所有 $w \in W$ 都有 $w \in \sigma(p_U(w))H$ 的光滑映射。则 $q(W) = q \circ \sigma(U)$ 是 G/H 的开子集，并且 $q(W) = W/H$ 与 U 同胚，因为 μ 是一个同胚。因此，映射$q \circ \sigma\colon U \to q(W)$ 是一个同胚。我们定义

$$\psi := (q \circ \sigma)^{-1}\colon q(W) \to U.$$

于是，对于 $g \in W$，有

$$\psi(gH) = \psi(\sigma(p_U(g))H) = p_U(g).$$

因此，对于每个 $g \in G$，映射

$$\psi_g\colon V_g := gq(W) \to U, \quad gq(\sigma(x)) \mapsto x$$

也是一个同胚。我们断言，这组同胚构成 G/H 的光滑图册。

令 $g, h \in G$ ，并注意到 $V_g \cap V_h = g(V_e \cap V_{g^{-1}h})$。对于

$$x \in U' := \psi(V_e \cap V_{g^{-1}h}) = \{x \in U\colon h^{-1}g\sigma(x) \in W\},$$

于是我们有

$$\psi_h \circ \psi_g^{-1}(x) = \psi(h^{-1}q(g\sigma(x))) = \psi(h^{-1}g\sigma(x)H) = p_U(h^{-1}g\sigma(x)),$$

这表明 $\psi_h \circ \psi_g^{-1}|_{U'}\colon U' \to U$ 是一个光滑映射。这证明映射 $(\psi_g, V_g)_{g\in G}$ 构成了 G/H 的一个光滑图册。

在 $V_g = gq(W)$ 上，映射

$$g\sigma(x)H \mapsto \sigma(\psi_g(g\sigma(x)H)) = \sigma(\psi(\sigma(x)H)) = \sigma(p_U(\sigma(x))) = \sigma(x)$$

是商映射 $q\colon G \to M = G/H$ 的光滑截面。此外，映射

$$\psi_g \circ q\colon gW \mapsto U, \quad gw \mapsto \psi_g(gwH) = p_U(w)$$

是光滑的，这表明 q 是光滑的。我们得出结论， q 定义了一个以 M 为底空间的光滑 H-主丛，因此 H 是一个分裂李子群。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：设 (φ, U) 是流形 G/H 的一个 E 坐标图，并假设 σ：$U \to G$ 是商映射 q：$G \to G/H$ 的光滑截面。则 (ii) 表明映射

$$\Phi\colon U \times H \to G, \quad (x,h) \mapsto \sigma(x)h$$

是到 G 的开子集 $\sigma(U)H$ 上的一个微分同胚。 □

例 9.1.23. 由于李群 G 的李子群 H 的李代数 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中不一定有闭补空间，因此并非每个李子群都是分裂的。一个简单的例子是巴拿赫空间 $G := \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ 中的闭子空间 $H := c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$（[We95，定理 IV.6.5]）。

推论 9.1.24. 设 G 是一个李群， $N \trianglelefteq G$ 是一个分裂的正规李子群。则商群 G/N 具有自然李群结构，使得商映射 q：$G \to G/N$ 在 G 上定义了一个主 N-丛结构。

证明。 我们赋予 G/N 命题 9.1.22 中的流形结构，该命题已在 G上给出了 N-主丛结构。于是，乘积映射 $q \times q$：$G \times G \to G/N \times G/N$定义了 $G \times G$上的 $(N \times N)$-主丛结构。由于映射

$$m_{G/N} \circ (q \times q) = q \circ m_G\colon G \times G \to G/N, \quad (g,h) \mapsto ghN$$

是光滑的， G/N 上的乘法映射$m_{G/N}$ 也是光滑的。同样，由 $\eta_{G/N} \circ q = q \circ \eta_G$ 可知， G/N的求逆$\eta_{G/N}$是光滑的，因而G/N 是一个李群。□

命题 9.1.25。巴拿赫–李群 G 的李子群 H 是分裂的，当且仅当其李代数 $\mathbf{L}(H)$ 有一个闭补空间。

证明。 设 H 是分裂的，且 $E \subseteq \mathbf{L}(G)$ 是 $\mathbf{L}(G)$ 中 $\mathbf{L}(H)$ 的闭补空间。由定义立即可得，切映射 $T_{(0,0)}(\mu)$：$E \times \mathbf{L}(H) \to \mathbf{L}(G)$ 是线性拓扑同构，因此 $\mathbf{L}(H)$ 是分裂的。

反过来，假设存在一个闭子空间 $E \subseteq \mathbf{L}(G)$，使得求和映射 $E \times \mathbf{L}(H) \to \mathbf{L}(G), (x,y) \mapsto x+y$是一个同胚。于是我们考虑光滑映射

$$\mu\colon E \times H \to G, \quad (x,y) \mapsto \exp_G(x)h,$$

其中 $T_{(0,e)}(\mu)(x, y) = x + y$ 是线性同构。因此，反函数定理表明，存在一个开零邻域 $U_E \subseteq E$和一个开 e邻域 $U_H \subseteq H$，使得限制映射 $\mu|_{U_E \times U_H}$ 是到 G的一个开子集上的微分同胚。

由 $\mu(x,\ yh) = \mu(x,\ y)h$ （对 $h \in H$成立），现在可推出，对于每一对 $(x,\ y) \in U_E \times H$，$T_{(x,y)}(\mu)$ 都可逆，因此 μ 定义了一个局部微分同胚$U_E \times H \to G$。

接下来，我们在 G 中选取一个开 e邻域 U_G，满足 $U_G \cap H = U_H$；并选取一个开零邻域 $V_E \subseteq U_E$，使得 $\operatorname{Exp}_G(-V_E)\operatorname{Exp}_G(V_E) \subseteq U_G$。对于在 μ 下映射到 G 中同一元素的两对 $(x,h),(x',h') \in V_E \times H$，于是有

$$\exp_G(-x')\exp_G(x) = h'h^{-1} \in U_G \cap H = U_H.$$

这推出 $\mu(x,e) = \mu(x', h'h^{-1})$，因此 $U_E \times U_H$ 上 μ 的单射性意味着 $x = x'$ 和 $h' = h$。所以 μ 在 $V_E \times H$ 上是单射的，因而是到 G 的一个开子集上的微分同胚。□

9.2 局部指数积分子群

本节给出一个判据，用于判断局部指数李代数 $\mathfrak{h}$ 到带有指数函数的李群 G 的李代数 $\mathbf{L}(G)$ 的连续单射 $\mathfrak{h} \to \mathbf{L}(G)$ 的可积性。

9.2.1 积分子群

定义 9.2.1。设 G 是一个李群。若一个单射态射 $\iota\colon H \to G$ 是李群态射，且 H 连通，并且微分 $\mathbf{L}(\iota) : \mathbf{L}(H) \to \mathbf{L}(G)$ 是单射，则称其为一个积分子群 。

我们认为，这类子群是通过对李代数的单射态射进行“积分”而得到的，因此得名。

积分子群在相当弱的意义下是子流形。我们将在下文看到，一般而言，它们并非初始子流形（例 9.2.14），这就引出了一个问题：何时积分子群实际上是初始子流形？在定理 9.2.15 中，我们将证明，一大类积分子群都满足这一条件。

引理 9.2.2。设 $\iota\colon H \to G$ 是一个局部指数积分子群，$\mathfrak{h} := \operatorname{im}(\mathbf{L}(\iota))$，$\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$，并假设 G 有一个指数函数。则以下断言成立：

(i) $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的稳定子代数，即对于 $x \in \mathfrak{h}$，有 $e^{\operatorname{ad} x}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ 。
(ii) $\iota(H) = \langle \exp_G(\mathfrak{h}) \rangle$。

证明。 (i) 由于 G 和 H 具有指数映射，对于每个 $x \in \mathbf{L}(H)$，算子 $\operatorname{ad}_{\mathbf{L}(H)} x$ 和 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{L}(\iota)x)$ 满足

$$\mathbf{L}(\iota) \circ \operatorname{ad}_{\mathbf{L}(H)} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{L}(\iota)x) \circ \mathbf{L}(\iota)$$

并分别生成 $\mathfrak{h}$、 $\mathfrak{g}$ 的光滑单参数自同构群。于是

$$\mathbf{L}(\iota) \circ e^{\operatorname{ad}_{\mathbf{L}(H)} x} = e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{L}(\iota)x)} \circ \mathbf{L}(\iota)$$

这由附录中引理 D.2.19（的证明）得出。由此我们立即得到 (i)。

若 G 是局部指数的，我们也可以用引理 8.3.6 来论证。
(ii) 由 $H = \langle \exp_H \mathbf{L}(H) \rangle$ 以及 $\exp_G \circ \mathbf{L}(\iota) = \iota \circ \exp_H$ 得出。 □

鉴于前述引理，我们可以将局部指数积分子群视为如下得到：给子群 $H := \langle \exp_G \mathfrak{h} \rangle$ （G 的子群）赋予某种李群结构，其中 $\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbf{L}(G)$ 是一个局部指数李代数的包含映射，使得 $\mathbf{L}(H) = \mathfrak{h}$。

引理 9.2.3. 设 G 是一个带有指数函数和李代数 $\mathfrak{g}$ 的群，设 $\mathfrak{h}$ 是一个局部指数李代数，且 $\alpha\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 是李代数的连续单射同态。则下列陈述等价：

(i) 0 是子集 $(\exp_G \circ \alpha)^{-1}(e)$ 中的一个孤立点，属于 $\mathfrak{h}$.(ii) $\Gamma_\alpha := \{x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})\colon \exp_G(\alpha(x)) = e\}$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$的离散子群。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii)：条件 (i) 表明 0 是 Γ_α中的孤立点，而这等价于 Γ_α 是离散的（习题 C.2.1）。
(ii) $\Rightarrow$ (i)：设 $H_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathfrak{h}$ 是一个具有如下性质的指数局部李群

$$\{x \in H_{\mathrm{loc}}\colon e^{\operatorname{ad} x} = e\} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$$

（参见伴随可扩张性定理 8.3.13）。若 $\exp_G(\alpha(x)) = e$ 对$x \in H_{\mathrm{loc}}$成立，则

$$e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \alpha(x)} = \operatorname{Ad}(\exp_G(\alpha(x))) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$

从而得到

$$\alpha \circ e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x} = e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \alpha(x)} \circ \alpha = \alpha,$$

因此， α 的单射性推出 $e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x} = e$。于是我们有

$$(\exp_G \circ \alpha)^{-1}(e) \cap H_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h}),$$

从而 (ii) 推出 (i)。 □

定理 9.2.4（积分子群定理）。设 G 是一个具有指数函数的李群，李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $\alpha\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 是局部凸李代数之间的单射连续态射，其中 $\mathfrak{h}$ 是局部指数的。若子群

$$\Gamma_\alpha = \{z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})\colon \exp_G(\alpha(z)) = e\}$$

$\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 是离散的，则存在一个局部指数积分子群 $\iota\colon H \to G$，使得 $\mathbf{L}(H) = \mathfrak{h}$ 且 $\mathbf{L}(\iota) = \alpha$。

子群 Γ_α 是离散的，当且仅当

（a） G 是局部指数的，或者

（b）维数 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) < \infty$。

证明。 我们考虑子群 $H := \langle \exp_G \mathfrak{h} \rangle \subseteq G$. 设 $H_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathfrak{h}$ 是一个李代数为 $\mathfrak{h}$ 的指数局部李群，对此

$$(\exp_G \circ \alpha)^{-1}(e) \cap H_{\mathrm{loc}} = \{0\} \tag{9.6}$$

（引理 9.2.3）。于是定理 8.2.13 蕴含存在 H_{loc} 中的一个开平衡零邻域 V，使得 $V \times V \subseteq D_{H_{\mathrm{loc}}}$，且映射

$$\psi \colon H_{\mathrm{loc}} \to G, \quad x \mapsto \exp_G(\alpha(x))$$

满足

$$\psi(x * y) = \psi(x)\psi(y) \quad \text{for all} \quad x, y \in V. \tag{9.7}$$

特别地，这意味着 $\psi(x)\psi(-x) = e$，从而 $\psi(-x) = \psi(x)^{-1}$。

为证明 ψ 是单射，假设对于 x, $y \in V$，有 $\psi(x) = \psi(y)$。于是

$$\psi((-x) * y) = \psi(-x)\psi(y) = \psi(x)^{-1}\psi(y) = e$$

以及 (9.6) 导出 $(-x) * y \in \psi^{-1}(e) \cap H_{\mathrm{loc}} = \{0\}$，从而 α的单射性给出 $(-x) * y = 0$。我们由此得出

$$x = x * 0 = x * ((-x) * y) = (x * (-x)) * y = 0 * y = y$$

从而 ψ 是单射的。

这意味着 $V \cong \psi(V) \subseteq H$ 带有自然流形结构，并且乘法和求逆在V中的单位元邻域上是光滑的。由于 H 由 V生成，它带有唯一的李群结构，使得 ψ 在 0 的一个邻域中定义一个坐标图（参见定理 5.3.1）。

曲线 $\gamma_x \colon \mathbb{R} \to H, \gamma_x(t) := \exp_G(\alpha(tx))$ 定义单参数群，并且由于当 t 接近 0 时 $\gamma_x(t) = \psi(tx)$ 成立，这些单参数群是光滑的，且 $\gamma_x'(0) = x$，其中我们通过 $T_0(\psi)$ 将 $\mathfrak{h}$与 $T_e(H)$等同。因此 H 具有指数函数 $\exp_H : \mathfrak{h} \to H$，它在一个零邻域上与 ψ重合。特别地， H 是局部指数的，并且包含映射 $\iota \colon H \to G$ 在一个单位元邻域中是光滑的，因而为李群态射。

这就完成了证明的第一部分。现在我们转向使 Γ_α 离散的充分条件。

(a) 若 G 是局部指数的，则 0 在 $\exp_G^{-1}(e)$ 中是孤立的，因此 0 在 $\alpha^{-1}(\exp_G^{-1}(e)) = (\exp_G \circ \alpha)^{-1}(e)$，中也是孤立的，这就是引理 9.2.3 中的条件 (i)。

(b) 由于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 是阿贝尔群，$\exp_G \circ \alpha$ 对 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 的限制是一个光滑群同态 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \to G$，其核为 Γ_α（引理 5.6.16）。因此， Γ_α 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 的闭子群。由于 $\mathbf{L}(\exp_G \circ \alpha) = \alpha|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}$ 是单射，每条 C^1- 曲线 $\gamma \colon [0,1] \to \Gamma_\alpha$ 的导数都属于 $\ker \alpha = \{0\}$。因此， Γ_α 中的每条 C^1-曲线都是常数，所以 Γ_α 不含非平凡向量子空间；若 $\mathfrak{z}$ 是有限维的，则 Γ_α 是离散的（习题 5.6.8）。□

注 9.2.5。 </style}闭子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 具有局部指数性的条件相当微妙。首先， $\mathfrak{h}$ 的稳定性是必要的（引理 8.3.6）。

根据定理 8.2.12，这等价于对足够接近 0 的 x， $y \in \mathfrak{h}$。为验证这一条件，我们希望证明：对于 x， $y \in \mathfrak{h}$ ，经过 x 的左不变向量场 y_l 的积分曲线 $\gamma(t) := x * ty$ 不会离开 $\mathfrak{g}$中的闭子空间 $\mathfrak{h}$。由此得到必要条件 $T_0(\lambda_x)(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$。假设 $\mathfrak{h}$ 是稳定的，这意味着算子$\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt$ 满足：对于足够接近 0 的 $x \in \mathfrak{h}$，有$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ （只要积分在 $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$中有定义即可；若 $\mathfrak{g}$是麦基完备的，则总是如此）。我们已经在推论 8.3.12 中看到，对于局部指数李代数 $\mathfrak{g}$的闭稳定理想 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ ，相应条件$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$ 对所有足够接近 0 的 $x \in \mathfrak{g}$ 成立，足以保证 $\mathfrak{n}$ 是局部指数的。

推论 9.2.6（积分子群定理——Banach 版本）。设G 是一个局部指数李群，$\mathfrak{h}$ 是一个巴拿赫–李代数。那么，李代数的任意连续单射态射 $\alpha\colon \mathfrak{h} \to \mathbf{L}(G)$ 都可积分为 G的一个积分子群。

证明。由定理 9.2.4 可知，结论由如下事实得出：所有巴拿赫–李代数都是局部指数的（例 8.2.3）。□

推论 9.2.7。如果 $\mathfrak{h}$是一个巴拿赫–李代数，且存在一个到巴拿赫–李群 G的李代数的单射连续李代数同态，那么 $\mathfrak{h}$ 可扩张。

我们还记录积分子群定理的如下表述，它以李代数态射的可积性为基础。

推论 9.2.8。局部指数李代数的单射态射 $\alpha\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 可积为局部指数李群之间的态射，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 可扩张。

命题 9.2.9。若 $\mathfrak{g}$ 是 *BCH* 李代数，则每个闭子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 都是局部指数的。

证明。设 $G \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个指数局部李群，其乘法 m_G 是解析的，并由豪斯多夫级数给出。由于 $\mathfrak{h}$ 是闭的，豪斯多夫级数的显式形式表明 $m_G(D_G \cap (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})) \subseteq \mathfrak{h}$，因此 $\mathfrak{h}$ 是 BCH 李代数，从而是局部指数的。□

下面的推论表明，一个看似较弱的假设已经足以推出局部指数李代数是可扩张的。

推论 9.2.10.如果局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 可积为一个带有指数函数 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ 的群，且子群$\Gamma_{\mathfrak{g}} := \{x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\colon \exp_G(x) = e\}$ 是离散的，那么 $\mathfrak{g}$ 是可扩张的。

注 9.2.11. 设 $\mathfrak{g}$是一个局部指数李代数，且G_1 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并带有指数函数 exp: $\mathfrak{g} \to G_1$，该函数在某个零邻域上是单射。那么，推论 9.2.10 蕴含存在一个局部指数李群 G 以及一个单射李群态射 $\iota\colon G \to G_1$，满足 $\mathbf{L}(\iota) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$。尽管我们不知道 ι 不是李群同构的任何例子，但要确保 ι 是同构，我们需要对 G_1 作出额外假设。如果局部指数李群 G 是正则的，那么其万有覆盖 $\widetilde{G}$也同样如此（见下文定理 9.5.6），由定理 6.1.16 可得一个$\widetilde{\ }$李群态射 $\varphi\colon G_1 \to G$，满足 $\mathbf{L}(\varphi) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)}$。我们还可以将 ι 提升为一个李群态射 $\widetilde{\iota}\colon G \to G_1$，满足 $\mathbf{L}(\widetilde{\iota}) = \mathrm{id}_{\mathbf{L}(G)}$。于是，给定李代数态射所对应的李群态射的唯一性推出

$$\varphi \circ \widetilde{\iota} = \mathrm{id}_{\widetilde{G}} \quad \text{and} \quad \widetilde{\iota} \circ \varphi = \mathrm{id}_{\widetilde{G}_1},$$

从而 $\widetilde{\iota}$ 是一个李群同构。因此，ι 是一个局部同构，因而也是满射，所以它是一个李群同构。

例 9.2.12。设 $\mathcal{A}$ 是一个麦基完备连续逆代数，且 $G := \mathrm{GL}_n(\mathcal{A})_0$ 是矩阵代数 $M_n(\mathcal{A})$的单位群的单位连通分支；该矩阵代数也是一个连续逆代数（命题 10.3.6）。那么 G 是一个 BCH 李群（定理 10.1.15），因而特别是局部指数的。

为了得到与李代数相关联的李群

$$\mathfrak{sl}_n(\mathcal{A}) := \overline{[\mathfrak{gl}_n(\mathcal{A}), \mathfrak{gl}_n(\mathcal{A})]},$$

我们使用积分子群定理 9.2.4，得到一个积分子群$\iota\colon S \to G$，使得$\mathbf{L}(S) = \mathfrak{sl}_n(\mathcal{A})$，且$\mathbf{L}(\iota)$是包含映射。

如果 $\mathcal{A}$ 是交换的，那么 $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^\times$ 是一个李群态射，因此

$$\mathrm{SL}_n(\mathcal{A}) := \ker(\det)$$

是一个局部指数李子群，其李代数为 $\ker \mathbf{L}(\text{行列式}) = \ker \mathrm{tr} = \mathfrak{sl}_n(\mathcal{A})$（习题 10.7.8）。在这种情况下，$\mathrm{SL}_n(\mathcal{A})_0 = \langle \exp \mathfrak{sl}_n(\mathcal{A}) \rangle = S$ 就是上文的积分子群。因此，李群 S 是非交换连续逆代数中单位连通分支 $\mathrm{SL}_n(\mathcal{A})_0$ 的类比。

一般来说，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$上没有行列式函数，因此 $\mathrm{SL}_n(\mathcal{A})$应如何定义并不明确，但存在自然的替代方案。迹的非交换版本是李代数同态

$$\mathrm{Tr}\colon \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}/\overline{[\mathcal{A}, \mathcal{A}]}, \quad (a_{ij}) \mapsto \Big[\sum_{j=1}^{n} a_{jj}\Big].$$

令 $q_G\colon \widetilde{G} \to G$ 表示万有覆盖群。于是 Tr 积分为一个局部指数李群之间的同态

$$\alpha\colon \widetilde{G} \to \mathcal{A}/\overline{[\mathcal{A},\mathcal{A}]}$$

$\widehat{\ }$（定理 7.2.9）。现在，群 $S := \ker\alpha$ 是 G的一个局部指数李子$\widetilde{\ }$群，其李代数为

$$\mathbf{L}(\widehat{S}) = \mathbf{L}(\ker\alpha) = \ker\mathbf{L}(\alpha) = \ker\mathrm{Tr} = \mathfrak{sl}_n(\mathcal{A}).$$

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$万有覆盖映射 q_G:

$\widehat{\ } G \to G$ S_0 S S_0 显然映到，因此 是 S 的覆盖群，但 $q_G(S)$ 不$\widehat{\ }$一定是连通的。当 $\curvearrowright\pi_1(G) \cong \ker q_G \not\subseteq S$ 时，就会出现这种情况，也就是说，若

$$\mathrm{per}(\mathrm{Tr})\colon \pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})) \to \mathcal{A}/\overline{[\mathcal{A},\mathcal{A}]}$$

非零。

若 $\mathcal{A}$ 是交换的，则 α 是行列式同态 $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathcal{A})_0 \to \mathcal{A}_0^\times \cong \mathcal{A}/(\ker\exp_{\mathcal{A}})$ 的唯一同态提升。在这种情况下

$$q_G^{-1}(\mathrm{SL}_n(\mathcal{A})) = \alpha^{-1}(\ker\exp_{\mathcal{A}}),$$

因此

$$\mathrm{SL}_n(\mathcal{A}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{A})_0 = q_G\big(\alpha^{-1}(\ker\exp_{\mathcal{A}})\big).$$

9.2.2 可分性与子群的李代数

现在我们来讨论一个问题：积分子群是否决定其“李代数”（视为$\mathbf{L}(G)$的子代数）。

定理 9.2.13. 设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且具有指数映射$\exp_G$: $\mathfrak{g} \to G$，该映射在某个0邻域上是单射。此外，设 $\iota_H\colon H \hookrightarrow G$ 是一个局部指数积分子群，其李代数可分。那么

$$\mathrm{im}(\mathbf{L}(\iota_H)) = \{x \in \mathfrak{g}\colon \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq \iota_H(H)\}.$$

特别地， H 的李代数由 G中的子群 $i_H(H)$ 决定。

证明. 令 $\mathfrak{h} := \mathrm{im}(\mathbf{L}(\iota_H))$。由于 H 的指数映射 $\exp_H$ 满足$\iota_H \circ \exp_H = \exp_G \circ \mathbf{L}(\iota_H)$，我们有 $\exp_G(\mathfrak{h}) \subseteq \iota_H(H)$。令 $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$。我们必须证明 $\exp_G(\mathbb{R}x) \not\subseteq \iota_H(\{$v24$)$。

取一个对称开零邻域 $U_\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$，使 $\exp_G$ 在其上为单射。我们还在$\mathbf{L}(H)$中选取一个指数局部李群 $U_\mathfrak{h} \subseteq \mathbf{L}(\iota_H)^{-1}(U_\mathfrak{g})$，使得 $\exp_H|_{U_\mathfrak{h}}$ 是到 H 的一个开子集上的微分同胚，并且$V_\mathfrak{h} = -V_\mathfrak{h} \subseteq U_\mathfrak{h}$满足 $\exp_H(V_\mathfrak{h})\exp_H(V_\mathfrak{h}) \subseteq \exp_H(\{$v21$)$。

选取 $\varepsilon > 0$ 使得 $tx \in U_\mathfrak{g}$ 对 $|t| \le \varepsilon$成立。对于任意这样的 $t \neq 0$，我们有 $\exp_G(tx) \notin \exp_G(U_\mathfrak{h})$，因为 $tx \notin \mathfrak{h}$ 且 $\exp_G|_{U_\mathfrak{g}}$ 是单射。对于 $|t|,\ |s| < \frac{\varepsilon}{2}$ 且满足 $t \neq s$的情形，这意味着

$$\exp_G((t-s)x) \notin \exp_G(\mathbf{L}(\iota_H)V_{\mathfrak{h}})\exp_G(\mathbf{L}(\iota_H)V_{\mathfrak{h}})$$

因为右侧的集合包含于 $\exp_G(\mathbf{L}(\iota_H)U_{\mathfrak{h}})$ 中。我们得出，集合 $\exp_G(tx)\exp_G(\mathbf{L}(\iota_H)V_{\mathfrak{h}})$，$|t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$，两两不交。另一方面，假设 $\mathbf{L}(H)$ 可分，且 $H = \langle \exp_H \mathbf{L}(H)\rangle$，则 H 可分，因此它不可能包含不可数多个两两不交的开子集。因此，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，$\exp_G(tx)$ 不可能包含于 $\iota_H(H)$ 中。□

例 9.2.14. 对于非可分子代数 $\mathfrak{h}$，如下反例表明，前一定理的结论不再成立（[HoM98，第 157] 页）：考虑阿贝尔李群 $\mathfrak{g} := \ell^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$，其群结构由加法给出。我们将 $(e_r)_{r\in\mathbb{R}}$ 记作 $\ell^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的典范拓扑基元素。由这些元素生成的加法子群$\Gamma \subseteq \mathfrak{g}$（由点对 $(e_r,-r)$、$r \in \mathbb{R}$ 生成）是离散的（习题 9.5.4），因此$\widetilde{\ }$ $G := \mathfrak{g}/\Gamma$ 是阿贝尔李群，其万有覆盖群为 $G = \mathfrak{g}$，且 $\pi_1(G) \cong \Gamma$。现在考虑 $\mathfrak{g}$ 中的闭子代数 $\mathfrak{h} := \ell^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$。由于$\mathfrak{h} + \Gamma = \mathfrak{g}$，我们有 $\exp_G(\mathfrak{h}) = G$。因此，对于巴拿赫–李群 $H := \mathfrak{h}/(\Gamma \cap \mathfrak{h})$，我们得到一个巴拿赫–李群之间的双射态射 $i_H\colon H \to G$，其中 $\mathbf{L}(i_H)$ 是一个闭超平面的嵌入。

要看出 i_H 不是同构，我们注意到元素 $(0,1) \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ 生成了单参数群 $\gamma\colon \mathbb{R} \to G, t \mapsto \exp_G(0,t)$，它作为到 G 的映射是光滑的，但 $i_H^{-1} \circ \gamma$ 作为 H 的单参数群并不连续。

由此我们得到以下病态现象的例子：

- 一个巴拿赫–李群 $H \to G$ 之间的双射态射，但它不是同构，因此特别地不是开映射。
- 一个积分子群 $H \hookrightarrow G$，其值域与 G重合，但其李代数 $\mathfrak{h}$是 $\mathfrak{g}$中的一个真超平面。
- 一个连续单参数群 $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ 以及一个满射连续同态 $i_H\colon H \to G$，但不存在连续单参数群 $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{R} \to H$ 满足 $\gamma = i_H \circ \widetilde{\gamma}$，也就是说，$\gamma$无法提升到 H。

第三种情况也可以从另一种角度来研究。这个闭子群

$$C := \{(t,h) \in \mathbb{R} \times H\colon \gamma(t) = i_H(h)\} \subseteq \mathbb{R} \times H$$

存在一个连续双射 $q\colon C \to \mathbb{R}$，$(t,\ h) \mapsto t$，但它不是同胚。它也可以写作

$$\begin{aligned} C &= \{(t, \exp_H(e_t))\colon t \in \mathbb{R}\} = \{(t,e_t) + (\Gamma \cap \mathfrak{h})\colon t \in \mathbb{R}\} \\ &\subseteq \mathbb{R} \times H \cong \mathbb{R} \times \big(\mathfrak{h}/(\Gamma \cap \mathfrak{h})\big), \end{aligned}$$

这将 C 描述为离散子集的像

$$\{(t,e_t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \ell^1(\mathbb{R})$$

在映射 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times \exp_H$ 下。

9.2.3 积分子群的初始性

现在我们转而讨论局部指数子群成为初始子群的充分条件，即使它们不是闭子群。

定理 9.2.15。设 G 是一个局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。进一步，设 $\iota_H\colon H \hookrightarrow G$ 是一个局部指数积分子群，其李代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的闭可分子代数。若 H 是 C^{k-1}-正则的，则 $\iota_H\colon H \to G$ 定义了 G 的一个 C^k-初始李子群。

证明。设 $\varphi\colon M \to G$ 是一个 C^k-映射，且 $\varphi(M) \subseteq H$。我们必须证明映射 $\iota_H^{-1}\circ\varphi\colon M \to H$ 是 C^k。

设 $m_0 \in M$。只需验证 C^k-性质在 m_0 的某个邻域内成立。通过左乘 $\varphi(m_0)$，不妨设 $\varphi(m_0) = e$。设 $U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个开对称零邻域，使得 $\exp_G|_{U_{\mathfrak{g}}}$ 是一个微分同胚，且映到其像上；设 $V_{\mathfrak{g}} \subseteq U_{\mathfrak{g}}$ 为一个开对称零邻域，并满足 $\exp_G(V_{\mathfrak{g}})\exp_G(V_{\mathfrak{g}}) \subseteq \exp_G(U_{\mathfrak{g}})$，从而局部乘法 $x * y := (\exp_G|_{U_{\mathfrak{g}}})^{-1}(\exp_G(x)\exp_G(y))$ 在 $U_{\mathfrak{g}}$ 中于 $V_{\mathfrak{g}} \times V_{\mathfrak{g}}$ 上有定义。进一步可假设 $V_{\mathfrak{h}} := V_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{h}$ 满足 $V_{\mathfrak{h}} * V_{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{h}$。于是 $\varphi^{-1}(\exp_G(U_{\mathfrak{g}}))$ 是 m_0 的一个开邻域，因此我们还可假设 $\varphi(M) \subseteq \exp_G(U_{\mathfrak{g}})$ 且 M 是连通的。于是 $\varphi_{\mathfrak{g}} := (\exp_G|_{U_{\mathfrak{g}}})^{-1}\circ\varphi\colon M \to \mathfrak{g}$ 是一个 C^k-映射。若能证明 $\varphi_{\mathfrak{g}}(M) \subseteq \mathfrak{h}$，则 $\varphi_{\mathfrak{g}}$ 作为映入 $\mathfrak{h}$ 的映射是 C^k 的，并且有关系

$$\iota_H^{-1}\circ\varphi = \exp_H\circ\varphi_{\mathfrak{g}}$$

这意味着 $\iota_H^{-1}\circ\varphi$ 是 C^k。

由于 M 是连通的，因此它可由光滑弧连通，所以不失一般性，我们可以假设 $M = I = [0,1]$ 满足 $m_0 = 0$。接下来我们证明 $\gamma := \varphi_{\mathfrak{g}}\colon I \to \mathfrak{g}$ 对每个 $t \in I$都满足 $\delta(\gamma)_t \in \mathfrak{h}$。假设对某个 $t_0 \in I$这不成立。将 $\gamma(t)$替换为 $\gamma(t_0)^{-1}\gamma(t)$后，我们可以假设$\gamma(t_0) = 0$，且 $\delta(\gamma)_{t_0} \notin \mathfrak{h}$。

利用 Hahn–Banach 定理，我们找到一个在 $\mathfrak{h}$ 上为零且满足 $\lambda(\gamma'(t_0)) = 1$的连续线性泛函$\lambda \in \mathfrak{g}'$。我们断言

$$(-\gamma(t)) * \gamma(s) \notin \mathfrak{h}$$

对于某个 ε邻域内的 $t \neq s$，其中该邻域属于 t_0。我们考虑光滑映射

$$F\colon I^2 \to \mathbb{R}, \quad F(s,t) := \lambda((-\gamma(t)) * \gamma(s)).$$

那么，对每个 $t \in I$，$F(t,\ t) = 0$，并且

$$\frac{\partial F}{\partial s}(t_0,t_0) = 1 = -\frac{\partial F}{\partial t}(t_0,t_0).$$

因此存在一个 $\varepsilon > 0$，使得

$$\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial t} \geq 1 \quad \text{on} \quad [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]^2.$$

我们得出结论，对于 $|t - t_0|,\ |s - t_0| \leq \varepsilon$,

$$F(s,t) > 0 \quad \text{for} \quad s > t.$$

特别地，可得 $(-\gamma(t)) * \gamma(s) \notin \mathfrak{h}$，因此

$$\gamma(s)\exp_H(V_{\mathfrak{h}}) \cap \gamma(t)\exp_H(V_{\mathfrak{h}}) = \emptyset.$$

这与 H 的可分性矛盾。因此，对每个 $t \in I$，都有 $\delta(\gamma)_t \in \mathfrak{h}$ 。

由于 H 是 C^{k-1}-正则的，存在一条 C^k 曲线 $\eta\colon I \to H$，满足 $\delta(\eta) = \delta(\gamma)$ 且 $\eta(t_0) = \gamma(t_0)$。由引理 5.5.4 可得 $\gamma = \eta$，于是我们得出结论： γ 作为映射 $I \to H$ 是 C^k 的。这就完成了证明。□

引理 9.2.16。设 H 是李群 G 的一个子群， H_a 是 H 中单位元的光滑弧连通分支。若 H_a 是 G 的初始李子群，则 H 也是。

证明。设 $j_a\colon H_a \to G$ 在 H_a 上定义了一个初始李子群结构。对每个 $h \in H \subseteq N_G(H_a)$，共轭映射 $c_h\colon H_a \to H_a$ 定义了一个光滑映射 $c_h \circ j_a\colon H_a \to G$，因此也定义了一个光滑映射 $H_a \to H_a$。于是 H 带有一个李群结构，使得 H_a 是一个开子群（推论 5.3.2）。我们断言，包含映射 $j\colon H \to G$ 是初始的。为此，设 $f\colon M \to G$ 是一个光滑映射，其中 M 是连通流形，且 $f(M) \subseteq H$。对任意 $m_0 \in M$，我们有 $f(m_0)^{-1}f(M) \subseteq H_a$，因此 H_a 的初始性意味着映射 $M \to H_a,\ m \mapsto f(m_0)^{-1} \cdot f$ 是光滑的，而 f 也由此定义了一个光滑映射 $M \to H$。□

定理 9.2.17。有限维李群的任意子群都带有初始李子群结构。

证明。（参见 [HiNe12，定理 9.6.13]）令 $H_a \subseteq H$ 为 H中 e的弧连通分支，并将其视为 G的拓扑子群。根据山边定理（[Go69], [HiNe12，第 9.6节），G 的弧连通分支 H_a 是一个积分子群，即存在李子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathbf{L}(G)$，使得 $H_a = \langle \exp_G \mathfrak{h} \rangle$。特别地， H_a 与 H中单位元的光滑弧连通分支重合。因此，只需证明 H_a 是初始的（引理 9.2.16），而这由定理 9.2.15 得出。□

9.2.4 李群中的无限维环面

设 G 是一个具有光滑指数映射的李群， $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个阿贝尔李子代数。那么指数映射

$$\exp_{\mathfrak{a}} := \exp_G|_{\mathfrak{a}}\colon \mathfrak{a} \to G$$

根据引理 5.6.16，它是一个光滑群同态。正如我们在积分子群定理 9.2.4 中所看到的，理解其核的性质非常重要

$$\Gamma_{\mathfrak{a}} := \ker(\exp_{\mathfrak{a}}) = \exp_{\mathfrak{a}}^{-1}(e).$$

由于 $\exp_{\mathfrak{a}}$ 是连续的，$\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 是局部凸空间 $\mathfrak{a}$ 的闭子群。在积分子群定理 9.2.4 的证明中，我们已经讨论过这类子群。特别是，我们已经看到：

- 如果 G 是局部指数的，那么 0 在 $\exp_G^{-1}(e)$ 中是孤立的，因此 0 在 $\exp_{\mathfrak{a}}^{-1}(e)$ 中也是孤立的，从而 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 是离散的。
- 由于 $\mathbf{L}(\exp_{\mathfrak{a}})\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ 是单射，每条 C^1 曲线 $\gamma\colon [0,1] \to \Gamma_{\mathfrak{a}}$ 的导数都是平凡的，因此 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 中的每条 C^1 曲线都是常数。特别是，$\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 不包含非平凡的向量子空间。如果 $\mathfrak{a}$ 是有限维的，这意味着 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 是离散的（习题 5.6.8）。
- 在定理 D.5.5 的证明中，我们还看到，如果 $\mathfrak{a}$ 是由 Fr´echet–李代数 $\mathcal{V}(M)$ 中的完备向量场组成的阿贝尔子代数，而这些向量场定义在具有有限个连通分支的 σ 紧有限维流形 M 上，那么 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 是离散的。这是因为忠实作用于 M 的环面的维数有上界。

如果 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 是离散的，那么 $A := \mathfrak{z}/\Gamma_{\mathfrak{a}} \cong \exp_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})$ 带有自然李群结构。因此，主要问题是找出使这种情况成立的充分条件。目前我们尚未发现任何 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 非离散的例子。如下定理所示，这类例子会导致 G 中出现较大的“非李”子群。

定理 9.2.18。（子环面定理）设 G 是一个 *Fr´echet*–李群，$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个闭阿贝尔子代数，且子群 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 不是离散的。那么 $\exp_G(\mathfrak{a})$ 的闭包包含一个无限维环面子群 $T \cong \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$。

证明。我们固定 $\mathfrak{a}$ 中一个由绝对凸零邻域 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 构成的基，使其满足

$$U_n + U_n \subseteq U_{n-1} \quad \text{for} \quad n > 1.$$

归纳地，这个假设对 $m > n$ 导致

$$U_n + \cdots + U_m \subseteq U_{n-1}. \tag{9.8}$$

该 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 不是离散的，这等价于存在一个由非零元素组成的序列 $x_n \in \mathfrak{a}$，满足 $x_n \to 0$ 且 $\exp_G x_n = e$。取一个子序列后，我们可以假设 x_n 线性无关，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，$x_n \in U_n$ 都成立。于是，由 (9.8) 可知，对于 $0 \le a_n \le 1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 根据柯西准则收敛，因为 $\mathfrak{a}$ 是完备的。

特别地，我们得到一个定义良好的 fi映射

$$S\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathfrak{a}, \quad \psi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

其关于 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 上的乘积拓扑的连续性也可由 (9.8) 立即得出。注意

$$q\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{T}^{\mathbb{N}}, \quad q((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (e^{2\pi i a_n})_{n\in\mathbb{N}}$$

是连续满射。现在，由于 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 是紧的，q 是商映射。我们有 $q(a) = q(b)$当且仅当 $b_n - a_n \in \mathbb{Z}$，于是

$$\begin{aligned}\exp_{\mathfrak{a}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\Big) &= \lim_{N\to\infty} \exp_{\mathfrak{a}}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\Big)\\ &= \lim_{N\to\infty} \exp_{\mathfrak{a}}\Big(\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\Big) = \exp_{\mathfrak{a}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n\Big).\end{aligned}$$

因此，$\exp_{\mathfrak{a}} \circ S\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to G$ 可通过一个连续映射分解

$$\psi\colon \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \to G, \qquad (e^{2\pi i a_n})_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{N\to\infty} \exp_{\mathfrak{a}}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\Big)$$

不难看出，它是一个群同态。

因此，$T := \psi(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) \cong \mathbb{T}^{\mathbb{N}}/\ker\psi$ 是 $G\widehat{}$的一个紧阿贝尔子群，其特征群 $T\widehat{} = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{T})$同构于

$$\{\chi \in \widehat{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} \cong \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \colon \ker\psi \subseteq \ker\chi\}.$$

由于自由阿贝尔群的子群也是自由阿贝尔群，T 是一个自由阿贝尔群$\widehat{\ }$，因此 $T \cong T\widehat{}$ 是一个环面（[HoM98，定理 7.63]）。它是无限维的这一点，可由它包含所有环面这一事实得出

$$T_n := \exp(\mathbb{R}x_1 + \cdots + \mathbb{R}x_n)$$

其维数等于 n，因为 x_n 线性无关。 □

注 9.2.19。如上，设 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的阿贝尔李子代数，其中 $\mathfrak{g}$ 是 Fr´echet–李群 G 的李代数。假设 $x_n \in \mathfrak{a}$ 是 $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ 中收敛于 0 的非零元素序列，并考虑子空间 $\mathfrak{a}_n$ ：=张成$\{x_1, \ldots, x_n\}$。我们考虑子群 $\Gamma := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}x_n \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}$ 由 x_n 生成。若 Γ 是闭的，则它是一个完备度量空间，因而是贝尔空间。由于 Γ 是子群 $\Gamma_n := \mathbb{Z}x_1 + \ldots + \mathbb{Z}x_n$ 的并集，贝尔定理意味着某个 Γ_n 包含 Γ 的一个开子集。但子空间 $\mathfrak{a}_n$ 是有限维的，因此 $\Gamma_{\mathfrak{a}_n}$ 是离散的。这意味着 Γ 是离散的，与 $x_n \to 0$ 矛盾。因此，Γ 不是闭的。

例 9.2.20。设 $\mathcal{H}$ 是一个带有标准正交基 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的无限维复希尔伯特空间。那么，其酉群 $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ 关于范数拓扑是一个李群。该群包含一个无限维环面

$$T := \{U \in \mathrm{U}(\mathcal{H})\colon (\forall n \in \mathbb{N})\ Ue_n \in \mathbb{T}e_n\}.$$

作为一个抽象群，T 与 $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$同构，但 T 继承自算子范数的拓扑比范数拓扑精细得多。它对应于度量

$$d(U,V) = \sup\{|u_n - v_n|\colon n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{where} \quad U_n e_n = u_n e_n, V_n e_n = v_n e_n.$$

元素 $X_n \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}) = \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\colon$ 由 $X_n e_m = 2\pi i \delta_{nm} e_m$ 给出的 $X^* = -X\}$ 满足 $\exp X_n = e$ 属于 $\mathrm{U}(\mathcal{H})$，但 $\|X_n\| = 2\pi$，因此 X_n 不收敛于 0。然而，$X_n \to 0$ 在强算子拓扑中收敛，也就是说，在 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$上的逐点收敛拓扑中收敛。由于序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 一致有界，因此 $X_n \to 0$ 在 $\mathcal{H}$的紧子集上一致收敛拓扑中也成立。这意味着相应的$\widehat{}$线性向量场 X_n 在 $\mathcal{V}(\mathcal{H})_c$（$\mathcal{H}$ 上赋予紧开拓扑的光滑向量场李代数）中收敛到 0。

注 9.2.21。闭阿贝尔李子代数的一个重要特殊情形是中心 $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。在命题 9.1.13 中，我们已经看到，子群 $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ 的离散性 Z意味着$G(\ G)$是 Z的初始李子群。然而，$G(\ G\ )$上的李群拓扑仍可能严格强于从 $\mathfrak{g}$ 继承的子空间拓扑（例 9.1.14）。如果′是弗雷歇空间且 $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ 非离散，那么定理 9.2.18 意味着 $Z(G)$中存在一个无限维环面。

9.3 局部指数子群

在本小节中，我们引入局部指数李群的局部指数李子群这一重要概念。对于闭子群，它以自然的方式推广了有限维李群中的情形。特别是，我们将在下文看到，局部指数李群的每个局部紧子群都是有限维李群。另一重要之处在于，局部指数李子群在光滑同态下的逆像也具有这一性质；特别地，这意味着所有核都是局部指数李子群。在下一节中，我们将反过来考察这一观点，即刻画那些正规李子群 N，使得商群 G/N 是局部指数李群。

9.3.1 局部指数子群及其李代数

定义 9.3.1。设 G 是一个局部指数李群。若子群 $H \subseteq G$ 在从 G 继承的拓扑下是一个局部指数李群，则称其为局部指数（李）子群（参见推论 7.2.5）。

为定义局部指数李子群的李代数，我们先回顾，每个连续同态 $\mathbb{R} \to G$ 都是光滑的，因此

$$\gamma \mapsto \gamma'(0), \quad \operatorname{Hom}(\mathbb{R}, G) \to \mathbf{L}(G)$$

由此得到同态集 $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}, G)$ 与 G 的李代数之间的一个识别（参见定理 7.2.4）。由于包含映射 $H \hookrightarrow G$ 是拓扑嵌入，同上还可推出 $\iota\colon H \to G$ 是李群态射，因此我们有一个拓扑李代数态射

$$\mathbf{L}(\iota)\colon \mathbf{L}(H) \to \mathbf{L}(G).$$

同样将 $\mathbf{L}(H)$ 识别为同态集 $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}, H)$，我们看到，$\iota$的单射性意味着 $\mathbf{L}(\iota)$ 是单射的，因此

$$\operatorname{im}(\mathbf{L}(\iota)) = \{x \in \mathbf{L}(G)\colon \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\} =: \mathbf{L}^e(H)$$

可以识别为 H 的李代数。$\mathbf{L}^e(H)$ 在此意义下称为子群的李代数 H。

引理 9.3.2。对于拓扑群 G，下列命题等价：

(i) G 是局部指数李群。(ii)单位连通分支 G_0 是局部指数李群。

证明。显然，(i) 蕴含 (ii)。反过来，若满足 (ii)，则每个共轭作用 c_g、$g \in G$ 都定义了 G_0 的一个拓扑自同构，因而是李自同构。现在由推论 5.3.2 可得所述结论。□

前述引理将判断一个子群是否局部指数的问题归结为连通子群的情形。为了更好地了解单位元附近子群的结构，我们先记录关于局部指数李群的任意闭子群的以下观察：

命题 9.3.3。设 G 是一个局部指数李群，$H \subseteq G$ 是一个闭子群。

(a)子集

$$\mathbf{L}^e(H) := \{x \in \mathbf{L}(G)\colon \exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H\}$$

是 $\mathbf{L}(G)$ 的闭李子代数，满足

$$\operatorname{Ad}(h)\,\mathbf{L}^e(H) = \mathbf{L}^e(H) \quad \textit{for all} \quad h \in H.$$

特别地，$\mathbf{L}^e(H)$ 是$\mathbf{L}(G)$的稳定子代数。

(b)此外，如果 H 是正规子群，那么

$$\mathrm{Ad}(g)\,\mathbf{L}^e(H) = \mathbf{L}^e(H) \quad \textit{for all} \quad g \in G.$$

特别地，$\mathbf{L}^e(H) \trianglelefteq \mathbf{L}(G)$ 是一个稳定理想。(c) $\mathbf{L}^e(H) = \mathbf{L}^d(H)$。

证明。 (a) 由于 H 是闭的，$\mathbf{L}^e(H)$是$\mathbf{L}(G)$的闭李子代数这一事实是乘积与交换子公式（命题 7.2.2）的直接推论。由于$\mathbf{L}(c_g) =$ 伴随表示(g)， H 在自同构 c_h、 $h \in H$下的不变性蕴含$\mathbf{L}^e(H)$在伴随表示(H)下是不变的。

(b) 由 H 在所有内自同构 c_g、 $g \in G$下的不变性以及$\mathbf{L}(c_g) =$ 伴随表示(g)得出。

(c) 显然，$\mathbf{L}^e(H) \subseteq \mathbf{L}^d(H)$。反之，考虑一条 C^1-曲线$\gamma\colon [0,1] \to G$，满足 $\gamma([0,1]) \subseteq H$、 $\gamma(0) = e$且 $\gamma'(0) = x$。则

$$\alpha(t) := \lim_{n\to\infty} \gamma\Big(\frac{t}{n}\Big)^n$$

存在且等于 $\exp_G(tx)$（习题 7.2.2）。事实上，令 $U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个星形开零邻域，使得 $\exp_G|_{U_{\mathfrak{g}}}$ 是到开e邻域 $U_G := \exp_G(U_{\mathfrak{g}})$ 中的微分同胚，其中 G。假设 $\gamma([0,\varepsilon]) \subseteq U_G$，于是存在一条光滑曲线 $\eta\colon [0,\varepsilon] \to U_{\mathfrak{g}}$，满足 $\exp_G \circ \eta = \gamma$。于是，对 $t \le n\varepsilon$，我们有：

$$\gamma\Big(\frac{t}{n}\Big)^n = \exp_G\Big(\eta\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big)^n = \exp_G\Big(n\eta\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big) \to \exp_G(t\eta'(0)) = \exp_G(tx).$$

现在， H 的闭性意味着 $\exp_G(\mathbb{R}x) \subseteq H$，因此 $x \in \mathbf{L}^e(H)$。 □

由上文的 (c)，还可得：

推论 9.3.4。 在局部指数李群 G的闭子群 H 中， H 内所有 C^1-弧都是常数，当且仅当 $\mathbf{L}^e(H) = \{0\}$。

例 9.3.5。 在希尔伯特空间 $E = L^2([0,1],\mathbb{R})$ 中，我们考虑由所有 $\mathbb{Z}$值函数组成的闭子群 $H := L^2([0,1],\mathbb{Z})$（相差零测集的函数视为相同）。于是，由 $\mathbb{R}f \subseteq H$ 蕴含$f = 0$这一事实可知， $= \{0\}$ 成立，即 $\mathbf{L}^e(H) = \{0\}$ 。现在，由推论 9.3.4 可知， H 中的所有 C^1-曲线都是常数。

命题 9.3.6. 设 $\varphi\colon G \to H$ 是从局部指数李群 G 到具有光滑指数映射的李群 H 的态射。那么

$$\mathbf{L}^e(\ker\varphi) = \ker \mathbf{L}(\varphi). \tag{9.9}$$

证明. 对于 $x \in \mathbf{L}(G)$，关系 $x \in \mathbf{L}^e(\ker\varphi)$ 等价于 $\exp_G(\mathbb{R}x) \subset \ker\varphi$，即，

$$\varphi(\exp_G(tx)) = \exp_H(t\,\mathbf{L}(\varphi)x) = e \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R}.$$

这等价于 $\mathbf{L}(\varphi)x = 0$。 □

引理 9.3.7。对于局部指数李群 G 的任意局部指数李子群 H，典范映射 $\mathbf{L}(H) \hookrightarrow \mathbf{L}(G)$ 是一个拓扑嵌入，其像为 $\mathbf{L}^e(H)$。

证明。令 $i_H\colon H \to G$ 表示 G 中 H 的拓扑嵌入。那么关系 $i_H \circ \exp_H = \exp_G \circ \mathbf{L}(\iota_H)$ 蕴含存在一个开零邻域 $U \subseteq \mathbf{L}(H)$，使得 $\mathbf{L}(\iota_H)|_U$ 是到 $\mathbf{L}(G)$ 中的拓扑嵌入；但这蕴含 $\mathbf{L}(\iota_H)$ 是拓扑嵌入，因为它是线性的。□

命题 9.3.8。如果 $G = (E, +)$ 是一个局部凸空间的加法群，那么 G 是一个指数李群，且 $\exp_E = \mathrm{id}_E$。H 的子群是局部指数的，当且仅当包含在 H 中的最大线性子空间是 H 的开子群。

证明。如果 $H \leq G$ 是一个局部指数李子群，那么前述引理蕴含 $\mathbf{L}^e(H) = \{x \in E\colon \mathbb{R}x \subseteq H\}$，即包含在 H 中的最大线性子空间同构于 $\mathbf{L}(H)$。因此 $\mathbf{L}^e(H)$ 是 H 的单位连通分支，因而是一个开子群。

反过来，如果 $\mathbf{L}^e(H)$ 是 H 的开子群，那么子空间拓扑使 H 成为一个拓扑群，其单位连通分支为 $(\mathbf{L}^e(H), +)$，这意味着 H 是局部指数的。□

由于线性子空间不一定是闭的，前述命题特别表明，存在许多非闭的局部指数李子群。下面的引理给出了一个判据，用于判断子群 H（不一定是闭的）是否为局部指数的。下文将针对闭子群进一步细化该判据。

引理 9.3.9。对于局部指数李群 G 的子群 H，以下条件等价：

(i) H 是局部指数李子群。(ii) $\mathbf{L}^e(H)$ 是 $\mathbf{L}(G)$ 的局部指数子代数，并且存在一个开0-邻域 $U \subseteq$，使得 $\exp_G|_U$ 是到 G 的开子集上的微分同胚，并且

$$\exp_G(U) \cap H = \exp_G(U \cap \mathbf{L}^e(H)).$$

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)：取一个开凸零邻域 $V \subseteq \mathbf{L}(G)$，使得 $\exp_G|_V$ 是一个微分同胚，映到 G 的一个开子集上。由于包含映射 $H \hookrightarrow G$ 是一个拓扑嵌入，存在一个零邻域 $U_{\mathfrak{h}} \subseteq \mathbf{L}(H)$，使得 $\exp_H|_{U_{\mathfrak{h}}}$ 是一个微分同胚，映到 H 的一个开子集上，并且 $U_{\mathfrak{h}} \subseteq V$；若将 $\mathbf{L}(H)$ 与 $\mathbf{L}(G)$ 的李子代数 $\mathbf{L}^e(H)$ 等同（参见引理 9.3.7）。由于 H 是 G 的一个拓扑子群，存在一个开子集 $U_{\mathfrak{g}} \subseteq V$，满足

$$\exp_G(U_{\mathfrak{g}}) \cap H = \exp_H(U_{\mathfrak{h}}) = \exp_G(U_{\mathfrak{h}}),$$

由此得到 $U_{\mathfrak{h}} = U_{\mathfrak{g}} \cap \mathbf{L}^e(H)$，(ii) 得证。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：根据积分子群定理 9.2.4，局部指数李代数的包含映射 α: $\mathbf{L}^e(H) \to \mathbf{L}(G)$ 可积分为局部指数李群的态射 β: $H^L \to G$，且 $\mathbf{L}(H^L) = \mathbf{L}^e(H)$。于是$\beta(H^L) = \langle \exp_G \mathbf{L}^e(H) \rangle$，因此 (ii) 蕴含 $\beta(H^L)$ 与 H的单位连通分支 H_0 重合。由于 $\mathbf{L}(\beta) = \alpha$ 是拓扑嵌入，且H^L 和 G 是局部指数的，条件 (ii) 进一步蕴含 β 是嵌入，因而是到 H_0上的拓扑同构。因此 H_0 是局部指数的，而引理 9.3.2 表明 H 是局部指数的。□

下面的命题给出了一个有用的判据，用于判断局部指数李群的子群是否为局部指数李群。

命题 9.3.10。设 G 是一个局部指数李群，$H \subseteq G$ 是一个闭子群，且存在一个开 0-邻域 $V \subset \mathbf{L}(G)$，使得 $\exp_G|_V$ 是到 G 的一个开子集上的微分同胚，并且

$$\exp_G(V \cap \mathbf{L}^e(H)) = (\exp_G V) \cap H. \tag{9.10}$$

那么 H 是一个局部指数李子群，也是 G 的子流形。

证明。首先回顾命题 9.3.3：$\mathfrak{h} := \mathbf{L}^e(H)$ 是 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 的一个闭李子代数。设 $V \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个开对称 0-邻域，使得 $\exp_G|_V$: $V \to \exp_G(V)$ 是到 G 的一个开子集上的微分同胚，并且式 (9.10) 成立。利用 G 的坐标图 $((\exp_G|_V)^{-1}, \exp_G(V))$，可知 H 是 G 的一个李子群（定义 9.1.17 意义下），因而特别是一个子流形，并且在继承的流形结构下是一个李群。

接下来我们证明，配备上述李群结构的 H 上的 $\exp_H := \exp_G|_{\mathfrak{h}}$: $\mathfrak{h} \to H$ 是一个光滑指数映射。事实上，对于每个 $x \in \mathfrak{h}$，曲线 γ_x: $\mathbb{R} \to H, t \mapsto \exp_H(tx)$ 是群同态，在某个零邻域内光滑，因而处处光滑，并且满足 $\gamma_x'(0) = x$。因此，$\exp_H$ 是 H 的指数映射。其光滑性由它在某个零邻域内的光滑性以及引理 5.6.2 得出。由于 $\exp_H$ 在 $\mathfrak{h}$ 的某个零邻域内与 $(\exp_G|_V)|_{\mathfrak{h}}$ 重合，而后者定义了 H 的坐标图，因此群 H 是局部指数的，进而 $\mathfrak{h} = \mathbf{L}^e(H)$ 也是局部指数的。

□

命题 9.3.11。（局部指数子群的逆像）如果φ: $G_1 \to G_2$ 是局部指数李群之间的态射，且 $H \subseteq G_2$ 是闭局部指数子群，那么 $H_1 := \varphi^{-1}(H)$ 是一个局部指数子群，其李代数为

$$\mathbf{L}^e(H_1) = \mathbf{L}(\varphi)^{-1}\big(\mathbf{L}^e(H)\big).$$

特别地，$\ker \varphi$ 是 G_1 的局部指数子群，其李代数为$\ker \mathbf{L}(\varphi)$。

证明。 我们选取一个对称开零邻域 $V \subseteq \mathbf{L}(G_2)$，使得$\exp_{G_2}|_V$ 是到 G_2的一个开子集上的微分同胚，并且

$$\exp_{G_2}(V \cap \mathbf{L}^e(H)) = \exp_{G_2}(V) \cap H$$

（引理 9.3.9）。接着，我们选择一个开对称零邻域 $V_1 \subseteq \mathbf{L}(\varphi)^{-1}(V)$，使得 $\exp_{G_1}|_{V_1}$ 在其上是到开子集 $\exp_{G_1}(V_1)$ 的微分同胚。

设 $x \in V_1$ 满足 $\exp_{G_1} x \in H_1$。那么

$$\varphi(\exp_{G_1} x) = \exp_{G_2}(\mathbf{L}(\varphi)x) \in \exp_{G_2}(V) \cap H$$

且 $\mathbf{L}(\varphi)x \in V$。因此 $\mathbf{L}(\varphi)x \in \mathbf{L}^e(H)$，从而

$$x \in \mathbf{L}^e(H_1) = \mathbf{L}(\varphi)^{-1}(\mathbf{L}^e(H)).$$

鉴于后一个等式，命题 8.3.3 推出 $\mathbf{L}^e(H_1)$ 是局部指数的。前面的论证表明，$\exp_{G_1}(V_1) \cap H_1 \subseteq \exp_{G_1}(V_1 \cap \mathbf{L}^e(H_1))$，因此两者相等，因为反向包含是平凡的。现在，引理 9.3.9 推出 H_1 是局部指数的。

由于 $\{e\}$ 是 G_2 的局部指数子群，$\ker\varphi$ 是 G_1 的局部指数子群。□

推论 9.3.12. 若 $N \trianglelefteq G$ 是一个闭正规子群，且商群 G/N 带有局部指数李群结构，使得商映射 $q\colon G \to G/N$ 是李群态射，那么 N 是一个闭局部指数子群，且$\mathbf{L}^e(N) = \ker(\mathbf{L}(q))$。

命题 9.3.13.若 G 是一个连通局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，则以下断言成立：

(i) $Z(G)$ 是 G 的一个局部指数子群，其李代数为 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$；且(ii) $G/Z(G)$ 是一个局部指数李群。

证明。 由推论 8.3.15 可知，伴随表示定义了一个局部指数李群态射 $\mathrm{Ad}\colon G \to G_{\mathrm{ad}}$。因此$Z(G) = \ker \mathrm{Ad}$ 是一个闭局部指数子群，其李代数为$\mathbf{L}^e(\ker\varphi) = \ker\mathbf{L}(\varphi) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$（命题 9.3.11）。

由于 $\mathbf{L}(\mathrm{Ad})\colon \mathfrak{g} \to \mathbf{L}(G_{\mathrm{ad}}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是商映射，因此 Ad 是开映射。于是它可分解为一个拓扑同构 $\mathrm{Ad}: G/Z(G) \to G_{\mathrm{ad}}$。这意味着拓扑群 $G/Z(G)$ 具有局部指数李群结构。□

9.3.2 局部紧子群

定理 9.3.14。局部指数群的每个局部紧子群都是有限维李子群。

证明。设 G 是一个局部指数李群，$H \leq G$ 是一个局部紧子群。我们固定一个开凸对称零邻域 $U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$，使得 $\operatorname{Exp}_G|_{U_{\mathfrak{g}}}$ 是到 G 的一个开子集上的微分同胚。

由于 H 是局部紧的且 G 是豪斯多夫的，H 是局部闭的，因而是闭的（习题 C.2.8），并且 $\mathfrak{h} := \mathbf{L}^e(H)$ 是 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 的闭李代数。首先我们证明 $\mathfrak{h}$ 是有限维的。集合$U_H := (\exp_G|_{U_{\mathfrak{g}}})^{-1}(H)$ 是 $U_{\mathfrak{g}}$的局部紧子集，因此 $\mathfrak{h} \cap U_H$是 $\mathfrak{h}$的局部紧子集。另一方面，$\exp_G(\mathfrak{h}) \subseteq H$ 意味着 U_H 是 $\mathfrak{h}$ 中的一个零邻域，因此 $\mathfrak{h}$ 是一个局部紧拓扑向量空间，从而根据命题 B.6.9，它是有限维的。由于每个有限维李代数都是局部指数的（推论 8.2.3），我们可以适当缩小 $U_{\mathfrak{g}}$，使得 $U_{\mathfrak{h}} := U_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{h}$ 满足 $U_{\mathfrak{h}} * U_{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{h}$（定理 8.2.12）。

由于 $\mathfrak{h}$ 是有限维的，Hahn–Banach 定理意味着线性映射 $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ 可延拓为连续线性投影 $p_{\mathfrak{h}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，因此 $E := \ker p_{\mathfrak{h}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个闭子空间，使得映射

$$\mathfrak{g} \to E \times \mathfrak{h}, \quad x \mapsto (x - p_{\mathfrak{h}}(x), p_{\mathfrak{h}}(x))$$

是一个拓扑同构。

取 $V \subseteq U_{\mathfrak{g}}$ 为一个开零邻域，使得 $\exp_G(V)\exp_G(V) \subseteq \exp_G(U_{\mathfrak{g}})$，并令 $V_{\mathfrak{h}} := V \cap \mathfrak{h}$。那么

$$F\colon V \times V_{\mathfrak{h}} \to \mathfrak{h}, \quad (x, y) \mapsto p_{\mathfrak{h}}(x * y),$$

是一个光滑映射。令 $F_x(y) := F(x, y)$。那么 $T_0(F_0) = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$，因此 [Gl04a, Th. 2.3(i)(c)], 中的隐函数定理意味着存在开零邻域 $W \subseteq V$和 $W_{\mathfrak{h}} \subseteq V_{\mathfrak{h}}$，使得

$$U := \bigcup_{x \in W} \{x\} \times F_x(W_{\mathfrak{h}})$$

是 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$的一个开子集，映射

$$W \times W_{\mathfrak{h}} \to U, \quad (x, y) \mapsto (x, F_x(y))$$

是一个微分同胚，并且映射 $U \to W_{\mathfrak{h}}, (x, y) \mapsto F_x^{-1}(y)$ 是光滑的。特别地，映射

$$g\colon U' := U \cap (\mathfrak{g} \times \{0\}) \to W_{\mathfrak{h}}, \quad x \mapsto F_x^{-1}(0)$$

是光滑的，并满足 $x * g(x) \in E = \ker p_{\mathfrak{h}}$. 注意，$U' \subseteq W \subseteq V$。因此，每个 $x \in U'$ 都有一个分解

$$x = (x * g(x)) * (-g(x)) \quad \text{with} \quad x * g(x) \in E, g(x) \in \mathfrak{h}.$$

对于 $x \in U' \cap E$，我们有 $F_x(0) = 0$，因此 $g(x) = 0$；对于 $x \in U' \cap U_{\mathfrak{h}}$，关系 $F_x(-x) = 0$ 可推出 $g(x) = -x$。

我们要证明 $U'_{\mathfrak{h}} := U' \cap \mathfrak{h}$ 在 $U'_H := U' \cap U_H \subseteq V$ 中是开的。若 $x \in U'_H$，则 $g(x) \in W_{\mathfrak{h}} \subseteq V_{\mathfrak{h}}$ 意味着

$$\exp_G(x * g(x)) = \exp_G(x)\exp_G(g(x)) \in H,$$

从而 $x * g(x) \in U_H \cap E$。如果 $U'_{\mathfrak{h}}$ 在 U'_H 中不是开集，并且 $x_i \in U'_H \setminus U'_{\mathfrak{h}}$ 收敛到某个 $x \in U'_{\mathfrak{h}}$，那么 $x_i * g(x_i) \to x * g(x) = x * -x = 0$，其中 $x_i * g(x_i) \neq 0$。因此，只需证明 0 在 $U_H \cap E$ 中是孤立的。

由于 U_H 是局部紧的，存在 $\mathfrak{g}$ 上的连续半范数 p，使得 $p^{-1}([0,2]) \subseteq U_{\mathfrak{g}}$，且 $\Gamma_H := p^{-1}([0,2]) \cap U_H$ 是紧的。我们断言，$0 \neq x \in U_H \cap E$ 蕴含 $p(x) > 0$。事实上，如果 $p(x) = 0$，那么 $\mathbb{R}x \subseteq p^{-1}([0,2]) \subseteq U$，而 U_H 的局部群性质意味着 $\mathbb{Z}x \subseteq p^{-1}(0) \cap U_H$，这与 $p^{-1}(0) \cap U_H$ 的紧致性相矛盾。现在

$$U_H^1 := \{x \in U_H \cap E \colon p(x) = 1\}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的紧子集。反证法假设 0 在 $U_H \cap E$ 中不是孤立点，因此存在一个收敛到 0 的网 $x_i \in U_H \cap E \setminus \{0\}$。由前面的论证可得 $p(x_i) \to 0$ 以及 $p(x_i) > 0$。对于 $r \in \mathbb{R}$，令

$$\lfloor r \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} \colon m \leq r\}.$$

我们令 $n_i := \lfloor \frac{1}{p(x_i)} \rfloor$。于是 $p(n_i x_i) = n_i p(x_i) \leq 1$ 且 $n_i x_i = x_i * \ldots * x_i \in U_H$。此外，$x_i \to 0$ 和 $p\left(\frac{1}{p(x_i)}\right) - n_i \leq 1$ 推出

$$n_i x_i - \frac{x_i}{p(x_i)} = \Big(n_i - \frac{1}{p(x_i)}\Big)x_i \to 0.$$

特别地，$n_i p(x_i) = p(n_i x_i) \to 1$。

闭子集

$$\Gamma'_H := \big\{x \in U_H \colon \tfrac{1}{2} \leq p(x) \leq 1\big\} \subseteq \Gamma_H$$

Γ_H 的闭子集也是紧的，并且不失一般性，可假设对每个 i 都有 $n_i x_i \in \Gamma'_H$。令 $y \in \Gamma'_H$ 为网 $(n_i x_i)$ 的一个聚点。取一个子网后，可假设 $n_i x_i \to y$。

固定 $m \in \mathbb{N}$。我们记 $n_i = q_i m + r_i$，其中 $0 \leq r_i \leq m-1$ 且 $r_i,\ q_i \in \mathbb{Z}$。于是

$$q_i x_i - \frac{y}{m} = \frac{1}{m}(m q_i x_i - y) = \frac{1}{m}(\underbrace{n_i x_i - y}_{\to 0} - \underbrace{r_i x_i}_{\to 0}) \to 0.$$

由 $q_i \leq n_i$ 和 $x_i,\ 2x_i$、……、$n_i x_i \in U_H$，我们推出 $q_i x_i \in U_H$，这导致 $\frac{1}{m} y \in U_H$，因为 H 的闭性意味着 U_H 在 $U_{\mathfrak{g}}$ 中是闭的。由于 m 是任意的，U_H 的局部群性质意味着

$$(\mathbb{Q} \cap [0,1])y \subseteq U_H,$$

并且 U_H 在 $U_{\mathfrak{g}}$ 中的闭性蕴含 $[0,1]y \subseteq U_H$。这进而导致 $\exp_G([0,1]y) \subseteq H$，从而得到 $y \in \mathbf{L}(H) = \mathfrak{h}$，与 $y \in E \setminus \{0\}$ 矛盾。□

推论 9.3.15. 有限维李群的每个闭子群 H 都是李子群。

推论 9.3.16. (有限维李群的典范分解)若 $\varphi\colon G \to H$ 是李群态射，且 G 是有限维的，那么$N := \text{核}\varphi$ 是 G 的李子群， G/N 是李群，并且 φ 诱导出李群态射 $\varphi\colon G/N \to H$。

证明。 由前一个推论可知， N 是 G 的李子群，而命题 9.1.25 表明 N 是分裂的，因此 G/N 带有自然李群结构，使得商映射 $q\colon G \to G/N$ 在 G 上定义了一个 N-主丛结构。由此特别可知，光滑映射 φ 在 N 陪集上为常数，因而可分解为一个光滑映射 $\varphi\colon G/N \to H$。□

推论 9.3.17. 若 $\varphi\colon G \to H$ 是李群态射，且 G 是有限维的，并且 $\mathbf{L}(\varphi)$ 是单射，那么 核φ 是离散的。

证明。 由于 $N := \ker\varphi$ 是有限维李群 G的闭子群，因此它是李子群。由 $\mathbf{L}(N) = \ker \mathbf{L}(\varphi) = \{0\}$ 可得， N 是离散的。□

例 9.3.18。定理 9.3.14 推广了这样一个结果：有限维李群的闭子群是李子群（参见 [vN29] 关于一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的闭子群的结果），而巴拿赫–李群的局部紧子群是有限维李群（参见 [HoM98, 定理 5.41(vi)]）。

K. H. Hofmann 给出的以下例子展示了闭子群可能有多么糟糕：我们将实希尔伯特空间 $G := L^2([0,1],\mathbb{R})$ 视为巴拿赫–李群。由所有几乎处处取值于 $\mathbb{Z}$ 的函数组成的子群 $H := L^2([0,1],\mathbb{Z})$ 是一个闭子群。由于 G 的单参数子群具有形式 $t \mapsto tf$, $f \in G$，因此有 $\mathbf{L}^e(H) = \{0\}$ （参见例 9.3.5）。另一方面，群 H 是弧连通的，甚至是可缩的，因为映射 $F\colon [0,1]\times H \to H$ 定义为

$$F(t,f)(x) := \begin{cases} f(x) \text{ for } 0 \le x \le t \\ 0 \quad \text{for } t < x \le 1 \end{cases}$$

在 $F(1,f) = f$ 和 $F(0,f) = 0$ 处连续。

假设该子群由 C^1 弧连通，即可避免这种病态情形（参见下文的定理 9.3.25）。根据推论 9.3.4， H 中所有的 C^1 弧都是常数，因为 $\mathbf{L}^e(H) = \{0\}$。

例 9.3.19。（ $\mathbb{T}$ 的闭子群）设

$$H \subseteq \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^\times : |z| = 1\}$$

是一个闭真子群，且 $q = \exp_{\mathbb{T}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$， $t \mapsto e^{2\pi i t}$ 是 $\mathbb{T}$ 的指数函数。那么 $q^{-1}(H)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭真子群，因此是循环群

（参见习题 5.6.4）。由于它包含 1，其生成元是一个有理数。由此我们得出，$H = q(q^{-1}(H))$ 是以下群之一

$$C_n := \{z \in \mathbb{T} \colon z^n = 1\}$$

单位根的 n次根。

下面这个例子的讨论尤其描述了一种典型情形：李群态射（此处为单参数群）的像不是子流形。

例 9.3.20。（$\mathbb{T}^2$的子群）(a) 设 $H \subseteq \mathbb{T}^2$ 是一个闭真子群。那么$\mathbf{L}(H) \neq \mathbf{L}(\mathbb{T}^2)$意味着 $\dim H < \dim \mathbb{T}^2 = 2$。此外，$H$ 是紧的，因此群 $\pi_0(H)$（即 H 的连通分支群）是有限的。

若 $\dim H = 0$，则 H 是有限的；对于 $n := |H|$，它包含于形如 $C_n \times C_n$ 的子群中，其中 $C_n \subseteq \mathbb{T}$ 是 n次单位根构成的子群（参见例 9.3.19）。

若 $\dim H = 1$，则 H_0 是紧致连通一维李群，因此同构于 $\mathbb{T}$（习题 5.6.5）。因此，对某个$x \in \mathbf{L}(H)$，有 $H_0 =\exp_{\mathbb{T}^2}(\mathbb{R}x)$，且 $\exp_{\mathbb{T}^2}(x) = (\{\mathrm{v14}, e^{2\pi i x_2}) = (1,1)$，这等价于$x \in \mathbb{Z}^2$。由此可知，闭一维子群的李代数具有$\mathbf{L}(H) = \mathbb{R}x$ 的形式，其中 $x \in \mathbb{Z}^2$。

（b）对于每个 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，1 参数群的像

$$\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2, \quad t \mapsto (e^{i\theta t}, e^{it})$$

不是闭的，因为 γ 是单射。因此，$\gamma(\mathbb{R})$ 的闭包是维数至少为 2 的闭子群，这表明 $\gamma(\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{T}^2$ 中稠密。

9.3.3 换位子群

引理 9.3.21。对于李代数为 $\mathfrak{g}$ 的连通局部指数李群 G，换位子群 $[G,G]$ 满足

$$[G,G] \subseteq \langle \exp \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} \rangle \subseteq \overline{[G,G]}$$

因此 $\overline{[G,G]} = \langle \mathrm{Exp}\ \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} \rangle$。

证明。由交换子公式可得

$$\exp_G([x,y]) \in \overline{[G,G]} \quad \text{for} \quad x,y \in \mathfrak{g}.$$

因此 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathbf{L}(\overline{[G,G]})$（命题 9.3.3）导出 $\exp [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \overline{[G,G]}$.

对于反向包含映射，我们考虑单连通覆盖群 $\widetilde{\ }\colon\ G \to \underline{G}$。令 $\mathrm{Ab}(\mathfrak{g})$ 表示商空间 $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$。于是存在一个连续同态 $\varphi\colon\ G \to \mathrm{Ab}(\mathfrak{g})$，其微分$\mathbf{L}(\varphi)\colon\ \mathfrak{g} \to \mathrm{Ab}(\mathfrak{g})$ 是商映射（定理 7.2.9）。由于 $\ker \varphi$ 是局部指数李子群（命题 9.3.11），

$$[\widetilde{G},\widetilde{G}] \subseteq (\ker\varphi)_0 = \langle \exp\ker \mathbf{L}(\varphi)\rangle = \langle \exp_{\widetilde{G}} \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\rangle.$$

因此

$$[G,G] = q_G([\widetilde{G},\widetilde{G}]) \subseteq q_G(\langle \exp_{\widetilde{G}} \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\rangle) = \langle \exp_G \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}\rangle.$$

证明完毕。 □

注 9.3.22。如果 G 是某个 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的连通子群，那么其交换子群 $[G,G]$ 是闭的，因为它是一个幺正正规子群与一个半单群的半直积（[HiNe12，推论 14.5.7]），因此特别是一个李子群（定理 9.3.14）。一般而言，有限维李群的交换子群并不闭（习题 9.5.5）。

9.3.4 闭子群的始性

我们已经看到，有限维李群的所有子群都是始性的（定理 9.2.17）。我们不知道对于巴拿赫–李群，甚至对于局部指数李群，这是否仍然成立，但本小节中的结果至少涵盖了巴拿赫–李群的所有闭子群。下面的定理是定理 9.2.15 的一个变体，其中我们假设李代数 $\mathfrak{h}$ 是闭的，但不假设它是可分的。

定理 9.3.23。设 G 是局部指数李群，$H \subseteq G$ 是一个闭子群，且 $\mathfrak{h} := \mathbf{L}^e(H)$ 可积为一个正则局部指数李群。则子群 H 是初始李子群。

证明。设 $j\colon H_1 \hookrightarrow G$ 是李代数为 $\mathfrak{h}$ 的一个积分子群（定理 9.2.4）。我们的假设意味着 H_1 是正则的。于是 $j(H_1) = \langle \mathrm{Exp}_G \mathfrak{h}\rangle \subseteq H$。

设 $\varphi\colon M \to G$ 是一个取值于 H 的光滑映射。我们需要证明 φ 定义了一个光滑映射 $M \to H$。由于这一断言是局部的，不妨假设 M 是单连通的，且存在一个 $m_0 \in M$ 满足 $\varphi(m_0) = e$。对于每个 $v \in T(M)$，都有 $\delta(\gamma)v \in \mathbf{L}^d(H) = \mathfrak{h}$（命题 9.3.3）。由于 $\mathfrak{h}$ 是闭的，$\delta(\gamma) \in \Omega^1(M,\mathfrak{h})$。于是，$H_1$ 的正则性保证存在一个光滑映射 $\eta\colon M \to H_1$，满足 $\delta(\eta) = \delta(\gamma)$，并且 $j(\eta(m_0)) = \varphi(m_0) = e$。接着由唯一性引理 5.5.4 可得 $j \circ \eta = \varphi$。我们由此得出，φ 定义了一个光滑映射 $M \to H$。这证明了 H 是初始的。□

例 9.3.24。满足前述定理假设的典型例子有：

(a) $G = (E,+)$ 是一个麦基完备局部凸空间，而 H 是任意闭子群。

(b) G 是巴拿赫–李群，且 H 是任意闭子群。这里，$\mathbf{L}^e(H)$是闭子群的巴拿赫–李代数，因此可扩张（推论 9.2.6），并且每个巴拿赫–李群都是正则的（定理 6.3.4）。

对于巴拿赫–李群的闭子群，我们甚至有如下加细结果。

定理 9.3.25。设 G 是一个巴拿赫–李群，且 $H \subseteq G$ 是一个闭子群。则 H 带有初始李子群的结构，其 C^1 弧连通分支是闭李子代数 $\mathbf{L}^e(H) \subseteq \mathbf{L}(G)$ 的积分子群。

证明。我们已经在例 9.3.24(b) 中看到，H 带有初始李子群的结构，其单位连通分支是积分子群 i：对应于闭李子代数 $\mathfrak{h} := \mathbf{L}^e(H)$ 的 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$。

若 $\gamma\colon I \to G$ 是一条 C^1-路径，且 $\gamma(0) = e$，则 $\gamma(I) \subseteq H$ 蕴含 $\gamma'(0) \in \mathrm{L}^e(H) = \mathfrak{h}$（命题 9.3.3）。这表明，对于任意 C^1-曲线$\gamma\colon I \to H \subseteq G$，对每个 $t \in I$ 都有 $\delta(\gamma)_t \in \mathfrak{h}$。对于任意取值于 H 的 C^1-路径 $\gamma\colon I \to G$，我们于是得到一条连续路径 $\delta(\gamma)\colon I \to \mathfrak{h}$。由于巴拿赫–李群 H_a 是 C^0-正则的（定理 6.3.4），存在一条 C^1-路径 $\eta\colon I \to H_a$，满足 $\delta(\eta) = \delta(\gamma)$ 且 $\eta(0) = e$。根据唯一性引理 5.5.4，路径 $\iota \circ \eta$ 与 γ 重合。我们得出，$i(H_a) = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$ 是 H 中单位元的 C^1-弧连通分支。□

9.3.5 局部指数群的小子群

定义 9.3.26。我们称拓扑群 G 具有无小子群，如果存在一个单位元邻域 $U \subseteq G$，使得 $\{e\}$ 是包含于 U中的 G 的唯一子群。

巴拿赫–李群不含小子群，这是一个经典结果。对于局部凸向量群，例如赋予乘积拓扑的$G = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，这一点不再成立。此时，每个零邻域都包含非零向量子空间，因此 G具有小子群。对于局部凸空间 E，不存在小子群等价于在 E 上存在连续范数（引理 9.3.27）；我们将看到，局部指数李群 G 具有小子群，当且仅当其李代数 $\mathfrak{g}$ 不具有连续范数（命题 9.3.28）。由于任意实向量空间都是无挠的，这就意味着局部指数李群不含小挠子群。对于强 ILB–李群，已知它们同样不含小子群 [Ne06a，定理 III.2。3], 这特别意味着，对于每个紧流形 M，群 Diff(M) 都不含小子群。我们还知道，有限维李群的直极限不含小子群（定理 12.2.1）。

引理 9.3.27。对于局部凸空间 E，以下条件等价：

(a) E 没有小子群，也就是说，存在一个不包含任何非平凡子群的0-邻域。

(b)存在一个不包含非零线性子空间的0-邻域。(c) E 具有连续范数。

证明。 (a) $\Rightarrow$是平凡的。

(b) $\Rightarrow$ (c)：取一个不包含任何非零子空间的闭零邻域 $U \subseteq E$。不妨设 U 是绝对凸的。于是其闵可夫斯基泛函

$$\mu_U(x) := \inf\{t > 0 \colon x \in tU\}$$

是 E 上的连续半范数（命题 B.4.3）。由于 U 不包含任何非平凡线性子空间，μ_U 实际上是一个范数。

(c) $\Rightarrow$ (a)：如果 $\|\cdot\|$ 是 E 上的连续范数，那么它的单位球不包含非平凡子群。□

命题 9.3.28。局部指数李群 G 没有小子群，当且仅当其李代数 $\mathfrak{g}$ 具有连续范数。

证明。 设 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个开绝对凸零邻域，且 $\exp|_{2U}$是到 G的某个开子集上的微分同胚。设 $H \subseteq \exp(U)$是一个子群。考虑子集

$$\widetilde{H} := \exp^{-1}(H) \cap U = (\exp|_U)^{-1}(H).$$

若 $x \in H$，则对每个 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $\exp(nx) = \exp(x)^n \in H$。假设$\mathbb{R}x \not\subseteq U$。那么 $\mathbb{R}x \cap U =]-T, T[\cdot x$对某个 $T > 1$成立。设 $n_0 \in \mathbb{N}$是满足 $n_0 x \notin U$的最小 $\geq T$。于是 $n_0 x \in 2U \setminus U$。现在，$\exp(n_0 x) \in H \subseteq \exp(U)$与$\widetilde{\exp}$在 $2U$上的单射性矛盾。这意味着 $\mathbb{R}x \subseteq U$。由此可知， H包含于 $\mathfrak{g}$ 中包含在 U内的最大线性子空间 E。

如果 $\mathfrak{g}$ 具有连续范数，我们可以选择 U，使得它$\widetilde{\exp}$不包含任何非零子空间。于是 $H = \{0\}$ 推出 $H = \{e\}$，因此 G 没有小子群。

反过来，假设 G 没有小子群。那么我们可以假设 $\exp(U)$不包含非平凡子群。如果 $\mathbb{R}x \subseteq U$，那么 $\exp(\mathbb{R}x)$是一个包含于 $\exp(U)$中的子群，因此 $x = 0$。现在，引理 9.3.27 推出 $\mathfrak{g}$ 具有连续范数。□

注记 9.3.29。上述论证表明，对于任意局部指数李群，以及证明命题 9.3.28 中的 U，任意子群$H \subseteq \exp(U)$都包含在 $\exp(E)$中，其中 $E \subseteq U$ 是包含于 U中的最大线性子空间。由于 $\exp|_E \colon E \to \exp(E)$是一个同胚，这表明 H 不含非平凡紧子群。特别地，它不含挠元。

9.4 局部指数李群的商

在第 9.3 节中，我们引入了局部指数子群的概念，并了解到局部指数李群之间的态射的核是闭局部指数子群。本节转而讨论相反的情形，即研究局部指数李群 G的闭正规子群 N 满足哪些条件时，其商群 G/N 是局部指数李群。关键结果是商定理 9.4.1。我们还将讨论与闭理想 $\mathfrak{n}$ 对应的积分子群的李子群性质，与商李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$的可扩张性之间一个有趣的联系。

9.4.1 商群

定理 9.4.1（局部指数群商定理）。设 G 是一个局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$；$N \trianglelefteq G$ 是一个闭正规局部指数李子群，其李代数为 $\mathfrak{n}$ 。那么，商群 G/N 是一个局部指数李群，当且仅当李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数的。

证明。 若拓扑群 G/N 是一个局部指数李群，则商映射 $q\colon G \to G/N$ 是李群的光滑态射，并且$\mathbf{L}(q)\colon \mathfrak{g} = \mathbf{L}(G) \to \mathbf{L}(G/N)$ 也是李代数的商态射，其核为 $\mathfrak{n} = \mathbf{L}(N)$（定理 7.2.4）。因此$\mathbf{L}(G/N) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$；又由于假设 G/N 是局部指数的，李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 也是局部指数的。

反过来，假设 $Q \subseteq \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是一个指数局部李群，并记 $q\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 为商映射。此外，设 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个指数局部李群，使得 $\exp_G|_U$ 是到 G的开子集上的微分同胚，

$$\exp_G(U) \cap N = \exp_G(U \cap \mathfrak{n}),$$

并且对 x，$y \in U$ 有 $q(x * y) = q(x) * q(y)$（定理 8.2.12）。根据定理 8.3.9，我们还可以进一步假设 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)\mathfrak{n} = (\kappa_U)_x(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$ 对所有$x \in U$成立。

设 $U_1 \subseteq U$ 是一个凸平衡开零邻域，且满足 $U_1 \times U_1 \subseteq D_U$。对于 x，$x' \in U_1$ 且 $x' - x \in \mathfrak{n}$，于是有

$$q((-x) * x') = q(-x) * q(x') = (-q(x)) * q(x) = 0,$$

从而 $(-x) * x' \in \ker q = \mathfrak{n}$。这意味着

$$\exp_G(x)^{-1} \exp_G(x') = \exp_G((-x) * x') \in \exp_G \mathfrak{n} \subseteq N,$$

因此，$\exp_G x' \in \exp_G x \cdot N$。

因此，我们得到一个良定义映射

$$\psi\colon V_1 := q(U_1) \to G/N, \quad q(x) \mapsto (\exp_G x)N$$

满足

$$\begin{aligned}\psi(q(x) * q(y)) = \psi(q(x * y)) &= \exp_G(x * y)N \\ &= \exp_G x \exp_G yN = \psi(q(x))\psi(q(y)),\end{aligned}$$

即，ψ：$(V_1, *) \to G/N$是局部群同态。

此外，ψ是开的，因为这对 $\mathrm{Exp}_G|_{U_1}$和商映射$G \to G/N$成立。如果对 $x, y \in U_1$有 $\psi(q(x)) = \psi(q(y))$ 成立，那么

$$\exp_G((-y) * x) = \exp_G(y)^{-1} \exp_G x \in N \cap \exp_G(U) \subseteq \exp_G(\mathfrak{n}),$$

这导致 $(-y) * x \in \mathfrak{n}$，从而得到

$$0 = q((-y) * x) = q(-y) * q(x) = (-q(y)) * q(x).$$

因此，根据局部群Q中逆元的唯一性，可得 $q(y) = q(x) = q$。这意味着 ψ 是开且单射的，因而是到其像上的同胚。

$V_1 \subseteq Q$ 中的乘法和求逆都是光滑的。此外，对于每个 $g \in G$，在 $\mathfrak{g}$ 中 0 的充分小邻域上，我们有关系

$$c_{gN} \circ \psi = \psi \circ \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}(g),$$

这意味着，在 0 的某个邻域内，x 中由 V_1 给出的共轭作用是连续线性映射 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}(\exp_G x)$，因此是光滑的。现在，定理 5.3.1 表明，在 G/N 上存在唯一的李群结构，使得 ψ 在 e的某个邻域内定义一个坐标图。

对每个 $x \in \mathfrak{g}$，单参数群

$$\gamma_{q(x)}\colon \mathbb{R} \to G/N, \quad t \mapsto \exp_G(tx)N$$

当 t 充分小时，满足关系 $\gamma_{q(x)}(t) = \psi(tq(x))$，因此是光滑的，且 $\gamma'_{q(x)}(0) = q(x)$；这里我们通过 $T_0(\psi)$ 将 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 与 $T_e(G/N)$ 等同起来。这表明李群 G/N 的指数函数为

$$\exp_{G/N}(q(x)) = \exp_G(x)N.$$

由于 $\psi \circ q = \exp^{G/N} \circ q$ 在 U_1上成立，$\exp^{G/N}$ 是光滑的，且群 G/N是局部指数的。□

推论 9.4.2。设 $N \trianglelefteq G$ 是一个闭正规局部指数李子群，$\mathfrak{n}$是其李代数。若 N 是中心的或包含换位子群，则商群 G/N 是一个局部指数李群。

证明. 根据商定理 9.4.1，我们只需证明：若 N 是中心的或包含交换子代数，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$是局部指数的。若$N$ 是中心的，则 $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，并且由推论 8.3.11，$\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数的。若 N 包含换位子群，则它也包含其闭包，从而由引理 9.3.21 有$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{n}$，于是我们可以再次应用推论 8.3.11。□

推论 9.4.3. 设 G 为巴拿赫–李群，$N \trianglelefteq G$ 为闭正规子群。则商群 G/N 具有巴拿赫–李群结构，当且仅当 N 是 *Banach–Lie* 子群。

证明。 由定理 9.4.1 可立即得到这一结论，因为商李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是巴拿赫空间，因此自动是局部指数的。□

类比前面的推论，若能为一般子群给出类似的判据，将会很有帮助：

猜想 9.4.1。巴拿赫–李群 G 的闭子群 H 是巴拿赫–李子群，当且仅当 G/H 具有巴拿赫流形结构，使得商映射 $q\colon\ G \to G/H, g \mapsto gH$ 在每一点的微分均为满射，并且 G 在 G/H 上光滑作用。

主要困难在于，闭子空间 $\mathbf{L}(H)$ 在 $\mathbf{L}(G)$ 中可能不存在闭补空间。若 H 是 G 的巴拿赫–李子群，且 $\mathbf{L}(H)$ 有闭补空间，那么经典反函数定理便能为商空间 G/H 提供自然坐标图，从而赋予它具有所有所需性质的自然流形结构（命题 9.1.22 和 9.1.25）。若 $\mathbf{L}(H)$ 没有闭补空间，目前尚不清楚如何构造 G/H 的坐标图。不过，自然的模型空间是商空间 $\mathbf{L}(G)/\mathbf{L}(H)$。利用 [AnN09]，中得到的隐函数定理版本，我们现在可以证明上述猜想的一个方向：

定理 9.4.4。 设 G 是一个巴拿赫–李群，$\sigma\colon\ G\times M \to M$ 是 G 在巴拿赫流形 M, $p \in M$ 上的光滑作用。假设对于导出作用

$$\dot\sigma\colon\ \mathbf{L}(G) \to \mathcal{V}(M), \quad \dot\sigma(x)(m) := -d\sigma(e,m)(x,0)$$

$T_p(M)$ 的子空间 $\dot\sigma(\mathbf{L}(G))(p)$ 是闭的。那么稳定子

$$G_p := \{g \in G\colon\ g.p = p\}$$

是一个李子群。

证明。 首先我们注意到，G_p 是 G的闭子群，且

$$\mathbf{L}(G_p) = \{x \in \mathbf{L}(G)\colon\ \dot\sigma(x)(p) = 0\}.$$

我们考虑光滑映射

$$\psi\colon G \to M, \quad g \mapsto g.p \quad \text{and} \quad \varphi\colon\ \mathbf{L}(G_p) \to G_p, \quad x \mapsto \exp_G(x).$$

于是 $G_p = \psi^{-1}(p)$, $\varphi(0) = e$,

$$\operatorname{im}(d\varphi(0)) = \mathbf{L}(G_p) = \ker(d\psi(e)).$$

由于 $\operatorname{im}(d\varphi(0)) = \dot\sigma(\mathbf{L}(G))(p)$ 是闭的，隐函数定理[AnN09, 定理 2.1] 表明，存在一个开零邻域 $U \subseteq \mathbf{L}(G_p)$，且该邻域可以任意小地选取，使得 $\exp_G(U)$ 是 G_p 中的一个 e- 邻域。根据引理 9.3.9，G_p 是 G 的巴拿赫 – 李子群。□

推论 9.4.5。设 G 是一个巴拿赫–李群，$H \subseteq G$ 是一个闭子群，并且 G/H 具有巴拿赫流形结构。假设商映射 $q\colon\ G \to G/H$，$g \mapsto gH$ 在某点 $g_0 \in G$ 处具有满射微分，并且 G 在 G/H 上光滑作用。那么 H 是 G 的巴拿赫–李子群。

证明。 G 在 G/H 上的作用由 $\sigma(g, xH) = gxH = q(gx)$，给出，因此

$$\dot{\sigma}(\mathbf{L}(G))(gH) = dq(g)(\mathbf{L}(G)) = T_{gH}(G/H)$$

而 $p := gH = q(g) \in G/H$ 的稳定子是 gHg^{-1}。根据定理 9.4.4，$g_0 H g_0^{-1}$ 是巴拿赫–李子群。因此 H 是巴拿赫–李子群。□

注 9.4.6。前述定理可以自然地推广到以下情形。设 H 是巴拿赫–李群 G 的闭子群。假设存在一个开 e-邻域 $U_G \subseteq G$ 和一个 C^1-映射$F\colon U_G \to M$ 到某个巴拿赫流形 M，使得 $T_e(F)$ 是满射，并且

$$F^{-1}(F(e)) \cap U_G = H \cap U_G,$$

那么 H 是 G 的巴拿赫–李子群。

问题 9.4.7。 假设巴拿赫–李群 G 在巴拿赫流形 M 上光滑作用，且 $p \in M$。稳定子 G_p 是否总是 G 的李子群?

由代数子群定理（定理 10.4.3）可知，对于每个巴拿赫空间 Y、每个 $y \in Y$ 以及每个闭子空间 $X \subseteq Y$，子群

$$\mathrm{GL}(Y)_y := \{g \in \mathrm{GL}(Y)\colon g(y) = y\}, \quad \mathrm{GL}(Y)_X := \{g \in \mathrm{GL}(Y)\colon g(X) = X\}$$

都是巴拿赫–李子群。由于李子群的逆像仍是李子群（命题 9.3.11），因此，线性作用以及闭子空间的稳定子的相关问题都有肯定的解。

如果 X 在 Y中不可补，那么就不清楚如何将格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_X(Y) := \{g.X\colon\ g \in \mathrm{GL}(Y)\}$ 变成一个 $\mathrm{GL}(Y)$ 作用于其上的光滑流形。因此，我们所处的情形是：我们知道闭子群 $\mathrm{GL}(X)_Y$ 是一个巴拿赫–李子群，但对商 $\mathrm{Gr}_X(Y) \cong \mathrm{GL}(Y)/\mathrm{GL}(Y)_X$却一无所知。因此，若猜想 9.4.1 得以解决，特别是将为 Y的全体闭子空间构成的格拉斯曼流形带来自然的巴拿赫流形结构。

9.4.2 商李代数的可积性

在本小节中，我们结合商定理以及局部指数李群态射的核是局部指数子群这一事实，推出：对于单连通局部指数李群的李代数中的闭理想 $\mathfrak{n}$，

若局部指数李群为 G，则商群 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ （假设其为局部指数）可扩张，当且仅当 $\operatorname{Exp}_G \mathfrak{n}$ 生成 G的一个闭局部指数李子群。这一观察有多种应用，其中之一便是下文陈述的商的可积性定理。我们将在第15.5节关于可积性的更深入讨论中探讨这一主题。

命题 9.4.8. 设 G 是一个1-连通局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是一个闭理想，并且商李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数的。那么 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 可扩张，当且仅当正规子群$N := \langle \operatorname{Exp}_G \mathfrak{n} \rangle \trianglelefteq G$ 是一个局部指数李子群。

证明。 若 $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 可积，且 Q 是相应的连通李群，则存在一个同态 $q\colon G \to H$，使得$\mathbf{L}(q)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{q}$是商映射（定理 7.2.4）。因此，$\ker q$ 是 G的正规局部指数李子群，其李代数为 $\mathfrak{n}$ （命题 9.3.11）。特别地，$N := \langle \operatorname{Exp} \mathfrak{n} \rangle = (\ker q)_0$是 G的闭局部指数李子群。

反过来，若 N 是 G的闭局部指数李子群，则商定理 9.4.1 表明，拓扑群 G/N 具有李群结构，且$\mathbf{L}(G/N) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$。□

推论9.4.9.设 G 是一个1-连通巴拿赫–李群，$\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是一个闭理想。则商李代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 可扩张，当且仅当正规子群 $N := \langle \exp_G \mathfrak{n} \rangle \trianglelefteq G$ 是一个闭局部指数李子群。

证明。 我们只需回顾：每个商 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 都是巴拿赫的，因而特别是局部指数的（命题7.1.2）。于是命题9.4.8适用。□

定理 9.4.10（商的可扩张性定理）。 设 G 是一个1-连通局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是一个闭理想，使得商李代数 $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 是局部指数的。我们将由$\exp_G \mathfrak{n}$ 生成的积分子群记为 $N := \langle \exp_G \mathfrak{n} \rangle$，以及

$$Z(G, \mathfrak{n}) := \{ g \in G\colon (\operatorname{Ad}(g) - e)(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n} \}$$

G 在 $\mathfrak{q}$上的自然表示的核。则 $Z(G,\mathfrak{n}) \trianglelefteq G$ 是一个正规局部指数李子群，其李代数

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}) := \{ x \in \mathfrak{g}\colon [x, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{n} \}$$

以及李代数同态 $q\colon \mathfrak{z}(\mathfrak{g},\mathfrak{n}) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ 定义了一个周期同态

$$P_{\mathfrak{q}}\colon \pi_1(Z(G,\mathfrak{n})) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{q}), \quad P_{\mathfrak{q}}([\gamma]) = \int_0^1 q(\delta(\gamma)_t)\, dt,$$

其中 $\gamma\colon [0,1] \to Z$（G，$\mathfrak{n}$） 是一个分段光滑回路。当且仅当 $P_{\mathfrak{q}}$ 的像是 $\mathfrak{z}$（$\mathfrak{q}$） 的离散子群时，李代数 $\mathfrak{q}$ 才是可扩张的。

证明。 首先，我们利用可积性定理 8.3.13 得知，伴随群 $Q_{\mathrm{ad}} := \langle e^{\operatorname{ad}\mathfrak{q}} \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{q})$ 具有局部指数李群的结构，其李代数为 $\mathfrak{q}_{\mathrm{ad}} := \mathfrak{q}/\mathfrak{z}(\mathfrak{q}) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g},\ \mathfrak{n})$。令 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$: $G \to Q_{\mathrm{ad}}$ 表示 G 在 $\mathfrak{q}$ 上的自然表示，并注意到

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}} \circ \exp_G = \exp_{Q_{\mathrm{ad}}} \circ \operatorname{ad}_{\mathfrak{q}}$$

这意味着 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$ 是局部指数李群的态射。因此，命题 9.3.11 意味着 $Z(G,\mathfrak{n}) = \ker \mathrm{Ad}_{\mathfrak{q}}$ 是 G 的正规局部指数李子群，其李代数为 $\ker \operatorname{ad}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g},\mathfrak{n})$。

将李代数同态 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g},\mathfrak{n}) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ 积分为相应万有覆盖群之间的群同态 $P_{\mathfrak{q}}$: $Z(G,\mathfrak{n})\tilde{}_0 \to \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$，我们得到同态

$$P_{\mathfrak{q}} \colon \pi_1(Z(G,\mathfrak{n})) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$$

将其限制在离散中心子群 $\pi_1(Z(G,\mathfrak{n}))$ 上（定理 7.2.4）。 $P_{\mathfrak{q}}$ 的显式公式可如下验证：设 $\widetilde{\gamma}$: $[0,1] \to Z(G,\mathfrak{n})\tilde{}_0$是环路 γ 的一个提升，且 $\widetilde{\gamma}(0) = e$。那么

$$P_{\mathfrak{q}}([\gamma]) = \widetilde{P}_{\mathfrak{q}}(\widetilde{\gamma}(1)) = \int_0^1 (\widetilde{P}_{\mathfrak{q}} \circ \widetilde{\gamma})'(t)\, dt = \int_0^1 q(\delta(\widetilde{\gamma})_t)\, dt = \int_0^1 q(\delta(\gamma)_t)\, dt$$

（参见定理 6.1.13）。

若 $\Gamma := \mathrm{im}(P_{\mathfrak{q}})$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ 的离散子群，则商群$Z := \mathfrak{z}(\mathfrak{q})/\Gamma$ 带有自然李群结构，且同态

$$Z(G,\mathfrak{n})\tilde{}_0 \to \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$$

可分解为一个同态 β: $Z(G,\ \mathfrak{n})_0 \cong Z(G,\ \mathfrak{n})\tilde{}_0/\pi_1(Z(G,\ \mathfrak{n})) \to Z$，使得 $\mathbf{L}(\beta)$: $\mathfrak{z}(\mathfrak{g},\ \mathfrak{n}) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ 是商映射，且 $\ker(\mathbf{L}(\beta)) = \mathfrak{n}$。由此可得，$\ker \beta$ 是 $Z(G,\ \mathfrak{n})_0$ 的正规局部指数李子群，其李代数为 $\mathfrak{n}$，因而 N 是 G 的闭局部指数李子群。现在，根据命题 9.4.8， $\mathfrak{q}$ 是可扩张的。

反过来，假设 $\mathfrak{q}$ 是可扩张的，因而 N 是 G 的闭局部指数子群（命题 9.4.8），这意味着 N 是 $Z(G,\mathfrak{n})$ 的局部指数子群。根据商定理 9.4.1， $Z := Z(G,\mathfrak{n})_0/N$ 是李代数为 $\mathbf{L}(Z) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g},\mathfrak{n})/\mathfrak{n} \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ 的局部指数李群，因此是某个商 $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})/\Gamma$，其中 $\Gamma \cong \pi_1(Z)$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ 的离散子群（命题 7.1.3）。李群同态 $Z(G,\mathfrak{n})_0 \to Z$ 诱导出一个同态 $\pi_1(Z(G,\mathfrak{n})) \to \pi_1(Z) \cong \Gamma$，它与 $P_{\mathfrak{q}}$ 一致。因此，$\mathrm{im}(P_{\mathfrak{q}}) \subseteq \Gamma$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ 的离散子群。□

注记 9.4.11. 我们将在第15.5节看到，对于每个麦基完备的局部指数李代数 $\mathfrak{q}$ （其中 $\mathfrak{q}_{\mathrm{ad}}$ 也麦基完备），都存在一个自然同态

$$\mathrm{per}_{\mathfrak{q}}\colon \pi_2(Q_{\mathrm{ad}}) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$$

其像是离散的，当且仅当 $\mathfrak{q}$ 可扩张。

假设 $\mathfrak{g}$ 是 Fr´echet 空间，在前述定理的情形下有 $Q_{\mathrm{ad}} \cong G/Z(G, \mathfrak{n})$，结合迈克尔选择定理（[MicE59]，[Bou87]），可知 G 是一个拓扑 $Z(G, \mathfrak{n})$-主丛。因此，我们有一个连接同态

$$\delta\colon \pi_2(Q_{\mathrm{ad}}) \to \pi_1(Z(G, \mathfrak{n})).$$

δ 的满射性源于 G 的单连通性以及丛 $G \to Q_{\mathrm{ad}}$ 的长正合同伦序列的正合性（定理 14.1.8）。于是，不难看出

$$P_{\mathfrak{q}} \circ \delta = \mathrm{per}_{\mathfrak{q}},$$

这使得两幅图相互吻合。

9.5 李群扩张的正则性

本节的主要结果是定理 9.5.6，它断言：李群 G 被李群 N 扩张得到的扩张 $\prec G$ 是正则的，当且仅当 G 和 N 是正则的。该正则性判据是验证李群正则性的重要工具。

9.5.1 初始李子群的正则性

在转向证明之前，我们需要一些判据，以判断正则李群的子群是否正则：

命题 9.5.1。设 G 是一个 C^k-正则李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $H \leq G$ 是一个初始李子群，其李代数为 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$。假设存在一个开单位元邻域 $U \subseteq G$ 和一个光滑函数 $f\colon U \to E$，其值域为某个局部凸空间 E，使得对于每个 $g \in U$，f 在 $U \cap gH$ 上为常数，且 $H \cap U = f^{-1}(0) \cap U$。那么 H 是 C^k- 正则的。

证明。 C^k-正则性意味着 G 存在一个光滑演化映射

$$\mathrm{evol}_H\colon C^k(I, \mathfrak{h}) \to G, \quad \xi \mapsto \gamma_\xi(1),$$

a由于 H 是初始的，只需证明此映射的值域包含于 H。若 $\xi \in C^k(I, \mathfrak{h})$ 满足 $\mathrm{im}(\gamma_\xi) \subseteq U$，那么对于每个 $t \in I$，

$$(f \circ \gamma_\xi)'(t) = df(\gamma_\xi(t))\gamma_\xi'(t) = 0$$

因为 $\gamma_\xi'(t) = d\ell_{\gamma_\xi(t)}(e)\xi(t)$ 是集合 $U\cap\gamma_\xi(t)H$ 中一条曲线的导数，而在该集合上 f 是常数。因此 $f\circ\gamma_\xi$ 是常数，从而得到 $\operatorname{im}(\gamma_\xi) \subseteq f^{-1}(f(e)) = f^{-1}(0) = U\cap H$。

若 $\xi\in C^k(I,\mathfrak{h})$ 任意，我们便对充分小的区间 $[t_0,t_0+\varepsilon]$ 上的曲线 $t\mapsto\gamma_\xi(t_0)^{-1}\gamma_\xi(t)$应用前面的论证，并可知 $\operatorname{im}(\gamma_\xi)$ 包含于 H。□

推论 9.5.2。设 $\sigma\colon G\times M\to M$ 是正则李群 G 在光滑流形 M 上的光滑作用。假设某个 $m\in M$ 的稳定子子群 G_m 是 G 的初始李子群。那么它是正则李群。

证明。设 (φ, U_M) 是 M 的一个 E-坐标图，其中 $m\in U_M$。于是我们有光滑映射

$$f := \varphi\circ\sigma^m\colon U_G := \{g\in G\colon g.m\in U_M\}\to E,\quad g\mapsto\varphi(g.m),$$

它在 U_G 中的 G_m 左陪集上为常数。因此命题 9.5.1 适用。□

9.5.2 正则性是一种扩张性质

引理 9.5.3。设 M 是一个紧致连通光滑流形（可能带边界），G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。那么，按以下规定

$$\alpha * f := \delta(f) + \operatorname{Ad}(f)^{-1}.\alpha$$

可定义群 $C^\infty(M,G)$ 在 $\Omega^1(M,\mathfrak{g})$ 上的光滑仿射右作用，以及群 $C^r(M,G)$ 在 $\Omega^1_{C^{r-1}}(M,\mathfrak{g})$ 上的光滑仿射右作用，其中 $r\in\mathbb{N}$。

证明。$\alpha * f$ 定义了群 $C^\infty(M,G)$ 的一个作用，这一点可由以下等式得出：

$$\begin{aligned}(\alpha * f_1) * f_2 &= \delta(f_2) + \operatorname{Ad}(f_2)^{-1}.(\delta(f_1) + \operatorname{Ad}(f_1)^{-1}.\alpha)\\ &= \delta(f_1f_2) + \operatorname{Ad}(f_1f_2)^{-1}.\alpha = \alpha * (f_1f_2).\end{aligned}$$

作用的光滑性由 δ 的光滑性（命题 6.2.3）以及相应线性作用的光滑性（引理 6.2.1）得出。□

注 9.5.4。若对某个光滑函数 $h\colon M\to G$，有 $\xi = \delta(\eta)$，则乘积法则蕴含 $\delta(\eta\gamma) = \xi * \gamma$，因此，上述作用在群值函数层面上对应于右乘作用。

定义 9.5.5。（李群扩张）(a) 设 N, G 和 G 为李群。一对态射 (i,q)，$i\colon N\to G$ 和 $q\colon G\to G$，称为 G 被 N 的李群扩张，如果 i 是单射，$\ker q = i(N)$，且 q 是满射。我们进一步要求，存在一个 e的开邻域 $U\subseteq G$ 以及一个光滑

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$映射 $\sigma\colon U \to G$，满足 $q \circ \sigma = \mathrm{id}_U$，使得 $U \times N \to G, (g,n) \mapsto \sigma(g)i(n)$$\widehat{\ }$是到 G 的一个开子集上的微分同胚。这意味着，按照定义 9.1.20 的含义， N 是 G 的分裂李子群。

(b) 如果 N 是阿贝尔群，则称李群扩张为阿贝尔的；如果 $\nsim i(N) \subseteq Z(G)$，则称其为中心的。

(c) 如果存在李群态射 $\nsim$ $\nsim\varphi\colon G_1 \to G_2$，使下图交换，则称李群 G 通过李群 N 的两个扩张 $N \xrightarrow{i_1} \widehat{G}_1 \xrightarrow{q_1} G$ 和 $N \xrightarrow{i_2} \widehat{G}_2 \xrightarrow{q_2} G$ 等价：

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{i_1} & \widehat{G}_1 & \xrightarrow{q_1} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_N} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G} \\ N & \xrightarrow{i_2} & \widehat{G}_2 & \xrightarrow{q_2} & G. \end{array}$$

容易看出，任何这样的 φ 都是群同构，且其逆映射是光滑的（习题 9.5.1）。因此， φ 是李群同构，从而我们确实得到一个等价关系。我们用 $\mathrm{Ext}(G, N)$ 表示 G 通过 N 的李群扩张的等价类集合。

定理 9.5.6. (C^k-正则性是一种扩张性质) 设 $q\colon \widehat{G} \to G$ 是$\widehat{\ }$李群 G 借助李群 N 的延拓，并且 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \mathrm{lip}\}$。则 G 是C^k-正则的，当且仅当 N 与 G 是 C^k-正则的。

证明。 **步骤 1**。 我们假设 G与 N 是 C^k-正则的，并证明这蕴含 $\widehat{G}$ 的 C^k-正则性。由于 G 是 C^k-正则的，演化映射

$$\mathrm{Evol}_G\colon C^k(I, \mathfrak{g}) \to C^{k+1}_*(I, G)$$

是光滑的（对于 $k < \infty$，这在 [Gl12b 的定理 A] 中得到证明，而对于 $k = \infty$ 则见命题 6.3.2）。设 $U_G \subseteq G$ 是一个开 e-邻域，对此我们$\widehat{\ }$有一个光滑截面 $\sigma\colon U_G \to G$，满足 $\sigma(e_G) = e_{\widehat{G}}$ 且

$$p\colon C^k(I, \widehat{\mathfrak{g}}) \to C^k(I, \mathfrak{g}), \quad \xi \mapsto q_{\mathfrak{g}} \circ \xi$$

是投影映射。因此， $V := p^{-1}(\mathrm{Evol}_G^{-1}(C^{k+1}(I, U_G)))$ 是 $C^k(I, \widehat{\mathfrak{g}})$ 中的一个开零邻域。此外，根据引理 4.2.6，映射

$$\Phi\colon V \to C^{k+1}_*(I, \widehat{G}), \quad \xi \mapsto \sigma \circ \mathrm{Evol}_G(q_{\mathfrak{g}} \circ \xi)$$

是光滑的。对于 $\xi \in C^k(I, \widehat{\mathfrak{g}})$，我们得到

$$\begin{aligned} q_{\mathfrak{g}}(\xi * \Phi(\xi)^{-1}) &= q_{\mathfrak{g}}\Big(\mathrm{Ad}(\Phi(\xi))(\xi - \delta(\Phi(\xi)))\Big) \\ &= \mathrm{Ad}(q_G(\Phi(\xi)))\Big(q_{\mathfrak{g}} \circ \xi - \delta(q_G(\Phi(\xi)))\Big) = \mathrm{Ad}(q_G(\Phi(\xi)))\big(q_{\mathfrak{g}} \circ \xi - q_{\mathfrak{g}} \circ \xi\big) = 0. \end{aligned}$$

这意味着 $\xi * \Phi(\xi)^{-1} \in C^k(I, \mathfrak{n})$。现在将引理 9.5.3 应用于 $C^{k+1}(I, \widehat{G})$ 在 $\Omega^1_{C^k}(I, \widehat{\mathfrak{g}}) \cong C^k(I, \widehat{\mathfrak{g}})$ 上的作用，表明它光滑地依赖于 ξ。由此我们得到一个光滑映射

$$\widehat{E}\colon V \to \widehat{G}, \quad \widehat{E}(\xi) := \mathrm{evol}_N(\xi * \Phi(\xi)^{-1}) \cdot \Phi(\xi)(1).$$

曲线 $\gamma := \mathrm{Evol}_N(\xi * \Phi(\xi)^{-1})\Phi(\xi)$ 满足

$$\delta(\gamma) = \delta(\Phi(\xi)) + \mathrm{Ad}(\Phi(\xi))^{-1}\big(\delta(\Phi(\xi)^{-1}) + \mathrm{Ad}(\Phi(\xi))\xi\big) = \xi.$$

因此，$\widehat{E}$ 是 G的光滑局部演化映射，而引理 6.1.4 表明，$\widehat{G}$ 是 C^k-正则的。

步骤2. 现在，我们证明 N 和 G 的正则性。为证明 N 是 $\widehat{C}^k$-正则的，我们选取 G 的一个坐标图（φ_G, U_G），并考虑映射

$$f := \varphi_G \circ q\colon q^{-1}(U_G) \to \varphi_G(U_G),$$

该映射在包含于此集合中的 N的左陪集上为常数。因此，命题 9.5.1 表明，N 是 C^k-正则的，因为它是 $\widehat{G}$的子流形，因而特别是初始子流形。

为证明 G是 C^k-正则的，我们首先选取一个连续线性截面$\sigma\colon \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$，它诱导出一个连续线性截面

$$\sigma_*\colon C^k(I,\mathfrak{g}) \to C^k(I,\widehat{\mathfrak{g}}), \quad \xi \mapsto \sigma \circ \xi.$$

那么，对于每个 $\xi \in C^k([0,1], \mathfrak{g})$，曲线 $\gamma_\xi := q \circ \mathrm{Evol}_{\widehat{G}}(\sigma \circ \xi)$ 满足

$$\delta(\gamma_\xi) = \mathbf{L}(q) \circ \sigma \circ \xi = \xi,$$

因此，$\mathrm{evol}_G = q \circ \mathrm{evol}_{\widehat{G}} \circ \sigma$ 是光滑映射的复合，故为光滑映射。

□

例 9.5.7。(a) 若 G 是正则李群，则其切丛$T(G)$是由 G 和 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$构成的延拓。事实上，它是一个半直积 $T(G) \cong \mathfrak{g} \rtimes_{\mathrm{Ad}} G$。若 G 是正则的，则 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的（命题 6.3.2），因而是正则李群（命题 6.3.2 和 6.1.3）。因此，前述定理蕴含 $T(G)$ 也是正则的。

(b) 若 G和 N是正则李群，且 $S\colon G \to \mathrm{Aut}(N)$ 定义了 G 在 N上的光滑作用，则前述定理蕴含半直积李群 $N \rtimes_S G$ 也是正则的。

(c) 设 $q\colon G_1 \to G_2$ 是李群的覆盖。那么，由于 $G_2 \cong G_1/$ 核为 q，G_1 是正则的当且仅当 G_2是正则的，而离散群 $\ker q$显然是正则的。

9.5.3 正则李群上群作用的光滑性

现在，我们来仔细考察光滑依赖于参数的函数。我们的主要目标是研究正则李群上群作用的光滑性。

设 Λ 是一个光滑流形。那么， $\Omega^1(M,\mathfrak{g})$ 中元素的族 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 称为光滑，如果映射

$$\Lambda \times TM \to \mathfrak{g}, \quad (\lambda, v) \mapsto \alpha_\lambda(v)$$

是光滑的。

命题 9.5.8。 设 G是正则的。令 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\Omega^1(M,\mathfrak{g})$ 中满足 ***Maurer–Cartan*** 方程的元素的光滑族，并设 M是1-连通的。取一点 $m_0 \in M$。令 $f_\lambda\colon M \to G$ 为唯一确定的光滑函数，满足 $f_\lambda(m_0) = e$ 和 $\delta(f_\lambda) = \alpha_\lambda$。则函数

$$F\colon \Lambda \times M \to G, \quad (\lambda, m) \mapsto f_\lambda(m)$$

是光滑的。

证明。 首先我们注意到，不妨设 M 是局部凸空间的开凸零邻域。于是我们需要证明函数

$$F\colon \Lambda \times M \to G, \quad (\lambda, m) \mapsto f_\lambda(m)$$

是光滑的。

对于 $x \in M$，我们有 $f_\lambda(x) = \mathrm{evol}_G(\xi_{\lambda,\,x})$，其中

$$\xi_{\lambda,x}(t) = f_\lambda(tx)^{-1}\frac{d}{dt}f_\lambda(tx) = f_\lambda(tx)^{-1}df_\lambda(tx)(x) = \alpha_\lambda(tx)(x).$$

由于 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个光滑的 1-形式族，映射

$$\Lambda \times M \to C^\infty([0,1],\mathfrak{g}), \quad (\lambda, x) \mapsto \xi_{\lambda,x}$$

是光滑的，因为映射

$$\Lambda \times M \times [0,1] \to \mathfrak{g}, \quad (\lambda, x, t) \mapsto \xi_{\lambda,x}(t) = \alpha_\lambda(tx)(x)$$

是光滑的（命题 4.1.21）。现在 $F(\lambda,\ x) = \mathrm{evol}_G(\xi_{\lambda,\,x})$，而 evol_G 的光滑性表明 F 是光滑的。 □

推论 9.5.9. 设 $\alpha\colon H \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是李群 H在连通正则李群 G的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个光滑作用，且该作用由自同构给出。进一步假设每个自同构 α_h 都可积分为 G的一个自同构α_h^G。那么相应的作用

$$\alpha^G\colon H \times G \to G$$

是光滑的。

证明。 我们将作用 α^G 视为 G 的光滑自同构族，其中 $\Lambda = H$ 且 $M = G$。对于每个 $h \in H$，我们有

$$\delta(\alpha_h^G) = \alpha_h \circ \kappa_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g}),$$

其中， κ_G 是 G的左 Maurer–Cartan形式。鉴于 H 对 $\mathfrak{g}$作用的光滑性，映射

$$H \times TG \to \mathfrak{g}, \quad (h, gx) \mapsto (\alpha_h \circ \kappa_G)(gx) = \alpha_h(x) = \alpha(h, x)$$

是光滑的，因此（$\alpha_h \circ \kappa_G$）$_{h\in H}$ 是 Ω^1（G， $\mathfrak{g}$）中的一个光滑族。现在，断言由命题 9.5.8 得证。□

第 9 章中的开放问题

在推论 9.4.3 中，我们已经看到，巴拿赫–李群G 关于闭正规子群的商群 G/N 是巴拿赫–李群，当且仅当 N 是巴拿赫–李子群。为了在齐性空间 G/H上获得自然流形结构，我们必须假设 H 是一个分裂李子群（命题 9.1.22）；而在正规子群的情形下，这一条件显然并非必要。理解巴拿赫–李群的齐性空间 G/H 何时具有自然流形结构，是一个重要的开放问题。

问题 9.5.10。（Banach变换群）设 σ: $G \times M \to M$ 是巴拿赫–李群在巴拿赫流形 M上的光滑作用。
(1) 点 $m \in M$ 的稳定子群 $G_m := \{g \in G\colon\ g.m = m\}$ 总是巴拿赫–李子群吗？根据定理 10.4.3，线性作用的情形成立。(2) G 在 M 中的轨道是否具有自然流形结构?

问题 9.5.11。设 G 是巴拿赫–李群， $H \subseteq G$ 是闭子群。

(a) 假设 G/H 是带有次沉浸映射 q 的光滑流形，并且 G有一个光滑作用。这是否意味着 H 是 G的李子群? (b) 刻画使得 G/H 为光滑流形的李子群 H。(c) 设 $H \subseteq G$ 是闭子群，且 $\mathfrak{h} := \mathbf{L}^e(H)$是其李代数。那么， $\mathfrak{h}$ 的正规化子 $N_G(\mathfrak{h})$是李子群（命题 9.3.11 和命题 10.4.2）。是否可以认为 Ad(G) $\mathfrak{h} \cong G/N_G(\mathfrak{h})$具有自然流形结构? 如果 H 连通，它就是 $N_G(\mathfrak{h})$的正规子群。如果 H 是李子群，这意味着 $N_G(\mathfrak{h})/H$ 具有李群结构，因而也具有流形结构。

问题 9.5.12。 （参见推论 9.3.16）证明：对于从局部指数李群 G 到具有指数函数的李群 H 的态射 φ: $G \to H$，商 $G/\ker\varphi$ 是局部指数李群，并且 φ 诱导一个李群态射 $G/\ker\varphi \hookrightarrow H$。

问题 9.5.13。（参见推论 9.3.17）证明：若 $\varphi\colon G \to H$ 是一个李群态射，且 G 是局部指数的，并且$\mathbf{L}(\varphi)$ 是单射，则 $\ker\varphi$ 是离散的。

这个问题可以化归为 G 是局部凸空间的加法群的情形：首先我们注意到，不妨假设 G 连通，并令 $N := \ker\varphi$。由命题 9.3.6 可得$\mathbf{L}^e(N) = \{0\}$，因此 N 中的所有 C^1-弧都是常数。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，映射 $G \to N$，$g \mapsto c_g(n) = gng^{-1}$ 都是常数，这意味着 N 是中心的。由命题 9.3.13 可知，$Z(G)$ 是局部指数李群，这意味着 $Z(G)_0 \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{g})/\ker(\exp_G|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})})$。因此，$N$ 离散当且仅当 $\exp_G^{-1}(N) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 离散。因此，只需对态射证明该断言

$$\varphi \circ \exp_G|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}\colon \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to H.$$

问题 9.5.14。设 G 是一个局部指数李群，且 $H \subseteq G$ 是一个闭子群。$\mathbf{L}^e(H)$ 是否总是局部指数的?

第 9 章习题

习题 9.5.1。设 $N \hookrightarrow G_1 \twoheadrightarrow G$ 和 $N \hookrightarrow G_2 \twoheadrightarrow G$ 是 G 被 N 扩张得到的李群扩张。证明每个等价 $\varphi\colon \widehat{G}_1 \to \widehat{G}_2$（定义 9.5.5）都是李群同构，即 φ 是双射，且 φ^{-1} 也是光滑的。

习题 9.5.2。（分裂李子群）证明以下条件蕴含李群 G 的李子群 H 是一个分裂李子群：存在某个局部凸空间 E 的一个开子集 U、一个光滑映射 $\sigma\colon U \to G$，以及一个开 e-邻域 $U_H \subseteq H$，使得映射

$$\mu_0\colon U \times U_H \to G, \quad (x,h) \mapsto \sigma(x)i(h)$$

是到 G的一个开子集上的微分同胚。提示：先证明对应的映射 $\mu\colon U\times H \to G$是局部微分同胚，然后证明对于某个适当的子集$V \subseteq U$（我们需要 $\sigma(V)^{-1}\sigma(V) \subseteq U_G$，其中 G 的某个 e-邻域 U_G 满足$U_G \cap H \subseteq U_H$），μ 在 $V \times H$ 上的限制是单射。

习题 9.5.3. 李群的每个李子群都是闭的。提示：习题 C.2.8。

习题 9.5.4. 设 J 是一个集合。对于一个元组 $x = (x_j)_{j\in J} \in (\mathbb{R}^+)^J$，我们定义

$$\sum_{j\in J} x_j := \sup\Big\{\sum_{j\in F} x_j\colon F \subseteq J \text{ finite}\Big\}.$$

证明

$$\ell^1(J,\mathbb{R}) := \Big\{x = (x_j)_{j\in J}\colon \sum_{j\in J}|x_j| < \infty\Big\}$$

关于范数 $\|x\|_1 := \sum_{j\in J}|x_j|$. 构成一个巴拿赫空间。定义 $e_j \in \ell^1(J,\ \mathbb{R})$ 为 $(e_j)_i = \delta_{ij}$。证明由 $\{e_j\colon\ j \in J\}$ 生成的子群 Γ 是离散的。

习题 9.5.5. 我们在 $\mathfrak{g} := \mathbb{R}^4$ 上定义一个李括号：

$$[x, y] := (x_3y_4 - x_4y_3, \sqrt{2}(x_3y_4 - x_4y_3), 0, 0).$$

证明：

(i) $\mathfrak{g}$ 是一个二步幂零李代数，其交换子代数为 $\mathbb{R}(1, \sqrt{2}, 0, 0)$。(ii) $\Gamma := \mathbb{Z}e_1 \dotplus \mathbb{Z}e_2$ 是群 $(x + y + \frac{1}{2}[x, y], *)$ 的离散子群，其中 $*$ 表示 BCH 乘积。(iii) 在李群 $G := (\mathfrak{g}, *)/\Gamma$ 中，换位子群 $[G, G]$ 是一维的，但其闭包是一个二维环面。

下面的习题表明，非闭换位子群可能是单李群。

习题 9.5.6。 设 $H := \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$ 表示 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的万有覆盖群，并回忆 $Z(H) \cong \mathbb{Z}$。设 $\gamma\colon Z(H) \to \mathbb{T}^2$ 是一个具有稠密像的单同态，并构造群

$$G := (\mathbb{T}^2 \times H)/D,$$

其中 $D := \{(\gamma(z), z)\colon z \in Z(H)\}$ 是 γ 的图。证明：

(i) G 是一个 5 维李群，其李代数为 $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$。(ii) G 的换位子群 $[G, G]$ 是 3 维且稠密。(iii) $[G, G] \cong H \cong \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{R})$。

第9章注释与评述

9.1: 子群的微分李代数$\mathbf{L}^d(H)$的定义参照$\mathbf{L}^d$由$\mathbf{L}^d$au56] 和 [vN29]提出的模型。

李群的齐性空间 G/H 在巴拿赫–李群的语境中发挥着尤为重要的作用 [Bel06], ，它们自然地作为巴拿赫–李群在巴拿赫代数的幂等元空间（广义格拉斯曼流形）和态空间中的轨道出现（例如参见 [CIJM19]）。

9.2: 在 [Rb97], 中，Robart 给出了一个判据，用于判断给定的单射态射 α: $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$ 是否存在局部指数积分子群。用我们的术语表述，该判据指出，李代数态射 α 可积为积分子群，当且仅当 $\mathfrak{h}$ 是 ad-可积的，并且 $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 可积为与 $H_{\mathrm{ad}} := \langle e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}} \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ 同构的局部指数李群。为了说明 Robart 的结果如何由我们的结果推出，我们注意到，如果 $\mathfrak{h}$ 是局部指数的，那么 $\mathfrak{h}$ 是稳定的，而根据可积性定理（定理 8.3.13），$\mathfrak{h}/\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ 可积到 H_{ad}。反过来，Robart 对 $\mathfrak{h}$ 的假设意味着 $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \mathbf{L}(H_{\mathrm{ad}})$ 是局部指数的，因此根据定理 15.4.19，其中心扩张 $\mathfrak{h}$ 也是局部指数的。因此，Robart 的假设等价于 $\mathfrak{h}$ 的局部指数性；我们在定理 9.2.4 中正是用这一性质来刻画积分子群。

巴拿赫–李代数单射到可扩张的李代数时自身也可扩张（推论 9.2.7），这一结果归功于 van Est 和 Korthagen（[EK64]）。对于巴拿赫–李群，$\mathbf{L}(G)$ 的闭李子代数存在积分子群，这一结果归功于 Maissen （ [Ms62, Satz 12.3] ）。

如果 G 是巴拿赫–李群，且 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 是一个闭可分子代数，那么积分子群 $H := \langle \exp \mathfrak{h} \rangle \subseteq G$ 满足以下结论

$$\mathbf{L}(H) = \{x \in \mathfrak{g} \colon \exp(\mathbb{R}x) \subseteq H\} = \mathfrak{h},$$

也就是说，$\exp \mathbb{R}x \subseteq H$ 意味着 $x \in \mathfrak{h}$ 是 [HoM98，第 5.52] 条定理。这里它是定理 9.2.13 的特殊情形，该定理也适用于非闭子代数和任意局部指数李群。

9.3： 在有限维情形下，根据 E. Cartan 的结果（[Ta14，第 3.1.7] 条定理），甚至还有定理 9.3.14 的一个局部版本。Tao 的专著 [Ta14] 是关于希尔伯特第五问题相关思想的一个非常优秀的参考文献；该问题实质上断言：作为有限维拓扑流形的拓扑群都是李群。与此密切相关的是：没有小子群的局部紧群是李群（参见 [HoM03]）。值得注意的是，对于 $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 的子群，也有类似的结果。根据 [Gh01，第 4.7]，条定理，该群的任何局部紧子群都是李群。**9.4：** 局部指数李群的商定理源于其巴拿赫版本（见推论 9.4.3 和 [GN03]）以及其向 BCH 李群的推广（[Gl02a]）。

9.5： 命题 9.5.1 仿照 [KM97, 38.7]。 C^k版本也见于 [NS13]的附录 B。

10 连续逆代数与线性李群

有限维李理论的许多特征，无需太多一般性的损失，就已经可以在矩阵群这一类对象中加以研究和发展。因此，完整矩阵群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 是有限维李群的关键例子，许多一般性结果都可以从 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 的子群的相应性质中推导出来（关于这种有限维李群研究方法，参见 [HiNe12] ）。矩阵群比抽象李群容易理解得多，因为它们更加具体。这得益于矩阵语境带来的若干简化：群嵌入在一个结合代数中，李括号是交换子括号，而指数映射由矩阵的指数级数给出。此外，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 上的流形结构可直接从 $M_n(\mathbb{R})$ 继承，因为它是一个开子集。

无限维李理论中自然的一类局部凸代数是连续逆代数（定义 1.3.7）。若一个含幺局部凸代数 $\mathcal{A}$ 的单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是开集，且求逆映射 $\mathcal{A}^\times \to \mathcal{A},\ a \mapsto a^{-1}$ 连续，则称其为连续逆代数（简称 cia）。

对于非含幺局部凸代数 $\mathcal{A}$，存在一个类似的概念，即连续拟逆代数（见定义 10.2.15）。我们将看到，$\mathcal{A}$ 具有后一性质，当且仅当其添幺化 $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$（如习题 5.1.5 所述）是连续逆代数（见命题 10.2.17）。

回到（含幺）连续逆代数，我们已从推论 1.3.8 知道，单位群 $\mathcal{A}^\times$ 上的求逆映射是光滑映射，因此 $\mathcal{A}^\times$ 具有自然李群结构。本章将仔细考察连续逆代数的单位群。尤其是，我们将证明

- 实连续逆代数 $\mathcal{A}$上的求逆映射是实解析的，因此 $\mathcal{A}^\times$ 实际上是一个解析李群（定理 10.1.15）。这一点首先对复连续逆代数加以验证，然后根据实连续逆代数 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 的复化是复连续逆代数这一事实推导得出。
- 若 $\mathcal{A}$ 是麦基完备的，则对巴拿赫代数的全纯函数演算作适当推广，便可得到解析指数函数和对数函数。我们由此推出 $\mathcal{A}^\times$ 是局部指数的，甚至是一个 BCH 李群（定理 10.1.15）。我们还讨论了正则性的充分条件。

在考察了单位群的李论性质之后，我们转向各类连续逆代数的例子。连续逆代数上的矩阵群是李群，这一事实源于如下基本观察：对任意连续逆代数 $\mathcal{A}$，矩阵代数 $M_n(\mathcal{A})$ 也是连续逆代数（命题 10.3.1）。本章最后讨论李群 G 在连续逆代数 $\mathcal{A}$上的连续作用所对应的光滑向量子代数 $\mathcal{A}^\infty$ 。主要结果是使 $\mathcal{A}^\infty$ 成为连续逆代数以及使其单位群具有正则性的充分准则（第 10.5 节）。

第 10 章的约定。 本章中，我们考虑基域为 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 的代数。所有讨论的代数都假定为结合 $\mathbb{K}$-代数。除非特别称为含幺代数，否则它们不一定有单位元。

10.1 连续逆代数的基本事实

下面的引理可由习题 10.7.3 推出，有时能简化验证给定的局部凸代数 $\mathcal{A}$ 是否为连续逆代数的过程。

引理 10.1.1。若 $\mathcal{A}$ 是含幺局部凸代数，且 $\mathcal{A}^\times$ 是单位元$\mathbf{1}$ 的一个邻域，并且求逆在 $\mathbf{1}$ 中连续，那么 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数。

例 10.1.2。（巴拿赫代数是连续逆代数）每个巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 都是连续逆代数。只需对含幺巴拿赫代数验证这一断言，因为若 $\mathcal{A}$ 是巴拿赫代数，则 $\mathcal{A}_+$ 也是巴拿赫代数。若 $\mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数，且 $x \in \mathcal{A}$ 满足 $\|x\| < 1$，则 $\mathbf{1} - x \in \mathcal{A}^\times$ 具有 $(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$。因此 $\mathcal{A}^\times$ 是一个$\mathbf{1}$-邻域，故为开集。此外，上述公式表明求逆在 $\mathbf{1}$ 中连续。这说明 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数（引理 10.1.1）。

如果 $\mathcal{A}$ 是弗雷歇空间，那么验证 CIA 性质就更容易了。在这种情况下，单位群 $\mathcal{A}^\times$ 的开性已经蕴含求逆的连续性。由于弗雷歇空间的开子集 $\mathcal{A}^\times$ 是完全可度量化的，这可由下面的引理得出。

引理 10.1.3。设 G 是一个完备度量空间群，并假设乘法分别连续。那么G 中的求逆是连续的。

证明。 ([Wa71, 第 115] 页) 设 d 为 G上的度量。我们证明， $x_n \to e$蕴含存在一个满足 $x_{n_k}^{-1} \to e$的子序列。这个子序列将通过归纳法选取。任取 $n_1 \in \mathbb{N}$。令 $k \in \mathbb{N}$，并假设 $n_1, \ldots, n_k$已选定。令 $y_j := x_{n_j}$且 $p_k := y_1 \cdots y_k$。由于 $x_n \to e$，我们可以选取 $n_{k+1} > n_k$ ，使得

$$d(p_k, p_{k+1}) < 2^{-k-1} \text{ and } d(p_k y_s^{-1}, p_{k+1} y_s^{-1}) < 2^{-k-1} \text{ for all } s \in \{1, \ldots, k\},$$

其中令 $y_{k+1} := x_{n_{k+1}}$ 且 $p_{k+1} := p_k y_{k+1}$。对于每个 k，只需满足有限个条件；当 n_{k+1} 充分大时，这些条件都成立。这里我们用到了 G中的乘法是分别连续的。

令 $p := \lim_k p_k$ 且 $q_s := \lim_k p_k y_s^{-1}$。这些极限的存在性源于 G的完备性，因为我们的选取确保两个序列都是柯西序列。对于所有满足 $s \le k$的 $s, k \in \mathbb{N}$，现在有

$$d(p, p_k) < 2^{-k} \quad \text{and} \quad d(q_s, p_k y_s^{-1}) < 2^{-k}.$$

此外，

$$\begin{aligned} d(p, q_s) &\le d(p, p_s y_s^{-1}) + d(p_s y_s^{-1}, q_s) \\ &= d(p, p_{s-1}) + d(p_s y_s^{-1}, q_s) < 2^{-s+1} + 2^{-s} < 2^{-s+2}, \end{aligned}$$

因此，对于 $s \to \infty$，有 $q_s \to p$。注意，由于乘法分别连续，$q_s = p y_s^{-1}$。这表明 $y_s^{-1} = p^{-1}(p y_s^{-1}) = p^{-1} q_s \to p^{-1} p = e.$ □

命题 10.1.4。设 $\mathcal{A}$ 是一个 *Fr´echet* 空间上的含幺拓扑代数。若单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是开集，则求逆映射 $\iota\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}$ 连续，因此 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数。

证明。由于 $\mathcal{A}^\times$ 是 Fr´echet 空间 $\mathcal{A}$的开子集，其拓扑可由一个完备度量定义。因此，结论由引理 10.1.3 得出。

□

定义 10.1.5。设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数，并记 $\mathcal{A}[[t]]$ 为系数取自 $\mathcal{A}$ 的形式幂级数代数。我们通过双射 $\mathcal{A}[[t]]\mathcal{A}[[t]] \to \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}, \sum_{n=0}^\infty a_n t^n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$ 为 $\mathcal{A}[[t]]$ 定义拓扑。于是，关于乘积，$\mathcal{A}[[t]]$ 是一个局部凸拓扑代数

$$\Big(\sum_n a_n t^n\Big) * \Big(\sum_m b_m t^m\Big) := \sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{j+k=n} a_j b_k\Big) t^n.$$

命题 10.1.6。$\mathcal{A}[[t]]$ 是一个连续逆代数，其单位群为 $\mathcal{A}[[t]]^\times = \mathcal{A}^\times + t\mathcal{A}[[t]].$

证明。显然，$\mathcal{A}^\times$ 包含于 $\mathcal{A}[[t]]$ 的单位群中。为了证明每个形如 $a + tb$, $a \in \mathcal{A}^\times$ 的元素都可逆，我们注意到 $a + tb = a(\mathbf{1} + ta^{-1}b)$，并且对每个 $c \in \mathcal{A}$，几何级数 $\sum_{n=0}^\infty t^n c^n$ 收敛到 $\mathbf{1} - tc$ 的逆映射。这说明 $\mathcal{A}[[t]]$ 的单位群是开集。

为了看出求逆映射 $\eta_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A}[[t]]^\times \to \mathcal{A}[[t]]$ 是连续的，我们将其写成 $\eta_{\mathcal{A}}(a) = \sum_n \eta_{\mathcal{A}}(a)_n t^n$。我们必须证明每个映射

$$\eta_{\mathcal{A}}(a)_n\colon \mathcal{A}[[t]]^\times \to \mathcal{A}$$

是连续的。我们通过归纳法进行论证：映射 $\eta_{\mathcal{A}}(a)_0 = a_0^{-1}$ 是连续的，因为 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数。现在令 $n > 0$，并假设对于$m < n$，$\eta_{\mathcal{A}}(a)_m$ 是连续的。接着，我们使用 $\eta_{\mathcal{A}}(a)a = \mathbf{1}$ 推导出

$$\eta_{\mathcal{A}}(a)_n a_0 + \eta_{\mathcal{A}}(a)_{n-1} a_1 + \ldots + \eta_{\mathcal{A}}(a)_0 a_n = 0,$$

由此得到

$$\eta_{\mathcal{A}}(a)_n = -(\eta_{\mathcal{A}}(a)_{n-1} a_1 + \ldots + \eta_{\mathcal{A}}(a)_0 a_n) a_0^{-1},$$

这表明 $\eta_{\mathcal{A}}(a)_n$ 是连续的。因此 $\mathcal{A}[[t]]$ 是一个连续逆代数。 □

注 10.1.7. 子群 $U := \mathbf{1} + t\mathcal{A}[[t]] \subseteq \mathcal{A}[[t]]$ 是原幂零的。它是幂零群 $U_n := U/(\mathbf{1} + t^n \mathcal{A}[[t]]) \subseteq \mathcal{A}[t]/(t^n)$的射影极限。

下面考虑一种更一般的情形。设 $\mathcal{B}$ 是一个含幺结合代数，配备滤过$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足

$$F_0 = \mathcal{B} \quad \text{and} \quad \bigcap_n F_n = \{0\}.$$

那么关系 $F_n F_m \subseteq F_{n+m}$ 意味着每个 F_n 都是 $\mathcal{B}$的理想。

命题 10.1.8.如果所有商代数 $\mathcal{B}_n := \mathcal{B}/F_n$ 都是连续逆代数，且连接映射 $\varphi_{m,n}\colon \mathcal{B}_n \to \mathcal{B}_m$, $m \le n$是商映射，那么$\mathcal{B} := \varprojlim \mathcal{B}/F_n$ 是一个连续逆代数。

证明。 理想 $F_1/F_n \subseteq \mathcal{B}_n$ 是幂零的，因为该理想中元素的所有 n 重乘积都为零。因此， $\mathcal{B}_n$ 的单位群包含 F_1/F_n。注意，$\ker(\varphi_{m,n}) = F_m/F_n$。于是，$\varphi_{1,n}$ 诱导出一个同态 $(\mathcal{B}_n)^\times \to (\mathcal{B}_1)^\times$，其核为 $\mathbf{1} + F_1/F_n$。由于 $\varphi_{1,n}$ 是商映射，它将$\mathcal{B}_n^\times$映到 $\mathcal{B}_1^\times$ 的一个开子群上，因此 $(\mathcal{B}_n^\times)_0$ 到 $(\mathcal{B}_1^\times)_0$。我们得出结论:

$$\varphi_{1,n}^{-1}((\mathcal{B}_1^\times)_0) = (\mathcal{B}_n^\times)_0.$$

设 $(b_n) \in \widehat{\mathcal{B}}$，其中 $b_1 \in (\mathcal{B}_1^\times)_0$。那么，$\varphi_{1,n}(b_n) = b_1$ 意味着 $b_n \in (\mathcal{B}_n^\times)_0$ 可逆，因此序列 (b_n) 在乘积代数 $\prod_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{B}_n$ 中可逆。接着，$\varphi_{m,n}(b_n^{-1}) = b_m^{-1}$ 意味着 $(b_n^{-1}) \in \widehat{\mathcal{B}}$，从而$\widehat{\ }$意味着$(b_n)$ 在 $\mathcal{B}$ 中可逆。我们得出结论:

$$\widehat{\mathcal{B}}^\times \supseteq \varphi_1^{-1}((\mathcal{B}_1^\times)_0),$$

$\widehat{\ }$使得 $\mathcal{B}^\times$ 是 $\mathbf{1}$ 的一个邻域，因此是开集。 $\mathcal{B}$ 中求逆映射的连续性 $\widehat{\ }$ 可由代数 $\mathcal{B}_n$ 中求逆映射的连续性得出。□

例 10.1.9. 设 $\mathcal{B} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 是由 n 个生成元生成的自由结合代数。那么 $\mathcal{B}$ 具有自然的滤过

$$F_n := \operatorname{span}\{s_1 \cdots s_m \colon s_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}, m \ge n\},$$

由 $\mathcal{B}$ 的次数分次定义。每个商 $\mathcal{B}_m := \mathcal{B}/F_m$ 都是有限维的，因此是一个连续逆代数。因此，代数 $\mathcal{B} := \varprojlim \mathcal{B}_n$（可识别为由生成元 $x_1, \ldots, x_n$ 构成的非交换形式幂级数代数）是一个连续逆代数（命题 10.1.8）。

命题 10.1.10。若 $\mathcal{A}$ 是麦基完备的复连续逆代数，且 $a \in \mathcal{A}$，则

$$\operatorname{Spec}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon a - \lambda \mathbf{1} \notin \mathcal{A}^\times\}$$

是 $\mathbb{C}$ 的一个非空紧子集，且预解式

$$r_a \colon \mathbb{C} \setminus \operatorname{Spec}(a) \to \mathcal{A}, \quad \lambda \mapsto (\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}$$

是全纯的。

证明。由于 $\mathcal{A}^\times$ 是开集，当 $\lambda \in \mathbb{C}$ 充分大时，$\lambda^{-1}a - \mathbf{1} \in \mathcal{A}^\times$，因此 $\lambda \notin \operatorname{Spec}(a)$。这表明 $\operatorname{Spec}(a)$ 是有界的。$\operatorname{Spec}(a)$ 是闭集，这是由 $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^\times$ 的闭性以及映射$\mathbb{C} \to \mathcal{A}, \lambda \mapsto a - \lambda\mathbf{1}$的连续性得出的。剩下只需验证 $\operatorname{Spec}(x) \neq \emptyset$。假设 $\operatorname{Spec}(x)$ 为空。那么预解式

$$r_a \colon \mathbb{C} \to \mathcal{A}, \quad r_a(\lambda) := (\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}$$

根据命题 1.3.6 是一个全纯映射。对于 $\lambda \neq 0$，有 $r_a(\lambda) = \lambda^{-1}(\mathbf{1} - \lambda^{-1}a)^{-1}$，其中第二个因子在 $\lambda \to \infty$时趋于$\mathbf{1}$。因此 r有界，于是刘维尔定理导出荒谬的结论：r 是常数。□

引理 10.1.11. 设 $\mathcal{A}$ 是一个复连续逆代数，$a \in \mathcal{A}$ 是 $U \subseteq \mathbb{C}$ 中 *Spec()* 的一个邻域。那么存在 B 中 a 的一个邻域 $\mathcal{A}$，使得对所有 $b \in B$，均有 $\operatorname{Spec}(b) \subseteq U$。

证明。对于某个 $r > 0$，我们有 $\operatorname{Spec}(a) \subseteq \mathbb{D}_r^0$。于是

$$\operatorname{Spec}(za) = z \operatorname{Spec}(a) \subseteq \mathbb{D}_1^0 \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{D}_{1/r},$$

由此 $\mathbf{1} - za \in \mathcal{A}^\times$。因此

$$\{(z\mathbf{1} - a)^{-1} = z^{-1}(\mathbf{1} - z^{-1}a)^{-1} \colon |z| \geq r\} \subseteq \mathbb{D}_{1/r}\{(\mathbf{1} - za)^{-1} \colon z \in \mathbb{D}_{1/r}\}$$

是 $\mathcal{A}$ 的一个相对紧子集。此外，$\{(z\mathbf{1} - a)^{-1} \colon z \in (\mathbb{C} \setminus U) \cap \mathbb{D}_r\}$ 是紧的。因此

$$C := \{(z\mathbf{1} - a)^{-1} \colon z \in \mathbb{C} \setminus U\}$$

在 $\mathcal{A}$ 中相对紧。存在一个零邻域 $Y \subseteq \mathcal{A}$，使得 $CY \subseteq \mathbf{1} - \mathcal{A}^\times$，因而 $\mathbf{1} - CY \subseteq \mathcal{A}^\times$。令 $B := a + Y$。若 $b \in B$，则对某个 $y \in Y$ 有 $b = a + y$。若 $z \in \mathbb{C} \setminus U$，则

$$z\mathbf{1} - b = z\mathbf{1} - a - y = (z\mathbf{1} - a)(\mathbf{1} - (z\mathbf{1} - a)^{-1}y) \in \mathcal{A}^\times(\mathbf{1} - CY) \subseteq \mathcal{A}^\times,$$

由此得出 $z \notin \operatorname{Spec}(b)$。因此 $\operatorname{Spec}(b) \subseteq U$。 □

命题 10.1.12。若 $\mathcal{A}$ 是复连续逆代数，则求逆映射 $\iota \colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times, a \mapsto a^{-1}$ 是复解析的。

证明。若 $\mathcal{A}$是复连续逆代数，则 ι 是光滑的（推论 1.3.8），且

$$d\iota(x;y) = -x^{-1}\,y\,x^{-1} \quad \text{for} \quad x \in \mathcal{A}^\times, y \in \mathcal{A}, \tag{10.1}$$

这表明 $d\iota(x;\cdot)$ 是复线性的。根据定理 2.1.12，映射 ι 是复解析的。□

命题 10.1.13.若 $\mathcal{A}$ 是实连续逆代数，则其复化 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 也是连续逆代数，且求逆映射$\iota\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times$ 是实解析的。

证明。由于 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数，我们可以找到一个开单位元邻域 $U \subseteq \mathcal{A}^\times$ 和一个开零邻域 $V \subseteq \mathcal{A}$，使得对所有 $a \in U$、$b \in V$，都有$\mathbf{1} + (a^{-1}b)^2 \in \mathcal{A}^\times$。对于 a, b，如前所述，我们有

$$a + ib = a(\mathbf{1} + ia^{-1}b) \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}},$$

其中 a 可逆。我们断言 $\mathbf{1}+ia^{-1}b$ 也可逆。简记$c := a^{-1}b$，注意到 $\mathbf{1} + ic$ 与 $\mathbf{1} - ic$ 可交换，因此 $\mathbf{1} + ic$ 也与 $\mathbf{1} + c^2 = (\mathbf{1} + ic)(\mathbf{1} - ic)$ 及其逆映射可交换。现在

$$(\mathbf{1} + ic)(\mathbf{1} + c^2)^{-1}(\mathbf{1} - ic) = (\mathbf{1} + c^2)^{-1}(\mathbf{1} - ic)(\mathbf{1} + ic) = \mathbf{1}$$

表明 $(\mathbf{1} + c^2)^{-1}(\mathbf{1} - ic)$ 是 $\mathbf{1} + ic$ 的逆映射。我们已经证明开集 $U + iV$ 包含于 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^\times$，并且

$$(a + ib)^{-1} = (\mathbf{1} + (a^{-1}b)^2)^{-1}(\mathbf{1} - ia^{-1}b)a^{-1} \quad \text{for all } (a, b) \in U \times V,$$

它关于 $(a,\ b)$ 连续变化。根据引理 10.1.1，$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 是连续逆代数，因此，根据命题 10.1.12，$(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^\times$ 上的求逆是复解析的。因此，求逆映射 $\iota\colon \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times$ 有一个复解析延拓，延拓后的映射定义在 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 的开子集之间，这意味着 ι 是实解析映射。□

引理 10.1.14。设 $\mathcal{A}$ 是复连续逆代数，且 $W \subseteq \mathcal{A}$ 是一个平衡开0邻域，使得 $\mathbf{1} + W \subseteq \mathcal{A}^\times$。那么，对所有 $x \in W$，都有$(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$。

证明。给定 $x \in W$，有 $B_r(0)x \subseteq W$，其中存在某个 $r > 1$，且 $B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ 是以 0 为中心、半径为 r 的开圆盘。我们考虑复解析函数

$$f\colon B_r(0) \to \mathcal{A}, \quad f(z) := (\mathbf{1} - zx)^{-1}.$$

由 (10.1) 可得 $f'(z) = -(\mathbf{1}-zx)^{-1}(-x)(\mathbf{1}-zx)^{-1} = x f(z)^2$。通过简单的归纳法可得 $f^{(n)}(z) = n!\cdot x^n \cdot f(z)^{n+1}$对所有 $n \in \mathbb{N}_0$均成立。由于我们可以将 f 视为取值于 $\mathcal{A}$ 的完备化中的复解析函数，推论 2.1.6 表明

$$(\forall z \in B_r(0)) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n x^n,$$

因此 $(\mathbf{1} - x)^{-1} = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 尤其如此。 □

定理 10.1.15。如果 $\mathcal{A}$ 是 *Mackey* 完备连续逆代数，那么其单位群 $\mathcal{A}^\times$是解析李群，且其指数函数在局部上是双解析的。尤其是， $\mathcal{A}^\times$ 是 *BCH* 李群。

证明。 $\mathcal{A}^\times$ 上的乘法是解析的，这是由它的双线性得出的；而求逆的解析性则由命题 10.1.13 得出。进而可得到 Neumann 级数展开（$\mathbf{1}-x$）$^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ （引理 10.1.14）。这表明 $\mathcal{A}^\times$ 是一个解析李群。

由例 7.1.4 可知， $\mathcal{A}^\times$ 是局部指数的，其指数函数 exp: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}^\times$是解析的。同样，函数演算在开星形子集上给出

$$U:=\{a\in\mathcal{A}\colon\ \mathrm{Spec}(a)\cap]-\infty,0]=\emptyset\}\subseteq\mathcal{A}^\times$$

一个解析对数函数 log: $U\to\mathcal{A}$ （参见定义 10.7.10）。最后，引理 10.7.11 表明 $\exp_{\mathcal{A}}$ 是局部双解析的。

由定理 15.7.1 可知，这意味着 $\mathcal{A}^\times$ 是 BCH 的。 □

注 10.1.16。我们在 [Ne08] 中看到，对于任意连续逆代数 $\mathcal{A}$，幂等元集合 Idem($\mathcal{A}$) 具有自然流形结构。相应右理想的集合 Gr($\mathcal{A}$) :={$p\mathcal{A}$: $p\in$ Idem($\mathcal{A}$)} 称为 $\mathcal{A}$ 的格拉斯曼流形（参见 [DEG98、DG01]）。当 $\mathcal{A}$ 是巴拿赫代数时，它具有自然流形结构这一事实已在 [DG01]，中得到证明，而连续逆代数的一般情形则由 [BerN05] 得出。

如果 E 是右 $\mathcal{A}$-模，那么 Emb($E,\mathcal{A}$) $\subseteq$Hom$_{\mathcal{A}}$($E,\mathcal{A}$) 称为相应的*Stiefel* 流形。如果 $E=p\mathcal{A}$ 是射影右理想，那么 Hom$_{\mathcal{A}}$($E,\mathcal{A}$) $\cong$Hom$_{\mathcal{A}}$($p\mathcal{A},\mathcal{A}$) $\cong\mathcal{A}p$, 而 Emb($E,\mathcal{A}$) 对应于满足以下条件的元素集合： $x\in\mathcal{A}p$ 对于这些元素， λ_x: $p\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个嵌入；也就是说， $xa=xpa=0$ 蕴含 $a\in(\mathbf{1}-p)\mathcal{A}$。

10.2 映射代数与芽代数

紧拓扑空间上的连续函数代数 $C(K,\ \mathbb{C})$，赋予上确界范数后，是巴拿赫代数的一个典型例子。同样，许多以 $\mathbb{C}$ 或给定的连续逆代数为值的函数空间，都是连续逆代数的例子。相关的例子还有定义在一点或紧集附近的函数芽代数。

在下一个引理中，我们在 X 上连续的 $\mathcal{A}$ 值函数代数 $C(X,\ \mathcal{A})$ 上赋予紧开拓扑；该拓扑与在 X 的紧子集上一致收敛的拓扑相同（见引理 A.6.24(b)）。

引理 10.2.1。设 $\mathcal{A}$ 是一个局部凸代数， X 是一个拓扑空间。则有以下结论：

(a) $C(X,\mathcal{A})$ 是一个局部凸代数。

(b) 若 $\mathcal{A}$ 含幺，且 $\mathcal{A}$ 中的求逆运算连续，则 $C(X,\mathcal{A})^\times = C(X,\mathcal{A}^\times)$，并且 $C(X,\mathcal{A})$ 中的求逆运算连续。(c) 若 X 紧且 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数，则 $C(X,\mathcal{A})$ 是一个连续逆代数。

证明。 (a) 根据引理 A.6.24(g)， $C(X,\mathcal{A})$ 是一个局部凸空间。令μ: $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 为代数乘法，它是连续的。对于$j\in\{1,2\}$，令 pr_j: $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}, (x_1,x_2)\mapsto x_j$为到第 j个分量的投影。根据引理 A.6.7，映射

$$\Phi\colon C(X,\mathcal{A}\times\mathcal{A})\to C(X,\mathcal{A})\times C(X,\mathcal{A}),\quad f\mapsto(\mathrm{pr}_1\circ f,\mathrm{pr}_2\circ f)$$

是一个同胚。 $C(X,\mathcal{A})$ 上的代数乘法定义为$C(X,\mu)\circ\Phi^{-1}$，因此根据引理 A.6.3，它是连续的。

(b) 若 $f\in C(X,\mathcal{A})^\times$，则每个值 $f(x)$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的单位元。反之，若$f(X)\subseteq\mathcal{A}^\times$，则 $\mathcal{A}$ 中求逆映射的连续性意味着函数 $X\to\mathcal{A}, x\mapsto f(x)^{-1}$ 是连续的。因此 $C(X,\mathcal{A})^\times = C(X,\mathcal{A}^\times)$。由于$\iota\colon\mathcal{A}^\times\to\mathcal{A}, a\mapsto a^{-1}$ 是连续的，映射也

$$C(X,\iota)\colon C(X,\mathcal{A}^\times)\to C(C,\mathcal{A}),\quad f\mapsto\iota\circ f$$

由引理 A.6.3 可知是连续的；这就是求逆映射。

(c) 由 (b) 可知， $C(X,\mathcal{A})$ 中的求逆是连续的。若 X 是紧的，则$C(X,\mathcal{A}^\times) = \lfloor X,\mathcal{A}^\times\rfloor$ 在 $C(X,\mathcal{A})$ 中是开的，因此 $C(X,\mathcal{A})$ 是一个连续逆代数。□

引理 10.2.2。 设 M 是一个局部凸流形， $r\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 $\mathcal{A}$是一个局部凸代数。那么以下断言成立：

(a) $C^r(M,\mathcal{A})$ 是一个局部凸代数。(b)若 $\mathcal{A}$ 是含幺的，且 $\mathcal{A}$ 中的求逆是连续的，则

$$C^r(M,\mathcal{A})^\times = \{f\in C^r(M,\mathcal{A})\colon f(M)\subseteq\mathcal{A}^\times\}$$

并且 $C^r(M,\mathcal{A})$ 中的求逆是连续的。

(c) 若 M 是紧的且 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数，则 $C^r(M,\mathcal{A})$也是如此。

证明。(a) 由引理 A.6.24 中的 (f) 和 (g)， $C^r(M,\mathcal{A})$ 是一个局部凸空间。令 μ: $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 为代数乘法，它是连续且双线性的，因而是光滑的。对于 $j\in\{1,2\}$，令 $\mathrm{pr}_j\colon\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}, (x_1,x_2)\mapsto x_j$ 为到第 j 个分量的投影。由引理 4.1.7，映射 $\Phi\colon C^r(M,\mathcal{A}\times\mathcal{A})\to C^r(M,\mathcal{A})\times C^r(M,\mathcal{A}), f\mapsto(\mathrm{pr}_1\circ f, \mathrm{pr}_2\circ f)$ 是一个同胚。 $C^r(M,\mathcal{A})$ 上的代数乘法由 $C^r(M,\mu)\circ\Phi^{-1}$ 给出，因此根据引理 4.1.4(b)，它是连续的。

(b) 若 $f\in C^r(M,\mathcal{A})^\times$，则每个值 $f(x)$ 都是 $\mathcal{A}$ 中的单位元。反之，若 $f(M)\subseteq\mathcal{A}^\times$，则 $\mathcal{A}$ 中求逆的光滑性意味着函数 $M\to\mathcal{A}, x\mapsto f(x)^{-1}$ 是 C^r。因此， $C^r(M,\mathcal{A})^\times = C^r(M,\mathcal{A}^\times)$。由于 $\iota\colon\mathcal{A}^\times\to\mathcal{A}, a\mapsto a^{-1}$ 是光滑的，根据引理 4.1.4(b)，映射 $C^r(M,\iota)\colon C^r(M,\mathcal{A}^\times)\to C^r(M,\mathcal{A}), f\mapsto\iota\circ f$ 是连续的；这就是求逆映射。

(c) 根据 (b)， $C^r(M,\mathcal{A})$ 中的求逆是连续的。若 M 是紧的，则$C^r(M,\mathcal{A}^\times) = \lfloor M,\mathcal{A}^\times\rfloor$是 $C^r(M,\mathcal{A})$ 的开子集（其拓扑比紧开拓扑更精细），因此 $C^r(M,\mathcal{A})$ 是一个连续逆代数。□

定义 10.2.3. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为含幺代数。若含幺代数同态 $\varphi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 等谱，则称其为

$$\varphi^{-1}(\mathcal{B}^\times)=\mathcal{A}^\times.$$

注意，$\mathcal{A}^\times\subseteq\varphi^{-1}(\mathcal{B}^\times)$ 始终成立。连续等谱态射有时可用于验证单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是开集：如果 φ 连续且等谱，并且 $\mathcal{B}^\times$ 是开集，那么 $\mathcal{A}^\times$ 也是开集。

例 10.2.4。设 X 是一个局部紧空间，并考虑连续包含映射

$$\eta\colon C_c(M,\mathbb{C})\to C_0(M,\mathbb{C})$$

显然，这可延拓为一个连续同态

$$\eta_+\colon C_c(M,\mathbb{C})_+=C_c(M,\mathbb{C})+\mathbb{C}1\to C_0(M,\mathbb{C})_+=C_0(M,\mathbb{C})+\mathbb{C}1.$$

于是 η_+ 是等谱的，因此 $C_c(M,\ \mathbb{C})_+^\times=\eta_+^{-1}(C_0(M,\ \mathbb{C})_+^\times)$ 是开集。

例 10.2.5。设 M 是一个 σ-紧致光滑流形。如果 M 不是紧的，那么它具有无界光滑函数 f。于是 f 在 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 中具有无界谱，因此 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 不是连续逆代数（命题 10.1.10）。然而，我们断言

$$C_0^\infty(M,\mathbb{R}):=C^\infty(M,\mathbb{R})\cap C_0(M,\mathbb{R})$$

相对于由嵌入到乘积空间 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})\times C_0(M,\ \mathbb{R})$ 所诱导的拓扑，它是一个连续拟逆代数。

事实上，我们首先利用引理 10.2.2(2) 得知包含映射

$$C_0^\infty(M,\mathbb{R})_+\hookrightarrow C_0(M,\mathbb{R})_+$$

是等谱的。因此，单位群在 $C_0^\infty(M,\ \mathbb{R})_+$ 中的开性可由包含映射的连续性推出。求逆映射的连续性是 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 和 $C_0(M,\ \mathbb{R})$ 中相应连续性的结果（引理 10.2.2）。最后，乘法的连续性可由 $C_0(M,\ \mathbb{R})$ 和 $C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 中乘法的连续性推出。

引理 10.2.6。对于代数 $\mathcal{A}$ 上的半范数 $q\colon\ \mathcal{A}\to[0,\infty[$，以下条件等价：

(a) q 是次乘性的，即 $q(xy)\le q(x)q(y)$ 对所有 x、$y\in\mathcal{A}$ 都成立；
(b) $\overline{B}_1^q(0)\overline{B}_1^q(0)\subseteq\overline{B}_1^q(0)$。

证明。蕴含关系 (a)⇒(b) 显然。若 (b) 成立，则由引理 B.11.1 可知 (a) 也成立。□

如果 $\mathcal{A}$ 上的半范数 q_1 和 q_2 是次乘性的，那么它们的逐点最大值 $q\colon \mathcal{A}\to[0,\infty[,\ x\mapsto\max\{q_1(x),\ q_2(x)\}$ 也是次乘性的。

定义 10.2.7。不一定是豪斯多夫的局部凸拓扑代数 $\mathcal{A}$ 称为局部 m-凸 （或局部乘法凸），如果其局部凸向量拓扑可以由 $\mathcal{A}$ 上的一组次乘性半范数 Γ 定义。

注 10.2.8. 局部 m-凸含幺拓扑代数的单位群不一定是开集。例如， $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 是局部 m-凸的（对每个紧子集 $K\subseteq\mathbb{R}$，半范数 $f\mapsto\|f|_K\|_\infty$ 都是次乘性的），但 $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 的单位群不是开集。

局部 m-凸性可传递到可数巴拿赫代数直系统的局部凸归纳极限（见 [AkN96], [DW97]）。我们证明一个特殊情形。

定理 10.2.9. 设 $(\mathcal{A}_n,\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列含幺巴拿赫代数，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\mathcal{A}_n\subseteq\mathcal{A}_{n+1}$，且包含映射 $\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}_{n+1}$ 是连续的含幺代数同态。在 $\mathcal{A}:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ 上赋予唯一的含幺代数结构，使得每个包含映射 $\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}$ 都是含幺代数同态。则下述结论成立。

(a) 局部凸归纳极限拓扑 $\mathcal{O}$ 使 $\mathcal{A}=\varinjlim\mathcal{A}_n$ 成为一个不一定是豪斯多夫的局部凸拓扑代数，其单位群是开集，且求逆映射 $\iota\colon\mathcal{A}^\times\to\mathcal{A}$连续。(b) 若 $\mathcal{O}$ 是豪斯多夫的，则$(\mathcal{A},\mathcal{O})$ 是一个连续逆代数。(c) 若每个包含映射 $\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}_{n+1}$ 的算子范数均为 ≤ 1，则$(\mathcal{A},\mathcal{O})$ 是局部 m-凸的。

证明。 对于 $n\leq m$，令$c_{m,n}$ 表示包含映射 $\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}_m$的算子范数。(a) 为了说明 $\mathcal{A}$ 的代数乘法在 (0,0) 处连续，因而处处连续，取一个零邻域 $U\subseteq\mathcal{A}$ 。那么

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0)\subseteq U$$

对于某个正实数序列 $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$，有 s_k。对于 $2\leq k\in\mathbb{N}$，令 M_k为所有满足 $\max\{a,b\}=k$且 $a\neq b$的 $(a,b)\in\mathbb{N}^2$的集合。递归地，我们找到一个正实数序列 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得对每个 $k\in\mathbb{N}$,

(i) $r_k^2<s_k/2$ 成立，且 (ii) 如果 $k\geq 2$，则 $r_k\sum_{(a,b)\in M_k}c_{k,\min\{a,b\}}r_{\min\{a,b\}}<s_k/2$。

那么， $V:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}B_{r_k}^{\mathcal{A}_k}(0)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个零邻域，我们证明 $VV\subseteq U$。令 $n\in\mathbb{N}$ 和 x_k， $y_k\in B_{r_k}^{\mathcal{A}_k}(0)$，其中 $k\in\{1,\ldots,n\}$。那么

$$(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\max\{(a,b)=k}x_ay_b,$$

对于 $(a,\ b),\ \in \mathbb{N}^2$。将 w_k 记作内和。那么 $w_k \in B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0)$（如所需）。事实上，$\|w_1\|_1 = \|x_1y_1\|_1 \le \|x_1\|_1\|y_1\|_1 \le r_1^2 < s_1/2 \le s_1$。对于$k \in \{2,\dots,n\}$,

$$\|w_k\|_k \le \|x_ky_k\|_k + \sum_{(a,b)\in M_k} \|x_ay_b\|_k < s_k/2 + s_k/2 = s_k$$

由 (i) 和 (ii)，因为 $\|x_k\|_k\|y_k\|_k \le r_k^2$ and

$$\|x_ay_b\|_k \le \|x_a\|_k\|y_b\|_k \le c_{k,\min\{a,b\}}\|x_a\|_a\|y_b\|_b \le r_k\, c_{k,\min\{a,b\}} r_{\min\{a,b\}}.$$

Thus

$$(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n) \in \sum_{k=1}^{n} B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0) \subseteq U.$$

现在证明 $\mathcal{A}^\times$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个 **1**-邻域，且 ι 在 **1** 处连续。于是，根据引理 10.1.1，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的开集，且 ι 连续。为此，设$U \subseteq \mathcal{A}$ 是一个 **1**- 邻域。那么，对于某个正实数序列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$，有$\mathbf{1} + \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0) \subseteq U$。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$C_n := 1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k}s_k.$$

设 $\varepsilon_n := \frac{s_n}{C_n}$ 和 $\delta_n := \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$; 于是

$$\varepsilon_n C_n \le s_n \quad \text{and} \quad \frac{1}{1-\delta_n} - 1 \le \varepsilon_n.$$

最后，设 $r_n := \delta_n/C_n$ 和

$$V_n := \mathbf{1} + B_{r_1}^{\mathcal{A}_1}(0) + \cdots + B_{r_n}^{\mathcal{A}_n}(0).$$

那么 $C_n \ge 1$、$\delta_n \in]0,1[$, 和 $r_n \in]0,1[$。我们断言

$$V_n \subseteq \mathcal{A}_n^\times$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和

$$V_n^{-1} \subseteq \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{n} B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0). \tag{10.2}$$

如果这是真的，那么

$$V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = \mathbf{1} + \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} B_{r_n}^{\mathcal{A}_n}(0)$$

是 $\mathcal{A}$ 中包含于 $\mathcal{A}^\times$ 和 $V^{-1} \subseteq U$ 的一个开**1**-邻域，因此 $\mathcal{A}^\times$ 是一个**1**-邻域，且 ι 在**1**处连续。

我们用归纳法证明该断言。若 $n=1$，则 $C_1=1$, $\varepsilon_1=s_1$，且$r_1=\delta_1$。由于 $r_1\in]0,1]$，对于每个 $a\in V_1\subseteq B_{r_1}^{\mathcal{A}_1}(0)\subseteq B_1^{c\mathcal{A}_1}(0)$，我们有$a\in\mathcal{A}_1^\times$且

$$\|a^{-1}-\mathbf{1}\|_1\leq\sum_{k=1}^{\infty}\|a^k\|_1<\frac{1}{1-r_1}-1=\varepsilon_1=s_1$$

（利用诺伊曼级数），由此可得（10.2）。若 $n\geq 2$ 成立，且将 n替换为 $n-1$时该断言仍成立，令 $x_k\in B_{r_k}^{\mathcal{A}_k}(0)$取 $k\in\{1,\ldots,n\}$。那么

$$a:=\mathbf{1}+x_1+\cdots+x_{n-1}\in V_{n-1}\subseteq\mathcal{A}_{n-1}^\times$$

且 $a^{-1}\in\mathbf{1}+\sum_{k=1}^{n-1}B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0)$，由此可得 $\|a^{-1}\|_n<C_n$。因此

$$\|a^{-1}x_n\|_n<C_nr_n\leq\delta_n<1,$$

这表明 $\mathbf{1}-a^{-1}x_n\in\mathcal{A}_n^\times$和

$$\|(\mathbf{1}-a^{-1}x_n)^{-1}-\mathbf{1}\|_n\leq\frac{1}{1-\|a^{-1}x_n\|_n}-1<\frac{1}{1-\delta_n}-1\leq\varepsilon_n=\frac{s_n}{C_n}.$$

因此，$a+x_n=a(\mathbf{1}+a^{-1}x_n)\in\mathcal{A}_n^\times$并且

$$\begin{aligned}(a+x_n)^{-1}&=(\mathbf{1}-a^{-1}x_n)^{-1}a^{-1}\\&=((\mathbf{1}-a^{-1}x_n)^{-1}-\mathbf{1})a^{-1}+a^{-1}\in B_{s_n}^{\mathcal{A}_n}(0)+V_{n-1}=V_n\end{aligned}$$

因为 $a^{-1}\in V_{n-1}$ 可由归纳法得出，且 $\|((\mathbf{1}-a^{-1}x_n)^{-1}-\mathbf{1})a^{-1}\|_n<\frac{s_n}{C_n}C_n=s_n$。(b) 是 (a) 的直接推论。

(c) 若 $U\subseteq\mathcal{A}$ 是一个零邻域，则对于某个正实数序列 $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s_k，有 $V:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{n}B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0)\subseteq U$。于是，$V$ 是 $\mathcal{A}$中的一个绝对凸开零邻域。缩小 V后，我们可以假设序列 $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$单调递减，且 $\sum_{k=1}^{\infty}s_k\leq\frac{1}{2}$。我们证明 $VV\subseteq V$。因此，V 的闵可夫斯基泛函 μ_V 是次乘性的（见引理 10.2.6），由此可推出，$\mathcal{A}$ 上的次乘性连续半范数集定义了其向量拓扑。设 $n\in\mathbb{N}$ 且 x_k，$y_k\in B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0)$，其中 $k\in\{1,\ldots,n\}$。那么

$$(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n)=\sum_{k=1}^{n}w_k$$

其中 $w_k:=\sum_{\text{最大值}\{a,n)\}=k}x_ay_b$。现在 $w_k\in B_{s_k}^{\mathcal{A}_k}(0)$，因为

$$\|w_k\|_k\leq\sum_{\max\{a,b\}=k}\|x_a\|_k\|y_b\|_k<s_k\sum_{b=1}^{k}s_b+s_k\sum_{a=1}^{k-1}s_a<s_k.$$

证明至此完成。 □

我们将定理 10.2.9 应用于芽代数。

10.2.10. 设 E 是一个复巴拿赫空间，$K \subseteq E$ 是一个紧的非空子集。若 U 和 V 是 E 中 K 的开邻域，则称全纯函数 $f\colon U \to \mathbb{C}$ 和 $g\colon V \to \mathbb{C}$ 等价，如果对于 $U \cap V$ 中 K 的某个邻域 W，有 $f|_W = g|_W$。等价类 $[f]$ 称为 K 附近的芽，芽集 $\mathcal{O}(K)$ 的代数运算继承自代表元 f 上的运算（将其限制到共同定义域上）。

命题 10.2.11。对于复巴拿赫空间 E 的每个非空紧子集 K，围绕 K 在 E 中的 $\mathbb{C}$-解析复值函数的芽代数 $\mathcal{O}(K)$ 是一个连续逆代数。

证明。取一个范数 $\|\cdot\|$，使其诱导的拓扑与 E 的拓扑一致，并令 $B_r(x)$ 为以 $x \in E$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开球。取一个收敛到 0 的序列 $r_1 > r_2 > \cdots$。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$U_n := K + B_{r_n}(0) = \bigcup_{x \in K} B_{r_n}(x).$$

上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 使连续有界函数 $U_n \to \mathbb{C}$ 构成的代数 $BC(U_n, \mathbb{C})$ 成为巴拿赫代数。令 $\mathcal{A}_n$ 为所有复解析的 $f \in BC(U_n, \mathbb{C})$ 构成的子代数。那么 $\mathcal{A}_n$ 在 $BC(U_n, \mathbb{C})$ 中是闭的，因此也是巴拿赫代数。根据构造，对于所有 $m \geq n$，限制映射 $\rho_{m,n}\colon \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$ 的算子范数为 ≤ 1。若 $f \in \mathcal{A}_n$ 且 $x \in K$，则由恒等定理，$f|_{B_{r_n}(x)}$ 由 $f|_{B_{r_m}(x)}$ 唯一确定。因此 $\rho_{m,n}$ 是单射。这些映射

$$\rho_n\colon \mathcal{A}_n \to \mathcal{O}(K), \quad f \mapsto [f]$$

是单射，并且它们将 $\mathcal{O}(K)$ 变为向量空间 $\mathcal{A}_n$ 的归纳极限，因为每个 $f \in \mathcal{O}(K)$ 在某个 U_n 上有界。我们赋予 $\mathcal{O}(K)$（不一定是豪斯多夫的）局部凸归纳极限拓扑。将 $\mathcal{A}_n$ 与 $\rho_n(\mathcal{A}_n)$ 等同后，我们可以把 $\mathcal{O}(K)$ 看作一列巴拿赫代数的递增序列之并；一旦知道 $\mathcal{O}(K)$ 是豪斯多夫的，命题 10.2.9 就能完成证明。考虑 $\mathcal{O}(K)$ 中一个非零元素，设为 $\rho_n(f)$，其中 $f \neq 0$。由恒等定理，f 必须有一个 Gˆateaux 导数 $\delta_x^k f(y) \neq 0$，其中 $x \in K$、$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $y \in E$ 满足某些条件。线性映射

$$\lambda_n\colon \mathcal{A}_n \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \delta_x^k g(y)$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都是连续的。事实上，存在 $r > 0$，使得对每个满足 $|z| \leq r$ 的 $z \in \mathbb{C}$，都有 $x + zy \in U_n$。由推论 2.1.8(c)，我们得到

$$\lambda_n(g) = \delta_x^k g(y) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{g(x+\zeta y)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta,$$

这是一个取值于 $g \in \mathcal{A}_n$ 的线性复数域值函数，并且连续，其算子范数为 $\frac{k!}{r^k}$。由于 $\lambda_m \circ \rho_{mn} = \lambda_n$ 对于 $m \geq n$，我们得到一个定义良好的线性映射

$$\lambda\colon \mathcal{O}(K)\to\mathbb{C},\ \ [g]\mapsto \delta_x^k g(y)$$

根据注 B.13.5(d)，它是连续的。由于 $\lambda([f]) = \delta_x^k f(y) \neq 0$，我们可以分离 $[f]$ 和 $\mathcal{O}(K)$ 的零元，因此拓扑向量空间 $\mathcal{O}(K)$ 是豪斯多夫的。□

注 10.2.12.若在命题 10.2.11 中 $E=\mathbb{C}^n$，则每个限制映射 $\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}_{n+1}$ 都是紧算子，因此 $\mathcal{O}(K)$ 是西尔瓦空间。命题 B.13.13(b) 保证了 $\mathcal{O}(K)$ 具有豪斯多夫性质，因此我们可以用命题 2.7.1 代替命题 10.2.9，来证明代数乘法和求逆映射的连续性。事实上，蒙泰尔定理表明，$\mathcal{A}_n$ 中的单位球 B 在赋予紧开拓扑的局部凸空间 $\mathcal{O}(U_n)$ 中相对紧；该空间由定义在 U_n 上的全纯函数构成。由于限制映射 $\rho\colon \mathcal{O}(U_n)\to\mathcal{A}_{n+1}$ 连续，我们可推出 $\rho_{n+1,n}(B)=\rho(B)$ 在 $\mathcal{A}_{n+1}$ 中相对紧。

定义 10.2.13. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 上的结合代数，并且 $x\in\mathcal{A}$。若元素 $y\in\mathcal{A}$ 满足 $xy=yx$ 和 $x+y-xy=0$，则称其为 x 的拟逆元 。若 x 存在拟逆元，则称 x 为拟可逆。我们用 $Q(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有拟可逆元素组成的集合。

根据以下引理，只要拟逆元存在，它就是唯一的。因此，我们可以将 $q(x)$ 记作 $x\in Q(\mathcal{A})$ 的拟逆元。

在下面两个引理中，我们将 $\mathcal{A}_+ := \mathcal{A}\times\mathbb{K}$ 视为直和 $\mathcal{A}\oplus\mathbb{K}\mathbf{1}$，记 $\mathbf{1} := (0,1)$，并将 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}\times\{0\}$ 等同。于是，乘法 $(a,t)(b,s) := (tb+sa+ab, ts)$ 使 $\mathcal{A}_+$ 成为一个含幺结合的 $\mathbb{K}$-代数（见习题 10.7.2）。

引理 10.2.14。 设 $\mathcal{A}$ 是一个结合的 $\mathbb{K}$-代数。对于 $x\in\mathcal{A}$，有：

(a) 如果 $\mathcal{A}$ 含幺，则 $x\in Q(\mathcal{A})$ 当且仅当 $\mathbf{1}-x\in\mathcal{A}^\times$。在此情形下，$y\in\mathcal{A}$ 是 x 的拟逆元，当且仅当 $\mathbf{1}-y=(\mathbf{1}-x)^{-1}$。(b) 在任意情形下，我们都有 $x\in Q(\mathcal{A})$ 当且仅当 $\mathbf{1}-x\in(\mathcal{A}_+)^\times$。于是，$y:=\mathbf{1}-(\mathbf{1}-x)^{-1}$ 属于 $\mathcal{A}$，并且这是 x 在 $\mathcal{A}$ 中的唯一拟逆元。

证明。(a) 对于 $x,\ y\in\mathcal{A}$，我们有

$$(\mathbf{1}-x)(\mathbf{1}-y)=\mathbf{1}-x-y+xy \ \text{ and}$$
$$(\mathbf{1}-y)(\mathbf{1}-x)=\mathbf{1}-x-y+yx.$$

因此，y 是 x 的拟逆元，当且仅当 $(\mathbf{1}-x)(\mathbf{1}-y)$ 和 $(\mathbf{1}-y)(\mathbf{1}-x)$ 都等于 $\mathbf{1}$，也就是说，当且仅当 $\mathbf{1}-x$ 可逆，且其逆映射为 $\mathbf{1}-y$。

(b) 我们很容易验证，$Q(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{A}\cap Q(\mathcal{A}_+)$。若 $x\in\mathcal{A}\cap Q(\mathcal{A}_+)$，则 x在 $\mathcal{A}_+$中有拟逆元 $t\mathbf{1}+y$，且 $t\in\mathbb{K}, y\in\mathcal{A}$。于是

[1] 手工验证：这是一个一致有界的函数集，并且由方向导数的柯西估计和引理 1.5.3(c) 可知它是等度连续的。因此，Ascoli 定理适用。

$$0 = x + t\mathbf{1} + y - x(t\mathbf{1} + y) = t\mathbf{1} + (x + y - tx - xy)$$

这意味着 $t = 0$ 和 $x + y - xy = 0$。由于 x 和 $t\mathbf{1} + y = y$ 在$\mathcal{A}_+$中可交换，因此它们在 $\mathcal{A}$中也可交换。于是 $y = q(x)$ 在 $\mathcal{A}$中成立。断言得证。□

定义 10.2.15. 局部凸结合拓扑代数 $\mathcal{A}$（不一定含幺）称为连续拟逆代数，如果 $Q(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开集，且拟求逆映射 $q\colon Q(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 连续。

注记 10.2.16.每个连续逆代数 $\mathcal{A}$ 也是连续拟逆代数，因为 $Q(\mathcal{A}) = \mathbf{1} - \mathcal{A}^\times$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开集，且 $q(x) = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - x)^{-1}$ 是 $x \in Q(\mathcal{A})$ 的连续函数。

命题 10.2.17. 设 $\mathcal{A}$ 是一个结合的 $\mathbb{K}$-代数，$q\colon Q(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 是其拟求逆映射。那么 $(\mathcal{A}_+)^\times = \mathbb{K}^\times(\mathbf{1} - Q(\mathcal{A}))$ 并且

$$(t\mathbf{1} + a)^{-1} = \frac{1}{t}\mathbf{1} - \frac{1}{t}\, q\Big(-\frac{1}{t}a\Big) \tag{10.3}$$

对于所有满足 $t\mathbf{1} + a \in (\mathcal{A}_+)^\times$ 的 $(a, t) \in \mathcal{A} \times \mathbb{K}$。如果像前面一样，$\mathcal{A}$ 是一个局部凸拓扑代数，则有如下结论：
(a) $Q(\mathcal{A})$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开集，当且仅当 $(\mathcal{A}_+)^\times$ 在 $\mathcal{A}_+$ 中是开集。(b) q 连续，当且仅当求逆映射 $j\colon (\mathcal{A}_+)^\times \to \mathcal{A}_+$ 连续。(c) 若 $\mathcal{A}$ 是连续拟逆代数，则 q 是 $\mathbb{K}$-解析的。

证明。由引理 10.2.14(b)，有 $\mathbf{1} - Q(\mathcal{A}) \subseteq (\mathcal{A}_+)^\times$。由于 $\mathbb{K}^\times\mathbf{1} \subseteq (\mathcal{A}_+)^\times$，我们推出 $\mathbb{K}^\times(\mathbf{1} - Q(\mathcal{A})) = (\mathbb{K}^\times\mathbf{1})(\mathbf{1} - Q(\mathcal{A})) \subseteq (\mathcal{A}_+)^\times$。若 $t\mathbf{1} + a \in (\mathcal{A}_+)^\times$，其中 $t \in \mathbb{K}$ 和 $a \in \mathcal{A}$，则 $t \neq 0$（若 $t = 0$，则 $t\mathbf{1} + a$ 在 $\mathcal{A}_+$ 中不可能可逆，因为 $\mathcal{A}_+\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$）。于是 $\mathbf{1} - (-(1/t)a) = (1/t)(t\mathbf{1} + a) \in (\mathcal{A}_+)^\times$，由此，根据引理 10.2.14(b)，有 $-(1/t)a \in Q(\mathcal{A})$，并且

$$(\mathbf{1} - (-(1/t)a))^{-1} = \mathbf{1} - q(-(1/t)a).$$

因此 $(t\mathbf{1} + a)^{-1} = (1/t)(\mathbf{1} - q(-(1/t)a))$ 满足 (10.3)。

(a) 若 $(\mathcal{A}_+)^\times$ 在 $\mathcal{A}_+$ 中是开集，则 $Q(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A}\colon \mathbf{1} - x \in (\mathcal{A}_+)^\times\}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开集。反之，若 $Q(\mathcal{A})$ 是开集，则它包含一个开平衡零邻域 $U \subseteq \mathcal{A}$。对于每个满足 $|t| > 1/2$ 的 $t \in \mathbb{K}$，我们有$-tQ(\mathcal{A}) \supseteq -tU \supseteq (1/2)U$，因此

$$(\mathcal{A}_+)^\times = \mathbb{K}^\times(\mathbf{1} - Q(\mathcal{A})) \supseteq ((1/2)U) \times \{t \in \mathbb{K}\colon |t| > 1/2\}.$$

因此 $(\mathcal{A}_+)^\times$ 是 $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A} \times \mathbb{K}$ 中 $\mathbf{1} = (0,1)$ 的一个邻域，故根据习题 10.7.3(2)，它是开集。

(b) 若 q 连续，则根据 (10.3)，ι 也连续。若 ι 连续，则 $q(x) = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - x)^{-1}$ 在 x 中连续。

(c) 如果 $\mathcal{A}$ 是一个连续拟逆代数，那么根据 (a) 和 (b)，$\mathcal{A}_+$ 是一个连续逆代数。因此，ι 是 $\mathbb{K}$-解析的（见命题 10.1.12 和 10.1.13），从而 $q(x) = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - x)^{-1}$ 在 x 中是 $\mathbb{K}$-解析的。□

更多讨论请参见习题 10.7.4。

命题 10.2.18。设 M 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的具有 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 的 σ-紧局部紧 C^r-流形，且 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数（或连续拟逆代数）。则 $C_c^r(M, \mathcal{A})$ 是一个连续拟逆代数。特别地，$C_c^r(M, \mathbb{C})$ 是一个连续拟逆代数。

证明。根据注记 10.2.16，只需考虑连续拟逆代数 $\mathcal{A}$。令 $Q(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ 为拟可逆元素构成的开子集，$q\colon Q(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 为拟求逆映射。根据引理 10.2.17(c)，该映射是光滑的。由例 4.1.60(b)，$C_c^r(M, \mathcal{A})$ 是拓扑代数。根据推论 4.1.56，它的子集 $C_c^r(M, Q(\mathcal{A}))$ 是开集，并且我们很容易验证 $Q(C_c^r(M, \mathcal{A})) = C_c^r(M, Q(\mathcal{A}))$ 是一个拟逆代数，其拟求逆映射为 $C_c^r(M, q)$，根据命题 4.1.58(a)，该映射是光滑的（因而也是连续的）。□

10.3 连续逆代数上的矩阵代数

在本节中，我们证明：对任意（含幺）连续逆代数 $\mathcal{A}$，相应的矩阵代数 $M_n(\mathcal{A})$ 也是连续逆代数。

命题 10.3.1.若 $\mathcal{A}$ 是连续逆代数，则矩阵代数 $M_n(\mathcal{A})$，$n \in \mathbb{N}$ 同样如此。特别地，一般线性群$_n(\mathcal{A}) = M_n(\mathcal{A})^\times$ 是李群。

证明。我们赋予 $M_n(\mathcal{A})$ 来自 $\mathcal{A}^{n^2}$ 的乘积拓扑。于是显然 $M_n(\mathcal{A})$ 是局部凸含幺代数。我们通过对 $n \in \mathbb{N}$ 作归纳法来证明该断言。对于 $n = 1$，无需证明。

首先我们证明一般线性群$_n(\mathcal{A})$ 在 $M_n(\mathcal{A})$ 中是开的。设 $x \in M_n(\mathcal{A})$，并记

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ with } \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in M_{1,n-1}(\mathcal{A}), \gamma \in M_{n-1,1}(\mathcal{A}), \delta \in M_{n-1}(\mathcal{A}).$$

于是 x 包含于该光滑映射的像中

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathcal{A}^\times \times M_{1,n-1}(\mathcal{A}) \times M_{n-1,1}(\mathcal{A}) \times \mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{A}), \\ (a, b, c, d) &\mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{1} & b \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ c & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bdc & bd \\ dc & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

当且仅当 $\delta \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{A})$ 且 $\alpha - \beta\delta^{-1}\gamma \in \mathcal{A}^\times$。由于 $\mathcal{A}$ 和 $M_{n-1}(\mathcal{A})$ 是连续逆代数，Φ 的像是开集，并且根据其逆映射的显式公式

$$\Phi^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (\alpha - \beta\delta^{-1}\gamma, \beta\delta^{-1}, \delta^{-1}\gamma, \delta)$$

由此可知，Φ是到 $M_n(\mathcal{A})$的一个开子集上的微分同胚，该开子集包含于一般线性群$_n(\mathcal{A})$之中。我们特别得出结论：一般线性群$_n(\mathcal{A})$是开的。

From

$$\Phi(a,b,c,d)^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-1}b \\ -ca^{-1} & d^{-1}+ca^{-1}b \end{pmatrix}$$

以及 $\mathcal{A}$与 $M_{n-1}(\mathcal{A})$中求逆的连续性，我们进一步推出，一般线性群$_n(\mathcal{A})$中的求逆在某个单位元邻域内连续。鉴于引理 10.1.1，这证明了 $M_n(\mathcal{A})$是一个连续逆代数，因而一般线性群$_n(\mathcal{A})$是一个李群。□

注 10.3.2. 特别地，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们得到

$$\begin{aligned} C^\infty(M, \mathrm{GL}_n(\mathcal{A})) &= C^\infty(M, M_n(\mathcal{A})^\times) = C^\infty(M, M_n(\mathcal{A}))^\times \\ &= M_n(C^\infty(M,\mathcal{A}))^\times = \mathrm{GL}_n(C^\infty(M,\mathcal{A})) \end{aligned}$$

是一个李群（引理 10.2.2(3)）。

命题 10.3.3. 若 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数，且 $M \subseteq \mathcal{A}$ 是一个子集，则其交换子

$$M' := \{a \in \mathcal{A} \colon (\forall m \in M)\, am = ma\}$$

在 $\mathcal{A}$ 中的 M 也是一个连续逆代数，且 $(M')^\times = \mathcal{A}^\times \cap M'$.

证明. 由于 $a \in \mathcal{A}^\times$ 与 M 交换当且仅当 a^{-1} 交换，我们有 $(M')^\times = \mathcal{A}^\times \cap M'$。这意味着单位群 $(M')^\times$ 是开集，而求逆映射的连续性则由限制得到。□

引理 10.3.4. 若 $\mathcal{A}$ 是有限维含幺 $\mathbb{K}$代数，且 $\rho_b(a) := ab$ 是其右乘，则

$$\mathcal{A} \cong \rho'_{\mathcal{A}} := \{A \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) \colon (\forall b \in \mathcal{A}) A\rho_b = \rho_b A\}.$$

引理 10.3.5. 若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是含幺 $\mathbb{K}$ 代数，且 $M \subseteq \mathcal{B}$，则

$$(\mathbf{1} \otimes M)' = \mathcal{A} \otimes M'$$

这对 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 中 M 的交换子以及 $\mathcal{B}$ 中 M 的交换子都成立。

命题 10.3.6. 若 $\mathcal{A}$ 是含幺连续逆代数，且 $\mathcal{B}$ 是有限维含幺代数，则 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 是连续逆代数。

证明。对于 $n :=$ 维数 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}$ 的正则表示 $\lambda_b(x) := bx$ 给出一个嵌入 λ: $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}) \cong M_n(\mathbb{K})$。由此得到一个嵌入

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{A} \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{K}) \cong M_n(\mathcal{A}),$$

由于 $\mathcal{B}$ 是 $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{B})$ 中的交换子（引理 10.3.4），同样的结论也适用于 $M_n(\mathcal{A})$ 中的 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$（引理 10.3.5）。由于 $M_n(\mathcal{A})$ 根据命题 10.3.1 是连续逆代数，结论由命题 10.3.3 得出。□

下面的推论对于实连续逆代数中的谱论论证尤其有用。特别是，它为连续逆代数性质在复化下的稳定性提供了第二个论证（命题 10.1.13）。

推论 10.3.7。对于任意实连续逆代数 $\mathcal{A}$，其复化 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 是一个复连续逆代数。

定义 10.3.8。设 $\mathcal{A}$ 是一个实含幺结合代数，$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 是其复化。复共轭给出 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 上的一个对合自同构 $\sigma(a+ib) = a - ib$，满足 $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{\sigma} = \mathcal{A}$。如果 $a \in \mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 中可逆，则 $a^{-1} \in (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{\sigma} = \mathcal{A}$ 蕴含

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{\times} = \mathcal{A}^{\times}. \tag{10.4}$$

对于 $a \in \mathcal{A}$，我们定义

$$\operatorname{Spec}(a) := \operatorname{Spec}_{\mathcal{A}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon a - \lambda \mathbf{1} \notin \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{\times}\}.$$

如果 $\lambda = \alpha + i\beta \in \text{谱}(a)$，则

$$(a - \lambda \mathbf{1})(a - \overline{\lambda}\mathbf{1}) = a^2 - 2\alpha a + |\lambda|^2 \mathbf{1} \tag{10.5}$$

是 $\mathcal{A}$ 的一个元素，但在 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 中不可逆（习题 10.7.15），因此根据 (10.4) 在 $\mathcal{A}$ 中也不可逆。反之，如果 (10.5) 在 $\mathcal{A}$ 中不可逆，则它在 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 中也不可逆，这意味着 $a - \lambda\mathbf{1}$ 或 $a - \overline{\lambda}\mathbf{1}$ 不可逆。鉴于

$$\sigma(a - \lambda \mathbf{1}) = a - \overline{\lambda}\mathbf{1},$$

由此可得 $\lambda \in \text{谱}(a)$。因此，我们得到如下关于实代数 $\mathcal{A}$ 的谱的描述：

$$\operatorname{Spec}_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon (a - \lambda \mathbf{1})(a - \overline{\lambda}\mathbf{1}) \notin \mathcal{A}^{\times}\}.$$

10.4 代数子群

现在我们将讨论一个非常方便的判据，用于判定巴拿赫李代数的子群是否为李群，并且该判据很容易应用于许多具体情形。首先，我们需要多项式函数和代数子群的概念。

定义 10.4.1。设 $\mathcal{A}$ 为巴拿赫代数。若存在一个 $d \in \mathbb{N}_0$ 以及一个由定义在 $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 上的次数为 $\leq d$ 的巴拿赫空间值多项式函数组成的集合 $\mathcal{F}$，使得

$$G = \{g \in \mathcal{A}^{\times} \colon (\forall f \in \mathcal{F})\ f(g, g^{-1}) = 0\}.$$

为了证明下面的代数子群定理，我们首先必须验证以下特殊情形。

命题 10.4.2。设 E 是一个巴拿赫空间，$F \subseteq E$ 是一个闭子空间。那么

$$\mathrm{GL}(E)_F := \{g \in \mathrm{GL}(E) \colon gF = F\}$$

是一般线性群(E) 的 ***Banach–Lie*** 子群，且

$$\mathbf{L}^e(\mathrm{GL}(E)_F) = \{X \in \mathcal{L}(E) \colon XF \subseteq F\}.$$

证明。设 $V \subseteq \mathfrak{gl}(E) = \mathcal{L}(E)$ 为开零邻域，使得 $\exp|_V \colon V \to \exp V$是微分同胚，且 $\|\exp x - \mathbf{1}\| < 1$ 对所有 $x \in V$ 成立。则反函数

$$\log \colon = (\exp|_V)^{-1} \colon \exp V \to \mathfrak{gl}(E)$$

由收敛幂级数给出

$$\log(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(g - \mathbf{1})^n$$

（参见例 5.1.9(b)）。对于 $g = \exp x \in (\exp V) \cap H$，我们随后由对数函数$(g)$的幂级数直接得到 $x(F) \subseteq F$。

反之，若 $XF \subseteq F$ 且 $t \in \mathbb{R}$，则 $\exp(tX)F \subseteq F$ 直接由 exp 的幂级数展开得到。特别地，我们也有 $\exp(-tX)F \subseteq F$，从而 $\exp(tX)F = F$。□

定理 10.4.3（代数子群定理）。含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 的单位群 $\mathcal{A}^\times$ 中的每个代数子群 G都是一个 ***Banach–Lie*** 子群。

证明。鉴于 Hahn–Banach 定理，我们可以假设

$$\mathcal{F} \subseteq P := \bigoplus_{k=0}^{d} P_k(\mathcal{A} \times \mathcal{A}, \mathbb{K}),$$

$\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 上次数为$\leq d$的标量值连续多项式所构成的巴拿赫空间。空间 P 具有自然的巴拿赫空间结构，使得 $\mathcal{A}^\times$ 在 P 上的作用由下式给出

$$\big(\pi(g)f\big)(x, y) := f(xg, g^{-1}y)$$

从而得到一个连续同态 $\pi \colon \mathcal{A}^\times \to \mathrm{GL}(P)$（习题 10.7.11(d)）。将 $\mathcal{F}$ 替换为

$$F := \{f \in P \colon (\forall g \in G)\, f(g, g^{-1}) = 0\},$$

我们可以假设 $\mathcal{F} = F$。空间 F 是 P 的闭子空间。我们断言

$$G = \{g \in \mathcal{A}^\times \colon \pi(g)F \subseteq F\}. \tag{10.6}$$

事实上，如果 g，$x \in G$ 且 $f \in F$，那么

$$\big(\pi(g)f\big)(x, x^{-1}) = f(xg, g^{-1}x^{-1}) = 0,$$

这表明 $\pi(g)f \in F$。反之，若 $g \notin G$，则存在一个 $f \in F$，满足

$$0 \neq f(g, g^{-1}) = \big(\pi(g)f\big)(\mathbf{1}, \mathbf{1}).$$

特别地可得 $\pi(g)f \notin F$。接下来，由于 G 是一个群，(10.6) 推出

$$G = \{g \in \mathcal{A}^\times : \pi(g)F = F\}.$$

我们得出

$$G = \pi^{-1}(\{g \in \mathrm{GL}(P) : \pi(g)F = F\}),$$

因此，该断言由关于李子群逆像的命题 9.3.11 与命题 10.4.2 联合推出。□

例 10.4.4. (a) 若 $(\mathcal{A}, *)$ 是一个含单位的 Banach-* 代数，则其酉群

$$\mathrm{U}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} : aa^* = a^*a = \mathbf{1}\}$$

是一个实 Banach–Lie 子群。将 $\mathcal{A}$ 视为实 Banach 代数，并将 $\mathrm{U}(\mathcal{A})$ 视为由 $f(g, g^{-1}) = 0$ 指定的代数子群，其中 $f(g, h) = g^* - h$，由定理 10.4.3 可知这一结论成立。

(b) 若 $\mathcal{A}$ 是一个巴拿赫空间，且 $m\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个连续双线性映射，则相应的自同构群

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}, m) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{A}) : (\forall a, b \in \mathcal{A})\ m(ga, gb) = gm(a, b)\}$$

是一个巴拿赫–李子群，其李代数是如下空间

$$\mathrm{der}(\mathcal{A}, m) := \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) : (\forall a, b \in \mathcal{A})\, Xm(a, b) = m(Xa, b) + m(a, Xb)\}$$

$(\mathcal{A}, m)$ 的导子（习题 10.7.10）。

(c) 若 V 和 W 是巴拿赫空间，且 $\beta\colon V \times V \to W$ 是一个连续双线性映射，则

$$\mathrm{O}(V, \beta) := \{g \in \mathrm{GL}(V) : (\forall v, v' \in V)\, \beta(gv, gv') = \beta(v, v')\}$$

是一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 的 Banach–Lie 子群，因为它在含幺巴拿赫代数 $\mathcal{L}(V)$ 中是代数的。每一对 $v, v' \in V$ 都确定一个多项式函数 $f_{v,v'}(g) := \beta(gv, gv') - \beta(v, v')$，而 $\mathrm{O}(V, \beta)$ 是这些多项式在一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 中的同时零点集。容易看出，这些群的李代数是

$$\mathfrak{o}(V, \beta) = \{X \in \mathcal{L}(V) : (\forall v, v' \in V)\, \beta(Xv, v') + \beta(v, Xv') = 0\}.$$

例 10.4.5。(a) 若 $\mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数，且 $M_n(\mathcal{A})$ 是以 A 中的元素为条目的 ($n \times n$) 阶矩阵代数，则 $M_n(\mathcal{A})$ 也是巴拿赫代数。事实上，在空间 $\mathcal{A}^n$ 上，我们考虑由下式给出的范数

$$\|x\| := \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}.$$

于是 $\mathcal{A}^n$ 是一个巴拿赫空间，并且有一个自然嵌入 $M_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}^n)$，我们利用它在 $M_n(\mathcal{A})$ 上定义范数。不难验证，$M_n(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{A}^n)$ 中的闭子集，因此是一个巴拿赫代数。我们将该巴拿赫代数的单位群记为 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A}) := M_n(\mathcal{A})^\times$（另见命题 10.3.1）。

（b）如下文所示，有时可以按如下方式对前面的构造进行细化。设 $\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{A}$ 是一个理想，并且其自身是一个巴拿赫代数，使得乘法映射

$$\mathcal{A} \times \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \quad (a, b) \mapsto ab$$

是连续的，即存在一个 $C > 0$，使得

$$\|ab\|_J \leq C\|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{J}} \quad \text{for} \quad a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{J}.$$

将 A 上的范数替换为等价范数

$$\|a\|' := \max(\|a\|_{\mathcal{A}}, \sup\{\|ab\|_{\mathcal{J}} \colon \|b\|_{\mathcal{J}} \leq 1\}) \leq \max(1, C)\|a\|_{\mathcal{A}},$$

我们可以假设 $\|ab\|_J \leq \|a\|_A\|b\|_J$ 对 $a \in \mathcal{A}$ 和 $b \in \mathcal{J}$成立。

我们考虑代数

$$M_2(\mathcal{A}, \mathcal{J}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathcal{A}, b, c \in \mathcal{J} \right\}$$

赋予范数

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| := 2\max\{\|a\|_{\mathcal{A}}, \|b\|_{\mathcal{J}}, \|c\|_{\mathcal{J}}, \|d\|_{\mathcal{A}}\}.$$

那么，对 $x, y \in M_2(\mathcal{A}, \mathcal{J})$，$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ 成立（习题！），因此 $M_2(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ 是一个巴拿赫代数。

对 $(n \times n)$-矩阵也可以进行类似的构造，其中定义

$$M_n(\mathcal{A}, \mathcal{J}) := \{(x_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(\mathcal{A}) \colon i \neq j \Rightarrow x_{ij} \in J\}$$

and

$$\|(x_{ij})\| := n\max\{\|x_{ij}\|_{\mathcal{J}}, i \neq j; \|x_{ii}\|_{\mathcal{A}}, i = 1, \ldots, n\}.$$

我们用 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ 表示这个巴拿赫代数的单位群。

(c) 若 $\mathcal{A}$ 是一个没有单位元的 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的巴拿赫代数，那么我们赋予空间 $\mathcal{A}_+ := \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}$ 以下巴拿赫代数结构:

$$\|(a,z)\| := \|a\| + |z| \quad \text{and} \quad (a,z)(a',z') := (aa' + za' + z'a, zz').$$

于是 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \times \{0\}$ 是 $\mathcal{A}_+$ 中的一个闭理想，并且有一个代数同态 $\varepsilon\colon \mathcal{A}_+ \to \mathbb{K}$，定义为 $\varepsilon(a,\ z) = z$。我们定义

$$\mathcal{A}^\times := \varepsilon^{-1}(1) \cap \mathcal{A}_+^\times.$$

这是 $\mathcal{A}_+^\times$ 和 $\{(a,\ \mathbf{1})$ 的闭子群：$\|a\| < 1\}$ 是 $\mathcal{A}^\times$ 中的一个开 $\mathbf{1}$ 邻域。因此，$\mathcal{A}^\times$ 是 $\mathcal{A}_+^\times$ 的李子群，其李代数为 $(\mathcal{A},\ [\cdot,\cdot])$，指数函数为

$$\exp\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\times, \quad x \mapsto e^x = (e^x - \mathbf{1}, \mathbf{1}).$$

(d) 若 $\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 的理想，则

$$J^\times := \mathcal{A}^\times \cap (\mathbf{1} + J)$$

是同态

$$\mathcal{A}^\times \to (\mathcal{A}/\mathcal{J})^\times, \quad g \mapsto g + \mathcal{J},$$

的核，其中 $(\mathcal{A}/\mathcal{J})^\times$ 表示含幺代数 $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ 的单位群。由于我们没有假设 $\mathcal{J}$ 是闭的，因此不要求该代数具有自然巴拿赫空间结构。对于 $\mathcal{J}_+$，$= \mathbb{K}\mathbf{1} + \mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ 满足关系

$$\mathcal{J}_+^\times = \mathcal{A}^\times \cap \mathcal{J}_+ = \mathbb{K}^\times \cdot \mathcal{J}^\times.$$

此外，若 $\mathcal{J}$ 是闭的，则 $J^\times$ 是 $\mathcal{A}^\times$ 的闭子群，也是李代数为 $\mathcal{J}$ 的李群。进一步，$\mathcal{A}/\mathcal{J}$ 具有自然巴拿赫代数结构，其范数为

$$\|a + \mathcal{J}\| := \inf\{\|a + b\|\colon b \in \mathcal{J}\},$$

且商映射 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ 是连续的，因此我们得到李群的正合列

$$\{\mathbf{1}\} \to \mathcal{J}^\times \hookrightarrow \mathcal{A}^\times \to (\mathcal{A}/\mathcal{J})^\times.$$

这里，右侧的映射不必是满射。一个典型例子是，无穷维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$和 $\mathcal{J} = K(\mathcal{H})$（紧算子的理想）。事实上，存在指标非零的弗雷德霍姆算子（参见 [Ru91]）。

10.5 光滑向量 cia

在本节中，我们证明，对于作用在连续逆代数 $\mathcal{A}$ 上的李群作用，其子代数 $\mathcal{A}^\infty$ 也是连续逆代数。

命题 10.5.1。设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数， M 是一个光滑流形。我们考虑映射 $\alpha\colon \quad M \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})\ m \mapsto \alpha_m$，并置 $\alpha^a(m)\colon = \alpha_m(a)$。则子空间

$$\mathcal{A}^\infty := \{a \in \mathcal{A}\colon \alpha^a \in C^\infty(M, \mathcal{A})\}$$

是一个连续逆代数，其拓扑为由 $C^\infty(M, \mathcal{A})$ 上的光滑紧开拓扑诱导的子空间拓扑。

证明。 我们已在引理 10.2.2 中看到， $C^\infty(M, \mathcal{A})$ 是一个具有连续求逆和单位群 $C^\infty(M, \mathcal{A}^\times)$ 的局部凸代数。我们考虑包含映射

$$\eta\colon \mathcal{A}^\infty \hookrightarrow C^\infty(M, \mathcal{A}), \quad \eta(a) := \alpha^a.$$

由于每个 α_m 都是 $\mathcal{A}$ 的自同构，因此 η 是代数同态。根据定义， η 是一个拓扑嵌入。因此， $\mathcal{A}^\infty$ 是一个具有连续求逆的局部凸代数。还需证明其单位群是开集。

不失一般性，设 $M \neq \emptyset$。取 $m \in M$。若 $a \in \mathcal{A}^\infty$ 可逆，则 $\alpha_m(a) = \alpha^a(m)$ 可逆，因此 $a \in \mathcal{A}^\times$，因为 α_m 是一个自同构。反之，若 $a \in \mathcal{A}^\times$，则 $\alpha^a(M) \subseteq \mathcal{A}^\times$ 表明 α^a 在 $C^\infty(M, \mathcal{A})$ 中可逆，其逆为 $(\alpha^a)^{-1} = \alpha^{a^{-1}}$，从而 $a \in (\mathcal{A}^\infty)^\times$。这表明

$$(\mathcal{A}^\infty)^\times = \mathcal{A}^\infty \cap \mathcal{A}^\times = (\mathrm{ev}_m \circ \eta)^{-1}(\mathcal{A}^\times).$$

由于 $\mathrm{ev}_m \circ \eta$ 是连续的，$(\mathcal{A}^\infty)^\times$ 是开集，因此 $\mathcal{A}^\infty$ 是一个连续逆代数。 □

在非交换微分几何中，需要考察代数的导子，因为人们期望它们能以类似于向量场描述流形无穷小结构的方式，描述无穷小结构。因此，人们不得不考虑李群的作用，这会导出其李代数通过导子产生的作用。在这一背景下，以下命题是一个非常有用的工具。

命题 10.5.2。($\mathcal{A}^\infty$ 作为连续逆代数）设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数， G 是一个李群，且$\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})\ g \mapsto \alpha_g$定义了 G在 $\mathcal{A}$上的作用。那么，光滑向量的子空间$\mathcal{A}^\infty$ 在从嵌入 $\mathcal{A}^\infty \hookrightarrow C^\infty(G, \mathcal{A})\ a \mapsto \alpha^a$, $\alpha^a(g) := \alpha_g(a)$继承的拓扑下，也是一个连续逆代数。

G 在 $\mathcal{A}$ 上的作用保持 $\mathcal{A}^\infty$ 不变，并在 $\mathcal{A}^\infty$ 上诱导出一种代数自同构作用，其轨道映射光滑，且导出作用 $\mathfrak{g} \times \mathcal{A}^\infty \to \mathcal{A}^\infty$ 分别连续。如果 G 的作用以及 $\mathfrak{g}$在 $\mathcal{A}^\infty$ 上的导出作用连续，那么 G在 $\mathcal{A}^\infty$ 上的作用就是光滑的。

证明。 命题 10.5.1 表明 $\mathcal{A}^\infty$ 是一个连续逆代数。对于 $\alpha^a(g) =: g.a$ 和$h \in G$，我们有

$$\alpha^{h.a}(g) = (gh).a = \alpha^a(gh), \tag{10.7}$$

因此，对于每个 $a \in \mathcal{A}^\infty$，轨道映射 $G \to \mathcal{A}^\infty$，$h \mapsto h.a$ 对应于映射

$$G \to C^\infty(G, \mathcal{A}), \quad h \mapsto \alpha^a \circ \rho_h,$$

并且该映射的光滑性由映射的光滑性推出

$$G \times G \to \mathcal{A}, \quad (g, h) \mapsto \alpha^a(\rho_h(g)) = \alpha^a(gh)$$

以及命题 4.1.21。因此，G 在 $\mathcal{A}^\infty$ 上的作用具有光滑轨道映射。

由 (10.7) 可得，G 在 $\mathcal{A}^\infty$ 上的作用对应于 G 在 $C^\infty(G, \mathcal{A})$上的右平移作用。现在

$$x.a := T_e(\alpha^a)x \quad \text{resp.} \quad \alpha^{x.a} = x^l\alpha^a$$

（参见命题 5.2.1）定义了 G的李代数 $\mathfrak{g}$的一个表示，它是 $\mathfrak{g}$ 在 $C^\infty(G, \mathcal{A})$上的表示的一个子表示，该表示由左不变向量场定义。显然，$\mathfrak{g}$ 通过连续算子作用于 $\mathcal{A}^\infty$，并且对于每个 $a \in \mathcal{A}$，映射 $x \mapsto x.a$ 是连续线性的。这意味着作用映射 $\mathfrak{g} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是分别连续的。

现在我们假设 G-作用 $\alpha_g(a) =: g.a$ 在 $\mathcal{B} := \mathcal{A}^\infty$ 上的作用及其导出作用 $\alpha^{\mathfrak{g}}$: $\mathfrak{g} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$，$(x, a) \mapsto x.a$是连续的。首先注意到，我们有一个连续的切作用

$$T\alpha\colon TG \times T\mathcal{B} \to T\mathcal{B}, \quad (g.x).(a, w) := (g.a, g.w + g.(x.a)),$$

由此可知 α 是一个 C^1-作用。现在，$T\alpha$ 的公式表明 $T\alpha$ 也是 C^1。通过迭代，我们得出 G 在 $\mathcal{B}$ 上的作用是光滑的。□

前述命题尤其适用于有限维李群在巴拿赫代数上的一类重要作用。

例 10.5.3. 光滑量子环面构成一类重要而有趣的连续逆代数（[BEG89]），其定义如下。我们考虑一个矩阵$\mathbf{q} := (q_{jk}) \in M_d(\mathbb{C})$，它满足

(Q1) $q_{jj} = 1$对每个 j成立。
(Q2) $q_{jk} = q_{kj}^{-1}$对所有 j，k成立。
(Q3) $|q_{jk}| = 1$对所有 j，k成立。

于是存在由 d 酉元$u_1, \ldots, u_d$生成的泛 C^*-代数 $\mathcal{C}$，它们满足对易关系

$$u_j u_k = q_{jk} u_k u_j \quad \text{for} \quad 1 \le j, k \le d.$$

Then

$$\alpha\colon \mathbb{T}^d \to \operatorname{Aut}(\mathcal{C}), \quad \alpha(\mathbf{t})u_j = t_j u_j, \qquad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$$

定义了环面群 $\mathbb{T}^d$ 在 $\mathcal{C}$上的自同构连续作用。相应的光滑量子环面是 Fr´echet 连续逆代数 $\mathcal{A}_{\mathbf{q}} := \mathcal{C}^\infty$ ，即此作用的光滑向量（命题 10.5.2）。这意味着 $\mathcal{A}_{\mathbf{q}}$ 中的每个元素都可以表示为一个收敛级数

$$a = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha u^\alpha \quad \text{with} \quad a_\alpha \in \mathbb{C}, u^\alpha := u_1^{\alpha_1}\cdots u_d^{\alpha_d}, \alpha \in \mathbb{Z}^d$$

（参见定理 D.2.10）。更准确地说，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathbf{q}} &= \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} a_\alpha u^\alpha \colon (\forall k \in \mathbb{N}) \sum_\alpha |\alpha|^k |a_\alpha| < \infty \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} a_\alpha u^\alpha \colon (\forall k \in \mathbb{N}) \sup |\alpha|^k |a_\alpha| < \infty \right\}.\end{aligned}$$

若对所有 j, k 都有 $q_{jk} = 1$ ，则 $\mathcal{C} \cong C(\mathbb{T}^d)$ 和 $\mathcal{A}_{\mathbf{q}} \cong C^\infty(\mathbb{T}^d)$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的光滑函数代数。

注 10.5.4。 若 G 是一个有限维李群，且 $\mathcal{A}$ 是 Mackey 完备的，那么，对于每个 $f \in C_c^\infty(G, \mathbb{R})$，我们通过下式在 $\mathcal{A}$ 上得到一个连续线性算子

$$\alpha_f(a) := \int_G f(g)\alpha_g(a)\, d\mu_G(g),$$

其中 μ_G 是 G上的左 Haar 测度。对于任意函数序列 (f_n)，若满足 $\int_G f_n \, d\mu_G = 1$ 且支集收敛于 e，则有 $\alpha(f_n)a \to a$。由于 $\operatorname{im}(\alpha_f)$ 由光滑向量组成， $\mathcal{A}^\infty$ 在 $\mathcal{A}$ (G°arding 定理[Ga47]) 中是稠密的。

注 10.5.5。 上文赋予代数 $\mathcal{A}^\infty$ 以从空间 $C^\infty(G, \mathcal{A})$ 继承的拓扑。还可以通过导子获得更精细的拓扑。

因此，令 $\mathcal{B}$ 为局部凸代数 $\mathcal{A}$ 的子代数，并考虑导子 D: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$。考虑切代数 $T\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ，其乘法为

$$((a, v), (a', v')) \mapsto (aa', av' + va').$$

Then

$$\eta_D\colon \mathcal{B} \to T\mathcal{A}, \quad a \mapsto (a, Da)$$

是一个单射代数同态（练习 10.7.16）。因此，使 η_D 成为嵌入的 $\mathcal{B}$ 上的拓扑，在 $\mathcal{B}$ 上定义了局部凸代数结构。若 $\mathcal{A}$是连续逆代数，则 $T\mathcal{A}$也是，其单位群为 $(T\mathcal{A})^\times = \mathcal{A}^\times \times \mathcal{A}$。特别地， $\eta_D^{-1}((T\mathcal{A})^\times) = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^\times$是开的，因此 $\mathcal{B}^\times$ 是开的。

一个典型的例子是 $\mathcal{A} = C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ 和 $\mathcal{B} := C^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$，将其拓扑定义为巴拿赫代数 $\mathcal{A}$的子代数拓扑。于是我们有导子

$$D\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \quad Df = f'$$

上述过程得到 $\|f\|_1 := \|f\| + \|f'\|$ 上的范数，使 $\mathcal{B}$ 成为巴拿赫代数。

10.6 单位群的正则性

本节将介绍一个判据，用于判断连续逆代数的单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是否正则。根据命题 6.3.2，$\mathcal{A}$ 的麦基完备性是必要条件。由于巴拿赫–李群是正则的，因此显然，当 $\mathcal{A}$ 是巴拿赫代数时，$\mathcal{A}^\times$ 是正则的；但除此之外，要找到充分条件并不容易。我们介绍的条件各有不同：

- 一个关于级数的条件，其中涉及常数 $c_n(p, q)$，这里 p 和 q 是 $\mathcal{A}$ 上的连续半范数。这编码了关于迭代乘法映射连续性的某些定量信息。
- 我们证明 Turpin 定理，该定理断言交换连续逆代数在局部是 m-凸的，因此存在满足 $c_n(p, p) \le 1$ 的半范数；但在交换情形下，$\mathcal{A}^\times$ 的正则性很容易由 $\mathcal{A}$ 的麦基完备性推出。由于我们还证明了任意交换连续逆代数 $\mathcal{A}$ 的完备化仍是连续逆代数，这就彻底解决了交换情形。
- 我们还证明，对于巴拿赫–李群在 $\mathcal{A}$ 上的自同构作用，正则性会从 $\mathcal{A}$ 传递到光滑向量代数 $\mathcal{A}^\infty$。

10.6.1 充分条件

给定 $\mathcal{A}$ 上的连续半范数 p, q，我们定义

$$c_n(p,q) := \sup\{p(a_1 \cdots a_n)\colon q(a_j) \le 1, j = 1, \dots, n\} \in [0, \infty].$$

在 [GN12] 中，得到了关于 $\mathcal{A}^\times$ 正则性的以下判据：

定理 10.6.1。设 $\mathcal{A}$ 是一个麦基完备连续逆代数，并且对 $\mathcal{A}$ 上的每个连续半范数 p，都存在 $\mathcal{A}$ 上的一个连续半范数 q 和一个 $r > 0$，使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n c_n(p,q) < \infty. \tag{10.8}$$

那么 $\mathcal{A}^\times$ 是 C^1-正则的；如果 $\mathcal{A}$ 是序列完备的，那么 $\mathcal{A}^\times$ 甚至是C^0-正则的。

证明的主要思路是证明皮卡迭代的收敛性。假设 $\mathcal{A}$ 是一个序列完备复合幺半代数。对于 $u \in C([0,1],\mathcal{A})$，我们要解线性初值问题

$$\gamma(0) = \mathbf{1}, \quad \gamma'(t) = \gamma(t)u(t). \tag{10.9}$$

为此，我们考虑皮卡迭代：

$$\gamma_0(t) := \mathbf{1}, \quad \gamma_{n+1}(t) := \mathbf{1} + \int_0^t \gamma_n(\tau)u(\tau)\,d\tau,$$

由此得到

$$\gamma_n(t) = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} u(\tau_1)u(\tau_2)\cdots u(\tau_n)\; d\tau_1\, d\tau_2 \cdots d\tau_n.$$

若 q 是连续半范数，且 $q(u(t)) \le r$ 对于 $0 \le t \le 1$，则

$$\begin{aligned} &p\Big(\int_0^t \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} u(\tau_1)u(\tau_2)\cdots u(\tau_n)\; d\tau_1\, d\tau_2 \cdots d\tau_n \Big) \\ &\le c_n(p,q) r^n \int_0^t \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1\, d\tau_2 \cdots d\tau_n = c_n(p,q) r^n \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

因此，皮卡迭代导出一个一致收敛级数

$$\mathrm{Evol}(u) := \lim_{n\to\infty} \gamma_n$$

接下来只需证明该极限定义了一个光滑演化映射

$$\mathrm{evol}\colon C([0,1],\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^\times, \quad u \mapsto \mathrm{Evol}(u)(1).$$

如果 $\mathcal{A}$ 仅是麦基完备的，那么只有当 u 是一条 C^1-曲线时，积分才有定义。

注 10.6.2.(a) 目前我们尚不清楚 (10.8) 是否确有必要，或者所有序列完备的连续逆代数是否都具有 C^0-正则单位群。

如果 $\mathcal{A}^\times$ 是 C^0-正则的，那么如 [Hn22] 所示，按照 [Gl12b], 的意义， $\mathcal{A}^\times$ 是局部 μ-凸的。这意味着，对于 $\mathcal{A}$ 上的每个连续半范数 p，都存在 $\mathcal{A}$ 上的一个连续半范数 q 以及 $a > 0$，使得

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ c_n(p,q) \le a^n n^n, \tag{10.10}$$

正如我们马上要验证的那样。估计 (10.10) 不足以推出 (10.8)。事实上，(10.8) 中的条件等价于存在某个 $b > 0$，使得

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ c_n(p,q) \le b^n,$$

这并不是（10.10）的推论。

[为证明（10.10），设 $\mathcal{A}$ 上的 p 是一个连续半范数。由局部 μ-凸性，存在 $\mathcal{A}$ 上的连续半范数 q 和 $\varepsilon > 0$，使得

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{A}) \tag{10.11}$$
$$\sum_{j=1}^{n} q(x_j) \le \varepsilon \;\Rightarrow\; p((\mathbf{1}+x_1)(\mathbf{1}+x_2)\cdots(\mathbf{1}+x_n)-\mathbf{1}) \le \sum_{j=1}^{n} q(x_j).$$

我们可以假设 $\varepsilon \le 1$。给定 $n \in \mathbb{N}$、$j \in \{1, \dots, n\}$ 和 $y \in \mathcal{A}$，考虑作用于函数 g 上的差分算子 $\Delta_{j,\,y}$：$\mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$ 通过

$$\Delta_{j,y}(g)(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + y, a_{j+1}, \dots, a_n) - g(a_1, \dots, a_n)$$

对于 a_1、……、$a_n \in \mathcal{A}$。考虑函数

$$f_n \colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) := (\mathbf{1}+x_1)\cdots(\mathbf{1}+x_n) - \mathbf{1}.$$

给定 y_1、……、$y_n \in \mathcal{A}$，且 $\sum_{j=1}^{n} q(y_j) \le \varepsilon$，则有

$$\begin{aligned} y_1 y_2 \cdots y_n &= (\Delta_{n,y_n} \cdots \Delta_{1,y_1} f)(0, \dots, 0) \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0}^{1} (-1)^{n-\alpha_1-\cdots-\alpha_n} f_n(\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_n y_n) \end{aligned}$$

因此 $p(y_1, \dots, y_n) \le 2^n \varepsilon$（使用（10.10））。取任意满足 $q(y_j) \le \varepsilon/n$ 对所有 $j \in \{1, \dots, n\}$ 成立的 y_1、……、$y_n \in \mathcal{A}$，我们推出

$$c_n(p, q) \le \frac{2^n \varepsilon n^n}{\varepsilon^n} \le a^n n^n$$

其中 $a := 2/\varepsilon$.]

(b) 如果 $\mathcal{A}$ 上的拓扑可以由一族次乘性半范数 p 定义，即 $\mathcal{A}$ 是局部 m凸的，那么 $c_n(p,\ p) \le 1$，并且对于 $r < 1$，(10.8) 得到满足。正如我们将在下文看到的，这尤其覆盖了所有交换连续逆代数（定理 10.6.3, [Tur70]），但在后一种情况下，我们简单地有

$$\operatorname{evol}(u) = \exp\Big(\int_0^1 u(\tau)\, d\tau\Big).$$

10.6.2 关于局部 m-凸性的 Turpin 定理

在本小节中，我们证明 Turpin 定理：交换连续逆代数是局部 m-凸的，这为上一小节中的常数 $c(p,\ q)$ 提供了最优控制。

命题 10.6.3（Turpin 定理）。每个交换 *CIA* $\mathcal{A}$ 都是局部 m-凸的。

我们的证明用到了两个引理。

引理 10.6.4。若 $\mathcal{A}$ 是一个复连续逆代数，那么对于 $\mathcal{A}$ 上满足 $p(\mathbf{1}) \leq 1$ 的每个连续半范数 p，都存在 $\mathcal{A}$ 上的一个连续半范数 q，使得

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in \overline{B}_1^q(0)) \quad p(x^n) \leq 1. \tag{10.12}$$

证明。给定 p q $\mathcal{A}$ $V = B_2^q \mathbf{1} \subseteq$，$\mathcal{A}^\times$ $V^{-1} \subseteq B_1^p \mathbf{1} \subseteq B_2^p 0$ ι $\mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}$ $x \mapsto x^{-1}$ 令 为 上满足 : ( ) 和 ( ) ( ) 的一个连续半范数。令 : , 为求逆映射，由推论 1.3.8 可知它是复解析的。根据习题 1.6.2，ι 在 $\mathbf{1}$ 处的盖托微分为

$$\delta_{\mathbf{1}}^n \iota = (-1)^n n! \mu_n, \quad \text{where} \quad \mu_n(x) = x^n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{A}.$$

因此，习题 2.1.21 推出 $n \in \mathbb{N}$ 满足 (10.12)，而由于 $p(\mathbf{1}) \leq 1$，(10.12) 对 $n = 0$ 也成立。□

引理 10.6.5。若 $\mathcal{A}$ 是一个结合代数，且 $S \subseteq \mathcal{A}$ 是一个在乘法下封闭的子集，则其凸包 $\operatorname{conv}(S)$ 也在乘法下封闭。

证明。只需注意，凸组合的乘积 $(\sum_j \lambda_j x_j)(\sum_k \mu_k y_k) = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k x_j y_k$是乘积的凸组合。□

命题的证明 10.6.3。我们不妨假设基域为 $\mathbb{C}$（若$\mathcal{A}$ 是实连续逆代数，请讨论 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$; 参见命题 10.1.13）。设 p 是 $\mathcal{A}$上的连续半范数；将 p 替换为适当 $r > 0$下的 rp 后，我们不妨假设 $p(\mathbf{1}) \leq 1$。对于 $n \in \mathbb{N}_0$，考虑连续对称的 n-线性映射

$$\beta_n \colon \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \cdots x_n$$

以及相应的连续齐次多项式

$$\mu_n \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \mu_n(x) := \beta_n(x, x, \ldots, x) = x^n.$$

由引理 10.6.4，存在 $\mathcal{A}$上的连续半范数 q，使得

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad \sup\{p(x^n) \colon x \in \overline{B}_1^q(0)\} \leq 1.$$

利用极化公式 1.6.19，我们推得

$$\sup\{p(\beta_n(x_1, \ldots, x_n)) \colon x_1, \ldots, x_n \in \overline{B}_1^q(0)\} \leq \frac{n^n}{n!}$$

（参见习题 1.6.4）。由斯特林公式，$\sqrt[n]{n^n/n!} = n/\sqrt[n]{n!} \to e$对于 $n \to \infty$成立，因此幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n t^n}{n!}$ 具有正的收敛半径，由此我们可找到 $t > 0$，使得

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad \frac{n^n t^n}{n!} \leq 1.$$

令 $W := B_t^q(0)$。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们可推得

$$(\forall x_1, \dots, x_n \in W) \quad p(x_1 \cdots x_n) \le \frac{n^n t^n}{n!} \le 1.$$

因此

$$S := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{WW\cdots W}_{n}$$

是 $\mathcal{A}$ 的一个平衡零邻域，它对乘法封闭且包含于 $B_1^p(0)$ 中。令 $C := \operatorname{conv}(S)$ 为 S 的闭凸包。则 C 是 $\mathcal{A}$ 中一个闭的绝对凸零邻域。令 μ_C 为其闵可夫斯基泛函。则 μ_C 是一个连续半范数，其单位球为 $C \subseteq B_1^p(0)$，因此 $\mu_C \ge p$。由于根据引理 10.6.5 有 $CC \subseteq C$，μ_C 是次乘性的，因此次乘性半范数定义了 $\mathcal{A}$ 的拓扑。□

10.6.3 交换连续逆代数的完备化

设 $\mathcal{A}$ 是一个局部凸拓扑代数，$\widetilde{\mathcal{A}}$ 是它作为局部凸空间的完备化。则连续双线性代数乘法 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 可延拓为一个连续双线性映射 $\widetilde{\mathcal{A}}\times\widetilde{\mathcal{A}}\to\widetilde{\mathcal{A}}$，从而使 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 成为拓扑代数。若 $\mathcal{A}$ 含幺，则 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 也含幺。

问题 10.6.6。连续逆代数 A 的完备化也是连续逆代数 $\widetilde{\mathcal{A}}$吗?

如果 $\mathcal{A}$是交换 CIA，那么答案是肯定的，下面我们将证明这一点。一般情形仍是开放问题。我们先给出三个引理。

引理 10.6.7。设 $\varphi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是含幺复代数 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$之间的含幺代数同态。给定 $a\in\mathcal{A}$，令 $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ 为其谱，并令$\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a))$ 为 $\varphi(x)\in\mathcal{B}$的谱。那么 $\sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(a)$。

证明。如果 $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a))$，那么 $\lambda\mathbf{1} - \varphi(a) = \varphi(\lambda\mathbf{1} - a) \notin \mathcal{B}^\times$，由此可知 $\lambda\mathbf{1} - a \notin \mathcal{A}^\times$，进而 $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$。□

引理 10.6.8。设 $((\mathcal{A}_i)_{i\in I}, (q_{ij})_{i\le j})$ 是含幺代数的一个射影系统，且 $\mathcal{A} := \varprojlim \mathcal{A}_i \subseteq \prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$，极限映射为 $q_i\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}_i$。那么

$$\mathcal{A}^\times = \varprojlim \mathcal{A}_i^\times.$$

此外，对每个 $a\in\mathcal{A}$，都有 $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \bigcup_{i\in I}\sigma_{\mathcal{A}_i}(q_i(a))$。

证明。若 $a = (a_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^\times$，则对每个 $i\in I$，$a_i = q_i(a) \in \mathcal{A}_i^\times$。此外，

$$q_{ij}\Big|_{\mathcal{A}_j^\times}^{\mathcal{A}_i^\times}(a_j) = q_{ij}(a_j) = a_i$$

每当 $i\le j$，由此 $a = (a_i)_{i\in I} \in \varprojlim \mathcal{A}_i^\times$。

如果 $a=(a_i)_{i\in I}\in \lim\limits_{\longleftarrow}\mathcal{A}_i^\times$，那么 $a_i\in\mathcal{A}_i^\times$ 和 $q_{ij}(a_j)=a_i$ 每当 $i\le j$，由此 $q_{ij}\,a_j^{-1}=a_i^{-1}$ $b=a_i^{-1}{}_{i\in I}\in \lim\limits_{\longleftarrow}\mathcal{A}_i=\mathcal{A}$ $ab=()$，因此：$()$ li $ba=\mathbf{1}$ $a\in\mathcal{A}^\times$ m。由于，我们看到。

为证明最后一个断言，令 $a=(a_i)_{i\in I}\in\mathcal{A}$ and $\lambda\in\mathbb{C}$。根据前面的结果，

$$\lambda\in\sigma_{\mathcal{A}}(a)\Leftrightarrow\lambda\mathbf{1}-a\notin\mathcal{A}^\times\Leftrightarrow(\exists i\in I)\,\lambda\mathbf{1}-a_i\notin\mathcal{A}_i^\times\Leftrightarrow(\exists i\in I)\,\lambda\in\sigma_{\mathcal{A}_i}(a_i).$$

因此 $\sigma_{\mathcal{A}}(a)=\bigcup_{i\in I}\sigma_{\mathcal{A}_i}(a_i)$，证毕。 □

引理 10.6.9。对于每个含幺交换复巴拿赫代数 $\mathcal{A}$，映射 $r\colon\mathcal{A}\to[0,\infty[$，将 $a\in\mathcal{A}$ 映到其谱半径 $r(a)$，是连续的。

证明。令 $\mathcal{A}=\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathbb{C})$ 为 $\mathcal{A}$ 的盖尔范德谱（即到 $\mathbb{C}$ 的含幺^代数同态的集合），并令 $\gamma_{\mathcal{A}}\colon\mathcal{A}\to C(\mathcal{A},\mathbb{C})$ 为由 $\gamma_{\mathcal{A}}(a)=\widehat{a}$ 给出的盖尔范德同-^态，其中对 $a\in\mathcal{A}$ 和 $h\in\mathcal{A}$，有 $\widehat{a}(h)=h(a)$。根据盖尔范德理论的众所周知的结果，对每个 $a\in\mathcal{A}$，都有 $r(a)=\|\widehat{a}\|_\infty$。由于 $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\gamma_{\mathcal{A}}$ 都是连续的，$r=\|\cdot\|_\infty\circ\gamma_{\mathcal{A}}$ 的连续性随即成立。□

~**命题 10.6.10.** 对任意交换 *CIA* $\mathcal{A}$，其完备化 $\mathcal{A}$是一个 *CIA*。

证明。记 $\beta\colon\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 为连续双线性代数乘法。令 I 为 $\mathcal{A}$上所有次乘性连续半范数构成的集合。给定$p,q\in I$，若对所有 a 都有 $p(a)\le q(a)$，则记作 $p\le q$。由于对所有 $p,q\in I$，$a\mapsto\max\{p(a)\ q(a)\}$ 都是次乘性的，因此 $(I,\le)$ 是有向的。此外，$rp\in I$ 对所有 $p\in I$ 和 $r\ge1$ 都成立。给定 $p\in I$，令 $\mathcal{A}_p:=\mathcal{A}/p^{-1}(\{0\})$ 为相应的赋范空间，令 $\alpha_p\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}_p$ 为典范商映射，并令~$(\mathcal{A}_p,\|\cdot\|_p)$ 为相应的巴拿赫空间。若 $a\in\mathcal{A}$ 满足 $p(a)=0$，则由 p 的次乘性可得，对所有 $b\in\mathcal{A}$，$p(ab)=p(ba)=0$。因此，$p^{-1}(\{0\})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的理想，故 $\mathcal{A}_p$ 是一个代数，其乘法为$\beta_p\colon\mathcal{A}_p\times\mathcal{A}_p\to\mathcal{A}_p$。由于 $\beta_p\circ(\alpha_p\times\alpha_p)=\alpha_p\circ\beta$ 是连续的，且 $\alpha:=p\times\alpha_p$ 是商映射，因此 β_p 是连续的，从而可将~~延拓为 $\mathcal{A}_p$上的连续代数乘法。因此，$\mathcal{A}_p$ 是一个含幺巴拿赫代数。对于 $p\le q$，典范映射 $\mathcal{A}_q\to\mathcal{A}_p$ 可延拓为连续的~~~~含幺代数同态 $\alpha_{pq}\colon\mathcal{A}_q\to\mathcal{A}_p$。于是 $((\mathcal{A})_{p\in I},(\alpha_{pq})_{p\le q})$ 是一个巴拿赫代数的~射影系统，我们可以构造其射影极限 $\mathcal{A}$。~~对于 $p\in I$，令 $\pi_p\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}_p$ 为极限映射。典范映射

$$\varphi\colon\mathcal{A}\to\lim_{\longleftarrow}\widetilde{\mathcal{A}}_p=\widetilde{\mathcal{A}},\quad a\mapsto(\alpha_p(a))_{p\in I}$$

是一个具有稠密像的拓扑嵌入，由命题 B.12.4(a)~和 (b) 得出。由于射影极限是完备的，我们看到 $(\mathcal{A},\ \varphi)$ 是 $\mathcal{A}$ 的完备化（射影极限的记号 $\mathcal{A}$ 已经暗示了这一点）。~作为含幺巴拿赫代数的射影极限，$\mathcal{A}$ 具有连续的求逆映射

$$\iota_{\widetilde{\mathcal{A}}}\colon \widetilde{\mathcal{A}}^\times \to \widetilde{\mathcal{A}},$$

因为对于每个 $p \in I$，$\pi_p \circ \iota_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \iota_{\widetilde{\mathcal{A}}_p} \circ \pi_p$ 都是连续的。

为了说明 $\mathcal{A}^\times$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个 $\mathbf{1}$-邻域（因而是开集），取一个开零邻域 $U \subseteq \mathcal{A}$，使得

$$r_{\mathcal{A}}(a) \le \frac{1}{2} \quad \text{for all } a \in U$$

（参见引理 10.1.11）。由于 φ 是一个具有稠密像的拓扑嵌入，闭包 $\varphi(U)$ 的内部包含 $\varphi(U)$。因此，$\varphi(U)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个零邻域，若能证明下式，证明便完成：

$$\mathbf{1} + \overline{\varphi(U)} \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}^\times. \tag{10.13}$$

现在，根据引理 10.6.7，对于所有 $a \in U$，都有 $r_{\widetilde{\mathcal{A}}_p}(\alpha_p(a)) \le r_{\mathcal{A}}(a) \le \frac{1}{2}$。因此，对于所有 $a \in \varphi(U)$（因为 $\pi_p \circ \varphi = \alpha_p$），都有 $r_{\widetilde{\mathcal{A}}_p}(\pi_p(a)) \le \frac{1}{2}$，从而

$$r_{\widetilde{\mathcal{A}}_p}(\pi_p(a)) \le \frac{1}{2} \quad \text{for all } a \in \overline{\varphi(U)},$$

由映射 $r_{\widetilde{\mathcal{A}}_p}$（见引理 10.6.9）和 π_p 的连续性可知。因此，对于所有 $a \in \varphi(U)$，都有 $\operatorname{Spec}_{\widetilde{\mathcal{A}}_p}(\pi_p(a)) \subseteq \overline{B}^{\mathbb{C}}_{1/2}(0)$，故

$$\operatorname{Spec}_{\widetilde{\mathcal{A}}_p}(\mathbf{1} + \pi_p(a)) \subseteq \overline{B}^{\mathbb{C}}_{1/2}(1) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

由此可得，对于所有 $p \in I$，$\pi_p(\mathbf{1} + a) = \mathbf{1} + \pi_p(a) \in \mathcal{A}_p^\times$。因此，根据引理 10.6.8，$\mathbf{1} + a \in \mathcal{A}^\times$，并且 (10.13) 得证。□

10.6.4 光滑向量代数的正则性

假设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数，其单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是一个正则李群，并且 G 是一个李群，通过拓扑自同构 $\alpha\colon G \to \operatorname{Aut}(\mathcal{A})$ $g \mapsto \alpha_g$, $g.a = \alpha_g(a)$ 作用于 $\mathcal{A}$。

令 $\mathcal{A}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ 为该作用的光滑向量子空间，并回顾上一小节中的结论：它带有自然的连续逆代数结构，且

$$(\mathcal{A}^\infty)^\times = \mathcal{A}^\times \cap \mathcal{A}^\infty$$

并且有连续包含映射 $\iota\colon \mathcal{A}^\infty \to \mathcal{A}$（命题 10.5.2）。

引理 10.6.11. 若 $\alpha\colon G \times E \to E$ 是 G 在局部凸空间 E 上的光滑作用，且 M 是有限维流形（可能带边界），那么 G 在局部凸空间 $C^\infty(M, E)$ 上的诱导作用 $(g.f)(m) := g.f(m)$ 是光滑的。

证明. 我们回顾引理 4.1.15，求值映射

$$\mathrm{ev}\colon C^\infty(M,E)\times M\to E$$

是光滑的。因此，该映射

$$G\times C^\infty(M,E)\times M\to E,\quad (g,f,m)\mapsto (g.f)(m)=g.f(m)=g.\,\mathrm{ev}(f,m)$$

是光滑的，因为它是求值映射与作用映射的复合。现在，命题 4.1.21 表明作用映射

$$G\times C^\infty(M,E)\to C^\infty(M,E),\quad (g,f)\mapsto g.f$$

也是光滑的。 □

定理 10.6.12。设 $\mathcal{A}^\times$ 是一个正则李群，且其在 $\mathcal{A}^\infty$ 上诱导的 G-作用是光滑的。那么 $\mathcal{A}^\infty$ 的单位群也是正则的。

证明。 设 $\xi\in C^\infty(I,\mathcal{A}^\infty)$ 是一个光滑映射。那么 ξ 也是到 $\mathcal{A}$ 的光滑映射，而 $\mathcal{A}^\times$ 的正则性蕴含了光滑路径 γ 的存在性： $I\to\mathcal{A}^\times$ 解线性初值问题

$$\gamma(0)=\mathbf{1},\qquad \gamma'(t)=\gamma(t)\cdot\xi(t)\quad \text{for}\quad t\in[0,1].$$

为验证 $\gamma(I)\subseteq\mathcal{A}^\infty$，我们首先注意到演化映射

$$\mathrm{evol}_{\mathcal{A}}\colon C^\infty(I,\mathcal{A})\to\mathcal{A}^\times$$

关于自然作用是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$-等变的，因此特别是$G$-等变的。

由引理 10.6.11 可知， G 在 $C^\infty(I,\mathcal{A}^\infty)$ 上的诱导作用是光滑的。因此，$\mathrm{evol}_{\mathcal{A}}$ 的等变性意味着，对每个 $t\in I$，都有 $\gamma(t)\in\mathcal{A}^\infty$ （这里用到了 G 在 $\mathcal{A}^\infty$ 上作用的光滑性）。 G 在 $\mathcal{A}^\infty$ 上的作用的光滑性意味着映射

$$G\times I\to\mathcal{A}^\infty,\quad (g,t)\mapsto g.\xi(t)$$

是光滑的。应用 $\mathrm{evol}_{\mathcal{A}}$，我们得出

$$G\times I\to\mathcal{A},\quad (g,t)\mapsto g.\gamma(t)=\alpha^{\gamma(t)}(g)$$

是光滑的。因此映射

$$I\to C^\infty(G,\mathcal{A}),\quad t\mapsto\alpha^{\gamma(t)}$$

是光滑的（命题 4.1.21），这意味着 $\gamma\colon\ I\to\mathcal{A}^\infty$ 是一条光滑曲线。因此，演化映射

$$\mathrm{evol}_{\mathcal{A}^\infty}\colon C^\infty(I,\mathcal{A}^\infty)\to(\mathcal{A}^\infty)^\times$$

有定义。为了证明它是光滑的，我们可以再次使用命题 4.1.21，因此只需证明映射

$$G \times C^\infty(I, \mathcal{A}^\infty) \to \mathcal{A}^\times, \quad (g, \xi) \mapsto g.\operatorname{evol}_{\mathcal{A}}(\xi) = \operatorname{evol}_{\mathcal{A}}(g.\xi)$$

是光滑的，但这由 G 在$C^\infty(I, \mathcal{A}^\infty)$上的作用的光滑性以及复合的光滑性得出

$$C^\infty(I, \mathcal{A}^\infty) \hookrightarrow C^\infty(I, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}^\times, \quad \xi \mapsto \operatorname{evol}_{\mathcal{A}}(\xi). \qquad \square$$

推论 10.6.13.若 G 是作用在连续逆代数$\mathcal{A}$ 上的有限维李群，且其单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是正则李群，则连续逆代数$\mathcal{A}^\infty$ 的单位群也是正则的。

证明. 若 G 是有限维李群，则 G 在空间 $C^\infty(G, \mathcal{A})$上的右平移作用是光滑的。事实上，求值映射$C^\infty(G, \mathcal{A}) \times G \to \mathcal{A}$ 是光滑的，由此可知映射

$$G \times C^\infty(G, \mathcal{A}) \times G \to \mathcal{A}, \quad (g, f, x) \mapsto (g.f)(x) = f(xg) = \operatorname{ev}(f, xg)$$

是光滑的，因此命题 4.1.21 表明 G在 $C^\infty(G, \mathcal{A})$上的作用是光滑的。于是定理 10.6.12 适用。□

注 10.6.14.若 G 是巴拿赫–李群，则G在 $\mathcal{A}^\infty$ 上的作用的光滑性由 [Ne10, 定理 4.4],得出，因此定理 10.6.12 在此情形下同样适用。

推论 10.6.15. 光滑量子环面 (例 10.5.3)的单位群是正则李群。

命题 10.6.16. 假设连续逆代数 $\mathcal{A}$ 的单位群 $\mathcal{A}^\times$ 是正则的，并且 $p \in \operatorname{Idem}(\mathcal{A})$。那么连续逆代数 $p\mathcal{A}p$ 的单位群也是正则的。

证明。 考虑对合 $\alpha_p := 2p - \mathbf{1} \in \mathcal{A}^\times$。那么，

$$\mathcal{A} = p\mathcal{A}p \oplus p\mathcal{A}(\mathbf{1} - p) \oplus (\mathbf{1} - p)\mathcal{A}p \oplus (\mathbf{1} - p)\mathcal{A}(\mathbf{1} - p)$$

这意味着 α_p 在 $\mathcal{A}$ 中的中心化子是闭子空间

$$p\mathcal{A}p \oplus (\mathbf{1} - p)\mathcal{A}(\mathbf{1} - p) = \mathcal{A}^{\alpha_p}$$

而 $\mathcal{A}^\times$ 的正则性很容易推出乘积群的正则性

$$(p\mathcal{A}p)^\times \oplus \big((\mathbf{1} - p)\mathcal{A}(\mathbf{1} - p)\big)^\times$$

由此可以直接推出 $(p\mathcal{A}p)^\times$ 的正则性。 □

问题 10.6.17. $\mathcal{A}^\times$ 的正则性是否意味着对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$ 的正则性?

10.7 附录：连续逆代数的谱理论

本节将发展麦基完备复连续逆代数上的全纯函数演算，以应用于李理论问题，例如群 $\mathcal{A}^\times$ 的 BCH 性质。在本节余下部分中，Ω 表示 $\mathbb{C}$ 的一个非空开子集，而 $\mathcal{A}$ 表示一个麦基完备含幺复连续逆代数。

10.7.1 谱演算

定义 10.7.1。我们用 $\mathcal{O}(\Omega)$ 表示全纯函数的空间$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$，并赋予其紧集上一致收敛拓扑。定义

$$\mathcal{A}_\Omega := \{x \in \mathcal{A} \colon \operatorname{Spec}(x) \subseteq \Omega\}.$$

容易看出，$\mathcal{O}(\Omega)$ 在逐点运算下是一个 Fr´echet 代数，因为它是 Fr´echet 代数 $C(\Omega,\ \mathbb{C})$ 的闭子代数（引理 A.6.24(b)、(c)、(e)）。根据引理 10.1.11，$\mathcal{A}_\Omega$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开的。

定义 10.7.2。回顾一下，光滑曲线 $\gamma\colon [a_\gamma, b_\gamma] \to \mathbb{C}$ 的形式有限 $\mathbb{Z}$-线性组合 $\Gamma = \sum_\gamma n_\gamma \gamma$（其中几乎所有 $n_\gamma = 0$）称为一条围道，如果对所有 $z \in \mathbb{C}$，都有 $\sum\{n_\gamma \colon \gamma(a_\gamma) = z\} = \sum\{n_\gamma \colon \gamma(b_\gamma) = z\}$。如果 $K \subseteq \mathbb{C}$ 是一个紧集，U 是 K 在 $\mathbb{C}$ 中的一个开邻域，并且 Γ 如前所述，则称 Γ 是一条包围 K 于 U 的围道，如果在 $n_\gamma \neq 0$ 时 $\operatorname{im}(\gamma) \subseteq U \setminus K$，并且

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 1 & \text{if } z \in K \\ 0 & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus U. \end{cases}$$

容易看出，在 U 中环绕 K 的围道总是存在（参见 [Ru91]）。

定义 10.7.3. 给定 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$与 $x \in \mathcal{A}_\Omega$，我们定义

$$\begin{aligned} f[x] &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(\zeta)\,(\zeta \mathbf{1} - x)^{-1}\, d\zeta \\ &:= \frac{1}{2\pi i} \sum_\gamma n_\gamma \cdot \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,(\gamma(t)\mathbf{1} - x)^{-1}\, dt, \end{aligned}$$

其中 Γ 是在 Ω 中环绕谱(x)的围道（这些积分存在，因为假定$\mathcal{A}$ 是麦基完备的）。

应用连续线性泛函，我们由标量值柯西定理推出，$f[x]$ 与所选围道无关。

命题 10.7.4. 对于固定的 $x \in \mathcal{A}_\Omega$，映射

$$\Phi\colon \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{A}, \quad f \mapsto f[x]$$

是一个含幺代数同态，它将 $J\colon = $ 恒等映射$_{\mathbb{C}}|_\Omega$ 映射到 x。

证明。显然， Φ 是线性的。

步骤 1： 我们有 $\Phi(J^k) = x^k$ 对每个 $k \in \mathbb{N}_0$。令 $W \subseteq \mathcal{A}^\times$ 为 $\mathcal{A}$中的一个平衡开零邻域。存在 $r > 0$ 使得 $r^{-1}x \in W$ 且谱$(x) \subseteq B_r(0)$。映射 $J^k \in \mathcal{O}(\Omega)$可延拓为映射 $z \mapsto z^k$ in$\mathcal{O}(\mathbb{C})$；鉴于定义 10.7.3 中所选围道的独立性，因此只需在证明的当前部分中假设 $\Omega = \mathbb{C}$ in，从而可以选取圆周的正向参数化 γ，该圆周以 0 为圆心、半径为 $2r$，作为环绕谱(x)的围道，用于定义 $\Phi(J^k) = J^k[x]$。对于固定的$\lambda \in \mathcal{A}'$，考虑复解析函数

$$f\colon B_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \lambda((\mathbf{1} - zx)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \lambda(x^n)$$

（命题 10.1.12、引理 10.1.14）。由于幂级数的收敛半径至少为 $\frac{1}{r}$，该级数在$B_{\frac{1}{2r}}(0)$上一致绝对收敛，因此

$$\begin{aligned} \lambda\left(\int_\gamma \zeta^k(\zeta\mathbf{1} - x)^{-1}\,d\zeta\right) &= \int_\gamma \zeta^{k-1}\lambda((\mathbf{1} - \zeta^{-1}x)^{-1})\,d\zeta \\ &= \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{k-1-n}\lambda(x^n)\,d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_\gamma \zeta^{k-1-n}\,d\zeta\Big)\lambda(x^n) = 2\pi i\,\lambda(x^k) \end{aligned}$$

利用 $\int_\gamma \zeta^{k-1-n}\,d\zeta = 2\pi i\,\delta_{k,\,n}$。在 $\mathcal{A}$ 上分离点的连续线性泛函，因此我们推得 $\Phi(J^k) = x^k$。

步骤 2： Φ 是含幺代数同态。由于我们已经知道 Φ 是线性的，且将 $\mathbf{1} = J^0$ 映到 $x^0 = \mathbf{1}$，因此只需证明 Φ 是乘法的。为此，设 $f,\ g \in \mathcal{O}(\Omega)$。存在一个相对紧开邻域 U，它是复数域中 Spec(x) 的邻域，且其闭包包含于 Ω。我们选取一条在 U 中围绕 Spec(x) 的围道 Γ_1，以及一条围绕 $\overline{U}$ 的围道 Γ_2，其中后者位于 Ω。然后我们使用第一预解式

$$r_x(z)r_x(\zeta) = (\zeta - z)^{-1}(r_x(z) - r_x(\zeta)) \tag{10.14}$$

得到

$$\begin{aligned} f[x]g[x] &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(z)r_x(z)\,dz\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} g(\zeta)r_x(\zeta)\,d\zeta\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(z)g(\zeta)r_x(z)r_x(\zeta)\,d\zeta dz \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1} f(z)\left(\int_{\Gamma_2}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right)r_x(z)\,dz \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2} g(\zeta)\left(\int_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{z - \zeta}\,dz\right)r_x(\zeta)\,d\zeta, \end{aligned}$$

其中，我们两次使用习题 1.1.3 得到第二个等式，并使用富比尼定理得到最后一行。由于根据柯西积分公式，$\int_{\Gamma_2} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i\, g(z)$（因为 $\operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(z) = 1$），且 $\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz = 0$ as $\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(\zeta) = 0$，我们得到

$$f[x]g[x] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(z)g(z)r_x(z)\,dz = (f\cdot g)[x]. \qquad \square$$

定理 10.7.5. 对于每个非空开子集 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$，映射

$$\Xi\colon \mathcal{O}(\Omega)\times \mathcal{A}_\Omega \to \mathcal{A}, \quad \Xi(f,x) := f[x]$$

是复解析的。特别地，对每个 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$，映射 $\mathcal{A}_\Omega \to \mathcal{A}, x \mapsto f[x]$ 是复解析的，并且对任意 $x \in \mathcal{A}$，同态 Φ（如命题 10.7.4 中所述）是连续的。

证明。设 $(f,x) \in \mathcal{O}(\Omega)\times\mathcal{A}_\Omega$。在 $\mathbb{C}$ 中存在 $\operatorname{Spec}(x)$ 的一个相对紧开邻域 U，使得 $U \subseteq \Omega$。则 $\mathcal{A}_U$ 是 x 在 $\mathcal{A}$ 中的一个开邻域。固定一条在 Ω 中环绕 U 的围道 $\Gamma = \sum_\gamma n_\gamma \gamma$，并注意到对所有 $(f,x) \in \mathcal{O}(\Omega)\times\mathcal{A}_U$，我们有

$$\Xi(f,x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\zeta)\,(\zeta\mathbf{1}-x)^{-1}\,d\zeta.$$

因此，只需证明：对 Γ 中出现的每条路径 $\gamma\colon [a,b]\to\Omega$，映射

$$\mathcal{O}(\Omega)\times\mathcal{A}_U \to \mathcal{A},\ (f,x)\mapsto \int_a^b \Psi(t,f,x)\,dt, \quad \Psi(t,f,x) := f(\gamma(t))(\gamma(t)\mathbf{1}-x)^{-1}$$

是复解析的。

首先我们注意到，函数

$$\mathcal{O}(\Omega)\to C^1([a,b],\mathbb{C}), \quad f\mapsto f\circ\gamma$$

是连续的，因为 $\gamma([a,b])$ 是 Ω 的紧子集。此外，$\mathcal{A}$ 中求逆的连续性意味着

$$[a,b]\times\mathcal{A}_U\to\mathcal{A}, \quad (t,x)\mapsto(\gamma(t)\mathbf{1}-x)^{-1}$$

是连续的。现在，$\mathcal{A}$ 中乘法的连续性意味着 Ψ 是连续的。对于每个固定的 $t\in[a,b]$，函数 $\Psi_t(f,x) := \Psi(t,f,x)$ 是复解析的，其微分为

$$\begin{aligned} &d\Phi_t((f,x),(g,y))\\ &= g(\gamma(t))(\gamma(t)\mathbf{1}-x)^{-1} + f(\gamma(t))(\gamma(t)\mathbf{1}-x)^{-1}y(\gamma(t)\mathbf{1}-x)^{-1}. \end{aligned} \tag{10.15}$$

由于所有这些函数都是 C^1 于 t 中，且 $\mathcal{A}$是麦基完备的，命题 1.3.23 结合定理 2.1.12 现在表明，Ξ 在 (f,x) 的开邻域 $C(\Omega)\times\mathcal{A}_U$ 上是复解析的，因为 $\mathcal{A}$ 是麦基完备的。由于(f,x)在 $\mathcal{O}(\Omega)\times\mathcal{A}_\Omega$中是任意的，这就证明了该定理。□

推论 10.7.6. 设 $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ 是定义在圆盘 $B_r(z_0) \subseteq \mathbb{C}$上的全纯函数，其幂级数展开为 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$。则

$$(\forall x \in \mathcal{A}_{B_r(z_0)}) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - z_0\mathbf{1})^n \ .$$

证明。 我们有 $f_k \to f$属于 $\mathcal{O}(B_r(z_0))$，其中 $f_k(z) := \sum_{j=0}^{k} a_j(z-z_0)^j$. 因此，对于每个 $x \in \mathcal{A}_{B_r(z_0)}$，由定理 10.7.5 可得 $f[x] = \lim_{k\to\infty} f_k[x]$。还需注意，根据命题 10.7.4， $f_k[x] = \sum_{j=0}^{k} a_j\,(x - z_0 e)^j$。□

熟知的谱映射定理也适用于麦基完备连续逆代数。

命题 10.7.7。设 $x \in \mathcal{A}_\Omega$ 和 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$。则

(a) $f[x]$ 在 $\mathcal{A}$ 中可逆，当且仅当对所有 $z \in$ 谱(x)， $f(z) \neq 0$ 。(b) 谱$(f[x]) = f($谱$(x))$。

证明。 根据上面的命题 10.7.4，可以原封不动地重复 [Ru91,Thm. 10.28] 中给出的巴拿赫情形的证明。□

关于复合，巴拿赫情形的通常证明（见 [Ru91, Thm. 10.29]）无需修改即可适用。我们得到：

命题 10.7.8。 设 $x \in \mathcal{A}_\Omega$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ 是 $\mathbb{C}$ 中 $f($谱$(x))$ 的一个开邻域，且 $g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$。令 $h := g \circ (f|_{\Omega_0}^{\Omega_1})$，其中 $\Omega_0 := f^{-1}(\Omega_1)$。则 $f[x] \in \mathcal{A}_{\Omega_1}$，且 $h[x] = g[f[x]]$。

对于本节最后一个命题，设 $\mathcal{A}$ 是一个麦基完备的实连续逆代数。给定 $x \in \mathcal{A}$, 我们将 Spec(x) 定义为 x 的谱，并将其视为 $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ 的一个元素。设 $\kappa\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，并且

$$\tau\colon \mathcal{A}_\mathbb{C} \to \mathcal{A}_\mathbb{C}, \quad \tau(x+iy) = \overline{x+iy} := x - iy \quad \text{for} \quad x, y \in \mathcal{A}$$

分别表示复共轭。给定一个在复共轭作用 κ 下不变的非空开子集Ω，它属于 $\mathbb{C}$，我们令 $\mathcal{A}_\Omega := (\mathcal{A}_\mathbb{C})_\Omega \cap \mathcal{A}$，并在$f \in \mathcal{O}(\Omega)$且 $x \in \mathcal{A}_\Omega$ 时，使用关于 $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ 的全纯函数演算定义 $f[x] \in \mathcal{A}_\mathbb{C}$。显然， $f^*(z) := \overline{f}(z)$（即， $f^* := \kappa \circ f \circ \kappa|_\Omega^\Omega$）定义了一个连续对合 $*\colon \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$，从而使 $\mathcal{O}(\Omega)$ 成为一个 $*$-代数。

命题 10.7.9。对于 $x \in (\mathcal{A}_\mathbb{C})_\Omega$ 和 $f \in \mathcal{O}(\Omega)$，有

$$\tau(f[x]) = f^*[\tau(x)].$$

特别地，对于所有 $x \in \mathcal{A}_\Omega$ 和厄米元素 $f = f^* \in \mathcal{O}(\Omega)$，均有 $f[x] \in \mathcal{A}$。

证明。容易验证，τ 是 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ 的复反线性、连续实含幺代数自同构。我们立即推出，对于 $x \in (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})_\Omega$，有 $\mathrm{Spec}(\tau(x)) = \mathrm{Spec}(x) \subseteq \Omega$。对于 $z \in \rho(x)$，我们有

$$\tau(r(x,z)) = \tau((z\mathbf{1}-x)^{-1}) = (\overline{z}\mathbf{1}-\tau(x))^{-1} = r(\tau(x),\overline{z}).$$

设 $\Gamma = \sum_\gamma n_\gamma \gamma$ 是 Ω 中环绕 $\mathrm{Spec}(x)$ 的围道。那么

$$\Gamma_2 := -\sum_\gamma n_\gamma\, \kappa \circ \gamma$$

是 Ω 中环绕 $\mathrm{Spec}(x) = \overline{\mathrm{Spec}(\tau(x))}$ 的围道。因此

$$\tau(f[x]) = \sum_\gamma \frac{-n_\gamma}{2\pi i}\int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \overline{f(\gamma(t))}\,\overline{\gamma'(t)}\, r(\tau(x),\overline{\gamma(t)})\,dt$$

$$= \sum_\gamma \frac{-n_\gamma}{2\pi i}\int_{a_\gamma}^{b_\gamma} f^*((\kappa\circ\gamma)(t))\,(\kappa\circ\gamma)'(t)\, r(\tau(x),(\kappa\circ\gamma)(t))\,dt = f^*[\tau(x)],$$

如上所述。余项可直接得出。 □

请注意，在上述情形下，$\mathcal{O}(\Omega) = \mathrm{Herm}(\mathcal{O}(\Omega))_{\mathbb{C}}$。其中 $\mathrm{Herm}(\mathcal{O}(\Omega)) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f = f^*\}$ 是 $\mathcal{O}(\Omega)$ 中厄米元素构成的实向量子空间。由于 Ψ: $\mathrm{Herm}(\mathcal{O}(\Omega)) \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，$(f,\ x) \mapsto f[x]$ 可扩展为复解析映射 $(\mathrm{Herm}(\mathcal{O}(\Omega)) \times \mathcal{A})_{\mathbb{C}} = \mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$（定理 10.7.5），映射 Ψ 是实解析的。

10.7.2 指数函数和对数函数

定义 10.7.10。利用指数函数

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

和对数函数

$$\log\colon B_1(1) \to \mathbb{C}, \qquad \log(z) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{(z-1)^k}{k},$$

我们利用上一节（命题 10.7.9）所述的全纯函数演算，定义映射 $\exp_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\exp_{\mathcal{A}}(x) := \exp[x]$ 和 $\log_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}_{B_1(1)} \to \mathcal{A}$, $\log_{\mathcal{A}}(x) := \log[x]$。

作为定理 10.7.5 的推论，在 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情形下，$\log_{\mathcal{A}}$ 是复解析映射，而 $\exp_{\mathcal{A}}$ 对于每个 $r > 0$ 都在 $\mathcal{A}$ 的开子集 $\mathcal{A}_{B_r(0)}$ 上复解析，因此是复解析的。如果 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$，那么 $\exp_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ 和

$\log_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$ 是相应复化代数的开子集之间的复解析映射（命题 10.1.13），它们分别延拓 $\exp_{\mathcal{A}}$ 和 $\log_{\mathcal{A}}$，因此 $\exp_{\mathcal{A}}$ 和 $\log_{\mathcal{A}}$ 是实解析映射。推论 10.7.6 表明

$$(\forall x \in \mathcal{A}) \quad \exp_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k \quad \text{and} \tag{10.16}$$

$$(\forall x \in \mathcal{A}_{B_1(1)}) \quad \log_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, (x - \mathbf{1})^k. \tag{10.17}$$

引理 10.7.11。我们有

(a) 对所有 $x \in \mathcal{A}_{B_1(1)}$，$\exp_{\mathcal{A}}(\log_{\mathcal{A}}(x)) = x$，以及 *(b)* 对所有 $x \in \mathcal{A}_{B_{\log(2)}(0)}$，$\log_{\mathcal{A}}(\exp_{\mathcal{A}}(x)) = x$。*(c)* 令 $V := \log_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{A}_{B_{\log(2)}(0)})$ 且 $U := \{x \in \mathcal{A}_{B_{\log(2)}(0)} : \exp_{\mathcal{A}}(x) \in V\}$。则 V 是 $\mathcal{A}$中的一个开单位元邻域，U 是 $\mathcal{A}$中的一个开零邻域，并且 $\exp_{\mathcal{A}}|_U^V : U \to V$ 是一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚，其逆映射为 $\log_{\mathcal{A}}|_V^U$。

证明。(a) 众所周知，对所有 $z \in B_1(1) \subseteq \mathbb{C}$，$\exp(\log(z)) = z$。命题 10.7.8 和命题 10.7.4 推出，对所有 $x \in \mathcal{A}_{B_1(1)}$，$\exp_{\mathcal{A}}(\log_{\mathcal{A}}(x)) = x$。

(b) 众所周知，对所有 $z \in B_{\log(2)}(0)$，$|\exp(z) - 1| < 1$，而对这样的，log(exp($z = z$ 10.7.7 $\mathcal{A}_{B_1(1)}$ $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}$ $x = x$ $x \in \mathcal{A}_{B_{\log(2)}(0)}$ $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}_{B_{\log(2)}(0)} \subseteq$ 10.7.8))。命题 . . 表明，exp (()) ()。因此，根据命题 . . 和命题 10.7.4，对所有 ()，log (exp ( ))。

(c) $\log_{\mathcal{A}}$ 和 $\exp_{\mathcal{A}}|_{\mathcal{A}_{B_{\log(2)}(0)}}$ 是定义在 $\mathcal{A}$的开子集上的连续映射，因此显然 U 和 V 是开集。由（10.16）和（10.17）可知，$\log_{\mathcal{A}}(\mathbf{1}) = 0$ 且 $\exp_{\mathcal{A}}(0) = \mathbf{1}$，因此 $\mathbf{1} \in V$ 和 $0 \in U$ 成立。给定 $x \in V$，由（a）可得 $\exp_{\mathcal{A}}(\log_{\mathcal{A}}(x)) = x \in V$，其中根据 V的定义，$\log_{\mathcal{A}}(x) \in \mathcal{A}_{B_{\log(2)}(0)}$。因此，根据 U的定义，$\log_{\mathcal{A}}(x) \in U$。我们已证明 $V \subseteq \exp_{\mathcal{A}}(U)$。根据 U的定义，$\exp_{\mathcal{A}}(U) \subseteq V$，由此可推得 $\exp_{\mathcal{A}}(U) = V$。我们还证明了 $\log_{\mathcal{A}}(V) \subseteq U$，并

$$\exp_{\mathcal{A}}|_U^V \circ \log_{\mathcal{A}}|_V^U = \mathrm{id}_V\,. \tag{10.18}$$

由前述结果可知，$\exp_{\mathcal{A}}|_U^V : U \to V$ 是满射。由 (b) 可知，$\exp_{\mathcal{A}}|_U^V$ 也是单射，因此是双射。与 (10.18) 中的 $(\exp_{\mathcal{A}}|_U^V)^{-1}$ 复合后，我们得到 $\log_{\mathcal{A}}|_V^U = (\exp_{\mathcal{A}}|_U^V)^{-1}$。由于 $\exp_{\mathcal{A}}|_U^V$ 和 $\log_{\mathcal{A}}|_V^U$ 都是 $\mathbb{K}$解析映射，$\exp_{\mathcal{A}}|_U^V$ 是 $\mathbb{K}$解析流形之间的微分同胚。□

引理 10.7.12。我们有 $\mathrm{im}(\exp_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{A}^\times$，且余限制 $\exp_{\mathcal{A}}|^{\mathcal{A}^\times} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\times$ 是李群 $\mathcal{A}^\times$ 的指数映射，即对于每个 $x \in \mathcal{A}$，映射 $\gamma_x : \mathbb{R} \to \mathcal{A}^\times$, $\gamma_x(t) := \exp_{\mathcal{A}}(tx)$ 都是光滑同态，且满足 $\gamma_x'(0) = x$。

证明。设 $x \in \mathcal{A}$。映射 $\exp_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbb{K}$-解析的，因而是光滑的，γ_x 是一条光滑曲线；我们有 $\gamma_x(0) = \mathbf{1}$。给定 $r \in \mathbb{R}$，定义 $\mu_r\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,$\mu_r(z) := r \cdot z$，以及 $e_r := \exp \circ \mu_r\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $e_r(z) = \exp(rz)$。由命题 10.7.4 可得 $\mu_r[x] = r \cdot x$，因此，利用命题 10.7.8，$e_r[x] = \exp[\mu_r[x]] = \exp_{\mathcal{A}}(rx)$。

给定 r，$s \in \mathbb{R}$，我们有 $e_r \cdot e_s = e_{r+s}$，从而

$$\gamma_x(r+s) = \exp_{\mathcal{A}}((r+s)x) = e_{r+s}[x] = e_r[x]e_s[x] = \gamma_x(r)\gamma_x(s)$$

根据命题 10.7.4。特别地,

$$\gamma_x(r)\gamma_x(-r) = \gamma_x(-r)\gamma_x(r) = \gamma_x(0) = \mathbf{1},$$

这表明 $\gamma_x(r) \in \mathcal{A}^\times$ 且 $\gamma_x(r)^{-1} = \gamma_x(-r)$。因此 $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to \mathcal{A}^\times$ 是一个同态。利用方程 10.15，我们看到

$$\gamma_x'(0) = d\exp_{\mathcal{A}}(0; x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\exp(z)}{z^2} x\, dz = \exp'(0)x = x,$$

其中 Γ 是围绕 $\{0\}$ 的围道。 □

引理 10.7.13。 设 $\mathcal{A}$ 是一个复单位巴拿赫代数，并考虑右开半平面 $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\colon \text{实部 } z > 0\}$. 于是我们得到一个全纯映射

$$\log\colon \mathcal{A}_\Omega \to \mathcal{A}.$$

若 $*$ 是 $\mathcal{A}$ 的反线性反自同构，则$\log(x^*) = \log(x)^*$，其中 $x \in \mathcal{A}_\Omega$。

证明。由引理 10.1.11 可知，$\mathcal{A}_\Omega$ 是开集；而由定理 10.7.5 可知 log 是全纯的。关系 $\log(a^*) = \log(a)^*$ 可按命题 10.7.9 的证明得到。□

第 10 章习题

习题 10.7.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个连续逆代数，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是一个单位子代数。若 $\mathcal{B}^\times = \mathcal{A}^\times \cap \mathcal{B}$，则 $\mathcal{B}$ 也是一个连续逆代数。

习题 10.7.2.对于一个结合的 $\mathbb{K}$-代数 $\mathcal{A}$，记 $\mathcal{A}_+$ 为代数 $\mathcal{A} \times \mathbb{K}$，其乘法为

$$(a, s)(b, t) := (ab + sb + ta, st).$$

(1) 验证 $\mathcal{A}_+$ 是一个含幺代数，其单位元为 $\mathbf{1} = (0,\ 1)$。(2) 证明 $\mathrm{GL}_1(\mathcal{A}) := \mathcal{A}_+^\times \cap (\mathcal{A} \times \{1\})$ 是一个群。(3) 若 $e \in \mathcal{A}$ 是单位元，则 $\mathcal{A}_+$ 与乘积为 $(a,\ s)(b,\ t) = (ab,\ st)$ 的直积代数 $\mathcal{A} \times \mathbb{K}$ 同构。

习题 10.7.3. 一个 *topological ring* 是赋予了某种拓扑的环 $\mathcal{R}$，在该拓扑下，加法和乘法都是连续的。设 $\mathcal{R}$ 是一个含幺拓扑环。证明:

(1) 对于 $x \in \mathcal{R}^\times$，左乘和右乘 $\lambda_x(y) := xy$ 和 $\rho_x(y) := yx$ 都是 $\mathcal{R}$ 的同胚。(2) 单位群 $\mathcal{R}^\times$ 是开集，当且仅当它是 $\mathbf{1}$ 的一个邻域。(3) 若求逆运算 $\mathcal{R}^\times \to \mathcal{R}$ 在 $\mathbf{1}$ 处连续，则它是连续的，也就是说，$(\mathcal{R}^\times, \cdot)$ 是一个拓扑群。

习题 10.7.4. 设 $\mathcal{A}$ 是定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-代数（可能不含幺），$q\colon Q(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 是其拟求逆映射。证明下列结论：

(a) $Q(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的零邻域，当且仅当 $(\mathcal{A}_+)^\times$ 是 $\mathcal{A}_+$ 上的一个 $\mathbf{1}$-邻域。(b) q 在零点连续，当且仅当 $\iota\colon (\mathcal{A}_+)^\times \to \mathcal{A}_+, a \mapsto a^{-1}$ 在 $\mathbf{1}$ 处连续。

习题 10.7.5. 设 $\mathcal{R}$ 是一个含幺环，$2 \in \mathcal{R}^\times$, $n \in \mathbb{N}$，且 $M_n(\mathcal{R})$ 是所有以 $\mathcal{R}$ 中元素为项的 $(n \times n)$-矩阵所构成的环。以下将 $x \in M_n(\mathcal{R})$ 中的元素写作

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_n(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} M_{n-1}(\mathcal{R}) & M_{n-1,1}(\mathcal{R}) \\ M_{1,n-1}(\mathcal{R}) & \mathcal{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1}(\mathcal{R}) & \mathcal{R}^{n-1} \\ (\mathcal{R}^{n-1})^\top & \mathcal{R} \end{pmatrix}.$$

(1) 证明矩阵 x 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \beta \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \gamma & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \alpha \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{R}), \beta, \gamma^\top \in \mathcal{R}^{n-1}, \delta \in \mathcal{R}^\times$$

当且仅当 $d \in \mathcal{R}^\times, a - bd^{-1}c \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathcal{R})$，且在这种情况下

$$\delta = d, \quad \beta = bd^{-1}, \quad \gamma = d^{-1}c, \quad \alpha = a - bd^{-1}c.$$

(2) 进一步假设，$\mathcal{R}$ 是一个拓扑环，其单位群是开集且求逆连续。利用对 n 的归纳法证明

(a) $\mathrm{GL}_n(\mathcal{R})$ 在 $M_n(\mathcal{R})$ 中是开集。(b) $\mathrm{GL}_n(\mathcal{R})$ 中的求逆是连续的，也就是说，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{R})$ 是一个拓扑群。

习题 10.7.6。设 $\mathcal{R}$ 是一个含幺环，并考虑右 $\mathcal{R}$-模 $\mathcal{R}^n$，其中模结构由 $(x_1, \ldots, x_n) r := (x_1 r, \ldots, x_n r)$ 给定。设 M 是一个右 $\mathcal{R}$-模，$\sigma\colon r \mapsto r^\sigma$ 是 $\mathcal{R}$ 上的一个对合，即一个对合反自同构，并且 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$。若双加性映射 $\beta\colon M \times M \to \mathcal{R}$ 满足

$$\beta(xr, ys) = r^\sigma \beta(x, y) s \quad \text{for} \quad x, y \in M, r, s \in \mathcal{R}.$$

如果此外还满足以下条件，则称其为 σ-ε-*hermitian*

$$\sigma(x, y)^\sigma = \varepsilon \sigma(y, x) \quad \text{for} \quad x, y \in M.$$

对于 $\varepsilon = 1$，我们称该形式为 σ-*hermitian*，并将 σ-*antihermitian* 称为 $\varepsilon = -1$。对于 M上的 aσ-ε-厄米形式 β，

$$\mathrm{U}(M, \beta) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{R}}(M)\colon (\forall x, y \in M)\ \beta(\varphi(x), \varphi(y)) = \beta(x, y)\}$$

称为相应的 *unitary group*。证明：

(1) $\mathrm{End}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}^n) \cong M_n(\mathcal{R})$，其中 $M_n(\mathcal{R})$ 通过左乘作用于列向量空间 $\mathcal{R}^n$。(2) $\mathrm{Aut}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}^n) \cong \mathrm{GL}_n(\mathcal{R})$。(3) $\beta(x,y) := \sum_{i=1}^n x_i^\sigma y_i$ 是 σ 上的厄米形式。用矩阵描述相应的酉群。(4) $\beta(x,y) := \sum_{i=1}^n x_i^\sigma y_{n+i} - x_{n+i}^\sigma y_i$ 是 $\mathcal{R}^{2n}$ 上的反厄米形式。用矩阵描述相应的酉群。

习题 10.7.7. 证明：一般而言，对于巴拿赫空间 E 的闭子空间 F，集合 $\{g \in \mathrm{GL}(E) : gF \subseteq F\}$ 不是子群。

习题 10.7.8. 设 $\mathcal{A}$ 是交换连续逆代数，并且

$$\det : M_n(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

行列式函数。证明 det 限制为李群的光滑态射 $\det: \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^\times$，且 $\mathbf{L}(\det) = \mathrm{tr}$。

习题 10.7.9. 设 E 是巴拿赫空间，且 $v \in E$。证明

$$\mathrm{GL}(E)_v := \{g \in \mathrm{GL}(E) : gv = v\}$$

是一个李子群，且

$$\mathbf{L}^e(\mathrm{GL}(E)_v) = \{Y \in \mathcal{L}(E) : Yv = 0\}.$$

习题 10.7.10. 设 $\mathcal{A}$ 是一个巴拿赫空间，且 $m: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个连续双线性映射。那么自同构群

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}, m) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{A}) : (\forall a, b \in \mathcal{A})\ m(ga, gb) = gm(a,b)\}$$

（不一定结合的）代数 $(\mathcal{A}, m)$ 是一个李群，其李代数是

$$\mathrm{der}(\mathcal{A}, m) := \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) : (\forall a, b \in \mathcal{A})\, Xm(a,b) = m(Xa, b) + m(a, Xb)\}$$

$(\mathcal{A}, m)$ 的导子空间。
提示：代数子群定理（另见命题 D.2.22）。

习题 10.7.11. 设 E 和 F 是巴拿赫空间，且 $\mathcal{L}^k(E,F)$ 是连续 k-线性映射 $E^k \to F$ 的空间。证明：

(a) $\mathcal{L}^k(E,F)$ 关于范数是一个巴拿赫空间

$$\|f\| := \sup\{\|f(x_1, \ldots, x_k)\| : x_i \in E, \|x_1\|, \ldots, \|x_k\| \le 1\}.$$

(b) 赋值

$$\big(\pi(g)f\big)(x_1, \ldots, x_k) := f(g^{-1}x_1, \ldots, g^{-1}x_k)$$

定义了一个连续同态 π：一般线性群$(E) \to$一般线性群$(\mathcal{L}^k(E,F))$。
Hint: The 映射 $\eta: \mathcal{L}(E)^k \to \mathcal{L}(\mathcal{L}^k(E, F))$ with

$$\big(\eta(A_1, \ldots, A_k)f\big)(x_1, \ldots, x_k) := f(A_1x_1, \ldots, A_kx_k)$$

是一个连续的 k-线性映射。

(c) 计算导出表示 $\mathbf{L}(\pi)\colon\ \mathfrak{gl}(E) \to \mathfrak{gl}(\mathcal{L}^k(E,F))$.
(d) 我们将空间 $P_k(E,F)$ 视为定义在 E 上、取值于 F、次数为 k 的连续多项式函数所构成的闭子空间 $\mathrm{Sym}^k(E,F) \subseteq \mathcal{L}^k(E,F)$。于是，该空间上的相容范数定义为

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|\colon \|x\| \le 1\}$$

并且赋值 $\big(\pi(g)f\big)(x) := f(g^{-1}x)$ 定义了一个连续同态 $\pi\colon$ 一般线性群$(E) \to$ 一般线性群$(P_k(E,F))$。

习题 10.7.12。(a) 设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间。证明存在一个反线性等距映射 $I\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，使得 $I^2 = \mathbf{1}$。
(b) 若 I_1 和 I_2 是两个这样的映射，则存在一个酉算子 $g \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$，使得 $I_2 = gI_1g^{-1}$。

(c) 证明，对于一个复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，所有的群

$$\mathrm{O}(\mathcal{H}, I) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})\colon g^* = Ig^{-1}I\}$$

同构。

习题 10.7.13。(a) 设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维或偶数维复希尔伯特空间。证明存在一个反线性等距映射 $I\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，满足 $I^2 = -\mathbf{1}$。

(b) 如果 I_1 和 I_2 是两个这样的映射，那么存在一个酉算子 $g \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$，满足 $I_2 = gI_1g^{-1}$。

(c) 证明对于复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，所有群

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{H}, I) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})\colon g^* = Ig^{-1}I^{-1}\}$$

同构。

习题 10.7.14。设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，I 是一个满足 $I^2 = \pm\mathbf{1}$ 的反线性等距变换。考虑复双线性形式

$$\beta(v,w) := \langle v, Iw\rangle.$$

(a) 当 β ($I^2 = \mathbf{1}$ ($I^2 = -\mathbf{1}$)) 时，称其为对称的（斜对称的）。
(b) 对于 $I^2 = \mathbf{1}$,

$$\mathrm{O}(\mathcal{H}, I) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})\colon (\forall v, w \in \mathcal{H})\, \beta(gv, gw) = \beta(v,w)\},$$

且该子群的李代数为

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(\mathcal{H}, I) &= \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\colon IX^*I^{-1} + X = 0\}\\ &= \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\colon (\forall v, w \in \mathcal{H})\, \beta(Xv, w) + \beta(v, Xw) = 0\}.\end{aligned}$$

(c) 对于 $I^2 = -\mathbf{1}$,

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{H}, I) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})\colon (\forall v, w \in \mathcal{H})\, \beta(gv, gw) = \beta(v,w)\},$$

且该子群的李代数为

$$\begin{aligned}\mathfrak{sp}(\mathcal{H}, I) &= \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\colon IX^*I^{-1} + X = 0\}\\ &= \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\colon (\forall v, w \in \mathcal{H})\, \beta(Xv, w) + \beta(v, Xw) = 0\}.\end{aligned}$$

(d) 对于 $I^2 = \mathbf{1}$ 和 $\dim \mathcal{H} = \infty$，存在 $\mathcal{H}$ 的标准正交基 $(e_j)_{j\in 2J}$，使得对于 $j \in 2J := J \dot\cup -J$，有 $Ie_j = e_{-j}$。然后

$$\mathcal{H} \cong \ell^2(2J,\mathbb{C}) \cong \ell^2(J,\mathbb{C}) \oplus \ell^2(-J,\mathbb{C}) \cong \ell^2(J,\mathbb{C}) \oplus \ell^2(J,\mathbb{C}),$$

并且相对于这一分解，我们将 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中的元素写成 2×2-分块矩阵。对于 $Q(v,\ w) = (w,\ v)$，于是有

$$\mathrm{O}(\mathcal{H}, I) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})\colon g^{-1} = Qg^{\top}Q^{-1}\}$$

而对于 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，这意味着

$$cb^{\top} + da^{\top} = \mathbf{1}, \quad cd^{\top} + dc^{\top} = 0 \quad \text{and} \quad ab^{\top} + ba^{\top} = 0.$$

(e) 若 $I^2 = -\mathbf{1}$，则存在 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基 $(e_j)_{j\in 2J}$，使得

$$Ie_j = \begin{cases} e_{-j}, & \text{for } j \in J, \\ -e_{-j}, & \text{for } j \in -J. \end{cases}$$

Then

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{H}, I) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})\colon g^{-1} = Qg^{\top}Q^{-1}\} \quad \text{with} \quad Q = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

而对于 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，这意味着

$$c^{\top}a = a^{\top}c, \quad d^{\top}b = b^{\top}d \quad \text{and} \quad a^{\top}d - c^{\top}b = \mathbf{1}.$$

练习 10.7.15。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺结合代数，且 $\mathcal{A}^{\times}$ 是其单位群。若 $a,\ b \in \mathcal{A}$ 可交换且 $ab \in \mathcal{A}^{\times}$，则 $a,\ b \in \mathcal{A}^{\times}$。

练习 10.7.16. 令 $T(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的切代数。那么，当且仅当 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ 是一个导子时，

$$\varphi_D\colon \mathcal{A} \to T(\mathcal{A}), \quad a \mapsto (a, Da)$$

是一个代数同态。

10.8 第 10 章的注释与评述

连续逆代数可视为巴拿赫代数的推广，并保留后者的许多本质性质。参见 [Wa54a, Wa54b, Wa54c] 中关于连续逆代数及其函数演算的早期工作，包括当代数乘法仅为分别连续时的推广。亦可比较 [Ze60, Ze85] 中的相关研究。Turpin 定理取自 [Tu70]；我们给出一个新证明，它并不预设完备性或积分的存在性。拓扑代数的局部 m-凸性是在 [MicE52]中引入的。我们的

连续逆代数中函数演算的阐述基于 [Gl02b]„ 其中详细论述了其单位群的李论性质。巴拿赫-李代数的单位群是巴拿赫-李群的经典例子（参见例如[Bou89] 及更早的工作），其李子群亦是如此（如 [dlH72]中所述）。连续逆代数的进一步例子是取值于巴拿赫代数的适当加权映射代数（见 [Wa12]）。亦可比较 [Gra84] 中的例子；该文献也隐含地使用了等谱同态（针对子代数的包含映射）。命题 10.5.1 将 [Gra84, Satz 5.11] 从巴拿赫代数推广至连续逆代数。上述关于连续逆代数单位群的正则性的结果取自 [GN12]。某些巴拿赫代数射影极限的单位群已在 [MR95]中被视为正则 Fr´echet–李群。关于连续逆代数中的多变量函数演算，见 [Bil07]；相应的 $*$-代数在 [Bil04, BelN10]中作了讨论。代数子群定理 10.4.3 归功于 Harris 与 Kaup [HK77]。

关于将诺特-指标推广为一种对巴拿赫空间上某些算子群的连通分支进行分类的方法，并将其应用于其他类型的伪酉群，请参阅 [SV17]。这些结果与无限维背景下的马斯洛夫指标密切相关；参见 [Fu04, NØ06]。

11 映射群

本章尚未完成。仍有一些证明需要补充，也有一些章节需要撰写。下文用红色标出了缺失的部分。

映射李群以及相关的李群（如主丛的规范群）是无限维李群中最重要的例子之一。本节讨论从紧流形 M （其边界可以是粗糙边界）到一个给定李群 K 的 C^k-映射所构成的李群 $C^\ell(M,\ K)$，该李群以局部凸空间为模型。对于 σ-紧有限维 C^ℓ-流形 M，我们还讨论由所有 C^ℓ-映射 $\gamma\colon\ M \to K$ 构成的李群 $C^\ell_c(M,\ K)$；这些映射的紧支撑意义是，对于某个紧子集 M 之外的所有 x ，均有 $\gamma(x) = e$ 。作为研究后者的工具，我们讨论李群序列的细盒积。对于每个由紧全子流形$M_i \subseteq M$组成的可数局部有限族 $(M_i)_{i\in I}$ ，我们将看到 $C^\ell_c(M,\ K)$ 同构于该盒积的一个闭李子群

$$\bigoplus_{i\in I} C^\ell(M_i, K),$$

由此可以从$C^\ell(M_i, K)$的性质推导出 $C^\ell_c(M, K)$的性质。

11.1 紧流形上的映射群

本节从最正则的映射群类开始讨论，即映射 $M \to K$所构成的映射群，其中 M 是紧致光滑流形， K 是李群。

命题 11.1.1.设 K 是李群，其李代数为 $\mathfrak{k} := \mathbf{L}(K)$。设$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是紧 C^ℓ流形，且可以具有粗糙边界。则有以下结论：

(a) $C^\ell(M, K)$，赋予如定理 4.2.2 中的典范光滑流形结构后，构成一个以 $C^\ell(M, \mathfrak{k})$ 为模型的李群 $C^\ell(M, K)$。(b) 如果 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 L 是一个可能具有粗糙边界的 C^k-流形，那么映射 $f\colon\ L \to C^\ell(M, K)$ 是 C^k 当且仅当

$$f^\wedge\colon L\times M\to K,\quad (x,y)\mapsto f(x)(y)$$

是 C^k, ℓ.

特别地，若 L 是光滑流形，则映射 $f\colon L\to C^\infty(M,K)$ 光滑，当且仅当 $f^\wedge\colon L\times M\to K$ 光滑。

证明。回忆命题 3.8.12，K 存在局部加法，因而定理 4.2.2 适用。设 $\mu\colon K\times K\to K$ 是光滑群乘法，$\eta\colon K\to K$ 是李群 K的光滑求逆映射。$C^\ell(M,K)$的求逆映射是映射 $C^\ell(M,\eta)\colon C^\ell(M,K)\to C^\ell(M,K)$，因此由引理 4.2.6 可知它是光滑的。同理，乘法映射是光滑的，因为在将 $C^\ell(M,K)\times C^\ell(M,K)$ 与 $C^\ell(M,K\times K)$ 视为相同对象后（如引理 4.2.8 所述），它可识别为 $C^\ell(M,\mu)\colon C^\ell(M,K\times K)\to C^\ell(M,K)$。关于 f 和 $f^\wedge$ 的断言可由定理 4.2.2(a) 中的指数律推出。□

注释 11.1.2。(a) 在命题 11.1.1 中，设 $\psi\colon U_\psi\to V_\psi$ 是从开 e-邻域 $U_\psi\subseteq K$ 到开子集 $V_\psi\subseteq\mathfrak{k}$ 的一个 C^∞-微分同胚（即 K 在 e 附近的一个 $\mathfrak{k}$-坐标图）。那么 $C^\ell(M,U_\psi)$ 在 $C^\ell(M,K)$ 中是开集（由引理 4.2.5），且映射 $C^\ell(M,\psi)\colon C^\ell(M,U_\psi)\to C^\ell(M,V_\psi)$ 是一个 C^∞-微分同胚（因此是 $C^\ell(M,K)$ 在其单位元处的一个坐标图），这是引理 4.2.6 的推论。

(b) 如果 $C^\ell(M,K)$ 被赋予一个以 $C^\ell(M,\mathfrak{k})$ 为模型的李群结构，并且对于某个如 (a) 中的 ψ，$C^\ell(M,\psi)$ 是 $C^\ell(M,K)$ 的一个坐标图，那么该李群结构与上文构造的结构一致，因为它在开 e-邻域 $C^\ell(M,U_\psi)$ 上诱导出相同的光滑流形结构。

在命题 11.1.1 的情形下，以下结论成立：

命题 11.1.3。(a) 该映射

$$\Theta\colon \mathbf{L}(C^\ell(M,K))\to C^\ell(M,\mathfrak{k}),\quad v\mapsto((T_e\varepsilon_x)(v))_{x\in M}$$

是拓扑李代数的一个同构。

(b) 如果 K 具有指数函数，那么 $C^\ell(M,K)$ 也具有指数函数。按照(a)中的方式，将 $\mathbf{L}(C^\ell(M,K))$ 与 $C^k(M,\mathfrak{k})$ 等同，后者是映射

$$C^\ell(M,\exp_K)\colon C^\ell(M,\mathfrak{k})\to C^\ell(M,K),\quad \gamma\mapsto\exp_K\circ\gamma.$$

(c) 如果 K 是局部指数的，那么 $C^\ell(M,K)$ 也是局部指数的。(d) 如果 $k\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 K 是 C^k-正则的，那么李群 $C^\ell(M,K)$也是 C^k-正则的。

证明。(a) 令 $f\colon M\to K$ 为常值函数 $x\mapsto e$，它是 $C^\ell(M,K)$ 的单位元。于是，按 4.2.1 中的定义，Γ_f 为

$$\Gamma_f = C^\ell(M, \mathfrak{k})$$

因此它构成一个带有逐点李括号的李代数。根据定理 4.2.2(d)，Θ 是拓扑向量空间同构。由于 $\varepsilon_x\colon C^\ell(M,K) \to K$ 是李群态射，我们得到

$$T_e(\varepsilon_x) = \mathbf{L}(\varepsilon_x)\colon L(C^\ell(M,K)) \to \mathfrak{k}$$

对每个 $x \in M$ 都是李代数同态，因此 Θ 是李代数同态。

(b) 根据引理 4.2.6，映射 $h := C^\ell(M, \mathrm{Exp}_K)$ 是光滑的。给定映射 $\gamma \in C^\ell(M, \mathfrak{k})$，考虑光滑曲线 $\eta\colon [0,1] \to C^\ell(M,K)$，$t \mapsto h(t\gamma)$。我们要证明 $\Theta \circ \delta(\eta)$ 是常数曲线 $t \mapsto \gamma_\circ$ 对每个 $x \in M$，有 $\varepsilon_x \circ \eta = (t \mapsto \mathrm{Exp}_K(t\gamma(x)))$，由此

$$\Theta(\delta(\eta)(t))(x) = \mathbf{L}(\varepsilon_x)(\delta(\eta)(t)) = \delta(\varepsilon_x \circ \eta)(t) = \delta(t \mapsto \exp_K(t\gamma(x)))$$

是常数路径 $t \mapsto \gamma(x)$。因此 $\Theta \circ \delta(\eta)$ 是常数路径 $t \mapsto \gamma_\circ$

(c) 如果 K 是局部指数的，那么存在一个开零邻域 $V \subseteq \mathfrak{k}$，使得 $U := \mathrm{Exp}_K(V)$ 在 K 中是开集，并且 $\mathrm{Exp}_K|_V\colon V \to U$ 是一个 C^∞-微分同胚。于是 $\psi := (\mathrm{Exp}_K|_V)^{-1}\colon U \to V$ 是一个 C^∞-微分同胚，由此

$$C^\ell(M,\psi)\colon C^\ell(M,U) \to C^\ell(M,V), \quad \gamma \mapsto \psi \circ \gamma$$

是一个 C^∞-微分同胚，参见注 11.1.2(a)。只需注意，后一个映射是指数映射 $C^\ell(M, \exp_K)$ 的逆映射，将其限制为从 $C^\ell(M, V)$ 到 $C^\ell(M, U)$ 的映射即可。

(d) 设 $I := [0,1]_\circ$ 由命题 4.1.21 和推论 1.7.22，映射

$$\Phi\colon C^k(I, C^\ell(M,\mathfrak{k})) \to C^\ell(M, C^k(I,\mathfrak{k})) \tag{11.1}$$

由 $\Phi(\gamma)(x)(t) = \gamma(t)(x)$ 确定，是拓扑向量空间的同构。由定理 4.2.2(a) 和推论 1.7.22，类似的映射

$$\Psi\colon C^{k+1}(I, C^\ell(M,K)) \to C^\ell(M, C^{k+1}(I,K))$$

是一个双射，因而是群同构。设 $\varphi\colon U \to V$ 是从一个开 e-邻域 $U \subseteq K$ 到一个开 0-邻域 $V \subseteq \mathfrak{k}$ 的 C^∞-微分同胚。映射

$$C^{k+1}(I, C^\ell(M,\mathfrak{k})) \to C^\ell(M, C^{k+1},\mathfrak{k}))$$

与（11.1）类似，这是一个拓扑向量空间同构，并且限制为 a C^∞-微分同胚

$$\Xi\colon C^{k+1}(I, C^\ell(M,V)) \to C^\ell(M, C^{k+1}(I,V)$$

如所述，它是开零邻域之间的映射。注意，群同构Ψ 限制为 the C^∞-微分同胚

$$C^\ell(M, C^{k+1}(I,\varphi))^{-1} \circ \Xi \circ C^{k+1}(I, C^\ell(M,\varphi))$$

在开单位元邻域之间。因此， Ψ 是李群同构。于是， $h := \Psi^{-1} \circ C^\ell(M,$ $\mathrm{Evol}_K) \circ \Phi$ 定义了一个 C^∞-映射

$$h\colon C^k(I, C^\ell(M,\mathfrak{k})) \to C^{k+1}(I, C^\ell(M,K)).$$

若能证明对每个映射 $\gamma \in C^k(I,\ C^\ell(M,\ \mathfrak{k}))$都有 $\delta(h(\gamma)) = \Theta^{-1} \circ \gamma$，则证明即告完备；此时， $G := C^\ell(M,\ K)$的演化映射将由$\mathrm{Evol}_G = h \circ \Theta$给出，它是一个光滑映射。设 $\eta := h(\gamma) \in C^{k+1}(I,\ C^\ell(M,\ K))$。点求值族$(\varepsilon_x)_{x\in M}$具有这样的性质：根据(a)，$\mathbf{L}(\varepsilon_x)$分离$\mathbf{L}(C^\ell(M,\ K))$中的点。对每个 $x \in M$，我们有

$$\varepsilon_x \circ h(\gamma) = \mathrm{Evol}_K(t \mapsto \gamma(t)(x))$$

因此，使用连续线性求值映射$\mathrm{ev}_x\colon C^\ell(M,\ \mathfrak{k}) \to \mathfrak{k},\ \theta \mapsto \theta(x)$，可得$\mathrm{ev}_x \circ \gamma = \delta(\varepsilon_x \circ h(\gamma)) = \mathbf{L}(\varepsilon_x) \circ \delta(h(\gamma)) = \mathrm{ev}_x \circ \Theta \circ \delta(h(\gamma))$。因此，$\gamma = \Theta \circ \delta(h(\gamma))$，证明完毕。□

命题 11.1.4. 设 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$、 M 为一个紧 C^ℓ-流形(它可以具有粗糙边界)，$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 且 K 为一个具有李代数 $\mathfrak{k}$ 的 $\mathbb{K}$-解析李群。则下列结论成立：

(a) 在 $C^\ell(M,K)$ 上存在一个以$C^\ell(M,\mathfrak{k})$ 为模型的 $\mathbb{K}$-解析流形结构，使其成为一个 $\mathbb{K}$-解析李群；该结构由下述性质唯一确定： $C^\ell(M,U)$ 在 $C^\ell(M,K)$ 中为开集，并且

$$C^\ell(M,\varphi)\colon C^\ell(M,U) \to C^\ell(M,V), \quad \gamma \mapsto \varphi \circ \gamma$$

对每一个从开对称 e-邻域 $U \subseteq K$ 映到开0-邻域 $V \subseteq \mathfrak{k}$ 上的 $\mathbb{K}$-解析微分同胚 $\varphi\colon U \to V$ 而言，它都是 $\mathbb{K}$-解析流形的微分同胚。

(b)由 (a) 中的 $\mathbb{K}$-解析李群$C^\ell(M,K)$ 所对应的光滑流形结构，即命题 11.1.1 中所述的典范结构。(c) 若 K 具有 $\mathbb{K}$-解析的指数函数 $\exp_K\colon \mathfrak{k} \to K$，则 $C^\ell(M,K)$ 的指数函数 $C^\ell(M,\exp_K)$ 也是 $\mathbb{K}$-解析的。(d) 若 K 是 $\mathbb{K}$-解析 *BCH*-李群，则 $C^\ell(M,K)$ 也是 $\mathbb{K}$-解析 *BCH*-李群。

证明。 (a) 和 (b)。设 $\varphi\colon U \to V$ 是从一个开、对称的 e邻域 $U \subseteq K$ 到一个开零邻域 $V \subseteq \mathfrak{k}$的 $\mathbb{K}$解析微分同胚。那么

$$D_U := \{(x,y) \in U \times U\colon xy \in U\}$$

在 $U \times U$ 中是开集，并且包含 $(U \times \{e\}) \cup (\{e\} \times U)$。其像

$$D_V := (\varphi \times \varphi)(D_U)$$

在 $V \times V$ 中是开的。我们赋予 $C^\ell(M,U)$ 以由 $C^\ell(M,\mathfrak{k})$ 建模的 $\mathbb{K}$-解析流形结构，使得 $\Phi := C^\ell(M,\varphi)$ 成为一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚；其底层光滑流形结构使其成为 $C^\ell(M,K)$ 的一个开子流形，并继承其典范光滑流形结构（见注 11.1.2(a)）。我们将 $C^\ell(M,U\times U)$ 与 $C^\ell(M,U)\times C^\ell(M,U)$ 识别，并将 $C^\ell(M,V\times V)$ 与 $C^\ell(M,V)\times C^\ell(M,V)$ 识别。于是 $C^\ell(M,D_U)$ 是 $C^\ell(M,U\times U)$ 中的开集，并且 $\Phi\times\Phi$ 限制为一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚

$$\Psi\colon C^\ell(M,D_U) \to C^\ell(M,D_V).$$

K 的群乘法限制为一个 $\mathbb{K}$-解析映射 $m\colon D_U \to U$；群求逆限制为一个 $\mathbb{K}$-解析映射 $\eta_U\colon U \to U$。于是，映射 $\mu\colon D_V \to V$ 和 $j\colon V \to V$ 也由下式给出

$$\mu(x,y) := \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) \quad \text{and} \quad \iota(z) := \varphi(\eta(\varphi^{-1}zx)))$$

对于 $(x,\ y)$，$\in D_V$ 和 $z \in V$ 是 $\mathbb{K}$-解析的。因此

$$C^\ell(M,\mu)\colon C^\ell(M,D_V) \to C^\ell(M,V), \quad (\gamma,\eta) \mapsto \mu\circ(\gamma,\eta)$$

并且 $C^\ell(M,\ \iota)\colon\ C^\ell(M,\ V) \to C^\ell(M,\ V)$ 是 $\mathbb{K}$-解析的，由命题 4.1.58(a) 得出。因此，也有

$$C^\ell(M,m)\colon C^\ell(M,D_U) \to C^\ell(M,U), \quad (\gamma,\eta) \mapsto m\circ(\gamma,\eta) = \gamma\eta$$

并且 $C^\ell(M,\ \eta)\colon\ C^\ell(M,\ U) \to C^\ell(M,\ U)$，$\gamma \mapsto \eta_U\circ\gamma = \gamma^{-1}$ 是 $\mathbb{K}$- 解析的。考虑连续映射

$$c\colon K\times U \to K, \quad (g,y) \mapsto gyg^{-1}.$$

若 $\zeta \in C^\ell(M,\ K)$，则 $\zeta(M)$ 是 K 的一个紧子集，并且我们还有$c(\zeta(M) \times \{e\}) = \{e\} \subseteq U$。华莱士引理给出一个开 e-邻域 $P \subseteq U$ 和一个开子集 $N \subseteq K$，使得 $\zeta(M) \subseteq N$，且 $c(N\times P) \subseteq U$。令 $Q := \varphi(P)$。那么

$$I_\zeta\colon C^\ell(M,K) \to C^\ell(M,K), \quad \gamma \mapsto \zeta\gamma\zeta^{-1}$$

将 $C^\ell(M,\ P)$ 映射到 $C^\ell(M,\ U)$ 中。考虑映射

$$f\colon M\times Q \to V, \quad (x,y) \mapsto \varphi(\zeta(x)\varphi^{-1}(y)\zeta(x)^{-1}).$$

Then

$$h\colon N\times Q \to V, \quad (g,x) \mapsto \varphi(g\varphi^{-1}(x)g^{-1})$$

是一个 $\mathbb{K}$-解析映射，并且对所有 $(x,y) \in M\times Q$，$f(x,y) = h(\zeta(x)\ y)$。因此

$$f_*\colon C^\ell(M,Q)\to C^\ell(M,V),\quad \gamma\mapsto(\mathrm{id}_M,\gamma)$$

根据命题 4.1.58(b)，是 $\mathbb{K}$-解析的。因此也有

$$I_\zeta|_{C^\ell(M,P)}=\Phi^{-1}\circ f_*\circ\Phi|_{C^\ell(M,P)}$$

是 $\mathbb{K}$-解析的。现在，定理 5.3.1 的 $\mathbb{K}$-解析版本给出 $C^\ell(M,K)$ 上唯一的 $\mathbb{K}$-解析流形结构，使其成为李群 G，并使 $C^\ell(M,U)$ 成为一个开 $\mathbb{K}$-解析子流形。根据注记 11.1.2(b)，后者所具有的光滑流形结构就是典范光滑流形结构。为证明唯一性，考虑一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚 $\varphi'\colon U'\to V'$，它类似于 φ，并像之前一样，使用 φ 代替 φ'，使 $C\ell(M,K)$ 成为李群 G'。那么 $U\cap U'$ 在 U 和 U' 中都是开集。此外，$W:=\varphi(U\cap U')$ 在 V 中是开集，$W':=\varphi'(U\cap U')$ 在 V' 中是开集。集合 $C^\ell(M,U\cap U')$ 在 $C^\ell(M,U)$ 和 $C^\ell(M,U')$ 中都是开集。简记 $\Phi':=C^\ell(M,\varphi')$，则有

$$\Phi'\circ\Phi^{-1}|_{C^\ell(M,W)}\colon C^\ell(M,W)\to C^\ell(M,W')$$

是映射 $C^\ell(M,(\varphi'\circ\varphi^{-1})|_W^{W'})$，因而是一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚。因此，G 和 G' 在开集 $C^\ell(M,U\cap U')$ 上诱导相同的 $\mathbb{K}$- 解析流形结构。由此，$\mathrm{id}:G\to G'$ 是 $\mathbb{K}$-解析的，且 $\mathrm{id}\colon G'\to G$ 也是如此，故 $G=G'$。

(c) 设 $\varphi\colon U\to V$ 如 (a) 中所述。则 $\exp_K^{-1}(U)$ 是 $\mathfrak{k}$ 中的一个开零邻域。我们选取一个开、平衡的零邻域 $W\subseteq\exp_K^{-1}(U)$。于是

$$C^\ell(M,\varphi)\circ C^\ell(M,\exp_K|_W)=C^\ell(M,\varphi\circ\exp_K|_U)$$

由命题 4.1.58(a)，它是 $\mathbb{K}$-解析的。因此，$C^\ell(M,\exp_K)$ 在开集 $C^\ell(M,W)$ 上是 $\mathbb{K}$-解析的。现在，对于 $n\in\mathbb{N}$，开集 $C^\ell(M,nW)$ 覆盖 $C^\ell(M,\mathfrak{k})$。因为

$$\exp_G(x)=\exp_{(}\tfrac{1}{n}x)^n,$$

我们有 $C^\ell(M,\exp_K)(\gamma)=(C^\ell(M,\exp_K|_W)(\frac{1}{n}\gamma))^n$ 是 $\gamma\in C^\ell(M,nW)$ 的 $\mathbb{K}$-解析函数。因此，$C^\ell(M,\exp_K)\colon C^\ell(M,\mathfrak{k})\to C^\ell(M,K)$ 是一个 $\mathbb{K}$-解析映射。根据命题 11.1.3(b)，后一个映射可视为 $C^\ell(M,K)$ 的指数映射，至多相差一个局部凸空间同构的复合（该同构是一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚）。

(d) 根据假设，存在一个开零邻域 $V\subseteq\mathfrak{k}$，使得：$=\exp_K(V)$ 在 G 中是开集，且 $\exp_K|_V\colon V\to U$ 是一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚。将 V 替换为 $(\exp_K|_V)^{-1}(U\cap U^{-1})$ 后，我们可以假设 U 是对称的。于是可以对

$$\varphi:=(\exp_K|_V)^{-1}\colon U\to V,$$

这表明映射 $\Phi:=C^\ell(M,\varphi)\colon C^\ell(M,U)\to C^\ell(M,V)$ 是一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚，它将 $C^\ell(M,K)$ 中的一个开单位元邻域映到 $C^\ell(M,\mathfrak{k})$ 中的一个开零邻域。因此

$$C^\ell(M, \exp_K|_V) = \Phi^{-1}$$

是一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚。回顾一下，$G := C^\ell(M, K)$ 的指数函数 $\exp_G$ 由 $C^\ell(M, \exp_K) \circ \Theta$ 给出，其中 $\Theta\colon \mathrm{L}(C^\ell(M, K)) \to C^\ell(M, \mathfrak{k})$ 如命题 11.1.3(a) 所述。于是，$W := \Theta^{-1}(C^\ell(M, V))$ 是 $\mathrm{L}(C^\ell(M, K))$ 中的一个开零邻域，而 $\exp_G|_W = C^\ell(M, \exp_K|_V) \circ \Theta|_W$ 是一个 $\mathbb{K}$-解析微分同胚，将其映到开单位元邻域 $C^\ell(M, U)$。□

11.2 李群的盒积

处理非紧流形 M 上映射群的一种方法，是将它们嵌入到穷尽 M 的带边界紧子流形 M_i 上的映射群的盒积中。因此，本节首先介绍李群的盒积。若 $(G_i)_{i\in I}$ 是一族群，且 $G := \prod_{i\in I} G_i$ 是它们的直积，那么

$$\bigoplus_{i\in I} G_i := \{(g_i)_{i\in I} \in G\colon\ g_i \neq e \text{ for only finitely many } i \in I\}$$

是 G 的正规子群。下面，我们将在这类盒积 $\bigoplus_{i\in I} G_i$ 上构造李群结构。

定理 11.2.1。设 I 是一个可数集。对于 $i \in I$，设 G_i 是一个以局部凸空间 E_i 为模型的李群。那么 $G := \bigoplus_{i\in I} G_i$ 上存在唯一的李群结构，它以局部凸直和 $\bigoplus_{i\in I} E_i$ 为模型，并满足以下条件：

$(*)$ 对于每个坐标图族 $(\varphi_i)_{i\in I}$，其中包含 $\varphi_i\colon U_i \to V_i \subseteq E_i$，且满足 $e \in U_i$ 和 $\varphi_i(e) = 0$，集合 $\bigoplus_{i\in I} U_i := G \cap \prod_{i\in I} U_i$ 是 G 中的一个开单位元邻域，并且下述映射是 G的一个坐标图：

$$\oplus_{i\in I}\varphi_i\colon \bigoplus_{i\in I} U_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i,\ (x_i)_{i\in I} \mapsto (\varphi_i(x_i))_{i\in I}.$$

将李群替换为 $\mathbb{K}$-解析李群时，也有类似的结论。

我们还证明：

命题 11.2.2。若对某个 $k \in \mathbb{N}_0$，定理 11.2.1 中的每个李群 G_i 都是 C^k-正则的，则 $\bigoplus_{i\in I} G_i$ 也是 C^k-正则的。

我们将由下述引理推导出定理 11.2.1。

引理 11.2.3。设 I 是一个可数集，且对每个 $i \in I$，G_i 都是一个李群（分别是一个$\mathbb{K}$-解析李群）。那么，逐点群运算使 $G := \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} G_i$ 成为一个李群（分别成为一个 $\mathbb{K}$-解析李群）。

证明。对每个 $i \in I$，群乘法 $\mu_i\colon G_i \times G_i \to G_i$ 和群求逆 $\eta_i\colon G_i \to G_i$，$g \mapsto g^{-1}$ 都是光滑（分别为 $\mathbb{K}$-解析）映射。由引理 4.3.5，映射 $\prod_{i\in I}\eta_i\colon G \to G$ 也是光滑（分别为 $\mathbb{K}$-解析）的，它是 G中的群求逆。按照引理 4.3.6，将 $G \times G$ 与 $\prod_{\in I}^{\mathrm{fb}}(G_i \times G_i)$等同后，$G$ 的群乘法变为映射 $\oplus_{i\in I}\mu_i$；由引理 4.3.5，该映射是光滑（分别为 $\mathbb{K}$-解析）的。□

定理的证明 11.2.1。对于如 (∗) 中的 $\varphi := (\varphi_i)_{i\in I}$，$\bigoplus_{i\in I} U_i$ 与 4.3.2 中的集合 U_φ 重合（由 (4.11)），从而 $\bigoplus_{i\in I} U_i$ 在光滑（相应地，$\mathbb{K}$-解析）李群 $P := \prod_{i\in I}^{\mathrm{fb}} G_i$ 中是开的。作为单位元邻域，子群 $\bigoplus_{i\in I} G_i$ 在 P 中是开的，因而利用诱导的流形结构成为光滑（相应地，$\mathbb{K}$-解析）李群。(∗) 中所描述的映射是 4.3.3 中所述 P 的坐标图 Φ_φ；它也是 $\bigoplus_{i\in I} G_i$ 的坐标图。□

以下五个引理为命题 11.2.2 的证明作准备。

引理 11.2.4。在定理 11.2.1的情形下，我们有：

(a) 对每个 $i \in I$，由 $\lambda_i(g)_i = g$, $\lambda_i(g)_j = e$（$j \in I \setminus \{i\}$）确定的映射 $\lambda_i\colon G_i \to G$ 是光滑（分别为 $\mathbb{K}$-解析的）群同态。*(b)* 分量逐点定义的李括号使 $\bigoplus_{i\in I} L(G_i)$ 成为拓扑李代数，而映射 $\Xi\colon \bigoplus_{i\in I} L(G_i) \to L(G)$, $(v_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} L(\lambda_i)(v_i)$ 是拓扑李代数的同构。

证明。对于 $i \in I$，取 $\varphi_i\colon U_i \to V_i \subseteq E_i$ 为 G_i 的一个坐标图，使得 $e \in U_i$ 且 $\varphi_i(e) = 0$。令 $\varphi := (\varphi_i)_{i\in I}$ 和 $\Phi_\varphi := \oplus_{i\in}\varphi_i\colon \bigoplus_{i\in I} U_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i \subseteq \bigoplus_{i\in I} E_i =: E$ 为 G 的相应坐标图。对于 $i \in I$，令 $\alpha_i\colon E_i \to E$ 为连续线性映射，满足 $\alpha_i(v)_i = v$, $\alpha_i(v)_j = 0$（$j \in I \setminus \{i\}$）。于是

$$\Phi_\varphi \circ \lambda_i \circ \varphi_i^{-1} = \alpha_i|_{V_i},$$

由此得出 $d\Phi_\varphi|_{T_eG} \circ T_e\lambda_i \circ T\varphi_i^{-1}(0, \cdot) = \alpha_i$。由于映射 $d\Phi_\varphi|_{T_eG}$ 是线性的，

$$d\Phi_\varphi|_{T_eG} \circ \Xi \circ \oplus_{i\in I} T\varphi_i^{-1}(0, \cdot) = \mathrm{id}_E$$

结论成立。由于 $d\Phi_\varphi|_{T_eG}$ 和 $\oplus_{i\in I} T\varphi_i^{-1}(0, \cdot)$ 都是拓扑向量空间的同构，因此 Ξ 也是拓扑向量空间的同构。对于 I的每个非空有限子集 J，考虑映射

$$\lambda_J\colon \prod_{j\in J} G_j \to G$$

由 $\lambda_J((x_j)_{j\in J})_i = x_i$ if $i \in J$, $\lambda_J((x_j)_{j\in J})_i = e$ if $i \in I \setminus J$ 确定。那么λ_J 是一个光滑群同态。因此，$\mathbf{L}(\lambda_J)$ 是李代数同态。现在，我们按照引理 3.3.14(b) 将 $\mathbf{L}(\prod_{j\in J} G_j)$ 与 $\prod_{j\in J} \mathbf{L}(G_j)$ 等同；此外，我们将 $\prod_{j\in J} \mathbf{L}(G_i)$ 与它在 $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{L}(G_i)$ 中的像等同，该像是通过与 λ_J 类似的映射得到的。于是，$\Xi|_{\prod_{j\in J} \mathbf{L}(G_j)} = \mathbf{L}(\lambda_J)$ 是一个李代数

同态。由于 $(\prod_{j\in J}\mathbf{L}(G_j))_{J\subseteq I \text{ finite}}$ 是 $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{L}(G_i)$ 的李子代数构成的向上有向族，其并集为 $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{L}(G_i)$，因此我们得出 Ξ 是一个李代数同态。□

注记 11.2.5。根据引理 11.2.4(b)，我们可以将 $\mathbf{L}(G)$ 视为局部凸直和 $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{L}(G_i)$，并配以连续线性映射$\mathbf{L}(\lambda_i):\mathbf{L}(G_i)\to\mathbf{L}(G)$。

引理 11.2.6。设 $(E_i)_{i\in I}$ 是一个局部凸空间可数族，其局部凸直和为 $E<$*style id=':* $=\bigoplus_{i\in I}E_i$。对于 $i\in I$，令 $\alpha_i\colon E_i\to E$ 为由 $\alpha_i(v)_i=v, \alpha_i(v)_j=0$ （$j\in I\backslash\{i\}$）所确定的连续线性映射。

(a) 若 K 是一个紧拓扑空间，则在 $i\in I$ 上赋予 $C(K,E_i)$ 紧开拓扑，并构造局部凸直和 $\bigoplus_{i\in I}C(K,E_i)$。那么，下述映射是拓扑向量空间同构：

$$\alpha\colon \bigoplus_{i\in I}C(K,E_i)\to C(K,E),\ (\gamma_i)_{i\in I}\mapsto\sum_{i\in I}(\alpha_i\circ\gamma_i).$$

(b) 对于 $k\in\mathbb{N}_0$，赋予 $C^k([0,1],E)$ 紧开 C^k-拓扑，并构造局部凸直和 $\bigoplus_{i\in I}C^k([0,1],E_i)$。那么映射$\beta_k:\bigoplus_{i\in I}C^k([0,1],E_i)\to C^k([0,1],E)$, $(\gamma_i)_{i\in I}\mapsto\sum_{i\in I}(\alpha_i\circ\gamma_i)$ 是拓扑向量空间同构。

证明。(a) 我们首先注意到 α 是线性且单射的。对于每个 $i\in I$，线性映射 $C(K,\alpha_i)\colon C(K,E_i)\to C(K,E)$ 根据引理 A.6.3 是连续的。因此，根据引理 B.13.2(a)，α 是连续的。如果 $\gamma\in C(K,E)$，那么

$$\gamma(K)\subseteq\prod_{i\in J}E_i=:F$$

由引理 B.13.2(e)，对某个有限子集 $J\subseteq I$。对于每个 $j\in J$，我们令$\gamma_j:=\mathrm{pr}_j\circ\gamma$，其中使用连续线性投影 $\mathrm{pr}_j\colon F\to E_j$ 到第j个分量上。对于 $i\in I\setminus J$，令 $\gamma_i:=0\in C(K,E_i)$。于是 $\alpha((\gamma_i)_{i\in I})=\gamma$，因此 α 是满射，进而是向量空间同构。$C(K,E)$中的每个零邻域都包含一个形如 $C(K,U)$的零邻域，其中 $U\subseteq E$ 是某个零邻域（见引理 A.6.24(b)）。缩小 U后，我们可以假设$U=\bigoplus_{\in I}U_i$ 带有开零邻域 $U_i\subseteq E_i$，见注记 B.13.1(a)。于是 $W:=\bigoplus_{i\in I}C(K,U_i)$是$\bigoplus_{i\in I}C(K,E_i)$中的一个开零邻域，且 $\alpha(W)\subseteq C(K,U)$，因此 α^{-1}在零点连续，进而连续。

(b) β_k是线性且连续的。与 (a) 中一样，每个 $\gamma\in C^k([0,1],E)$ 的像都包含在一个有限部分乘积中；由于 $\gamma_i:=\mathrm{pr}_i\circ\gamma$ 是 C^k，我们可知 β_k 是满射。现在

$$\lambda_i\colon C^k([0,1],E_i)\to\prod_{j=0}^{k}C([0,1],E_i),\ \gamma\mapsto(\gamma^{(j)})_{j=0}^{k}$$

是一个拓扑嵌入，因为每个 $i \in I$（参见习题 1.7.8）。因此

$$\oplus_{i\in I}\lambda_i \colon \bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],E_i) \to \bigoplus_{i\in I}\prod_{j=0}^{k} C([0,1],E_i) \cong \prod_{j=0}^{k}\bigoplus_{i\in I} C([0,1],E_i)$$

是一个拓扑嵌入（参见引理 B.13.2 中的 (d) 和 (c)）。因此，$\mathcal{O}$ 在 $\bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],\ E_i)$ 上的拓扑是关于映射的始拓扑

$$\delta_j \colon \bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],E_i) \to \bigoplus_{i\in I} C([0,1],E_i),\ (\gamma_i)_{i\in I} \mapsto (\gamma_i^{(j)})_{i\in I}$$

对于 $j \in \{0,1,\dots,k\}$，因此也是关于映射 $\alpha \circ \delta_j$ withα: $\bigoplus_{i\in I} C([0,1],\ E_i) \to C([0,1],\ E)$ 的始拓扑，如 (a) 中所示。$C^k([0,1],\ E)$ 上的拓扑是关于映射 D_j: $C^k([0,1],\ E) \to C([0,1],\ E)$, $\gamma \mapsto \gamma^{(j)}$for $j \in \{0,1,\dots,k\}$ 的始拓扑（参见习题 1.7.8）。由始拓扑的传递性（引理 A.2.7），使 β_k 成为拓扑嵌入的 $\bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],\ E_i)$ 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 因此是关于映射 $D_j \circ \beta_k$ for$j \in \{0,1\dots,k\}$ 的始拓扑。由于 $D_j \circ \beta_k = \alpha \circ \delta_j$，我们看到 $\mathcal{O} = \mathcal{T}$。□

注 11.2.7。在引理 11.2.6(b) 中取 $k = \infty$，证明仍表明 β_∞ 是线性的、双射且连续的。然而，β_∞ 未必是同胚。例如，若 $I := \mathbb{N}$ 且 $E_n := \mathbb{R}$ 对于 $n \in \mathbb{N}$，则

$$U_n := \{\gamma \in C^\infty([0,1],\mathbb{R}) \colon (\forall j \in \{0,1,\dots,n\})\ \|\gamma^{(j)}\|_\infty < 1\}$$

是 $C^\infty([0,1],\ \mathbb{R})$ 中的一个开零邻域，但 $\beta_\infty(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} U_n)$ 并非 $C^\infty([0,1],\ E)$ 中的零邻域；后者的拓扑是相对于包含映射 $C^\infty([0,1],\ E) \to C^k([0,1],\ E)$（其中 $k \in \mathbb{N}_0$）所诱导的初始拓扑。

引理 11.2.8。在定理 11.2.1 的情形下，每个紧子集 $K \subseteq G$ 都包含于某个有限子集 $J \subseteq I$ 对应的 $\prod_{j\in J} G_j$ 中。

证明。对于 $i \in I$，令 φ_i: $U_i \to V_i \subseteq E_i$ 为 G_i 的一个坐标图，使得 $e \in U_i$ 且 $\varphi_i(e) = 0$。令 φ: $=(\varphi_i)_{i\in I}$ 并

$$\Phi_\varphi := \oplus_{i\in\varphi_i} \colon U_\varphi \to \bigoplus_{i\in I} V_i \subseteq \bigoplus_{i\in I} E_i =: E$$

作为 G的相应坐标图，其中 $U_\varphi := \bigoplus_{i\in I} U_i$。由于 G是一个拓扑群，因而是正则拓扑空间，U_φ 包含一个在 G中为闭的单位元邻域 $A \subseteq G$。于是，对于每个 $g \in G$，$\Phi_\varphi(A \cap g^{-1}K)$ 是 $\bigoplus_{i\in I} E_i$ 的紧子集，因此对于某个有限子集 $J_g \subseteq I$，有 $\Phi_\varphi(A \cap g^{-1}K) \subseteq \prod_{j\in J_g} E_j$，由此

$$K \cap gA \subseteq g \prod_{j\in J_g} G_j. \tag{11.2}$$

由于 K 是紧的，存在 $g_1, \dots, g_n \in K$ 使得

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} g_k A^0. \tag{11.3}$$

对于每个 $k \in \{1,\dots,n\}$，存在 I_k的有限子集 J，使得 $g_k \in \prod_{j\in I_k} G_j$。那么 $J := \bigcup_{k=1}^{n}(I_k \cup J_{g_k})$是 I的有限子集；由（11.2）和（11.3），可得 $K \subseteq \prod_{j\in J} G_j$。□

引理 11.2.9. 在定理 11.2.1的情形下，设 $k \in \mathbb{N}_0$ 并考虑映射

$$\Theta\colon \bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],G_i) \to C^k([0,1],G)$$

由 $\Theta((\gamma_i)_{i\in I})(t) := (\gamma_i(t))_{i\in I}$确定。则 Θ是李群同构（（分别是 $\mathbb{K}$-解析李群的同构））。

证明。根据引理 11.2.4(a)，引理 4.2.6 推出，对于每个 $(\gamma_i)_{i\in I}$，$\Theta((\gamma_i)_{i\in I})$ 是 $C^k([0,1],G)$ 的一个元素。将 $\mathfrak{g}_i := L(G_i)$ 简记为 $i \in I$，并如注记 11.2.5 所述，将 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 与 $\bigoplus_{i\in I}\mathfrak{g}_i$ 视为相同。

考虑引理 11.2.6(b) 中的拓扑向量空间同构 $\beta_k : \bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],\mathfrak{g}_i) \to C^k([0,1],\mathfrak{g})$。容易看出，$\Theta$ 是群态射且为单射。引理 11.2.8 推出 Θ 是满射，因此 Θ 是群同构。对于 $i \in I$，取 $\varphi_i\colon U_i \to V_i \subseteq \mathfrak{g}_i$为 G_i 的一个 $\mathfrak{g}_i$-坐标图，使得 $e \in U_i$ 且 $\varphi_i(e) = 0$。令 $\varphi := (\varphi_i)_{i\in I}$ 和 $\Phi_\varphi := \oplus_{i\in}\varphi_i\colon \bigoplus_{i\in I} U_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i \subseteq \bigoplus_{i\in I}\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}$ 为 G 对应的$\mathfrak{g}$-坐标图。由注 11.1.2(a)，映射

$$(\varphi_i)_*\colon C^k([0,1],U_i) \to C^k([0,1],V_i) \subseteq C^k([0,1],E_i),\ \gamma \mapsto \varphi\circ\gamma$$

是 $C^k([0,1],\ G)$ 的一个坐标图。我们令 $\psi := ((\varphi_i)_*)_{i\in I}$，并考虑相应的坐标图 $\Phi_\psi := \oplus_{i\in I}(\varphi_i)_*\colon\ U_\psi \to V_\psi$，其中 $U_\psi := \bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],\ U_i)$ 且 $V_\psi := \bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],\ V_i) \subseteq \bigoplus_{i\in I} C^k([0,1],\ \mathfrak{g}_i)$。同理，我们有坐标图

$$(\Phi_\varphi)_*\colon C^k([0,1],U_\varphi) \to C^k([0,1],V_\varphi),\ \gamma \mapsto \Phi_\varphi\circ\gamma$$

$C^k(M,\ G)$ 的坐标图，其中 $U_\varphi := \bigoplus_{i\in I} U_i$ 且 $V_\varphi := \bigoplus_{i\in I} V_i$。现在

$$(\Phi_\varphi)_* \circ \Theta|_{U_\psi} \circ (\Phi_\psi)^{-1} = \beta_k|_{V_\psi},$$

其中 $\beta_k|_{V_\psi}\colon V_\psi \to C^k([0,1],\ V_\varphi)$ 是一个 C^∞-微分同胚（分别是一个 $C^\omega_{\mathbb{K}}$-微分同胚）。因此，群同构 Θ 是李群（分别是 $\mathbb{K}$-解析李群）的同构。□

命题 11.2.2 的证明。令 Ξ 为引理 11.2.4 中引入的拓扑李代数同构。对于每个 $\gamma \in C^k([0,1],\mathbf{L}(G))$，我们有$\Xi^{-1}(\gamma) \in \prod_{j\in J} C^k([0,1],\mathbf{L}(G_j))$，其中某个非空有限子集为 $J \subseteq I$。记 $\zeta := \Xi^{-1}(\gamma) = (\zeta_j)_{j\in J}$，其中 $\zeta_j \in C^k([0,1],G_j)$。由于每个 G_j 都是 C^k-正则的，$G_J := \prod_{j\in J} G_j$ 也同样是 C^k-正则的，并且

$$\mathrm{Evol}_{G_J}(\zeta)(t) = (\mathrm{Evol}_{G_j}(\zeta_j)(t))_{j\in J} \text{ for all } t \in [0,1],$$

按照备注 6.4.12（见引理 6.4.11），将 $\mathbf{L}(G_J)$ 与 $\prod_{j\in J}\mathbf{L}(G_j)$ 视为相同。对于 $\lambda_J\colon G_J \to G$，如引理 11.2.4 的证明中所示，我们有左对数导数

$$\delta(\lambda_J \circ \mathrm{Evol}_{G_j}(\zeta)) = \mathbf{L}(\lambda_J) \circ \delta(\mathrm{Evol}_{G_J}(\zeta)) = \mathbf{L}(\lambda_J) \circ \zeta = \gamma,$$

因此 $\mathrm{Evol}_G(\gamma) = \lambda_J \circ \mathrm{Evol}_{G_J}(\zeta)$。记 $\mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$、$\mathfrak{g}_i := \mathbf{L}(G_i)$ 以及 $\mathbb{I} := [0,1]$。根据前文，Evol_G 可以写成如下复合

$$C^k(\mathbb{I},\mathfrak{g}) \xrightarrow{\Xi^{-1}} \bigoplus_{i\in I} C^k(\mathbb{I},\mathfrak{g}_i) \xrightarrow{\oplus_{i\in I}\mathrm{Evol}_{G_i}} \bigoplus_{i\in I} C^k(\mathbb{I},G_i) \xrightarrow{\Theta} C^k(\mathbb{I},G)$$

利用映射 $\oplus_{i\in I}\mathrm{Evol}_{G_i}$（根据引理 4.3.5，该映射是 C^∞）以及引理 11.2.9 给出的李群同构 Θ。因此 Evol_G 是光滑的。□

11.3 非紧流形上的映射群

现在我们考虑非紧流形 M 上取值于李群且具有紧支集的映射所构成的李群。无边界的有限维流形 M 的情形可能最受关注，但如果 M 具有边界或粗糙边界，该构造也无需任何改动即可适用。

给定李群 K 和 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，令 $C^\ell_c(M,K)$ 表示所有 C^ℓ-函数 $\gamma\colon M \to K$ 所构成的群，其中存在一个紧子集 $L \subseteq G$，使得对于所有 $x \in M \setminus L$，$\gamma(x) = e$。特别地，给定一个基于 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 的局部凸空间 E

现在我们描述 $C^\ell_c(M, K)$ 上的李群结构，其模型空间是局部凸空间 $C^\ell_c(M, \mathfrak{k})$（参见引理 4.4.3）。更一般地，我们能够将 $C^\ell(M, K)$ 构造成一个李群，并使 $C^\ell_c(M, K)$ 成为其开子群。不过，我们主要关注的是 $C^\ell_c(M, K)$ 本身。如果 M 不是紧的，那么 $C^\ell_c(M, K)$ 上由此得到的拓扑可能比紧开 C^ℓ-拓扑更精细，因而用途有限。

定理 11.3.1。设 K 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{k} := \mathbf{L}(K)$。设 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ 和 M 是一个紧的 C^ℓ-流形，它可以具有粗糙边界。则有如下结论：

(a) 定理 *4.2.2* 中描述的光滑流形结构使 $C^\ell(M,K)$ 成为一个以 $C^\ell(M,\mathfrak{k})$ 为模型的李群。

利用这一流形结构，我们有：

(b) 对于每个 C^∞-微分同胚 $\varphi\colon U \to V$，它将开对称的 e-邻域 $U \subseteq K$ 映到开0-邻域 $V \subseteq \mathfrak{k}$，且满足 $\varphi(e) = 0$，集合

$$C_c^\ell(M,U) := \{\gamma \in C_c^\ell(M,K) \colon \gamma(M) \subseteq U\}$$

在 $C^\ell(M,K)$ 中是开的，并且映射 $C_c^\ell(M,\varphi)\colon\ C_c^\ell(M,U) \to C_c^\ell(M,V)$ 是一个 C^∞-微分同胚，映到开子集 $C_c^\ell(M,V) \subseteq C_c^\ell(M,\mathfrak{k})$。

(c) 正规子群 $C_c^\ell(M,K)$ 在 $C^\ell(M,K)$ 中是开集。

(d) 对每个 $x \in M$，映射 $\varepsilon_x\colon C^\ell(M,K) \to K,\ \gamma \mapsto \gamma(x)$ 是一个光滑群同态。此外，对于每个 $v \in L(C^\ell(M,K))$，$\Theta(v) := (L(\varepsilon_x)(v))_{x\in M} \in C_c^\ell(M,\mathfrak{k})$，且映射 $\Theta\colon L(C^\ell(M,K)) \to C_c^\ell(M,\mathfrak{k})$ 是拓扑李代数的一个同构。

(e) 如果 K 具有光滑指数映射 $\exp_K\colon \mathfrak{k} \to K$，那么

$$C^\ell(M,\exp_K)\circ\Theta\colon \mathbf{L}(C^\ell(M,K)) \to C^\ell(M,K),\quad v \mapsto \exp_K\circ\Theta(v).$$

(f) 如果 K 是局部指数的，那么 $C^\ell(M,K)$ 也局部指数。(g) 如果 K 是某个有限 $k \in \mathbb{N}_0$ 下的 C^k-正则的，那么 $C^\ell(M,K)$ 也为 C^k-正则。

证明。 **证明待补** □

注 11.3.2。 (i) 在定理 11.3.1 的 (b)、(d)、(e)、(f) 和 (g) 部分中，我们可以用开子群$C_c^\ell(M,K)$ 替换 $C^\ell(M,K)$。

(ii) 设 $C^\ell(M,K)$（或 $C_c^\ell(M,K)$）具有一个以 $C^\ell(M,\mathfrak{k})$ 为模型的光滑流形结构，使其成为李群 G'。假设对于某个 C^∞-微分同胚 $\varphi\colon\ U \to V$（如定理 11.3.1(b) 中所述），集合$C_c^\ell(M,U)$ 在 G' 中是开集，并且 $C_c^\ell(M,\varphi)\colon C_c^\ell(M,U) \to C_c^\ell(M,V) \subseteq C_c^\ell(M,\mathfrak{k})$ 是一个 C^∞- 微分同胚。那么 G' 与定理 11.3.1(a) 中描述的李群 $G = C^\ell(M,K)$（分别为 $G = C_c^\ell(M,K)$）一致。事实上，群同态 $\mathrm{id}\colon\ G \to G'$ 和 $\mathrm{id}\colon\ G' \to G$ 在某个单位元邻域上是光滑的，因而处处光滑；于是 $G = G'$。

现在我们考虑非紧流形 M 上紧支撑李群值映射所构成的李群。有限维流形 M 的情形可能最受关注，且不带边界，但若 M 有边界或粗糙边界，该构造也无需任何改动即可成立。

令 $r \in \{\infty,\omega\}$。若 $r = \infty$，令 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。若 $r = \omega$，令 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$。我们所考虑的流形 M 是实数域上的流形。给定李群 K 和 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，令 $C_c^\ell(M,\ K)$ 表示所有 C^ℓ 函数 $\gamma\colon\ M \to K$ 构成的群，其中存在一个紧子集 $L \subseteq G$，使得对所有 $x \in M \setminus L$，都有 $\gamma(x) = e$。

定理 11.3.3。设 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，$M$ 是一个 σ-紧、局部紧C^ℓ-流形(它可能具有粗糙边界)，且 K 是一个以局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间为模型的 $C^r_{\mathbb{K}}$-李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$。则有以下结论：

(a) 在 C_c^ℓ 上存在一个 $C_{\mathbb{K}}^r$-流形结构(M,K)，以 $C_c^\ell(M,\mathfrak{k})$为模型，使其成为一个 $C_{\mathbb{K}}^r$-李群；该结构由如下性质唯一确定： $C_c^\ell(M,U):=\{\gamma\in C_c^r(M,K)\colon \gamma(M)\subseteq U\}$ 在 $C_c^\ell(M,K)$ 中是开的，并且

$$C_c^\ell(M,\varphi)\colon C_c^\ell(M,U)\to C_c^\ell(M,V),\quad \gamma\mapsto\varphi\circ\gamma$$

是 $C_{\mathbb{K}}^r$流形之间的微分同胚，对于每个 $C_{\mathbb{K}}^r$-微分同胚φ： $U\to V$，它将一个开对称的 e-邻域 $U\subseteq K$ 映到一个开0-邻域 $V\subseteq\mathfrak{k}$，使得 $\varphi(e)=0$。

(b) 若 K 有一个指数映射 $\exp_K$： $\mathfrak{k}\to K$，且该映射是 $\mathbb{K}$-解析的，则 $C^\ell(M,K)$ 的指数映射 $C^\ell(M,\exp_K)$ 也 $\mathbb{K}$-解析。(c) 若 K 是一个 $\mathbb{K}$-解析的 *BCH*-李群，则 $C^\ell(M,K)$ 也是一个 $\mathbb{K}$-解析的 *BCH*-李群。

11.4 主丛的规范群

本节尚待撰写。下面给出主要结果及其证明概要。

定理 11.4.1。若 K 是一个局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$，且 q： $P\to M$ 是一个光滑的 K-主丛，底空间为 σ-紧的有限维流形 M，则紧支撑规范变换群$\mathrm{Gau}_c(P)$ 是一个局部指数李群。特别地，李群 $C_c^\infty(M,K)$ 是局部指数的。

此外， K 为正则且当 M 不紧时需要有限的 k，则$\mathrm{Gau}_c(P)$ 也是正则的；如果 K 是 *BCH* 群，那么$\mathrm{Gau}_c(P)$也是 *BCH* 群。

证明。（概要）令 $\exp_K\colon \mathfrak{k}\to K$ 为 K 的指数映射，并将 $\mathrm{Gau}(P)$ 实现为 K 中相对于由 $(k.f)(p):=kf(p.k)k^{-1}$ 给出的 K-作用的不动点子群 $C^\infty(P,K)^K$，其中不动点位于 $C^\infty(P,K)$ 中。于是我们令

$$\begin{aligned}\mathfrak{gau}(P)&:=C^\infty(P,\mathfrak{k})^K\\&=\{\xi\in C^\infty(P,\mathfrak{k})\colon(\forall p\in P)(\forall k\in K)\ \mathrm{Ad}(k)\xi(p.k)=\xi(p)\},\end{aligned}$$

并注意到，对于群 $G:=\mathrm{Gau}_c(P)$，映射

$$\exp_G\colon\mathfrak{g}:=\mathfrak{gau}_c(P)\to G,\quad \xi\mapsto\exp_K\circ\xi$$

在 0 处是局部同胚。利用定理 5.3.1，可以据此在 G 上定义李群结构。然后，$\exp_G$ 是 G 的一个指数函数，并且根据构造，它在 0 处是局部微分同胚。□

12 归纳极限李群

我们感兴趣的群 G 通常可以写成李群 $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ 的并 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$，且所有包含映射 $G_n \to G_{n+1}$ 都是光滑群同态。本章首先考虑每个 G_n 都是有限维李群的情形。我们证明，在第 4.5 节中构造的 G 上的光滑流形结构使 G 成为一个 C^0-正则李群，其李代数是有限维李代数的递增并，并且同构于 $L(G_n)$。每个有限维李代数的递增并都可以由此方式得到（见第 12.1 节）。在第 12.2 节中，我们概述有关这类局部有限维李群 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 的一些其他结果，不作证明，但提供相关文献的参考。在第 12.3 节中，我们简要考虑 G_n 可能是无限维的情形。在许多情况下，可以通过适用于特定示例类别的临时论证，在并 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 上构造李群结构。例如，我们已经遇到过测试函数群 $C_c^\infty(M,\ K)$，以及紧支撑微分同胚的李群 $\mathrm{Diff}_c(M)$，其中 M 是 σ-紧致有限维光滑流形，K 是李群。对于 M 的一个紧耗尽 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$，李群 $C^\infty(M,\ K)$ 是由递增序列 $C^\infty_{K_n}(M,\ K)$ 构成的并，其中各项是支集包含在 K_n 中的光滑 K-值函数；同样，$\mathrm{Diff}_c(M) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Diff}^{K_n}(M)$。我们概述有关这类递增并的归纳极限性质的一些结果。

12.1 有限维李群的直极限

我们将讨论有限维李群递增并上的李群结构。本节中的李群均为实李群。值得注意的是，我们将证明：

定理 12.1.1. 设 $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ 为一列有限维李群，使得对所有满足 $n \geq m$ 的 n、$m \in \mathbb{N}$，包含映射 $\lambda_{n,\,m}\colon\ G_m \to G_n$ 是光滑群同态且为浸入。赋予 $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 唯一的群结构，使 G_n 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都成为子群。则由定理 4.5.1 所给出的 $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 上的光滑流形结构使 G 成为李群。对每个 $n \in \mathbb{N}$，包含映射 $\lambda_n\colon\ G_n \to G$ 是光滑群同态。若 H 是李群，则一个

群同态 $f\colon\ G \to H$ 是光滑的，当且仅当对每个 $n \in \mathbb{N},\ \ f|_{G_n}$ 都是光滑的。

例 12.1.2.(a) 最著名的归纳极限李群示例之一是群

$$\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{R}) := \varinjlim\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

其连接映射为

$$\lambda_{n+1,n}\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}),\quad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其李代数是李代数 $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{R})$，由所有仅含有限个非零元素的（$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$）矩阵组成。利用类似的连接映射 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$、$O_n \to O_{n+1}$ 和 $U_n \to U_{n+1}$，可以分别构造直极限李群 $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{R})$、$O_\infty$ 和 U_∞。

(b) 在C^*-代数的背景下，有限维代数的归纳极限是特别有趣的对象。在单位群的层面上，尤其会遇到形如以下的群

$$G := \varinjlim\ \mathrm{GL}_{2^n}(\mathbb{C}),\quad \lambda_{n+1,n}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

(c) 令 $E := \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 为以 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为基的自由向量空间，并定义 $D \in \mathcal{L}(E)$ 为 $D(e_n) = 2\pi i n e_n$。那么，李代数 $\mathfrak{g} := E \rtimes_D \mathbb{R}$ 是局部有限的，由此得到相应的局部有限维李群 $G = E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$，其中 $\alpha(t) = e^{tD}$。由于序列 $(0, \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ 由指数函数的奇异点组成，李代数 $\mathfrak{g}$ 不是局部指数的（参见命题 5.6.25）。

我们先来看相关的李代数。

引理 12.1.3. 设 $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \cdots$ 是一个有限维李代数序列，并且对每个 $n \in \mathbb{N},\ \ \mathfrak{g}_n$ 都是 $\mathfrak{g}_{n+1}$ 的子代数。赋予 $\mathfrak{g} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}_n$ 李括号，使得每个包含映射 $\mathfrak{g}_n \to \mathfrak{g}$ 都是李代数同态。于是，$\mathfrak{g}$ 上的局部凸归纳极限拓扑使其成为拓扑李代数；该拓扑与最细局部凸拓扑一致。

证明。 $\mathfrak{g}$ 上的局部凸归纳极限拓扑与最细局部凸向量拓扑一致（参见习题 B.13.4），并使其成为拓扑空间意义下的归纳极限 $\varinjlim \mathfrak{g}_n$（参见推论 A.7.12 和例 A.7.16）。由于每个 $\mathfrak{g}_n$ 都是局部紧的，$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 上的乘积拓扑使其成为拓扑空间意义下的归纳极限 $\varinjlim (\mathfrak{g}_n \times \mathfrak{g}_n)$（参见引理 A.7.9）。李括号 $\beta_n\colon\ \mathfrak{g}_n \times \mathfrak{g}_n \to \mathfrak{g}_n$ 是连续的，因此李括号也

$$\varinjlim \beta_n\colon \varinjlim\ (\mathfrak{g}_n \times \mathfrak{g}_n) \to \varinjlim\ \mathfrak{g}_n$$

的 $\mathfrak{g}$ 是连续的。 □

定理12.1.1 的证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，群乘法 $\mu_n\colon G_n \times G_n \to G_n$都是光滑的，求逆映射 $\eta_n\colon G_n \to G_n, g \mapsto g^{-1}$也一样。求逆映射 $\eta\colon G \to G$ 等于 $\varinjlim \eta_n$，因此根据引理 4.5.4，η 是光滑的。此外，群乘法也是光滑的：利用引理 4.5.6 中的 C^∞-微分同胚 $\Psi\colon \varinjlim (G_n \times G_n) \to G \times G$，我们有$\mu = \left(\varinjlim \mu_n\right) \circ \Psi^{-1}$，其中 $\varinjlim \mu_n\colon \varinjlim (G_n \times G_n) \to \varinjlim G_n$ 根据引理 4.5.4 是光滑的。□

我们回顾左对数导数的一个恒等式：

$$\delta(\eta\xi^{-1})(t) = (\operatorname{Ad}\xi(t))(\delta(\eta)(t) - \delta(\xi)(t)) \text{ for all } t \in [0,1], \tag{12.1}$$

对于每个李群 G 以及所有 $\eta,\ \xi \in C^1([0,1],\ G)$。

命题 12.1.4。设 $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ 是李群的一个递增序列，使得对于 $\mathbb{N}$中的所有 $m \geq n$，包含映射 $\lambda_{m,\,n}\colon G_n \to G_m$ 都是光滑群同态。对于定理 12.1.1中的李群 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$，设 $\lambda_n\colon G \to G_n$ 为包含映射。则有：

(a) $\mathbf{L}(G)$连同极限映射 $\mathbf{L}(\lambda_n)\colon \mathbf{L}(G_n) \to \mathbf{L}(G)$，作为局部凸空间、拓扑空间、集合以及拓扑李代数，是$((\mathbf{L}(G_n))_{n\in\mathbb{N}}$、$(\mathbf{L}(\lambda_{m,\,n})_{n\leq m})$ 的直极限。(b) G 是 C^0-正则的。

证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都通过单射连续线性映射 $\mathbf{L}(\lambda_{n+1,n})$，将 $\mathbf{L}(G_n)$ 与其在 $\mathbf{L}(G_{n+1})$ 中的像视为同一对象。我们在 $\mathfrak{g} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{L}(G_n)$ 上赋予李代数结构，使每个包含映射 $\mathbf{L}(G_n) \to \mathfrak{g}$ 都成为李代数同态。我们在 $\mathfrak{g}$ 上赋予拓扑，使其成为局部凸归纳极限 $\varinjlim \mathbf{L}(G_n)$，根据引理 12.1.3，该拓扑具有所述性质。

(a) 对于 $x_0 = e$，我们有 $e \in G_{n_0}$，其中 $n_0 := 1$。令 d 为 $\dim(G_n)$ 在 $n \in \mathbb{N}$ 上的上确界，并令 $\varphi = \varinjlim \varphi_n\colon U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ 为定理 4.5.1 证明中所述的坐标图，其中 $\varphi_n\colon U_n \to V_n \subseteq \mathbb{R}^{d_n}$。因此 $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ 且 $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$。此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $G_n \cap U = U_n$ 和 $E_n \cap V = V_n$。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $i_n\colon \mathbb{R}^{d_n} \to \mathbb{R}^{d_n} \times \mathbb{R}^{d-d_n}$ 为映射 $v \mapsto (v, 0)$，它是连续线性的。于是 $\varphi \circ \lambda_n|_{U_n} \circ \varphi_n^{-1} = i_n|_{V_n}$，从而

$$d(\varphi \circ \lambda_n \circ \varphi_n^{-1})(0,\cdot) = i_n.$$

因此，$\mathbb{R}^d$ 是映射 $d(\varphi\circ\lambda_n)|_{\mathbf{L}(G_n)}$的像的并集，由此可知$\mathbf{L}(G)$是映射$\mathbf{L}(\lambda_n)$的像的并集。由于 i_n 是单射，$\mathbf{L}(\lambda_n)$也为单射，这意味着线性映射

$$\psi\colon \mathfrak{g} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{L}(G_n) \to \mathbf{L}(G) \tag{12.2}$$

由 $\psi|_{\mathbf{L}(G_n)} = \mathbf{L}(\lambda_n)$ 是单射。根据前面的结论，ψ 是满射。由于 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathbf{L}(G) \cong \mathbb{R}^d$ 都赋有最细局部凸向量

拓扑，因此双射线性映射 ψ 是拓扑向量空间同构（见习题 B.13.5）。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\psi|_{\mathbf{L}(G_n)}$ 都是李代数同态，ψ 也是李代数同态，因而是李代数同构。由于$\mathbf{L}(G)$ 是拓扑李代数，$\mathfrak{g}$也是。

(b) 若 $\gamma \in C([0,1], \mathbf{L}(G))$，则 $\psi^{-1} \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathfrak{g}$ 是连续的。由于$\psi^{-1}(\gamma([0,1]) \subseteq \mathfrak{g}$是紧的，存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\psi^{-1}(\gamma([0,1]) \subseteq \mathbf{L}(G_n)$，见命题 A.7.20。包含映射 $\mathbf{L}(G_n) \to \mathfrak{g}$ 是拓扑嵌入（参见命题 B.6.8），我们由此推出

$$\zeta := (\psi^{-1} \circ \gamma)|^{\mathbf{L}(G_n)}\colon [0,1] \to \mathbf{L}(G_n)$$

是连续的。有限维李群 G_n 是 C^0-正则的（定理 6.3.4），故存在 C^1-函数 $\eta\colon [0,1] \to G_n$，满足 $\eta(0) = e$，且左对数导数为 $\delta(\eta) = \zeta$。于是 $\lambda_n \circ \eta\colon [0,1] \to G$ 是 C^1，$\lambda_n(\eta(0)) = e$，并且 $\delta(\lambda_n \circ \eta) = \mathbf{L}(\lambda_n) \circ \delta(\eta) = \psi|_{\mathbf{L}(G_n)} \circ (\psi^{-1} \circ \gamma)|^{\mathbf{L}(G_n)} = \gamma$。因此 G 是 C^0-半正则的。为看出 G 是 C^0-正则的，只需证明 Evol：$C([0,1], \mathbf{L}(G)) \to C([0,1], G)$ 在零点连续（见定理 6.4.1）。由前述讨论，我们可以借助单射李代数同态 $\mathbf{L}(\lambda_n)$，将 $\mathbf{L}(G_n)$ 与其在 $\mathbf{L}(G)$ 中的像等同。于是 $\mathbf{L}(G) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{L}(G_n)$。我们令 $F_1 := \mathbf{L}(G_1)$，并利用补向量子空间 F_n（作为 $\mathbf{L}(G_{n-1})$ 在 $\mathbf{L}(G_n)$ 中的补），对整数 $n \geq 2$ 将 $\mathbf{L}(G_n) = \mathbf{L}(G_{n-1}) \oplus F_n$ 表出。于是

$$\mathbf{L}(G) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

作为一个局部凸空间。设 $U \subseteq C([0,1], G)$ 是一个单位元邻域。缩小 U 后，可设 $U = C([0,1], V)$，其中 $V \subseteq G$ 是某个单位元邻域（见引理 A.6.24(b)）。令 $V_0 := V$，则对 $n \in \mathbb{N}$，存在 G 中的开单位元邻域 V_n，使得 $V_n V_n \subseteq V_{n-1}$。于是

$$V_n \cdots V_1 \subseteq V_0 \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

缩小 V_n 后，可设 $V_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_{n,j}$，对于一个序列

$$V_{n,1} \subseteq V_{n,2} \subseteq \cdots$$

由相对紧的单位元邻域 $V_{n,j} \subseteq G_j$ 组成，见引理 A.7.22。我们断言，存在开零邻域 $W_n \subseteq F_n$，对于 $n \in \mathbb{N}$，满足

$$\mathrm{Evol}_{G_n}(\gamma) \in C([0,1], V_{n,n} \cdots V_{1,1}) \text{ for all } \gamma \in C([0,1], W_1 \oplus \cdots \oplus W_n). \quad (12.3)$$

那么 $W := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n$ 是 $\mathbf{L}(G)$ 中的一个开零邻域。对每个 $\gamma \in C([0,1], W)$，由引理 B.13.2(e)，我们有 $\gamma([0,1]) \in \bigoplus_{j=1}^{n} F_j$，其中 $n \in \mathbb{N}$，因而 $\gamma \in C([0,1], W_1 \oplus \cdots \oplus W_n) \subseteq C([0,1], \mathbf{L}(G_n))$，由此

$$\mathrm{Evol}_G(\gamma) = \mathrm{Evol}_{G_n}(\gamma) \in C([0,1], V_{n,n} \cdots V_{1,1}) \subseteq C([0,1], V_n \cdots V_1) \subseteq U.$$

因此 $\mathrm{Evol}_G(W) \subseteq U$，由此 Evol_G 在零点连续。现在只需证明该断言。对于 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Evol}_{G_n}^{-1}(C([0,1], V_{n,n}))$ 是一个开零邻域

在 $C([0,1],\mathbf{L}(G_n))$ 中，因为 $\mathrm{Evol}_{G_n}\colon C([0,1],\mathbf{L}(G_n)) \to C([0,1],\ G_n)$ 是连续的。于是，由引理 A.6.24(b)，对于一个开零邻域 $Q_n \subseteq \mathbf{L}(G_n)$，有 $C([0,1],\ Q_n) \subseteq \mathrm{Evol}_{G_n}^{-1}(C([0,1],\ V_{n,\ n}))$。如果 $n=1$，我们令 $W_1 := Q_1$。如果 $n \geq 2$，我们利用限制

$$h_n\colon G_n \times F_n \to \mathbf{L}(G_n),\ (g,v) \mapsto \mathrm{Ad}_{G_n}(g)(v)$$

伴随作用是连续的，并且 $h_n((V_{n-1,\ n-1}\cdots V_{1,\ 1})\overline{\times\{0\})} = \{0\}\overline{\subseteq} Q_n$；这里 $V_{j,\ j}$ 表示 $V_{j,\ j}$ 在 $\overline{G_j}$ 中的闭包，其中 $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ 是一个紧集。根据华莱士引理，存在一个开邻域 $W_n \subseteq F_n$，使得 $h_n((V_{n-1,\ n-1}\cdots V_{1,\ 1}) \times W_n) \subseteq Q_n$，因此

$$\mathrm{Evol}_{G_n}(t \mapsto \mathrm{Ad}_{G_n}(\alpha(t))(\beta(t))) \in C([0,1],V_{n,n}) \tag{12.4}$$

对于所有的 $\alpha \in C([0,1],\ V_{n-1,\ n-1}\cdots V_{1,\ 1})$ 和 $\beta \in C([0,1],\ W_n)$。现在我们通过归纳法证明 (12.3) 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。如果 $n=1$，则根据 W_1 的定义，对于所有 $\gamma \in C([0,1],\ W_1)$，$\mathrm{Evol}_{G_1}(\gamma) \in C([0,1],\ V_{1,\ 1})$。如果 $n \geq 2$ 且将 (12.3) 成立中的 $n-1$ 替换为 n，令 $\gamma = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j$，$\gamma_j \in C([0,1],\ W_j \subseteq)$，其中 $\theta \in C([0,1],\ F_j)$。于是 $\gamma = \theta + \gamma_n$ 与

$$\theta := \sum_{j=1}^{n-1} \in C([0,1], W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n+1}) \subseteq C([0,1],\mathbf{L}(G_{n-1})),$$

由归纳假设可得 $\mathrm{Evol}_{G_{n-1}}(\theta) \in C([0,1],\ V_{n-1,\ n-1})$。现在

$$\begin{aligned}\mathrm{Evol}_{G_n}(\gamma) &= \mathrm{Evol}_{G_n}(\gamma)(\mathrm{Evol}_{G_n}(\theta))^{-1}\,\mathrm{Evol}_{G_n}(\theta)\\ &= \mathrm{Evol}_{G_n}(\gamma)(\mathrm{Evol}_{G_n}(\theta))^{-1}\,\mathrm{Evol}_{G_{n-1}}(\theta)\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{Evol}_{G_{n-1}}(\theta) \in C([0,1],\ V_{n-1,\ n-1}\cdots V_1)$ 由归纳法得出。由 (12.1) 和 (12.4)，$\mathrm{Evol}_{G_n}(\gamma)(t)(\mathrm{Evol}_{G_n}(\theta)(t))^{-1} = \mathrm{Evol}_{G_n}(\text{伴随表示}_{G_m}(\mathrm{Evol}_{G_n}(\theta))(\gamma-\theta))(t) = \mathrm{Evol}_{G_n}(\text{伴随表示}_{G_n}(\mathrm{Evol}_{G_n}(\theta))(\gamma_n))(t)$ 属于

$$h_n((\overline{V_{n-1,n-1}}\cdots\overline{V_{1,1}}) \times W_n) \subseteq C([0,1],V_{n,n})$$

对所有 $t \in [0,1]$，由此可得 $\mathrm{Evol}_{G_n}(\gamma) \in C([0,1],\ V_{n,\ n})C([0,1],\ V_{n-1,\ n-1}\cdots V_{1,\ 1}) \subseteq C([0,1],\ V_{n+1,\ n+1}\cdots V_{1,\ 1})$。□

命题 12.1.5. 若在定理12.1.1的情形下，H 是 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 的闭子群，则 H 是 G 的分裂李子群，并且 G/H具有一种光滑流形结构，使得典范映射 $q\colon G \to G/H,\ g \mapsto gH$ 成为浸没。对于这一光滑流形结构，我们有 $G/H = \varinjlim G_n/(H \cap G_n)$ 作为光滑流形。

证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$H_n := H \cap G_n$ 是 G_n 的闭子群，因而是一个子流形。我们赋予 $M_n := G_n/H_n$ 唯一的光滑流形结构，使得 $q_n\colon G_n \to M_n,\ g \mapsto gH_n$ 是一个浸没。于是

$\ker T_e(q_n) = T_e(H_n)$。对于所有 $m \geq n \in \mathbb{N}$，映射 $q_{m,n}\colon M_n \to M_m$，$gH_n \mapsto gH_m$ 是单射，且是光滑的，因为 $q_{m,n} \circ q_n = q_m$ 是光滑的（见命题 3.3.27(b)）。切映射 $T_{H_n}(q_{m,n})$ 是单射，因此 $q_{n,m}$ 是浸入，因为 $q_{n,m}$ 关于 G_n 在 M_n 和 M_m 上的左作用是等变的。事实上，若 $v \in \in \ker(T_{H_n} q_{m,n})$，则存在某个 $w \in T_e G$，使得 $v = Tq_n(w)$ 且 $0 = Tq_{m,n}(Tq_n(w)) = Tq_m(w)$，由此可得 $w \in T_e G_n \cap T_e H_m = T_e H_n$，进而 $v = 0$。考虑典范映射 $q\colon G \to G/H$，$g \mapsto gH$ 以及单射 $j_n\colon M_n \to G/H$，$gH_n \mapsto gH$。由于 G 上的拓扑是关于包含映射 $\lambda_n\colon G_n \to G$ 的终拓扑，G/H 上的商拓扑是关于映射 $q \circ \lambda_n = j_n \circ q_n$ 的终拓扑，因此也是关于映射 j_n 的终拓扑（利用终拓扑的传递性）。故 $G/H = \varinjlim M_n$ 是一个拓扑空间。以下我们将 $gH_n \in M_n$ 与 $gH \in G/H$ 等同。现在，定理 4.5.1 为 G/H 提供了一个光滑流形结构，使其成为光滑流形 M_n 的归纳极限。于是 $q = \varinjlim q_n$ 是光滑的。我们证明 q 存在光滑局部截面。于是 q 是浸没（根据引理 3.7.25），且 G 与 q 构成一个光滑的 H-主丛。设 $g \in G$ 且 $n_0 \in \mathbb{N}$，满足 $g \in G_{n_0}$。令 $\varphi_n\colon U \to V$ 为 $\varinjlim M_n = G/H$ 上 gH 附近的一个坐标图，如定理 4.5.1 的证明中所述。

因此，$U = \bigcup_{n \geq n_0} U_n$ 具有相对紧、光滑可缩的开子集 $U_n \subseteq M_n$，使得 U_n 是 U_{n+1} 的子流形，并且存在一个光滑收缩映射 $r_n\colon U_{n+1} \to U_n$。对每个 $n \geq n_0$，$q_n\colon G_n \to M_n$ 限制为一个 H_n-主丛 $q_n^{-1}(U_n) \to U_n$，由于 U_n光滑可缩，该丛是可平凡化的。令 $\theta_n\colon q_n^{-1}(U_n) \to U_n \times H_n$ 为一个局部平凡化，其第二分量为$\theta_{n,2}\colon q_n^{-1}(U_n) \to H_n$。可以为 $n \geq n_0$ 找到一个由光滑局部截面 $\sigma_n\colon U_n \to G_n$ 构成的序列 $(\sigma_n)_{n \geq n_0}$，使得$\sigma_n|_{U_{n-1}} = q_{n,n-1} \circ \sigma_{n-1}$ 对所有 $n > n_0$都成立。我们从 $\sigma_{n_0}(x) := \theta_n^{-1}(x, e)$开始。若已找到$\sigma_{n_0}, \ldots\ldots, \sigma_n$，则可以取

$$\sigma_{n+1}(x) := \theta_{n+1}^{-1}(x, (\theta_{n+1,2} \circ \sigma_n \circ r_n)(x)).$$

于是，$\sigma := \varinjlim_{n \geq n_0} \sigma_n\colon \varinjlim_{n \geq n_0} U_n \to \varinjlim_{n \geq n_0} G_n$ 是一个从U 到 G 的光滑映射，这由引理 4.5.4 得出。根据构造，$q \circ \sigma = \mathrm{id}_{U_0}$。由于 q 是浸没，$H = q^{-1}(\{H\})$是 G的一个子流形（见命题 3.3.27(c)）。由于 $q\colon G \to G/H$ 是一个 H-主丛，H 实际上是 G 的分裂李子群（参见引理 3.7.25）。□

考虑由有限维李群及光滑群同态构成的直序列 $((G_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda_{m,n})_{m \geq n})$，其中$\lambda_{m,n}\colon G_n \to G_m$。于是，我们可以构造一个粘合映射为单射的李群直序列。

12.1.6.事实上，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$(\ker(\lambda_{m,n}))_{m \geq n}$ 是 G_n 的闭正规子群递增序列，因此

$$K_n := \bigcup_{m \geq n} \ker(\lambda_{m,n})$$

是 G_n 的正规子群。令 $H := \varinjlim G_n$ 作为集合和群，并令极限映射为 $\Lambda_n\colon G_n \to H$。我们赋予 H 关于族 $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的终拓扑，使其成为拓扑空间意义下的归纳极限 $\varinjlim G_n$。如果 $h \in H$，那么对于某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 和 $g \in G_n$，有 $h = \Lambda_{n_0}(g)$。对于 $n \geq n_0$，左平移 $\lambda_g^{G_n}\colon G_n \to G_n, x \mapsto gx$ 是连续的。现在，左平移 $\lambda_h^H\colon H \to H, x \mapsto hx$ 是映射 $\varinjlim_{n\geq n_0} \lambda_g^{G_n}$，因而是连续的（参见定义 A.7.8）。同样，右平移 $\rho_h^H\colon H \to H$ 连续，求逆映射 $H \to H, h \mapsto h^{-1}$ 也连续。因此，H 中平凡子群的闭包 $N := \overline{\{e\}}$ 是 H 的闭正规子群。因此

$$N_n := \Lambda_n^{-1}(N)$$

是 G_n 的闭正规子群。赋予 $G_n := G_n/N_n$ 唯一的李群结构，使典范映射 $q_n\colon G_n \to G_n, g \mapsto gN_n$ 成为浸没。根据构造，我们有

$$N_n = \lambda_{m,n}^{-1}(N_m) \quad \text{for all } m \geq n. \tag{12.5}$$

因此 $\lambda_{m,n}(N_n) \subseteq N_m$，由此

$$\bar{\lambda}_{m,n}\colon \overline{G}_n \to \overline{G}_m, \quad gN_n \mapsto gN_m$$

$\bar{}$ 是定义良好的群同态，且是光滑的，因为 $\lambda_{m,n} \circ q_n = q_m \circ \bar{}$ 是光滑的（见命题 3.3.27(b)）。根据构造，对于 $\mathbb{N}$ 中所有的 $m \geq n$，$\lambda_{m,n}$ 都是单射。于是 $((G_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_{m,n})_{m\geq n})$ 是有限维李群的直序列；受 NRW 启发，我们称之为相应的单射商系统。

12.1.7. 映射 $\lambda_n\colon G_n \to \overline{H/N}, gN_n \mapsto gN$ 对 $n \in \mathbb{N}$ 是单射群同态，并且 G/N 是这些像的递增并。因此

$$H/N = \varinjlim \overline{G}_n$$

作为集合和群，并带有极限映射 λ_n。我们赋予 $G := H/N$ 关于 q 的商拓扑。根据终拓扑的传递性，该拓扑关于 $n \in \mathbb{N}$ 的映射 $q \circ \Lambda_n = \lambda_n \circ q_n$ 是终拓扑，因此也关于 λ_n 的映射是终拓扑。于是，$G = \varinjlim G_n$ 作为拓扑空间是 $\lim$。

命题 12.1.8。 设 $((G_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_{m,n})_{m\geq n})$ 是李群的直序列，且 $((G_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_{m,n})_{m\geq n})$ 是相应的单射商系统，带有典范映射 $q_n\colon G_n \to G_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$。令 $G := \varinjlim G_n$ 为其直极限李群，如定理 12.1.1 所述，并带有极限映射 $\lambda_n\colon G_n \to G$。则以下结论成立：

(a) G 连同极限映射 $\lambda_n \circ q_n$，作为李群、豪斯多夫拓扑空间和豪斯多夫拓扑群，是 $((G_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\lambda_{m,n})_{m\geq n})$ 的归纳极限；并且对每个 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，在 C^r-粗糙边界流形及其间 C^r-映射的范畴中亦是其归纳极限。

(b) $\mathbf{L}(G) = \varinjlim \mathbf{L}(G_n)$，其粘合映射为$\mathbf{L}(\lambda_{m,n})$，极限映射为$\mathbf{L}(\lambda_n \circ q_n)$。
(c) 若对每个 $n \in \mathbb{N}$，G_n 在 K_n 上诱导离散拓扑，则 $N_n = K_n$且$\mathbf{L}(G) = \varinjlim \mathbf{L}(G_n)$。

证明。(b) 由定理 12.1.4 成立。

(a) 设 Y 为豪斯多夫拓扑空间，且$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为连续映射 $f_n\colon\ G_n \to Y$的序列，使得对 $\mathbb{N}$中的所有 $m \geq n$ 有$f_m \circ \lambda_m{}_n = f_n$。则存在唯一的连续映射 $f\colon\ H \to Y$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$有 $f \circ \Lambda_n = f_n$。对每个 $x \in H$，单点集 $\{f(x)\}$ 在豪斯多夫空间 Y中是闭的，从而 $xN = \overline{\{x\}} \subseteq f^{-1}(\{f(x)\})$。因此 $g\colon\ G \to Y$，$q(x) \mapsto f(x)$是一个良定义的映射，并且由于 $g \circ q = f$ 连续，故该映射连续。若 Y 是豪斯多夫群且每个 f_n 是连续群同态，则 g亦然。若 Y 是 C^r-流形（可能带有粗糙边界）且每个 f_n 是C^r-映射，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，$g \circ \lambda_n \circ q_n = g \circ q \circ \circ \Lambda_n = f_n$为 C^r，从而由命题 3.3.27(b)（参见注记 3.5.28）可知 $g \circ \lambda_n$为 C^r。由于根据定理 12.1.1，$G = \varinjlim G_n$ 作为 C^r-流形，我们推得 g 为 C^r。

(c) 若每个 K_n 都是离散的，我们对 $\overline{n} \in \mathbb{N}$ 定义$Q_n := G_n/\underline{K}_n$，并令$p_n\colon\ G_n \to Q_n$为典范映射。对于 $\mathbb{N}$中的 $M \geq n$，令 $p_{m,n}\colon\ Q_n \to Q_m$为由 $p_{m,n} \circ p_n = p_m$确定的光滑群同态。于是$p_{m,n}$ 是单射，因此我们可以对直序列 $((Q_n)_{n\in\mathbb{N}}, (p_{m,n})_{m\geq n})$构造归纳极限李群 $Q = \varinjlim Q_n$，其极限映射 $j_n\colon\ Q_n \to Q$都是单射。对于上述的 H，存在连续映射 $j\colon\ H \to Q$，使得 $j \circ \Lambda_n = j_n \circ p_n$，由此可知 $N_n = K_n$。□

例 12.1.9.对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $G_n := \mathbb{S}$ 为圆群，并令$\lambda_{m,n}\colon\ \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 为映射 $z \mapsto z^{2^{m-n}}$。那么 K_n 是所有满足以下条件的 $z \in \mathbb{S}$ 构成的群：对某个 $k \in \mathbb{N}$，有 $z^{2^k} = 1$。因此 K_n 在 G_n 中稠密，从而 $K_n = G_n \subseteq \ker(\lambda_n \circ q_n)$，这表明对所有 $g \in G_n$，$(\lambda_n \circ q_n)(g) = e$。因此，$G :=$ 作为李群并非 $\varinjlim G_n = \{e\}$，且 $\mathbf{L}(G) = \{0\} \neq$也不是 $\varinjlim \mathbf{L}(G_n) \cong \mathbb{R}$。作为抽象群，$\varinjlim G_n =$与$\varinjlim G_n/K_n$同构；它不可数，因此不同构于 G。

如果每个有限子集都生成一个有限维子代数，则称李代数是局部有限的。

定理 12.1.10.设 $\mathfrak{g}$ 是一个可数维的局部有限李代数。最细局部凸拓扑使 $\mathfrak{g}$ 成为拓扑李代数。于是存在一个单连通、连通且 C^0-正则的李群 G，使得 $\mathbf{L}(G) \cong \mathfrak{g}$，并且 $G =$极限$\varinjlim G_n$，其中 $G_1 \subseteq G_2 \cdots$ 是一个有限维李群的递增序列。

以下事实对证明很有用。

引理 12.1.11. 设 G 是一个单连通、连通、有限维实李群。设 $Z(G)$ 是 G 的中心，而 $Z(G)_0$ 是其单位元的连通分支。那么 $Z(G)_0$ 是一个向量群，即对于某个 $m \in \mathbb{N}_0$，有 $Z(G)_0 \cong \mathbb{R}^m$。

证明。由列维定理，L(G) = L($\mathfrak{r}$) L($\mathfrak{s}$)，其中 $\mathfrak{r}$ 是 L(G) 的根基，而 $\mathfrak{s}$ 是一个列维补（参见 [Bou89，第 I 章，§6.8，定理 5]）。设 R 和 S 分别是对应于 $\mathfrak{r}$和 $\mathfrak{s}$的积分子群。那么 R 和 S 是单连通的， R 是闭正规子群， S 是 G的闭子群，并且 $G = R \rtimes S$ = R S （参见 [HiNe12，命题 11.1.19]）。现在考虑中心 $Z(G)$ 的单位连通分支 $Z(G)_0$ 。设π: $G \to S$ 是到 S上的投影，其核为 R。于是 $\pi(Z(G)_0)$ = $\subseteq Z(S)_0 = \{e\}$，从而 $Z(G)$ = $_0 \subseteq R$。因此， $Z(G)_0$ 是单连通可解李群 R的一个积分子群，故 $Z(G)_0$ 是单连通的（ [HiNe12，命题 11.2.15]）。作为单连通阿贝尔李群，$Z(G)_0$ 是一个向量群。□

定理的证明 12.1.10. 由于 $\mathfrak{g}$是局部有限且可数维的， $\mathfrak{g}$是 $\mathfrak{g}$中某个有限维李子代数 $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \cdots$递增序列的并。 $\mathfrak{g}$ 上的最细局部凸拓扑使其作为局部凸空间成为直极限 $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{g}_n$，并且是一个拓扑李代数（见引理 12.1.3）。对于 $n \in \mathbb{N}$，设 G_n 是一个单连通连通李群，其李代数为 $\mathbf{L}(G_n) \cong \mathfrak{g}_n$；固定一个同构 κ_n: $\mathbf{L}(G_n) \to \mathfrak{g}_n$。若$m \geq n$，则单射李代数同态

$$\kappa_{m,n} := \kappa_m^{-1} \circ \kappa_n \colon \mathbf{L}(G_n) \to \mathbf{L}(G_m)$$

使 (L(G_n),($\kappa_{m,n}$)$_{m \geq n}$) 成为李代数的有向序列。引理 12.1.3 允许我们将直极限 $\varinjlim$ L(G_n) 构造成一个拓扑李代数；映射 $\kappa := \varinjlim {}^{\kappa_m}$: $\mathfrak{g} = \varinjlim {}^{\mathfrak{g}_n} \to \varinjlim$ L(G_n) 是拓扑李代数的一个同构。对于所有 $m \geq n$，存在唯一的光滑群同态$\lambda_{m,n}$: $G_n \to G_m$ ，使得 L($\lambda_{m,n}$) = $\kappa_{m,n}$ （见定理 6.1.16）。由于 L($\lambda_{k,m} \circ \lambda_{m,n}$) = L($\lambda_{k,n}$)，我们有

$$\lambda_{k,m} \circ \lambda_{m,n} = \lambda_{k,n} \quad \text{for all } k \geq m \geq n, \tag{12.6}$$

由此，((G_n)$_{n \in \mathbb{N}}$, ($\lambda_{m,n}$)$_{m \geq n}$) 是有限维李群的直序列。设 K_n 如 12.1.6 中所述。我们断言，对每个 $n \in \mathbb{N}$， K_n 都是离散的，因此 $G_n := G_n/K_n$ 可赋予李群结构，使得 q_n: $G_n \to G_n$,$g \mapsto gK_n$ 是局部 C^∞-微分同胚。根据命题 12.1.8 的 (a) 和 (c) 部分，我们可以在李群范畴及光滑群同态范畴中构造归纳极限 $G = \varinjlim G_n/K_n$ ，它是 C^0-正则的（见命题 12.1.4）；此外， $G = \varinjlim G_n$ 也是李群。设 λ_n: $G_n \to G$ 为极限映射。此外，根据命题 12.1.8(b)，利用粘合映射 L($\lambda_{m,n}$)，有 L(G) $\cong \varinjlim$ L(G_n)。由于 $\varinjlim$ L(q_n): $\varinjlim$ L(G_n) $\to \varinjlim$ L(G_n) 是拓扑李代数的一个同构，因此作为拓扑李代数，有 $\mathfrak{g} \cong \varinjlim$ L(G_n) $\cong$ $\varinjlim$ L(G_n) $\cong$ L(G)。设 G 是 G 的万有覆盖李群，且 π: $G \to G$ 是一个满射群同态

$\widetilde{\ }$，它是局部 C^∞-微分同胚。由于 G 是正则的，G 也是正则的（见命题 6.1.5）。对每个 $n \in \mathbb{N}$，连续李代数同态$\widetilde{\mathbf{L}}(\pi) \circ \mathbf{L}(\lambda_n)$ 可积分为光滑群同态 $j_n\colon G_n \to G$（见定理 6.1.16）。于是 $j_m \circ \lambda_{m,\,n} = j_n$，因此存在光滑群同态$\widetilde{\ } j\colon G = \varinjlim G_{\overline{n}} \to G$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $j \circ \lambda_n = j_n$。⟶那么，$\mathbf{L}(\pi \circ j) = \mathrm{id}^{\mathbf{L}(G)}$ 和 $\mathbf{L}(j \circ \pi) = \mathrm{id}^{\mathbf{L}(\tilde{G})}$ 意味着 $\pi \circ j = \mathrm{id}_G$ 且$_\sim j \circ \pi = \mathrm{id}_{\tilde{G}}$。因此 $G \cong G$ 是单连通的。

还需证明每个 K_n 都是离散的。我们证明其闭包$N_n := K_n \subseteq G_n$ 是离散的。对于所有满足 $m \geq n$ 的 $m, n \in \mathbb{N}$，同态 $\lambda_{m,n}$ 的核都是离散的，因为 $\mathbf{L}(\lambda_{m,n}) = \kappa_{m,n}$ 是单射。由于 $\ker\lambda_{m,n}$ 是连通群 G_n 的离散正规子群，所以它是中心的。因此，对每个 n，都有 $N_n \subseteq Z(G_n)$，从而 $(N_n)_0 \subseteq Z(G_n)_0$ 是向量群，因为它是向量群的连通闭子群（引理 12.1.11）。由 (12.6) 可得，对所有 $m \geq n$，都有 $\lambda_{m,n}(N_n) \subseteq N_m$，从而 $\lambda_{m,n}((N_n)_0) \subseteq (N_m)_0$。作为向量群之间的连续同态，$\psi_{m,n} := \lambda_{m,n}|_{(N_n)_0}\colon (N_n)_0 \to (N_m)_0$ 是实线性的。因此，作为一个核离散的线性映射，$\psi_{m,n}$ 是单射。于是 $(N_n)_0 = \overline{\bigcup_{m\geq n} \ker\psi_{m,n}} = \{e\}$，从而 N_n 是离散的。□

推论 12.1.12。每个连通正则李群 G，若其李代数可数维、局部有限且带有最细局部凸拓扑，则它是有限维李群的归纳极限。

证明。由定理 12.1.10 和命题 12.1.4，存在有限维李群 G_n 的归纳极限$H := \varinjlim G_n$，满足 $\mathbf{L}(H) \cong \mathbf{L}(G)$，使得 H 是连通、单连通的正则李群。由于万有$\widetilde{\ }$覆盖群 G 是正则的，由定理 6.1.16 可得，$H \cong G$ 作为李群成立。因此，对于某个离散正规子群$N \subseteq H$，有 $G \cong H/N$。由命题 12.1.5，$H/N \cong G_n/(H \cap G_n)$。□

12.2 关于局部有限维李群的更多事实

下文中，我们将定理 12.1.1 所描述的李群类称为局部有限维（正则）李群。我们列举若干事实，但不予证明，并提供相关文献作为参考。回顾一下，若存在一个单位元邻域 $U \subseteq G$，其中不包含 G 的任何子群（平凡子群除外），则称拓扑群 G 具有无小子群性质。

定理 12.2.1。([Gl05c, Gl07b]) 设 G 是一个局部有限维李群。则以下断言成立：

(a) 每个子代数 $\mathfrak{h} \subseteq \mathbf{L}(G)$ 都能积分为一个积分子群。

(b) 每个局部紧子群 $H \subseteq G$ 都是有限维李群。(c) G不含小子群。

定理 12.2.2。 [Gl05c] 局部有限维李群之间的每个连续同态都是光滑的。

与局部指数李群的相应结果（定理 7.2.4）相同，前述定理意味着局部有限维李群构成拓扑群范畴的一个满子范畴。我们甚至有前述定理的以下更强版本：

定理 12.2.3。 设 $G = \varinjlim G_n$ 是一个局部有限维李群， H 是一个李群。

(a) </style}群同态： $G \to H$ 是光滑的，当且仅当相应的同态 φ_n: $G_n \to H$ 是光滑的。(b)如果 H 有光滑的指数映射，那么每个连续同态 φ: $G \to H$ 都是光滑的。

证明。 (a) 已包含在 [Gl05c] 中。

鉴于 (a)，(b) 可由有限维情形推出，而有限维情形又可由第二类局部坐标的存在性推出：$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \exp G(t_i x_i)$. □

注 12.2.4。(a) 超出可数有向系统的范围后，会出现若干严重障碍。对于可数维向量空间，最细局部凸拓扑与使所有有限维子空间的包含映射连续的最细拓扑相一致。这对该领域的许多论证至关重要。若 E 不是可数维的，则在后一种拓扑下，加法 E 不连续。对于拓扑群的不可数直极限，也会出现类似问题：在许多情况下，直极限拓扑无法使乘法连续（更多细节参见 [Gl03a] ）。

(b) 任意可数维向量空间 E，赋予最细局部凸拓扑后，都可视为有限维子空间 E_n 的直接极限空间，其中 $\dim E_n = n$，参见例 A.7.16。由于每个 E_n 都是闭的巴拿赫子空间，且所有包含映射 $E_n \to E_{n+1}$ 都是紧算子，因此 E 同时是 LF 空间和西尔瓦空间。

12.3 无限维李群的直极限

归纳极限构造在应用于无限维李群序列时也发挥着重要作用。在巴拿赫空间和 Fr´echet 空间的层面上，不同类型的有向系统会导出 LF 空间和 Silva 空间这两个重要类别。

许多有趣的李群 G （如映射群及其他类别）都自然地嵌入盒积（也称为直和、受限直积或弱直积）中，如定理 11.2.1 中所构造的那样。这通常为 G 提供一个尼斯图册，并可将关于映射到 G 的可微性问题归结为关于映射到盒积的问题，而后者可能更容易处理。我们回顾 [Gl03b] 中的结果：

定理 12.3.1。([Gl03c]) 如果$(G_j)_{j\in J}$ 是一个可数李群族，那么它们的盒积

$$G := \bigoplus_{j\in J} G_j := \left\{(g_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} G_j \colon |\{i\colon g_j \neq \mathbf{1}\}| < \infty\right\}$$

具有自然的李群结构，其中$\mathbf{L}(G) \cong \bigoplus_{j\in I}\mathbf{L}(G_j)$ 带有使其成为局部凸直和的盒拓扑。如果每个 G_j 都是局部指数的，那么 G也如此。

对于不可数族，也有类似的结果，只需采用一种适当的“细盒积”，并以局部凸直和为模型（参见同上，术语有所不同）。对于 $J = \mathbb{N}$， $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 是在光滑李群与光滑群同态范畴中，部分乘积$\prod_{j=1}^{n} G_j$ 的归纳极限，但不一定是作为光滑流形的归纳极限（参见 [Gl07a]）。

一个特别重要的例子是微分同胚群。考虑紧致有限维光滑流形 M上的紧支光滑微分同胚所构成的李群 $\mathrm{Diff}_c(M)$，如第 13 章所述（并可追溯至 [Mr80]）。它以紧支撑光滑向量场的 LF-空间 $\mathcal{V}_c(M)$为模型。

定理 12.3.2。([Gl07a]) 设 M 是一个 σ-紧、非紧致的正维光滑流形，且 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 M 的一个紧耗尽。那么，紧支撑微分同胚构成的李群 $\mathrm{Diff}_c(M)$ 在光滑流形范畴中不是子群 $\mathrm{Diff}^{L_n}(M)$ 的归纳极限；但是，映射到李群 H 的同态 $\mathrm{Diff}_c(M) \to H$ 光滑，当且仅当它在每个子群 $\mathrm{Diff}^{L_n}(M)$ 上都光滑。

因此，$\mathrm{Diff}_c(M)$ 是 $\mathrm{Diff}^{L_n}(M)$ 的归纳极限，所处范畴由光滑李群和光滑群同态构成。该定理证明中的一个关键工具是以下引理，它出自 [Gl07a], ，并利用了李群的盒积。

引理 12.3.3。(碎裂引理) 设 M 是一个 σ-紧的有限维流形。那么，存在一个由紧集构成的 M 的局部有限覆盖 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 、一个开单位元邻域 $U \subseteq \mathrm{Diff}_c(M)$ 以及一个光滑映射 $\Phi\colon U \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Diff}^{K_n}(M)$，它满足 $\gamma = \Phi(\gamma)_1 \circ \ldots \circ \Phi(\gamma)_n$，对每个 $\gamma \in U$ 均成立。

设 σ 是一个紧的有限维流形 M。令 K 为一个李群， $C_c^\infty(M, K)$ 为紧支撑光滑

映射 $M \to K$ 所成的李群，如定理 11.3.1 中所讨论（另见 [Gl02c]）。于是 $C_c^\infty(M,K)$ 是由子群 $C_L^\infty(M,K)$ 构成的有向系统之并集：$=\{f \in C^\infty(M,K)\colon \operatorname{supp}(f) \subseteq L\}$，其中 $L \subseteq M$ 为紧子集。若 K 是巴拿赫–李群或 Fr´echet–李群，则 $C_L^\infty(M,K)$ 是 Fr´echet–李群，因此 $C_c^\infty(M,K)$ 是一个 LF 李群。不过，构造李群结构的方法适用于一般的 K。

定理 *12.3.4. ([Gl07a])* 对于一个正维数的 σ 紧、非紧流形 M，以及一个正维数的有限维李群 K，紧支撑的 K 值光滑函数构成的李群 $C_c^\infty(M,K)$，赋予以直极限空间 $C_c^\infty(M,K) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} C^\infty_{M_n}(M,K)$ 为模型的李群结构，其中 M_n是 M的一个穷竭，它不是光滑流形范畴中子群 $C^\infty_{M_n}(M,K)$ 的直极限；但是，到李群 H 的同态 $C_c^\infty(M,K) \to H$ 光滑，当且仅当它在每个子群 $C^\infty_{M_n}(M,K)$ 上都光滑。

最终的肯定结论背后，同样是一个映到适当盒积的碎裂映射。

注 12.3.5. 在处理不可数指标集或仿紧有限维光滑流形时，会遇到不可数直系统（没有共尾子序列）。尽管如此，仍然可以构造微分同胚群（见 [Mr80]），以及测试函数群（参见 [Gl12b], [Gl15b], [Gl19a], [Gl21a]）。虽然所有李群范畴中的直极限性质尚不清楚，但对于仿紧有限维光滑流形 M，可以证明以下结论（见 [Gl21a]）：

(a) 在紧子集 M 的有向集中，当 L 取值时，$\operatorname{Diff}_c(M) = \varinjlim \operatorname{Diff}_L(M)$ 是正则李群及光滑群同态范畴中的归纳极限。

(b) 对每个存在某个 $k \in \mathbb{N}_0$ 使其为 C^k-正则的李群 K，$C_c^\infty(M,K) = \varinjlim C_L^\infty(M,K)$ 都是正则李群。

注 12.3.6。我们提到，[Ne06a] 中关于归纳极限及相关李群的一些公开问题，如今已经可以解决：

(a) 局部有限维李群是 [HoM04a] 意义下带李代数的拓扑群（参见 [Gl08a]）。因此，$\mathfrak{L}(G)$ 上的紧开拓扑 $\cong \operatorname{Hom}(\mathbb{R},G)$ 与 $\mathbf{L}(G)$ 上给定的拓扑一致。

(b) 局部有限维李群 G 的每个子群 H 都是初始李子群（参见 [Gl08a]）。

(c) 对于域 $\mathbb{K}$ 上的巴拿赫空间 E 和非空紧子集 $K \subseteq E$，存在一个由 K 附近 $\mathbb{K}$-解析微分同胚的芽构成的李群 φ，使得 $\varphi|_K = \mathrm{id}_K$。该李群是正则的（见 [Da11]）。对于 $\mathbb{C}^n$ 中的单点集 K，此类李群最早由 [Pis77] 研究。

因此， [Ne06a] 中的问题 VI.5、问题 VII.2 和问题 VII.3 均得到了肯定解答。

如果 G 是正则的，那么下面这个曾提出的问题的答案是否定的。

设 M 是一个局部凸流形， $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{V}(M)$ 是由完备向量场组成的可数维局部有限维子代数。包含映射 $\mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$ 能否积分为相应李群 G 的光滑作用，其中$\mathbf{L}(G) = \mathfrak{g}$?

事实上，考虑 Fr´echet 空间 $M = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 和阿贝尔李群（$\mathbb{R}^\infty, +$）。我们有一个左作用

$$\sigma\colon \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad ((a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}, (x_j)_{j\in\mathbb{N}}) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

对于（a_k）$_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty$，考虑矩阵 h（（a_k）$_{k\in\mathbb{N}}$）$\in$ GL∞（$\mathbb{R}$），其（i, j）项为$\delta_{i,j}$，若 $i \geq 2$ 或 $j = 1$，而 h（（a_k）$_{k\in\mathbb{N}}$）$_{1,j} := a_{j-1}$，其中$j \geq 2$为整数。于是 h: $\mathbb{R}^\infty \to$ GL∞（$\mathbb{R}$）是一个群同态，因此

$$\tau\colon \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (a, x) \mapsto \sigma(h(a), x)$$

是 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上的 $(\mathbb{R}^\infty, +)$ 的左作用。注意， τ 是不连续的，因为 $\tau(a, x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的第一分量由下式给出

$$x_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{k+1}$$

因此是不连续的（见习题 A.7.4）。对于 $n \in \mathbb{N}$，将 τ限制为一个作用

$$\tau_n\colon (\mathbb{R}^n, +) \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

是光滑的，因此产生一个李代数同态 ψ_n: $\mathbb{R}^n \cong L(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{V}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$，其中使用 $\mathcal{V}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ 上向量场的李括号的负号；该括号由下式确定

$$\psi(v)(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tau(\exp_{\mathbb{R}^n}(tv), x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tau(tv, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k x_{k+1}$$

因此是单射的。于是我们可以将 $\mathfrak{g} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{im}(\psi_n)$ 与 $\mathbb{R}^\infty$ 认同。 $\mathfrak{g}$ 中的向量场是完备的，因为我们具有 $\mathbb{R}^n$-作用。每个具有李代数 $\mathfrak{g}$ 的正则连通李群 G 都将是 $\mathbb{R}^\infty$ 被一个离散子群商得到的商群，因此也会产生不连续的作用。

注 12.3.7。我们提到，为分析归纳极限李群而在 [Gl03a] 和 [Gl05c] 中发展的方法，有望适用于

更一般的李群类 G，这些李群是有限维流形的归纳极限 $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$，并且具有如下性质：对于 $n,\ m\in\mathbb{N}$，存在 $c(n,\ m)$ 和 $d(n)$，使得

$$M_n \cdot M_m \subseteq M_{c(n,m)} \quad \text{and} \quad M_n^{-1} \subseteq M_{d(n)},$$

这是自由构造中出现的一种情形。关于这种形式的一个结果，参见 [Gl07a，引理 14.5] 。类似情形（其中 M为无限维）出现在 Kac–Moody群的归纳簇描述中（参见 [Kum02], [BiPi02]）。

12.4 第 12 章的开放问题

问题 12.4.1. 每一个其李代数 $\mathfrak{g}$为可数维、局部有限且赋予最细局部凸拓扑的李群 G 是否都是正则的?

12.5 关于第 12 章的注记与评述

对归纳极限李群$G = \varinjlim G_n$ 上李群结构的系统研究始于20世纪90年代，由 J. Wolf 及其合作者[NRW91, NRW93]开展。他们对群 G_n 和连接映射 $G_n \to G_{n+1}$ 施加了某些条件，以确保直极限群是局部指数的。由于并非所有直极限群都是局部指数的（例 12.1.2(c)），他们的方法并不能涵盖所有情形。有限维李群的可数直极限的全貌在 [Gl03b, Gl05c],中得以完成，其中证明了任意可数的有限维李群直极限都存在。这些结果的关键是有限维流形的直接极限的一般构造原理，如第 4.5 节所述。沃尔夫等人的方法后来被推广到性态良好情形下巴拿赫–李群的递增并，并对此建立了正则性（参见 [Da14]）。在 [KM97，定理 47.9], 中证明了 $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{R})$的每一个子代数 $\mathfrak{h}$ 都可积为一个积分子群，这是定理 12.2.1 的一个特殊情形。此处 $\mathfrak{h}$ 甚至是 BCH 的。对于维数 $K<\infty$，群 $C_c^\infty(M,K)$也在 [NRW94] 中作为 BCH 的归纳极限李群加以讨论；它们也出现在 [AHM93]中。

13 微分同胚群

本章尚未完成。仍有一些证明有待补充，也有一些章节需要撰写。下文用红色标出了缺失的部分。

13.1 紧流形的微分同胚群

若 K 是紧致光滑流形（无边界），且 $\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，我们用 $\mathrm{Diff}_{C^\ell}(K)$ 表示所有 C^ℓ-微分同胚 $\gamma\colon K \to K$ 所构成的群（以复合作为群运算，单位元为 id_K）。我们将 $\mathrm{Diff}(K) := \mathrm{Diff}_{C^\infty}(K)$ 记作 $\mathrm{Diff}(K)$。作为所开发技术的一项应用，我们将证明以下定理：

定理 13.1.1。若 K 是无边界的紧致光滑流形，则$\mathrm{Diff}(K)$ 是 $C^\infty(K,K)$ 的一个开子集，而作为开子流形的光滑流形结构使$\mathrm{Diff}(K)$ 成为一个李群。

以下的命题 13.1.10 涵盖了这一结果，并提供了更多信息。为准备证明该结果，我们先记录复合映射的可微性性质。

命题 13.1.2.设 K 为紧致光滑流形 (可能带有粗糙边界)， L为紧致光滑流形(无边界)， M 为容许局部加法的光滑流形，且 k、$\ell \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。则下列结论成立：

(a) 该映射

$$\Gamma\colon C^{\ell+k}(L,M) \times C^\ell(K,L) \to C^\ell(K,M),\ (\gamma,\eta) \mapsto \gamma \circ \eta$$

是 C^k-映射。特别地，映射 $C^\infty(L,M) \times C^\infty(K,L) \to C^\infty(K,M)$，$(\gamma,\eta) \mapsto \gamma \circ \eta$ 是光滑的。(b) 对每个 $\gamma \in C^\ell(K,L)$，映射 $\rho_\gamma\colon C^\ell(L,M) \to C^\ell(K,M)$，$\eta \mapsto \eta \circ \gamma$是光滑的。

证明。 (a) 我们有 $\Gamma^\wedge(\gamma,\eta,x) = \gamma(\eta(x)) = \varepsilon(\gamma,\widetilde{\varepsilon}(\eta,x))$，用求值映射 $\varepsilon\colon C^{\ell+k}(L,M) \times L \to M$和 $\widetilde{\varepsilon}\colon C^\ell(K,L) \times K \to L$来表示。由于 $\widetilde{\varepsilon}$是

$C^{\infty,\ell}$（从而 $C^{k,\ell}$），且到第二分量上的投影 $C^{\ell+k}(L,M)\times C^{\ell}(K,L)\to C^{\ell}(K,L)$ 是 C^k，该映射

$$h\colon (C^{\ell+k}(L,M)\times C^{\ell}(K,L))\times K\to L,\quad (\gamma,\eta,x)\mapsto \eta(x)$$

是 $C^{k,\ell}$，由链式法则（命题 1.2.13）可知。现在

$$g\colon (C^{\ell+k}(L,M)\times C^{\ell}(K,L))\times K\to C^{\ell+l}(L,M),\quad (\gamma,\eta,x)\mapsto x$$

是光滑映射，因此 $C^{k,\ell}$ 也如此。由于 ε 是 $C^{\infty,l+\ell}$，因而 $C^{k+\ell}$，链式法则（命题 1.2.13）表明 $\Gamma=\varepsilon\circ(g,\ h)$是 $C^{k,\ell}$。

（b）思路：基本思路是

$$\begin{aligned}(\varphi_{\eta\circ\gamma}\circ\rho_\gamma\circ\varphi_\eta^{-1})(\sigma)&=\Sigma\circ(\theta^{-1}\circ(\eta,\sigma))\circ\gamma\\&=\mathrm{pr}_2\circ\theta\circ\theta^{-1}\circ(\eta,\sigma)\circ\gamma=\sigma\circ\gamma\end{aligned}$$

但首先必须证明最左边的项处处有定义。我们需要$\rho_\gamma\colon \Gamma\eta^*(E)\to\Gamma((\eta\circ\gamma)^*(E))$是连续线性的。□

接下来的五个引理为讨论微分同胚群作准备。第一个引理专门讨论浸入。

定义 13.1.3. 设 $\ell\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。从有限维 C^ℓ-流形 N 到 C^ℓ-流形 N（二者均无边界）的 C^ℓ-映射 $f\colon M\to N$称为 浸入（或 C^ℓ-浸入），如果对所有 $x\in M$，$T_xf\colon T_xM\to T_xN$ 均为单射。我们用 $\mathrm{Imm}_{C^\ell}(M,N)$ 表示所有 C^ℓ-浸入$\gamma\colon M\to N$ 的集合，并将 $\mathrm{Imm}(M,N)$ 简记为 $:=\mathrm{Imm}_{C^\infty}(M,N)$。

注 13.1.4.读者可参阅（适当的习题）以了解一般 C^ℓ-流形（以任意局部凸空间为模型）之间的浸入、嵌入与下沉。

引理 13.1.5. 设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $\gamma\colon V\to\mathbb{R}^n$ 是开子集$V\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的 C^1-映射，使得对某个 $x_0\in V$有 $\gamma'(x_0)=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$。则存在 γ-邻域 $P\subseteq C^1(V,F)$ 以及开 x_0-邻域 $Q\subseteq V$，使得对每个 $\eta\in P$，$\eta|_Q$ 均为单射 C^1-浸入。

证明。 注意，$\gamma'\colon V\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 是连续的，因为 $\gamma'(x)(y)=d\gamma(x,\ y)\in\mathbb{R}^n$ 对每个 $y\in\mathbb{R}^n$ 都连续依赖于 $x\in V$，且 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\cong\mathbb{R}^{n^2}$ 上唯一的向量拓扑与逐点收敛拓扑一致。我们在 $\mathbb{R}^n$ 上固定一个范数 $\|\cdot\|$，并用 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ 上对应的算子范数。此外，球均指给定范数下的球。利用 γ' 的连续性，我们找到 $r>0$，使得 $K:=\overline{B_r(x_0)}\subseteq U$，满足

$$\sup_{x\in\overline{B}_r(x_0)}\|\gamma'(x)-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\|_{\mathrm{op}}<\frac{1}{3}.\tag{13.1}$$

我们令 $Q:=B_r(0)$，并令 P 为所有满足以下条件的 $\eta\in C^1(V,\ F)$ 的集合：

$$\sup_{x\in\overline{B}_r(x_0)} \|\eta'(x)-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{3}, \tag{13.2}$$

这意味着，对于每个 $x\in B_r(x_0)$，$\eta'(x)\in$ 一般线性群$(\mathbb{R}^n)$。特别地，$\eta|_Q$ 是一个浸入。此外，

$$\|\eta'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}} = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}-\eta'(x))^k\right\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3/2$$

利用诺伊曼级数和几何级数，由此得到 $\|\eta'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1} > 2/3$。由于 $\|\eta'(x)-\eta'(x_0)\|_{\mathrm{op}} \le \|\eta'(x)-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\|_{\mathrm{op}} + \|\eta'(x_0)-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\|_{\mathrm{op}} < \frac{3}{3}$，我们有 $\mathrm{Lip}(\eta-\eta'(x_0)) \le 2/3 < \|\eta'(x_0)^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$，因此 $\eta|_{B_r(0)}$ 是单射。由定理 2.3.32，只需注意到 P 是$C^1(V,\mathbb{R}^n)$ 中的一个开 γ-邻域，因为

$$D\colon C^1(V,\mathbb{R}^n)\to C(V,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)),\ \eta\mapsto\eta'$$

是连续线性映射（因为 $D\eta = (d\eta)^\vee$，且引理 4.1.12、命题 A.6.17 以及引理 A.6.5 均适用）；此外，

$$C(V,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))\to[0,\infty[,\quad \zeta\mapsto\sup_{x\in K}\|\zeta(x)\|_{\mathrm{op}}$$

是 $C(V,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ 上的一个连续半范数（参见引理 A.6.24(b)）。 □

引理 13.1.6。设 M 是一个有限维 C^1-流形，$\gamma\colon M\to N$ 是到流形 N 的一个 C^1-浸入，且 $x_0\in M$。那么存在一个 γ-邻域 $W\subseteq C^1(M,N)$ 和一个开 x_0-邻域 $U\subseteq M$，使得对每个 $\eta\in W$，$\eta|_U$ 都是单射 C^1-浸入。

证明。设 F 是 N 的建模空间，且 $\psi\colon U_\psi\to V_\psi\subseteq F$ 是 N 在 $\gamma(x)$ 附近的坐标图。设 n 是 M 的维数，且 $\varphi\colon U_\varphi\to V_\varphi\subseteq\mathbb{R}^n =: E$ 是 M 在 x_0 附近的坐标图，使得 $\gamma(U_\varphi)\subseteq U_\psi$ 且 $\varphi(x_0)=0$。那么 $f := \psi\circ\gamma|\circ\varphi^{-1}\colon V_\varphi\to F$ 是 C^1，并且对于 $j\in\{1,\dots,n\}$，向量 $y_j := dh(x_0,e_j)$ 在 F 中线性无关。令 $Y :=$ 张成$\{y_1,\dots,y_n\}$，并设 $y_1^*,\dots,y_n^*\in Y'$ 是由 $y_j^*(y_k)=\delta_{j,k}$（对所有 $j,k\in\{1,\dots,n\}$）确定的对偶基。根据哈恩–巴拿赫延拓定理，对每个 $j\in\{1,\dots,n\}$，存在 $\lambda_j\in F'$ 使得 $\lambda_j|_Y = y_j^*$。设 $K\subseteq U_\varphi$ 是一个紧的 x_0-邻域。那么

$$\Omega := \{\eta\in C^1(M,N)\colon \eta(K)\subseteq U_\psi\} = C^1(M,N)\cap\lfloor K,U_\psi\rfloor$$

是 $C^1(M,N)$中的一个开 γ邻域。于是 $V := \varphi(K^0)$是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，并且

$$\kappa\colon\colon\Omega\to C^1(V,\mathbb{R}^n),\quad \eta\mapsto f\circ\psi\circ\eta\circ\varphi^{-1}|_V$$

根据引理 4.1.4(b)、注 4.1.5 和引理 4.1.4(a)，是连续的。根据引理 13.1.5，存在一个开 $\varphi(x_0)$-邻域 $Q\subseteq V$ 以及一个 $\kappa(\gamma)$-邻域 $P\subseteq C^1(V,\mathbb{R}^n)$，使得 $\eta|_Q$ 对每个

$\eta \in P$都是单射浸入。于是，$U := \varphi^{-1}(Q)$ 是 M 中的一个开 x-邻域，而 $W := \kappa^{-1}(P)$ 是 $C^1(M, N)$ 中的一个 γ-邻域，使得 $f \circ \psi \circ \eta|_U$（从而 $\eta|_U$ 也）对每个 $\eta \in W$ 都是单射浸入。□

引理 13.1.7。若 K 是紧致光滑流形，M 是允许局部加法的光滑流形（二者均无边界）且 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，则$\mathrm{Imm}_{C^\ell}(K, M)$ 在 $C^\ell(K, M)$ 中是 C^1-开集。

证明。由于 $\mathrm{Imm}_{C^\ell}(K, M) = \mathrm{Imm}_{C^1}(K, M) \cap C^\ell(K, M)$，不妨设 $\ell = 1$。令 $\gamma \in \mathrm{Imm}_{C^1}(K, M)$。对每个 $x \in M$，引理 13.1.6 给出一个开 γ-邻域 $W_x \subseteq C^1(K, M)$和一个开 x-邻域 $U_x \subseteq K$，使得对每个 $\eta \in W_x$，$\eta|_{U_x}$ 都是浸入。由于 K 是紧的，对于一个有限子集 $\Phi \subseteq K$，有 $K = \bigcup_{x\in\Phi} U_x$。于是 $W := \bigcap_{x\in\Phi} W_x$ 是一个开 γ-邻域，且 $W \subseteq \mathrm{Imm}_{C^1}(K, N)$。□

引理 13.1.8。设 P 是一个以局部凸空间 E 为模型空间的 C^k 流形（可带粗糙边界），并且 M 是一个以巴拿赫空间 F 为模型空间的 C^k 流形，其中 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。设 $f\colon P \times M \to M$ 是一个 C^k 映射，满足对每个 $p \in P$，$f_p := f(p, \cdot)\colon M \to M$ 是一个 C^k 微分同胚。若 F 是无限维的，则假设 $k \geq 2$。那么

$$g\colon P \times M \to M, \quad (p, y) \mapsto := g_p^{-1}(y)$$

是一个 C^k 映射。

证明。给定 $(p, y) \in P \times M$，设 $\kappa\colon U_\kappa \to V_\kappa \subseteq F$ 是 M 在 y 附近的一个坐标图。存在一个坐标图 $\varphi\colon U_\varphi \to V_\varphi \subseteq E$，它是 P 在 p 附近的坐标图；还存在一个坐标图

$$\psi\colon U_\psi \to V_\psi \subseteq F$$

M 在 x 附近的坐标图：$= f_p^{-1}(y)$，使得 $f(U_\varphi \times U_\psi) \subseteq U_\kappa$。于是

$$\kappa \circ (\varphi^{-1} \times \psi^{-1})\colon V_\varphi \times V_\psi \to V_\kappa$$

满足（待添加的参考文献/定理）的假设。因此，存在一个开 p-邻域 $Q \subseteq U_\varphi \subseteq P$和一个开邻域$W \subseteq U_\kappa \subseteq M$，使得 $g|_{Q\times W}$ 是 C^k。□

引理 13.1.9。若 K 是紧致光滑流形，则 $C^1(K, K)$是可度量化的。

证明。由惠特尼嵌入定理 [Wh36]，K 对某个 $d \in \mathbb{N}$ 嵌入于 $\mathbb{R}^d$。因此 TK 嵌入于 $\mathbb{R}^{2d}$。于是 TK 是一个 σ-紧的局部紧空间，且可度量化，从而 $C(TK, \mathbb{R}^{2d})$ 可度量化（由引理 A.6.24(c)），因而 $C(TK, TK)$ 也可度量化（利用引理 A.6.5）。由此，$C^1(K, K)$ 也可度量化，因为它嵌入于 $C(TK, TK)$（见引理 4.1.6）。□

命题 13.1.10. 设 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 与 K 为紧光滑流形。则 微分同胚群$_{C^\ell}(K)$ 在 $C^\ell(K,K)$ 中是 C^1-开的。我们赋予 微分同胚群$_{C^\ell}(K)$ 作为 $C^\ell(K,K)$ 的开子集的光滑流形结构。则对所有 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，下列结论成立：

(a) 求逆映射 微分同胚群$_{C^{\ell+k}}(K) \to$ 微分同胚群$_{C^\ell}(K)$ 是 C^k；(b) 复合映射 微分同胚群$_{C^{\ell+k}}(K) \times$ 微分同胚群$_{C^\ell}(K) \to$ 微分同胚群$_{C^\ell}(K)$ 是 C^k；(c) 对每个 $\gamma \in$微分同胚群$_{C^\ell}(K)$，右平移

$$\rho_\gamma \colon \mathrm{Diff}_{C^\ell}(K) \to \mathrm{Diff}_{C^\ell}(K), \quad \eta \mapsto \eta \circ \gamma$$

是一个 C^∞-映射；(d) 微分同胚群$_{C^\ell}($$K)$ 是拓扑群；并且微分同胚群(K) 是李群。

证明。若 $\mathrm{Diff}_{C^\ell}(K)$ 在 $C^\ell(K,K)$ 中不是 C^1-开集，则可找到 $\gamma \in \mathrm{Diff}(K)$，以及一个序列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $C^\ell(K,K) \setminus \mathrm{Diff}_{C^\ell}(K)$，它在$C^1$-拓扑下收敛到 γ（参见引理 13.1.9）。对每个 $x \in M$，引理 13.1.6 给出一个开 γ-邻域 $W_x \subseteq C^1(K,$ $M)$ 和一个开 x-邻域 $U_x \subseteq K$，使得对每个 $\eta \in W_x$，$\eta|_{U_x}$ 都是单射浸入。由于 K 是紧的，对某个有限子集 $\Phi \subseteq K$，有 $K = \bigcup_{x\in\Phi} U_x$。于是 W: $= \bigcap_{x\in\Phi} W_x$ 是一个开 γ-邻域，使得 $W \subseteq \mathrm{Imm}_{C^1}(K,N)$。

给定 $x \in K$，令 $V(x)$ 为 K 包含 x（它既是开集又是紧集）的连通分支。选取 x_1、……、$x_m \in K$，使得 $K = \bigcup_{j=1}^m V(x_j)$。存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$\gamma_n \in \lfloor \{x_j\}, V(\gamma(x_j)) \rfloor \text{ for all } j \in \{1,\dots,m\},$$

对所有 $n \geq n_0$ 都成立。因此 $\gamma_n(x_j) \in V(\gamma(x_j))$，从而 $\gamma_n(V(x_j)) \subseteq V(\gamma(x_j))$。由于 γ_n 是 ´étale 映射，因而是开映射，我们推得 $\gamma_n(V(x_j))$ 既是开集又是紧集。因此，根据连通性，$\gamma_n(V(x_j)) = V(\gamma(x))$，这意味着 $\gamma_n(K) = K$。省略 γ_1、……、γ_{n_0-1} 后，我们可以假设每个 γ_n 都是满射。由于 γ_n 不是微分同胚，它必定不是单射。因此，我们可以找到 $x_n \neq y_n \in K$，使得 $\gamma_n(x_n) = \gamma_n(y_n)$。由于 K 是紧的，取子序列后，我们可以假设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都是收敛序列，极限分别为 x 和 y。求值映射 $\varepsilon\colon C(K,K) \times K \to K$ 是连续的，因此我们推得

$$\gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon(\gamma_n, x) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon(\gamma_n, y) = \gamma(y).$$

因此 $x = y$，因为 γ 是一个微分同胚。现在 $x \in U_z$，其中某个 $z \in \Phi$。由于 $x_n \to x$ 且 $y_n \to x$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 x_n，$y_n \in U_z$ 对所有 $n \geq N$都成立。增大 N 后，我们还可以假设 $\gamma_n \in W$对所有 $n \geq N$都成立。由于 $\gamma_N \in W \subseteq W_z$，限制 $\eta_N|_{W_z}$是单射。由于 x_N，$y_N \in U_z$，我们现在由 $\gamma_N(x_N) = \gamma_N(y_N)$ 推得 $x_N = y_N$，这与这些元素的选取相矛盾。因此，$\mathrm{Diff}_{C^\ell}(K)$ 在 $C^\ell(K,$ $K)$ 中是 C^1-开集。

(a) 为了说明求逆映射 $\eta:: \mathrm{Diff}_{C^{\ell+k}}(K) \to \mathrm{Diff}_{C^\ell}(K)$ 是 C^k，注意求值映射

$$f\colon \mathrm{Diff}_{C^{k+l}}(K) \times K \to K,\ (\gamma, x) \mapsto \gamma(x)$$

是 $C^{k+\ell}$（见定理 4.2.2(c)），并且 $f(\gamma, \cdot) = \gamma$ 对每个 $\gamma \in$ 微分同胚群$_{C^{\ell+k}}(K)$ 都是一个微分同胚。由引理 13.1.8，映射

$$g\colon \mathrm{Diff}_{C^{k+\ell}}(K) \times K \to K;\quad (\gamma, y) \mapsto g(\gamma, \cdot)^{-1}(y) = \gamma^{-1}(y)$$

是 $C^{k+\ell}$，因此 $C^{k,\ell}$。由于 $\eta^\wedge = g$，指数律（如定理 4.2.2 中所述）推出 η 是 C^k。

(b) 和 (c) 由命题 13.1.2 得出。(d) 是将 $k = 0$ 代入 (a) 和 (b) 得出的。(e) 是将 $k = \ell = \infty$ 代入 (a) 和 (b) 得出的。

□

注 13.1.11。我们指出，紧开拓扑使得

$$\mathrm{Diff}_{C^0}(K) = \mathrm{Homeo}(K)$$

对每个紧致光滑流形 K，它都是一个拓扑群（更一般地说：见习题 13.5.1）。

识别李代数并证明

正则性

13.2 非紧流形的微分同胚群

本节尚待撰写。应涵盖以下主题：

(a) 当 M 非紧致时的 $\mathrm{Diff}_c(M)$，以及半直积 $\mathrm{Diff}_c(M) \rtimes G$，其中 G 在 M 上光滑作用。(b) 高阶射流群作为 $\mathrm{Diff}(M)$ 被高阶切丛的规范群扩张所得的扩张（见 [中的 BiNe08] 附录）。

对于每个局部紧空间 X，其同胚群 $\mathrm{Homeo}(X)$（即 X 的同胚所成的群）具有自然的群结构，该结构由下述性质确定：映射

$$\mathrm{Homeo}(X) \hookrightarrow C(X, X)^2,\quad \varphi \mapsto (\varphi, \varphi^{-1})$$

是一个拓扑嵌入（习题 13.5.1）。

如果 M 是有限维光滑流形，那么所有迭代切丛 $T^k(M)$ 都是局部紧的，因此我们得到一个自然的同态嵌入

$$\mathrm{Diff}(M) \hookrightarrow \prod_{k \in \mathbb{N}_0} \mathrm{Homeo}(T^k(M)),\quad \varphi \mapsto (T^k(\varphi)).$$

这会在 $\mathrm{Diff}(M)$ 上导出一种自然的群拓扑，但一般而言，不能指望这种拓扑与李群结构相容。

例 13.2.1. 如果 $M = \coprod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^1$ 是可数个圆的并，那么 $\mathrm{Diff}(M)$ 的单位元的弧连通分支是群 $\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$，它不是局部可缩的，因此不具有流形结构。

13.3 微分同胚群($\mathbb{S}^1$)不是局部指数的

下面我们证明指数映射

$$\exp\colon \mathcal{V}(\mathbb{S}^1) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$$

不是局部微分同胚：我们将证明，微分同胚群($\mathbb{S}^1$)的每个单位元邻域都包含不属于任何单参数群的元素。

令 $G :=$微分同胚群$^+(\mathbb{S}^1)$ 表示 $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/2pi\mathbb{Z}$上的保定向微分同胚群，即微分同胚群($\mathbb{S}^1$)的单位连通分支。为了更好地了解这个群，我们先构造它的万有覆盖群 $\sim G$。令

$$\widetilde{G} := \{\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R})\colon (\forall x \in \mathbb{R})\ \varphi(x + 2\pi) = \varphi(x) + 2\pi, \varphi' > 0\}.$$

我们考虑映射

$$q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z}$$

作为 $\mathbb{S}^1$ 的万有覆盖映射。于是，每个保持定向的微分同胚 $\psi \in \mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$ 都提升为 $\widetilde{\psi}$ 的一个微分同胚 $\mathbb{R}$，并且与群 $2\pi\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1)$ 的平移作用可交换，这意味着对每个 $x \in \mathbb{R}$，都有 $\sim \quad \sim \quad \sim\psi($ $x + 2\pi) = \psi(x) + 2\pi$。微分同胚 ψ 由 $q^{-1}(\psi(q(0)))$ 中元素的选取唯一确定。ψ 保持定向意味着 $\psi' > 0$。因此我们得到一个满同态

$$q_G\colon \widetilde{G} \to G, \quad q_G(\varphi)(q(x)) := q(\varphi(x))$$

其核同构于 $\mathbb{Z}$。

$\widetilde{G}$ 的李群结构相当简单。它可以由一个整体坐标图定义。令 $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 表示 2π 上的 $\mathbb{R}$ 周期光滑函数所构成的 Fr´échet 空间，该空间被视为 Fr´échet 空间$C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的一个闭子空间。在此空间中，

$$U := \{\varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon \varphi' > -1\}$$

是一个开凸子集，并且映射

$$\Phi\colon U \to \widetilde{G}, \quad \Phi(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + f$$

是一个双射。事实上，令 $f \in U$。$\Phi(f)(x+2\pi) = \Phi(f)(x)+2\pi$可直接由 f 是 2π-周期的要求推出，而 $\Phi(f)' > 0$ 则由

$f' > -1$。因此， $\Phi(f)$ 严格递增，故是从 $\mathbb{R}$到区间 $\Phi(f)(\mathbb{R})$ 的微分同胚。由于后一个区间在 2π 的平移下是不变的， $\Phi(f)$ 是满射，因此 $\Phi(f) \in \widetilde{G}$。显然， $\Phi^{-1}(\psi) = \psi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$~将 G 映射到 U。我们将 Φ 定义为整体坐标图，从而赋予 G 流形结构。相对于此坐标图， $G \cong U$ 中的群运算为

$$m(f,g)(x) := f(g(x)+x) - x \quad \text{and} \quad \eta(f)(x) = (f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}})^{-1}(x) - x,$$

~可以直接证明它们是光滑映射。因此，我们在 G上获得李群的~结构，使得 $\Phi\colon U \to G$ 是一个微分同胚。特别地， G 是可缩的，因而是单连通的，所以映射 $\sim q_G\colon G \to G$ 是 G的万有覆盖映射。

定理 13.3.1. $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 中的每个单位元邻域都包含不属于指数函数像的元素。

~证明。 首先，我们在 G中构造一些接近单位元的元素。对于 $0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$，~我们考虑函数

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \frac{\pi}{n} + \varepsilon \sin^2(nx)$$

~并注意到， $f \in G$ 可由下式推出

$$f'(x) = 1 + 2\varepsilon n \sin(nx)\cos(nx) = 1 + \varepsilon n \sin(2nx) > 0.$$

~**步骤 1**。 对于足够大的固定 n 以及 $\varepsilon \to 0$，我们得到 G 中的元素，它们可以任意接近 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$。

步骤 2. $q_G(f)$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上有一个阶为 $2n$ 的唯一周期轨道：在 $q_G(f)$ 作用下，点 $q(0) \in \mathbb{S}^1$ 被映射到 $\frac{\pi}{n}$ 等等，因此我们得到该轨道

$$q(0) \to q(\tfrac{\pi}{n}) \to q(\tfrac{2\pi}{n}) \to \ldots \to q(\tfrac{(2n-1)\pi}{n}) \to q(0).$$

对于 $0 < x_0 < \frac{\pi}{n}$，我们有 $x_1 := f(x_0)$：

$$x_0 + \frac{\pi}{n} < x_1 < \frac{2\pi}{n},$$

而对于 $x_n := f(x_{n-1})$，有以下关系

$$0 < x_0 < x_1 - \frac{\pi}{n} < x_2 - \frac{2\pi}{n} < \cdots < \frac{\pi}{n}.$$

因此，对每个 $k \in \mathbb{N}$， $x_k - x_0 \notin 2\pi\mathbb{Z}$，所以 $q(x_0)$ 在 $q_G(f)$ 下的轨道不是有限的。这证明了 $q_G(f)$ 有唯一周期轨道，且该轨道的阶为 $2n$。

步骤 3。 $q_G(f) \neq g^2$ 对所有 $g \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$：我们分析周期轨道。 g 的每个周期点都是 g^2 的周期点，反之亦然。若 x 在 g 下的周期为奇数，则 x 在 g 和 g^2 下的周期相同。若 x 在 g 下的周期为 $2m$，则其在 g 下的 g-轨道会分裂成 g^2 下的两个轨道，每个轨道的阶为 m。因此， g^2 不可能有阶为偶数的单个周期轨道，这证明了 $q_G(f)$ 在 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 中没有平方根。特别地， $q_G(f)$ 不属于任何单参数子群，即对每个 $X \in \mathcal{V}(M)$， $q_G(f) \neq \exp X$。□

注 13.3.2。(a) 若 M 是紧流形，则可以证明，$\mathrm{Diff}(M)_0$ 的单位连通分支是 $\mathrm{Diff}(M)$ 的单群（ Epstein 、 Hermann 和 Thurston ； 参见 [Ep70]）。由于子群 $\langle \exp \mathcal{V}(M) \rangle$ 在 $\mathrm{Diff}(M)_0$ 中正规，它与 $\mathrm{Diff}(M)_0$ 重合。因此，每个与单位元同伦的微分同胚都是有限个指数的乘积。

(b) 尽管 $\mathrm{Diff}(M)_0$ 是一个单李群，但其李代数 $\mathcal{V}(M)$ 远非单代数。对于每个开子集 $U \subseteq M$，所有在 U 中消失的向量场构成的集合 $\mathcal{V}(M)_U$ 是一个理想；若 U 不稠密，则该理想是真理想。

例 13.3.3。将 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 的李代数 $\mathfrak{g} := \mathcal{V}(\mathbb{S}^1)$ 与定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑 2π-周期函数相对应，李括号对应于

$$[f, g] = fg' - f'g.$$

对于常值函数 $c_0 = 1$, $c_n(t) := \cos(nt)$ 和 $s_n(t) = \sin(nt)$，可得

$$[c_0, s_n] = nc_n \quad \text{and} \quad [c_0, c_n] = -ns_n,$$

因此， $\mathrm{span}\{c_0, s_n, c_n\} \leq \mathcal{V}(\mathbb{S}^1)$ 是一个同构于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ 的李子代数。进一步可得 $((\mathrm{ad}\ c_0)^2 + n^2 e)s_n = 0$， 于是 $\kappa_{\mathfrak{g}}(\frac{2\pi}{n} c_0)s_n = 0$ 意味着 $\exp_G$ 在 $\frac{2\pi}{n} c_0$ 的任意邻域内都不是单射（命题 5.6.25）（参见 [Mil82], 练习 6.6）。因此， $\exp_{\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)}$ 既非局部满射，也非局部单射。

13.4 李变换群

关于拓扑变换群的一部基础参考专著是 Montgomery 和 Zippin 的专著 [MZ55] 。由于该书还探讨了流形上变换群的可微性，其中描述的一些技术在无限维李理论背景下也有有趣的应用。

13.4.1 光滑李群作用

定理 13.4.1。([BoMo45], [MZ55, p.212]) 有限维李群在有限维光滑流形上的任何连续作用σ: $G \times M \to M$ 若通过微分同胚实现，则都是光滑的。

对于紧流形，我们得到以下关于李群同态的“自动光滑性”结果（关于单参数群，另见 [CM70] ；关于非紧情形，另见 [Gl08b] ）。

推论 13.4.2。若 M 是一个 σ 紧有限维流形，且 G 是一个有限维李群，那么每个连续同态 $\varphi\colon G \to$ 微分同胚群$_c(M)$ 都是光滑的。

以下结果肯定地回答了 [Ne06a], 中的问题 (FP9)：哪些李群的所有局部紧子群都是有限维李群？对于微分同胚群，答案是肯定的。

定理 13.4.3。([MZ55, 定理 5.2.2, 第 208]) 若一个局部紧群 G 忠实地作用于光滑有限维流形 M，且其作用由微分同胚给出，那么 G 是一个有限维李群。若 M 是紧群，那么 微分同胚群(M) 的每个局部紧子群都是李群。

前述结果处理了局部紧群在流形上的作用。正如 de la Harpe 和 Omori 的工作（[OdH71, OdH72]）所示，巴拿赫–李群的情形更为微妙。若 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$ 是一个单同态，那么对于每个 $p \in M$，子空间

$$\mathfrak{g}_p := \{x \in \mathfrak{g}\colon \alpha(x)(p) = 0\}$$

是一个具有 $\bigcap_p \mathfrak{g}_p = \{0\}$ 的有限余维子代数。因此，存在许多有限余维子代数，是李代数能够由有限维流形上的向量场实现的必要条件。

定理 13.4.4。([OdH72]) 设 G 是一个巴拿赫–李群。若 $\mathbf{L}(G)$ 没有真有限余维闭理想，则 $\mathbf{L}(G)$ 没有真有限余维闭子代数，并且 G 在有限维流形上的每个光滑作用都是平凡的。

定理 13.4.5。([OdH72]) 若巴拿赫–李群 G 在有限维流形 M 上光滑、有效、充分地（对每个 $m \in M$，求值映射 $\mathfrak{g} \to T_m(M)$ 都是满射）且本原地作用（不保任何叶状结构不变），则它是有限维的。

定理 13.4.6。([Omo78,Thms.B/C]) 设 G 是一个连通巴拿赫–李群，其李代数 $\mathfrak{g}$ 在有限维流形 M上光滑、有效且传递地作用。

(1)如果 M 是紧的，那么 G 是有限维的。(2)如果 M 是非紧致的，那么 $\mathfrak{g}$ 包含一个余维有限的闭可解理想。

由于微分同胚群(M)在 M上光滑、有效且传递地作用，这意味着：

推论 13.4.7。 如果 M 是一个紧流形，那么 微分同胚群(M) 不可能赋予一种巴拿赫–李群结构，使其在 M 上的自然作用是光滑的。

在 [OdH72], Omori 和 de la Harpe 的第 4 节中，他们构造了一个例子：巴拿赫–李群 G 在 $\mathbb{R}^2$上光滑且充分地作用，但不是本原作用。

前面的讨论尤其表明，巴拿赫–李群很少作用于有限维流形。正如紧流形 M 上的主丛 $q\colon\ P \to M$ 的规范群所表明的那样，对于局部指数李群，情况则有所不同（参见定理 11.4.1）。因此，研究局部指数李代数在有限维流形上的无穷小作用何时可积，有一些好的判据颇有意义（参见[Ne06a]中的 (FP7)）。

我们先从一个针对无穷维流形的更一般框架入手，它需要额外的光滑性假设（[AbNe08]）：

定理 13.4.8（向量场的局部指数李代数的积分）。设 M 是一个以局部凸空间为模型的光滑流形， $\mathfrak{g}$是一个局部指数李代数，且 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$ 是一个李代数同态，其值域由完备向量场构成。此外，假设映射

$$\operatorname{Exp}\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Diff}(M), \quad x \mapsto \Phi_1^{\alpha(x)}$$

在定义 D.1.3 的意义下是光滑的，并且0 在

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \operatorname{Exp}^{-1}(\mathrm{id}_M).$$

那么存在一个局部指数李群 G和一个光滑作用$\sigma\colon G \times M \to M$，其导出作用 $\dot\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$ 与 α一致。

在有限维情形下，定理 13.4.8 中的光滑性假设可由常微分方程解对参数和初始值的光滑依赖性推出，而关于指数函数的条件则可用 [MZ55]中的方法验证。这引出了李–Palais 定理的以下一个技术性较弱的推广，它尤其涵盖了 Omori 关于巴拿赫–李代数的相应结果 [Omo80, Thm. A], [Pe95b, Thm. 4.4])。

定理 13.4.9. 设 M 是一个光滑有限维流形， $\mathfrak{g}$ 是一个局部指数李代数，而 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$ 是一个李代数连续同态，其值域由完备向量场组成。那么存在一个局部指数李群 G 和一个光滑作用 $\sigma\colon G \times M \to M$，满足$\sigma = \alpha$。

下面的结果是 Palais 定理在另一个方向上的推广。由于 Diff(M) 是 μ-正则的（[Ne06a，定理 III.3.1]），因此它也可由 [Ne06a，定理 III.2.8]推出。

定理 13.4.10。 ([Les68]) 若 M 是紧的，则子代数 $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{V}(M)$可积为积分子群，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，或是闭且有限余维的。

13.4.2 作为自同构群的微分同胚群

在本小节中，我们汇集了一些结果，这些结果表明，与流形上的几何结构相关的某些代数、李代数或群的自同构群，并不比自然候选群更大。下面针对附着于流形 M 的几何结构的自同构所表述的大多数结果，都可以推广为这样的结论：若 M_1 和 M_2 是两个流形，且附着于 M_1 和 M_2 的两个同类对象彼此同构，那么该同构可以由一个微分同胚 $M_1 \to M_2$ 实现，并且此微分同胚与所考虑的几何结构相容。

定理 13.4.11。设 M 是一个 σ-紧有限维光滑流形。那么以下断言成立：

(1) 对于 *Fr´echet* 代数 $C^\infty(M,\mathbb{R})$，到 $\mathbb{R}$ 的每个同态都是点求值。*(2)* $\mathit{Aut}(C^\infty(M,\mathbb{R})) \cong \mathit{Diff}(M)$。*(3)* $\mathit{Aut}(\mathcal{V}_c(M)) \cong \mathit{Aut}(\mathcal{V}(M)) \cong \mathit{Diff}(M)$。*(4)* 若 M 是复的，且 $\mathcal{V}^{(1,0)}(M) \subseteq \mathcal{V}(M)_{\mathbb{C}}$ 是 *(1, 0)* 型复向量场的李代数，那么 $\mathit{Aut}(\mathcal{V}^{(1,0)}(M)) \cong \mathit{Aut}_{\mathcal{O}}(M)$ 是 M 的双全纯自同构群。*(5)* 对每个有限维 σ-紧流形 M 以及每个简单的（实或复）有限维李代数 $\mathfrak{k}$，自然同态

$$C^\infty(M, \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{k})) \rtimes \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(C^\infty(M,\mathfrak{k}))$$

是双射。
(6) 若 M 是 *Stein* 流形，且 $\mathfrak{k}$ 是有限维复单李代数，则 $\mathit{Aut}(\mathcal{O}(M,\mathfrak{k})) \cong \mathcal{O}(M, \mathit{Aut}(\mathfrak{k})) \rtimes \mathit{Aut}_{\mathcal{O}}(M)$，其中 $\mathit{Aut}_{\mathcal{O}}(M)$ 表示 M的双全纯微分同胚群。*(7)* 若 $K \subseteq \mathbb{C}^n$ 是多面体域，且 $\mathcal{O}(K,\mathbb{C})$ 是 K中取值于 $\mathbb{C}$的全纯函数芽代数，则群 $\mathit{Aut}(\mathcal{O}(K,\mathbb{C}))$ 由 K 的双全纯映射芽组成，而 $\mathit{der}(\mathcal{O}(K,\mathbb{C}))$ 由 K上的全纯向量场芽组成。

证明。 (1)（紧情形参见 [My54]; [Pu52]; [Co94]）。(2) 由 (1) 易得，因为代数 $C^\infty(M,\mathbb{R})$ 的每个自同构都作用于 $\mathrm{Hom}(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}) \cong M$。

(3) $\mathcal{V}_c(M)$ 的每个自同构都可由一个微分同胚表示，这归功于 Pursell 和 Shanks（[PuSh54]）；另一个断言则由 [Ame75，定理 2] 推出。其依据是这样一个事实：有限余维的极大真子代数全都具有如下形式

$$\mathcal{V}(M)_m := \{X \in \mathcal{V}(M) \colon X(m) = 0\}$$

对于某个 $m \in M$。它们在每个自同构作用下相互置换。或者，也可以利用这样一个事实：所有极大理想都由那些在某个 $m \in M$ 处喷射为零的向量场组成。

(4) 由 [Ame75，定理 1] 得出。

(5)（参见 [PS86，命题 3.4.2]）关键在于，$\mathfrak{k}$ 的每个非零自同态都是自同构。此外，还用到了 $[\mathfrak{k}, C^\infty(M, \mathfrak{k})] = C^\infty(M, \mathfrak{k})$，以及支集为单点的分布具有有限阶这一事实。

(6) [NeW08b]

(7) 这是 [vHo52b，定理 III]，，其中首次证明了 Silva 连续逆代数 $\mathcal{O}(K, \mathbb{C})$ [Ne06a，例 VIII.3(d)] 中的极大理想是点求值的核 [vHo52b，定理 I]）。□

注 13.4.12。 设 $K \subseteq \mathbb{C}^n$ 为紧子集，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(K)$ 为双全纯映射芽构成的群，这些映射定义在 K 的某个邻域上，并将 K 映到自身。在 [vHo52a]，中，van Hove 在此群上引入一种群拓扑，使得映射

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(K) \to \mathcal{O}(K, \mathbb{C}^n) \times \mathcal{O}(K, \mathbb{C}^n), \quad g \mapsto (g, g^{-1})$$

是一个嵌入。他证明，在集合 K 满足某些几何条件时，这个群是完备的，且不含小子群。此外，它在 $\mathcal{O}(K, \mathbb{C})$ 上的自然作用是连续的。

13.4.3 微分形式的自同构群

定理 13.4.13. ([Omo74，§10]) 设 M 是一个 σ 紧致有限维光滑流形。对于 M 上的微分形式 α，我们定义

$$\mathcal{V}(M, \alpha) := \{X \in \mathcal{V}(M) \colon \mathcal{L}_X \alpha = 0\}.$$

于是有以下断言：

(1) 如果 M 上的 μ 是体积形式或辛形式，那么实李代数 $\mathcal{V}(M, \mu)$ 的每个自同构都由群中的一个元素诱导

$$\{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \colon \varphi^* \mu \in \mathbb{R}\mu\}.$$

(2) 若 α 是 M上的接触1-形式，则实李代数 $\mathcal{V}(M, \alpha)$ 的每一个自同构都由该群的某个元素诱导

$$\{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \colon \varphi^* \alpha \in C^\infty(M, \mathbb{R}^\times) \cdot \alpha\}.$$

13.4.4 巴拿赫对称空间的自同构群

定义 13.4.14. 设 M 为一个光滑流形。我们称$(M,\ \mu)$为一个对称空间 （在 Loos 的意义下） [Lo69]，若 $\mu\colon\ M\times M\to M,\ (x,\ y)\mapsto x\cdot y$是具有下列性质的光滑映射：

(S1) $x\cdot x$ 对所有 $x\in M$成立。(S2) $x\cdot(x\cdot y)=y$对所有 $x,$ $y\in M$成立。(S3) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot(x\cdot z)$ 对所有 $x,\ y\in M$成立。
(S4) $T_x(\mu_x)=-\mathrm{id}_{T_x(M)}$ 对于 $\mu_x(y)\colon=\mu(x,\ y)$ 以及每个 $x\in M$。

定理 13.4.15。 (M. Klotz, [Kl11, Kl12]) 若(M,μ) 是一个连通的巴拿赫对称空间，则

$$\mathrm{Aut}(M,\mu):=\{\varphi\in\mathrm{Diff}(M)\colon\mu\circ(\varphi\times\varphi)=\varphi\circ\mu\}$$

具有自然的巴拿赫–李群结构。

13.4.5 奇点的自同构群

在 [Omo80], 中可以找到另一项此类有趣的结果。设 V 是 $0\in\mathbb{C}^n$ 中一个仿射簇的芽。若存在一个元素 $\varphi\in\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})$，属于固定 0 的双全纯映射芽群（如 [Ne06a, Ex. VI.2.12] 中所述），使得 $\varphi(V)=\varphi(V')$，则称这两个芽 V 和 V' 双全纯等价。在无穷小层面上，芽 V 的自同构由李代数给出

$$\mathfrak{g}(V):=\{X\in\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})\colon X.J(V)\subseteq J(V)\},$$

其中 $J(V)\subseteq\mathcal{O}(0,\ \mathbb{C})$（0 处的全纯函数芽）是 V 的湮灭理想。令 $\mathfrak{g}(V)_k\trianglelefteq\mathfrak{g}(V)$ 表示由所有在 0 处消失阶数为 k 的向量场构成的理想，并构成射影极限李代数

$$\overline{\mathfrak{g}}(V):=\varprojlim\ \mathfrak{g}(V)/\mathfrak{g}(V)_k,$$

它可以看作 $\mathfrak{g}(V)$ 的 Fr´echet 完备化。

若元素 $X\in\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$ 与某个线性可对角化向量场在 $\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})$ 下共轭，且该向量场的所有特征值都位于某个开半平面内，则称其为半扩张的。若芽 V 包含一个扩张向量场，则称其为扩张奇点。

定理 13.4.16。 两个扩张奇点 V和 V' 双全纯等价，当且仅当投射有限李代数 $\mathfrak{g}(V)$ 和 $\mathfrak{g}(V')$同构。此外，$\underline{\ }\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}(V))$ 可与群 $\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})$中 V 的稳定子 $\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})_V$ 等同。

在群层面上，我们有与定理 13.4.13 类似的结果；关于 (1)，参见[Fil82]；关于 (2)-(4)，参见 [Ban97, Thm. 7.1.4/5/6] 。

定理 13.4.17。 设 M 是一个 σ-紧连通有限维光滑流形。那么以下断言成立：

(1) 离散群微分同胚群(M) 的每个自同构都是内自同构。(2) 若 α 是 M上的接触1-形式，则离散群微分同胚群(M,α) 的每个自同构都是与该群中某个元素的共轭作用

$$\{\varphi \in \mathrm{Diff}(M)\colon \varphi^*\alpha \in C^\infty(M,\mathbb{R}^\times)\cdot\alpha\}.$$

(3)若 ω 是辛形式且 M 是维数为 ≥ 2的紧流形，则离散群微分同胚群(M,ω) 的每个自同构都是由该群中某个元素给出的共轭作用

$$\{\varphi \in \mathrm{Diff}(M)\colon \varphi^*\omega \in \mathbb{R}\omega\}.$$

(4)若 μ 是体积形式且 M 的维数为 ≥ 2，则离散群微分同胚群(M,μ) 的每个自同构都是由群 $\{\varphi \in$微分同胚群$(M)\colon \varphi^*\mu \in \mathbb{R}\mu\}$.中某个元素给出的共轭作用

开放问题

问题 13.4.18. 设 $\mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$ 表示有限维流形 M上的完备向量场的集合。于是我们有一个指数函数

$$\mathrm{Exp}\colon \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}} \to \mathrm{Diff}(M), \quad X \mapsto \Phi_1^X.$$

相对于 $\mathcal{V}(M)$ 上自然的 Fr´echet 拓扑，0 在 $\mathrm{Exp}^{-1}(\mathrm{id}_M)$ 中是否是孤立点?

根据纽曼定理[Dr69, Thm. 2]，紧流形上的这一结论成立。为了证明定理 13.4.9，我们证明：对于任意值域包含于 $\mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$ 的局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathcal{V}(M)$ 的连续同态 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$，0 在 $(\mathrm{Exp}\circ\alpha)^{-1}(\mathrm{id}_M)$ 中是孤立点；这是一个较弱的结论。

由于集合 $\mathrm{Exp}^{-1}(\mathrm{id}_M)$ 与 M 上的光滑$\mathbb{T}$作用一一对应，问题在于证明平凡作用在所有 M 上的光滑 $\mathbb{T}$作用构成的这个“空间”中是孤立的。

例 13.4.19. 若 M 是实希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$，其希尔伯特基为 $e_n, n \in \mathbb{N}$，那么我们有线性向量场 $X_n(v) := 2\pi i\langle v, e_n\rangle e_n$ ，满足 $\exp(X_n) = \mathrm{id}_M$ ，并且在 E 的紧子集上一致地 $X_n \to 0$ 。因此， M 的有限维性至关重要。

问题 13.4.20。证明：对于每个紧子集 $K \subseteq \mathbb{C}^n$，注 13.4.12 中的群 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(K)$ 关于从嵌入到 $\mathcal{O}(K,\ \mathbb{C}^n)$ 所继承的流形结构是一个李群。

问题 13.4.21。（规范代数的自同构）设 $q\colon P \to M$ 是底流形 M 上的一个光滑 K-主丛。确定规范李代数（例 7.1.4(c)）的自同构群 Aut($\mathfrak{gau}(P)$)。它是否与伴随丛 ad(P) 的自同构群 Aut(ad(P)) 一致，其中截面的李代数同构于 $\mathfrak{gau}(P)$? 如果 K 是一个单复李群，那么 [Lec80，第 16] 定理中的结果将通过 M 的微分同胚以及自同构丛 Aut(ad(P)) 的截面，对该李代数的自同构给出局部描述（另见定理 13.4.11）。

问题 13.4.22。确定李代数$\mathfrak{gf}_n(\mathbb{K})$、 $\mathfrak{gs}_n(\mathbb{K})$和 $\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$的自同构群。

问题 13.4.23。刻画在有限维流形上光滑、有效且传递地作用的连通巴拿赫–李群。根据定理 13.4.6，对于每个巴拿赫–李群 G，其李代数 $\mathfrak{g}$都含有一个有限余维闭可解理想。反过来，若 $\mathfrak{g}$ 是含有有限余维闭可解理想的巴拿赫–李代数，则定理 VI.1.19 蕴含 $\mathfrak{g}$ 可扩张。在什么条件下，相应的群 G 会在某个有限维齐性空间上有效地作用？（另见 [Omo97]中的相关讨论。）

问题 13.4.24。设 G 是巴拿赫–李群， $H \subseteq G$ 是其闭子群，且$\mathbf{L}^e(H)$的余维有限。这是否意味着 G/H是一个流形?

13.5 流形上的圆群作用

在本小节中，我们证明，对于紧致光滑流形的微分同胚群 Diff(M)，在满足 $\Phi_1^X = \mathrm{id}_M$ 的完备向量场集合中，0 是孤立点（参见附录 D）。这尤其意味着，每个连续态射 $\alpha\colon \mathfrak{h} \to \mathcal{V}(M)$， $\mathfrak{h}$局部指数，都满足积分子群定理 9.2.4 的假设。

设 M 是一个有限维流形。对于圆群 $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$的任意光滑作用 σ，其无穷小生成元是一个满足$\Phi_1^X = \mathrm{id}_M$的向量场。反过来，每个满足 $\Phi_1^X = \mathrm{id}_M$ 的完备向量场 $X \in \mathcal{V}(M)$都定义了 M上的一个光滑 $\mathbb{T}$-作用。

定理 13.5.1。如果 M 是一个紧流形，那么存在一个0-邻域 U，使得 $\mathcal{V}(M)$ 中对于 $X \in U$ 满足 $\Phi_1^X = \mathrm{id}_M$ 的情形，均有 $X = 0$。

证明. 设 g 为 M 上的黎曼度量， $d_M\colon M \times M \to \mathbb{R}$ 为相应的距离函数。于是我们得到 $\mathcal{V}(M)$上的一个连续范数，由

$$\|X\|_\infty := \sup_{m\in M} \|X(m)\| = \sup_{m\in M} \sqrt{g_m(X(m), X(m))}.$$

对于 $\|X\|_\infty \le r$ 和 $0 \le t \le 1$，我们则有 $d_M(\Phi_t^X(p),\ p) \le r$。

根据 Newman 定理（[Dr69，定理 2]），对每个带有度量 d_M 的光滑流形 M，存在一个 $\varepsilon > 0$，使得有限群 G 在 M 上每一个满足

$$d_M(g.x, x) < \varepsilon \quad \text{for} \quad g \in G, x \in M,$$

是平凡的。

将此应用于由 $X \in \mathcal{V}(M)$ 在 $\Phi_1^X = \mathrm{id}_M$ 下得到的光滑 $\mathbb{T}$-作用，可知 $\|X\|_\infty < \varepsilon$ 蕴含 Φ_1^X 定义了 ${}_n\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 在 M 上的一个作用，且该作用对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都是平凡的。我们由此得出 $X = 0$。□

例 13.5.2.我们对定理 13.5.1 在情形 $M = \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 下给出一个直接论证。

设 $X \in \mathcal{V}(\mathbb{T})$ 为满足 $\Phi_1^X = \mathrm{id}_M$ 的非零向量场。则相应的 $\mathbb{T}$-作用具有一条非平凡轨道，它是 M 的一个紧的一维子流形，因而也是开的。这表明该作用是传递的，从而 X 没有零点。

令 $X_0 := \frac{\partial}{\partial\theta}$ 为 $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的旋转作用的标准生成元。则 $X(\theta) = f(\theta) X_0$，其中 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是一个没有零点的光滑 1-周期函数。

对于 $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T})$，我们有 $\mathrm{Ad}(\varphi)X = f_\varphi X_0$，其中

$$f_\varphi(\theta) = f(\varphi^{-1}(\theta))\varphi'(\varphi^{-1}(\theta)),$$

分别，$f_\varphi \circ \varphi = f \cdot \varphi'$. 令

$$c := \frac{1}{\int_0^1 \frac{dt}{f(t)}} \quad \text{and} \quad \varphi(\theta) := \int_0^\theta \frac{c}{f(t)}\, dt.$$

则 $\varphi(1) = 1$ 并且

$$\varphi(\theta+1) = \varphi(\theta) + \int_\theta^{\theta+1} \frac{c}{f(t)}\, dt = \varphi(\theta) + \int_0^1 \frac{c}{f(t)}\, dt = \varphi(\theta) + 1.$$

因此 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义了 $\mathrm{Diff}(\mathbb{T})$ 的一个元素。这个微分同胚满足$\varphi' \cdot f = c$，由此得到 $\mathrm{Ad}(\varphi)X = c \cdot X_0$.

现在 $\Phi_1^X = \mathrm{id}_\mathbb{T}$ 意味着 $\Phi_c^{X_0} = \mathrm{id}_\mathbb{T}$，这等价于 $c \in \mathbb{Z}$。我们得出结论：

$$\int_0^1 \frac{dt}{|f(t)|} \in \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

当 X 非零且 $\Phi_1^X = \mathrm{id}_\mathbb{T}$ 时。对于$|f| \le \frac{1}{2}$，我们已经得到$\int_0^1 \frac{dt}{|f(t)|} \ge 2$，因此在这种情况下 $\Phi_1^X \ne \mathrm{id}_\mathbb{T}$。

注 13.5.3. 值得注意的是，对于存在零点的向量场，可以更直接地论证定理 13.5.1 的结论。特别是，这适用于欧拉示性数非零的紧致可定向流形 $\chi(M)$，在这些流形上每个向量场都有零点（[tD00，命题 13.11]）。

设 g 是紧致连通光滑流形 M 上的黎曼度量。若 $p \in M$ 是向量场 $X \in \mathcal{V}(M)$ 的零点，则向量场 $T(X) \in \mathcal{V}(T(M))$ 限制在 $T(M)$ 的子流形 $T_p(M)$ 上为线性向量场 $T_p(X)$。假设 $\|T_p(X)\| < 2\pi$，其中范数是对应于 $T_p(M)$ 上某个黎曼度量的算子范数。若 $\Phi_1^X = \mathrm{id}_M$，则 $\Phi_1^{T(X)} = \mathrm{id}^{T(M)}$，特别地，在 $\mathrm{GL}(T_p(M))$ 中有 $\exp_{\mathrm{GL}(T_p(M))} T_p(X) = \mathrm{id}_{T_p(M)}$。这意味着 $T_p(X)$ 是半单的，且特征值属于 $2\pi i\mathbb{Z}$。现在，假设 $\|T_p(X)\| < 2\pi$ 将导致 $T_p(X) = 0$。

令 $\sigma\colon \mathbb{T} \to \mathrm{Diff}(M)$ $\sigma(t) := \Phi_t^X$表示由 X 和 $\tilde{g}$ 在 M上生成的光滑 $\mathbb{T}$-作用，并令 M上具有一个 $\mathbb{T}$-不变的黎曼度量。相应的指数函数 $\mathrm{Exp}: T(M) \to M$是 $\mathbb{T}$-等变的。由$T_p(X) = 0$可知， $\mathbb{T}$在 $T_p(M)$ 上平凡作用，因而也在 $\mathrm{Exp}(T_p(M))$ 上平凡作用；后者包含 p的一个邻域。此论证说明，不动点集 $M^{\mathbb{T}}$ 是开的。由于它也是闭的，假设 $M^{\mathbb{T}} \neq \emptyset$ 便推出$M^{\mathbb{T}} = M$，进而推出 $X = 0$。

第 13 章习题

习题 13.5.1.（参见 [Str06]）设 X 是一个拓扑空间，并在连续自映射集 $C(X, X)$ 上赋予紧开拓扑。我们在群 $\mathrm{Homeo}(X)$ 上赋予关于映射的始拓扑

$$\mathrm{Homeo}(X) \to C(X, X)^2, \quad \varphi \mapsto (\varphi, \varphi^{-1}).$$

证明：若 X是局部紧的，则该拓扑使 $\mathrm{Homeo}(X)$ 成为拓扑群。提示：若 $f \circ g \in \lfloor K, O \rfloor$ 选取紧子集 K'与开子集 O'，使得 $g(K) \subseteq O' \subseteq K' \subseteq f^{-1}(O)$

习题 13.5.2. 设 E与 F为局部凸空间。则包含映射 $\mathcal{L}(E, F)_{c.o.} \hookrightarrow C^\infty(E, F)$ 是拓扑嵌入。

13.6 关于第 13 章的注记与评注

对于 $G := \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$，指数函数的像不是 e 的一个邻域（定理 13.3.1）这一点，早已见于 [Ham82] 和[Mil84]；另见 [KM97, 例 43.2]。更一般地，对于任意紧致流形 M，$\mathrm{Diff}(M)$ 的指数函数的像不包含任何单位元邻域（参见 [Grb88], [Pali68, Pali74], 和 [Fre68] 关于若干二维情形的研究）。

Malikov 和 Penner 在 [MP98] 中构造了圆周同胚群所对应的李代数；他们尤其研究了分段为 $\mathfrak{sl}_2$ 的向量场。关于作用于圆周上的群的拓扑方面，更多内容见 [Gh01]。本文将 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 确定为 $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ 的极大紧子群，并包含关于有限维子群的若干分类结果。这也与 [Sp17] 中关于 $\mathcal{V}(\mathbb{S}^1)$ 的有限维李子代数的分类结果相关。在这一背景下， [MZ55, 第 208 页起] 中的一个重要结果（参见定理 13.4.1）指出，有限维李群 G 在有限维流形 M 上通过 C^k-微分同胚的任何作用，都对应于一个 C^k-映射 $G \times M \to M$。因此，若 M 紧且 $k = \infty$，我们便得到李群同态 $G \to \mathrm{Diff}(M)$。

在切恩–西蒙斯理论和三维引力的背景下，近期有人构造了 Virasoro–Bott 群，它是 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 的一个非平凡中心延拓，见 [FK21]。

关于微分同胚群和同胚群上的拓扑的一些有趣的唯一性结果，参见 [Kal86]。

紧流形 M 上 $s > \frac{1}{2}\dim M + 1$ 类 H^s-微分同胚的复合的正则性，最近在 [IKT13] 中得到了详细讨论。

关于微分同胚群上不存在共轭不变范数的结果，参见 [BIP08]。

从形状空间应用的角度分析了 $\mathbb{R}^n$ 上的各种类型的微分同胚群，见 [MM13]。

14 无限维李群的同伦群

本章讨论无限维李群拓扑的若干方面。对于李群 G，最重要的拓扑信息包含在前三个同伦群中： $\pi_0(G)$（连通分支群）、 $\pi_1(G)$（基本群）以及第二同伦群 $\pi_2(G)$。 $\pi_0(G)$ 的重要性显而易见，因为人们常常需要知道一个具体给定的群是否连通，而李代数的影响不会超出单位连通分支（参见命题 5.5.7）。基本群的信息对于将李代数同态积分为群同态至关重要，因而对表示论也尤其重要（定理 6.1.16）。它还出现在满足 Maurer–Cartan 方程的 1-形式的积分中（定理 6.1.13）。人们对 $\pi_2(G)$ 的关注源于该群在李代数的可扩张性以及 G 的扩张中所发挥的关键作用（第 15.5.3 小节）。

本章首先介绍带基点空间的高阶同伦群（X， x_0）以及拓扑主丛的长正合同伦序列。接着，我们介绍一些方法（最初由 R. Palais 提出），这些方法通常有助于计算局部凸空间开子集的同伦群。第14.2节简要回顾有限维李群同伦群的一些关键结果。第14.3节则对微分同胚群作同样的讨论。

接下来的三节将较为详细地讨论希尔伯特空间上的算子群的同伦群。这里，无穷维希尔伯特空间（实、复或四元数）的酉群的可缩性所涉及的 Kuiper 定理是一个基石（第14.4节）。随后，我们在第14.5节讨论直极限群，并在第14.6节将其应用于与 Schatten 理想相关的群。

为了处理映射群，例如 $C_c^r(M,\ K)$（其中 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$），我们首先在第14.7节介绍一些逼近结果，断言诸如 $C_c^r(M,\ K) \hookrightarrow C_c(M,\ K) \hookrightarrow C_*(M_\infty,\ K)$ 的包含映射是弱同伦等价。这使我们能够在第14.8节实际计算 $C_*(M,\ K)$ 的同伦群，并将其表示为 K 的同伦群；这里 M 是球面、环面或二维曲面。在最后的第14.8节中，我们进一步考察

球面的乘积上的映射群，尤其是环面上的映射群，以及带边界的紧曲面（可定向的或不可定向的）上的映射群。

14.1 同伦群基础

在本节开头，我们先介绍高阶同伦群以及纤维丛的长正合同伦序列，并讨论其在齐性空间中的一些应用（小节 14.1.1）。接着，在小节 14.1.2 中，我们将介绍（局部凸）直极限中开子集的同伦群的一些一般性质。这里，Palais 关于弱同伦等价的定理为具体计算同伦群提供了重要工具（小节 14.1.3）。

14.1.1 同伦群

本小节将介绍空间，尤其是拓扑群的同伦群的一些基本事实和定义。

定义 14.1.1。(a) 设 X 和 Y 为拓扑空间。若存在连续映射 $H\colon [0,1]\times X\to Y$（称为同伦），使得

$$H_0(x):=H(0,x)=f(x)\quad\text{and}\quad H_1(x):=H(1,x)=g(x)$$

对所有 $x\in X$ 均成立。我们用 $[X,Y]$ 表示连续映射 $X\to Y$ 的同伦类集合，用 $[f]$ 表示映射 f 的同伦类。

(b) 这一概念的一个重要加细如下。空间对是拓扑空间对 (X,X_0)，其中 $X_0\subseteq X$ 是一个子空间。对于两个空间对 (X,X_0) 和 (Y,Y_0)，我们记

$$C((X,X_0),(Y,Y_0)):=\{f\in C(X,Y)\colon f(X_0)\subseteq Y_0\}$$

表示将 $X_0\to Y_0$ 映射到 $X\to Y$ 的连续映射集合。若存在同伦 $H\colon [0,1]\times X\to Y$，其取值于 f 且满足 g，并且所有映射 $H_t:=H(t,\cdot)$ 都映射到 $X_0\to Y_0$，则称两个映射 $f,g\colon (X,X_0)\to(Y,Y_0)$ 是同伦的。我们用 $[(X,X_0),(Y,Y_0)]$ 表示映射对的同伦类集合。

(c) 一个特别重要的特殊情形是：若 $X_0:=\{x_0\}$ 且 $Y_0:=\{y_0\}$，则称这对 (X,x_0)、(Y,y_0) 为带基点空间，并记作

$$C_*(X,Y):=C((X,x_0),(Y,y_0))$$

表示保基点连续映射的集合。同样，我们用 $[X,Y]_*$ 表示保基点映射的同伦类。

(d) 这些概念可加细到空间三元组 (X,X_0,X_1)，其中 $X_1\subseteq X_0\subseteq X$ 且

$$C((X,X_0,X_1),(Y,Y_0,Y_1)) := \{f \in C(X,Y)\colon f(X_0) \subseteq Y_0, f(X_1) \subseteq Y_1\}.$$

因此，我们用 $[(X,X_0,X_1),(Y,Y_0,Y_1)]$ 表示空间三元组的映射的同伦类集合。

同伦类的集合构成拓扑空间的重要拓扑不变量，但先验地说，它们只是集合，并不带有任何代数结构。下面我们将讨论两种重要情形，此时$[X,Y]$带有群结构，即当 Y是拓扑群，以及当 $(X,\ x_0)$ 是带基点的球面 $\mathbb{S}^n$ 时。

定义 14.1.2。现在我们定义偶对的相对同伦群。设$I^n := [0,1]^n$ 表示 n维立方体。那么，I^n的边界 ∂I^n 可写为 $I^{n-1} \cup J^{n-1}$，其中 $I^{n-1} := \{x \in I^n\colon x_1 = 1\}$ 称为初始面，而 J^{n-1} 是 I^n所有其他面的并。

设 $(X,\ X_0,\ \{x_0\})$ 是一个空间三元组。我们记

$$F^n(X,X_0,x_0) := C((I^n,\partial I^n,J^{n-1}),(X,X_0,\{x_0\}))$$

表示空间三元组之间的连续映射，且

$$\pi_n(X,X_0,x_0) := [(I^n,\partial I^n,J^{n-1}),(X,X_0,\{x_0\})]$$

对于这类映射的同伦类集合。如果 $X_0 = \{x_0\}$，则我们将记号简化为

$$F^n(X,x_0) := C((I^n,\partial I^n),(X,x_0))$$

and

$$\pi_n(X,x_0) := [(I^n,\partial I^n),(X,x_0)] = [I^n/\partial I^n, X]_* = [\mathbb{S}^n, X]_*.$$

这里我们将 ∂I^n 的像用作商 $I^n/\partial I^n \cong \mathbb{S}^n$ 的基点。对于 $f,\ g \in F^n(X,\ X_0,\ x_0),\ n \geq 2$，我们定义一个乘积

$$(f*g)(t_1,\ldots,t_n) := \begin{cases} f(t_1,t_2,\ldots,2t_n) & \text{for } 0 \leq t_n \leq \frac{1}{2} \\ g(t_1,t_2,\ldots,2t_n-1) & \text{for } \frac{1}{2} < t_n \leq 1 \end{cases}$$

并注意到 $f*g$ 是连续的，因为对于 $x_n = 1,\ f(x) = g(x) = x_0$。对于 $n \geq 1$ 和 $X_0 = \{x_0\}$，这个乘积也给出 $F^n(X,\ x_0)$ 的一个元素。

现在可以验证（习题 14.8.2）：

(1) $f \sim f',\ g \sim g' \Rightarrow f*g \sim f'*g'$，因此我们得到一个定义良好的乘积

$$[f]*[g] := [f*g]$$

同伦类的乘积。

(2)（单位元）若 x_0 表示常值映射 $I^n \to X,\ t \mapsto x_0$，则

$$[x_0]*[f] = [f]*[x_0] = [f].$$

(3)（逆映射）设 $\bar{f}(t_1,\dots,t_n) := f(t_1,\dots,t_{n-1},1-t_n)$。则 $[f]*[f]^{-}=[f]*[\bar{f}]=[x_0]$。(4)（结合律）对于 $f,g,h\in F^n(X,X_0,x_0)$，$n\geq 2$，或 $n=1$ 和 $X_0=\{x_0\}$，有 $[f*g]*[h]=[f]*[g*h]$。(5)（交换律）对于 f，$g\in F^n(X,X_0,x_0)$，$n\geq 3$，或 $n=2$ 和 $X_0=\{x_0\}$，有 $[f]*[g]=[g]*[f]$。(6)（函子性）对于 $f,g\in F^n(X,X_0,x_0)$ 和 $\varphi\in C((X,X_0,x_0),(Y,Y_0,y_0))$，我们有

$$[(\varphi\circ f)*(\varphi\circ g)]=[\varphi\circ(f*g)],$$

使得 φ诱导一个同态

$$\varphi_*=\pi_n(\varphi)\colon \pi_n(X,X_0,x_0)\to\pi_n(Y,Y_0,y_0).$$

如此得到的群

$$\pi_n(X,X_0,x_0),\quad n\geq 2\quad\text{ and }\quad \pi_n(X,x_0),\quad n\geq 1,$$

称为关于基点 x_0的对 (X,X_0) 的同伦群；分别地，称为关于基点 x_0的 X 的同伦群。

注 14.1.3。设 G 是一个拓扑群，并将单位元 e 视为基点。那么集合 $F^n(G,e)$、$n\in\mathbb{N}_0$也具有由逐点乘积给出的自然群结构：$(f\cdot g)(x):=f(x)g(x)$，并且可以证明（习题 14.8.3）：

(1) $f\sim f',g\sim g'\Rightarrow f\cdot g\sim f'\cdot g'$，从而得到一个定义良好的乘积

$$[f]\cdot[g]:=[f\cdot g]$$

对所有 $n\in\mathbb{N}_0$的同伦类。
（2）$f\sim g\iff fg^{-1}\sim e$，常值映射。这里 g^{-1} 是逐点逆映射。（3）（交换律）对于 $f,g\in F^n(G,e)$，$n\geq 1$有 $[f]\cdot[g]=[g]\cdot[f]$。（4）（一致性）对于 $f,g\in F^n(G,e)$，$n\geq 1$有 $[f]\cdot[g]=[f]*[g]$。
由（4）可知，我们可以计算

$$\pi_n(G):=\pi_n(G,e)$$

中的同伦类乘积，只需对代表元取逐点乘积即可。还要注意，$\pi_0(G)$可以认作 G的弧连通分支所成的群 G/G_a，其中 $G_a=[e]\trianglelefteq G$ 是单位元所在的弧连通分支，它是一个正规子群。

以下定理的证明可见 [Bre93, §VII.5]。

定理 14.1.4（对的长正合同伦序列）。对任意带基点空间对(X,Y,y_0)，我们有一个自然映射

$$\partial\colon \pi_n(X,Y,y_0)\to\pi_{n-1}(Y,y_0),\quad [f]\mapsto[f|_{I^{n-1}}]$$

它对 $n \geq 2$ 是群同态。连同由包含映射 $Y \hookrightarrow X$ 所诱导的同态，我们由此得到一个长正合同伦序列

$$\begin{aligned}&\cdots \to \pi_k(X, y_0) \to \pi_k(X, Y, y_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y, y_0) \to \dots \\ &\dots \to \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(X, Y, y_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(Y, y_0) \to \pi_0(X, y_0),\end{aligned}$$

其中最后三个映射并非群同态；在这种情况下，正合性是指值域等于基点的原像，即常值映射 y_0 的同伦类。

下文中，我们将经常用到前述定理关于主丛的一个重要推论。

定义 14.1.5. 设 G 为拓扑群，X 为拓扑空间。一个 G-主丛，其底空间为 X，是右 G-空间 P，连同满连续映射 $q\colon P \to X$，并满足下列性质：

(1) q 的纤维与 P 中的 G-轨道重合。(2)（局部平凡性）对每个 $x \in X$，存在开邻域 U 以及同胚 $\varphi\colon U \times G \to q^{-1}(U)$，满足

$$q \circ \varphi = \mathrm{pr}_U \quad \text{and} \quad \varphi(u, hg) = \varphi(u, h).g,\ u \in U, h, g \in G.$$

注 14.1.6. (a) 对每个 G-主丛 $q\colon P \to X$，群 G 在 P 上自由作用，并且我们可以将 X 等同于 P 中 G-轨道的集合 P/G，并赋予商拓扑（习题 14.8.4）。

(b) 设 G 是一个拓扑群，H 是一个闭子群，因此左陪集空间 $X := G/H$ 具有自然的豪斯多夫拓扑（商拓扑）。于是有一个连续开映射 $q\colon G \to X$，其纤维与 H 在 G 上通过 $g.h := gh$ 给出的 H 右作用的轨道重合。此时，局部平凡性要求等价于存在某个开子集 $U \subseteq G/H$，使得商映射 q 存在连续截面 $\sigma\colon U \to G$。鉴于 q 关于 G 左作用的等变性，这便蕴含局部平凡性（习题 14.8.5）；因此，如果存在局部连续截面，G 就具有 H 主丛的结构。

如果 G 是有限维李群，或者 G 是巴拿赫–李群且$\mathbf{L}(H)$ 是$\mathbf{L}(G)$ 的可补闭子空间，则局部平凡性条件总是成立（习题 14.8.8）。更一般地，如果 H 是分裂李子群，该条件也成立（参见命题 9.1.22）。

注 14.1.7。（主丛与覆盖）若 G 是离散群，则 G-主丛 $q\colon P \to X$ 是一个覆盖映射，其覆盖变换群在每个纤维上都单纯传递地作用。

反过来，假设 $q\colon P \to X$ 是一个覆盖映射，并且它满足正则性条件，即群

$$\Delta := \mathrm{Deck}(P,q) := \{\varphi \in \mathrm{Homeo}(P) \colon q \circ \varphi = q\}$$

的覆盖变换群在每个纤维上传递地作用。进一步假设 P 是连通的，且 X 是局部连通的。若某个覆盖变换 φ有一个不动点 $p \in P$，则我们选取一个连通邻域 U，它是 $x := q(p)$ 中 $U \to P$的邻域，并在其上取连续截面 σ（由覆盖性质可直接得出其存在性）。此外，我们可以假设 $q^{-1}(U)$ 是 P 的开子集的不交并，且这些开子集与 U同胚。于是 $\sigma(U)$ 是 $q^{-1}(U)$ 的一个连通分支；又因为 $\varphi \circ \sigma$ 和 σ 是两个截面$U \to P$，它们将 x 映到同一点 $p \in \sigma(U)$，所以 $\sigma = \varphi \circ \sigma$，因此 φ固定 $\sigma(U)$ 中的每一点。由此可知，φ 的不动点集 P^{φ}是 P中的开闭子集；因此，既然 P 是连通的，便有 $\varphi = \mathrm{id}_P$。于是群 Δ 在每个纤维上单纯传递地作用，这意味着 $q\colon P \to X$ 是一个主 Δ-丛。

以下定理的证明可参见 [Ste51，推论 17.2]。

定理 14.1.8（主丛的长正合同伦序列）。设 $q\colon P \to B$ 是一个 G-主丛，$y_0 \in P$ 是一个基点，$b_0 := q(y_0)$ 且 G 是纤维 $F := q^{-1}(b_0) = y_0.G \cong G$中的单位元。那么映射

$$q_* \colon \pi_k(P,F,y_0) \to \pi_k(B,b_0), \quad [f] \mapsto [q \circ f]$$

均为双射，因此我们得到连接同态

$$\delta := \partial \circ (q_*)^{-1} \colon \pi_k(B,b_0) \to \pi_{k-1}(F,y_0) \cong \pi_{k-1}(G).$$

由此得到的序列

$$\begin{aligned} &\ldots \to \pi_k(P,y_0) \to \pi_k(B,b_0) \to \pi_{k-1}(G) \to \ldots \\ &\ldots \to \pi_1(P,y_0) \to \pi_1(B,b_0) \to \pi_0(G) \to \pi_0(P,p_0) \twoheadrightarrow \pi_0(B,b_0) \end{aligned}$$

是正合的。最后两个映射不是群同态；$\pi_0(P,y_0)$ 处的正合性是指，集合 $\pi_0(P,y_0)$ 中 $\pi_0(G)$ 的轨道是映射 $\pi_0(P,p_0) \to \pi_0(B,b_0)$的纤维，而该映射的满射性就是 $\pi_0(B,b_0)$处的正合性。

推论 14.1.9。如果 X 是半局部单连通的弧连通$\tilde{}$空间，并且 $q_X\colon X \to X$ 是 X的万有覆盖，那么 q_X 诱导同构

$$\pi_k(q_X) \colon \pi_k(\widetilde{X}) \to \pi_k(X), \quad k \geq 2.$$

$\tilde{}$证明。取 $x_0 \in X$。我们将 q_X视为离散群 G 的主丛：$X \to X := \pi_1(X,x_0)$，并应用同伦正合列（定理 14.1.8）。由于 G 是离散的，对于 $k \geq 1$，有 $\pi_k(G) = \{e\}$，断言由同伦序列的正合性得证。□

推论 14.1.10。设 G 是一个拓扑群，$H \leq G$ 是其一个闭子群，且自然映射 $q\colon\ G \to G/H$ 定义了一个 H-主丛。设 $x_0 := eH$ 是 G/H 中的典范基点。则我们有正合列

$$\ldots \to \pi_k(G) \to \pi_k(G/H, x_0) \to \pi_{k-1}(H) \to \ldots$$
$$\ldots \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/H, x_0) \to \pi_0(H) \to \pi_0(G) \twoheadrightarrow \pi_0(G/H, x_0).$$

鉴于 [MicE59]，前述推论特别适用于巴拿赫–李群的商态射 $q\colon\ G \to G/N$。

有时会遇到这样的情形：$q\colon\ G \to G/H$ 不容许连续局部截面，但人们仍希望至少使用长正合同伦序列的若干片段。这种情形出现于局部指数李群的商态射。

– 设 G 为局部指数李群，– $N \subseteq G$ 为闭正规局部指数李子群，并且– 假设商群 $Q\colon = G/N$ 也是局部指数的。

我们用 $q\colon\ G \to Q$ 表示商态射，用 $j\colon\ N \to G$ 表示包含映射。

于是我们有自然同态

$$\pi_0(N) \to \pi_0(G) \to \pi_0(G/N) \quad \text{and} \quad \pi_1(N) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/N),$$

但如果 q 没有局部连续截面，那么就不清楚如何得到连接映射 $\delta\colon \pi_1(G/N) \to \pi_0(N)$。现在我们来说明如何仍然能够做到这一点，以及由此得到的序列

$$\pi_1(N) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/N) \xrightarrow{\delta} \pi_0(N) \to \pi_0(G) \to \pi_0(G/N) \to \mathbf{1}$$

是正合的（命题 14.1.12）。

引理 14.1.11. 设 $N \subseteq G$ 是局部指数李群 G的闭正规李子群。那么以下断言成立：

(a) 自然映射 $G/N_0 \to G/N = Q, gN_0 \mapsto gN$ 是覆盖态射。(b)如果 G 是1-连通的，且 N 是连通的，那么 G/N 是1-连通的。(c) 如果 G 是1-连通的，那么 $\pi_1(G/N) \cong \pi_0(N)$。

根据习题 14.8.6，(a) 对任意李子群 $N \subseteq G$ 仍然成立，因为 N_0 是 N的正规子群。

证明。(a) 映射 $p\colon\ G/N_0 \to G/N$ 是一个商映射，其核是 G/N_0 的离散子群 $N/N_0 \cong \pi_0(N)$，因此 p 是一个覆盖。

(b) 现在我们假设 G 是单连通的。我们需要证明，e中的每个环路 $\gamma\colon$ $[0,1] \to G/N$都是可缩的。为此，我们可以不失一般性地假设

对 $\frac{1}{2} \le t \le 1$有 $\gamma(t) = e$。利用指数图，我们可以将 γ 形变为一个环路 η，使得存在一个细分

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_k < 1 \quad \text{and} \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{q} = \mathbf{L}(Q),$$

使得

$$\eta(t) = \eta(t_j) \exp_Q((t - t_j)x_{j+1}) \quad \text{for} \quad t_j \le t < t_{j+1}, \quad j < k,$$

且 $\eta(t) = e$ 对所有 $t \ge t_k$成立。取满足 $\mathbf{L}(q)x_j = y_j$ 的 $y_j \in \mathfrak{g}$。于是

$$\widetilde{\eta}(t) = \widetilde{\eta}(t_j) \exp_G((t - t_j)y_{j+1}) \quad \text{for} \quad t_j \le t < t_{j+1}, \quad j < k,$$

定义了 $\eta|_{[0,t_k]}$的一个连续提升 $\widetilde{\eta}\colon [0, t_k] \to G$。由于 $\eta(t_k) = e$， $\widetilde{\eta}(t_k) \in N$。由于 N 连通，我们可以用一条位于 N 中、从 $\widetilde{\eta}(t_k)$ 到 e 的路径，将 $\widetilde{\eta}$ 延拓到 $[t_k, 1]$ 上。于是 $\eta = q \circ \widetilde{\eta}$；又由于环路 $\widetilde{\eta}$ 在 G 中可缩， η 在 Q 中也可缩。

(c) 若 G 单连通而 N 不连通，则由 (b) 可知 G/N_0 单连通。又由于 $p\colon G/N_0 \to G/N$ 是一个覆盖，且 $\pi_0(N)$ 在各纤维上作为甲板变换群作用，因此可得 $\pi_0(N) \cong \pi_1(G/N)$。□

~在一般情形下，我们记 $q_G\colon G_0 \to G_0$ 为单位连通分支 G_0 的万有覆盖 ^ ~态射，记 $N \subseteq G_0$ 为李代数为 $\mathfrak{n}$ 的积分子群，并记 $N^\sharp := q_G^{-1}(N)$。于是 $\widehat{N} = (N^\sharp)_0$,，因此前述~ ^引理表明 G_0/N 是单连通的。由于

$$Q_0 = G_0/(N \cap G_0) \cong \widetilde{G}_0/N^\sharp,$$

由此可得

$$\pi_1(Q) = \pi_1(Q_0) \cong \pi_1(\widetilde{G}_0/N^\sharp) \cong \pi_0(N^\sharp). \tag{14.1}$$

因此，自然映射 $\pi_0(N^\sharp) \to \pi_0(N)$ 导出一个连接同态

$$\delta\colon \pi_1(Q) \to \pi_0(N).$$

它将由环路代表的同伦类 $[\gamma]$ 映射到其端点 $\widetilde{\gamma}(1)$ 所在的连通分支；该环路具有一个连续提升$\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to G$，且其起点为 e。

命题 14.1.12。设 $q\colon G \to Q$ 是局部指数李群之间的一个商态射，其核为 N。则序列

$$\pi_1(N) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/N) \xrightarrow{\delta} \pi_0(N) \to \pi_0(G) \to \pi_0(G/N) \to \mathbf{1}$$

是正合的。

证明。 **在 $\pi_0(G)$ 和 $\pi_0(G/N)$中的正合性：** 商群 G/N 是一个李群，其中 G_0/N 是一个开连通子群。因此 $Q_0 \cong G_0/N$和

$$\pi_0(Q) = \pi_0(G/N) \cong G/(G_0N).$$

这意味着 $\pi_0(q)$: $\pi_0(G)$ 到 $\to \pi_0(Q)$ 是满射。我们还可以看到，当且仅当 $g \in G_0N$ 时，一个连通分支 gG_0 被映射到 Q_0 ，这意味着 $[g] \in \pi_0(G)$ 包含在 $\pi_0(j)$ 的像中。

在 $\pi_0(N)$ 中的正合性： δ 在 $\pi_0(N)$ 中的像是 $\pi_0(N^\sharp)$ 的像，也就是包含在 G_0 中的 N 的所有连通分支构成的集合。因此，$\mathrm{im}(\delta)$ 是映射 $\pi_0(N)$ 到 $\to \pi_0(G)$ 的核。

在 $\pi_1(G/N)$ 中的正合性： $[\gamma] \in \pi_1(G/N)$ 包含在 $\ker\ \delta$ 中意味着 $\widetilde{\gamma}(1) \in N_0$，于是 $\widetilde{\gamma}$ 可以延拓为 G 中的一个环路。因此它包含在 $\pi_1(G)$ 的像中。反过来，如果 $[\gamma]$ 属于 $\pi_1(G)$ 的像，即，对于 G 中 $\widetilde{\gamma}$ 的一个环路 $\gamma = q \circ \widetilde{\gamma}$，那么 $\widetilde{\gamma}(1) = e \in N$。这意味着 $\pi_1(G)$ 的像与 δ 的核相同。

正合性 $\pi_1(G)$： 由 $q \circ j = e$ 可知，$\mathrm{im}(\pi_1(j)) \subseteq \ker(\pi_1(q))$。反过来，假设 $[\gamma] \in \pi_1(G)$包含于 $\pi_1(q)$的核中。按照（14.1），将 $\pi_1(Q)$与 $\pi_0(N^\sharp)$等同，并将 $\pi_1(G)$与 G_0的子群$\widetilde{\ker}\, q_G$ 等同，这意味着

$$\ker(\pi_1(q)) \cong (\ker q_G) \cap (N^\sharp)_0 \cong (\ker q_G) \cap \widehat{N},$$

而这正是 $\pi_1(N) \cong \ker\ q_N$在自然同态$\sim \quad \sim \quad \sim N_0 \to G_0$ 下的像，其值域为 N。□

推论 14.1.13。若 N 是1-连通的，则 $\pi_1(G) \to \pi_1(G/N)$ 是一个同构。

14.1.2 直极限

本节汇集一些关于直极限空间的同伦群的材料（参见附录 A 中的 A.7 节）。这些内容主要用于直极限李群（第 12 章），也用于某些其他包含直极限群作为稠密子群的李群。针对后一种应用，我们证明 Palais 定理；其中一个版本指出，对于一个值域稠密的局部凸空间之间的连续映射 $f\colon X \to Y$，以及一个开子集 $O \subseteq Y$，诱导映射 $f^{-1}(O) \to O$ 是弱同伦等价。

引理 14.1.14.设 X 是一个豪斯多夫空间，它关于子空间的递增序列$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 具有归纳极限拓扑，其中$\bigcup_n X_n = X$，也就是说， $O \subseteq X$ 是开集，当且仅当所有集合 $X_n \cap O$ 在X_n中都是开集。取一个基点 $x_0 \in X_1$。那么

$$\pi_k(X, x_0) \cong \varinjlim \pi_k(X_n, x_0) \quad \textit{for every} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

证明。我们断言，每个紧子集 $K \subseteq X$ 都包含于某个X_n中。若非如此，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们选取 $x_n \in K \setminus X_n$ 。集合$M := \{x_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 满足 $M \cap X_m \subseteq \{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$。因此，对每个 m， $M \cap X_m$都是闭集，所以 M 是 X的闭子集。于是 $M \subseteq K$蕴含 M 是紧的。同样的论证也适用于子集 $M_m := \{x_m, x_{m+1}, \ldots\} \subseteq M$。现在，由集合 M_m的紧致性可得 $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} M_m \neq \emptyset$。但 $M_{m+1} \cap X_m = \emptyset$ 蕴含

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} M_m \subseteq X \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} X_m = \emptyset.$$

这一矛盾表明，存在一个满足 $K \subseteq X_n$ 的 $n \in \mathbb{N}$ 。

现在设 $\gamma\colon\ \mathbb{S}^k \to X$ 是一个连续映射。那么， $\gamma(\mathbb{S}^k)$ 是 X 的一个紧子集，因此包含在某个 X_n 中；又因为 $X_n \hookrightarrow X$ 是一个嵌入，余限制 $\gamma|^{X_n}\colon\ \mathbb{S}^k \to X_n$ 是连续的。因此自然映射

$$\varinjlim \pi_k(X_n, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$$

是满射。为验证单射性，我们对两个连续映射 $\gamma_1\colon\ \mathbb{S}^k \to X_{n_1}$ 和 $\gamma_2\colon\ \mathbb{S}^k \to X_{n_2}$ 的同伦值域应用相同的论证。我们发现，存在 $n_3 > \max(n_1,\ n_2)$，使得 $\pi_k(\varphi_{n_3,\ n_1})([\gamma_1]) = \pi_k(\varphi_{n_3,\ n_2})([\gamma_2])$，其中 $\varphi_{n_3,\ n_1}\colon\ X_1 \to X_3$ 和 $\varphi_{n_3,\ n_2}\colon\ X_2 \to X_3$ 是嵌入。因此， $[\gamma_1]$ 和 $[\gamma_2]$ 在 $\pi_k(X,\ x_0)$ 中的像相同。□

引理 14.1.15。设 E 是赋予有限拓扑的实向量空间，即相对于其有限维子空间的归纳极限拓扑。那么以下断言成立：

(1) E 的每个线性无关子集都是闭且离散的。(2) E 的每个紧子集都包含于某个有限维子空间中。(3) 对于每个子集 $U \subseteq E$ 和 $u_0 \in U$，有

$$\pi_k(U, u_0) \cong \varinjlim \pi_k(U \cap F, u_0),$$

其中，极限是取遍包含 u_0 的所有有限维子空间 $F \subseteq E$ 所构成的有向集而得。

(4) 若 $U \subseteq E$ 是一个子集，且它与所有有限维子空间的交都是开集，则 U 上的子空间拓扑与相对于集合 $U \cap F$ （其中 $F \subseteq E$ 是一个有限维子空间）的归纳极限拓扑一致。

证明。**(1)**（[Pa66，引理 10.2]）设 $S \subseteq E$ 是一个线性无关子集。那么，对于每个有限维子空间 $F \subseteq E$，交集 $S \cap F$ 是闭的，因此 S 在 E 中是闭的。同样的论证表明， S 的每个子集在 E 中也都是闭的。由此特别可知， S 是一个离散拓扑空间。

(2)（[Pa66，引理 10.3]）设 $K \subseteq E$ 是一个紧子集， $S \subseteq K$ 是一个极大线性无关子集。那么 $K \subseteq$ 张成 S。由 (1) 可知， S 是闭的，因此是紧的。另一方面， S 是离散的，所以是有限的。

(3) 设 Y 是一个以 y_0 为基点的紧空间，且 $f\colon Y \to U$ 是一个连续映射，并且 $f(y_0) = u_0$。那么 $f(Y)$ 是 E 的紧子集，因此由 (2) 可知它包含于某个有限维子空间 F 中，并且显然有 $u_0 = f(y_0) \in F$。

对于 $Y = \mathbb{S}^k$，可知自然同态

$$\eta\colon \varinjlim \pi_k(U \cap F, u_0) \to \pi_k(U, u_0)$$

是满射。为了证明它也是单射，设 $f\colon \mathbb{S}^k \to U \cap F$ 是一个连续映射，在 U 中与常值映射 $\mathbb{S}^k \to \{u_0\}$ 同伦。设 $H\colon [0,1]\times\mathbb{S}^k \to U$ 是一个同伦，满足 $H(0,\ x) = f(x)$ 且 $H(1,\ x) = u_0$。那么紧集 $\mathrm{im}(H)$ 包含于某个有限维子空间 $F \subseteq E$ 中，因此 f 在 $\pi_k(U\cap F,\ u_0)$ 中的同伦类是平凡的。这说明 η 是单射。

(4) 我们的假设意味着 U 在有限拓扑中是开集。因此，子集 $V \subseteq U$ 在有限拓扑中是开集，当且仅当它在 E 中是开集；这意味着，对于任意有限维子空间 $F \subseteq E$，所有交集 $V \cap F$ 都是 F 中的开集。由此可知， U 赋有关于子空间 $U \cap F$ 的归纳极限拓扑。□

14.1.3 Palais 关于弱同伦等价的定理

在本小节中，我们将讨论与 Palais 定理相关的一系列思想。全文中， V 表示一个局部凸空间， $E \subseteq V$ 是一个赋有有限拓扑的稠密子空间，即相对于 E 的所有有限维子空间而言赋有归纳极限拓扑；而 $O \subseteq V$ 是一个开子集。我们将 $O_E := O \cap E$ 记作它与 E 的交集，并赋予其从 E 继承的拓扑。本节的目标之一是证明包含映射 $O_E \to O$ 是弱同伦等价。

引理 14.1.16。设 $O \subseteq V$ 是局部凸空间 V 的一个开子集，且 $K \subseteq O$ 紧。如果 W 是 V 中足够小的 0-邻域，并且 k_1、……、 $k_n \in K$ 满足

$$K \cap \bigcap_{i=1}^{n}(k_i + W) \neq \emptyset, \quad then \quad \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(k_i + W)\right) \subseteq O.$$

证明。对于每个 $k \in K$，令 U_k 为 V中的一个零邻域，满足 $k + U_k \subseteq O$，并令 W_k 为一个满足 $W_k + W_k \subseteq U_k$的零点邻域。那么存在有限个元素 $\ell_1, \ldots, \ell_m \in K$，满足 $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \ell_i + W_{\ell_i}$.。令 W_1为 V中包含于 $\bigcap_{j=1}^{m} W_{\ell_j}$的一个凸零邻域。那么我们有

$$\ell_i + W_{\ell_i} + W_1 \subseteq \ell_i + W_{\ell_i} + W_{\ell_i} \subseteq \ell_i + U_{\ell_i} \subseteq O$$

对每个 i，因此 $K + W_1 \subseteq O$。

现在设 W 是一个凸零邻域，满足 $W + (-W) \subseteq W_1$，并假设存在元素 k，k_1，……，$k_n \in K$，使得 $k \in \bigcap_{i=1}^n (k_i + W)$。由于每个集合 $k_i + W$ 都是凸的，我们有

$$\operatorname{conv}\Big(\bigcup_{i=1}^n k_i + W\Big) = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i(k_i + w_i) \colon w_i \in W, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1\Big\}.$$

鉴于 $k + W_1 \subseteq O$，只需证明

$$\Big(\sum_i \lambda_i(k_i + w_i)\Big) - k = \sum_i \lambda_i(k_i + w_i - k) \in W_1$$

对 $w_i \in W$，$\lambda_i \geq 0$ 和 $\sum_i \lambda_i = 1$成立。由于 W_1 是凸的，甚至只需证明 $k_i + w_i - k \in W_1$。鉴于 $k - k_i \in W$，这可由$W - W \subseteq W_1$得出。□

在下文中，若映射 $h\colon [0,1] \times X \to Y$，$(t, x) \mapsto h_t(x)$是连续的，则我们称连续映射 $X \to Y$ 的族$(h_t)_{0 \leq t \leq 1}$ 为形变。

引理 14.1.17。设 $K \subseteq O$ 是紧子集，$E \subseteq V$ 是稠密子空间，且 $L \subseteq K \cap E$ 是包含于某个有限维子空间中的紧子集。那么存在一个形变 $h_t\colon K \to O$，将 K 映入 O，使得 $h_t|_L = \mathrm{id}_L$，并且$\operatorname{im}(h_1)$ 包含于 E 的某个有限维子空间中。

证明。设 $E_1 \subseteq E$ 是包含 L 的有限维子空间。根据蒂策扩张定理（[Bre93，定理 I.10.4]），恒等映射 $L \to E_1$ 可延拓为连续映射 $g\colon K \to E_1$。令 W 如引理 14.1.16 中所述，并设

$$U_0 := \{k \in K \colon g(k) - k \in W\}.$$

那么 U_0 是 K 中 L 的一个邻域。设 U_1，……，U_n 是 $K \setminus U_0$ 的一个开覆盖，其中各集合与 L 不相交，且具有 $U_i = K \cap (k_i + W_i)$ 的形式；这里 $W_i \subseteq W$ 是 V 中的一个零邻域。设 φ_0，……，φ_n 是 K 的一个单位分解，满足 $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$，并定义

$$h_t(k) := (1-t)k + t\Big(\varphi_0(k)g(k) + \sum_{i=1}^n \varphi_i(k)e_i\Big),$$

其中 $e_i \in (k_i + W_i) \cap E \subseteq (k_i + W) \cap E$（回忆一下，$E$在 V中稠密）。显然，h_t 是 K 在 V 中的一个形变。若 $k \in L$，则对于 $i \geq 1$，$\varphi_i(k) = 0$，因为$U_i \cap L = \emptyset$，所以 $\varphi_0(k) = 1$，且 $h_t(k) = (1-t)k + tg(k) = (1-t)k + tk = k$。令 $E_2 :=$ 张成$(e_1, \ldots, e_n) + E_1$。则 h_1 将 K 连续映射到 E_2中；又因为 E_2 是 E的一个拓扑子空间，所以它将 K 连续映射到 E中。

还需证明 $h_t(K) \subseteq O$。给定 $k \in K$，将下标排列，使得对于 $i = 1$、……、m，有 $\varphi_i(k) > 0$；对于 $i > m$，有 $\varphi_i(k) = 0$。那么

$$k \in (k+W) \cap \bigcap_{i=1}^{m} U_i \subseteq (k+W) \cap \bigcap_{i=1}^{m} (k_i + W).$$

现在 $(1-t) + t\sum_{i=0}^{m} \varphi_i(k) = 1$，因此根据前述引理，只需证明 k 和 e_i 属于 $(k+W) \cup \bigcup_{i=1}^{m}(k_i+W)$，并且如果$\varphi_0(k) > 0$，那么 $g(k)$ 也成立。但 $k \in k+W$，$e_i \in k_i + W$，并且如果 $\varphi_0(k) > 0$，那么$k \in U_0$，因此 $g(k) \in k+W$。□

引理 14.1.18。设 A 是紧空间 X 的闭子空间，并设 $f_0\colon X \to O$ 是连续映射，且 $f_0|_A$ 是从 A 到 O_E 的连续映射。那么存在一个同伦 $f_t\colon X \to O$，使得 f_1 是从 X 到 O_E 的连续映射，且对 $0 \leq t \leq 1$，$f_t|_A = f_0|_A$。

证明。在引理 14.1.17 中，取 $K := f_0(X)$ 和 $L := f_0(A)$，并令 $f_t := h_t \circ f_0$。□

定义 14.1.19。设 (X, x_0) 和 (Y, y_0) 是带基点拓扑空间。若映射 $f \in C_*(X,Y) = \{h \in C(X,Y)\colon h(x_0) = y_0\}$ 所诱导的所有映射 $\pi_k(f)\colon \pi_k(X,x_0) \to \pi_k(Y,y_0)$，$[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$，都是双射，则称该映射为弱同伦等价。

映射 $f \in C_*(X,Y)$ 称为同伦等价，如果存在一个 $g \in C_*(Y,X)$，使得 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 分别与 $C_*(Y,Y)$ 和 $C_*(X,X)$ 中的 id_Y 和 id_X 同伦。高阶同伦群的函子性立即表明，同伦等价是弱同伦等价。

定理 14.1.20（Palais 关于弱同伦等价的第一定理）。设 V 是局部凸空间，$E \subseteq V$ 是其稠密线性子空间。赋予 E 有限拓扑。对于每个开子集 $O \subseteq V$，连续映射 $O_E = O \cap E \to O$ 是弱同伦等价，前提是将 O_E 视为 E 的拓扑子空间。

证明。设 $f_0\colon \mathbb{S}^n \to O$ 是一个连续映射，且 $f_t\colon \mathbb{S}^n \to O$ 是 f_0 与连续映射 $f_1\colon \mathbb{S}^n \to O_E$ 之间的同伦（引理 14.1.18）。那么包含映射 $i\colon O_E \to O$ 满足 $\pi_n(i)[f_1] = [f_0]$，这表明 $\pi_n(i)$ 是满射。

现在设 h_0，$h_1\colon \mathbb{S}^n \to O_E$ 是连续映射，且 $i \circ h_0$ 与 $i \circ h_1$ 同伦。那么存在一个连续映射 $H\colon [0,1] \times \mathbb{S}^n \to O$，使得对 $t = 0$，1，有 $H_t = i \circ h_t$。再次由引理 14.1.18，存在一个同伦$F_s\colon [0,1] \times \mathbb{S}^n \to O$，$0 \leq s \leq 1$，其中 $F_0 = H$，$F_1\colon [0,1] \times \mathbb{S}^n \to O_E$ 连续，且对 $t = 0$，1 以及所有 s，有 $F_s|_{\{t\} \times \mathbb{S}^n} = h_t$。那么 F_1 是连续映射 $\mathbb{S}^n \to O_E$ 上的 h_0 与 h_1 之间的同伦。因此 $\pi_n(i)$ 也是单射。□

下面的定理对于计算同伦群非常有用：

定理 14.1.21（Palais 关于弱同伦等价的第二定理）。设 V_1 和 V_2 为局部凸空间，$f\colon V_1 \to V_2$ 为具有稠密像的连续线性映射。设 $O \subseteq V_2$ 为一个开子集，并令 $\widetilde{O} := f^{-1}(O)$ 以及 $\widetilde{f} := f|_{\widetilde{O}}$。则 $\widetilde{f}\colon \widetilde{O} \to O$ 是一个弱同伦等价。

证明。令 $W := \ker f$，$\pi\colon V_1 \to V_1/W$ 为商映射，$f = g \circ \pi$ 为 f 的典范分解，且 $O^* := g^{-1}(O) \subseteq V_1/W$。那么只需证明

$$\pi|_{\widetilde{O}}\colon \widetilde{O} \to O^* \quad \text{and} \quad g|_{O^*}\colon O^* \to O$$

是弱同伦等价。由于 g 是单射，而 π 是商映射，只需在以下两种情形下证明该定理。

情形 1。f **是单射：** 不失一般性，我们可以假设 V_1 是 V_2 的一个稠密线性子空间，且其拓扑更细，而 f 是包含映射 $\sim$。因此 $O = O \cap V_1$ 是 V_1 的子集。令 $E := V_1$ 具有有限拓扑，并令 $\sim$ O_E 为 E 的一个子空间。令 $i\colon O_E \to O$ 和 $j\colon O_E \to O$ 为包含映射；根据定理 14.1.20，它们是弱同伦等价。于是 $f \circ i = j$ 表明 f 是弱同伦等价。

情况 2。f **是满射：** </style}令 :,, 2 配备有限$\sim$ $\sim$拓扑，$O_E := O$ 作为 V_2 的子空间，$O_E := O$ 作为 E_1 的子空间，并$\sim$定义映射 $g\colon O_E \to O_E$，使得 $g := f|_{\widetilde{O}_E}$。由于两个均配备有限拓扑的向量空间之间的线性映射显然连续，g 是连续映射，$\sim$和 $f \circ i = j \circ g$中，恒等映射 i 和 j 根据定理 14.1.20 是弱同伦等价。因此，只需证明 g 是弱同伦等价。

设 $h\colon \mathbb{S}^n \to O_E$ 是连续映射。那么 $\operatorname{im}(h)$ 包含于 E_2 的一个有限维子空间 V 中（引理 14.1.15）。设 V 的一组基为 e_1、……、e_n。由于 f 是满射，我们可以找到元素 $\widetilde{e}_i \in E_1$，使得 $f(\widetilde{e}_i) = e_i$。令$h(q) := \sum_{i=1}^n h_i(q)$ e_i 为连续映射$\sim h\colon \mathbb{S}^n \to V$的坐标表示，并定义 $h\colon \mathbb{S}^n \to E_1$ 为

$$\widetilde{h}(q) := \sum_{i=1}^{n} h_i(q)\widetilde{e}_i.$$

$\sim$ $\sim$于是 $g \circ h = h$，从而得到 $[h] = \pi_n(g)[h]$，因此 $\pi_n(g)$ 是满射。

接下来令 $k_0, k_1\colon \mathbb{S}^n \to$ $\sim$ O_E 是连续映射，且 $g \circ k_i$ 同伦，并且$K\colon [0,1] \times \mathbb{S}^n \to O_E$是连续映射，满足 $K_t = g \circ k_t$，其中 $t = 0, 1$。那么 $\operatorname{im}(k_0) \cup \operatorname{im}(k_1)$ 包含于 E_1 的一个有限维子空间 Y 中；此外，我们可以假设 $f(Y)$ 包含 K 的像（引理 14.1.15(2)）。令

$$\widetilde{O}_Y := \widetilde{O} \cap Y = f^{-1}(O) \cap Y = (f|_Y)^{-1}(O).$$

取 $O_Y := f(Y) \cap O$，于是我们得到

$$\widetilde{O}_Y \cong O_Y \times \ker(f|_Y),$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$它与 O_Y同伦等价。因此，由 k_0 和 k_1 经过余限制得到的映射 $\mathbb{S}^n \to O_Y \subseteq \widetilde{O}_E$作为到 O_Y的映射是同伦的。因此， k_0 和 k_1 是同伦的。这证明了 $\pi_n(g)$ 是单射。□

定义 14.1.22。设 X 是向量空间，它是递增的线性子空间序列 X_n, $n \in \mathbb{N}$ 的并。假设 τ_n 是 X_n 上的一个拓扑，使其成为局部凸空间，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\tau_{n+1}|_{X_n} = \tau_n$ 。令 τ 表示 X 上使所有包含映射 $X_n \hookrightarrow X$ 连续的最细局部凸拓扑。这意味着，半范数$q\colon X \to \mathbb{R}$ 连续，当且仅当所有限制 $q|_{X_n}$ 都连续。我们称 (X, τ) 为局部凸空间 (X_n, τ_n) 的严格归纳极限 。

引理 14.1.23。设局部凸空间 X 是局部凸空间 X_n的严格归纳极限。那么以下断言成立：

(a) X_n 上的每个连续半范数 p_n 都是 X_{n+1}上某个连续半范数 p_{n+1} 的限制，因此也是 X上某个连续半范数的限制。(b) 如果每个 X_n 在 X_{n+1}中都是闭的， $y \in X_{n+1} \setminus X_n$ 和 $c \in \mathbb{R}$也是如此，那么 X_n 上的每个连续半范数 p_n 都是 X_{n+1} 上某个连续半范数 p_{n+1} 的限制，且满足 $p_{n+1}(y) \geq c$。

证明。（参见 [He89，命题 1.10.2]）(a) 设 p_n 是 X_n上的连续半范数，且 $U_0 := \{x \in X_n\colon p_n(x) \leq 1\}$。由于 X_n中的一个零邻域是 X_{n+1}中一个零邻域与 X_n 的交集，因此存在 X_{n+1} 上的连续半范数 p' ，使得 $p_n \leq p'|_{X_n}$。

集合

$$A := \{\alpha x + (1-\alpha)x' \colon x \in X_n, p_n(x) \leq 1; x' \in X_{n+1}, p'(x') \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

是凸、平衡且吸收的，因此其闵可夫斯基泛函

$$p_{n+1}(x) := \inf\{t > 0 \colon x \in tA\}$$

是一个半范数（命题 B.4.3）。由于 A 也是 X_{n+1} 中原点的一个邻域，因此半范数 p_{n+1} 是连续的。此外， $X_n \cap A = U_0$蕴含 $p_{n+1}|_{X_n} = p_n$。

重复这一构造，我们得到一列 $(p_k)_{k \leq n}$ 定义在 X_k 上的连续半范数 p_k ， $k \geq n$，且满足 $p_{k+1}|_{X_k} = p_k$。令 $q(x) := p_k(x)$，其中 $x \in X_k$，便定义了 X 上的一个连续半范数，其在 X_n 上的限制为 p_n。

（b）由于 $y + X_n$ 是 X_{n+1} 的一个不包含原点的闭子集，因此 (a) 的证明中的半范数 p' 可以选取为使得 $p' \geq c$ 在$y + X_n$上成立。于是，对于如上所述的 $y = \alpha x + (1-\alpha)x'$， $y \in tA$ 蕴含

$$t \geq t(1-\alpha)p(x') = p'((1-\alpha)tx') = p'(y - \alpha t x) \geq c$$

因此 $p_{n+1}(y) \geq c$。 □

引理 14.1.24。如果局部凸空间 X 是空间 X_n的严格归纳极限，那么 X 的每个有界子集都包含在某个 X_n中，并且作为 X_n的子集是有界的。

证明。（参见 [He89，命题 1.10.3]）设 $B \subseteq X$ 有界，并假设 B不包含于任何 X_n。那么存在一个整数的递增序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 以及 $y_k \in B \cap (X_{n_{k+1}} \setminus X_{n_k})$，对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。引理 14.1.23(b) 给出一个连续半范数序列 $p_n\colon\ X \to \mathbb{R}$，满足 $p_{n+1}|_{X_{n+1}} = p_n$ 且$p_{n_{k+1}}(y_k) > k$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。由 $q(x) := p_n(x)$（对 $x \in X_n$），我们于是得到 X 上的一个连续半范数 q，它在 B上无界，这与 B 在 X中有界相矛盾。

因此，存在某个 n 满足 $B \subseteq X_n$。B 作为 X_n 的子集是有界的，这一点可由以下事实得出：X_n 上的每个连续半范数都可以延拓为 X 上的连续半范数（引理 14.1.23）。□

命题 14.1.25。假设 X 是空间 X_n 的严格归纳极限，且每个 X_n 在 X_{n+1} 中都是闭的。设 $O \subseteq X$ 是一个开子集，并记 O_∞ 为集合 O，赋予其由 X_n 的子集 $O_n := O \cap X_n$ 所诱导的归纳极限拓扑。那么连续映射 $O_\infty \to O$ 是弱同伦等价。

证明。由定义可直接得出，映射 $\eta\colon\ O_\infty \to O$ 是连续的。我们断言，每个连续映射 $f\colon\ K \to O$（其中 K 是一个紧$\tilde{}$空间）都可分解为一个连续映射 $f\colon\ K \to O_\infty$，即 f 作为到 O_∞ 的映射也连续。

根据引理 14.1.24，X 的每个有界子集都包含在某个 X_n 中。这尤其意味着，O 的每个紧子集都包含在某个 O_n 中。因此，对于每个连续映射 $f\colon\ K \to O$，我们都能找到一个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $f(K) \subseteq O_n$。于是 $f\colon\ K \to O_n$ 是连续的，因为包含映射 $O_n \to O$ 是一个嵌入（引理 14.1.23(a)）；这进而意味着映射 $f\colon\ K \to O_\infty$ 也是连续的。

由于前面的观察适用于两个映射 $K \to O$之间的同伦 $h\colon\ [0,1] \times K \to O$，我们得出映射 η 诱导了带基点同伦类 $[K, O_\infty]_* \to [K, O]_*$之间的双射，因此特别地，$\eta$ 是弱同伦等价。□

定理 14.1.26（Palais 关于弱同伦等价的第三定理）。设 X 是一个局部凸空间，且$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个递增的闭子空间序列，其并集 $X_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 在 X中稠密。设$O \subseteq X$ 是一个开子集，并将 O_∞ 记为集合 $O \cap X_\infty$，赋予其由 X_n的开子集 $O_n := O \cap X_n$ 所诱导的归纳极限拓扑。那么连续映射 $O_\infty \to O$ 是弱同伦等价。

证明。我们赋予 X_∞ 关于序列$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$的严格归纳极限拓扑（定义 14.1.22）。设 $O_0 := O \cap X_\infty$（视为 X_∞的子空间）。于是我们有连续映射

$$f_0 \colon O_0 \to O, \quad f_{\infty,0} \colon O_\infty \to O_0, \quad \text{and} \quad f_\infty \colon O_\infty \to O$$

其中$f_\infty = f_0 \circ f_{\infty,\,0}$。

根据定理 14.1.21，映射 f_0 是弱同伦等价，而命题 14.1.25 推出 $f_{\infty,0}$ 是弱同伦等价，因此 $f_\infty = f_0 \circ f_{\infty,0}$ 也是弱同伦等价。□

关于可缩性的以下判据见 [Pa66，定理 15]的推论。我们将在下面证明 Kuiper 定理 14.4.3 时使用它。

定理 14.1.27。设(M, m_0) 是一个带基点的可度量化流形。那么， M可缩当且仅当所有同伦群 $\pi_n(M, m_0)$， $n \in \mathbb{N}_0$，都是平凡的。

14.2 有限维李群

本节简要回顾有限维李群拓扑的一些事实。由于这些事实的证明需要相当复杂的结构理论，详细论证请参阅相关文献。

设 G 是一个连通的有限维李群，且有有限个连通分量， $K \subseteq G$ 是其极大紧子群。那么存在一个微分同胚 $G \to K \times \mathbb{R}^d$，其中 $d \in \mathbb{N}_0$ 是某个 [（HiNe12，定理 14.3.11]）。这特别意味着包含映射 $K \hookrightarrow G$ 是同伦等价，因此对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，都会诱导同构 $\pi_k(K) \to \pi_k(G)$。这将有关有限维李群拓扑的所有问题归结为紧群。

注 14.2.1。(a) 我们回顾紧李群 K 的同伦群的一些结果。Cartan 定理断言 $\pi_2(K)$ 为零（[Mim95，定理 3.7]），而 Bott 定理指出，对每个紧致连通单李群 K，都有 $\pi_3(K) \cong \mathbb{Z}$（[Mim95，定理 3.9]）。$\pi_3(K)$ 的一个生成元可以由同态 $\eta\colon \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^3 \to K$ 得到（参见习题 14.8.9）。更准确地说，设 α 是 $\mathfrak{k}$ 的根系 $\Delta_{\mathfrak{k}}$ 中的一个长根， $\mathfrak{k}(\alpha) \subseteq \mathfrak{k}$ 是相应的 $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$-子代数。那么，相应的同态嵌入 $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^3 \to K$ 表示 $\pi_3(K)$ 的一个生成元（[Bo58]）。

在 [Mim95 第 969-970] 页中，可以找到一张列出直至 $k = 15$ 的 $\pi_k(K)$ 的表，其中显示

$$\pi_4(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{for } K = \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \\ \mathbb{Z}_2 & \text{for } K = \mathrm{U}_n(\mathbb{H}), \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), \mathrm{SO}_5(\mathbb{R}) \\ \mathbf{1} & \text{for } K = \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}), n \geq 3, \text{ and } \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), n \geq 6 \\ \mathbf{1} & \text{for } K = G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. \end{cases}$$

$$\pi_5(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{for } K = \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \\ \mathbb{Z}_2 & \text{for } K = \mathrm{U}_n(\mathbb{H}), \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), \mathrm{SO}_5(\mathbb{R}) \\ \mathbb{Z} & \text{for } K = \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}), n \geq 3, \text{ and } \mathrm{SO}_6(\mathbb{C}) \\ \mathbf{1} & \text{for} K = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), n \geq 7, \quad G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. \end{cases}$$

(b) 设 K 是一个连通紧李群，K_1、.....、K_m 是 K 的连通单正规子群，$Z(K)$ 是其中心。那么乘法映射

$$Z(K)_0 \times K_1 \times \ldots \times K_m \to K$$

具有有限中心核 Γ，因此是一个覆盖映射。由于 $Z(K)_0$ 是环面，其~万有覆盖群 $Z(K)_0 \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$是可缩的，因此其所有次数为 ≥ 2 的同伦群都为零。由此，结合引理 14.1.9，我们得到

$$\pi_k(K) \cong \prod_{j=1}^{m} \pi_k(K_j) \quad \text{for} \quad k > 1.$$

推论 14.1.10 进一步给出一个短正合列

$$\mathbf{1} \to \pi_1(Z(K)) \times \prod_{j=1}^{m} \pi_1(K_j) \to \pi_1(K) \to \Gamma \to \mathbf{1}.$$

注记14.2.2。拓扑学中的一个基本结果指出，球面$\mathbb{S}^d$具有李群结构，当且仅当 $d \in \{0, 1, 3\}$（参见 [Hz91]）：

$$\mathbb{S}^0 \cong \mathrm{O}_1(\mathbb{R}), \qquad \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{T} \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}).$$

从注 14.2.1 已可如下推出，$d \in \{0, 1, 3\}$是 $\mathbb{S}^d$ 存在李群结构的必要条件。设 K 是一个与 $\mathbb{S}^d$同胚的紧李群。如果 K 是阿贝尔群，那么它是一个环面（例 5.3.8(a)），因此不是单连通的，于是 $d = 1$。如果 K不是阿贝尔群，那么它包含一个单紧子群，因此 $\pi_3(K)$非零，从而 $d \leq 3$。由于 $\pi_2(K)$为零，排除了数值 $d = 2$ （注 14.2.1）。

对于有限维李群 G，$\mathbb{S}^1$ 和$\mathbb{S}^3$ 上的李群结构实际上导出了一个有趣的事实：对于 $d = 1$，3，$[\mathbb{S}^d, K]$ 中的每个同伦类都可以由一个群同态表示。对于 $d = 3$，这可由注 14.2.1 得出；对于 $d = 1$，则可由以下事实得出：对于极大环面 $T \subseteq K$，同态

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{T}, T) \cong \pi_1(T) \to \pi_1(K) \tag{14.2}$$

是满射（[HiNe12，推论 14.2.10]）。由于 T-主丛 K 在 K/T 上的长正合同伦序列导出一个正合列

$$\mathbf{1} = \pi_2(K) \to \pi_2(K/T) \to \pi_1(T) \to \pi_1(K) \to \pi_1(K/T) \to \pi_0(T) = \mathbf{1}$$

（推论 14.1.10），(14.2) 的满射性意味着 $\pi_1(K/T) = \mathbf{1}$。

在下面的例14.2.5中我们将看到，对于无限维群，$\pi_1(G)$的元素一般不能由同态 $\mathbb{T} \to K$表示。

注14.2.3. 对于拓扑群 G 与 $k \geq 1$，群 $\pi_k(G)$是阿贝尔的（注14.1.3）。这些群

$$\pi_k^{\mathbb{Q}}(G) := \mathbb{Q} \otimes \pi_k(G)$$

称为 G的有理同伦群。就大多数目的而言，包括对由阿贝尔扩张产生的周期映射的应用 [Ne02a, Ne04a]（另见第15.5节），只需知道有理同伦群即可，因为从 $\pi_k(G)$到有理向量空间的每个同态都经由自然映射 η_k: $\pi_k(G) \to \pi_k^{\mathbb{Q}}(G)$分解，从而消去 $\pi_k(G)$的挠子群。

我们在上文已经看到，一个有限维连通李群同伦等价于一个紧致连通李群，因而在有限覆盖的意义下等价于一个环面与有限多个紧致单李群的乘积。对于单连通紧致单李群，其有理同伦群与若干奇数维球面之乘积的有理同伦群相同，这些球面的维数可由相应的根系算出（注14.2.1）。球面的有理同伦群是

$$\pi_k^{\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^{2d+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ for } k = 2d+1 \\ \mathbf{0} \text{ otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad \pi_k^{\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^{2d}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ for } k \in \{2d, 4d-1\} \\ \mathbf{0} \text{ otherwise.} \end{cases}$$

因此，我们完整地掌握了有限维李群 G 的有理同伦群。特别是，$\pi_2(G)$ 消失，且所有群 $\pi_{2k}(G)$ 都是挠群。

对于以下命题，我们回顾一下：局部指数李群 G 没有小子群，当且仅当其李代数 $\mathfrak{g}$ 带有连续范数（命题 9.3.28）。

命题 14.2.4。设 K 是一个没有小子群的局部指数李群，且 (X, x_0) 是一个连通的带基点拓扑空间。那么，常值映射 e 是群 $C_*(X, K)$ 中唯一的有限阶元素。

证明。假设对某个 $f \in C_*(X, K)$，$f^k = e$成立。设 $U \subseteq K$是一个不含小子群的单位元邻域，$V \subseteq U$ 是一个满足 $V^k \subseteq U$ 的开单位元邻域。那么，V中唯一的阶为k 的元素是 e，否则 U 将包含 K的一个非平凡子群。因此，$f^{-1}(V)$ 是 X的开子集，且与 $f^{-1}(\{e\})$ 重合，所以也是闭集。由于 f 保持基点，该集合非空；而 X 的连通性意味着 f是常数 e。□

例 14.2.5。设 K 是一个紧致连通单李群。

(a) 对于 $G := C_*(\mathbb{S}^1, K)$，群 $\pi_0(G) \cong \pi_1(K)$ 是有限的（例 14.8.7），而命题 14.2.4 表明短正合列$G_0 \hookrightarrow G \twoheadrightarrow \pi_0(G)$ 不分裂，因为 G 不含有限阶元素。

(b) 对于 $G := C_*(\mathbb{S}^2, K)$，我们有 $\pi_1(G) \cong \pi_3(K) \cong \mathbb{Z}$ （注 14.2.1，例 14.8.7）。由于 G 不含有限阶元素（命题 14.2.4），所有同态 $\mathbb{T} \to G$ 都是平凡的：

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{T}, G) \cong \exp_G^{-1}(e) = \{0\}.$$

因此，$\pi_1(G)$ 中没有任何元素可以由同态 $\mathbb{T} \to G$实现。这与有限维李群的相应情形形成对比。

由于 $\pi_2(K)$ 消失，群 G 是连通的，所有同态 $\mathbb{T} \to G$ 都是平凡的，因此

$$\pi_1(G) \cong \ker q_G \not\subseteq \exp_{\widetilde{G}}(\mathfrak{g}).$$

对于连通的有限维李群，这种情况绝不会发生，因为对这些群而言，$Z(G)$ 总是包含于 $\exp(\mathfrak{g})$ [HiNe12，定理 14.2.1]。

14.3 微分同胚群

本节简要汇集一些关于带边界的紧流形的微分同胚群的同伦型的结果。更多详情请参阅 [Mil84，Ha12]。

14.3.1 球面与球

对于 $M = \mathbb{S}^1$，我们在第 13 章中已经看到，$\mathrm{Diff}_+(\mathbb{S}^1)$ 的万有覆盖群是可缩的。这意味着

$$\pi_k(\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \text{ for } k = 0 \\ \mathbb{Z} \text{ for } k = 1 \\ \mathbf{0} \text{ otherwise.} \end{cases}$$

对于 $M = \mathbb{S}^d, d \geq 2$，情况更加复杂。当然，我们有自然嵌入 $\mathrm{O}_{d+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^d)$，由此可以问：对于哪些维数$d$，这个包含映射是同伦等价。对于 $d = 1$，2，S. Smale 于 1959 年证明了这一点，并对 $d = 3$ 提出了猜想。Hatcher 于 1983 年证明了这个猜想 [Ha83]。对于 $d = 4$，答案尚不为人所知；而对于$d > 4$，该包含映射不是同伦等价（[Mil84，第 1053] 页）。

对于 $d = 2$，由此可得关于同伦群的如下信息。由于 $\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$，且 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ 的万有覆盖群 $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ 同胚于 $\mathbb{S}^3$，根据注 14.2.1 可得：

$$\pi_k(\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^2)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{for } k=0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{for } k=1 \\ \mathbf{0} & \text{for } k=2 \\ \mathbb{Z} & \text{for } k=3 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{for } k=4 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{for } k=5. \end{cases}$$

对于 $d=3$，我们有 $\mathrm{O}_4(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$，且 $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ 的万有覆盖群是由 $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})^2$ 给出的二重覆盖。因此

$$\pi_k(\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^3)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{for } k=0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{for } k=1 \\ \mathbf{0} & \text{for } k=2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{for } k=3 \\ \mathbb{Z}_2^2 & \text{for } k=4 \\ \mathbb{Z}_2^2 & \text{for } k=5 \end{cases}$$

群 $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(\mathbb{S}^d))$在 $d \geq 5$时是有限群，它有一个引人注目的微分几何解释。其元素对应于与 $\mathbb{S}^{d+1}$同胚的光滑（$d+1$）维流形的定向微分同胚类。根据 Kervaire 和 Milnor [KM63]，所有这些群都是有限阿贝尔群。$d=5$ 至 17 阶这些群的阶数表可见于 [Mil84]。

注释 14.3.1.([Ha12]) 由于球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$中闭单位球 $\mathbb{D}^n$ 的边界 $\partial\mathbb{D}^n$，因此有一个自然纤维化

$$\mathrm{Diff}_\partial(\mathbb{D}^n) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{D}^n) \hookrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^{n-1})$$

这是通过限制到边界得到的。这里，对于带边界的流形M，$\mathrm{Diff}_\partial(M)$表示固定所有边界点的微分同胚群。

此外还有

$$\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^n) \sim \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Diff}_\partial(\mathbb{D}^n),$$

其中 $\sim$ 表示同伦等价，因此 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^n)$ 的同伦型也可以用球面的微分同胚来描述。对于$n=1$，2，3，群 $\mathrm{Diff}_\partial(\mathbb{D}^n)$ 是弱可缩的（[Ku18，定理 1.3.2]）；而对于 $n \geq 5$，$\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(\mathbb{D}^n)) \cong \Theta_{n+1}$，其中 Θ_n 是关于连通和运算的同伦 n-球面群（[Ku18]）。

14.3.2 球面与区间的乘积

例 14.3.2.（曲面的微分同胚群；[Ha12]）对于曲面，我们有：

(a) π_0(微分同胚群($\mathbb{T}^2$)) ≅一般线性群$_2(\mathbb{Z})$ 和 微分同胚群$(\mathbb{T}^2)_0 \sim \mathbb{T}^2$ ([EE67, EE69])。
（b） π_0(微分同胚群$(\mathbb{S}^1 \times [0,1]) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 和 微分同胚群$(\mathbb{S}^1 \times I)_0 \sim \mathbb{T}$ ([ES70])

(c) 微分同胚群($\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$)$_0 \sim$ SO$_3(\mathbb{R})$ ∼微分同胚群($\mathbb{S}^2$)$_0$。对于克莱因瓶 K、圆盘 $\mathbb{D}^2$、环带 $\mathbb{S}^1 \times I$和莫比乌斯带 M，微分同胚群的单位连通分支以 SO$_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{T}$ 为强变形收缩（[ES70]）。（d）对于所有其他曲面 Σ （[EE67, EE69]），微分同胚群(Σ)$_0$ 均为可缩。群 π_0(微分同胚群(Σ)) 是映射类群。

例 14.3.3.（某些三维流形的微分同胚群； [Ha12]）

（a）群 Diff($\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$) 与乘积群 O$_2(\mathbb{R})$ ×O$_3(\mathbb{R})$ × Ω(SO$_3(\mathbb{R})$) 同伦等价（[Ha81]）。（b）Diff($\mathbb{T}^3$)$_0 \sim \mathbb{T}^3$。（c）Diff($\mathbb{T}^2 \times [0,1]$)$_0 \sim \mathbb{T}^2$。

注 14.3.4.（a）对于 $n \geq 5, \pi_0$, (Diff($\mathbb{T}^n$)) 包含一个 $\mathbb{Z}_2^\infty$ 的副本（[Ha12]）。

（b） [Yag10，推论 4.1] 表明，对于任意连通、 σ-紧致的带边界光滑流形 M ，若其赋有体积形式 μ，则保体积微分同胚群 Diff(M, μ) 是保向微分同胚群 Diff(M)+ 的强变形收缩。这将关于 Diff(M) 同伦型的所有问题归结为群 Diff(M, μ)。对于紧流形，相应结果可由纳什–莫泽逆函数定理（[Ham82，定理 2.5.3]）推出。这表明群 Diff(M) 是以 M 上的光滑概率测度空间为底空间的光滑主丛。

注 14.3.5. 对于辛流形 (M, ω)，关于辛同胚群 Sp(M, ω) 及其哈密顿微分同胚正规子群 Ham(M, ω) 的拓扑，目前所知甚少（[Pol01, §7.2]）：

- 当 $n = 1,2$ 时，Ham($\mathbb{R}^{2n}, \omega$) 是可缩的，但关于 $n > 2$ 尚无所知。
- 对于 $M = \mathbb{S}^2$，包含映射 O$_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow$ Ham($\mathbb{S}^2, \omega$) = Sp($\mathbb{S}^2, \omega$) 是同伦等价，因此 π_1(Ham($\mathbb{S}^2, \omega$)) $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。
- 对于亏格为 $g \geq 1$ 的紧辛曲面 (Σ, ω)，群 Ham(Σ, ω) 是单连通的。

14.4 希尔伯特空间上的算子群

本节首先讨论 Kuiper 定理。该定理断言，希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ 上的酉群（赋予算子范数）是可缩的。[1] 随后，我们利用这一结果证明，希尔伯特空间上的各种经典算子群，例如

$$\mathrm{GL}(\mathcal{H}, I) = \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \colon Ig^*I^{-1} = g^{-1}\}$$

[1] 这里，希尔伯特空间在 $\mathbb{K}$ 上指配备有正定厄米形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的 $\mathbb{K}$-向量空间；该形式关于第一个变量是线性的，并且空间关于范数 $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ 是完备的。

（I 在 $\mathcal{H}$ 上的反线性等距变换，满足 $I^2 \in \{\pm\mathbf{1}\}$）都是可缩的。接着，对于一个集合 J，我们考察由那些可逆 $J\times J$-矩阵 g 组成的直极限群 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$，其中 $g-\mathbf{1}$ 只有有限个非零元素。我们将看到，对于任意无限集 J，该群都与 $\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$弱同伦等价，也就是说，它与群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$的直极限弱同伦等价。结合这些结论与第 14.1 节 Palais 的一般结果，我们计算同余群的同伦群

$$\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}) := \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \cap (\mathbf{1} + \mathcal{L}_p(\mathcal{H}))$$

Schatten 理想 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 以及群

$$\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}, I) := \mathrm{GL}(\mathcal{H}, I) \cap \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}) \quad \text{for} \quad 1 \le p \le \infty.$$

14.4.1 Kuiper 定理

本小节将说明，Kuiper 定理指出，在无限维可分$\mathbb{K}$希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上，由 $\mathbb{K}$线性连续算子构成的群 $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ 是可缩的（[Ku65]）；这一结论也可以用相当初等的方法推广到不可分希尔伯特空间。其证明基于下面的引理，该引理是对 [vN50, Th. 14.10] 的加细。

引理 14.4.1. 设 $\mathcal{H}$ 是定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ 上的希尔伯特空间，且 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$是一个由算子构成的可分集。那么存在一个正交分解$\curlywedge$，分解为 $\mathcal{M}$-不变子空间，且每个 $\mathcal{H}_j$ 都是可分的。如果 $\mathcal{H}$ 是无限维的，那么可以选取空间 $\mathcal{H}_j$ 使它们全都是无限维的，因此同构于$\mathcal{H}_s := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$，从而 $\mathcal{H} \cong \ell^2(J, \mathcal{H}_s)$。

证明。 由于由 $\mathcal{M}$ 生成的 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$的闭 $*$子代数是可分的，我们可以假设 $\mathcal{M}$ 是 $*$-不变的，且 $\mathbf{1} \in \mathcal{M}$；否则，我们用 $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^* \cup \{\mathbf{1}\}$替代它。现在，利用佐恩引理的标准应用即可得出该断言：设$(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个极大集，其中每个成员都是非零、闭、 $\mathcal{M}$-不变的可分子空间，且它们的和 $\sum_{j\in J}\mathcal{H}_j$ 是正交的。设$\mathcal{H}_0 := \sum_{j\in J}\mathcal{H}_j$ 那么，由于 $\mathcal{M}$ 是 $*$-不变的， $\mathcal{H}_0^{\perp}$也是 $\mathcal{M}$-不变的。假设 $\mathcal{H}_0 \neq \mathcal{H}$。对于$0 \neq v \in \mathcal{H}_0^{\perp}$，子空间 $\mathcal{H}_v := \mathrm{span}(\mathcal{M}v)$是可分的，并且与所有空间 $\mathcal{H}_j$正交，这与族$(\mathcal{H}_j)_{j\in J}$的极大性矛盾。由此得证第一个断言。

为证明第二部分，假设 $\mathcal{H}$ 是无限维的，并且$\curlywedge$考虑如上的分解 $\mathcal{H} \cong \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j$。令

$$J_0 := \{j \in J : \dim \mathcal{H}_j < \infty\}.$$

情形1： 若 J_0 是有限的，则存在一个 $j_0 \in J \setminus J_0$。将 $\mathcal{H}_{j_0}$ 替换为较大的空间 $\mathcal{H}_{j_0} + \sum_{i\in J_0}\mathcal{H}_i$，我们便得到所需的分解。

情形2： 若 J_0 是无限的，则基数的等式 $|J_0 \times \mathbb{N}| = |J_0|$ （[La93，附录 2]）表明 J_0 可以划分为无限可数子集 I_i，$i \in J_0$。于是所有子空间 $\mathcal{K}_i := \sum_{j \in I_i} \mathcal{H}_j$ 都是无限维且可分的，并且我们得到 $\mathcal{H}$的所需正交分解：

$$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus}_{j \in J \setminus J_0} \mathcal{H}_j \oplus \widehat{\bigoplus}_{i \in J_0} \mathcal{K}_i. \qquad \square$$

以下命题的证明受到 Mitya-gin 论文 [Mit70] 中论述方式的启发。

命题 14.4.2。 设 Y 是可分拓扑空间，$\mathcal{H}$ 是定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$上的不可分希尔伯特空间。那么，每个连续映射$f\colon\ Y \to$ 一般线性群$_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ 都同伦于一个常值映射。

证明。 由于 $f(Y)$ 是由算子组成的可分集合，引理 14.4.1 表明，存在集合 J 和同构 $\mathcal{H} \to \ell^2(J,\ \mathcal{H}_s)$，其中 $\mathcal{H}_s := \ell^2(\mathbb{N},\ \mathbb{K})$，使得 $f(Y)$ 中的算子都是作用于 $\ell^2(J,\ \mathcal{H}_s)$ 上的对角算子。

步骤 1： 由于 $\mathcal{H}$ 不可分，集合 J 是（不可数）无限集。首先考虑满足 $|J_1| = |J_2| = |J|$ 的分解 $J = J_1 \dot\cup J_2$。这导出正交分解 $\mathcal{H} \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$，因此我们相应地将作用于 $\mathcal{H}$ 上的算子视为分块 2×2 矩阵。于是，$f\colon\ Y \to$一般线性群$_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ 可写为

$$f(y) = \begin{pmatrix} g_1(y) & 0 \\ 0 & g_2(y) \end{pmatrix},$$

其中 $g_j\colon\ Y \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ 是连续映射。我们断言，f 与映射同伦

$$f_1(y) = \begin{pmatrix} g_1(y)g_2(y) & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{14.3}$$

只需证明

$$f(y)^{-1} f_1(y) = \begin{pmatrix} g_2(y) & 0 \\ 0 & g_2(y)^{-1} \end{pmatrix}$$

与某个常值映射同伦。该同伦由下式给出

$$H(t,a) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(a^{-1}-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(a-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -ta^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其满足

$$H(1,a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad H(0,a) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

步骤 2： 鉴于步骤 1，我们可以假设 $f_1\colon\ Y \to$ 一般线性群$_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ 具有形式 (14.3)。接下来我们注意到 $\mathcal{H} \cong \ell^2(\mathbb{N},\ \mathcal{H})$，因为 $|J| = |\mathbb{N} \times J|$ ([La93, 附录 2])。因此

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H} \oplus \ell^2(\mathbb{N}, \mathcal{H}) \cong \ell^2(\mathbb{N}_0, \mathcal{H}),$$

我们可以假设

$$f_1(y) = \operatorname{diag}(g(y), \mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots),$$

其中， $d =$对角算子$(d_1, d_2, \ldots)$是由 $d.(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (d_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$定义的算子。将 $\mathbb{N}$ 划分为奇数 $\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ 和偶数 $\mathbb{N}_{\mathrm{even}}$，并相应地写成

$$\ell^2(\mathbb{N}, \mathcal{H}) \cong \ell^2(\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}, \mathcal{H}) \oplus \ell^2(\mathbb{N}_{\mathrm{even}}, \mathcal{H}),$$

由步骤 1 可知，常值映射 $Y \to$ 一般线性群$_{\mathbb{K}}(\ell^2(\mathbb{N}, \mathcal{H}))$ $y \mapsto \mathbf{1}$ 与映射

$$y \mapsto \operatorname{diag}(g(y)^{-1}, g(y), g(y)^{-1}, g(y), \ldots).$$

因此， f_1 与.....同伦

$$f_2(y) = \operatorname{diag}(g(y), g(y)^{-1}, g(y), g(y)^{-1}, \ldots).$$

再次对分解应用相同的论证

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H} \oplus \ell^2(\mathbb{N}, \mathcal{H}) \cong \ell^2(\{0\} \cup \mathbb{N}_{\mathrm{even}}, \mathcal{H}) \oplus \ell^2(\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}, \mathcal{H}),$$

我们看到， f_2 与一个常值映射同伦。 □

定理 14.4.3（一般希尔伯特空间的 Kuiper 定理）。若$\mathcal{H}$ 是一个定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$上的无穷维希尔伯特空间，则群$\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$是可缩的。

证明。根据定理 14.1.27，只需证明 $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ 的所有同伦群均为零。在 [Ku65] 中（另见 [Bel06，定理 3.15]），这一断言已针对无限维可分希尔伯特空间得到证明。对于不可分希尔伯特空间，由命题 14.4.2 可知此结论成立，因为球面$\mathbb{S}^k$、 $k \in \mathbb{N}_0$都是可分的。□

14.4.2 Kuiper 定理的应用

Kuiper 定理可用于证明，希尔伯特空间上许多“经典”的算子群都是可缩的。下面我们简要讨论这些应用。

定义 14.4.4. (a) 若 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ 上的希尔伯特空间，则我们定义

$$\mathrm{U}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) := \{g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) \colon g^* g = g g^* = \mathbf{1}\}$$

作为该群的酉部分。我们还记

$$\mathrm{O}(\mathcal{H}) := \mathrm{U}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}), \quad \mathrm{U}(\mathcal{H}) := \mathrm{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Sp}(\mathcal{H}) := \mathrm{U}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}).$$

(b) 设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，且 I 是一个满足 $I^2 \in \{\pm \mathbf{1}\}$ 的反线性等距变换。那么

$$\mathrm{GL}(\mathcal{H}, I) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \colon Ig^*I^{-1} = g^{-1}\}$$

是一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ 的复李子群（习题 10.7.14）。对于 $I^2 = \mathbf{1}$，我们有

$$\mathrm{U}(\mathcal{H}, I) := \mathrm{U}(\mathcal{H}) \cap \mathrm{GL}(\mathcal{H}, I) \cong \mathrm{O}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \quad \text{with} \quad \mathcal{H}_{\mathbb{R}} := \{x \in \mathcal{H} \colon Ix = x\},$$

对于 $I^2 = -\mathbf{1}$，我们有

$$\mathrm{U}(\mathcal{H}, I) \cong \mathrm{U}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}) \cong \mathrm{Sp}(\mathcal{H}),$$

其中，$\mathcal{H}$ 上的四元数结构由 $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 的子代数 $\mathbb{C}\mathbf{1} + \mathbb{C}I \cong \mathbb{H}$ 给出，即 $\mathcal{H}$ 的实线性自同态。

（c）（厄米群）设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，并且

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$$

是一个正交分解。进一步，令 $T = T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，其中 $\mathcal{H}_{\pm} = \ker(T \mp \mathbf{1})$。我们定义相应的伪酉群

$$\mathrm{U}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \colon Tg^*T^{-1} = g^{-1}\}.$$

我们进一步得到一个实双线性斜对称形式 $\Omega(x,\ y) := \mathrm{Im}\langle x,\ y\rangle$并将 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ 记作 $\mathcal{H}$ 的底层实希尔伯特空间。于是

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{H}, \Omega) := \{g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}^{\mathbb{R}}) \colon (\forall v, w \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}})\, \Omega(gv, gw) = \Omega(v, w)\}$$

称为 $\mathcal{H}$ 的辛群。如果从实希尔伯特空间 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ 出发，并考虑其上的等距复结构 I，那么我们可以定义

$$\Omega(x, y) := -\langle Ix, y\rangle = \langle x, Iy\rangle$$

并令

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{H}^{\mathbb{R}}, I) := \{g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}^{\mathbb{R}}) \colon (\forall v, w \in \mathcal{H}^{\mathbb{R}})\, \Omega(gv, gw) = \Omega(v, w)\}.$$

容易看出，这两种构造都导出同构的群 $\mathrm{Sp}(\mathcal{H}^{\mathbb{R}},\ I) \cong \mathrm{Sp}(\mathcal{H},\ \Omega)$。

如果 I 是复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的共轭作用，且 $\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{H}$ 是一个子空间，使得我们得到一个正交分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$，其中 $\mathcal{H}_- := I\mathcal{H}_+$。那么我们定义

$$\mathrm{O}^*(\mathcal{H}, I) := \mathrm{U}(\mathcal{H}, I) \cap \mathrm{U}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-).$$

命题 14.4.5。如果 $\mathcal{H}$ 是一个定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ 上的希尔伯特空间，那么极分解映射

$$p \colon \mathrm{U}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) \times \mathrm{Herm}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}), \quad (u, X) \mapsto ue^X$$

是一个微分同胚。

证明。我们首先考虑 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 的情形。设 $g\in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$。那么 g^*g 是一个正厄米算子，因此连续函数演算给出一个正厄米算子 $X:=\frac{1}{2}\log(g^*g)$。设 $u:=ge^{-X}$。那么

$$uu^*=ge^{-2X}g^*=g(g^*g)^{-1}g^*=\mathbf{1}$$

and

$$u^*u=e^{-X}g^*ge^{-X}=e^{-X}e^{2X}e^{-X}=\mathbf{1}.$$

我们得出，每个算子 $g\in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ 都有唯一的分解$g=ue^X$，其中 $X\in \mathrm{Herm}(\mathcal{H})$。这意味着 p 是双射。显然， p 也是光滑映射。p^{-1} 也是光滑的这一点由函数的光滑性

$$\log\colon \{g\in \mathrm{GL}(\mathcal{H})\cap \mathrm{Herm}(\mathcal{H})\colon \inf \mathrm{Spec}(g)>0\}\to \mathrm{Herm}(\mathcal{H})$$

（引理 10.7.13）可得。

若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，我们考虑复希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$，在其上通过 $I(x+iy):=x-iy$ 得到一个反线性等距对合。于是， $\tau(A):=IAI^{-1}=IAI$ 定义了巴拿赫-$*$代数 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 的反线性对合自同构，并且

$$\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})^{\tau}\cong \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}),\quad \mathrm{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})^{\tau}\cong \mathrm{U}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}),\quad \mathrm{Herm}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})^{\tau}\cong \mathrm{Herm}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}),$$

其中，同构通过限制到 I-不动点的实子空间$\mathcal{H}=(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})^I$ 来实现。按照极分解，将 $g\in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 写成 $g=ue^X$，其中 $u\in \mathrm{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 且 $X\in \mathrm{Herm}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$；关系 $\tau(g)=\tau(u)e^{\tau(X)}$ 以及极分解的唯一性意味着， $\tau(g)=g$ 等价于 $\tau(u)=u$，且 $\tau(X)=X$。因此，$\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 的极分解映射 p 限制为一个微分同胚

$$\mathrm{U}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\times \mathrm{Herm}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\to \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}),\quad (u,X)\mapsto ue^X.$$

若 $\mathbb{K}=\mathbb{H}$，我们考虑复希尔伯特空间 $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$，它由将标量从 $\mathbb{H}=\mathbb{C}+J\mathbb{C}$ 限制到子代数 $\mathbb{C}$，并将标量积限制到其 $\mathbb{C}$ 分量而得到。于是， $\tau(A):=JAJ^{-1}=-JAJ$ 定义了巴拿赫-$*$ 代数 $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})$ 的一个反线性对合自同构，并且

$$\mathrm{GL}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})^{\tau}=\mathrm{GL}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}),\quad \mathrm{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})^{\tau}=\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}),\quad \mathrm{Herm}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})^{\tau}=\mathrm{Herm}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}).$$

现在，与实数情形中的论证相同，可以证明 $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})$ 的极分解限制为一个微分同胚

$$\mathrm{U}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H})\times \mathrm{Herm}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H})\to \mathrm{GL}_{\mathbb{H}}(\mathcal{H}).$$ □

注 14.4.6。我们关于极分解的证明同样适用于抽象 C^*-代数，并由此给出一个微分同胚

$$p\colon \mathrm{U}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Herm}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}^\times, \quad (u, x) \mapsto ue^x,$$

其中

$$\mathrm{U}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \colon aa^* = a^*a = \mathbf{1}\}$$

是 $\mathcal{A}$ 的酉群。对于交换代数 $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{C})$，其中 X 是紧空间，这是平凡分解

$$C(X, \mathbb{T}) \times C(X, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{C}^\times), \quad (u, f) \mapsto ue^f.$$

定理 14.4.7。若 $\mathcal{H}$ 是定义在 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ 上的无穷维希尔伯特空间，则下列群是可缩的：

(i) $\mathbb{K}$-线性自同构群 $GL_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$。*(ii)* 等距 $\mathbb{K}$-线性自同构群 $U_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$。*(iii)* 群 $GL(\mathcal{H}, I)$，其中 $\mathcal{H}$ 是复数域且 I 是反线性等距变换，并且 $I^2 \in \{\pm\mathbf{1}\}$。此外，$GL(\mathcal{H}, I)$ 具有光滑极分解。*(iv)* 厄米群 $U(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$，其中 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ 是由两个无限维直和项构成的正交分解；以及 $Sp(\mathcal{H}, \Omega)$ 和 $O^*(\mathcal{H}, I)$。

证明。 (i) 即为定理 14.4.3。

(ii) 由 (i) 和极分解（命题 14.4.5）可得。

(iii) 根据定义 14.4.4，群 $\mathrm{U}(\mathcal{H}, I)$ 是可缩的，因为它是 (ii) 中的群之一。因此，该断言由一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H}, I)$ 的极分解推出，而这一分解可如下获得。我们考虑 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ 的自同构 $\tau(g) := I(g^*)^{-1}I^{-1}$，并将其李代数 $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ 的相应反线性自同构写作 $\tau_{\mathfrak{g}}(x) := -Ix^*I^{-1}$。于是

$$\mathrm{GL}(\mathcal{H}, I) = \mathrm{GL}(\mathcal{H})^\tau := \{g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H}) \colon \tau(g) = g\}.$$

设 $g = ue^x$ 是 $g \in \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ 的极分解。那么，$\tau(g) = \tau(u)e^{\tau_{\mathfrak{g}}(x)}$ 是 $\tau(g)$ 的极分解，因此该分解的唯一性意味着，$\tau(g) = g$ 等价于 $\tau(u) = u$ 和 $\tau_{\mathfrak{g}}(x) = x$，即 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{H}, I)$ 和 $x \in$ 厄米$(\mathcal{H}, I)$。

（iv）对于厄米群，我们将证明它们具有极分解，其中

$$\mathrm{U}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-) \cap \mathrm{U}(\mathcal{H}) \cong \mathrm{U}(\mathcal{H}_+) \times \mathrm{U}(\mathcal{H}_-), \quad \mathrm{Sp}(\mathcal{H}, \Omega) \cap \mathrm{O}(\mathcal{H}^{\mathbb{R}}) \cong \mathrm{U}(\mathcal{H})$$

and

$$\mathrm{O}^*(\mathcal{H}, I) \cap \mathrm{U}(\mathcal{H}) \cong \mathrm{U}(\mathcal{H}_+),$$

其中 $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_+ \oplus I\mathcal{H}_+$ 如定义 14.4.4(c) 所述。因此，（ii）意味着所有这些群都是可缩的。

为导出 $\mathrm{U}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$ 的极分解，设 $g \in$ 一般线性群$(\mathcal{H})$ 具有极分解 $g = ue^x$, $u \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ 与 $x = x^*$。对于定义 14.4.4(c) 中的 T，我们考虑一般线性群$(\mathcal{H})$ 的自同构 $\tau(g) := T(g^*)^{-1}T^{-1}$

并记 $\tau_{\mathfrak{g}}(x) := -Tx^*T^{-1}$ 为其李代数 $\mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ 的相应反线性自同构。于是 $\tau(g) = \tau(u)e^{\tau_{\mathfrak{g}}(x)}$ 是 $\tau(g)$ 的极分解，因此该分解的唯一性蕴含 $\tau(g) = g$ 等价于 $\tau(u) = u$ 与 $\tau_{\mathfrak{g}}(x) = x$。故 $g \in \mathrm{U}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$ 当且仅当

$$u \in \mathrm{U}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-) \cap \mathrm{U}(\mathcal{H}) \cong \mathrm{U}(\mathcal{H}_+) \times \mathrm{U}(\mathcal{H}_-) \quad \text{and} \quad x \in \mathfrak{u}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-).$$

为说明 $\mathrm{Sp}(\mathcal{H}, \Omega)$ 适用于极分解，我们注意到

$$\Omega(x, y) = \mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = (x, Jy),$$

其中 $(\cdot,\cdot) := \mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$ 上的实标量积。因此$g \in \mathrm{Sp}(\mathcal{H}, \Omega)$ 等价于 $g^\top J g = J$，即 $g = \tau(g) := J(g^\top)^{-1}J^{-1}$。于是$\tau$ 是 $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}^{\mathbb{R}})$ 的对合自同构，而 $\tau_{\mathfrak{g}}(x) := -Jx^\top J^{-1}$ 是相应的李代数自同构。设 $g \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}^{\mathbb{R}})$ 的极分解为 $g = ue^x$，其中 $u \in \mathrm{O}(\mathcal{H}^{\mathbb{R}})$ 且 $x^\top = x$。那么 $\tau(g) = \tau(u)e^{\tau_{\mathfrak{g}}(x)}$ 是 $\tau(g)$ 的极分解，因为 ue^{-x} 是 $(g^\top)^{-1}$ 的极分解。因此 $g \in \mathrm{Sp}(\mathcal{H}, \Omega)$ 等价于 $\tau(u) = u$，即 $u \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$，并且等价于 $Jx = -xJ$，即 x 是反线性的。

群 $\mathrm{O}^*(\mathcal{H},\ I)$ 的论证是类似的。 □

14.5 直极限群

本节将讨论有限维李群的直极限的同伦群。在这一背景下，一个中心结果是 Bott 周期性定理（定理 14.5.3）。它完整地描述了与包含映射 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$（其中 $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}$）相关的直极限的所有同伦群，也描述了相应对称空间的同伦群。类似的技术适用于群 $\bigcup_n \mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个有单位巴拿赫代数。这里我们只讨论其同伦群与其自然完备化的同伦群之间的相同之处。

14.5.1 有限维矩阵群的直极限

定义 14.5.1. 对于一个无限集 J，我们将函数 $m\colon J \times J \to \mathbb{K}$视为一个矩阵，其元素为 $m(i, j)$。在此意义下，我们用 $M_J(\mathbb{K})$ 表示所有在 $\mathbb{K}$ 中仅有有限个非零元素的 $J \times J$-矩阵所构成的集合。于是，$M_J(\mathbb{K})$ 关于矩阵乘法构成一个实代数。它有单位元当且仅当J是有限集。我们将 $\mathbf{1} = (\delta_{ij})_{i,j\in J}$记作单位矩阵。于是，$\mathbf{1} + M_J(\mathbb{K})$ 是一个乘法幺半群，并将其单位群记作 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$。我们赋予 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$ 关于子群 $\mathrm{GL}_F(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}_J(\mathbb{K}) \cap (\mathbf{1} + M_F(\mathbb{K}))$ 的归纳极限拓扑，其中 $F \subseteq J$是有限子集。由构造可直接得出，群 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$ 中的左平移和右乘是连续的；但如果 J 是不可数的，那么乘法

就不是联合连续的（[Gl03a，定理 7.1]）。这里我们以自然方式将 $M_F(\mathbb{K})$ 视为 $M_J(\mathbb{K})$ 的子集，并同样将 $\mathrm{GL}_F(\mathbb{K})$ 视为 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$ 的子集。

命题 14.5.2。设 J 为无限集。那么，对于每个单射映射$\mathbb{N} \hookrightarrow J$，相应映射一般线性群 $_{\mathbb{N}}(\mathbb{K}) \to$ 一般线性群 $_J(\mathbb{K})$ 都是弱同伦等价。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{N} \subseteq J$。令 η: 一般线性群$_{\mathbb{N}}(\mathbb{K}) \hookrightarrow$一般线性群$_J$(𝕂) 为相应的群嵌入。

设 Y为紧空间，$f\colon Y \to$一般线性群$_J(\mathbb{K})$ 为连续映射。那么存在一个有限子集 $F \subseteq J$，使得 $f(Y) \subseteq$一般线性群$_F(\mathbb{K})$（引理 14.1.15(2)）。若 $F' \subseteq J$是有限集，且 $F \cap F' = \emptyset$和 $|F| = |F'| = n$，则一般线性群$(F \cup F', \mathbb{K}) \cong$一般线性群$_{2n}(\mathbb{K})$，其中我们将 F与 $\{1, \dots, n\}$、 F'与 $\{n+1, \dots, 2n\}$视为相同。于是 f是如下形式的映射

$$f(y) = \begin{pmatrix} g(y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

其中，我们将 $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ 的元素写成分块 2×2 矩阵，其元素属于 $M(n, \mathbb{K})$，而 $g\colon Y \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 是连续映射。

我们考虑映射 $H\colon [0,1] \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$，其定义如下：

$$H(t,a) := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ t(a^{-1} - \mathbf{1}) & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & t \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ t(a - \mathbf{1}) & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -ta^{-1} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

它满足

$$H(1,a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad H(0,a) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Then

$$\widetilde{H}\colon [0,1] \times Y \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K}), \quad (t,y) \mapsto f(y)H(t, g(y))^{-1}$$

$\widetilde{\ }$是连续的，且 $H(0, y) = f(y)$，并且

$$\widetilde{H}(1,y) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g(y)^{-1} \end{pmatrix}.$$

这一构造表明，每个连续映射 $f\colon Y \to \mathrm{GL}_F(\mathbb{K})$ 都与一个连续映射 $f'\colon Y \to \mathrm{GL}_{F'}(\mathbb{K})$ 在 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$ 中同伦。

特别地，我们看到，对于每个连续映射 $f\colon Y \to \mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$，都存在一个有限子集 $E \subseteq \mathbb{N}$，使得 f 与一个连续映射 $_{\sim}f\colon Y \to \mathrm{GL}(E, \mathbb{K})$ 同伦。事实上，取上述的 F，只需选择满足 $|E| = |F|$ 和 $E \cap F = \emptyset$ 的 $E \subseteq \mathbb{N}$ 即可。这个论证表明，自然同态 $\pi_k(\eta)\colon \pi_k(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})) \to \pi_k(\mathrm{GL}_J(\mathbb{K}))$ 是满射。

为了证明 $\pi_k(\eta)$ 是单射，假设 $f\colon Y \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ 属于 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$，且与一个常值映射同伦。令 $H\colon [0,1] \times Y \to \mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$

是一个同伦，其中 $H(0,y) = \mathbf{1}$ 且 $H(1,y) = f(y)$ 对所有 $y \in Y$ 都成立。于是存在一个有限子集 $F \subseteq J$，使得 $\operatorname{im}(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{GL}_F(\mathbb{K})$。因此我们可以假设 $F \supseteq \{1,\dots,n\}$；又由于 $\mathrm{GL}_{|F|}(\mathbb{K}) \cong \mathrm{GL}_F(\mathbb{K})$，可知 f 的同伦类在 $\mathrm{GL}_{|F|}(\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ 中消失。特别地，f 在 $\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ 中与一个常值映射同伦。□

$\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ 的同伦群，以及由此得到的所有群 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$ 的同伦群，其中J 是无限集（命题 14.5.2），由下述定理给出。

定理 14.5.3（Bott 周期性定理）。设 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$ 和$d := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$。那么，对于 $k \le d(n+1) - 3$ 和 $q \in \mathbb{N}$，映射

$$\pi_k(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \to \pi_k(\mathrm{GL}_{n+q}(\mathbb{K}))$$

是同构，因此

$$\pi_k(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})) \cong \pi_k(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})).$$

此外，我们有以下周期关系

$$\pi_{n+2}(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})) \cong \pi_n(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})), \quad \pi_{n+4}(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})) \cong \pi_n(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{H})),$$

$$\pi_{n+4}(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{H})) \cong \pi_n(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})),$$

$$\pi_n(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{H})/\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})) \cong \pi_{n+1}(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{H})),$$

$$\pi_n(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})) := \lim_{m\to\infty} \pi_n(\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})) \cong \pi_{n+2}(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{H})),$$

$$\pi_n(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})) := \lim_{m\to\infty} \pi_n(\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})) \cong \pi_{n+1}(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})),$$

$$\pi_n(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{H})) := \lim_{m\to\infty} \pi_n(\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_m(\mathbb{H})) \cong \pi_{n+2}(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})).$$

特别地，一般线性群$_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ 的同伦群由下表确定：

	一般线性群$_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$	一般线性群$_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$	一般线性群$_{\mathbb{N}}(\mathbb{H})$
π_0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
π_1	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbf{0}$
π_2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
π_3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

证明。较容易的第一部分见 [Hu94，定理 8.4.1]，其余断言可在 [Bo59，第314页及以下] 中找到（另参见 [Hu94，推论 9.10.2]）。

为保证完备性，我们给出第一部分的证明。利用极分解，我们可以考虑酉群 $\mathrm{U}_n(\mathbb{K})$ 的相应映射。为理解包含映射 $\eta_n\colon \mathrm{U}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{K})$ 在同伦群上诱导的同态，我们考虑 $\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{K})$ 对球面 $\mathbb{S}^{d(n+1)-1}$ 的传递作用，由此得到一个局部平凡主丛

$$\mathrm{U}_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{S}^{d(n+1)-1}.$$

这个丛的同伦正合列（定理 14.1.8）包含

$$\pi_{k+1}(\mathbb{S}^{d(n+1)-1}) \to \pi_k(\mathrm{U}_n(\mathbb{K})) \xrightarrow{\pi_k(\eta_n)} \pi_k(\mathrm{U}_{n+1}(\mathbb{K})) \to \pi_k(\mathbb{S}^{d(n+1)-1})$$

对于 $k < d(n+1) - 1$，群 $\pi_k(\mathbb{S}^{d(n+1)-1})$ 消失（这可由光滑化和萨德定理推出），因此 $\pi_k(\eta_n)$ 是满射。此外，若 $k \le d(n+1) - 3$，则 $k+1 < d(n+1) - 1$ 意味着 $\pi_{k+1}(\mathbb{S}^{d(n+1)-1})$ 也消失，从而可得 $\pi_k(\eta_n)$ 的单射性。□

14.5.2 一般线性群 $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})$ 的巴拿赫–李完备化

本小节讨论群 $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A}) := \varinjlim \mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$ 的一种自然的巴拿赫–李完备化，其中 $\mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数。

设 $\mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数，并为巴拿赫代数 $M_n(\mathcal{A}), n \in \mathbb{N}$ 赋予由其在 $\mathcal{A}^n$ 上的作用所诱导的算子范数，其中 $\mathcal{A}^n$ 配备上确界范数。该范数具有次乘性。我们有等距嵌入 $M_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow M_{n+1}(\mathcal{A})$，因此可在直极限代数 $M_\infty(\mathcal{A}) = \varinjlim M_n(\mathcal{A})$ 上定义一个范数，使得所有这些嵌入 $M_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow M_\infty(\mathcal{A})$ 是等距的。令 $M_\infty(\mathcal{A})$表示这个赋范代数的巴拿赫完备化。它是一个等距包含于 $\mathcal{L}(c_0(\mathbb{N},\ \mathcal{A}))$ 中的巴拿赫代数，其中 $c_0(\mathbb{N},\ \mathcal{A})$ 是 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^n \cong \mathcal{A}^{(\mathbb{N})}$ 在上确界范数下的完备化。每个元素 $x \in M_\infty(\mathcal{A})$ 都是有限矩阵，因此会湮灭 $c_0(\mathbb{N},\ \mathcal{A})$ 中范数为一的元素，故 $\|x - \mathbf{1}\| \ge 1$。这意味着 $M_\infty(\mathcal{A})$ 没有单位元，我们还考虑巴拿赫代数

$$\widehat{M}_\infty(\mathcal{A})_+ := \widehat{M}_\infty(\mathcal{A}) + \mathbb{C}\mathbf{1} \subseteq \mathcal{L}(c_0(\mathbb{N}, \mathcal{A})).$$

Let

$$\widehat{M}_\infty(\mathcal{A})^\times := \widehat{M}_\infty(\mathcal{A})_+^\times \cap (\mathbf{1} + \widehat{M}_\infty(\mathcal{A}))$$

（一个同余子群），并注意到这是一个李代数为 $M_\infty(\mathcal{A})$ 的巴拿赫–李群。它包含直极限群 $\text{一般线性群}_\infty(\mathcal{A}) = \varinjlim \text{一般线性群}_n(\mathcal{A})$，

$\mathbf{1} + M_\infty(\mathcal{A}) \subseteq M_\infty(\mathcal{A})_+$ 的子幺半群的单位群。

引理 14.5.4。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $M_\infty(\mathcal{A})^\times \cap (\mathbf{1} + M_n(\mathcal{A})) = \text{一般线性群}_n(\mathcal{A})$。特别地，

$$\widehat{M}_\infty(\mathcal{A})^\times \cap (\mathbf{1} + M_\infty(\mathcal{A})) = \mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A}).$$

证明。 包含映射“$\supseteq$”是平凡的。因此，令 $x \in M_n(\mathcal{A})$，并假设 $\mathbf{1}+x$在 $\widehat{M}_\infty(\mathcal{A})_+^\times$ 中可逆，即属于 $\widehat{M}_\infty(\mathcal{A})^\times$。令 $\mathbf{1}+y := (\mathbf{1}+x)^{-1}$。那么

$$\mathbf{1} = (\mathbf{1}+y)(\mathbf{1}+x) = (\mathbf{1}+x)(\mathbf{1}+y)$$

等价于

$$xy = yx \quad \text{and} \quad x + y + xy = 0.$$

在矩阵 xy 中，至多只有前 n 行非零；而在矩阵 yx 中，至多只有前 n 列非零。因此 $xy = yx \in M_n(\mathcal{A})$。这意味着 $y = -x - xy \in M_n(\mathcal{A})$，于是

$$(\mathbf{1} + M_n(\mathcal{A})) \cap \widehat{M}_\infty(\mathcal{A})^\times = \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}),$$

由此即可得出该断言。 □

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由于 $M_\infty(\mathcal{A})^\times$ 是 $\mathbf{1} + M_\infty(\mathcal{A})$ 的开子集，且 $M_\infty(\mathcal{A})$ 在 $\frown$ $\frown M_\infty(\mathcal{A})$ 中稠密，因此 $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})$ 在 $M_\infty(\mathcal{A})^\times$ 中稠密，所以我们可以将 $\frown M_\infty(\mathcal{A})^\times$ 视为 $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})$ 的巴拿赫 – 李群完备化。

推论 14.5.5。设 $\mathcal{A}$ 是巴拿赫代数$(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的等距归纳极限，并假设对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{A}^\times \cap (\mathcal{A}_n)_+ = \mathcal{A}_n^\times$ 都成立。那么连续映射 $\varinjlim \mathcal{A}_n^\times \to \mathcal{A}^\times$ 是弱同伦等价。

证明。我们的假设意味着，$\mathcal{A}_n$ 是 $\mathcal{A}$的闭子空间，且它们的并集稠密。回顾一下，$\mathcal{A}^\times = \mathcal{A}_+^\times \cap (\mathbf{1} + \mathcal{A})$，并令$U := \mathcal{A}^\times - \mathbf{1} \subseteq \mathcal{A}$。这是 $\mathcal{A}$的一个开子集；鉴于假设 $\mathcal{A}^\times \cap (\mathcal{A}_n)_+ = \mathcal{A}_n^\times$对每个 $n \in \mathbb{N}$都成立，由定理 14.1.26 可得映射 $\varinjlim (\mathcal{A}_n^\times - \mathbf{1}) \to \mathcal{A}^\times - \mathbf{1}$ 是弱同伦等价。由于加法$\mathbf{1}$ 左右两侧均连续，结论得证。 □

$\widehat{\ }$**定理 14.5.6**。设 $\mathcal{A}$ 是一个巴拿赫代数，且 $M_\infty(\mathcal{A})$ 是 $M_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(\mathcal{A})$ 关于某个范数的完备化，对于该范数，每个 $M_n(\mathcal{A})$ 都是 $M_\infty(\mathcal{A})$ 的$\widehat{\ }$闭子代数。那么连续映射

$$\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A}) := \varinjlim \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}) \to \widehat{M}_\infty(\mathcal{A})^\times$$

是弱同伦等价。特别地，对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，我们有

$$\pi_k(\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})) \cong \varinjlim \pi_k(\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})) \cong \pi_k(\widehat{M}_\infty(\mathcal{A})^\times).$$

证明。 根据定理 14.1.26，我们只需运用引理 14.5.4，即可得到 $\widehat{\ }$对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有一般线性群$_n(\mathcal{A}) = M_\infty(\mathcal{A})^\times \cap (\mathbf{1} + M_n(\mathcal{A}))$. □

前述定理的要点在于，它描述了巴拿赫–$\widehat{\ }$李群完备化 $M_\infty(\mathcal{A})^\times$，该完备化具有与归纳极限拓扑群一般线性群$_\infty(\mathcal{A})$相同的同伦群。这使李理论与K理论之间的联系更加紧密；K理论研究一般线性群$_\infty(\mathcal{A})$的同伦群（[At67, Ka81]）。

14.6 Schatten 理想的合同子群

本节转而讨论与 Schatten 理想 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$相关的算子李群： $1 \le p \le \infty$ 由满足（X^*X）$^{p/2}$ 为迹类的算子 X 构成； $p = \infty$ 则由所有紧算子构成。我们将确定一些由 Schatten 理想描述的算子李群的同伦群。

设 $\mathcal{H}$是 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$上的希尔伯特空间。对于 x， $y \in \mathcal{H}$我们定义$P_{x,\ y}(v) := \langle v,\ y\rangle x$ 并置 $P_x := P_{x,\ x}$。注意， $P_{x,\ y} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})$。

引理 14.6.1。设 $\mathcal{H}$ 是一个 $\mathbb{K}$-希尔伯特空间，且 $(e_j)_{j\in J}$ 是一个标准正交基。那么 $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$：$=$张成$\{P_{e_j,e_k}:\ j,k \in J\}$ 在空间$\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$， $1 \le p \le \infty$中的每一个空间内都是稠密的。

证明。对于每个 $p \in [1,\infty]$，我们有 $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le \|x\|_1$ ，相应地$\mathcal{L}_1(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{L}_p(\mathcal{H}) \subseteq K(\mathcal{H}) = \mathcal{L}_\infty(\mathcal{H})$。

由于 $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$ 是 $*$-不变的，只需证明 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$ 中的每个厄米算子都属于 $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ 的闭包。紧自伴算子谱定理（[Ru91]）直接推出，具有有限维像的连续映射所成的理想 $\mathcal{L}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$ 中稠密，因此 $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$ 中稠密。因此，只需证明 $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ 中稠密，因为 $\|x\|_p \le \|x\|_1$。

根据 Hahn–Banach 定理，我们必须证明每个在 $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$上为零的连续线性泛函 $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H})'$ 都是零。由于$\mathcal{L}_1(\mathcal{H})' \cong \mathcal{L}(\mathcal{H})$（[Ne00, 命题 A.I.10(vi)]），泛函 f 可写为$f(X) = \mathrm{tr}(AX)$，其中 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$。因此

$$f(P_{e_j,e_k}) = \mathrm{tr}(AP_{e_j,e_k}) = \mathrm{tr}(P_{Ae_j,e_k}) = \langle Ae_j, e_k\rangle.$$

若 f 在 $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$上为零，则 A 关于标准正交基$(e_j)_{j\in J}$ 的矩阵为零，这意味着 $A = 0$。□

下述定理对于可分希尔伯特空间的情形是众所周知的（参见 [Pa65] 与 [dlH72，第II.29]页）。前一小节中关于直极限群所得到的结果使我们能够轻易地将其推广到一般的希尔伯特空间。

定理 14.6.2.设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ 上的无穷维希尔伯特空间，且 $p \in [1,\infty]$。则下列断言成立：

(i) 对每一个 $k \in \mathbb{N}_0$，我们有

$$\pi_k(\mathrm{GL}_p(\mathcal{H})) \cong \pi_k(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K})) \cong \varinjlim \pi_k(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})).$$

(ii)如果 $\mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{H}$ 是一个无穷维可分子空间，那么包含映射 $\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}_s) \hookrightarrow \mathrm{GL}_p(\mathcal{H})$ 是弱同伦等价。

(iii)对于 $1 \leq p \leq q \leq \infty$，包含映射 $\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_q(\mathcal{H})$ 是弱同伦等价。

证明。 (i) 设 $(e_j)_{j\in J}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基。那么上面的引理 14.6.1 表明，$\mathcal{L}_0(\mathcal{H}) = \text{张成}\{P_{e_j,e_k}\colon j,k\in J\}$ 在 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$ 中稠密。我们赋予$\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ 以直极限拓扑，该拓扑是相对于 $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ 的有限维子空间所成的有向集定义的。

对于开子集 $U := \text{一般线性群}_p(\mathcal{H}) - \mathbf{1} \subseteq \mathcal{L}_p(\mathcal{H})$，我们有

$$U \cap \mathcal{L}_0(\mathcal{H}) = \mathrm{GL}_J(\mathbb{K}) - \mathbf{1},$$

其中，一般线性群$_J(\mathbb{K})$ 是由那些元素 $g \in \text{一般线性群}(\mathcal{H})$ 构成的集合：相对于 $(e_j)_{j\in J}$，$g-\mathbf{1}$ 的矩阵只有有限个非零项，也就是说，g 和 g^* 固定了除有限个 e_j 以外的所有对象。由 $(g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$ 很容易推出，g^{-1} 具有相同的性质。因此，将 $\mathcal{L}_0(\mathcal{H})$ 与矩阵代数 $M_J(\mathbb{K})$ 自然识别，便得到群 $\mathbf{1}+(U\cap\mathcal{L}_0(\mathcal{H}))$ 与定义 14.5.1 中的一般线性群$_J(\mathbb{K})$ 的识别。

定理 14.1.20 表明，若在 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$ 上赋予关于子群 $\mathrm{GL}_F(\mathbb{K})$ 的最终拓扑，其中 $F \subseteq J$ 是一个有限子集，则包含映射 $\mathrm{GL}_J(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_p(\mathcal{H})$ 是弱同伦等价。此外，命题 14.5.2 表明，$\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_J(\mathbb{K})$ 是弱同伦等价。复合这两个弱同伦等价，得到一个弱同伦等价。由引理 14.1.15(3)，这证明了 (i)。

(ii) 我们先选取 $\mathcal{H}_s$ 的一组标准正交基 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$，再将其扩充为 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基 $(e_j)_{j\in J}$。我们考虑相应的映射

$$\varphi_1\colon \mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}_s), \quad \varphi_2\colon \mathrm{GL}_J(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}),$$

$$\varphi_3\colon \mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_J(\mathbb{K}) \quad \text{and} \quad \varphi_4\colon \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}_s) \to \mathrm{GL}_p(\mathcal{H})$$

其中 $\varphi_4 \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \varphi_3$。由于根据证明的第一部分，$\varphi_1$ 和 φ_2 是弱同伦等价，而根据命题 14.5.2，φ_3 是弱同伦等价，因此 φ_4 也是弱同伦等价。

(iii) 由基本包含关系 $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R}) \subseteq \ell^q(\mathbb{N},\mathbb{R})$，我们得出$\mathcal{L}_p(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{L}_q(\mathcal{H})$；引理 14.6.1 表明 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})$ 是一个稠密子空间。因此，对满足 $U \cap \mathcal{L}_p(\mathcal{H}) = \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}) - \mathbf{1}$ 的开子集 $U := \mathrm{GL}_q(\mathcal{H}) - \mathbf{1} \subseteq \mathcal{L}_q(\mathcal{H})$ 应用定理 14.1.21，即可推出 (iii)。□

命题 14.6.3。 对于每个 $p \in [1,\infty]$，极分解映射

$$p\colon \mathrm{U}_p(\mathcal{H}) \times \mathrm{Herm}_p(\mathcal{H}) \to \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}), \quad (u,X) \mapsto ue^X$$

是一个微分同胚。

证明。 我们考虑巴拿赫-$*$ 子代数 $\mathcal{L}_p(\mathcal{H})_+ = \mathbb{C}\mathbf{1}+\mathcal{L}_p(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$。由例 10.4.4 可知

$$\mathcal{L}_p(\mathcal{H})_+ \cap \mathrm{GL}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}_p(\mathcal{H})_+^\times,$$

因此，元素 $X \in \mathcal{L}_p(\mathcal{H})_+$ 的谱 $\mathrm{Spec}_p(X)$ 与 X 作为 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中元素的谱 $\mathrm{Spec}(X)$ 相同。因此，引理 10.7.13 蕴含，对于 $g \in$ 一般线性群$_p(\mathcal{H})$，有 $\log(g^*g) \in \mathcal{L}_p(\mathcal{H})$，并且映射

$$\log\colon \{g \in \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}) \cap \mathrm{Herm}_p(\mathcal{H})\colon \inf \mathrm{Spec}(g) > 0\} \to \mathrm{Herm}_p(\mathcal{H})$$

是光滑的。这就证明了该断言。 □

推论 14.6.4。若 $\mathcal{H}$ 是无限维复希尔伯特空间，$1 \le p \le \infty$，且

$$\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}, I) := \mathrm{GL}(\mathcal{H}, I) \cap \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}),$$

则下列断言成立：
(1) $\pi_k(\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}, I)) \cong \begin{cases} \pi_k(\mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})) & I^2 = \mathbf{1} \\ \pi_k & \mathrm{GL}_{\mathbb{N}}(\mathbb{H}) \quad I^2 = -\mathbf{1} \end{cases}$ 对于 $(\mathrm{GL}())$；
(2) 若 $\mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{H}$ 是一个无限维可分的 I-不变子空间，则包含映射 $\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}_s, I|_{\mathcal{H}_s}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_p(\mathcal{H}, I)$ 是弱同伦等价。*(3)* 对于 $1 \le p \le q \le \infty$，包含映射 $\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}, I) \hookrightarrow \mathrm{GL}_q(\mathcal{H}, I)$ 是同伦等价。

证明。我们首先注意到，$\mathrm{GL}_p(\mathcal{H})$ 的极分解（命题 14.6.3）意味着它与 $\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}, I)$ 的交集也具有极分解（参见定理 14.4.7 的证明），因此与 $\mathrm{U}_p(\mathcal{H}, I)$ 同伦等价：$= \mathrm{U}_p(\mathcal{H}) \cap \mathrm{GL}(\mathcal{H}, I)$。对于 $I^2 = -\mathbf{1}$，我们有 $\mathrm{U}_p(\mathcal{H}, I) \cong \mathrm{U}_{\mathbb{H},p}(\mathcal{H})$；对于 $I^2 = \mathbf{1}$，我们得到 $\mathrm{U}_p(\mathcal{H}, I) \cong \mathrm{U}_{\mathbb{R},p}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$，其中 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathcal{H}\colon Ix = x\}$。由于群 $\mathrm{U}_{\mathbb{K},p}(\mathcal{H})$ 根据定理 14.4.7 与 $\mathrm{GL}_{\mathbb{K},p}(\mathcal{H})$ 同伦等价，群 $\mathrm{GL}_p(\mathcal{H}, I)$ 的相关断言由定理 14.6.2 和极分解的存在性推出。□

14.7 连续映射的光滑逼近

本节的目标是证明，连续函数 $f\colon M \to N$, M 一个有限维紧流形，而 N 一个无穷维流形，可以通过光滑函数逼近。特别地，我们将看到每个同伦类都有一个光滑代表元。

14.7.1 一般逼近结果

下文中，$C(M, N)_c$ 表示连续映射 $M \to N$ 的空间 $C(M, N)$，该空间赋予紧开拓扑。

定理 14.7.1。设 $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 和 M 是一个有限维的 σ-紧C^s-带边流形。此外，设 V 是一个局部凸空间，且 $O \subseteq V$是一个开子集。那么，子集 $C^\infty(M, O)$ 在 $C(M, O)_c$中稠密。

若 $0 \in O$, $f \in C(M, O)$ 具有紧支撑，且 U 是$\operatorname{supp}(f)$的一个开邻域，那么 f在 $C(M, O)_c$ 中的每个邻域都包含一个光滑函数，其支集包含于 U中。

证明。（基于 [Hr76，定理 2.2]）。首先注意到 M 允许C^s-单位分解。V 的局部凸性对于下面关于单位分解的论证至关重要。

设 $f \in C(M, V)$ 和 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是由相对紧子集构成的 M 的局部有限开覆盖。那么，对每个 α，集合 $f(U_\alpha) \subseteq O$ 是紧的，因此存在 V 中的一个开凸零邻域 W_α，使得

$$f(\overline{U_\alpha}) + W_\alpha \subseteq O.$$

鉴于 M 的仿紧性，存在 M 的一个从属局部有限开覆盖 $(U_i)_{i \in I}$，以及常值映射 $g_i \colon M \to V$，使得对所有 $y \in U_i \cap U_\alpha$，都有

$$g_i(y) - f(y) \in W_\alpha.$$

令 $(\lambda_i)_{i \in I}$ 为从属于 $(U_i)_{i \in I}$ 的单位分解，并定义$g := \sum_i \lambda_i g_i \colon M \to V$. 由于此和是局部有限的，它定义了一个$C^s$函数 $M \to V$，且在 U_α 上有 $g - f \in W_\alpha$，因为 W_α 是凸的。这意味着

$$g(U_\alpha) \subseteq f(U_\alpha) + W_\alpha \subseteq O.$$

此外，若 $\operatorname{supp}(f)$ 是紧的且包含于开集 U 中，则我们可以假设每个集合 U_i 要么包含于 U 中，要么满足$U_i \cap \operatorname{supp}(f) = \emptyset$。对于 $U_i \cap \operatorname{supp}(f) = \emptyset$，我们于是令 $g_i = 0$，结论便得证。□

定理 *14.7.2.* 设 $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$、$M$ 和 N 是维数为 $\dim M < \infty$ 的 C^s流形。则 $C^s(M, N)$ 在 $C(M, N)_c$ 中稠密。设 $f \in C(M, N)$，且$K \subseteq M$ 闭，并且 f 在 $M \setminus K$ 上光滑。则对 $C(M, N)$ 中 f 的每个邻域 U_f，以及M中 K 的每个开邻域 U，都存在一个 C^s 函数 $g \colon M \to N$，使得 U_f 中的 $f = g$ 在 $M \setminus U$ 上成立。

证明。首先，我们需要 [Hr76，定理 2.5]的一个加细。设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集，V 为局部凸空间，$O \subseteq V$ 为开集，且 $f \colon U \to O$ 为连续映射。再设 $K \subseteq U$ 为闭集，$W \subseteq U$ 为开集，使得 f 在闭子集 $K \setminus W$的某个邻域上为 C^s。则所有在 K 的某个邻域上为 C^s、且在 $U \setminus W$ 上与 f重合的函数$h \in C(U, O)$所成的集合，与 $C(U, O)_c$中 f 的每一个邻域相交。在证明中，我们不妨假设 $O = V$，从而可以使用定理 14.7.1。其余论证可从 [Hr76，定理 2.5]照搬。

为完成证明，我们利用 M 有一个可数开覆盖，然后按照 [Hr76 定理 2.6] 中的方式进行归纳论证。给出的论证

[Hr76] 特别表明，如果 f 在 M 的一个紧子集 K之外光滑，且 U 是 K的一个开邻域，那么我们可以在 f的每个邻域中找到一个光滑函数 g，使其在 $M \setminus U$上与 f 一致。□

14.7.2 紧流形上的映射群

注 14.7.3. 若 F 是局部凸空间，且 X 是紧空间，则$C(X, F)$关于一致收敛拓扑是局部凸空间（引理 A.6.24(g)）。

若 $U \subseteq F$是开子集，则 $C(X, U) = \lfloor X, U \rfloor$是$C(X, F)$的开子集。现在设 $U_j \subseteq F_j$、 $j = 1, 2$是序列完备局部凸空间中的开子集，且 $\varphi\colon U_1 \to U_2$ 是光滑映射。我们考虑映射

$$\varphi_X : C(X, U_1) \to C(X, U_2), \quad \gamma \mapsto \varphi \circ \gamma.$$

由命题 1.7.1， φ_X 是光滑的。

定义 14.7.4.若 K 是李群，且 X 是紧空间，则赋予一致收敛拓扑的$C(X, K)$是李群，其李代数为 $C(X, \mathfrak{k})$（这可由定理 5.4.2 的证明在 $r = 0$上的特例推出）。关键在于验证典范局部坐标图中的求逆和乘法是光滑的，而这可由注 14.7.3 得出。

引理 14.7.5。设 M 是一个紧流形， K 是一个李群。则 $C^\infty(M, K)$ 在 $C(M, K)_c$ 中稠密。特别地，李群 $C(M, K)_c$ 的每个连通分支都包含一个光滑映射。此外，我们有

$$C^\infty(M, K) \cap C(M, K)_0 = C^\infty(M, K)_0. \tag{14.4}$$

证明。 由于 K 是一个拓扑群， $C(M, K)$ 上的紧开拓扑与一致收敛拓扑相同（练习 C.2.6），后者使 $C(M, K)$ 成为一个李群，其李代数为 $C(M, \mathfrak{k})$（定理 5.4.2）。特别地， $C(M, K)$ 局部弧连通，因此第一个断言由定理 14.7.2 立即得出。

为验证 (14.4)，我们首先注意到，每个与单位元充分接近的光滑映射 $f\colon M \to K$，都与单位映射在 $C^\infty(M, K)$ 中同伦，因为其值域包含在一个与开凸集微分同胚的开单位元邻域内。现在，齐性意味着 $C^\infty(M, K)$关于紧开拓扑局部连通，因此其连通分支在更粗的紧开拓扑下也都是开集。这意味着 $C^\infty(M, K)$ 的连通分支在紧开拓扑下是闭集，因此 $C^\infty(M, K)_0$ 的闭包在 $C(M, K)$中既开又闭，因而与 $C(M, K)_0$ 重合，并满足 (14.4)。□

14.7.3 紧支撑函数群

在本小节中， M 是一个仿紧有限维光滑流形，而 K 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$。

引理 14.7.6. 对于 $C_c^\infty(M,K)$ 的每个紧子集 Y，存在一个紧子集 $X \subseteq M$，使得

$$Y \subseteq C_X^\infty(M,K) := \{f \in C^\infty(M,K) \colon f(M \setminus X) \subseteq \{e\}\}.$$

证明。设 $U \subseteq \mathfrak{k}$ 是一个开零邻域，且 $\varphi \colon U \to \varphi(U)$ 是一个满足 $\varphi(0) = e$ 的坐标图。那么存在一个开零邻域 $U_0 \subseteq U$，使得我们可以通过 $\varphi_G(f) := \varphi \circ f$ 得到 $G := C_c^\infty(M,K)$ 的局部坐标图（定理 5.4.2）。令

$$V := \{f \in C_c^\infty(M;\mathfrak{k}) \colon f(M) \subseteq U_0\}$$

并注意到

$$\varphi_G(V) = \{f \in C_c^\infty(M,K) \colon f(M) \subseteq \varphi(U_0)\}.$$

于是，对于每个 $f \in G$，集合 $f\varphi_G(V)$ 都是一个开邻域，并且映射

$$\varphi_f \colon V \to f\varphi_G(V), \quad \xi \mapsto f\varphi_G(\xi)$$

是一个微分同胚。设 $W \subseteq V$ 是一个闭零邻域，使得 $\varphi_G(W)\varphi_G(W) \subseteq \varphi_G(V)$。由于 $\varphi_G(W)$ 是所有集合 $\varphi_G(W)N$ 的交，其中 N 是 $C_c^\infty(M,K)$ 中的一个单位元邻域，$\varphi_G(W) \subseteq \varphi_G(V)$，因此 W 的闭性意味着 $\varphi_G(W)$ 是闭集。

由于紧集 Y 被开集 $f\varphi_G(W^0)$、$f \in Y$ 覆盖，因此存在 $f_1, \ldots, f_n \in Y$，使得

$$Y \subseteq f_1\varphi_G(W^0) \cup \ldots \cup f_n\varphi_G(W^0).$$

$\varphi_G(W)$ 的闭性意味着每个集合 $Y \cap f_j\varphi_G(W)$ 都是紧集，因此，对每个 j，闭集

$$\varphi_{f_j}^{-1}(Y \cap f_j\varphi_G(W)) = W \cap \varphi_{f_j}^{-1}(Y) \subseteq C_c^\infty(M;\mathfrak{k}) = \varinjlim C_X^\infty(M;\mathfrak{k})$$

是紧集，这意味着存在一个紧子集 $X_j \subseteq M$，使得 $\varphi_{f_j}^{-1}(Y \cap f_j\varphi_G(W)) \subseteq C_{X_j}^\infty(M;\mathfrak{k})$（引理 14.1.24）。设

$$X := X_1 \cup \ldots \cup X_n \cup \operatorname{supp}(f_1) \cup \ldots \cup \operatorname{supp}(f_n).$$

那么 X 是紧的，且 $Y \subseteq C_X^\infty(M,K)$。 □

引理 14.7.7。 设 Y 是一个紧空间，且 $f \colon Y \to C_c^\infty(M,K)$ 是一个连续映射。那么存在一个紧子集 $X \subseteq M$ 和一个连续映射 $f_X \colon Y \to C_X^\infty(M,K)$，使得包含映射 $\eta_X \colon C_X^\infty(M,K) \to C_c^\infty(M,K)$ 满足 $f = \eta_X \circ f_X$。

证明。由 $C_c^\infty(M;\mathfrak{k})$ 是空间$C_X^\infty(M;\mathfrak{k})$的严格归纳极限、 $X \subseteq M$是紧的，以及李群 $C_c^\infty(M,K)$ 的自然图册的描述可知，对于每个紧子集 $X \subseteq M$，包含映射 $C_X^\infty(M,K) \hookrightarrow C_c^\infty(M,K)$ 都是拓扑嵌入。

由于 $C_c^\infty(M,\ K)$ 是豪斯多夫的，集合 $f(Y)$ 是紧的。根据引理 14.7.6，存在一个紧子集 $X \subseteq M$，使得 $f(Y) \subseteq C_X^\infty(M,\ K)$。令 $f_X\colon Y \to C_X^\infty(M,\ K)$ 表示 f 到 $C_X^\infty(M,\ K)$ 的余限制。由于η_X 是拓扑嵌入，映射 f_X 是连续的。它显然满足 $f = \eta_X \circ f_X$。□

命题 14.7.8。设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 M 的一个穷竭，即 $X_n \subseteq M$ 是紧的，且 $X_n \subseteq X_{n+1}^0$ 和 $M = \bigcup_n X_n$。那么映射

$$\varinjlim C_{X_n}^\infty(M,K) \to C_c^\infty(M,K)$$

是弱同伦等价。特别地，

$$\pi_m(C_c^\infty(M,K)) \cong \varinjlim \pi_m(C_{X_n}^\infty(M,K)) \quad \textit{for every} \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

证明。引理 14.7.7 表明，每个连续映射 $f\colon \mathbb{S}^m \to C_c^\infty(M,K)$ 都可经由某个包含映射 $C_{X_n}^\infty(M,K) \to C_c^\infty(M,K)$ 分解。若两个这样的映射f_1, f_2同伦，则每个同伦 $h\colon \mathbb{S}^m \times [0,1] \to C_c^\infty(M,K)$ 也可经由某个群 $C_{X_k}^\infty(M,K)$ 分解。这表明自然映射

$$\varinjlim \pi_m(C_{X_n}^\infty(M,K)) \cong \pi_m(\varinjlim C_{X_n}^\infty(M,K)) \to \pi_m(C_c^\infty(M,K))$$

是双射，即连续映射 $\varinjlim C_{X_n}^\infty(M,K) \to C_c^\infty(M,K)$ 是弱同伦等价。□

注记 14.7.9。与命题 14.7.8 的证明类似的论证表明，该映射

$$\varinjlim C_{X_n}(M,K) \to C_c(M,K)$$

是弱同伦等价。

接下来我们证明该映射

$$C_c^\infty(M,K) \to C_c(M,K)$$

是弱同伦等价，因此 $C_c^\infty(M,K)$ 的同伦群是相应的 $C_X(M,K)$ 的同伦群的极限，其中$X \subseteq M$ 是一个带边界紧子流形。这些群更容易处理，因为它们同构于 $C_*(X/\partial X,K)$，其中 $X/\partial X$ 是一个紧空间，且以 ∂X 的像为基点。

若 M 是带边紧流形，则同伦群$\pi_m(C_*(M/\partial M,\ K))$可能很容易求得（参见第14.8节）。若 ∂M 为空，则我们将群 $C_*(M/\partial M,\ K)$与 $C(M,\ K)$视为相同。

引理 14.7.10。设 $X_1, X_2 \subseteq M$ 为紧子集，且 $X_1 \subseteq X_2^0$和 $f \in C_{X_1}(M, K)$。那么 f的每个邻域都包含一个映射 $f' \in C^\infty_{X_2}(M, K)$。同态的像

$$\eta\colon \pi_0(C^\infty_{X_2}(M,K)) \to \pi_0(C_{X_2}(M,K))$$

包含 $\pi_0(C_{X_1}(M,K))$ 的像。此外，若 f 包含于单位连通分支 $C_{X_1}(M,K)_0$，中，那么我们可以选取 $f' \in C^\infty_{X_2}(M,K)_0$。

证明。第一个断言由定理 14.7.2 得出。由于群 $C_X(M,K)$ 和 $C^\infty_X(M,K)$ 是李群，它们的连通分支是开集，因此 $C_{X_2}(M,K)$ 中每个与 $C_{X_1}(M,K)$ 相交的连通分支都包含一个光滑元素。

若映射 $f \in C_{X_1}(M,K)$ 充分接近 e，具体而言，若 $f(M) \subseteq V$，其中某个 e-邻域 $V \subseteq K$ 与开凸集微分同胚，则可找到 $f_1 \in C^\infty_{X_2}(M,K)$，使得 $f_1(M) \subseteq V$。任意两个光滑映射 $f_1, f_2 \in C^\infty_{X_2}(M,K)$，只要满足 $f_j(M) \subseteq V$，就光滑同伦，因此属于 $C^\infty_{X_2}(M,K)$ 的同一个连通分支。

若 $f \in C_{X_1}(M,\ K)$ 包含于单位连通分支中，则存在一条连续曲线 $\gamma\colon [0,1] \to C_{X_1}(M,\ K)$，满足 $\gamma(0) = e$ 且 $\gamma(1) = f$。对于足够精细的剖分 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$，我们现在可以找到光滑映射 $f_j \in C^\infty_{X_2}(M,\ K)$，使其在如下意义下接近 $\gamma(t_j)$：$(f_j^{-1} \cdot \gamma(t_i))(M) \subseteq V$；其中对于 $j < N$，映射 f_j 和 f_{j+1} 光滑同伦。因此，f_N 包含于 $C^\infty_{X_2}(M,\ K)$ 的单位连通分支中。□

引理 14.7.11。映射 $\iota\colon C^\infty_c(M,K) \to C_c(M,K)$ 诱导一个同构

$$\pi_0(\iota)\colon \pi_0(C^\infty_c(M,K)) \to \pi_0(C_c(M,K)).$$

证明。$\pi_0(\iota)$ 的满射性直接由引理 14.7.10 得出。若 $f \in C^\infty_c(M,K)$ 满足 $[f] \in \ker \pi_0(\iota)$，则存在一个紧子集 $X \subseteq M$以及一个连续映射 $\gamma\colon [0,1] \to C_X(M,K)$，满足 $\gamma(0) = e$ 且 $\gamma(1) = f$（引理 14.7.7）。令 $Y \subseteq M$ 为一个满足 $X \subseteq Y^0$的紧子集。于是，引理 14.7.10 表明，我们可以用处于 $C^\infty_Y(M,K)$ 单位连通分支中的光滑函数 f'逼近 f。特别地，f 包含于 $C^\infty_Y(M,K)$ 的单位连通分支中，因此也包含于 $C^\infty_c(M,K)$ 的单位连通分支中。这表明 $\pi_0(\iota)$ 是单射。□

固定一个基点 $x_M \in M$，并且在任意李群 K 中，我们都将单位元 e 视为基点。我们用 $C^\infty_*(M,\ K) \subseteq C^\infty(M,\ K)$表示保基点映射构成的子群，并注意到

$$C^\infty(M,K) \cong C^\infty_*(M,K) \rtimes K \tag{14.5}$$

作为李群，其中我们将 K 与常值映射的子群等同。这一关系已经导出

$$\pi_k(C^\infty(M,K)) \cong \pi_k(C^\infty_*(M,K)) \times \pi_k(K) \quad \text{for} \quad k \geq 1 \tag{14.6}$$

and

$$\pi_0(C^\infty(M,K)) \cong \pi_0(C^\infty_*(M,K)) \rtimes \pi_0(K). \tag{14.7}$$

注 14.7.12.若 K 是一个拓扑群，则弧分量的群 $\pi_0(K)$通过自同构自然地作用于群 $\pi_k(K)$、 $k \in \mathbb{N}_0$，经由

$$[g].[\sigma] := [c_g \circ \sigma], \quad \text{where} \quad c_g(h) = ghg^{-1}.$$

该作用非平凡的一个典型例子是群 $K = \mathsf{O}_2(\mathbb{R}) \cong \mathsf{SO}_2(\mathbb{R}) \rtimes \{e, \sigma\}$，其中 σ 是线性反射。于是 $\pi_0(K) = \{e, [\sigma]\}$，且 $[\sigma]$ 通过求逆作用在 $\pi_1(K) \cong \mathbb{Z}$ 上。

注 14.7.13.（ $\pi_0(K)$ 在高阶同伦群上的作用）对每个拓扑群 K、单位元的弧连通分支 K_a 以及每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\pi_k(K) \cong \pi_0(C_*(\mathbb{S}^k, K)) = \pi_0(C_*(\mathbb{S}^k, K_a)) = \pi_0(C(\mathbb{S}^k, K_a)). \tag{14.8}$$

在引理 14.8.1 中我们将看到，对 $k \geq 1$ 和 $\ell \in \mathbb{N}_0$， $\pi_0(C_*(\mathbb{S}^k, K))$ 在 $\pi_\ell(C_*(\mathbb{S}^k, K))$ 上平凡作用。因此 (14.8) 蕴含 $\pi_k(K)$ 在 $\pi_m(K)$ 上的相应作用对 $m \geq k \geq 1$是平凡的。

下面的定理是本节的两个主要结果之一。它提供了一个重要工具，可用相应的连续映射群来确定紧支撑光滑映射群的同伦群。

定理 14.7.14。若 M 是连通的 σ-紧有限维流形，且 K 是李群，则包含映射 $C^\infty_c(M, K) \to C_c(M, K)$ 是弱同伦等价。若 M 紧且 $x_M \in M$ 是基点，则包含映射

$$C^\infty_*(M,K) \to C_*(M,K) := \{f \in C(M,K) \colon f(x_M) = e\} \tag{14.9}$$

是弱同伦等价。

证明。我们必须证明该包含映射诱导一个同构

$$\pi_k(C^\infty_c(M,K)) \to \pi_k(C_c(M,K)) \quad \text{for each} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

对于 $k = 0$ ，这就是引理 14.7.11。若 M 是紧的，则

$$\pi_0(C^\infty_c(M,K)) = \pi_0(C^\infty(M,K)) \cong \pi_0(C^\infty_*(M,K)) \rtimes \pi_0(K)$$

and

$$\pi_0(C_c(M,K)) = \pi_0(C(M,K)) \cong \pi_0(C_*(M,K)) \rtimes \pi_0(K),$$

从而(14.9)由引理 14.7.11得出。我们仅注意到，若$(f_t)_{0\le t\le 1}$是 $C_c^\infty(M,K)$中 f_0 与 f_1 之间的一个同伦，且 $x_M \in M$ 是一个基点，则 $f_t(x)f_t(x_M)^{-1}$ 是 $C_*^\infty(M,K)$中 f_0 与 f_1 之间的一个同伦。

接下来，我们假设 $k \geq 1$，并注意到包含映射

$$\begin{aligned} C_*(\mathbb{S}^k, C_c^\infty(M,K)) = C_*(\mathbb{S}^k, C_c^\infty(M,K)_a) \hookrightarrow C(\mathbb{S}^k, C_c^\infty(M,K)_a) \\ \hookrightarrow C(\mathbb{S}^k, C_c(M,K)_a) \hookrightarrow C(\mathbb{S}^k, C_c(M,K)) \cong C_c(\mathbb{S}^k \times M, K) \end{aligned}$$

（参见引理 14.7.6）是李群之间的连续同态，其中

$$C(\mathbb{S}^k, C_c(M,K)_a) \hookrightarrow C(\mathbb{S}^k, C_c(M,K))$$

是开嵌入。对于连通分支群，当$k \geq 1$ 满足（14.8）时，我们得到同态

$$\begin{aligned} \pi_k(C_c^\infty(M,K)) &\cong \pi_0\big(C_*(\mathbb{S}^k, C_c^\infty(M,K))\big) \cong \pi_0\big(C(\mathbb{S}^k, C_c^\infty(M,K)_a)\big) \\ &\to \pi_0\big(C(\mathbb{S}^k, C_c(M,K)_a)\big) \cong \pi_k\big(C_c(M,K)\big). \end{aligned}$$

若 $f\colon \mathbb{S}^k \times M \to K$ 是一个紧支撑连续映射，对应于 $C_*(\mathbb{S}^k; C_c(M, K)_a)$ 中的一个元素，那么引理 14.7.10 首先表明，f 的每个邻域都包含一个紧支撑光滑映射。因此，根据上述开性论证，$C_c(\mathbb{S}^k \times M, K)$ 的每个连通分支都包含 $C(\mathbb{S}^k, C_c^\infty(M, K))_a$ 中的一个元素。这意味着同态 $\pi_k(C_c^\infty(M, K)) \to \pi_k(C_c(M, K))$ 是满射。

要证明它是单射，设 $\sigma \in C\big(\mathbb{S}^k, C_c^\infty(M,K)_a\big)$ 满足$\sigma \in C\big(\mathbb{S}^k, C_c(M,K)_a\big)_a \cong C_c(\mathbb{S}^k \times M, K)_a$。由引理 14.7.11，可得

$$C_c^\infty(\mathbb{S}^k \times M, K) \cap C_c(\mathbb{S}^k \times M, K)_a \subseteq C_c^\infty(\mathbb{S}^k \times M, K)_a,$$

因此，通过用 $C_c^\infty(\mathbb{S}^k \times M, K)$ 中的元素逼近 σ（引理 14.7.10），我们甚至可以用 $C_c^\infty(\mathbb{S}^k \times M, K)_a$ 中的元素逼近它，这意味着 σ 属于 $C\big(\mathbb{S}^k, C_c^\infty(M,K)_a\big)$ 的单位连通分支。这证明同态 $\pi_k(C_c^\infty(M,K)) \to \pi_k(C_c(M,K))$ $k \in \mathbb{N}_0$, 是同构。□

注记 14.7.15。定理 14.7.14 也可以扩展到非连通的σ-紧流形 M，如下所示。设 $M = \bigcup_{j\in J} M_j$ 是 M 按连通分支的分解 M_j。这里可以使用

$$C_c(M,K) = \bigoplus_{j\in J} C_c(M_j, K), \tag{14.10}$$

并且，对于每个紧子集 $X \subseteq M$，我们都有有限和分解

$$C_X(M,K) = \bigoplus_{X\cap M_j \neq \emptyset} C_{X\cap M_j}(M_j, K).$$

如果 M 有无穷多个（因而至多可数个）连通分支，那么 (14.10) 的右端带有与 $C_c(M;\mathfrak{k})$ 上的局部凸直和拓扑相对应的李群拓扑（参见定理 11.4.1）。

注 14.7.16。如果 K 是一个连通的弗雷歇–李群，且 M 是一个紧流形，那么 $C^\infty(M,K)$ 也是一个弗雷歇–李群（定理 5.4.2），因此结合定理 14.1.27 和定理 14.7.14 可知，包含映射 $C^\infty(M,K)\hookrightarrow C(M,K)$ 是一个同伦等价。

下面的引理 14.7.17 和命题 14.7.18 为连续映射群的同伦类型提供了更多信息。

引理 14.7.17。如果 M 是一个局部紧空间，那么包含映射

$$\eta\colon C_c(M,K)\to C_0(M,K)$$

诱导出一个同构 $\pi_0(C_c(M,K))\to\pi_0(C_0(M,K))$。

证明。设 $f\in C_0(M,K)$。那么存在一个紧子集 $X\subseteq M$，使得 $f(M\setminus X)$ 包含于一个单位元邻域 $U_K\subseteq K$ 中；对该邻域，存在一个凸开零邻域 $U\subseteq\mathfrak{k}$ 以及一个微分同胚 $\varphi\colon U\to U_K$，满足 $\varphi(0)=e$。取一个连续函数 $h\in C_c(M;\mathbb{R})$，它在 X 上恒为 1，且满足 $h(M)\subseteq[0,1]$，据此定义函数 $f_h\in C_c(M,K)$：在 X 上令 $f_h=f$，在 $M\setminus X$ 上令 $f_h(m)=\varphi\big(h(m)\varphi^{-1}(f(m))\big)$。于是

$$F\colon M\times[0,1]\to K,\quad F(x,t):=f_{t+(1-t)h}(x)$$

是 $f=f_1$ 与 f_h 之间的同伦，并且我们看到 $\pi_0(\eta)$ 是满射。

类似的论证表明，对于 $f,g\in C_c(M,K)$，在 $C_0(M,K)$ 中连接 f 和 g 的任意路径，都可以变形为一条完全位于 $C_X(M,K)$ 内的路径，其中 X 是 M 的紧子集。因此 $\pi_0(\eta)$ 是单射。□

下文中，我们用 $M_\infty=M\cup\{\infty\}$ 表示 M 的单点紧化。这是唯一确定的紧空间，它包含 M 作为开子空间，且该子空间的补集是一个点，记作 ∞。注意，

$$C_0(M,K)\cong C_*(M_\infty,K)\tag{14.11}$$

对每个拓扑群 K 均成立。

命题 14.7.18。如果 M 是局部紧空间，那么包含映射 $\eta\colon C_c(M,K)\to C_0(M,K)$ 是弱同伦等价。

证明. 对每个紧空间 X，我们有拓扑群的一个嵌入

$$C(X,C_0(M,K))\cong C(X,C_*(M_\infty,K))\hookrightarrow C(X,C(M_\infty,K))\cong C(X\times M_\infty,K),$$

从而得到同构

$$C(X, C_0(M,K)) \cong C_0(X \times M, K).$$

根据引理 14.7.17，对于每个 $f \in C_0(X \times M,\ K)$，都存在某个紧子集 $Y \subseteq M$ 以及一个连续映射 $f_Y \in C(X,\ C_Y(M,\ K)) \subseteq C(X \times Y,\ K)$，它与 f 同伦。将同样的论证用于 $[0,1] \times X$ 而非 X，可知包含映射 $C_c(M,\ K) \to C_0(M,\ K)$ 在同伦类层面上诱导出一个双射 $[X, C_c(M,\ K)] \to [X, C_0(M,\ K)]$。

将此应用于 $X := \mathbb{S}^k$, $k \in \mathbb{N}$，由引理 14.7.17 可得，自然映射

$$\begin{aligned}\pi_k(C_c(M,K)) &\cong [\mathbb{S}^k, C_c(M,K)]_* \cong [\mathbb{S}^k, C_c(M,K)_a] \\ &\to [\mathbb{S}^k, C_0(M,K)_a] \cong [\mathbb{S}^k, C_0(M,K)]_* \cong \pi_k(C_0(M,K))\end{aligned}$$

是双射，因此是群同构。 □

结合命题 14.7.18 与定理 14.7.14，我们得到：

定理 14.7.19。对于每个 σ-紧连通有限维流形 M 和每个李群 K，包含映射

$$C_c^\infty(M,K) \to C_0(M,K) \cong C_*(M_\infty, K)$$

是弱同伦等价。

例 14.7.20。对于满足 $M_\infty \cong \mathbb{S}^n$ 的 $M = \mathbb{R}^n$，由定理 14.7.19 可得，对每个 $k \in \mathbb{N}_0$：

$$\pi_k(C_c^\infty(\mathbb{R}^n, K)) \cong \pi_k(C_*(\mathbb{R}^n_\infty, K)) \cong \pi_k(C_*(\mathbb{S}^n, K)) \cong \pi_{k+n}(K).$$

引理 14.7.21。设 M 和 N 是有限维光滑流形，且 $\varphi\colon\ N \to M$ 是光滑真映射。

(i)映射

$$\varphi_K\colon C_c^\infty(M,K) \to C_c^\infty(N,K), \quad f \mapsto f \circ \varphi$$

是李群态射。

（ii）令 $\varphi_\infty\colon\ M_\infty \to N_\infty$ 表示 φ 到单点紧化的连续延拓。那么，对于每个 $k \in \mathbb{N}_0$，映射

$$\pi_k(\varphi_K)\colon \pi_k(C_c^\infty(M,K)) \to \pi_k(C_c^\infty(N,K))$$

仅依赖于 φ_∞ 在带基点同伦类集合 $[M_\infty, N_\infty]_*$ 中的同伦类。

证明。 (i) 显然， φ_K 将 $C_c^\infty(N,K)$映射到 $C_c^\infty(M,K)$，且它是一个群同态。因此，只需证明其在某个单位元邻域内的光滑性。

设 $U \subseteq K$ 是一个开单位元邻域，且 $\psi\colon U \to W$ 是 K的一个坐标图，其中 $W \subseteq \mathfrak{k}$ 是一个开子集，且 $\psi(e) = 0$。那么存在一个开零邻域 $V \subseteq W$，使得

$$C_c^\infty(N, \psi^{-1}(V)) := \{f \in C_c^\infty(N,K)\colon f(N) \subseteq \psi^{-1}(V)\}$$

是 $C_c^\infty(N, K)$ 的一个开子集（定理 11.3.1）。现在只需证明映射

$$C_c^\infty(M,V) \to C_c^\infty(N,V), \quad f \mapsto f \circ \varphi$$

是光滑的。由于该映射是一个线性映射的限制，我们只需证明它是连续的。

对于每个紧子集 $X \subseteq M$，我们有

$$C_X^\infty(M,K) \circ \varphi \subseteq C_{\varphi^{-1}(X)}^\infty(M,K),$$

因此，由以下观察可得所述结论：对于每个 $n \in \mathbb{N}$，当视为 $C(T^n(N)\ \mathfrak{k})_c$的一个元素时，映射 $d^n(f \circ \varphi)$ 关于 f 连续依赖（参见命题 1.7.11）。

(ii) 令 $\eta_M\colon C_c^\infty(M, K) \to C_*(M_\infty, K)$ 表示自然包含映射。则 $\eta_N \circ \varphi_K = \widetilde{\varphi}_K \circ \eta_M$ 成立，其中

$$\widetilde{\varphi}_K\colon C_*(M_\infty, K) \to C_*(N_\infty, K), \quad f \mapsto f \circ \varphi_\infty.$$

由定理 14.7.19 可知，映射 η_M 和 η_N 是弱同伦等价。因此，只需证明映射 $\pi_k(\widetilde{\varphi}_K)$ 仅取决于 φ的同伦类。若 φ，$\psi\colon M \to N$是恰当且光滑的，并且 φ_∞ 和 ψ_∞ 同伦，那么不难看出，$\widetilde{}$映射 $\widetilde{\varphi}_K$ 和 ψ_K 同伦，因而在同伦群上诱导相同的同态。□

14.7.4 全纯映射群

设 M 是一个*Stein* 流形，即可以实现为某个 $\mathbb{C}^n$的闭子流形的复流形。若 G 是一个复 Banach–Lie 群，则群 $C(M, G)$ 和 $\mathrm{Hol}(M, G)$ 关于 M上的紧子集上一致收敛拓扑，都是可度量化拓扑群。一般而言，这些群不是李群；刻画那些使它们成为李群的 Stein 流形 M 是一个有趣的开放问题。我们有一个自然包含映射

$$\eta\colon \mathrm{Hol}(M,G) \hookrightarrow C(M,G)_{\mathrm{c.o.}},$$

并且可以证明，该包含映射是弱同伦等价。这可以归结为冈原则 [Gr58a，定理 I，第 268] 页，其中断言

该包含映射 η 在连通分支层面上诱导出一个双射。此外，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，群 $C(\mathbb{S}^k, G)$ 也是一个复 Banach–李群，因此 Oka 原理适用于拓扑群

$$\mathrm{Hol}(M, C(\mathbb{S}^k, G)) \cong C(\mathbb{S}^k, \mathrm{Hol}(M, G)).$$

当 $M = \Sigma \backslash P$ 时，这些结果尤其值得关注，其中 Σ 是紧黎曼曲面，而 $P \subseteq \Sigma$ 是有限集（参见下文小节 14.8.5）。

14.8 具体映射群

本节将仔细考察球面的乘积（尤其是环面）以及带边界的紧曲面上的映射群。

设 K 是一个连通李群，M 是一个紧连通流形。我们将相应的映射群记为 $C^\infty(M, K)$。在前一小节中，我们已经看到包含映射

$$C^\infty(M, K) \hookrightarrow C(M, K)$$

是一个弱同伦等价（定理 14.7.14），因此可以通过连续映射群来确定光滑映射群的同伦群，这要容易得多。对于紧支光滑映射，我们同样有一个弱同伦等价

$$C_c^\infty(M, K) \hookrightarrow C_*(M_\infty, K).$$

受这些约化的启发，本节研究形如 $C_*(X, K)$ 的拓扑群的同伦群，其中 K 是拓扑群，而 (X, x_0) 是带基点紧空间。

14.8.1 连通分支群

本节首先考察弧连通分支群

$$[X, K]_* = \pi_0(C_*(X, K))$$

，并用 K_a 表示 K 中单位元所在的弧连通分支。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\pi_k(K) = [\mathbb{S}^k, K]_* \cong \pi_0(C_*(\mathbb{S}^k, K)) \cong \pi_0(C_*(\mathbb{S}^k, K_a)). \tag{14.12}$$

对于两个带基点空间 (X, x_0) 和 (Y, y_0)，我们将它们的楔积定义为

$$X \wedge Y := (X \times Y)/(X \vee Y),$$

其中

$$X \vee Y := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \tag{14.13}$$

是它们的 楔和。对于 X， Y 局部紧的情况，我们进而得到一个同胚

$$C_*(X, C_*(Y, Z)) \cong C_*(X \wedge Y, Z)$$

根据同胚

$$C(X, C(Y, Z)) \cong C(X \times Y, Z)$$

（命题 A.6.17）。

对于带基点拓扑空间（X， x_0），令 $SX := \mathbb{S}^1 \wedge X$ 表示 X的悬挂。将此过程迭代 k 次，得到

$$S^k X = (\mathbb{S}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbb{S}^1) \wedge X \cong \mathbb{S}^k \wedge X$$

（[Bre93]）。鉴于（14.12），我们有

$$\pi_k(C_*(X, K)) \cong \pi_0\big(C_*(\mathbb{S}^k, C_*(X, K))\big) \cong [\mathbb{S}^k \wedge X, K]_*. \tag{14.14}$$

这段讨论已经表明，进一步了解球面与另一空间的乘积空间十分重要。下面的引理将对此情形提供一些见解。

引理 14.8.1. 设 K 为拓扑群，(X, x_0) 为带基点紧空间，且 $p \geq 1$。则对于 $G := C_*(\mathbb{S}^p, K)$，群 $\pi_0(G) = [\mathbb{S}^p, K]_*$ 在 $[X, G]_*$ 与 $[X, G]$ 上由如下方式定义的共轭作用

$$[\sigma].[f] := [\sigma * f], \quad (\sigma * f)(x, y) := \sigma(y) f(x, y) \sigma(y)^{-1}$$

对于 $\sigma \in C_*(\mathbb{S}^p, K)$ $f \in C(X, G) \subseteq C(X \times \mathbb{S}^p, K)$，是平凡的。

证明. 设 $\sigma \in G$ 与 $f\colon\ X \to G = C_*(\mathbb{S}^p,\ K)$ 为连续映射。我们将映射 $X \to C_*(\mathbb{S}^p,\ K)$ 等同于在 $X \times \{y_0\}$上消失的映射 $X \times \mathbb{S}^p \to K$，其中 $y_0 \in \mathbb{S}^p$ 为基点。

由于 $p \geq 1$，我们可以选取 $[\sigma] \in [\mathbb{S}^p, K]$ 的一个代表元，其支集位于 $\mathbb{S}^p$ 的上半球，以及 $[f] \in [X, G]$ 的一个代表元，其支集位于 X 与 $\mathbb{S}^p$的下半球的乘积中。于是 $\sigma * f = f$，由此可得该作用是平凡的。□

下面的定理提供了关于群 $[X, K]$ 的重要信息（参见 [Whi78，定理 X.3.6]）：

定理 14.8.2. 设 $X = \mathbb{S}^{p_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{p_n}$、 $p_j > 0$ 是由球面组成的乘积，且 K 是一个弧连通拓扑群。那么以下断言成立：

(1) $[X, K] \cong \pi_0(C_*(X, K))$ 是 $< n + 1$ 阶幂零的。(2)
$[X, K]$ 在 $\pi_m(C_*(X, K))$ 上平凡作用，对于 $m \geq 1$。

证明。我们对 X 中因子的数量 n 进行归纳法。

(a) 首先，假设 $X = \mathbb{S}^p$ 是一个 p 维球面。由于 K 是弧连通的，$[X, K] = [X, K]_* \cong \pi_p(K)$ 是阿贝尔群，即长度为 < 2 的幂零群。此外，对于 $p > 0$，群 $[X, K] \cong \pi_p(K) = \pi_0(C_*(\mathbb{S}^p, K))$ 在 $\pi_m(C_*(\mathbb{S}^p, K)) \cong [\mathbb{S}^m, C_*(\mathbb{S}^p, K)$ 上平凡作用，这是由引理 14.8.1 得出的。

(b) 现在假设该断言对所有由 n 个球面构成的乘积 X 都成立，并考虑群 $[X \times \mathbb{S}^m, K] = [X \times \mathbb{S}^m, K]_*$。令 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in \mathbb{S}^m$ 为基点，并选取 (x_0, y_0) 作为 $X \times \mathbb{S}^m$ 中的基点。

令 $p_1\colon X \times \mathbb{S}^m \to X$ 和 $p_2\colon X \times \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ 表示投影映射。于是我们有连续群同态

$$p_1^*\colon C_*(X, K) \to C_*(X \times \mathbb{S}^m, K), \quad p_2^*\colon C_*(\mathbb{S}^m, K) \to C_*(X \times \mathbb{S}^m, K).$$

另一方面，包含映射

$$q_1\colon X \to X \times \mathbb{S}^m, \quad x \mapsto (x, y_0), \quad q_2\colon \mathbb{S}^m \to X \times \mathbb{S}^m, \quad y \mapsto (x_0, y)$$

给出连续同态

$$q_1^*\colon C_*(X \times \mathbb{S}^m, K) \to C_*(X, K), \quad q_2^*\colon C_*(X \times \mathbb{S}^m, K) \to C_*(\mathbb{S}^m, K),$$

并且这些映射满足关系

$$q_1^* \circ p_1^* = \mathrm{id}, \quad q_2^* \circ p_2^* = \mathrm{id}, \quad q_1^* \circ p_2^* = e, \quad q_2^* \circ p_1^* = e.$$

因此我们得到拓扑群的短正合列

$$\mathbf{1} \to C_*(X \wedge \mathbb{S}^m, K) \hookrightarrow C_*(X \times \mathbb{S}^m, K) \xrightarrow{(q_1^*, q_2^*)} C_*(X, K) \times C_*(\mathbb{S}^m, K) \to \mathbf{1}$$

其连续截面由 $p_1^* \cdot p_2^*$ 给出。在连通分支的层面上，这个拓扑分裂的群短正合列诱导出一个短正合列

$$\mathbf{1} \to [X \wedge \mathbb{S}^m, K] \hookrightarrow [X \times \mathbb{S}^m, K] \xrightarrow{(q_1^*, q_2^*)} [X, K] \times [\mathbb{S}^m, K] \to \mathbf{1}. \quad (14.15)$$

群 $[X \wedge \mathbb{S}^m, K] \cong \pi_m(C_*(X, K))$ 和 $[\mathbb{S}^m, K] \cong \pi_m(K)$ 是阿贝尔群，而归纳假设意味着 $[X, K]$ 是长度为 $< n + 1$ 的幂零群。归纳假设还意味着 $[X, K]$ 通过共轭作用在 $[X \wedge \mathbb{S}^m, K]$ 上平凡作用，并且，根据引理 14.8.1，$\pi_m(K) = [\mathbb{S}^m, K]_*$ 在 $[X \wedge \mathbb{S}^m, K] \cong [X, C_*(\mathbb{S}^m, K)]_*$ 上也平凡作用。因此，延拓 (14.15) 是中心的，所以 $[X \times \mathbb{S}^m, K]$ 是长度为 $< n + 2$ 的幂零群。□

如果 K 是弧连通的，那么

$$\pi_0(C_*(X, K)) = [X, K]_* = [X, K] = \pi_0(C(X, K)),$$

而且这个群也自然作用于高阶同伦群

$$\pi_m(C(X, K)) \cong \pi_m(C_*(X, K)) \rtimes \pi_m(K).$$

为了分析这一作用，我们需要以下概念：

定义 14.8.3. (Samelson 乘积) 设 (X, x_0) 和 (Y, y_0) 是带基点紧空间， K 是拓扑群。对于 $f \in C_*(X, K)$ 和 $g \in C_*(Y, K)$，连续映射

$$[f, g] \in C(X \times Y, K), \qquad [f, g](x, y) := f(x)g(y)f(x)^{-1}g(y)^{-1}$$

映射 $X \vee Y$ 到 e，因此定义了一个连续映射

$$[f, g] \in C_*(X \wedge Y, K).$$

由此我们得到一个映射

$$C^{X,Y} \colon [X, K]_* \times [Y, K]_* \to [X \wedge Y, K]_*, \quad [[f], [g]] \mapsto [[f, g]]$$

称为萨梅尔森积([Whi78], [Sa53])。

注 14.8.4。萨梅尔森积特别给出一个映射

$$C^{\mathbb{S}^k,Y} \colon [\mathbb{S}^k, K]_* \times [Y, K]_* = \pi_k(K) \times [Y, K]_* \to [\mathbb{S}^k \wedge Y, K]_* \cong \pi_k(C_*(Y, K)),$$

并且，对于 $Y = \mathbb{S}^m$ ，它特化为一个映射

$$C^{\mathbb{S}^k,\mathbb{S}^m} \colon \pi_k(K) \times \pi_m(K) \to [\mathbb{S}^k \wedge \mathbb{S}^m, K]_* = [\mathbb{S}^{k+m}, K]_* = \pi_{k+m}(K). \quad (14.16)$$

注 14.8.5. 对于 $X = \mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$，由前述定理可知，群 $[X, K]$ 是长度为 ≤ 2 的幂零群。更具体地说，(14.15) 特化为一个中心扩张

$$\mathbf{1} \to \pi_{p+q}(K) \cong [\mathbb{S}^p \wedge \mathbb{S}^q, K] \hookrightarrow [X, K] \xrightarrow{q} \pi_p(K) \times \pi_q(K) \to \mathbf{1}. \quad (14.17)$$

$[X, K]$ 的交换子映射可经由一个双加性映射分解

$$C \colon \pi_p(K) \times \pi_q(K) \to \pi_{p+q}(K), \quad ([\alpha], [\beta]) \mapsto [p_1^*(\alpha)p_2^*(\beta)p_1^*(\alpha^{-1})p_2^*(\beta^{-1})]$$

（习题 14.8.11）。将右端明确写出后，我们看到 $C([\alpha], [\beta])$ 与 $X = \mathbb{S}^p$ 和 $Y = \mathbb{S}^q$ 的萨梅尔森积相同。

要找到非平凡的萨梅尔森积并非易事。对于酉群 $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$，Bott 在[Bo60]中详细研究了这一情形。在这种情况下

$$\pi_{2n}(\mathrm{U}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}/n!\mathbb{Z},$$

Bott 证明，对于 $r + s = n - 1$，存在适当的生成元$\alpha \in \pi_{2r+1}(\mathrm{U}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ 和 $\beta \in \pi_{2s+1}(\mathrm{U}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$，使得它们满足如下关系

$$C(\alpha, \beta) = r!s!\gamma$$

对于某个生成元 γ of $\pi_{2n}(\mathrm{U}_n(\mathbb{C}))$。

例 14.8.6。对于直极限群 $\mathrm{U}_\infty(\mathbb{C}) = \varinjlim \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$，所有偶数次同伦群都消失，而所有奇数次同伦群都同构于 $\mathbb{Z}$ （定理 14.5.3）。特别是，该群的所有萨梅尔森积都是平凡的（两个奇数之和为偶数）。对于其他经典群 $\mathrm{U}_\infty(\mathbb{H})$ 和 $\mathrm{O}_\infty(\mathbb{R})$，无限同伦群只会出现在模 4 同余于 3 的次数上（定理 14.5.3 ）。因此，这些群的所有萨梅尔森积都经过有限群。

14.8.2 通过悬挂约化

从现在起， K 将是一个拓扑群， X 将是一个紧空间。我们进一步假设 X 是弧连通的。在 X 中，我们固定一个基点 x_0；在所考虑的任何群中，我们都将单位元 e 视为基点。我们将$C_*(X,\ K)\ \subseteq\ C(X,\ K)$记作保基点映射的子群，并注意到

$$C(X,K) \cong C_*(X,K) \rtimes K \tag{14.18}$$

作为拓扑群，其中我们将 K 视为常值映射构成的子群。这便得到

$$\pi_k(C(X,K)) \cong \pi_k(C_*(X,K)) \times \pi_k(K) \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N} \tag{14.19}$$

and

$$\pi_0(C(X,K)) = [X,K] \cong [X,K]_* \rtimes \pi_0(K). \tag{14.20}$$

例 14.8.7（球面）。如果 $M = \mathbb{S}^m$ 是一个 m 维球面，那么对每个 k，我们得到

$$\pi_k(C_*(\mathbb{S}^m,K)) \cong [\mathbb{S}^k \wedge \mathbb{S}^m, K]_* \cong [\mathbb{S}^{k+m}, K]_* \cong \pi_{k+m}(K) \tag{14.21}$$

因此，根据 (14.19)

$$\pi_k(C(\mathbb{S}^m,K)) \cong \pi_{k+m}(K) \times \pi_k(K) \quad \text{for} \quad k > 0$$

and

$$\pi_0(C(\mathbb{S}^m,K)) = [\mathbb{S}^m, K] \cong \pi_m(K) \rtimes \pi_0(K).$$

例 14.8.8（环面）。设 $M = \mathbb{T}^m$ 是 m 维环面。那么

$$C(\mathbb{T}^m,K) \cong C(\mathbb{T}, C(\mathbb{T}^{m-1},K)) \cong C_*\big(\mathbb{T}, C(\mathbb{T}^{m-1},K)\big) \rtimes C(\mathbb{T}^{m-1},K) \tag{14.22}$$

这意味着

$$\pi_k(C(\mathbb{T}^m,K)) \cong \pi_{k+1}(C(\mathbb{T}^{m-1},K)) \oplus \pi_k(C(\mathbb{T}^{m-1},K)) \quad \text{for} \quad k \geq 1.$$

通过归纳法，我们得到

$$\pi_k(C(\mathbb{T}^m,K)) \cong \sum_{j=0}^{m} \pi_{k+j}(K)^{\binom{m}{j}} \quad \text{for} \quad k \geq 1. \tag{14.23}$$

对于 $m = 2$，特别可以得到

$$\pi_k(C(\mathbb{T}^2,K)) \cong \pi_k(K) \oplus \pi_{k+1}(K)^2 \oplus \pi_{k+2}(K) \quad \text{for} \quad k \geq 1,$$

这也可以由下文针对紧致带基点曲面的计算得出（参见定理 14.8.14）。对于 $k=0$，由 (14.22) 可得

$$[\mathbb{T}^m, K] = \pi_0(C(\mathbb{T}^m, K)) \cong \pi_1(C(\mathbb{T}^{m-1}, K)) \rtimes \pi_0(C(\mathbb{T}^{m-1}, K)),$$

因此，确定 $\pi_0(C(\mathbb{T}^m,\ K))$ 上的群结构，也涉及群 $\pi_0(C(\mathbb{T}^d,\ K))$ 对群 $\pi_k(C(\mathbb{T}^d,\ K))$ 的作用，其中 $d<m$。由于根据定理 14.8.2，$[\mathbb{T}^{m-1}, K]$ 在 $\pi_1(C_*(\mathbb{T}^{m-1},\ K))$ 上的作用是平凡的，因此其作用于

$$\pi_1(C(\mathbb{T}^{m-1}, K)) \cong \pi_1(C_*(\mathbb{T}^{m-1}, K)) \rtimes \pi_1(K)$$

形式为

$$[\sigma].([\alpha],[\beta]) = ([\alpha] + C([\sigma],[\beta]),[\beta])$$

因为模去正规子群 $\pi_1(C_*(\mathbb{T}^{m-1},\ K))$ 后，$[\mathbb{T}^{m-1}, K] = [\mathbb{T}^{m-1}, K]_*$ 的作用也平凡。由构造可直接得出

$$C\colon [\mathbb{S}^1, K]_* \times [\mathbb{T}^{m-1}, K]_* \to \pi_1(C_*(\mathbb{T}^{m-1}, K)) \cong [\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{T}^{m-1}, K]_*$$

是怀特海德积。最简单的非平凡情形出现在 $m=2$ 时，此时

$$[\mathbb{T}^2, K] \cong \big(\pi_2(K) \oplus \pi_1(K)\big) \rtimes \pi_1(K),$$

并且群结构涉及怀特海德积 $\pi_1(K) \times \pi_1(K) \to \pi_2(K)$。

14.8.3 通过收缩约化

设 $x_0 \in X$ 为一个基点，$Y \subseteq X$ 为包含 x_0 的闭子集。记 X/Y 为将 Y 压缩成一点所得的商空间，并将 Y 视为 X/Y 中的一个基点。于是有一个自然的群同态

$$q^*\colon C(X/Y,K) \to C(X,K), f \mapsto f\circ q \quad \text{with} \quad q^*\big(C_*(X/Y,K)\big) \subseteq C_*(X,K).$$

我们还有一个限制映射

$$R\colon C(X,K) \to C(Y,K)$$

由此得到一个正合列

$$\mathbf{1} \to C_*(X/Y,K) \to C(X,K) \to C(Y,K). \tag{14.24}$$

注记 14.8.9。（余纤维化）包含映射 $i\colon Y \hookrightarrow X$ 称为<样式 id='5'>余纤维化，如果对所有空间Z，偶对 (X,Y) 都具有同伦延拓性质（参见 [Bre93, 第 VII 节1]）。这意味着，若 $f\colon X \to Z$ 是连续映射，且 $h_Y \in C(Y,Z)$ 满足 $f|_Y \sim h_Y$，则存在 $h\colon X \to Z$，它是 h_Y 的连续延拓，并且存在将 $f|_Y$ 到 h_Y 的同伦延拓为 f 到 h 的同伦。

若 $Y \hookrightarrow X$ 是余纤维化，则由 [Bre93，推论 VII.10.3]可知，对于任意空间 Z，映射序列

$$[X/Y, Z]_* \to [X, Z]_* \to [Y, Z]_*$$

在带基点同伦类上诱导的映射在如下意义下是正合的： $[Y, Z]_*$ 中常值类的逆像由那些来自映射 $f\colon X/Y \to Z$ 的同伦类组成，即满足 $f(X) = \{*\}$ 的映射 $f\colon X \to Z$。

这可以直接看出如下。显然， $[X/Y, Z]_*$的像由那些限制到 Y 后恒等于基点的同伦类组成。反过来，如果 $f|_Y$ 同伦于常值映射 $*$，那么同伦~扩张性质给出一个与之同伦的映射 $f\colon X \to Z$，满足 $f(Y) = \{*\}$。

特别地，对于每个拓扑群 K，我们得到如下由群同态构成的正合列

$$[X/Y, K]_* \to [X, K]_* \to [Y, K]_* \quad \text{and} \quad [X/Y, K]_* \to [X, K] \to [Y, K].$$

注 14.8.10. 设 (X, x_0) 是一个弧连通的带基点拓扑空间。假设 Z 是一个弧连通的基点空间，并且具有一个~万有覆盖空间 $q_Z\colon Z \to Z$，也就是说， Z 是半局部单连通的~([Bre93])。那么，我们可以将 $C_*(X, Z)$ 识别为 $C_*(X, Z)$ 的子集，其中包括所有可以提升为带基点映射 $X \to Z$ 的映射。回想一下，映射 $f\colon X \to Z$ 可以提升到 Z，当且仅当 $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ 为零（[tD91, Satz 6.12]）。由于 X 是弧连通的，保基点的提升只要存在便是唯一的。因此，对于映射

$$\delta\colon C_*(X, Z) \to \operatorname{Hom}(\pi_1(X), \pi_1(Z)), \quad f \mapsto \pi_1(f).$$

因此，在同伦类层面上，我们得到映射

$$[X, \widetilde{Z}]_* \to [X, Z]_* \to \operatorname{Hom}(\pi_1(X), \pi_1(Z)).$$

由于每个覆盖都具有同伦提升性质（[tD00, Satz8.3]），所以映射 $[X, Z]_* \to [X, Z]_*$ 是单射。对于 $Z := K$ 为拓扑群的情形，我们因此得到一个由群同态构成的正合列

$$\mathbf{1} \to [X, \widetilde{K}]_* \to [X, K]_* \to \operatorname{Hom}(\pi_1(X), \pi_1(K)). \tag{14.25}$$

引理 14.8.11. 设 E 为向量空间， $\Gamma \subseteq E$ 为离散子群，$K := E/\Gamma$ 且 X 为仿紧、半局部单连通空间。则自然同态

$$\Phi\colon [X, K]_* \to \operatorname{Hom}(\pi_1(X), \pi_1(K)) = \operatorname{Hom}(\pi_1(X), \Gamma)$$

是一个同构。

~ ~证明。由于 $K \cong E$ 是可缩的，$[X,K]_*$ 是平凡的，因此由前面的讨论可知 Φ 是单射。剩下要证明 Φ 也是满射。

X 的仿紧性意味着，每个 X 上的主 E丛都有一个连续截面（利用单位分解即可轻易证明），因此是平凡的。现在令 $\gamma \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X)\ \pi_1(K))$，并构造由下式给出的 E-主丛

$$P_\gamma := (\widetilde{X} \times E)/\pi_1(X),$$

其中 $\pi_1(X)$从右侧按以下方式作用于 $X \times E$

$$(x,g).d := (x.d, g - \gamma(d)).$$

于是，连续截面 $\sigma\colon\ X \to P_\gamma$ 通过以下对应关系

$$\sigma(q_X(x)) = [x, f(x)]$$

~对应于满足以下条件的连续映射 $f\colon\ X \to E$

$$f(x.d) = f(x) - \gamma(d) \quad \text{for} \quad x \in \widetilde{X}, d \in \pi_1(X).$$

于是，¯$f(q_X(x)) := [f(x)]$ 定义了一个连续映射 $X \to K$，且 $\Phi([f]) =$¯γ。 □

注 14.8.12.（收缩）(a) 我们希望利用正合列 (14.24)，把计算 $C(X,K)$ 的同伦群这一问题归结为对可能更简单的群 $C(X/Y,K)$ 与 $C(Y,K)$ 的同一问题。为此，我们首先假设存在一个收缩 $r\colon\ X \to Y$，即满足 $r|_Y = \mathrm{id}_Y$ 的连续映射。于是

$$r^*\colon C(Y,K) \to C(X,K)$$

是限制同态的同态截面，因此

$$C(X,K) \cong C_*(X/Y,K) \rtimes C(Y,K)$$

是拓扑群的半直积。

一般而言，从 X 到 Y 的收缩可能不存在。更自然的假设是 $r|_Y \sim \mathrm{id}_Y$（$r|_Y$ 与单位元同伦）。因此我们采用这一较弱的假设。

首先我们考虑映射

$$\Phi\colon C(Y,K) \times C_*(X/Y,K) \to C(X,K), \quad (\alpha,\beta) \mapsto \beta \cdot (r^*\alpha).$$

于是 $R(\Phi(\alpha,\beta)) = r^*\alpha|_Y \sim \alpha$ 表明所诱导的同态

$$[X,K] \to [Y,K]$$

是满射的。其核由以下映射组成：这些映射在 Y 上的限制与常值映射 e 同伦。为了恰当地描述这个子群，

我们必须假设包含映射 $Y \hookrightarrow X$ 是余纤维化。于是，注 14.8.9 导出如下较长的正合列

$$[X/Y, K]_* \to [X, K] \to [Y, K] \to e,$$

其中，同态

$$[\sigma]\colon [Y, K] \to [X, K], \quad [\alpha] \mapsto [\alpha \circ r]$$

将到 $[Y, K]$ 的同态分裂。

(b) 对于局部可缩的弧连通空间 X，可以利用这些同构

$$\Phi\colon [X, \mathbb{T}]_* \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}), \quad [f] \mapsto \pi_1(f) \tag{14.26}$$

由引理 14.8.11，将同态 $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}$ 表示为 $\pi_1(f)$，其中 $f\colon X \to \mathbb{T}$ 是连续映射。

假设我们有一个子集 $Y \cong \mathbb{S}^1 \subseteq X$，使得包含映射是余纤维化，并且有一个连续映射 $r\colon X \to \mathbb{S}^1 \cong Y$，满足 $r|_Y \sim \mathrm{id}_Y$。这意味着存在一个同态 $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}$，它将包含映射的同伦类 $\mathbb{S}^1 \to Y \subseteq X$ 映到 1。于是，(a) 中的讨论适用于这种情形。

14.8.4 闭可定向曲面

在本小节中，Σ 表示一个亏格为的可定向紧曲面，而K 是一个任意的拓扑群。

注 14.8.13。我们回顾一下，Σ 可以通过从一个楔和开始构造为 CW复形

$$A_{2g} \cong \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1}_{2g}$$

$2g$个圆（参见 (14.13)）。我们将 a_1，b_1，$\ldots$，a_g，$b_g\colon \mathbb{S}^1 \to A_{2g}$ 记作 A_{2g} 的基本群的相应生成元；该基本群是由 $2g$ 个生成元生成的自由群。接着，我们考虑连续映射 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to A_{2g}$，它对应于交换子乘积

$$[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \in \pi_1(A_{2g}),$$

其中 $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ 表示一个交换子。现在，Σ 与如下空间同胚：将 $\partial\mathbb{B}^2 \cong \mathbb{S}^1$ 中的点与它们在 γ下经 A_{2g} 得到的像识别，即，

$$\Sigma \cong A_{2g} \cup_\gamma \mathbb{B}^2.$$

从这个意义上说，我们可以将 A_{2g} 视为 Σ的一个子集。将$\mathbb{B}^2$ 看作一个正则 $4g$ 边形颇有启发性，其中我们将边界上的某些点

粘合起来，使得边按逆时针顺序排列时，其序列对应于环路

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 \cdots a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

现在， A_{2g} 对应于模掉这些识别后的边界多边形。

这一过程表明，连续映射 $f\colon A_{2g} \to Z$ 到拓扑空间 Z 的映射可以延拓为映射 $\Sigma \to Z$ ，当且仅当相应映射 $\partial\mathbb{B}^2 \to Z$ 可以延拓到 $\mathbb{B}^2$的内部；这又意味着它是一条可缩曲线。最后，这可以表述为以下条件：

$$\pi_1(f)\colon \pi_1(A_{2g}) \cong \mathbb{Z}^{*2g} = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{2g} \to \pi_1(Z)$$

消去交换子 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 \cdots a_g^{-1} b_g^{-1}$，因此可因子化为一个同态 $\pi_1(\Sigma) \to \pi_1(Z)$。

反过来，若给定这样一个同态，那么我们可以将它提升为同态 $\pi_1(A_{2g}) \to \pi_1(Z)$，它可以表示为一个连续映射 $A_{2g} \to Z$。如上所述，这个映射可延拓到 Σ，由此可知该映射

$$C_*(\Sigma, Z) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), \pi_1(Z)), \quad f \mapsto \pi_1(f) \tag{14.27}$$

对于任意基点空间 Z，它都是满射。

定理 14.8.14。对于亏格为 g 的每个可定向曲面 Σ 和每个拓扑群 K，我们有一个同胚

$$C_*(\Sigma, K) \cong C_*(\mathbb{S}^2, K) \times C_*(\mathbb{S}^1, K)^{2g} \tag{14.28}$$

and

$$\pi_k(C_*(\Sigma, K)) \cong \pi_{k+2}(K) \times \pi_{k+1}(K)^{2g} \quad \textit{for all} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{14.29}$$

证明。 设 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ 是 $\pi_1(\Sigma)$ 的自然生成元，它们来自由 $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ 给出的映射 $\mathbb{S}^1 \to A_{2g} \hookrightarrow \Sigma$。由 (14.27)，对于满足 $\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}$ 且基点为 1 的 $Z = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ ，我们得到带基点连续映射 $\chi_1, \ldots, \chi_{2g}\colon \Sigma \to \mathbb{S}^1$，使得

$$\pi_1(\chi_j)(\gamma_i) \cong [\chi_j \circ \gamma_i] = \delta_{ij}.$$

我们甚至可以得到满足下式的映射

$$\chi_j \circ \gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i \neq j \\ \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1} & \text{for } i = j \end{cases} \tag{14.30}$$

如果我们从具有所需性质的连续映射 $\chi_j^0\colon A_{2g} \to \mathbb{S}^1$ 出发，并注意到所有这些映射都连续延拓到 Σ ，因为$\pi_1(\chi_j^0)\colon \pi_1(A_{2g}) \to \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$零化所有交换子，这是由于 $\mathbb{Z}$是阿贝尔的。

现在，对于每个拓扑群 K，我们得到限制同态的一个良好分裂

$$R\colon C_*(\Sigma,K)\to C_*(A_{2g},K)\cong C_*(\mathbb{S}^1,K)^{2g}$$

通过扩张同态

$$E\colon C_*(\mathbb{S}^1,K)^{2g}\to C_*(\Sigma,K),\quad (\alpha_1,\dots,\alpha_{2g})\mapsto(\alpha_1\circ\chi_1)\cdots(\alpha_{2g}\circ\chi_{2g}).$$

于是，由 (14.30) 可直接得到 $RE=\mathrm{id}$。我们得出

$$C_*(\Sigma,K)\to\ker(R)\times C_*(\mathbb{S}^1,K)^{2g},\quad f\mapsto(fE(R(f))^{-1},R(f))$$

是一个同胚，其逆映射由 $(\alpha,\beta)\ \mapsto\ \alpha E(\beta)$ 给出。接下来我们注意到

$$\ker R\cong C_*(\Sigma/A_{2g},K)\cong C_*(\mathbb{S}^2,K),$$

因此我们得到同胚 (14.28)，进而得到 (14.29)。□

注 14.8.15。设 Σ 是一个亏格为 $g\geq 1$ 的可定向曲面。~那么，Σ 的万有覆盖空间 Σ 可缩，这表明 Σ 唯一非平凡的同伦群是 $\pi_1(\Sigma)$。定理 14.8.14 和注 14.8.13 得到一个同态

$$[\Sigma,K]_*\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma),\pi_1(K))\cong\pi_1(K)^{2g},$$

其中 α 的核与 $\pi_2(K)=[\mathbb{S}^2,K]_*$同构，因此一般来说不是单射。这意味着，映射 $\Sigma\to K$ 的同伦类不能由同态序列 $\pi_k(\Sigma)\to\pi_k(K)$、$k\in\mathbb{N}_0$分类。如果 K是单连通的，那么由 (14.29) 可知，我们只需考虑 $[\Sigma,K]_*\cong\pi_2(K)$。

研究中心群扩张时，对前两个同伦群作出良好描述至关重要（参见第15.5节第3小节）。对于 $C_*(\Sigma,\ K)$，它们由下式给出：

$$\pi_1(C_*(\Sigma,K))\cong\pi_3(K)\times\pi_2(K)^{2g}\quad\text{and}\quad\pi_2(C_*(\Sigma,K))\cong\pi_4(K)\times\pi_3(K)^{2g}.$$

如果 K 是有限维李群，那么 $\pi_2(K)$ 消失，而 $\pi_4(K)$ 是挠群（注 14.2.3）。

14.8.5 带边界的可定向曲面

讨论完闭曲面上的映射群后，现在转而讨论带边界的可定向曲面。

设 X 为一个拓扑空间，K 为一个弧连通拓扑群，$Y\subseteq X$ 为一个闭子集。记

$$C(X,Y,K):=\{f\in C(X,K)\colon f(Y)=\{e\}\}.$$

命题 14.8.16。 设 Σ 为一个亏格为 g 的可定向曲面，$\emptyset \neq P \subseteq \Sigma$ 为一个有限子集，并且

$$C(\Sigma, P, K) := \{f \in C(\Sigma, K) \colon f(P) = \{e\}\}.$$

Then

$$\pi_k(C(\Sigma, P, K)) \cong \pi_{k+1}(K)^{2g+|P|-1} \times \pi_{k+2}(K) \quad \textit{for} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{14.31}$$

证明. 如上所述，我们用一个多边形来描述 Σ，其边界在粘合后同胚于 A_{2g}（注 14.8.13）。于是我们可以假定基点包含在 P 中，并且 P 中的所有其他点都位于一条环路$\alpha_1 \subseteq A_{2g}$上。于是该同胚

$$C_*(\Sigma, K) \cong C_*(\mathbb{S}^1, K)^{2g} \times C_*(\mathbb{S}^2, K)$$

（定理 14.8.14）在如下意义上适应于该情形： $C_*(\mathbb{S}^2, K) \subseteq C(\Sigma, P, K)$，从而我们有同胚

$$\begin{aligned} C(\Sigma, P, K) &\cong C(\mathbb{S}^1, P, K) \times C_*(\mathbb{S}^1, K)^{2g-1} \times C_*(\mathbb{S}^2, K) \\ &\cong C_*(\mathbb{S}^1, K)^P \times C_*(\mathbb{S}^1, K)^{2g-1} \times C_*(\mathbb{S}^2, K) \\ &\cong C_*(\mathbb{S}^1, K)^{2g+|P|-1} \times C_*(\mathbb{S}^2, K). \end{aligned}$$

由此可得（14.31）（参见注 14.8.4）。 □

推论 14.8.17.设 Σ 是具有 p 个边界分支的紧致定向曲面，并且将所有边界分支收缩为点后得到亏格为 g的曲面。则

$$\pi_k\big(C(\Sigma, \partial\Sigma, K)\big) \cong \pi_{k+1}(K)^{2g+|P|-1} \times \pi_{k+2}(K) \quad \textit{for} \quad k \in \mathbb{N}.$$

证明. 设 $q\colon \Sigma \to M$ 是将 Σ 的边界分支收缩为点的商映射，并令 $P := q(\partial\Sigma)$。则 M 是亏格为 g的可定向曲面，且 $C(\Sigma, \partial\Sigma, K) \cong C(M, P, K)$, 从而该断言由命题 14.8.16 得出。□

14.8.6 闭不可定向曲面

前一小节的结果甚至可以推广到非定向曲面上的映射群。在本小节中， Σ 表示亏格为 g 的非定向紧曲面， K 是任意拓扑群。

注 14.8.18。我们回顾一下， Σ 可以通过从一个楔和开始构造为 CW复形

$$A_g \cong \underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1}_{g}$$

g个圆。我们将 a_1，.....，a_g记作基本群 A_g 中相应的生成元；该基本群是由 g 个生成元生成的自由群。然后我们考虑连续映射 γ: $\mathbb{S}^1 \to A_g$，它对应于元素

$$a_1^2 \cdots a_g^2 \in \pi_1(A_g).$$

现在 Σ 同胚于通过将$\partial\mathbb{B}^2 \cong \mathbb{S}^1$ 中的点与它们在 γ下于 A_g 中的像等同而得到的空间，即，

$$\Sigma \cong A_g \cup_\gamma \mathbb{B}^2.$$

在此意义下，我们可以把 A_g 等同于 Σ的一个子集。最有启发性的图景是将 $\mathbb{B}^2$ 视为一个 $2g$边形，其中我们把边界边上的某些点等同起来，使得按逆时针顺序，边的序列对应于环路 $a_1^2 \cdots a_g^2$. 现在 A_g对应于在边界上作这些等同之后的多边形。

用与注 14.8.13 中类似的论证，我们看到映射

$$C_*(\Sigma, Z) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), \pi_1(Z)) \tag{14.32}$$

对任意基点空间 Z都是满射。

定理 14.8.19.对每个拓扑群 K，我们有一个同胚

$$C_*(\Sigma, K) \cong C_*(P_2(\mathbb{R}), K) \times C_*(\mathbb{S}^1, K)^{g-1} \tag{14.33}$$

相应地

$$\pi_k(C_*(\Sigma, K)) \cong \pi_k(C_*(P_2(\mathbb{R}), K)) \times \pi_{k+1}(K)^{g-1} \quad \textit{for all} \quad k \geq 1.$$

证明。令（γ_1，...，γ_g）为由映射 $\mathbb{S}^1 \to A_g \hookrightarrow \Sigma$给出的、来自 a_1，...，a_g的 $\pi_1(\Sigma)$ 的自然生成元。由（14.32）可得，对于 $Z = \mathbb{S}^1$且 $\pi_1(Z)$ 个 $\cong \mathbb{Z}$ 带基点连续映射 χ_1，...，χ_{g-1}: $\Sigma \to \mathbb{S}^1$ 其中

$$\pi_1(\chi_j)(\gamma_i) \cong [\chi_j \circ \gamma_i] = \delta_{ij} \quad \text{for} \quad i, j = 1, \ldots, g-1$$

and

$$\pi_1(\chi_j)(\gamma_g) = -1 \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, g-1.$$

映射 χ_j 可以选择为满足

$$\chi_j \circ \gamma_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i \neq j, i, j < g \\ \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1} & \text{for } i = j < g \\ z \mapsto \overline{z} & \text{for } j < i = g,\ z \in \mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \end{cases} \tag{14.34}$$

如果我们从具有所需性质的连续映射 χ_j^0: $A_g \to \mathbb{S}^1$ 出发，并注意到这些映射都能连续延拓到 Σ，因为同态 $\pi_1(\chi_j^0)$: $\pi_1(A_g) \to \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ 消去了 $a_1^2 \cdots a_g^2$。

令 $A_{g_1} \subseteq A_g$ 表示分别对应于 $a_1, \ldots, a_{g-1}$ 和映射 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g-1}$ 的 $g-1$ 个圆的楔和。于是我们得到限制同态的一个拓扑分裂

$$R\colon C_*(\Sigma, K) \to C_*(A_{g-1}, K) \cong C_*(\mathbb{S}^1, K)^{g-1}$$

通过延拓映射

$$E\colon C_*(\mathbb{S}^1, K)^{g-1} \to C_*(\Sigma, K), \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{g-1}) \mapsto (\alpha_1 \circ \chi_1) \cdots (\alpha_{g-1} \circ \chi_{g-1}).$$

然后， $RE = \mathrm{id}$ 由 (14.34) 得出。这导出一个同胚

$$C_*(\Sigma, K) \to \ker(R) \times C_*(\mathbb{S}^1, K)^{g-1}, \quad f \mapsto (fE(R(f))^{-1}, R(f))$$

其逆映射由 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha E(\beta)$ 给出。接下来我们观察到

$$\ker R \cong C_*(\Sigma/A_{g-1}, K) \cong C_*(P_2(\mathbb{R}), K),$$

因此我们得到同胚 (14.33)。这就证明了该定理。 □

14.8.7 带边界的不可定向曲面

最后，我们也将讨论带边界的非定向曲面上的映射群。

命题 14.8.20。 设 Σ 是亏格为 $g > 1$ 的非定向曲面，且 $\emptyset \neq P \subseteq \Sigma$ 是一个有限子集。那么

$$\pi_k(C(\Sigma, P, K)) \cong \pi_{k+1}(K)^{g+|P|-2} \times \pi_k(C_*(P_2(\mathbb{R}), K)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

证明。 如上所述，我们用一个多边形来描述 Σ，其边界粘合后与 A_g同胚。于是可以假设基点属于 P，且所有其他点都位于一个环路 $\gamma_1 \subseteq A_g$ 上（见定理 14.8.19 的证明）。那么，同胚

$$C_*(\Sigma, K) \cong C_*(P_2(\mathbb{R}), K) \times C_*(\mathbb{S}^1, K)^{g-1}$$

（定理 14.8.19）针对这种情形作了调整，即 $C_*(P_2(\mathbb{R}), K) \subseteq C(\Sigma, P, K)$，因此我们有同胚

$$\begin{aligned} C(\Sigma, P, K) &\cong C(\mathbb{S}^1, P, K) \times C_*(\mathbb{S}^1, K)^{g-2} \times C_*(P_2(\mathbb{R}), K) \\ &\cong C_*(\mathbb{S}^1, K)^P \times C_*(\mathbb{S}^1, K)^{g-2} \times C_*(P_2(\mathbb{R}), K) \\ &\cong C_*(\mathbb{S}^1, K)^{g+|P|-2} \times C_*(P_2(\mathbb{R}), K). \end{aligned}$$

这就得证了。 □

推论 14.8.21. 设 Σ 是一个有 p 个边界分支的紧致非定向曲面，将所有边界分支收缩为点后得到一个亏格为 $g > 1$ 的曲面。那么

$$\pi_k(C(\Sigma, \partial\Sigma, K)) \cong \pi_{k+1}(K)^{g+|P|-2} \times \pi_k(C_*(P_2(\mathbb{R}), K)) \quad \textit{for} \quad k \in \mathbb{N}.$$

证明. 与推论 14.8.17 的证明一样，这可以由命题 14.8.20 推出。□

接下来需要确定 $g = 1$ 情形下的同伦群，其中 $\Sigma \cong P_2(\mathbb{R})$ 是实射影平面。下文将特别证明，对于每个 Fr´echet–李群 K，所有同伦群 $\pi_k(C_*(P_2(\mathbb{R}), K))$ 都是 2-群。更准确地说，它们是一个初等阿贝尔 2-群被另一个初等阿贝尔 2-群扩张而成，这尤其意味着元素的阶不超过 4。

引理 14.8.22. 设 (M_i, x_i)、$i = 1、2$ 是两个带基点紧空间，且 $\alpha_1, \alpha_2 \colon M_1 \to M_2$ 是两个带基点同伦映射。那么李群态射

$$\alpha_{j,K} \colon C_*(M_2, K) \to C_*(M_1, K), \quad f \mapsto f \circ \alpha_j$$

对每个 $m \in \mathbb{N}_0$ 都满足 $\pi_m(\alpha_{1,K}) = \pi_m(\alpha_{2,K})$。

证明。令 $F \colon [1,2] \times M_1 \to M_2$ 为保基点同伦，满足 $F_1 = \alpha_1$ 且 $F_2 = \alpha_2$。则映射

$$\Phi \colon [1,2] \times C_*(M_2, K) \to C_*(M_1, K), \quad \Phi(t, f)(s) := f(F(t, s))$$

是连续的，因为映射

$$\widehat{\Phi} \colon [1,2] \times C_*(M_2, K) \times M_1 \to K, \quad \widehat{\Phi}(t, f, s) := f(F(t, s)) = \mathrm{ev}(f, F(t, s))$$

是连续的，而这又可由求值映射的连续性推出

$$\mathrm{ev} \colon C_*(M_2, K) \times M_2 \to K.$$

我们得出，两个映射 $\Phi_1, \Phi_2 \colon C_*(M_2, K) \to C_*(M_1, K)$ 同伦，因此对每个 $m \in \mathbb{N}_0$，它们诱导相同的映射 $\pi_m(C_*(M_2, K)) \to \pi_m(C_*(M_1, K))$。□

引理 14.8.23。 对于 $h \in C(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ 和 $m \in \mathbb{N}_0$，同态

$$\pi_m(h_K) \colon \pi_m(C_*(\mathbb{S}^1, K)) \to \pi_m(C_*(\mathbb{S}^1, K))$$

由下式给出

$$\pi_m(h_K)([\sigma]) = \deg(h) \cdot [\sigma],$$

其中 $\deg(h) = [h] \in \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ 是 h 的映射度。

证明。我们将 $\mathbb{S}^1$ 实现为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，从而连续函数 $\mathbb{S}^1 \to K$ 对应于连续的 1-周期函数 $\mathbb{R} \to K$。鉴于引理 14.8.22，$\pi_m(h_K)$ 仅依赖于 h 的同伦类，因此我们可以假设 $h(z) = nz$ 对于 $n = \deg(h) \in \mathbb{Z}$。

由此得到映射

$$\varphi_n\colon C_*(\mathbb{S}^1,K)\to C_*(\mathbb{S}^1,K),\quad \varphi_n(f)(t)=f(nt).$$

我们断言， φ_n与映射 $\psi_n(f):=f^n$ 同伦等价。

我们假设 $n>0$。 $n=0$ 的情形是平凡的，而 $n<0$的情形可以类似处理。对于每个区间 $[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$， $i=0,\dots,|n|-1$，我们定义一个连续映射

$$\alpha_i\colon C_*(\mathbb{S}^1,K)\to C_*(\mathbb{S}^1,K),\quad \alpha_i(f)(t):=f(\widetilde{\alpha}_i(t)),\qquad 0\le t\le 1,$$

其中

$$\widetilde{\alpha}_i\colon[0,1]\to[0,1],\quad t\mapsto\begin{cases}0 & \text{for } t\le\frac{i}{n}\\ nt-i & \text{for } \frac{i}{n}\le t\le\frac{i+1}{n}\\ 1 & \text{for } \frac{i+1}{n}\le t\le 1.\end{cases}$$

这意味着，函数 $\alpha_i(f)$的支集包含在区间$[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$的 $\mathbb{Z}$平移集中。于是，每个映射 $\widetilde{\alpha}_i$ 都与 $[0,1]$的单位映射在固定端点下同伦，同样的结论也适用于 α_i。现在

$$\varphi_n(f)=\alpha_1(f)\cdot\alpha_2(f)\cdots\alpha_n(f)$$

这是一个逐点乘积，因为各因子的支集互不相交。由于每个映射 α_i 都与 $\mathrm{id}_{C_*(\mathbb{S}^1,K)}$同伦，映射 φ_n 与 n次幂映射同伦。

$C_*(\mathbb{S}^1,K)$上的 n次幂映射在相应的同伦群上诱导出 n次幂映射，其中乘法由 K中的逐点乘法诱导。由此我们得出

$$\pi_m(\varphi_n)\colon\pi_m(C_*(\mathbb{S}^1,K))\to\pi_m(C_*(\mathbb{S}^1,K))$$

是阿贝尔群 $\pi_m(C_*(\mathbb{S}^1,K))$ 中的 n 次幂映射。 □

若 A 是阿贝尔群且 $n\in\mathbb{N}$，则记

$$A[n]:=\{a\in A\colon a^n=e\},\qquad n\in\mathbb{N}$$

表示 n-挠子群。

定理 14.8.24。设 K 是一个连通的 *Fr´echet*–李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$，且 $\emptyset\neq P\subseteq\Sigma\cong P_2(\mathbb{R})$ 是一个有限子集。那么，对于每个 $k\in\mathbb{N}_0$，存在一个短正合列

$$\pi_{k+2}(K)/2\pi_{k+2}(K)\hookrightarrow\pi_k(C(P_2(\mathbb{R}),P,K))\twoheadrightarrow\pi_{k+1}(K)[2]\times\pi_{k+1}(K)^{|P|-1}.$$

证明。 设 $p:=|P|$，且 $q_\Sigma\colon\mathbb{B}^2\to P_2(\mathbb{R})$ 为商映射，使得$\gamma:=q_\Sigma|_{\partial\mathbb{B}^2}$: $\mathbb{S}^1\to q_\Sigma(\mathbb{S}^1)=A_1$ 是二重覆盖映射，并且对 $x\in\partial\mathbb{B}^2$ 有 $\gamma(-x)=\gamma(x)$。我们不妨假设 $P\subseteq A_1$。设 $\widetilde{P}:=q_\Sigma^{-1}(P)=\gamma^{-1}(P)$。

由于 K 是 Fr´echet–李群，对所有群$C(X, Y, K)$ 同样成立，其中 X 是紧空间，$Y \subseteq X$ 是子集。根据定理 7.2.8，限制映射

$$R_B \colon C(\mathbb{B}^2, K) \to C(\mathbb{S}^1, K)$$

因为限制映射具有连续局部截面

$$\mathbf{L}(R_B) \colon C(\mathbb{B}^2, \mathfrak{k}) \to C(\mathbb{S}^1, \mathfrak{k})$$

是满射。限制映射的像由所有可缩回路构成，因此与 $C(\mathbb{S}^1, K)_0$ 的单位连通分支 $C(\mathbb{S}^1, K)$ 相同。因此，我们得到一个拓扑主丛

$$C_*(\mathbb{S}^2, K) \hookrightarrow C_*(\mathbb{B}^2, K) \twoheadrightarrow C_*(\mathbb{S}^1, K)_0$$

它定义了一个同伦群的长正合列

$$\ldots \to \pi_{k+1}(C_*(\mathbb{S}^1, K)) \xrightarrow{\delta_{k+1}} \pi_k(C_*(\mathbb{S}^2, K)) \to \pi_k(C_*(\mathbb{B}^2, K)) \to \ldots$$

由于群 $C_*(\mathbb{B}^2, K)$ 是可缩的（习题 14.8.12），其所有同伦群都消失，因此连接映射

$$\delta_{k+1} \colon \pi_{k+1}(C_*(\mathbb{S}^1, K)) \to \pi_k(C_*(\mathbb{S}^2, K))$$

是同构。

接下来我们考虑限制映射 $R_P \colon C(\Sigma, P, K) \to C(A_1, P, K)$，其中 $A_1 = q_\Sigma(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{S}^1$。我们有 $\pi_1(\Sigma) \cong \mathbb{Z}_2$，且连续映射$f \in C(A_1, P, K)$ 可以延拓到 Σ，当且仅当 $\pi_1(f)(2) = \pi_1(f)(1)^2 \in \pi_1(K)$ 消失。令

$$C(\mathbb{S}^1, P, K)_2 := \{f \in C(\mathbb{S}^1, P, K) \colon \pi_1(f)(2) = 0\}.$$

于是 $\operatorname{im}(R_P) = C(\mathbb{S}^1, P, K)_2$。特别地，在李代数层面，映射

$$\mathbf{L}(R_P) \colon C(\Sigma, P, \mathfrak{k}) \to C(A_1, P, \mathfrak{k}) \cong C(\mathbb{S}^1, P, \mathfrak{k})$$

是满射，因此定理 7.2.8 导出拓扑主丛

$$C_*(\mathbb{S}^2, K) \hookrightarrow C(P_2(\mathbb{R}), P, K) \twoheadrightarrow C(\mathbb{S}^1, P, K)_2.$$

拉回映射 $\gamma^* \colon f \mapsto f \circ \gamma$ 满足 $R_P \circ \gamma^* = \gamma^* \circ R_B$，因此我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} C_*(\mathbb{S}^2, K) & \hookrightarrow & C(P_2(\mathbb{R}), P, K) & \twoheadrightarrow & C(\mathbb{S}^1, P, K)_2 \\ \downarrow \cong & & \downarrow q_\Sigma^* & & \downarrow \gamma^* \\ C_*(\mathbb{S}^2, K) & \hookrightarrow & C_*(\mathbb{B}^2, K) & \twoheadrightarrow & C_*(\mathbb{S}^1, K)_0. \end{array}$$

鉴于 $C(\mathbb{S}^1,P,K)\cong C_*(\mathbb{S}^1,K)^P$，拉回映射

$$\gamma^*\colon C(\mathbb{S}^1,P,K)_2\to C_*(\mathbb{S}^1,K)_0$$

可视为环路的复合映射，它将 $(f_1,\dots,f_p)$ 映射为一个同伦类为

$$2[f_1]+\ldots+2[f_p]$$

因为 $\gamma^*\colon C_*(\mathbb{S}^1,K)_2\to C_*(\mathbb{S}^1,K)_0$ 与平方映射 $f\mapsto f^2$ 同伦，这由引理 14.8.23 得出。

我们还需要 $\pi_1(K)\cong\pi_0(C_*(\mathbb{S}^1,K))$，$C_*(\mathbb{S}^1,K)_2$ 包含 $C_*(\mathbb{S}^1,K)$ 的单位连通分支，以及

$$\pi_0(C_*(\mathbb{S}^1,K)_2)\cong\{g\in\pi_1(K)\colon g^2=e\}=\pi_1(K)[2].$$

现在，长正合同伦序列的自然性导出交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \to & \pi_{k+1}(C(\mathbb{S}^1,P,K)) & \xrightarrow{\delta^P_{k+1}} & \pi_k(C_*(\mathbb{S}^2,K)) & \to & \pi_k(C(P_2(\mathbb{R}),P,K)) & \to & \ldots\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{k+1}(\gamma^*)} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_k(q^*_\Sigma)} & & \\
\ldots & \xrightarrow{0} & \pi_{k+1}(C_*(\mathbb{S}^1,K)) & \xrightarrow{\delta^{\mathbb{B}}_{k+1}} & \pi_k(C_*(\mathbb{S}^2,K)) & \to & \pi_k(C_*(\mathbb{B}^2,K))=\mathbf{0} & \to & \ldots
\end{array}$$

上图的交换性意味着连接映射 δ^P_{k+1} 等价于映射

$$\begin{array}{c}
\pi_{k+1}(C_*(\mathbb{S}^1,K)^P)\cong\pi_{k+2}(K)^P\to\pi_k(C_*(\mathbb{S}^2,K))\cong\pi_{k+2}(K)\\
(a_1,\dots,a_p)\mapsto 2(a_1+\ldots+a_p),
\end{array}$$

因此

$$\operatorname{im}(\delta^P_{k+1})=2\pi_{k+2}(K)\quad\text{and}\quad\ker(\delta^P_{k+1})\cong\pi_{k+2}(K)^{p-1}\times\pi_{k+2}(K)[2].$$

由 R_P 的长正合同伦序列的正合性，我们现在得到短正合列

$$\pi_{k+2}(K)/2\pi_{k+2}(K)\hookrightarrow\pi_k(C(P_2(\mathbb{R}),P,K))\twoheadrightarrow\pi_{k+1}(K)^{p-1}\times\pi_{k+1}(K)[2],$$

对于 $k\in\mathbb{N}_0$.，这就完成了证明。 □

推论 14.8.25。设 K 是一个连通的 *Fr´echet*–李群。则存在短正合列

$$\pi_{k+2}(K)/2\pi_{k+2}(K)\hookrightarrow\pi_k(C(P_2(\mathbb{R}),K))\twoheadrightarrow\pi_{k+1}(K)[2]\quad\textit{for}\quad k\in\mathbb{N}.$$

注 14.8.26。我们事先并不知道群 $\pi_0(C_*(P_2(\mathbb{R}),K))=[P_2(\mathbb{R}),K]_*$ 是否为阿贝尔群。该群是由 2-群 $\pi_1(K)[2]$ 和 2-群 $\pi_2(K)/2\pi_2(K)$作延拓得到的。

对于阿贝尔群 A，我们记作 $A_{\mathbb{Q}} := A \otimes \mathbb{Q}$。对于 $k \in \mathbb{N}$，群$\pi_k(C_*(P_2(\mathbb{R})$ $K))$ 是阿贝尔 2-群，因此特别有

$$\pi_k(C_*(P_2(\mathbb{R}), K))_{\mathbb{Q}} = \mathbf{0}.$$

因此，对于每个亏格为 g 的非定向紧曲面，我们得到其有理同伦群

$$\pi_k(C(\Sigma, K))_{\mathbb{Q}} \cong \pi_{k+1}(K)_{\mathbb{Q}}^{g-1} \times \pi_k(K)_{\mathbb{Q}} \quad \text{for } k \in \mathbb{N}$$

特别是

$$\pi_2(C(\Sigma, K))_{\mathbb{Q}} \cong \pi_3(K)_{\mathbb{Q}}^{g-1}.$$

第14章习题

习题 14.8.1.证明，将立方体 I^n 的边界压缩为一点所得到的商空间 $I^n/\partial I^n$ 与 n 维球面 $\mathbb{S}^n$ 同胚。

提示： I^n 的内部与 $\mathbb{R}^n$ 同胚，而 $I^n/\partial I^n$ 是一点紧化。

习题 14.8.2. 证明，对于空间三元组 $(X, X_0, \{x_0\})$，F^n上的乘积(X, X_0, x_0) 满足：

(1) $f \sim f', g \sim g' \Rightarrow f * g \sim f' * g'$. (2) 若 x_0 表示常值映射 $I^n \to X$，则 $x_0 * f \sim f * x_0 \sim_{-} f$. (3)（逆映射）设 $f\ t_1 \quad t_n \quad = f\ t_1 \quad t_{n-1}\ 1 - t_n \quad [f] * [f] = [f] * [f] = (, . . [x_0]$. ,) : (,. . ,,)。那么 . (4) （结合律） $(f * g) * h \sim f * (g * h)$，其中 $f, g, h \in F^n(X,$ $X_0, x_0)$、 $n \geq 2$, 或 $n = 1$ 和 $X_0 = \{x_0\}$。(5)（交换律） $f * g \sim g * f$，其中 $f,$ $g \in F^n(X, X_0, x_0)$、 $n \geq 3$, 或 $n = 2$ 和 $X_0 = \{x_0\}$。提示：定义第二种乘积

$$(f \sharp g)(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, 2x_{n-1}, x_n) & \text{for } 0 \leq x_{n-1} \leq \frac{1}{2} \\ g(x_1, x_2, \ldots, 2x_{n-1} - 1, x_n) & \text{for} \frac{1}{2} < x_{n-1} \leq 1. \end{cases}$$

然后证明

$$f * g \sim (f \sharp x_0) * (x_0 \sharp g) \sim f \sharp g \sim (x_0 * f) \sharp (g * x_0) \sim g * f.$$

(6)（函子性）对于 $f, g \in F^n(X, X_0, x_0)$ 和 $\varphi \in C((X, X_0, x_0), (Y, Y_0, y_0))$，有 $(\varphi \circ f) *$ $(\varphi \circ g) = \varphi \circ (f * g)$.

习题 14.8.3. 设 G 是一个拓扑群， $f, f', g, g', h \in F^n(G, e)$ $n \geq 0$。证明：

(1) $f \sim f'$， $g \sim g' \Rightarrow f \cdot g \sim f' \cdot g'$。 （2） $f \sim g \Longleftrightarrow fg^{-1} \sim e$, 常值映射。（3）（交换律） $f \cdot g \sim g \cdot f$ 对 $n \geq 1$成立。提示：证明 $f \cdot g \sim (f * e) \cdot (e * g) = (e * g) \cdot (f * e) \sim g \cdot f$.

（4）（一致性） $f \cdot g \sim f * g$ 对 $n \geq 1$成立。

习题 14.8.4. 设 G 是一个拓扑群，且 $q\colon P \to X$ 是一个主 G-丛。证明典范映射 $P/G \to X$ 是一个同胚。

习题 14.8.5. 设 G 是一个拓扑群，且 $H \leq G$ 是一个闭子群。证明纤维丛 $q\colon G \to G/H$ 局部平凡，当且仅当存在一个开子集 $U \subseteq G/H$，其上存在商映射 q 的连续截面 $\sigma\colon U \to G$。

习题 14.8.6. 设 G 是一个拓扑群，且 $H \leq G$ 是一个闭子群。此外，设 $K \subseteq H$ 是一个开子群。于是我们有一个自然映射

$$q\colon G/K \to G/H, \quad gK \mapsto gH.$$

我们将 $q_K\colon G \to G/K$ 和 $q_H\colon G \to G/H$ 记为商映射。证明：
(a) q 是连续且开映射。(b) 若 $U \subseteq G$ 是一个开对称 e-邻域，且满足 $U^2K \cap H = K$（其存在性由 K 在 H 中为开集可知），则对每个 $h \in H$，映射 $q^h := q|_{q_K(Uh)}\colon q_K(Uh) \to q_H(U)$ 是双射、连续且开映射，因此是一个同胚。

(c) 取集合 $(h_j)_{j\in J}$，其中元素是 H 中左 K 陪集的代表元。则

$$q_K(UH) = \dot{\bigcup}_{j\in J} q_K(Uh_j),$$

且若 K 是 H 中的正规子群，则这些陪集两两不相交。
(d) 若 $K \trianglelefteq H$ 是 G 中的正规子群，则 q 是一个覆盖映射，且 $\mathrm{Deck}(q) \cong H/K$。

习题 14.8.7. 设 G 是一个连通局部指数李群，$H \subseteq G$ 是一个闭连通李子群，其包含映射 $\iota_H\colon H \hookrightarrow G$。此外，设 $q_G\colon \widetilde{G} \to G$ 是一个万有覆盖群，满足 $\mathbf{L}(q_G) = \mathrm{id}^{\mathbf{L}(G)}$，并且 $\widetilde{H} := \langle \exp_{\widetilde{G}} \mathbf{L}(H) \rangle$ 是对应于李子代数 $\mathbf{L}(H) \subseteq \mathbf{L}(G) \cong \mathbf{L}(\widetilde{G})$ 的积分子群。证明：

(a) $\widetilde{H}$ 是李子群 $H^\sharp := q_G^{-1}(H) \subseteq \widetilde{G}$的单位连通分支。(b) 识别 $\pi_1(G) \cong \ker q_G \subseteq H^\sharp$ 可导出一个正合列

$$\pi_1(H) \xrightarrow{\pi_1(\iota_H)} \pi_1(G) \twoheadrightarrow \pi_0(H^\sharp).$$

(c) $\pi_1(\widetilde{H}) \cong \ker(\pi_1(\iota_H))$。
(c) 当且仅当H 是单连通时，$\pi_1(\iota_H)$是一个同构 .

习题 14.8.8。 设 G 是一个巴拿赫–李群，$H \leq G$ 是一个闭李子群，并且$\mathbf{L}(H)$有一个闭补空间 $\mathfrak{q} \subseteq \mathbf{L}(G)$。证明存在一个开子集 $U \subseteq G/H$，其上存在商映射 $q\colon G \to G/H$的连续截面 $\sigma\colon U \to G$。

提示：将反函数定理应用于映射 $\mathfrak{q} \times H \to G,\ (x,\ h) \mapsto \exp(x)h$。

习题 14.8.9.证明群

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})\colon |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

与 $\mathbb{S}^3$微分同胚。

习题 14.8.10。设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，并用 $Iv = iv$ 表示 $\mathcal{H}$ 上的复结构。那么

$$\operatorname{Im}\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\langle x, Iy\rangle \quad \text{for all} \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

习题 14.8.11。设 N 是一个二步幂零群，$Z := Z(N)$ 是它的中心。则交换子映射 $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ 可通过一个双加性映射分解

$$N/Z \times N/Z \to Z, \quad (xZ, yZ) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}.$$

习题 14.8.12。设 (X, x_0) 是一个紧致可缩带基点空间，G 是一个拓扑群。证明群 $C_*(X, G)$ 是可缩的。

习题 14.8.13。设 $\mathcal{H}$ 是一个无穷维希尔伯特空间，并且

$$\mathbb{S} := \{v \in \mathcal{H} \colon \|v\| = 1\} \quad \text{the sphere in} \quad \mathcal{H}.$$

我们讨论几个论证，说明 $\mathbb{S}$ 是可缩的。证明：

(a) 对于 $\mathcal{H} = L^2([0,1])$，常值函数 1 属于 $\mathbb{S}$。我们考虑映射

$$F(t, f)(x) := \frac{f_t}{\|f_t\|} \quad \text{with} \quad f_t(x) := \begin{cases} f(x) & \text{for } 0 \le x \le t \\ 1 & \text{for } t < x \le 1. \end{cases}$$

那么 $F\colon\ [0,1] \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 连续，且 $F(1, f) = f$，而 $F(0, f) = 1$。注意，每个可分希尔伯特空间都与 $L^2([0,1])$ 酉同构。

(b) 对任意希尔伯特空间（无论是否为无限维），任一点 $p \in \mathbb{S}$ 的补集 $\mathbb{S} \setminus \{p\}$ 都与超平面 $p^\perp$ 同胚，因此是可缩的。提示：立体投影。

(c) 设 $T\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是一个非满射等距变换，且 -1 不是特征值。那么

$$F(t, f)(x) := \frac{f_t}{\|f_t\|} \quad \text{with} \quad f_t := tf + (1-t)Tf$$

这是一个从 $T\colon\ \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ 到 $\mathrm{id}_{\mathbb{S}}$ 的同伦。由于 $T(\mathbb{S})$ 是真子集，根据 (b)，T 同伦于一个常值映射。

14.9 第14章的注释与评论

第14.4节： 定理 14.4.3 的证明取自 [Ne02c]。该证明基于 Kuiper 的论文脚注中的一个提示。对于复希尔伯特空间，Kuiper 定理也可以由 Br¨uning 和 Willgerodt 关于无限型冯·诺伊曼代数的单位群的可缩性的一般结果推出（[BW76]）。对于赋予强拓扑的可分希尔伯特空间的酉群 $\mathrm{U}(\mathcal{H})$，其可缩性见 [DiD63]。

正如我们在第14.4节所见，许多自然算子群都具有极分解，这些分解为理解其

拓扑提供了重要工具。在有限维情形中，岩泽分解及其推广同样重要，但对于无限维推广而言，它们的稳健性要差得多。这一方向上一个非常具体的结果是 [Bel09，命题 1.1]，它表明希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ 上的一般线性群 $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ 不存在岩泽分解；不过，这篇论文也包含一系列适用于其他情境的正面结果。对于由具有绝对收敛傅里叶级数的映射构成的环群，V. Balan 和 J. Dorfmeister 在 [BD01] 中得到了 Birkhoff 分解和岩泽分解的自然版本。在这里，傅里叶级数的可和性是必要条件，以便在李代数层面将其分裂为正、负傅里叶模态。

第 14.6 节：由第 14.5 节和第 14.6 节的结果可知，无限维实希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的受限正交群 $\mathrm{O}_2(\mathcal{H}) = \mathrm{O}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_2(\mathcal{H})$ 满足

$$\pi_0(\mathrm{O}_2(\mathcal{H})) \cong \pi_1(\mathrm{O}_2(\mathcal{H})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

因此，其单位连通分支有一个单连通的单连通覆盖 $\mathrm{Spin}_2(\mathcal{H})$。关于该群的详细讨论，请参见 [PS75] 和 [Pl94]。**第 14.7 节**主要取自 [Ne02a] 中关于紧流形的附录 A.3，以及 [Ne04c] 中关于非紧流形的附录 A。

问题 14.9.1. 对于 Fr´echet 空间之间的线性商映射 $q\colon E \to Q$，我们可以利用 [MicE59] 构造一个连续线性截面 $\sigma\colon Q \to E$，这尤其意味着 q 定义了一个拓扑平凡纤维丛。对于更一般的局部凸空间，截面可能不存在，但如果局部凸空间之间的商映射是塞尔纤维化，也就是具有立方体的同伦提升性质（参见 [Bre93] 和第 14.1 节），仍然会很有意义。这里的关键是证明连续曲线可以提升。如果确实如此，那么局部指数李群的商映射也将适用长正合同伦序列（定理 14.1.8），这将成为计算此类李群同伦群的重要工具。

第15章 选讲专题

本章讨论有关无限维李群的若干专题。

我们在第15.1节中证明，连通李群 G 是幂零的（分别地，可解的），当且仅当其李代数 $\mathfrak{g}$具有相应性质。我们还证明，对于可解李群，指数函数的存在性与麦基完备性蕴含正则性。

在第 15.2 节中，我们研究由局部凸空间 G 上的多项式乘法定义的李群，其中迭代乘法映射的次数有界。主要结果是，这样的李群 G 具有一个多项式指数映射 Exp: $\mathfrak{g} \to G$，其逆映射为全局多项式，且其李代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的。由此可得，每个多项式李群 G 都与形如（$\mathfrak{g}$, $*$）的李群多项式同构，其中 $\mathfrak{g}$ 是一个带有 BCH 乘法的幂零李代数。

在第15.3节中，我们将形式李群定义为局部凸空间范畴中的群对象，其态射是不含常数项的形式幂级数。我们证明，每个形式李群 G 都有一个形式指数函数，实现其与形式群 Ch($\mathfrak{g}$)的同构；该形式群上的形式乘法由 $\mathfrak{g}$上的李括号对应的豪斯多夫级数给出。

第15.4节讨论李群 N 与李群作用的扩张。特别地，我们证明，如果 G 具有指数函数，那么 $\widehat{G}$也具有指数函数。我们还得到关于满足 Maurer–Cartan 方程的李代数值 1-形式可积性的相对基本定理，即使尚不知群 G 是否正则。接着，模 N 可积便意味着对 $\widehat{G}$可积。我们还给出了存在带全局光滑余循环的阿贝尔扩张的判据，并发展了在不存在任何光滑局部截面的情况下处理中心扩张的方法。在李代数层面，这引出了广义中心扩张这一概念。

在第15.5节中，我们通过加法子群 $\Pi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$的离散性来刻画可扩张的局部指数李代数 $\mathfrak{g}$，该子群称为周期群。我们还介绍了若干计算这些群的方法，并构造了不可扩张的局部指数李代数的例子。

在第15.6节中，我们讨论局部凸李代数 $\mathfrak{g}$ 的可积性，即在不假设任何

其他性质（例如局部指数性）的前提下，李群 E 存在且其李代数为 $E \rtimes_D \mathbb{R}$。在这一背景下，目前只有相当零散的结果。在解析群的背景下，我们给出了若干关于复局部凸李代数不可积性的结果。对于局部凸空间 E 上的连续线性算子 D，李代数 $E \rtimes_D \mathbb{R}$ 的可积性可以用算子 D 的可积性来刻画，也就是说，取决于是否存在一族光滑单参数群 $\mathbb{R} \to$，其取值于一般线性群 GL(E)，且无穷小生成元为 D。

第15.7节简要讨论局部指数李群的解析版本，即 BCH–李群。

在讨论幂零李群和原幂零李群时，我们已经遇到过指数映射为整体微分同胚的李群。第15.8节讨论巴拿赫–李群的指数函数的整体正则性。这尤其引出了 Dixmier–Saito 定理的巴拿赫版本，用以刻画有限维指数李群。对于复巴拿赫–李代数，我们证明了 W. Wojty´nski 的卓越定理，该定理断言拟幂零性等价于指数性；我们还给出了有限维李代数的指数射影极限的一种刻画。

最后，第15.9节讨论局部指数李群的半直积不具备局部指数性的情形。

15.1 幂零李群与可解李群

在第15.1.1小节中，我们证明，连通李群 G 是幂零的（分别是可解的），当且仅当它的李代数 $\mathfrak{g}$ 具有这一性质。此外，群和它的李代数具有相同的幂零次数（分别是可解次数）。在第15.1.2小节中，我们证明，对于可解李群，指数函数的存在性以及 $\mathfrak{g}$ 的麦基完备性蕴含正则性。

15.1.1 李代数刻画

对于群 G 的两个子集 A、B，我们将所有交换子(a、b)：$= aba^{-1}b^{-1}$、$a \in A$、$b \in B$生成的子群记作(A、B)。我们归纳地定义 G 的导出列为

$$D^0(G) := G, \quad D^{n+1}(G) := (D^n(G), D^n(G)), n \in \mathbb{N}_0,$$

以及下（或降）中心列为

$$C^1(G) := G, \quad C^{n+1}(G) := (G, C^n(G)), n \in \mathbb{N}_0.$$

若存在某个 $N \in \mathbb{N}_0$，使得群 G 可解，则称其为可解群，其中 $D^N(G) = \{e\}$。具有此性质的最小 N 称为群 G的可解长度。若存在某个 $N \in \mathbb{N}_0$，使得群 G幂零，则称其为幂零群，其中 $C^{N+1}(G) = \{e\}$。最小的此类 N称为其幂零长度。

对于李代数 $\mathfrak{g}$，我们同样归纳地定义导出列如下：

$$D^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad D^{n+1}(\mathfrak{g}) := [D^n(\mathfrak{g}), D^n(\mathfrak{g})], n \in \mathbb{N}_0,$$

与下（或递降）中心级数由

$$C^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad C^{n+1}(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})], n \in \mathbb{N}_0.$$

李代数 $\mathfrak{g}$ 称为可解的，若对某个 $N \in \mathbb{N}$ 有 $D^N(\mathfrak{g}) = \{0\}$；满足此条件的最小 N 称为其可解长度。类似地，我们称 $\mathfrak{g}$ 为幂零的（长度为 N），若对某个 $N \in \mathbb{N}_0$ 有 $C^{N+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$（参见练习 15.1.7、15.1.8）。此外，若 $\mathfrak{g}$ 是拓扑李代数，我们还定义

$$\overline{D}^n(\mathfrak{g}) := \overline{D^n(\mathfrak{g})} \quad \text{and} \quad \overline{C}^n(\mathfrak{g}) := \overline{C^n(\mathfrak{g})}$$

并注意到，这些都是在所有自同构下不变的闭理想。

本节汇集了关于幂零李群与可解李群的一些结果。尽管幂零李群在各方面的表现都很像有限维情形，但可解李群的理论面临着更多解析方面的障碍，部分原因是它们的万有覆盖群未必是指数的。

在本节中，G 表示一个连通李群，$\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$ 表示它的李代数。我们的首要目标是证明：群 G 是幂零的（分别地，可解的），当且仅当它的李代数是幂零的（分别地，可解的）。

定理 15.1.1. 连通李群 G 是幂零的，当且仅当它的李代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的。

证明。我们归纳地定义一列光滑函数 f_n：$G^{n+1} \to G$，如下所示

$$f_1(g_1, g_2) := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1},$$

它是群交换子函数，并且

$$f_{n+1}(g_0, \ldots, g_{n+1}) := f_1(g_0, f_n(g_1, \ldots, g_{n+1})),$$

它是 $n+1$ 阶的 G 上的交换子函数。群 G 是幂零的，且 $C^{N+1}(G)$ 消失，当且仅当函数 f_N 为常数 e（练习 15.1.4）。

显然，微分 $df_1(e, e)$ 为零，因此其二阶喷射是一个定义良好的二次映射 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，由下式给出

$$\frac{1}{2}\delta^2_{(e,e)} f_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$$

（注 5.1.8）。借助泰勒多项式链式法则（命题 1.6.21）与归纳法，容易推出：f_n 在 $(e, \ldots, e)$ 中的 n-喷射为零，且其 $(n+1)$-喷射由下式给出

$$\frac{1}{(n+1)!}\delta^{n+1}_{(e,\dots,e)}f_n(x_0,x_1,\dots,x_n)=[x_0,[x_1,[x_2,\dots,[x_{n-1},x_n]]]]. \quad (15.1)$$

由 (15.1) 立即可得：若 G 为幂零，则 $\mathfrak{g}$ 为幂零：$f_N=e$ 蕴含 $\mathfrak{g}$ 中元素的所有 $(N+1)$ 重迭代括号均为零，这意味着 $\mathfrak{g}$ 是满足 $C^{N+1}(\mathfrak{g})=\{0\}$ 的幂零李代数（参见习题 15.1.7）。

现在反过来假设，$\mathfrak{g}$ 是幂零的，且 $C^N(\mathfrak{g})=\{0\}$。我们考虑伴随表示 $\mathrm{Ad}\colon G\to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$，由此得到群的一个短正合列

$$\mathbf{1}\to Z(G)\to G\to \mathrm{Ad}(G)\to \mathbf{1}$$

（推论 5.5.8）。由于幂零群的中心扩张仍是幂零的（习题 15.1.3(2)），只需证明 $\mathrm{Ad}(G)$ 是幂零群。为此，我们将证明 $\mathrm{Ad}(G)$ 包含于 $\mathfrak{g}$ 的某个有限旗所对应的幺幂群中（参见习题 15.1.2）。

显然，每个子空间 $C^n(\mathfrak{g})$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的闭理想，并且在每个自同构下不变，尤其在群 $\mathrm{Ad}(G)$ 下不变。因此，伴随作用对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都定义了 G 在空间 $C^n(\mathfrak{g})/C^{n+1}(\mathfrak{g})$ 上的一个光滑表示（定义 5.2.4 和引理 1.3.21）；由于 $[\mathfrak{g},C^n(\mathfrak{g})]\subseteq C^{n+1}(\mathfrak{g})$ 可由 $\mathfrak{g}$ 上括号的连续性直接推出（命题 D.2.8），这个作用是平凡的。于是，对每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $(\mathrm{Ad}(G)-\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})C^n(\mathfrak{g})\subseteq C^{n+1}(\mathfrak{g})$，因此 $\mathrm{Ad}(G)$ 包含于该旗的幺幂群 $U(\mathcal{F})$ 中

$$\mathcal{F}:\quad \mathbf{0}=\overline{C}^N(\mathfrak{g})\subseteq\overline{C}^{N-1}(\mathfrak{g})\subseteq\dots\subseteq\overline{C}^2(\mathfrak{g})\subseteq\overline{C}^1(\mathfrak{g})=\mathfrak{g},$$

从而 $C^{N-1}(\text{伴随表示}(G))=\{\mathbf{1}\}$。这意味着 $C^N(G)=\{e\}$，因此G是幂零的。□

定理 15.1.2.连通李群 G 可解当且仅当其李代数 $\mathfrak{g}$可解。

证明。 证明的前半部分遵循幂零情形中的相应论证。我们考虑光滑函数序列 $h_n\colon\ G^{2^n}\to G$，其定义为

$$h_1(g_1,g_2):=g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$$

and

$$h_{n+1}(g_1,\dots,g_{2^{n+1}}):=h_1\big(h_n(g_1,\dots,g_{2^n}),h_n(g_{2^n+1},\dots,g_{2^{n+1}})\big).$$

李群 G 在 $D^N(G)=\{e\}$ 下可解，当且仅当函数 h_N恒等于 e（习题 15.1.5）。再次利用泰勒多项式链式法则（命题 1.6.21），可得 h_n 在 $(e、\dots\dots、e)$ 中的 (2^n-1) 阶喷射为零，且（在任意局部坐标图中）

$$\frac{1}{2^n!}\delta^{2^n}_{(e,\dots,e)}h_n\colon \mathfrak{g}^{2^n}\to\mathfrak{g} \tag{15.2}$$

等于函数 b_n，该函数由 $b_1(x_1,\ x_2):=[x_1,x_2]$ 归纳定义，并且

$$b_n(x_1,\dots,x_{2^n}):=[b_{n-1}(x_1,\dots,x_{2^{n-1}}),b_{n-1}(x_{2^{n-1}+1},\dots,x_{2^n})].$$

由 (15.2) 可知，$D^N(G)=\{e\}$ 意味着 b_N 为零，即$\mathfrak{g}$ 是可解的，且 $D^N(\mathfrak{g})=\{0\}$（习题 15.1.8）。

反过来，假设 $\mathfrak{g}$ 是一个可解李代数。令 $I=[0,1]$ 表示单位区间，并考虑两条光滑曲线 $\alpha,\ \beta\colon\ I\to G$，它们始于 e。我们关注它们的交换子

$$\gamma\colon I\to G,\quad t\mapsto\alpha(t)\beta(t)\alpha(t)^{-1}\beta(t)^{-1}.$$

鉴于

$$\delta(\alpha\beta)=\delta(\beta)+\operatorname{Ad}(\beta)^{-1}\delta(\alpha)\quad\text{ and }\quad\delta(\alpha^{-1})=-\operatorname{Ad}(\alpha)\delta(\alpha)$$

（引理 5.5.3），我们有

$$\delta(\alpha^{-1}\beta^{-1})=\delta(\beta^{-1})+\operatorname{Ad}(\beta)\delta(\alpha^{-1})=-\operatorname{Ad}(\beta)\delta(\beta)-\operatorname{Ad}(\beta\alpha)\delta(\alpha).$$

这就得到

$$\begin{aligned}\delta(\gamma)\ &=\delta(\alpha^{-1}\beta^{-1})+\operatorname{Ad}(\beta\alpha)\delta(\alpha\beta)\\&=-\operatorname{Ad}(\beta)\delta(\beta)-\operatorname{Ad}(\beta\alpha)\delta(\alpha)+\operatorname{Ad}(\beta\alpha)\big(\delta(\beta)+\operatorname{Ad}(\beta)^{-1}.\delta(\alpha)\big)\\&=-\operatorname{Ad}(\beta)\delta(\beta)-\operatorname{Ad}(\beta\alpha)\delta(\alpha)+\operatorname{Ad}(\beta\alpha)\delta(\beta)+\operatorname{Ad}(\beta\alpha\beta^{-1})\delta(\alpha)\\&=\operatorname{Ad}(\beta)\big(\operatorname{Ad}(\alpha)\delta(\beta)-\delta(\beta)\big)+\operatorname{Ad}(\beta\alpha\beta^{-1})\big(\delta(\alpha)-\operatorname{Ad}(\beta)\delta(\alpha)\big).\end{aligned}$$

假设 $\delta(\alpha)$ 和 $\delta(\beta)$ 的取值都在 $D^n(\mathfrak{g})$ 中。对于固定的 $t\in I$，我们考虑由下式给出的光滑曲线 $f\colon I\to D^n(\mathfrak{g})$

$$f(s):=\operatorname{Ad}(\alpha(st))\delta(\beta)(t)-\delta(\beta)(t)$$

并注意到

$$f'(s)=t\operatorname{Ad}(\alpha(st))[\delta(\alpha)(st),\delta(\beta)(t)]\in\overline{D}^{n+1}(\mathfrak{g}).$$

鉴于 $f(0)=0$，这意味着

$$\operatorname{Ad}(\alpha(t))\delta(\beta)(t)-\delta(\beta)(t)=f(1)\in\overline{D}^{n+1}(\mathfrak{g}).$$

同理可得，$\operatorname{Ad}(\beta)\delta(\alpha)-\delta(\alpha)$ 的取值在 $D^{n+1}(\mathfrak{g})$ 中，因此 $\delta(\gamma)$ 的取值在 $D^{n+1}(\mathfrak{g})$ 中。

归纳地，现在可知，若 $\alpha_i\colon\ I\to G,\ i=1,\dots,2^n$ 是光滑曲线，则曲线

$$\gamma:=h_n\circ(\alpha_1,\dots,\alpha_{2^n})$$

满足 $\operatorname{im}(\delta(\gamma))\subseteq\overline{D^n(\mathfrak{g})}$。对于 $n=N$，我们特别由$D^N(\mathfrak{g})=\{0\}$ 推出，γ 是常数。由于 G 是连通的，因此 h_N是常数 e（引理 5.5.4），所以 G 是可解的，且 $D^N(G)=\{e\}$。□

注 15.1.3。对于有限维可解李代数， $\mathfrak{g}$ 的可解性蕴含 G 的可解性这一事实，可以很大程度上仿照我们在幂零情形中的论证来证明：由于可解性具有扩张性质，只需证明 Ad(G)是可解的。不妨假设李代数 $\mathfrak{g}$ 是复的。于是由李定理可知，存在一个完备的 不变旗标

$$\mathcal{F}\colon F_0 = \mathbf{0} \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_N = \mathfrak{g} \quad \text{with} \quad \dim F_n = n,$$

由 $\mathfrak{g}$ 的理想构成。因此

$$\mathrm{Ad}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{F}) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})\colon (\forall n)\ \varphi(F_n) = F_n\},$$

又由于 Aut($\mathcal{F}$) 是可解的（习题 15.1.2(2)），结论得证。

例 15.1.4. 设 $E := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的光滑复值函数空间，并赋予其自然的 Fr´echet 拓扑（定义 4.1.2）。此外，设 $\mathfrak{h} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{p, q, z\}$ 表示复 3 维海森堡代数，其括号定义为

$$[p, q] = z \quad \text{and} \quad [p, z] = [q, z] = 0.$$

于是，我们有 $\mathfrak{h}$ 在 E 上的自然表示 α，定义如下：

$$\alpha(z) = \mathrm{id}_E, \quad \alpha(p) = \frac{d}{dt} \quad \text{and} \quad (\alpha(q)f)(t) = tf(t).$$

现在，半直和

$$\mathfrak{g} := E \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$$

是一个局部凸李代数，其导出列为

$$D^1(\mathfrak{g}) = E \rtimes \mathbb{C}z, \quad D^2(\mathfrak{g}) = E \quad \text{and} \quad D^3(\mathfrak{g}) = \mathbf{0}.$$

由此特别可知， $\mathfrak{g}$ 是可解的。我们注意到， $D^1(\mathfrak{g})$不是幂零的，而这在有限维李代数中从未发生过。交换子 $z = [p, q]$ 并非以幂零方式作用于 $\mathfrak{g}$ 这一事实进一步表明，不存在由理想构成的 $\mathfrak{g}$ “完备”旗。 此外，导出代数 $D^1(\mathfrak{g})$不是幂零的，而有限维可解李代数总是如此。

15.1.2 可解李群的正则性

在本小节中，我们证明，对于每个李代数$\mathfrak{g}$ 麦基完备的可解李群 G，光滑指数映射的存在性意味着正则性。下面我们回顾第15.1.1小节中导出列$D^k(\mathfrak{g})$: $= D^k(\mathfrak{g})$的定义。

引理 15.1.5。设 $\mathfrak{g}$ 是一个局部凸李代数。那么，每个 D^k（$\mathfrak{g}$）都是$\overline{\ }$$\mathfrak{g}$的闭特征理想，即在 $\mathfrak{g}$的所有拓扑自同构下不变。

引理 15.1.6。设 G 是一个具有指数函数的李群，并假设 $\mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$ 麦基完备。此外，设 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是一个 伴随表示(G)-不变的闭理想。则以下断言成立：

(i) 对每个 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，映射

$$\Phi\colon C^k([0,1],\mathfrak{g}) \to C^{k+1}([0,1],G), \quad \Phi(\xi)(t) := \exp_G\Big(\int_0^t \xi(s)\,ds\Big)$$

是光滑的。

(ii) 对于 $\xi \in C^k([0,1],\mathfrak{n})$ 和 $\eta := \Phi(\xi)$，映射 $\xi_1 :=$ 伴随表示$(\eta(\xi - \delta(\eta))$ 是一个取值于 $D^1(\mathfrak{n})$ 的 C^k-曲线$\overline{\ }$。

(iii) 曲线 $\eta_1 \in C^1([0,1],G)$ 满足 $\delta(\eta_1\eta) = \xi \in C^1([0,1],\mathfrak{n})$ 当且仅当

$$\delta(\eta_1) = \mathrm{Ad}(\eta)(\xi - \delta(\eta)) = \xi_1 \quad in \quad C([0,1],\overline{D}^1(\mathfrak{n})).$$

(iv) 若$\mathrm{evol}_1\colon C^k([0,1],\overline{D}^1(\mathfrak{n})) \to G$ 是光滑演化映射，则

$$\mathrm{evol}_G(\xi) := \mathrm{evol}_1(\xi_1)\cdot\Phi(\xi)(1) = \mathrm{evol}_1(\xi_1)\cdot\exp_G\Big(\int_0^1 \xi(s)\,ds\Big)$$

定义了一个光滑演化映射 $C^k([0,1],\mathfrak{n}) \to G$。

证明。(i) 由于 $\exp_G$ 是光滑的，与 $\exp_G$ 复合会导出一个光滑映射 $C^{k+1}([0,1],\mathfrak{g}) \to C^{k+1}([0,1],G)$。事实上，由于只需证明此映射在某个形如 $C^{k+1}([0,1],U_{\mathfrak{g}})$ 的零邻域上光滑，而 $U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个开零邻域（引理 5.6.2），结论由命题 1.7.1 得出。另一方面，对于 $k \geq 1$，积分映射$C^k([0,1],\mathfrak{g}) \to C^{k+1}([0,1],\mathfrak{g})$ 是连续线性映射，因此光滑。

(ii) 令 $q\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}/D^1(\mathfrak{n})$ 表示商映射，且令 $\widetilde{\xi}(t) := \int_0^t \xi(s)\,ds$。那么 q 是到一个阿贝尔李代数上的态射，因此对每个 $x \in \mathfrak{n}$，$q \circ \mathrm{ad}\, x = 0$。若 $\gamma \in C^1([0,1],G)$ 满足 $\delta(\gamma)([0,1]) \subseteq \mathfrak{n}$且 $\gamma(0) = e$，则对每个 $x \in \mathfrak{n}$，我们得到如下关系

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}(\gamma(t))x = \mathrm{Ad}(\gamma(t))[\delta(\gamma)_t, x] = [\mathrm{Ad}(\gamma(t))\delta(\gamma)_t, \mathrm{Ad}(\gamma(t))x]$$

（命题 5.2.5），由此得到 $\frac{d}{dt}q\big(\mathrm{Ad}(\gamma(t))x\big) = 0$. 因此，对于每个 x，$\mathfrak{n}/D^1(\mathfrak{n})$ 中的曲线$q\big(\mathrm{Ad}(\gamma(t))x\big)$ 都是常数，$\overline{\ }$这意味着对于每个 t，$q \circ \mathrm{Ad}(\gamma(t)) = q$。特别地，$q \circ e^{\mathrm{ad}\, x} = q$对于 $x \in \mathfrak{n}$，因此

$$q \circ \kappa_{\mathfrak{n}}(x) = q \circ \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}\,dt = \int_0^1 q \circ e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}\,dt = \int_0^1 q\,dt = q$$

对于每个 $x \in \mathfrak{n}$。这里我们采用定义 5.6.21 和定义 D.2.17 中的记号。对于 C^1-曲线 $\eta = \exp_G \circ \widetilde{\xi}$，根据定理 5.6.22，我们得到

$$\delta(\eta)_t = (\widetilde{\xi}^* \delta(\exp_G))_t = \delta(\exp_G)_{\widetilde{\xi}(t)} \widetilde{\xi}'(t) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\widetilde{\xi}(t))\xi(t) = \kappa_{\mathfrak{n}}(\widetilde{\xi}(t))\xi(t) \in \mathfrak{n}.$$

鉴于前述讨论，这意味着对每个 t 都有 $q \circ$伴随表示$(\eta(t)) = q$，从而我们得到

$$\begin{aligned} q(\xi_1(t)) &= q\big(\xi(t) - \delta(\eta)_t\big) = q(\xi(t)) - q\big(\kappa_{\mathfrak{n}}(\widetilde{\xi}(t))\xi(t)\big) \\ &= q(\xi(t)) - q(\xi(t)) = 0. \end{aligned}$$

(iii) 这可由 $\delta(\eta_1 \cdot \eta) = \delta(\eta) +$伴随表示$(\eta)^{-1}.\delta(\eta_1)$。立即得出
(iv) 鉴于 (iii)，尚需证明映射

$$C^k([0,1], \mathfrak{n}) \to C^k([0,1], \overline{D}^1(\mathfrak{n})), \quad \xi \mapsto \xi_1$$

是光滑的。这可由群$C^k([0,1],\ G)$ 的伴随作用的光滑性（引理 6.2.1）以及对数导数的光滑性（命题 6.2.3）得出。□

命题 15.1.7。设 G是具有指数函数的可解李群，其李代数 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的。则 G 是 C^1-正则的。此外，若 $\mathfrak{g}$ 是序列完备的，则 G 是 C^0-正则的。

证明。根据定理 15.1.2，李代数 $\mathfrak{g}$ 是可解的。设 N 为其可解长度。我们对 $n = N,\ N-1,$ ……，0 作归纳，证明存在一个光滑演化映射

$$\mathrm{evol}_G \colon C^1([0,1], \overline{D}^n(\mathfrak{g})) \to G.$$

对于 $n = N$，无须证明。若断言对某个 $n > 0$ 成立，则引理 15.1.6(iv) 表明它对 $n-1$ 也成立，因为 $\mathfrak{g}$ 的理想 $D^{n-1}(\mathfrak{g})$ 是闭的，且在 Ad(G) 下不变（引理 15.1.5）。于是断言对 $n = 0$ 成立。

若 $\mathfrak{g}$ 序列完备，则连续曲线的积分存在，因此在这种情况下，可以在引理 15.1.5 中允许 $k = 0$。□

在定理 9.5.6 中我们已经看到，在李群扩张（它们是局部平凡光滑纤维丛）的情形下，正则性是一种扩张性质。由于我们不想假设所有理想 $D^n(\mathfrak{g})$ 在拓扑上都是分裂的，前述命题不能由定理 9.5.6 推出。

例 15.1.8。我们给出一个可解巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 的例子，其中理想 $D^1(\mathfrak{g})$ 在拓扑意义下并非分裂。考虑空间 $\mathfrak{g}:=\ell^\infty(\mathbb{N},\ \mathbb{R})$，并赋予其上确界范数。记 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}x$，其中 $\mathfrak{g}_0$ 是一个闭子空间，包含由趋于 0 的序列构成的非分裂子空间 $c_0(\mathbb{N},\ \mathbb{R})$。我们定义一个连续线性算子

$$T\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad T(x)_n = \lambda_n x_n,$$

其中 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$，但对每个 n，$\lambda_n \neq 0$。注意，$T(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_0$ 蕴含 T 在 $\mathfrak{g}_0$ 上定义了一个连续线性算子。现在我们在 $\mathfrak{g}$ 上考虑由 $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \rtimes_T \mathbb{R}$ 给出的李代数结构。于是 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = T(\mathfrak{g}_0) \subseteq c_0(\mathbb{N},\ \mathbb{R})$ 包含 $e_n = \lambda_n^{-1} T(e_n)$，由此得到 $D^1(\mathfrak{g}) = c_0(\mathbb{N},\ \mathbb{R})$。鉴于 $\operatorname{Spec}(T) \subseteq \mathbb{R}$，李代数 $\mathfrak{g}$ 是一个可解长度为 2 的指数巴拿赫–李代数（参见命题 5.6.10 和例 5.6.11）。

第15.1节习题

练习 15.1.1。设 E 是一个向量空间，并且

$$\mathcal{F}\colon F_0 = \mathbf{0} \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_N = E$$

有一个有限旗，由线性子空间组成。证明

$$\mathfrak{u}(\mathcal{F}) := \{\varphi \in \mathfrak{gl}(E)\colon (\forall n)\ \varphi(F_n) \subseteq F_{n-1}\}$$

是一个幂零李代数。
提示：归纳地证明 $C^j(\mathfrak{u}(\mathcal{F}))(F_k) \subseteq F_{k-j}$。

习题 15.1.2。设 E 是一个向量空间，且

$$\mathcal{F}\colon F_0 = \mathbf{0} \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_N = E$$

有一个子空间的有限旗。我们记

$$\operatorname{Aut}(\mathcal{F}) := \{\varphi \in \mathrm{GL}(E)\colon (\forall n)\ \varphi(F_n) = F_n\}$$

为 *automorphisms of this flag*的群。证明：

(1) 集合

$$U(\mathcal{F}) := \{\varphi \in \operatorname{Aut}(\mathcal{F})\colon (\forall n)\ (\varphi - \mathrm{id}_E)(F_n) \subseteq F_{n-1}\}$$

是一个幂零群，且具有

$$C^N \quad \mathcal{F} \quad = \{\mathbf{1}\} \qquad \textit{unipotent group of}\ (\mathrm{U}())。它称为。$$

提示：若对所有 j，$(\varphi - \mathrm{id}_E)(F_j) \subseteq F_{j-m}$ 且 $(\psi - \mathrm{id}_E)(F_j) \subseteq F_{j-n}$，则交换子 $(\varphi,\ \psi) = \varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}$ 满足 $((\varphi,\ \psi) - \mathrm{id}_E)(F_j) \subseteq F_{j-n-m}$。利用这一点

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi) - \mathrm{id}_E = \varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1} - \mathrm{id}_E &= (\varphi\psi - \psi\varphi)\circ\varphi^{-1}\psi^{-1} = [\varphi,\psi]\circ\varphi^{-1}\psi^{-1} \\ &= [\varphi - \mathrm{id}_E, \psi - \mathrm{id}_E]\circ\varphi^{-1}\psi^{-1}\end{aligned}$$

以及练习 15.1.1。
(2) 如果 E 是有限维的，且 $\mathcal{F}$ 是完备的，即对每个 j 都有 $\dim F_j = j$，那么群 $\operatorname{Aut}(\mathcal{F})$ 是可解的。

练习 15.1.3。设 G 是一个群。证明：

(1) 若 G 是幂零的，则 G 的每个子群和每个商群都是幂零的。(2) 幂零群的任意中心扩张都是幂零的。

(3) 若 G 是可解的，则 G 的每个子群和每个商群都是可解的。(4) 可解群对可解群的任意延拓都是可解的（可解性具有扩张性质）。(5) 找一个阿贝尔群对阿贝尔群的延拓，但该延拓不是幂零的（幂零性不具有扩张性质）。

习题 15.1.4.证明，对于群 G，以下命题等价：

(1) G 是幂零的，即对于某个 $N \in \mathbb{N}$，$C^N(G) = \{e\}$。(2) 存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得所有形如 $(g_1, (g_2, \ldots, (g_{N-1}, g_N)\ldots))$ 的迭代交换子都是平凡的。

习题 15.1.5.证明，对于群 G，以下命题等价：

(1) G 是可解的，即对于某个 $N \in \mathbb{N}$，$D^N(G) = \{e\}$。(2) 存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得所有形如以下形式的二元迭代对易子

$$((\cdots((g_1, g_2), (g_3, g_4))\cdots), (\cdots(g_{2^N-1}, g_{2^N})\cdots))$$

都是平凡的。

习题 15.1.6。设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数。证明：

(1) 若 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，则 $\mathfrak{g}$ 的每个子代数和每个商代数都是幂零的。(2) 任意幂零李代数的中心扩张都是幂零的。(3) 若 $\mathfrak{g}$ 是可解的，则 $\mathfrak{g}$ 的每个子代数和每个商代数都是可解的。(4) 可解李代数被可解李代数延拓后仍是可解的（可解性具有扩张性质）。(5) 举出一个阿贝尔李代数被阿贝尔李代数延拓后不幂零的例子（幂零性不具有扩张性质）。

习题 15.1.7。证明，对于李代数 $\mathfrak{g}$，下列条件等价：

(1) $\mathfrak{g}$ 是幂零的，即对某个 $N \in \mathbb{N}$，有 $C^{N+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$。(2) 存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得所有形如 $[x_1, [x_2, \ldots, [x_{N-1}, x_N]\ldots]]$ 的迭代交换子都是平凡的。

习题 15.1.8。证明，对于李代数 $\mathfrak{g}$，以下条件等价：

(1) $\mathfrak{g}$ 是可解的，即对于某个 $N \in \mathbb{N}$，$D^N(\mathfrak{g}) = \{0\}$。
(2) 存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得所有形如以下形式的二元迭代对易子

$$[[\cdots[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]\cdots], [\cdots[x_{2^N-1}, x_{2^N}]\cdots]]$$

都为零。

第15.1节注记：
本节的习题表明，幂零李代数自然地由有限旗 $\mathcal{F}$ 产生，因为李代数 $\mathfrak{u}(\mathcal{F})$是幂零的（练习 15.1.1）。另一方面，李代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的，当且仅当伴随表示映入 $\mathfrak{u}(\mathcal{F})$，其中有限旗 $\mathcal{F}$ 位于 $\mathfrak{g}$中。由此引出一个问题

是否每个幂零局部凸李代数都能在某个 $\mathfrak{u}(\mathcal{F})$中有忠实表示。由于幂零李代数的中心非零，伴随表示并不忠实。不过，D. 和 I. Beltiţ˘a 在 [BB15]中对上述问题给出了肯定的回答。他们为每个幂零局部凸李代数构造了一个忠实表示，该表示作用在某些有限次数的多项式映射空间上，这些映射定义在 $\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ 上，其值域包含于 $\mathfrak{u}(\mathcal{F})$中，其中有限旗的选取取决于次数。对于幂零巴拿赫–李代数，他们的构造在某个 $\mathfrak{u}(\mathcal{F})$中给出了忠实的巴拿赫表示。

15.2 多项式李群

本节研究由局部凸空间 G 上的多项式乘法定义的李群，其中迭代乘法映射的次数有界。主要结果是，这样的李群 G 有一个多项式指数映射 $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$，它具有全局多项式逆映射，并且其李代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零的。因此，每个多项式李群 G 都多项式同构于形如 $(\mathfrak{g}, *)$ 的李群，其中 $\mathfrak{g}$ 是赋有 BCH 乘法的幂零李代数。

定义 15.2.1。实多项式李群实多项式李群[1] 是一个实局部凸空间 G，带有连续多项式群结构 $m_G\colon G \times G \to G$，其中 0 是单位元，且所有迭代乘积映射

$$m_G^{(j)}\colon G^j \to G, \quad (x_1, \ldots, x_j) \mapsto x_1 \cdots x_j \quad \text{for} \quad j \in \mathbb{N},$$

都是次数由某个 $d \in \mathbb{N}$ 所界定的多项式映射。

我们将在下文看到，上述条件意味着求逆映射 $\eta_G\colon G \to G$ 也是次数为 $\leq d$ 的多项式（推论 15.2.7）。

例 15.2.2。(a) 设 $\mathcal{A}$ 是一个幂零结合的局部凸代数，且 $a_1 \cdots a_d = 0$对于 $a_1, \ldots, a_d \in \mathcal{A}$成立。那么 $m_{\mathcal{A}}(x, y) := x + y + xy$在 $\mathcal{A}$ 上定义了一种群结构，其求逆运算为

$$\eta_{\mathcal{A}}(x) := \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i x^i,$$

这很容易通过将 $\mathcal{A}$ 识别为代数 $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ 中的仿射子空间 $\mathcal{A} + \mathbf{1}$ 直接验证；该代数的单位元为 $\mathbf{1} = (0,1)$，并赋予乘法 $(a,t)(a',t') = (aa' + ta' + t'a, tt')$（习题 5.1.5）。

[1] 虽然我们只把多项式群作为李群的例子来讨论，但多项式群理论可以在任意有理向量空间上发展，而且不需要任何拓扑。

于是 $(\mathcal{A}, m_{\mathcal{A}})$ 是一个多项式李群，所有映射 $m_{\mathcal{A}}^{(j)}$ 的次数都被 $d-1$ 所界定，因为 $\mathcal{A}$ 中元素的 d 重乘积为零。

(b) 若 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ 和 $d \in \mathbb{N}$，那么我们已经知道，迭代切丛 $T^d(G)$ 是一个李群，且其典范投影 $\pi\colon T^d(G) \to G$ 是李群态射（命题 5.2.2）。纤维 $T_e^d(G) := \ker \pi$ 也具有自然的群结构；通过使用右平凡化，它还继承了局部凸空间的结构，且同构于 $\mathfrak{g}^{2^d-1}$。可以证明，$T_e^d(G)$ 上的群结构是次数为 $\leq d$ 的多项式。对于 $d=1$，我们得到阿贝尔群 $T_e(G) \cong (\mathfrak{g}, +)$；对于 $d=2$，我们得到二步幂零群

$$T_e^2(G) \cong \mathfrak{g}^3, \quad (x_{12}, x_2, x_1) * (x'_{12}, x'_2, x'_1) = (x_{12} + x'_{12} + [x_1, x'_2], x_2 + x'_2, x_1 + x'_1).$$

理解 $T_e^d(G)$ 上群结构的一个好方法是使用 G 的一个 $\mathfrak{g}$-坐标图（φ, U），其中 $\varphi(e) = 0$ 且 $T_e(\varphi) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$。李代数 $\mathbf{L}(T^d(G))$ 同构于

$$T^d(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} T^d(\mathbb{R}), \quad \text{where} \quad T^d(\mathbb{R}) := \mathbb{R}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d]$$

是一个 2^d 维交换代数，其生成元 ε_i 满足 $\varepsilon_i^2 = 0$。记 $\varepsilon^\alpha := \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_d^{\alpha_d}$ 表示 $\alpha \in \{0,1\}^d$，则有

$$T_e^d(G) \cong \bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g} \otimes \varepsilon^\alpha.$$

群 $T_e^d(G)$ 上的乘法现在由局部乘法的 d 次泰勒展开$\mu_1 + \cdots + \mu_d$给出

$$\mu(x, y) := \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)).$$

这里，每个 μ_j 都是来自 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 的 j 次齐次多项式，因此具有如下形式

$$\mu_j(x) = \widetilde{\mu}_j(x, \ldots, x), \quad \text{where} \quad \widetilde{\mu}_j\colon (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^j \to \mathfrak{g}$$

是一个对称的 j 重线性映射。通过从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 代数 $T^d(\mathbb{R})$ 的标量扩张，j 线性映射 $\widetilde{\mu}_j$ 诱导出唯一的 $T^d(\mathbb{R})$-j 线性映射

$$(T^d(\mathfrak{g}) \times T^d(\mathfrak{g}))^j \to T^d(\mathfrak{g}),$$

从而诱导出齐次多项式 $T^d(\mu_j)\colon T^d(\mathfrak{g}) \times T^d(\mathfrak{g}) \to T^d(\mathfrak{g})$，将 $T_e^d(\mathfrak{g}) \times T_e^d(\mathfrak{g}) \to T_e^d(\mathfrak{g})$ 映射到其中。这导出乘法

$$T_e^d(\mu) = \sum_{j=1}^{d} T_e^d(\mu_j)\colon T_e^d(\mathfrak{g}) \times T_e^d(\mathfrak{g}) \to T_e^d(\mathfrak{g}),$$

根据构造显然，迭代乘法映射的阶不超过 d，因为代数 $T_e^d(\mathbb{R})$是幂零的，所有 $d+1$ 阶乘积都为零。

(c) 如果 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数，那么 BCH乘法在$\mathfrak{g}$ 上定义了一个多项式李群的结构（$\mathfrak{g}$, $*$），其求逆由$x^{-1} = -x$给出。

(d) 设 $\mathcal{A}$ 是任意一个（结合的）局部凸代数， $M_n(\mathcal{A})$ 是元素取自 $\mathcal{A}$ 的 ($n \times n$) 矩阵代数，并且

$$N_n(\mathcal{A}) := \{(g_{ij}) \in M_n(\mathcal{A}) \colon (i > j \Rightarrow g_{ij} = 0)\ (\forall i)\ g_{ii} = \mathbf{1}\}$$

为严格上三角矩阵群。那么 $G := N_n(\mathcal{A}) - \mathbf{1}$ 关于乘法

$$m_G(x, y) = x + y + xy$$

（参见习题 5.1.5）。由于 G 也可视为 $M_n(\mathcal{A})$ 的幂零结合子代数 $\mathfrak{n}_n(\mathcal{A})$，由严格上三角矩阵构成，因此很容易从 (a) 得出，所有映射 $m_G^{(j)}$ 都是次数为 $\leq n$ 的多项式函数。

15.2.1 二项式多项式函数

为了处理多项式群的单参数群，我们需要取值于阿贝尔群的二项式多项式函数。

定义 15.2.3. 设 A 为一个阿贝尔群，且 $D = \{n \in \mathbb{Z} \colon\ n \geq n_0\}$，其中 $n_0 \in \mathbb{Z}$。若一个取值于 A 的函数 $f \colon\ D \to A$ 具有如下形式，我们称它为次数为 $\leq n$ 的取值于 的二项式多项式

$$f(k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} v_i \quad \text{with} \quad v_i \in A.$$

对于每个函数 $f \colon\ D \to A$，我们定义其差分函数

$$\Delta f \colon D \to A, \quad n \mapsto f(n+1) - f(n).$$

取值于 $\mathbb{Z}$ 的二项式函数 $b_i \colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $b_i(k) := \binom{k}{i}$, $i \in \mathbb{N}_0$，满足

$$(\Delta b_i)(k) = \binom{k+1}{i} - \binom{k}{i} = \binom{k}{i-1} = b_{i-1}(k) \quad \text{for} \quad i \geq 1$$

且 $\Delta b_0 = 0$。因此，对于上述的 f，我们得到

$$(\Delta^n f)(k) = v_n \quad \text{and} \quad \Delta^{n+1} f = 0. \tag{15.3}$$

由归纳法可知，所有 v_i 都由 f 唯一确定。

引理 15.2.4。 函数 $f \colon\ D \to A$ 是次数为 $\leq n$ 的二项式多项式函数，当且仅当 $\Delta^{n+1} f = 0$。

证明。 我们在上文已经看到，对于每个次数为 $\leq n$的二项式多项式函数，$\Delta^{n+1} f = 0$ 都成立。

反过来，假设 $\Delta^{n+1} f = 0$。我们用归纳法证明， $\Delta^{n-r} f$是次数为 $\leq r$ 的二项式多项式函数。首先注意到， $\Delta^n f$是常数，即次数为 0。假设 $\Delta^{n-r} f$ 是次数为 $\leq r$ 的二项式多项式，因此具有形式 $\sum_{i=1}^{r+1} \binom{k}{i-1} v_i$。现在（$\Delta^{n-r-1} f$）（$k$）$-\sum_{i=1}^{r+1} \binom{k}{i} v_i$是常数，这意味着 $\Delta^{n-r-1} f$ 是次数为$\leq r+1$的二项式多项式。这就证明了，对于每个 $r \in \{0, \ldots, n\}$，函数 $\Delta^{n-r} f$是次数为 $\leq r$ 的二项式多项式。对于 $r = n$，我们得到所述结论。□

15.2.2 构造单参数群

设 (G, m_G) 是一个多项式李群。我们归纳地定义幂函数p_k： $G \to G$、 $k \in \mathbb{N}$，如下：

$$p_0(x) \qquad \text{and} \qquad p_{k+1}(x) := m_G(x, p_k(x)) \qquad \text{for} \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

注意，多项式李群的定义特别意味着，所有这些函数都是次数为 $\leq d$ 的多项式，因为它们是函数 $m_G^{(k)}$ 在 G^k中的对角线上的限制。

下面的定理是 Lazard 的一个结果（[Sr92，第114]页）的变体：

定理 15.2.5（Lazard 定理——多项式版本）。对于 k =1，……， d，存在多项式映射 ψ^k： $G \to G$，它们由以下要求唯一确定：

（i） ψ^1（x） $= x$。（ii） ψ^k（x）的阶为 $\geq k$，即，当$j < k$时，齐次分量 ψ_j^k 消失。（iii）对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 p_k（x）$= \sum_{i=1}^{d} \binom{k}{i} \psi^i$（$x$）。

每个 ψ^k 都是连续的。

证明。 **唯一性** 由等式 (iii) 得出，该等式断言映射$k \mapsto p_k(x)$是一个取值于 G、系数为 $\psi^i(x)$的二项式多项式函数。这些系数由 (15.3) 唯一确定。

存在性： 记 $P_n(G, G)$ 为连续多项式函数 $G \to G$ 构成的阿贝尔群。根据上文关于二项式多项式函数的讨论，我们需要证明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，函数

$$f_n \colon \mathbb{N}_0 \to P_n(G, G), \quad k \mapsto (p_k)_n$$

是次数为 $\leq n$ 的二项式多项式。我们对 n 使用归纳法来证明这一点。对于$n = 0$，有

$$(p_k)_0(x) = p_k(0) = 0.$$

假设 $n > 0$，并且断言对映射 f_j、 $j \leq n-1$ 成立。要证明 f_n 是次数为 $\leq n$ 的二项式多项式，只需证明

Δf_n 是次数为 $\leq n-1$ 的二项式多项式（引理 15.2.4）。由 $p_{k+1}(x) = m_G(x, p_k(x)) = x + p_k(x) + \cdots$，我们得到

$$(\Delta f_n)(k)(x) = (p_{k+1})_n(x) - (p_k)_n(x) = \sum_{\substack{i+j\leq n\\ 1\leq i,j}} m_{ij}(x, p_k(x))_n,$$

其中，m_{ij} 表示 $m_G(x,\ y)$中关于 x 齐次次数为i 且关于 y次数为 j 的分量。在每一项 $m_{ij}(x,\ p_k(x))$中，第n阶项的任意贡献都来自 $p_k(x)$中阶数为 $< n$的项；根据归纳假设，这些项可写为

$$(p_k)_{\leq n-1} = \sum_{i\leq n-1} \binom{k}{i} \psi^i_{n-1},$$

次数为 $\leq n-1$的二项式多项式。由于两个分别取值于 $\mathbb{Z}$、次数为 i和 j 的二项式多项式的乘积，是一个取值于 $\mathbb{Z}$、次数为 $\leq i+j$ 的二项式多项式（习题 15.2.1），因此 Δf_x 是次数为$< n$的二项式多项式。这意味着 f_x 是次数为 $\leq n$的二项式多项式，证明至此完成。□

例 15.2.6。若 $\mathcal{A}$ 是一个幂零结合代数，且

$$m_{\mathcal{A}}(x, y) = x + y + xy$$

（例 15.2.2），那么 $p_k(x) = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i$ 意味着 $\psi^i(x) = x^i$ 是结合代数 $\mathcal{A}$ 的幂函数。

现在我们沿用 [Ber08] 中的论证（另见 [Bou89, 第 III 章，第 §5] 节）。对每个 $x \in G$，我们得到一条多项式曲线

$$\zeta_x \colon \mathbb{R} \to G, \quad \zeta_x(t) := x^t := \sum_{j=1}^{d} \binom{t}{j} \psi^j(x).$$

对于 $s,\ t \in \mathbb{N}$，于是有

$$\zeta_x(t+s) = p_{t+s}(x) = p_t(x) p_s(x) = \zeta_x(t)\zeta_x(s). \tag{15.4}$$

这是多项式映射 $\mathbb{R}^2 \to G$ 在子集$\mathbb{N}^2$上的取值所满足的一个恒等式。由于 $\mathbb{R}^2$ 上的每个多项式都由其在$\mathbb{N}^2$上的取值唯一确定，(15.4) 对所有 $s,\ t \in \mathbb{R}$也成立。由此可得，ζ_x 是一个单参数群，且 $\zeta_x(1) = x$。特别地，我们得到：

推论 15.2.7。 G 的求逆是由下式给出的连续多项式映射

$$\eta_G(x) = \zeta_x(-1) = \sum_{j=1}^{d} \binom{-1}{j} \psi^j(x) = \sum_{j=1}^{d} (-1)^j \psi^j(x) \quad for \quad x \in G.$$

ζ_x 在 0 处的导数为

$$\zeta_x'(0) = \sum_{j=1}^{d} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \psi^j(x)$$

因为

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \binom{t}{j} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-j+1)}{j!} = \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

我们考虑多项式映射

$$\log_G \colon G \to G, \quad \log_G(x) := \zeta_x'(0) = \sum_{j=1}^{d} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \psi^j(x).$$

为了定义群 (G, m_G) 的指数函数，我们必须求多项式映射 $\log_G$ （ G 的对数函数）的逆映射。这由以下定理得出（[Ber08，定理 PG.6]）：

定理 15.2.8。 每个实多项式李群 (G, m_G) 都有一个双射的多项式指数映射 $\exp_G \colon G \to G$ 。其逆映射 $\log_G \colon G \to G$也是连续多项式。若 ψ_m^p 是 ψ^p中次数为 m 的齐次项，我们还有

$$\exp_G(x) = \sum_{p=1}^{d} \frac{1}{p!} \psi_p^p(x) \quad \textit{and} \quad \log_G(x) = \sum_{j=1}^{d} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \psi^j(x). \tag{15.5}$$

证明。首先，我们建立 $\log_G$ 的函数方程。根据定义，$\log_G(x) = \zeta_x'(0)$。鉴于 $\zeta_{x^n}(m) = (x^n)^m = x^{nm} = \zeta_x(nm)$ 对于 $m \in \mathbb{N}$成立，我们有 $\zeta_{x^n}(t) = \zeta_x(nt)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立，因此

$$\log_G(x^n) = \zeta_{x^n}'(0) = n\zeta_x'(0) = n \log_G(x), \quad x \in G, n \in \mathbb{Z}. \tag{15.6}$$

因此

$$\log_G(x^t) = t \log_G(x) \quad \text{for} \quad x \in G, t \in \mathbb{R}, \tag{15.7}$$

由于等式（15.6）的两边都是关于 t 的多项式函数，且在 $\mathbb{N}$上相等。

现在我们用（15.5）定义 $\exp_G$，并断言 $\log_G \circ \exp_G = \mathrm{id}_G$。我们定义次数为 m 、关于 x 的齐次多项式$\varphi_{r,\ m}$ 如下：

$$x^t = \zeta_x(t) = \sum_{j=1}^{d} \binom{t}{j} \psi^j(x) = \sum_{r,m} t^r \varphi_{r,m}(x).$$

对于 $t \in \mathbb{R}^\times$，我们于是得到

$$\log_G(tx) = t \log_G((tx)^{t^{-1}}) = t \log_G\Big(\sum_{r \le m} t^{m-r} \varphi_{r,m}(x) \Big). \tag{15.8}$$

根据 x^t 的定义以及分量 ψ_m^p，我们特别得到

$$\varphi_{1,m}(x) = \sum_{p \le m} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \psi_m^p(x) \quad \text{and} \quad \varphi_{m,m}(x) = \frac{1}{m!} \psi_m^m(x).$$

我们还回顾一下，对于 $m < p$，有 $\psi_m^p = 0$。在 (15.8) 中对 $t = 0$ 求导，并利用 $\psi^1(x) = x$，得到

$$x = \log_G \Big(\sum_m \varphi_{m,m}(x) \Big) = \log_G \Big(\sum_m \frac{1}{m!} \psi_m^m(x) \Big) = \log_G(\exp_G(x)).$$

特别地，$\log_G$ 是满射。

接下来我们证明 $\exp_G \circ \log_G = \mathrm{id}_G$。对于 $x \in G$ 和 $y := \log_G(x)$，有 $\zeta'_{\exp_G(y)}(0) = \log_G(\exp_G(y)) = y$。我们还知道，$\zeta_x$ 是一个多项式单参数群，且 $\zeta_x'(0) = \log_G(x) = y$。由于单参数群由其在 0 处的导数唯一确定，因此可得 $\zeta_x = \zeta_{\exp_G(y)}$，进而得到

$$x = \zeta_x(1) = \zeta_{\exp_G(y)}(1) = \exp_G(y) = \exp_G(\log_G(x)).$$

将 $\exp_G$ 应用于 (15.7)，可得

$$x^t = \exp_G(t \log_G(x)),$$

这表明曲线 $t \mapsto \exp_G(ty)$ 是单参数群。此外，$\exp_G'(0) = \psi_1^1 = \mathrm{id}_G$。因此，$\exp_G$ 是 G 的指数函数。□

命题 15.2.9。每个多项式李群 (G, m_G) 都是幂零的。

证明。我们归纳地定义一个光滑函数序列 $f_n\colon\ G^{n+1} \to G$，定义如下

$$f_1(g_0, g_1) := g_0 g_1 g_0^{-1} g_1^{-1}$$

and

$$f_{n+1}(g_0, \ldots, g_{n+1}) := f_1(g_0, f_n(g_1, \ldots, g_{n+1})).$$

我们必须证明，对于某个 $N \in \mathbb{N}$，函数 f_N 恒为零（参见练习 15.1.4）。

如定理 15.1.1 的证明所示，我们看到 f_n 在 (0，.....处的 n-喷射恒为 0，　　$,0)$ 并且

$$d^{(n+1)} f_n(0, 0, \ldots, 0)(x_0, x_1, \ldots, x_n) = [x_0, [x_1, [x_2, \ldots, [x_{n-1}, x_n]]]] \quad (15.9)$$

是 f_n 在 (0，.....，0) 处泰勒展开中的第一个非平凡项。

每个函数 f_n 都可以写成如下形式

$$f_n(g_0, \ldots, g_n) = F_n(g_0, \ldots, g_n, g_0^{-1}, \ldots, g_n^{-1}),$$

其中 F_n 是某个迭代乘法映射的限制，因此是次数有界于某个 $d \in \mathbb{N}$ 的多项式。由于求逆 η_G 也是次数为 $\le d$ 的多项式（推论 15.2.7），因此 f_n 是次数为 $\le d^2$ 的多项式。结合上述信息，我们看到，对于 $n \ge d^2$，$f_n = 0$，因此 $d^{(n+1)} f_n = 0$。□

第 15.2 节的习题

习题 15.2.1。设 $D = \{n \in \mathbb{Z}\colon\ n \geq n_0\}$，其中 $n_0 \in \mathbb{Z}$，且 f，$g\colon D \to R$ 是取值于环 R 中的函数。证明

$$\Delta(fg) = \Delta(f)\tau(g) + f\Delta(g), \quad \text{where} \quad \tau(g)(n) = g(n+1).$$

由此可得，如果 f 是次数为 $\leq n$ 的多项式，且 g 是次数为 $\leq m$的多项式，那么 fg 是次数为 $\leq nm$的多项式。

习题 15.2.2. 证明，对于 $m, n, i, j \in \mathbb{N}_0$，有

$$\binom{m}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i,j \leq k \leq i+j} \frac{k!}{(k-i)!(k-j)!(i+j-k)!}\ \binom{m}{k}.$$

提示：用两种不同的方法计算 $(1+X)^k(1+Y)^k \in \mathbb{Z}[X,Y]$。利用这一点证明，二项式多项式函数 p_k 的 $\mathbb{Z}$-张成：$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, p_k(t) := \binom{t}{k}$ 构成一个环。

15.3 形式李群

在前一节中，我们看到多项式李群同构于形如（$\mathfrak{g}$，$*$）的幂零李群，其中 $*$ 是幂零李代数上的 BCH 乘法。本节将说明，这一结果可从多项式形式背景推广到形式背景，但这需要一些额外的概念准备。我们先引入形式局部凸范畴，其对象是局部凸空间 E，态射是"形式幂级数" $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\colon\ E \to F$，由连续多项式映射 φ_n 的序列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 表示，其中映射的次数为 n。将E 替换为不含常数项的形式幂级数空间 $E_0[[t]] \cong E^{\mathbb{N}}$ 后，每个形式映射 $E \to F$ 都实现一个光滑映射 $E_0[[t]] \to F_0[[t]]$，因此形式局部凸范畴实际上可以实现为光滑局部凸流形范畴的子范畴。

该范畴中的群对象称为形式李群。仿照多项式群的情形，我们证明每个形式李群 G 都有一个形式指数映射 $\mathrm{Exp}\colon\ \mathfrak{g} \to G$（其中 G 和 $\mathfrak{g}$ 具有相同的底层局部凸空间），且此映射是形式微分同胚。这意味着，每个形式李群在形式意义下都同构于一个满足$G = \mathfrak{g}$ 且 $\mathrm{Exp} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$的形式李群。进而，这意味着 $\mathfrak{g}$上的形式群结构由 $\mathfrak{g}$上的李括号所定义的豪斯多夫级数给出。因此，形式李群范畴等价于局部凸李代数范畴。

15.3.1 形式映射

首先，我们引入形式局部凸范畴 FLC。其对象是局部凸空间，而一个形式态射 $\varphi\colon E \to F$ 由一个齐次连续 F值多项式 $\varphi_n\colon E \to F$ 的序列 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 给出，其次数为 n。我们将 φ 视为对应于形式级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n$，由此得到如下复合规则：对于形式态射 $\varphi=(\varphi_n)\colon E\to F$ 和 $\psi=(\psi_n)\colon F\to G$，我们将 $(\psi\circ\varphi)_n$ 定义为该多项式的泰勒展开中次数为 n 的项

$$\sum_{i\le n}\psi_i\circ\Big(\sum_{j\le n}\varphi_j\Big).$$

在下文中，我们也将记

$$\varphi_{\le n}:=\sum_{j\le n}\varphi_j$$

为通过截断从 φ 得到的次数为 $\le n$ 的多项式映射。

由泰勒多项式的链式法则（命题 1.6.21）容易推出，这种复合是结合的；显然，(φ_n) 连同

$$\varphi_1=\mathrm{id}_E \quad \text{and} \quad \varphi_n=0 \quad \text{for} \quad n>1$$

可以与 FLC 中的 id_E 认同。将态射限制为仅有有限多个多项式 φ_n 非零的情形，我们得到保持原点的局部凸空间之间的多项式映射所构成的子范畴。特别地，我们用 0 表示取值为零的常值映射 $E\to F$，并将此映射与 FLC 中相应的态射认同。

注 15.3.1。虽然范畴论框架并未涵盖这种情况，但显然我们也可以允许形式映射中含有非零常数项 φ_0，但此时只有在 $\psi_0=0$ 时，复合 $(\varphi_n)\circ(\psi_n)$ 才有定义。

注 15.3.2。存在一个自然函子，从局部凸空间的范畴 E（其态射是映到某个局部凸空间 F 的光滑映射芽 $0\in E$，且将 0 映到 0），到由局部凸空间及其光滑映射构成的范畴。该函子将任意代表光滑映射 $f\colon U\to F, U\subseteq E$（其中 $U\to F$ 是一个零邻域）赋值为其在原点处的泰勒级数 $T_0^\infty(f)$。该赋值的函子性源自泰勒级数的链式法则（命题 1.6.21）。

反过来也成立，即可以将 FLC 实现为局部凸空间范畴的一个子范畴，其态射是光滑映射：

注 15.3.3。对于每个局部凸空间，我们用 $E_0[[t]]$ 表示形如 $\sum_{i=1}^{\infty}a_it^i$ 的形式 E 值幂级数的集合。每个齐次次数为 d 的多项式映射 $\varphi\colon E\to F$，因而具有 $\varphi(x):=$ 的形式

$\beta(x,\ x,\ \ldots\ldots,\ x)$，其中某个对称的 d-线性映射 $\beta\colon\ E^d \to F$ 通过以下方式扩展为映射$E_0[[t]] \to F_0[[t]]$

$$\widehat{\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i\Big) := \beta\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i\Big) = \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{\infty} \beta(a_{i_1}, \ldots, a_{i_d}) t^{i_1+\ldots+i_d},$$

这是良定义的，因为对于每个次数 n，只有有限多个直和项会对 t^n 的系数作出贡献。我们还注意到， $\widehat{\varphi}$ 的像包含于 $\sum_{j\geq d} Ft^j$ 中。由前面的观察可知，如果 $\varphi = (\varphi_n)\colon\ E \to F$ 是一个形式态射，那么我们也可以将其延拓为一个映射

$$\widehat{\varphi}\colon E_0[[t]] \to F_0[[t]] \quad \text{by} \quad \widehat{\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i\Big) := \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_n\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i\Big)$$

因为对于每个次数 n，只有有限多个 $\widehat{\varphi}_n$ 会对 t^n 的系数作出贡献。

我们将 $E_0[[t]]$ 赋予直积空间 $E^{\mathbb{N}}$ 的拓扑，并注意到，相对于这一拓扑，每个映射 $\widehat{\varphi}$ 都可以写成 $\widehat{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}^n t^n$，其中映射 $\widehat{\varphi}^n\colon\ E_0[[t]] \to F$ 是多项式映射，并且可经由某个商空间 $E_0[[t]]/(t^m) \cong E^{m-1}$ 分解。由此特别可知，每个映射 $\widehat{\varphi}$ 都是光滑的。

我们进一步注意到，对于 $h \in E$，有

$$\widehat{\varphi}(ht) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_n(ht) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(h) t^n,$$

因此，我们可以将 φ 还原为 $\widehat{\varphi}$ 在子空间$E \cdot t \subseteq E_0[[t]]$上的限制的泰勒级数。

赋值 $E \mapsto E_0[[t]]$, $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ 定义了一个函子，映入光滑范畴。

15.3.2 形式李群

显然，在 FLC中可以定义乘积，因此我们在此背景下引出形式群的概念:

定义 15.3.4。形式（局部凸）李群 是范畴 FLC中的一个群对象，即一个局部凸空间 E，带有两个态射$m = (m_n)\colon\ E \times E \to E$和 $\eta = (\eta_n)\colon\ E \to E$，满足

(FG1) $m \circ (m \times \mathrm{id}_E) = m \circ (\mathrm{id}_E \times m)$（结合律）。(FG2) $m \circ (0, \mathrm{id}_E) = m \circ (\mathrm{id}_E, 0) = \mathrm{id}_E$（单位元）。(FG3) $m \circ (\eta, \mathrm{id}_E) = m \circ (\mathrm{id}_E, \eta) = 0$（逆映射）。

请注意，这些恒等式中的每一个都等价于多项式函数 $m_n\colon\ E\times E\to E$ and $\eta_n\colon\ E\to E$之间的一列恒等式。例如，(2) 等价于

$$m_n(x,0)=m_n(0,x)=x$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。这尤其意味着线性项由下式给出

$$m_1(x,y)=m_1(x,0)+m_1(0,y)=x+y$$

并且二次项 m_2 是一个双线性映射 $E\times E\to E$。现在分析式 (3) 中的一阶项可得 $m_1(\eta_1(x)\ x)=0$，于是得到

$$\eta_1(x)=-x.$$

令

$$[x,y]:=m_2(x,y)-m_2(y,x),$$

我们便在 E 上得到一个连续交替双线性映射。利用 Hall 恒等式（阶为 42！）（习题 8.4.7；[Sr92]），可知它是一个李括号。

反过来，对于每个局部凸李代数 $\mathfrak{g}$，BCH 级数在 $\mathfrak{g}$ 上定义了一个形式李群 $\mathrm{Ch}(\mathfrak{g})$，其 $\eta(x)=-x$。

下面我们将看到，η 是冗余的。它的存在性可由 (FG1) 和 (FG2) 推出。

注 15.3.5. 在 [Ri50] Ritt 将无穷多个变量中的形式群定义为一列形式幂级数 $f^i(u,v)$ 在变量 $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 中所给出的数据，并假设每个幂级数 f^i 中给定次数的项只有有限个。这等价于在局部凸空间 $E:=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上处理形式群。

Ritt 的公理存在一些冗余，例如

$$f_0^i=0\quad\text{ and }\quad f_1^i(u,v)=u_i+v_i.$$

注 15.3.6. 如果 $(G,D_G,m_G,0)$ 是一个局部李群，其中 G 是局部凸空间 E 中的一个 0-邻域，那么泰勒展开的函子性意味着 $(E,T^\infty_{(0,0)}(m_G))$ 是一个形式李群（参见注 15.3.2）。

定理 15.3.7（形式反函数定理）。形式映射$\varphi=(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon\ E\to F$是同构，当且仅当 $\varphi_1\colon\ E\to F$是线性同构。

证明。若 $\psi\colon\ F\to E$是一个形式映射，且 $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_E$和 $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_F$，那么一阶项满足

$$\psi_1\circ\varphi_1=\mathrm{id}_E\quad\text{ and }\varphi_1\circ\psi_1=\mathrm{id}_F,$$

使得 φ_1 是一个线性同构。

反过来，假设 φ_1 是一个线性同构。那么只需证明 $\varphi_1^{-1}\circ\varphi\colon E\to E$ 是一个自同构。因此，我们可以假设 $E=F$。此时 $\mathrm{Hom}(E,E)$ 是一个幺半群，我们需要证明：若 $\varphi_1\in\mathrm{GL}(E)$，则 φ 是可逆的。

我们首先归纳地构造 φ 在同态集(E,E)中的一个左逆 (ψ_n)。我们从 $\psi_1:=\varphi_1^{-1}$ 开始。假设 $k>1$，且 ψ_j 已经对 $j\le k-1$ 定义，使得 $\psi\circ\varphi-\mathrm{id}_E$ 在阶为 k 的项之前均为零。模去次数为 $k+1$ 的项后，我们得到

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)_{\le k}&=(\psi_k\circ\varphi)_{\le k}+\sum_{j=1}^{k-1}(\psi_j\circ\varphi)_{\le k}=\psi_k\circ\varphi_1+\sum_{j=1}^{k-1}(\psi_j\circ\varphi)_{\le k}\\&=\psi_k\circ\varphi_1+\mathrm{id}_E+\sum_{j=2}^{k-1}(\psi_j\circ\varphi)_k.\end{aligned}$$

因此我们令

$$\psi_k:=-\left(\sum_{j=2}^{k-1}(\psi_j\circ\varphi)_k\right)\circ\varphi_1^{-1}$$

由此得到 $(\psi\circ\varphi)_{\le k}=\mathrm{id}_E$。。归纳地，我们得到一个形式映射 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_E$。这证明 φ 有一个左逆。

接下来我们构造 φ 的一个右逆 (η_n)。我们再次从 $\eta_1:=\varphi_1^{-1}$ 开始。假设 $k>1$，且 η_j 已经对 $j\le k-1$ 定义，使得 $\varphi\circ\eta-\mathrm{id}_E$ 在阶为 k 的项之前均为零。模去次数为$\ge k+1$的项后，我们得到

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\eta)_{\le k}&=(\varphi_1\circ\eta)_{\le k}+\sum_{j=2}^{k}(\varphi_j\circ\eta)_{\le k}=\varphi_1\circ\eta_{\le k}+\sum_{j=2}^{k}(\varphi_j\circ\eta_{\le k-1})_{\le k}\\&=\mathrm{id}_E+\varphi_1\circ\eta_k+\sum_{j=2}^{k}(\varphi_j\circ\eta_{\le k-1})_k.\end{aligned}$$

With

$$\eta_k:=-\varphi_1^{-1}\circ\Big(\sum_{j=2}^{k}\big(\varphi_j\circ\eta_{\le k-1}\big)_k\Big).$$

现在我们得到 $(\varphi\circ\eta)_{\le k}=\mathrm{id}_E$。归纳地，我们由此得到 φ 的一个右逆η。现在我们有 $\eta=(\psi\circ\varphi)\circ\eta=\psi\circ(\varphi\circ\eta)=\psi$，因此 φ 是可逆的。□

定理 15.3.8。每个形式幺半群都是形式群。

证明。设 $m\colon E\times E\to E$ 是一个形式结合乘法，满足

$$m(0,x)=m(x,0)=x,$$

也就
是说，

(1) $m \circ (m \times \mathrm{id}_E) = m \circ (\mathrm{id}_E \times m)$（结合律），(2) $m \circ (\varepsilon_E, \mathrm{id}_E) = m \circ (\mathrm{id}_E, \varepsilon_E) = \mathrm{id}_E$（单位元），其中 $\varepsilon_E\colon E \to E$ 是取常数 0 的映射。

于是，注 5.1.8 中的相同论证表明

$$m_1(x, y) = x + y$$

是首阶项。我们考虑映射

$$F\colon E \times E \to E \times E, \quad (x, y) \mapsto (x, xy).$$

于是 $F_1(x, y) = (x, x + y)$ 是一个可逆连续线性映射，因此定理 15.3.7 蕴含 F 可逆。令 $G\colon E \times E \to E \times E$ 为 F 的唯一逆映射。记

$$G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y)).$$

Then

$$(x, y) = (F \circ G)(x, y) = (G_1(x, y), m(G_1(x, y), G_2(x, y)))$$

这意味着 $G_1(x, y) = x$，并且

$$y = m(x, G_2(x, y)).$$

置

$$\eta_r(x) := G_2(x, 0)$$

并得到

$$0 = m(x, \eta_r(x)).$$

同样，考察映射 $F'(x, y) := (x, yx)$，可得一个态射 $\eta_l\colon E \to E$，满足

$$0 = m(\eta_l(x), x).$$

因此得到

$$\begin{aligned} \eta_r(x) &= m(0, \eta_r(x)) = m(m(\eta_l(x), x), \eta_r(x)) \\ &= m(\eta_l(x), m(x, \eta_r(x))) = m(\eta_l(x), 0) = \eta_l(x). \end{aligned}$$

因此，$\eta := \eta_r = \eta_l$ 满足 $m \circ (\eta_E, \mathrm{id}_E) = m \circ (\mathrm{id}_E, \eta_E) = \varepsilon_E,$，这意味着 m 在 E 上定义了一个形式群结构。□

15.3.3 形式向量场的形式积分曲线

接下来，我们为 E 上的形式群律 m 构造指数映射。为此，我们必须讨论形式向量场的形式积分曲线。

E 上的形式向量场是一个形式映射 $X\colon E \to E$，其中我们不要求 $X_0 = 0$。

E 中的形式曲线是一个态射 $\gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $\mathbb{R} \to E$。于是对某个 $c_k \in E$有$\gamma_k(t) = t^k c_k$ ，从而我们可以将形式曲线与 E 中相应的序列$(c_k)_{k\in E}$ 等同起来，并用 γ_k 表示 c_k。对于任意形式曲线

$$\gamma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \gamma_k,$$

我们将其导数定义为

$$\gamma'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) t^k \gamma_{k+1}.$$

一条 X 的形式积分曲线是一个态射 γ: $\mathbb{R} \to E$ 满足

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad \text{i.e.,} \quad \gamma' = X \circ \gamma. \tag{15.10}$$

注意，由于 $\gamma_0 = 0$， $X \circ \gamma$ 是有定义的，因此 (15.10) 有意义。

命题 15.3.9.每个形式向量场 X 都有唯一的形式积分曲线 γ_X。

证明。 直至次数为 $n+1$ 的项，方程 $\gamma' = X \circ \gamma$ 蕴含

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) t^k \gamma_{k+1} = (X \circ \gamma)_{\le n} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (X_k \circ \gamma_{\le n})_{\le n}.$$

因此，我们可以归纳地得到

$$\gamma_1 = X_0.$$

进一步，$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) t^k \gamma_{k+1} = (X \circ \gamma)_{\le n-1}$，这意味着

$$(n+1) t^n \gamma_{n+1} = (X \circ \gamma)_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k \circ \gamma_{\le n})_n,$$

因此

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (X_k \circ \gamma_{\le n})_n(1) = \frac{1}{n+1} (X \circ \gamma_{\le n})_n(1). \tag{15.11}$$

由此公式可知，对每个形式向量场，至多存在一条形式积分曲线。

反过来，其存在性可由归纳定义得到： $\gamma_1 := X_0$并且

$$\gamma_{n+1} := \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (X_k \circ \gamma_{\le n})_n(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)t^k\gamma_{k+1} &= X_0+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(X_j\circ\gamma_{\le k})_k(t)\\ &= X_0+\sum_{k=1}^{n}(X\circ\gamma_{\le k})_k(t) = X_0+\sum_{k=1}^{n}(X\circ\gamma)_k(t)\\ &= (X\circ\gamma)_{\le n}(t).\end{aligned}$$

由于这对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都成立，因此我们有 $\gamma' = X\circ\gamma$。 □

引理 15.3.10. 设 $\varphi\colon E\to F$ 为形式微分同胚， X 为 E上的形式向量场，且

$$\widetilde{X} := T(\varphi)\circ X\circ\varphi^{-1}$$

在 F上相应的形式向量场。则$\varphi\circ\gamma_X = \gamma_{\widetilde{X}}$.

证明。 形式曲线 $\widetilde{\gamma}_X := \varphi\circ\gamma_X$ 满足

$$\widetilde{\gamma}_X' = T\varphi\circ\gamma' = T\varphi\circ X\circ\gamma = \widetilde{X}\circ\varphi\circ\gamma = \widetilde{X}\circ\widetilde{\gamma}_X.$$

~因此 $\widetilde{\gamma}_X$ 是 X的一条积分曲线，该断言由形式积分曲线的唯一性得出。□

注 15.3.11.（形式皮卡迭代）设 X 为 E上的形式向量场。然后我们通过皮卡迭代定义一个多项式序列:

$$\gamma^0 := 0,\quad \gamma^{n+1}(t) := \int_0^t (X\circ\gamma^n)_{\le n}(s)\,ds.$$

由此可得

$$\gamma^1(t) = \int_0^t X(0)\,ds = tX_0$$

and

$$\gamma^2(t) = \int_0^t X_{\le 1}(sX_0)\,ds = \int_0^t X_0+sX_1(X_0)\,ds = tX_0+\frac{t^2}{2}X_1(X_0).$$

此外,

$$\begin{aligned}\gamma^3(t) &= \int_0^t (X\circ\gamma^2)_{\le 2}(s)\,ds\\ &= \int_0^t X_0+sX_1(X_0)+\frac{s^2}{2}X_1^2(X_0)+s^2X_2(X_0)\,ds\\ &= tX_0+\frac{t^2}{2}X_1(X_0)+\frac{t^3}{3!}X_1^2(X_0)+\frac{t^3}{3}X_2(X_0).\end{aligned}$$

根据定义，我们有

$$(\gamma^{n+1})' = (X \circ \gamma^n)_{\leq n}.$$

另一方面， X 的唯一积分曲线 γ_X 满足

$$\gamma_X' = X \circ \gamma_X,$$

这将导致

$$(\gamma_X')_{\leq n} = (X \circ \gamma_X)_{\leq n}.$$

显然， $\gamma^1 = (\gamma_X)_1$。因此假设 $\gamma^n = (\gamma_X)_{\leq n}$。于是

$$(\gamma_X')_{\leq n} = (X \circ (\gamma_X)_{\leq n})_{\leq n} = (X \circ \gamma^n)_{\leq n} = (\gamma^{n+1})',$$

因此

$$(\gamma_X)_{\leq n+1} = \gamma^{n+1}.$$

我们得出， γ_X 可以通过上述皮卡迭代得到。

由（15.11）可知，积分曲线 γ_X 对向量场 X 的依赖关系如下：对于每个 $n \in \mathbb{N}$，元素 $(\gamma_X)_n$ 关于 X 的依赖是多项式的，其中多项式的次数有界于 n。例如，$\gamma_1 = X_0$ 关于 X 呈线性关系，并且

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}(X_1 \circ \gamma_1)(1) = \frac{1}{2}X_1(X_0)$$

是关于 X 的分量的二次式。此外

$$\gamma_3 = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}X_1^2(X_0) + X_2(X_0)\Big).$$

引理 15.3.12。在形式层面上，我们有

$$\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st), \quad for \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

特别地，$(\gamma_X)_n$ 是关于 X 的分量的 n 次齐次式。

证明。曲线 $\eta(t) := \gamma_X(st)$ 满足

$$\eta'(t) = s\gamma_X'(st) = sX(\gamma_X(st)) = (sX)(\eta(t)),$$

因此，积分曲线的唯一性意味着 $\eta = \gamma_{sX}$，即

$$\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st).$$

由此关系立即可知，$(\gamma_X)_n$ 在 X中是 n 阶齐次的。

□

现在我们回到最初的问题：构造形式李群(E, m, η)的指数函数。首先，我们为每个 $x \in E$ 关联一个形式向量场，定义如下：

$$x_l(y) := \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} m(y, tx),$$

这意味着我们首先考虑形式映射

$$\mathbb{R} \times E \times E \to E, \quad (t, x, y) \mapsto m(y, tx)$$

然后选出关于 t 为线性的那些项。由 $m_1(y,\ tx) = y + tx$ 可知，特别是，m_1 对 $x_l(y)$ 的线性项 x 有贡献。更一般地，由 $m_k(y,\ tx)$ 可得关于 x 的 1 阶项以及关于 y 的 $k-1$ 阶项。因此

$$(x_l)_k = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} m_{k+1}(y, tx).$$

令 $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to E$ 表示形式向量场 x_l 的唯一形式积分曲线。该向量场关于 x 线性依赖，因此 $(\gamma_x)_n$ 是关于 x 的 n 阶齐次多项式。由此得到形式映射

$$\mathrm{Exp}\colon E \to E, \quad \mathrm{Exp}_n(x) := (\gamma_x)_n,$$

称为形式群 (E, m_E) 的指数函数。由于

$$\mathrm{Exp}_1(x) = (\gamma_x)_1 = x,$$

我们有 $\mathrm{Exp}_1 = \mathrm{id}_E$，而形式反函数定理蕴含 $\mathrm{Exp}: E \to E$ 是 E 的形式微分同胚。

现在我们考虑新的形式群结构

$$\widetilde{m} := \mathrm{Exp}^{-1} \circ m \circ (\mathrm{Exp} \times \mathrm{Exp}).$$

我们希望证明这一新结构与 $\mathrm{Ch}(\mathfrak{g})$ 一致，即 $\widetilde{m}$ 由 BCH 级数给出。

Let

$$\widetilde{x}_l(y) := \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \widetilde{m}(y, tx) = T_{(y,0)}(\widetilde{m})(0, x).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_l(y) &= T(\mathrm{Exp})^{-1} T(m) T_{(y,0)}(\mathrm{Exp} \times \mathrm{Exp})(0, x) \\
&= T(\mathrm{Exp})^{-1} T_{(\mathrm{Exp}\, y, 0)}(m)(0, T_0(\mathrm{Exp})x) \\
&= T(\mathrm{Exp})^{-1} T_{(\mathrm{Exp}\, y, 0)}(m)(0, x) = \big(T(\mathrm{Exp})^{-1} \circ x_l \circ \mathrm{Exp}\,\big)(y),
\end{aligned}$$

因此引理 15.3.10 蕴含

$$\widetilde{\gamma}_x := \mathrm{Exp}^{-1} \circ \gamma_x$$

是 $\widetilde{x}_l$ 的唯一形式积分曲线。因此

$$\gamma_x(t) = \gamma_{tx}(1) = \mathrm{Exp}(tx)$$

蕴含 $\widetilde{\gamma_x}(t) = tx$. 因此，由 Exp 给出的变换将形式群律 m 变换为形式群律 $\widetilde{m}$ ，后者具有加法性质，即相应的指数的

$$\widetilde{\mathrm{Exp}} = \mathrm{id}_E$$

是恒等映射。

下面我们称形式李群 (E, m)为典范的，如果相应的指数映射是 id_E。因此我们已经证明:

命题 15.3.13。 每个形式李群 (E, m) 都同构于一个典范形式李群，即同构于满足 $\exp_E = \mathrm{id}_E$ 的形式李群。

用 $\mathfrak{g} = (E, [\cdot,\cdot])$ 表示形式李群 (E, m) 的李代数。显然，$\mathrm{Ch}(\mathfrak{g})$ 是一个典范李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ （参见定理 7.3.9），我们要证明它是唯一的。

引理 15.3.14。 如果形式李群 (E, m) 是典范的，那么它的切丛 $(T(E)\ T(m))$也具有这一性质。

证明。 若 (F, m_F) 是形式李群，且 Exp_F是其指数函数，则 $T(\mathrm{Exp}_F)$ 是形式李群 $T(F)$ 的指数函数。事实上，对每个 $x \in F$，都有如下关系

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Exp}_F(tx) = \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} \operatorname{Exp}_F(tx) * sx.$$

应用切函子可得，对于 $(x, v) \in T(F) \cong F \times F$，有如下关系

$$\frac{d}{dt}T(\operatorname{Exp}_F)(tx, tv) = \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0} T(\operatorname{Exp}_F)(tx, tv) * (sx, sv),$$

这意味着 $t \mapsto T(\mathrm{Exp}_F)(tx, tv)$ 是由下式定义的向量场的唯一形式积分曲线

$$(x, v)_l(y, w) := \tfrac{d}{ds}\big|_{s=0}(y, w) * (sx, sv).$$

前面的论证特别表明，$\mathrm{Exp}_F = \mathrm{id}_F$ 蕴含 $\mathrm{Exp}_{T(F)} = T(\mathrm{Exp}_F) = T(\mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{T(F)}$，因此如果 (F, m_F) 具有这一性质，那么 $(T(F)\ T(m_F))$ 是典范的。□

任意形式李群 (E, m_E) 都由映射 $(m_E)_n$ 唯一确定，这些映射也可以由迭代切映射得到

$$T^n(m_E)\colon T^n(E) \times T^n(E) \to T^n(E),$$

限制在纤维 $T^n(E)_0$ 之上 0 的部分；该纤维是一个幂零群，并赋有多项式乘法。

因此，要证明任何典范形式李群（E，m_E）都具有 Ch(𝔤) 的形式，只需在附加假设它是幂零的且 m_E 是多项式的情况下验证这一点。此时形式群结构就是实际的群结构，我们需要证明：对于局部凸空间 E 上任意幂零多项式李群结构，若它作为形式群是典范的，则 m_E 就是 BCH 乘法。

根据定理 8.4.5，只需证明

$$tx * sx = (t+s)x \quad \text{for} \quad t, s \in \mathbb{R}, x \in E.$$

此条件等价于曲线 $\eta_x(t) := tx$ 是左不变向量场 x_l的一条积分曲线。这并不能**立即** 由假设 E 是一个典范形式群直接推出；该假设只能说明 η_x 表示向量场 x_l在 0 处任意积分曲线的泰勒级数。我们将在下一节中弥补这一缺口，采用 Lazard 的一种方法；我们已在第 15.2 节的多项式情形中见过这种方法。

15.3.4 单参数群

设 (E, m) 是一个形式李群。我们归纳地定义幂函数 p_k, $k \in \mathbb{N}$，如下：

$$p_1(x) = x \qquad \text{and} \quad p_{k+1}(x) := m(x, p_k(x)).$$

下面的定理是 Lazard 一项结果的另一种变体（参见 [Sr92], 第 114 页）；我们已经在定理 15.2.5 中见过它的多项式版本：

定理 15.3.15（Lazard 定理——形式版本）。存在形式映射 $\psi^k\colon\ E \to E$, $k \in \mathbb{N}$，它们由以下条件唯一确定：

(1) $\psi^1(x) = x$.(2) $\psi^k(x)$ 的阶为 $\geq k$，即，对于 $j < k$，$\psi^k_j = 0$ 。(3) 对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $p_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{k}{i} \psi^i(x)$。

证明。**唯一性：** 由 (3) 可结合 (2) 推导出阶为 n 的项：

$$(p_k)_n = \sum_{i \leq n} \binom{k}{i} \psi^i_n,$$

这是一个取值于 E 的二项式多项式函数，而相应的系数 ψ^i_n 唯一确定，因此是次数为 n 的齐次函数。**存在性：** 根据上面对二项式多项式函数的讨论，我们需要证明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，这些函数

$$f_x\colon \mathbb{Z} \to E, \quad k \mapsto (p_k)_n(x)$$

都是次数为 $\leq n$ 的二项式多项式。

我们对 n 使用归纳法证明这一点。对于 $n=1$，有

$$(p_k)_1(x) = kx,$$

由 $m_1(x,y) = x+y$ 可直接得出。假设 $n>1$，并且断言对映射 $(p_k)_j$，$j \leq n-1$ 成立。要证明 $f_x(n) := (p_k)_n(x)$ 是次数为 $\leq n$ 的二项式多项式，只需证明 Δf_x 是次数为 $\leq n-1$ 的二项式多项式（引理 15.2.4）。由 $p_{k+1}(x) = m(x,p_k(x)) = x + p_k(x) + \ldots$，可推出

$$\Delta f_x(k) = (p_{k+1})_n(x) - (p_k)_n(x) = \sum_{i+j\leq n} m_{ij}(x, p_k(x))_n,$$

其中，m_{ij} 表示 $m(x,y)$ 中关于 x 齐次且次数为 i、关于 y 次数为 j 的分量。在每一项 $m_{ij}(x,p_k(x))$ 中，任何对 n 阶项的贡献都来自 $p_k(x)$ 中阶数为 $<n$ 的项，这些项可写成

$$(p_k)_{\leq n-1} = \sum_{i\leq k\leq n-1} \binom{k}{i} \psi_k^i,$$

一个次数为 $\leq n-1$ 的二项式多项式。由于两个次数分别为 i 和 j 的 $\mathbb{Z}$ 值二项式多项式的乘积是一个次数为 $\leq i+j$ 的 $\mathbb{Z}$ 值二项式多项式（参见习题 15.2.1），因此 Δf_x 是次数为 $<n$ 的二项式多项式。这意味着 f_x 是次数为 $\leq n$ 的二项式多项式，证明至此完成。□

例 15.3.16。如果 $\mathcal{A}$ 是结合代数，且

$$m(x,y) = x + y + xy,$$

那么 $p_k(x) = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} x^i$ 意味着 $\psi_i(x) = x^i$ 是结合代数 $\mathcal{A}$ 的幂函数。

与第 15.2 节中一样，对于每个 $x \in E$，我们得到一个形式曲线

$$\zeta_x \colon \mathbb{R} \to E, \quad \zeta_x(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \binom{t}{j} \psi^j(x),$$

并注意到这是一个定义良好的形式映射，因为每个次数中都只有有限多个直和项。

对于 s，$t \in \mathbb{N}$，现在我们有

$$\zeta_x(t+s) = p_{t+s}(x) = p_t(x)p_s(x) = \zeta_x(t)\zeta_x(s),$$

作为形式函数 $E \to E$。对于 x 中每个固定的齐性次数，这是多项式映射 $\mathbb{R}^2 \to E$ 在子集 $\mathbb{N}^2$ 上取值的恒等式；由于 $\mathbb{R}^2$ 上的每个多项式都由其在 $\mathbb{N}^2$ 上的取值唯一确定，

$$\zeta_x(t+s) = p_{t+s}(x) = p_t(x)p_s(x) = \zeta_x(t)\zeta_x(s)$$

也对所有 $s,\ t \in \mathbb{R}$ 成立。由此我们得出，ζ_x 是一个形式单参数群。它在 0 处的导数为

$$\zeta_x'(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \psi^j(x)$$

因为

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \binom{t}{j} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-j+1)}{j!} = \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

我们考虑形式映射

$$L\colon E \to E, \quad L(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \psi^j(x).$$

那么 $L_1(x) = \psi^1(x) = x$ 意味着 L 是一个形式微分同胚。

另一方面，ζ_x 是一个单参数群这一事实意味着，ζ_x 是相应向量场 $L(x)$的唯一积分曲线，这意味着

$$\operatorname{Exp}(tL(x)) = \gamma_{L(x)}(t) = \zeta_x(t),$$

对于 $t = 1$，我们看到 $\operatorname{Exp}(L(x)) = x.$。由此得到 $\operatorname{Exp} = L^{-1}$，并看到所有曲线 $t \mapsto \operatorname{Exp}(tx)$ 都是形式单参数群。

利用定理 8.4.5，将其应用于$E_0[[t]]$上的指数李群结构，我们现在得到：：

定理 15.3.17。对于任意典范形式李群 G，乘法$m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 由豪斯多夫级数给出，即 $(G, m) = \operatorname{Ch}(\mathfrak{g})$。

15.4 李群扩张的一些结果

本节汇集李群扩张的一些零散结果。在小节 15.4.1 中，我们先给出一个判据，用来判断李群 G 被 N 扩张 G 为 $\widehat{}$时是否存在指数函数：只需 N 是正则的，且 G 存在指数函数。秉持将李群的良好性质推广到由正则李群扩张而成的群这一思路，我们在小节 15.4.2 中提出一种工具，可用于积分满足 Maurer–Cartan 方程的李代数值 1-形式，即使相应的李群尚不确定是否正则。基本定理的相对版本（定理 15.4.6）保证：若 G 中具有可积性，且 N 是正则李群，则李群 $\widehat{}$ 扩张 G 为 G 时具有可积性。

在第15.4.3小节中，我们研究李群 G 由一个光滑的 G-模 $\mathfrak{a}$ 所作的阿贝尔扩张，并假设该模是麦基完备的。我们的主要

结果涉及给定李代数余循环时光滑全局群余循环的存在性。特别是，我们证明当 G 光滑可缩时，这类余循环总是存在。

在小节 15.4.4 中，我们讨论这样一个问题：许多局部指数李群的中心扩张甚至可能没有光滑的局部截面。典型例子来自 G，它被视为伴随群的中心扩张；若闭子空间 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ 不是分裂的，就会出现这种情况。为处理这类中心扩张，我们引入广义中心扩张，并发展基于将此类扩张嵌入由余循环定义的中心扩张中的工具。

15.4.1 李群扩张的指数映射

对于下面的定理，我们回顾定义 9.5.5 中的李群扩张概念。

定理15.4.1。设 $q\colon G \to G$ 是由正则李群 $N = \ker q$ 对 G 的李群扩张。若 G 具有光滑指数映射，则 G 也具有光滑指数映射。

若对于 Mackey 完备局部凸空间 $\mathfrak{z}$，$N = (\mathfrak{z}, +)$，则前述定理的假设尤其成立。

证明。令 $\sigma\colon U \to G$ 为 q 的光滑局部截面，定义在开单位元邻域 $U \subseteq G$ 上，并满足 $\sigma(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$。令 $V \subseteq \mathfrak{g} := \mathbf{L}(G)$ 为一个平衡开零邻域，使得

$$\exp_G(V) \subseteq U.$$

于是，$W := \mathbf{L}(q)^{-1}(V)$ 是 $\widehat{\mathfrak{g}} := \mathbf{L}(\widehat{G})$ 中的平衡开零邻域。若 $w \in W$，则

$$\overline{\gamma}_w\colon [0,1] \to U, \quad \overline{\gamma}_w(t) := \exp_G(t\,\mathbf{L}(q)(w))$$

是 U 中的一条光滑曲线，满足 $\gamma_w(0) = \mathbf{e}$ 且 $\delta^\ell(\gamma_w) = \mathbf{L}(q)(w)$。因此

$$\eta_w := \sigma \circ \overline{\gamma}_w$$

是 G 中的一条光滑曲线，满足 $\eta_w(0) = \mathbf{e}$。由于 $q \circ \eta_w = \overline{\gamma}_w$，我们有

$$\mathbf{L}(q) \circ \delta^\ell(\eta_w) = \delta^\ell(q \circ \eta_w) = \delta^\ell(\overline{\gamma}_w) = \mathbf{L}(q)(w),$$

因此

$$\delta^\ell(\eta_w)_t - w \in \ker \mathbf{L}(q) = \mathbf{L}(N) =: \mathfrak{n} \quad \text{for each} \quad t \in [0,1]. \tag{15.12}$$

我们要寻找一条光滑曲线 $\theta_w\colon [0,1] \to N$，使得

$$\theta_w(0) = e \quad \text{and} \quad \delta^\ell(\theta_w \eta_w) = w. \tag{15.13}$$

由于

$$\delta^\ell(\theta_w \eta_w) = \delta^\ell(\eta_w) + \mathrm{Ad}(\eta_w^{-1})\delta^\ell(\theta_w),$$

恒等式 (15.13) 等价于 $\delta^\ell(\eta_w) + \mathrm{Ad}(\eta_w^{-1})\delta^\ell(\theta_w) = w$. 等价地,

$$\delta^\ell(\theta_w) = \mathrm{Ad}(\eta_w)(w - \delta^\ell(\eta_w)),$$

根据 (15.12)，右端是 $\mathfrak{n}$ 中的一条光滑曲线。前面的方程有唯一解

$$\theta_w := \mathrm{Evol}_N\big(\mathrm{Ad}(\eta_w)(w - \delta^\ell(\eta_w))\big).$$

于是 $\zeta_w := \theta_w \eta_w$ 是一条光滑曲线 $[0,1] \to G$，它将 0 映到 $\mathbf{e}$，且满足$\delta^\ell(\zeta_w) = w$。根据练习 5.5.3，ζ_w 可唯一延拓为一个光滑同态 $\gamma_w\colon \mathbb{R} \to G$，它由初始条件 $\gamma_w'(0) = w$ 唯一确定。对于每个 $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$，曲线 $t \mapsto \gamma_w(st)$ 是唯一的光滑单参数群 γ_{sw}，其在 0 处的导数为 sw。因此，对于所有 $w \in \widehat{\mathfrak{g}}$，我们都有 $\gamma_w\colon \mathbb{R} \to G$ 可用。定义

$$\exp\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \widehat{G}, \quad \exp(w) := \gamma_w(1).$$

如果我们能证明 $\exp|_W$ 是光滑的，那么根据引理 5.6.2，exp 也是光滑的。首先注意到映射

$$f\colon W \to C^\infty([0,1], \widehat{G}), \quad w \mapsto \eta_w$$

是光滑的，因为

$$\widehat{f}\colon W \times [0,1] \to \widehat{G}, \quad \widehat{f}(w,t) := \eta_w(t) = \sigma\big(\exp_G(t\,\mathbf{L}(q)w)\big)$$

是光滑的（命题 11.1.1）。由于 $\delta^\ell\colon C^\infty([0,1], \widehat{G}) \to C^\infty([0,1], \widehat{\mathfrak{g}})$ 是光滑的（命题 6.2.3），我们推得 $\delta^\ell \circ f$ 是光滑的，因此映射也

$$h := \widehat{\delta^\ell \circ f}\colon W \times [0,1] \to \widehat{\mathfrak{g}}, \quad h(w,t) := \delta^\ell(\eta_w)(t).$$

我们推得

$$\varphi\colon W \to C^\infty([0,1], \mathfrak{n}), \quad \varphi(w) := \mathrm{Ad}(\eta_w)(w - \delta^\ell(\eta_w))$$

是光滑的，因为

$$\widehat{\varphi}\colon W \times [0,1] \to \mathfrak{n}, \quad \widehat{\varphi}(w,t) := \widehat{\mathrm{Ad}}(\widehat{f}(w,t), w - h(w,t))$$

是光滑的。因此,

$$\psi\colon W \to C^\infty([0,1], N), \quad w \mapsto \theta_w = \mathrm{Evol}_N(\varphi(w))$$

是光滑的。现在，对于 $w \in W$，我们有

$$\exp(w) = \gamma_w(1) = \zeta_w(1) = \theta_w(1)\eta_w(1) = \psi(w)(1)f(w)(1) = \widehat{\psi}(w,1)\widehat{f}(w,1),$$

它是关于 $w \in W$ 的光滑函数。 □

推论 15.4.2。如果在定理15.4.1中， G 是局部指数的，且 N 是 G中的$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$中心的，那么 G 也是局部指数的。

证明。设 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个开凸零邻域，使得 $(\exp|_U)^{-1}$ 是 G 的一个坐标图。于是 $\sigma(\exp_G x) := \exp_{\widehat{G}} x$ 定义了一个光滑截面 $\exp_G(U) \to \widehat{G}$，它是商映射的截面，因此我们得到 G 的一个坐标图的逆映射

$$\mathfrak{z} \times U \to \widehat{G}, \quad (z, x) \mapsto \exp_Z(z) \exp_{\widehat{G}} x = \exp_{\widehat{G}} z \exp_{\widehat{G}} x = \exp_{\widehat{G}}(z + x)$$

$\widehat{\ }$（引理 5.6.16）。这意味着 G 是局部指数的。 □

15.4.2 相对基本定理

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$考虑李群扩张 $q\colon G \to G$，它是 N 对 G 的扩张。若 G 是正则的，且 $\alpha \in \Omega^1(M, \widehat{\mathfrak{g}})$ 满足 Maurer–Cartan 方程，则由基本定理 6.1.13 可知，它局部可积。在 G 是否正则尚不明确的情形下，我们希望有一些工具，能在具体情形中绕过这一条件。本小节介绍的基本定理的相对版本正是这样一种工具。它断言，若 N 是正则的，则 α 的局部可积性可由 $\mathbf{L}(q)\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 的局部可积性推出。

如果 $M = \widehat{\mathfrak{g}}$ 和 $\kappa_{\widehat{\mathfrak{g}}}(x) := \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt$ 存在，并且在 $\Omega^1(\widehat{\mathfrak{g}},\ \widehat{\mathfrak{g}})$ 上定义了一个光滑 1-形式，那么 $\kappa_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ 的局部可积性等价于存在一个 $\widehat{\ }$ 的光滑指数映射；而 $\mathbf{L}(q)\kappa_{\widehat{\mathfrak{g}}} = \kappa_{\mathfrak{g}} \circ \mathbf{L}(q)$ 的可积性则由存在一个 G 的光滑指数映射推出。从这个意义上说，如果我们已经有了 $\kappa_{\widehat{\mathfrak{g}}}$，那么局部基本定理就会推出定理 15.4.1；但我们不想先验地假设这一点。

定义 15.4.3。设 M 是一个光滑流形， G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。我们记

$$Z^1_{\mathrm{dR}}(M, \mathfrak{g}) := \left\{\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})\colon d\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0\right\}$$

为 Maurer–Cartan 方程的解集。如果 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，那么 $Z^1_{\mathrm{dR}}(M,\ \mathfrak{g})$ 是取值于 $\mathfrak{g}$ 的闭 1-形式空间。

如果 G 是正则的， M 是连通的，并且 $m_0 \in M$，那么由基本定理 6.1.13 可得到映射序列

$$G \hookrightarrow C^\infty(M, G) \xrightarrow{\delta} Z^1_{\mathrm{dR}}(M, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\mathrm{per}} \operatorname{Hom}(\pi_1(M, m_0), G),$$

该序列作为带基点集的序列是正合的，也就是说，在每一点处，基点的逆像都是前一个映射的值域。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个局部凸李代数， M 是一个光滑流形。此外，设 $\alpha \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ 是一个取值于 $\mathfrak{g}$ 的光滑 1-形式， $\gamma\colon M \to \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ 是一个映射，其光滑性含义如下：

$$\widetilde{\gamma}\colon M\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\quad (m,x)\mapsto(\gamma(m)x,\gamma(m)^{-1}x)$$

是光滑的（参见 D.2 节）。如果 γ 是光滑的，那么

$$\delta(\gamma)_m:=\gamma(m)^{-1}\circ T_m(\gamma)\colon T_m(M)\to\operatorname{der}(\mathfrak{g})$$

使得相应映射 $TM\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是光滑的（命题 D.2.22）。我们用 $\gamma.\alpha\in\Omega^1(M,\mathfrak{g})$ 表示逐点定义的光滑 1-形式 $(\gamma.\alpha)_m=\gamma(m)\circ\alpha_m$ for $m\in M$。对于任意光滑向量场$X\in\mathcal{V}(M)$，我们有

$$(X\gamma)(m):=T_m(\gamma)X(m)=\gamma(m)\big(\delta(\gamma)_mX(m)\big),$$

即，

$$X\gamma=\langle\gamma.\delta(\gamma),X\rangle.$$

现在，对于向量场 $X,Y\in\mathcal{V}(M)$，我们得到：

$$\begin{aligned}
&d(\gamma.\alpha)(X,Y)=X\big((\gamma.\alpha)(Y)\big)-Y\big((\gamma.\alpha)(X)\big)-(\gamma.\alpha)([X,Y])\\
&=(X\gamma).\alpha(Y)+\gamma.(X\alpha(Y))-(Y\gamma).\alpha(X)+\gamma.(Y\alpha(X))-(\gamma.\alpha)([X,Y])\\
&=(\gamma.d\alpha)(X,Y)+(X\gamma).\alpha(Y)-(Y\gamma).\alpha(X)\\
&=(\gamma.d\alpha)(X,Y)+\big(\gamma.\delta(\gamma)\big)(X)(\alpha(Y))-\big(\gamma.\delta(\gamma)\big)(Y)(\alpha(X))\\
&=\gamma.\Big(d\alpha(X,Y)+\delta(\gamma)(X)(\alpha(Y))-\delta(\gamma)(Y)(\alpha(X))\Big).
\end{aligned}$$

With

$$(\delta(\gamma)\wedge\alpha)_m(v,w):=\delta(\gamma)_m(v)(\alpha_m(w))-\delta(\gamma)_m(w)(\alpha_m(v)),$$

这可以写成

$$d(\gamma.\alpha)=\gamma.(d\alpha+\delta(\gamma)\wedge\alpha).\tag{15.14}$$

由此公式可立即推出

$$\begin{aligned}
&d(\gamma.\alpha)+\tfrac{1}{2}[\gamma.\alpha,\gamma.\alpha]=\gamma.(d\alpha+\delta(\gamma)\wedge\alpha)+\tfrac{1}{2}\gamma.[\alpha,\alpha]\\
&=\gamma.\big(d\alpha+\tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha]+\delta(\gamma)\wedge\alpha\big).
\end{aligned}\tag{15.15}$$

引理 15.4.4. 设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。对于 $f\in C^\infty(M,G)$ 和 $\alpha\in\Omega^1(M,\mathfrak{g})$，有

$$d(\operatorname{Ad}(f).\alpha)=\operatorname{Ad}(f).\big(d\alpha+[\delta(f),\alpha]\big).$$

证明。我们定义映射 $\gamma\colon M\to\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$，其定义为 $\gamma:=\operatorname{Ad}\circ f$。于是 $\delta(\gamma)=\operatorname{ad}\circ\delta(f)$，由公式 (15.14) 可得

$$\begin{aligned}
d(\operatorname{Ad}(f).\alpha)&=\operatorname{Ad}(f).(d\alpha+\delta(\operatorname{Ad}(f))\wedge\alpha)=\operatorname{Ad}(f).(d\alpha+\operatorname{ad}(\delta(f))\wedge\alpha)\\
&=\operatorname{Ad}(f).(d\alpha+[\delta(f),\alpha]).
\end{aligned}$$

□

引理 15.4.5。设 M 是一个连通光滑流形，G是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。则 *Maurer–Cartan* 方程的解集 $Z^1_{\mathrm{dR}}(M,\mathfrak{g})$ 在以下光滑仿射右作用下是不变的

$$\alpha * f := \delta(f) + \mathrm{Ad}(f)^{-1}.\alpha$$

在 $C^\infty(M,G)$ 上的 $\Omega^1(M,\mathfrak{g})$。

证明。由引理 9.5.3 可知，$*$ 定义了一个光滑的仿射作用。为验证 $Z^1_{\mathrm{dR}}(M,\mathfrak{g})$ 的不变性，令 $R(\alpha) := d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha,\alpha]$，并回顾 $\delta(f)$ 满足Maurer–Cartan 方程。于是引理 15.4.4 蕴含

$$\begin{aligned}
&R(\alpha * f) = d(\alpha * f) + \tfrac{1}{2}[\alpha * f, \alpha * f] \\
&= d(\delta(f)) + \mathrm{Ad}(f)^{-1}.\big(d\alpha + [\delta(f^{-1}),\alpha]\big) + \tfrac{1}{2}[\delta(f),\delta(f)] \\
&\qquad +[\delta(f), \mathrm{Ad}(f)^{-1}.\alpha] + \tfrac{1}{2}[\mathrm{Ad}(f)^{-1}.\alpha, \mathrm{Ad}(f)^{-1}.\alpha] \\
&= \mathrm{Ad}(f)^{-1}.\big(d\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha]\big) + \big[\mathrm{Ad}(f^{-1}).\delta(f^{-1}), \mathrm{Ad}(f^{-1}).\alpha]\big) \\
&\qquad +[\delta(f), \mathrm{Ad}(f)^{-1}.\alpha] \\
&= \mathrm{Ad}(f)^{-1}.\big(d\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha]\big) = \mathrm{Ad}(f)^{-1}.R(\alpha).
\end{aligned}$$

因此，$\alpha * f$ 满足 Maurer–Cartan 方程，当且仅当 α 满足。□

下面的定理对于处理李群扩张 $\widehat{\ }$tensions q 特别有用：$G \to G$（定义 9.5.5）。在这种情况下，我们对群 G 的正则性一无所知。有时，我们希望对形如 $\delta(f) = \alpha$ 的方程求解 $\alpha \in Z^1_{\mathrm{dR}}(M,\widehat{\mathfrak{g}})$，其中我们已经有一个光滑函数 $f_G \in C^\infty(M,G)$，满足 $\delta(f_G) = \mathbf{L}(q) \circ \alpha$。

定理 15.4.6（李群扩-$\widehat{\ }$张的相对基本定理）。设 $q\colon G \to G$ 是李群 G 由正则李群 N 给出的扩张，而 $q_{\mathfrak{g}}\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 是相应的李代数扩张，即李代数$\mathfrak{g}$ 由李代数 $\mathfrak{n}$ 给出的扩张，其中分别对应于 G 和 N。

此外，设 M 是一个光滑流形，且 $\alpha \in \Omega^1(M,\widehat{\mathfrak{g}})$ 是一个满足 *Maurer–Cartan* 方程的1-形式。

如果取值于 $\mathfrak{g}$ 的1-形式 $q_{\mathfrak{g}}\circ\alpha$ 是局部可积的，那么 α 也是局部可积的。

证明。我们需要证明，每个点 $m \in M$ 都有一个开邻域 $\backsim U$，使得存在一个光滑函数 $f_U\colon U \to G$ 满足 $\delta(f_U) = \alpha|_U$。这是一个局部问题。鉴于 $q_{\mathfrak{g}} \circ \alpha$ 的局部可积性，我们可以假设对于某个光滑函数 $f_G\colon M \to G$，有 $q_{\mathfrak{g}} \circ \alpha = \delta(f_G)$。

对于 $m \in M$，我们选择一个单连通开邻域 U，使得 $f_G(U)$ 包含于 G 的一个开子集 U_G 中，并且在该子集上，我们有商映射 $q\colon G \to G$ 的一个光滑 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$截面 $\sigma\colon U \to G$。现在，根据群 $C^\infty(U,\widehat{G})$ 在 $\Omega^1(U,\widehat{\mathfrak{g}})$ 上的右作用（引理 9.5.3），我们定义

$$\beta := \alpha * (\sigma \circ f_G)^{-1} = \delta((f \circ \sigma_G)^{-1}) + \mathrm{Ad}(\sigma \circ f_G).\alpha = \mathrm{Ad}(\sigma \circ f_G).(\alpha - \delta(\sigma \circ f_G)).$$

由于 α 满足 Maurer–Cartan 方程，根据（引理 15.4.5），β 也满足该方程。此外，

$$q_{\mathfrak{g}} \circ \beta = \mathrm{Ad}_G(\sigma \circ f_G).(q_{\mathfrak{g}} \circ \alpha - \delta(q \circ \sigma \circ f_G)) = \mathrm{Ad}_G(\sigma \circ f_G).(q_{\mathfrak{g}} \circ \alpha - \delta(f_G)) = 0,$$

使得 $\beta \in \Omega^1(U, \mathfrak{n})$。

现在，基本定理 6.1.13 推出光滑函数 f_N 的存在性：$U \to N$ 满足 $\delta(f_N) = \beta$。令 $f := f_N \cdot (\sigma \circ f_G)$，于是我们在 U 上得到关系 $\delta(f) = \delta(f_N) * (\sigma \circ f_G) = \beta * (\sigma \circ f_G) = \alpha$. □

由于单连通流形上的局部可积 1-形式都是可积的，我们立即由基本定理 6.1.13(ii)(a) 得出：

推论 15.4.7。设 $q\colon G \to G$ 是李群 G 由正则李群 N 给出的一个扩张，并且 $q_{\mathfrak{g}}\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 由 $\mathfrak{n}$ 给出的相应扩张。此外，设 M 是一个单-连通流形，且 $\alpha \in Z^1_{\mathrm{dR}}(M, \mathfrak{g})$。如果 $q_{\mathfrak{g}} \circ \alpha$ 可积，那么 α 也可积。

推论 15.4.8。</style}设：$G \to G$ 是由李群 G 和正则李群 N 构成的 1-连通延拓。此外，假设

$$\psi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{n}}) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{g}})\colon \varphi(\widehat{\mathfrak{n}}) = \widehat{\mathfrak{n}}\}$$

使得由此诱导的 $\mathfrak{g}$ 的自同构 $\psi_{\mathfrak{g}}$ 可积分为一个自同构 $\psi_G \in \mathrm{Aut}(G)$。那么存在唯一的自同构 $\psi_{\widehat{G}} \in \mathrm{Aut}(\widehat{G})$ </style}满足 $\mathrm{L}(\psi_{\widehat{G}}) = \psi$。

证明。令 $M := G$，且 $\alpha := \psi \circ \kappa_{\widehat{G}}$，其中 $\kappa_{\widehat{G}}$ 是 G 的左 Maurer–Cartan 形式。对于函数 $f_G := \psi_G \circ q\colon G \to G$，我们得到

$$q_{\mathfrak{g}} \circ \alpha = q_{\mathfrak{g}} \circ \psi \circ \kappa_{\widehat{G}} = \psi_{\mathfrak{g}} \circ q_{\mathfrak{g}} \circ \kappa_{\widehat{G}} = \delta(\psi_G \circ q) = \delta(f_G),$$

因此满足定理 15.4.6 的假设，并得到一个唯一的光滑函数 $\psi_{\widehat{G}}\colon G \to G$，使得

$$\delta(\psi_{\widehat{G}}) = \psi \circ \kappa_{\widehat{G}} \quad \text{and} \quad \psi_{\widehat{G}}(e) = e.$$

现在，命题 5.5.11 表明 $\psi_{\widehat{G}}$ 是一个李群同态，且 $\mathbf{L}(\psi_{\widehat{G}}) = \psi$。对 ψ^{-1} 运用同样的推理可知，由于同态由其在 e 上的导数唯一确定（命题 5.5.7），因此 $\psi_{\widehat{G}}$ 确实是一个自同构。□

相对基本定理的另一个应用是：由正则李群作扩张的单连通李群之间的等价性，已可由相应李代数扩张的等价性推出。

推论 15.4.9。 设 $N \xrightarrow{i_1} \widehat{G}_1 \xrightarrow{q_1} G$ 和 $N \xrightarrow{i_2} \widehat{G}_2 \xrightarrow{q_2} G$ 是由正则李群 N 对 G 作出的扩张，并且相应的李代数扩张在如下意义下等价：存在一个李代数同构 $\psi\colon\ \widehat{\mathfrak{g}}_1 \to \widehat{\mathfrak{g}}_2$，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{n} & \xrightarrow{\mathbf{L}(i_1)} & \widehat{\mathfrak{g}}_1 & \xrightarrow{\mathbf{L}(q_1)} & \mathfrak{g} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathfrak{n}}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}} \\ \mathfrak{n} & \xrightarrow{\mathbf{L}(i_2)} & \widehat{\mathfrak{g}}_2 & \xrightarrow{\mathbf{L}(q_2)} & \mathfrak{g} \end{array}$$

$\widehat{\ }$相交换。如果 G_1 是单连通的，那么存在唯一的同构 $\widehat{\ }\colon\ G_1 \to G_2$，满足 $\mathbf{L}(\widehat{\varphi}) = \psi$。

$\widehat{\ }$证明。 我们将推论 15.4.7 应用于 $M = G_1$, $\alpha := \psi \circ \kappa_{\widehat{G}_1}$ 和 $f_G := \mathrm{id}_G$。 □

15.4.3 具有光滑全局截面的阿贝尔扩张

设 G 是一个李群， $\mathfrak{a}$ 是一个光滑的 G-模，且 $\omega \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ 是一个连续 2-余循环，因此我们可以通过以下括号构造阿贝尔李代数扩张$\mathfrak{a} \oplus_\omega \mathfrak{g}$

$$[(a,x),(a',x')] := (\omega(x,x') + x.a' - x'.a, [x,x']) \quad \text{on} \quad \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}.$$

本小节讨论李代数 $\mathfrak{a} \oplus_\omega \mathfrak{g}$ 可积的充分条件，假设我们已经有一个李群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$。特别是，我们将看到，如果 G 是光滑可缩的，或者至少当 $k \in \{1,2\}$ 时德拉姆上同调群 $H^k_{\mathrm{dR}}(G, \mathfrak{a})$ 消失，我们的构造总是适用。

定义 15.4.10。 设 $(A,+)$ 是一个阿贝尔李群（采用加法记号），G 是一个李群，且 $\alpha\colon\ G \to \mathrm{Aut}(A)$ 是定义光滑 G-作用 $(g,a) \mapsto \alpha_g a =: g.a$ 于 A 上的同态。于是称 A 为一个光滑 G-模。

满足 $f(g,e) = f(e,g) = 0$ 且

$$f(g,g') + f(gg',gg') = g.f(g',g'') + f(g,g'g'') \quad \text{for} \quad g,g',g'' \in G$$

称为 2-余循环。对于那些在 G^2 中 (e,e) 的某个开邻域内光滑的余循环，我们记作 $Z^2_s(G,A)$。

引理 15.4.11。 设 G 是一个群， A 是一个光滑 G-模，且 $f\colon\ G^2 \to A$ 是一个2-余循环。于是，通过在乘积集 $A \times G$ 上定义乘法，我们得到一个群 $A \times_f G$

$$(a,g)(a',g') := (a + g.a' + f(g,g'), gg'). \tag{15.16}$$

这个群的单位元为 $(0,\ e)$，求逆由下式给出

$$(a,g)^{-1} = (-g^{-1}.(a + f(g,g^{-1})), g^{-1}), \tag{15.17}$$

而共轭作用由以下公式给出

$$\begin{aligned}&(a,g)(a',g')(a,g)^{-1}\\ &= \big(a + g.a' - gg'g^{-1}.a + f(g,g') - f(gg'g^{-1},g), gg'g^{-1}\big).\end{aligned} \tag{15.18}$$

映射

$$q\colon A \times_f G \to G, \quad (a,g) \mapsto g$$

是一个满同态，其核 $A \times \{e\}$ 与 A同构。 $A \times_f G$ 对正规子群 A 的共轭作用可经由 G 对 A的原始作用分解。

证明。 条件 $f(e, g) = f(g, e) = 0$意味着 $(0, e)$ 是 $A \times_f G$中的单位元，而乘法的结合律等价于余循环条件。求逆公式很容易验证。 $A \times_f G$ 中的共轭作用由下式给出

$$\begin{aligned}&(a,g)(a',g')(a,g)^{-1}\\ &= \big(a + g.a' + f(g,g'), gg'\big)\big(-g^{-1}.(a + f(g,g^{-1})), g^{-1}\big)\\ &= \big(a + g.a' + f(g,g') - gg'g^{-1}.(a + f(g,g^{-1})) + f(gg',g^{-1}), gg'g^{-1}\big).\end{aligned}$$

为简化这个表达式，我们使用

$$f(g,g^{-1}) = f(g,g^{-1}) + f(e,g) = f(g,e) + g.f(g^{-1},g) = g.f(g^{-1},g)$$

and

$$f(gg',g^{-1}) + f(gg'g^{-1},g) = f(gg',e) + gg'.f(g^{-1},g) = gg'.f(g^{-1},g)$$

得到

$$\begin{aligned}&(a,g)(a',g')(a,g)^{-1}\\ &= \big(a + g.a' + f(g,g') - gg'g^{-1}.a - gg'g^{-1}.f(g,g^{-1}) + f(gg',g^{-1}), gg'g^{-1}\big)\\ &= \big(a + g.a' + f(g,g') - gg'g^{-1}.a - gg'.f(g^{-1}.g) + f(gg',g^{-1}), gg'g^{-1}\big)\\ &= \big(a + g.a' + f(g,g') - gg'g^{-1}.a - f(gg'g^{-1},g), gg'g^{-1}\big).\end{aligned}$$

特别地，我们得到

$$(0,g)(a,e)(0,g)^{-1} = (g.a,e).$$

这意味着， G 在 A 上由 $q(g).a := gag^{-1}$ （对 $g \in A \times_f G$）给出的作用，与给定的 G 在 A 上的作用一致。□

下面证明命题 15.4.13 时，以下引理将会有所帮助。

引理 15.4.12。设 G 是一个连通李群，A 是一个光滑的 G-模，且 $f \in Z_s^2(G, A)$ 满足所有函数 $f_g\colon G \to A, x \mapsto f(g, x)$ 都是光滑的。那么 $f\colon G \times G \to A$ 是一个光滑函数。

证明。 我们将上闭链条件写作

$$f(xy, z) = f(x, yz) + \alpha_x f(y, z) - f(x, y), \quad x, y, z \in G.$$

固定 x 时，该函数作为变量对 (y, z) 的函数，在 (e, e) 的某个邻域内是光滑的。这意味着 f 在点 (x, e)、$x \in G$ 的某个邻域内是光滑的。固定 x 和 z，可知存在一个 e-邻域$V \subseteq G$（与 x 无关），使得函数 $f^z := f(\cdot, z)$、$z \in V$ 在 x 的某个邻域内是光滑的。由于 $x \in G$ 是任意的，我们得出函数 f^z、$z \in V$ 是光滑的。现在

$$f^{yz} = f^z(\cdot y) - \alpha(\cdot) f(y, z) + f^y$$

表明函数 f^u、$u \in V^2$ 也有同样的性质。利用 $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^n$ 迭代这一过程，我们推导出对于每个 $x \in G$，f^x 都是光滑的。最后我们看到，函数

$$(x, y) \mapsto f(x, yz) = f(xy, z) - \alpha_x f(y, z) + f(x, y)$$

在每个点 (x_0, e) 的某个邻域内都是光滑的，因此 f 在每个点 (x_0, z_0) 都是光滑的。这证明了 f 在 $G \times G$ 上是光滑的。□

对于下面的命题，我们回顾定义 8.1.19 中引入的等变微分形式。

命题 15.4.13。设 G 是一个连通李群，$\mathfrak{a}$ 是一个麦基完备的局部凸光滑 G-模，$\omega \in Z_c^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ 是一个连续的 2-余循环，且 $\omega^{\mathrm{eq}} \in \Omega^2(G, \mathfrak{a})$ 是 G 上相应的等变 2-形式，满足 $\omega_e^{\mathrm{eq}} = \omega$。我们假设

(1) $\omega^{\mathrm{eq}} = d\theta$ 对某个 $\theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{a})$ 成立，并且(2) 对每个 $g \in G$，闭 1-形式 $\lambda_g^*\theta - \alpha_g \circ \theta$ 都是正合的。

如果 G 光滑可缩，则这两个假设均成立。

于是存在一个光滑的 2-余循环 $f\colon G^2 \to \mathfrak{a}$，它在乘积流形 $G := \mathfrak{a} \times G$ 上定义李群 $\widehat{\ }$ 结构

$$(a, g)(a', g') := (a + g.a' + f(g, g'), gg')$$

$\widehat{G}$ 的李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 与 $\mathfrak{a} \oplus_\omega \mathfrak{g}$ 同构。

证明。 若 G 是光滑可缩的，则 Poincar´e 引理 3.6.28 表明，正次数的闭 $\mathfrak{a}$ 值形式是正合的。注意，由命题 8.1.20 可知 ω^{eq} 是闭的，并且对每个 $g \in G$，关系 $\alpha_g \circ \omega^{\mathrm{eq}} = \lambda_g^* \omega^{\mathrm{eq}}$ 可推出

$$d\big(\alpha_g\circ\theta-\lambda_g^*\theta\big)=\alpha_g\circ\omega^{\mathrm{eq}}-\lambda_g^*\omega^{\mathrm{eq}}=0.$$

因此，对每个光滑可缩李群，(1) 与 (2) 均成立

。由 (2)，对每个 $g\in G$，我们得到一个光滑函数 $f_g\colon G\to\mathfrak{a}$，满足 $f_g(e)=0$，并且

$$df_g=\lambda_g^*\theta-\alpha_g\circ\theta.$$

注意到 $f_e=0$。对于 $g,\ h\in G$ 这就得到

$$\begin{aligned}df_{gh}&=\lambda_{gh}^*\theta-\alpha_{gh}\circ\theta=\lambda_h^*(\lambda_g^*\theta-\alpha_g\circ\theta)+\lambda_h^*(\alpha_g\circ\theta)-\alpha_{gh}\circ\theta\\&=\lambda_h^*df_g+\alpha_g(\lambda_h^*\theta-\alpha_h\circ\theta)=\lambda_h^*df_g+\alpha_g\circ df_h\\&=d(f_g\circ\lambda_h+\alpha_g\circ f_h).\end{aligned}$$

比较两个函数在 e 处的取值，得到

$$f_{gh}=f_g\circ\lambda_h+\alpha_g\circ f_h-f_g(h).\tag{15.19}$$

现在我们定义 $f\colon G\times G\to\mathfrak{a}$，令 $f(x,\ y):=f_x(y)$。那么 (15.19) 意味着

$$f(gh,u)=f(g,hu)+\alpha_g f(h,u)-f(g,h),\quad g,h,u\in G,$$

因此 f 是一个群余循环。

庞加莱引理（定理 3.6.28）中 f_x 的具体局部公式以及积分对 x 的光滑依赖性表明，f 在 $(e,\ e)$ 的某个邻域上是光滑的，因此由引理 15.4.12 可知，$f\colon G\times G\to\mathfrak{a}$是一个光滑函数。因此，借助引理 15.4.11，我们在空间 $\frown G:=\mathfrak{a}\times G$ 上得到一个李群结构，其乘法由下式给出

$$(a,g)(a',g'):=(a+\alpha_g a'+f(g,g'),gg')$$

相应的李括号由下式给出

$$[(a,x),(a',x')]=\big(x.a'-x'.a+\tfrac12\delta^2_{(e,e)}f(x,x')-\tfrac12\delta^2_{(e,e)}f(x',x),[x,x']\big).$$

这里，$\delta^2_{(e,e)}f$是定义良好的双线性映射，因为对于$x,\ y\in G,\ f(e,\ x)=f(y,\ e)=0$，这尤其意味着 $df(e,\ e)=0$（参见习题 3.6.13）。现在我们将此公式与李代数余循环 ω联系起来。关系 $df_g=\lambda_g^*\theta-\alpha_g\circ\theta$导出

$$df(g,e)(0,y)=df_g(e)y=(\lambda_g^*\theta-\alpha_g\circ\theta)_e(y)=\langle\theta,y_l\rangle(g)-\alpha_g\theta_e(y),$$

其中 y_l 表示满足 $y_l(e)=y$ 的左不变向量场。取二阶导数，我们进一步对 $x\in\mathfrak{g}$ 得到:

$$\begin{aligned}\frac12\delta^2_{(e,e)}f(x,y)&=x_l(\langle\theta,y_l\rangle)(e)-x\theta_e(y)\\&=(d\theta)(x_l,y_l)(e)+y_l(\langle\theta,x_l\rangle)(e)+\theta([x_l,y_l])(e)-x\theta_e(y)\\&=\omega(x,y)+y_l(\langle\theta,x_l\rangle)(e)+\theta_e([x,y])-x\theta_e(y),\end{aligned}$$

减去 $\frac{1}{2}\delta^2_{(e,e)}f(y,x) = y_l(\langle\theta, x_l\rangle)(e) - y\theta_e(x)$, 得到 2-余循环

$$\eta(x,y) := \omega(x,y) + \theta_e([x,y]) - x\theta_e(y) + y\theta_e(x) = \omega(x,y) - (d\theta_e)(x,y).$$

由于这个余循环等价于 ω，$\mathbf{L}(G) \cong \mathfrak{a} \oplus_\omega \mathfrak{g}$。 □

推论 15.4.14。如果 G 是单连通的，且 ω^{eq} 是正合的，那么存在一个光滑余循环 $f\colon G \times G \to \mathfrak{a}$，使得 $G := \mathfrak{a} \times_f G$ 是一个李群，其李代数为 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a} \oplus_\omega \mathfrak{g}$。

证明。 由于 $\pi_1(G)$ 是平凡的，且 $\mathfrak{a}$ 是麦基完备的，根据基本定理 6.1.13，$H^1_{\mathrm{dR}}(G, \mathfrak{a})$ 消失，因此命题 15.4.13 中的条件 (2) 自动满足。□

15.4.4 局部指数李代数的广义中心扩张

在本小节中，我们讨论局部凸李代数的广义中心扩张这一概念。它将中心扩张 q推广如下：$\widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$从核为中心的商映射推广到具有稠密像的映射。这是一个极其有用的工具，可用于证明那些 $\ker q$ 不是分裂的局部指数李代数的中心扩张具有局部指数性。这里的关键在于，任何中心扩张都可以嵌入为某个拓扑分裂中心扩张中的闭理想（命题 15.4.18）。

定义 15.4.15。 设 $\mathfrak{g}$ 和 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 为局部凸李代数。具有稠密像的连续李代数同态 $q\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 称为广义中心扩张，如果存在连续双线性映射 $b\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$，使得

$$b(q(x), q(y)) = [x,y] \quad \text{for} \quad x, y \in \widehat{\mathfrak{g}}. \tag{15.20}$$

由于 q 具有稠密像，映射 b 由 (15.20) 唯一确定，而 (15.20) 蕴含 $\ker q$ 是 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的中心。

例 15.4.16。 (a) 若 $q\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 是局部凸李代数的商同态，且其核为中心的，即一个中心扩张，则

$$q \times q\colon \widehat{\mathfrak{g}} \times \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$$

也为商映射。因此，$\widehat{\mathfrak{g}}$ 的李括号可经由连续双线性映射 $b\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ 分解，使得 $b(q(x), q(y)) = [x,y]$ 对 $x, y \in \widehat{\mathfrak{g}}$ 成立，这表明 q 是一个广义中心扩张。

(b) 设 $\omega \in Z^2_c(\mathfrak{g}, \mathfrak{z})$ 是一个连续 2-余循环，即满足以下条件的交替双线性映射

$$\omega([x,y],z) + \omega([y,z],x) + \omega([z,x],y) = 0 \quad \text{for} \quad x, y, z \in \mathfrak{g}. \tag{15.21}$$

于是我们得到一个中心扩张 $p\colon \mathfrak{z}\oplus_\omega \mathfrak{g}\to \mathfrak{g}, (z,x)\mapsto x$，其中 $\mathfrak{z}\oplus\mathfrak{g}$ 表示拓扑积空间 $\mathfrak{z}\times\mathfrak{g}$，并赋予李括号

$$[(z,x),(z',x')] := (\omega(x,x'),[x,x']),\quad z,z'\in\mathfrak{z}, x,x'\in\mathfrak{g}.$$

设 $\widehat{\mathfrak{g}}\subseteq \mathfrak{z}\oplus_\omega\mathfrak{g}$ 是一个闭子代数，且 $p(\widehat{\mathfrak{g}})$在$\mathfrak{g}$中稠密。我们断言，$q := p|_{\widehat{\mathfrak{g}}}\colon \widehat{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$ 是一个广义中心扩张，且$b(x,\ y)=(\omega(x,\ y)\ [x,y])$，其中 $x,\ y\in\mathfrak{g}$。事实上，由于 $p(\widehat{\mathfrak{g}})$在 $\mathfrak{g}$中稠密，q的值域稠密。显然，$b\circ(p\times p)$也是 $\mathfrak{z}\oplus_\omega\mathfrak{g}$上的括号，但仍需证明 $\operatorname{im}(b)\subseteq\widehat{\mathfrak{g}}$。对于 $\operatorname{im}(q)=p(\widehat{\mathfrak{g}})$ 中的 $x=q(x')$ $y=q(y')$，有

$$b(x,y)=b(q(x'),q(y'))=[x',y']\in\widehat{\mathfrak{g}}.$$

现在，由 b的连续性、$\operatorname{im}(q)$在 $\mathfrak{g}$中的稠密性以及 $\widehat{\mathfrak{g}}$的闭性可知，$\operatorname{im}(b)\subseteq\widehat{\mathfrak{g}}$。

引理 15.4.17. 对于广义中心扩张 $q\colon \widehat{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$ 及其对应的映射 b，有以下断言：

(1) $[x,y]=q(b(x,y))$ 对所有 $x,y\in\mathfrak{g}$ 均成立。(2) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subseteq\operatorname{im}(q)$ 且 $\ker q\subseteq\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$。(3) $b\in Z^2_c(\mathfrak{g},\widehat{\mathfrak{g}})$，即 $b([x,y],z)+b([y,z],x)+b([z,x],y)=0$ 对 $x,y,z\in\mathfrak{g}$ 均成立。(4) 对于 $x\in\mathfrak{g}$，我们定义

$$\widehat{\operatorname{ad}}(x)\colon\widehat{\mathfrak{g}}\to\widehat{\mathfrak{g}},\quad y\mapsto b(x,q(y)).$$

$\widehat{\ }$那么 伴随表示 定义了一个从 $\mathfrak{g}$ 到 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的连续表示，其作用为导子，并且 q 关于 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示是等变的。(5) 若 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 是拓扑完美的，则 $q^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))=\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$。

证明。(1) 若 $x=q(a)$ 和 $y=q(b)$ 对 $a,b\in\widehat{\mathfrak{g}}$ 成立，则

$$[x,y]=[q(a),q(b)]=q([a,b])=q(b(x,y)).\tag{15.22}$$

因此，$\mathfrak{g}$上的李括号在稠密子集 $\operatorname{im}(q)\times\operatorname{im}(q)$ 上与$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 上的连续映射 $q\circ b$ 重合，因此由两个映射的连续性可得 (1)。

(2) 第一个断言由 (1) 得出，第二个断言由 (15.20) 得出。(3) 鉴于 (15.20)，$\widehat{\mathfrak{g}}$ 中的雅可比恒等式导出

$$\begin{aligned}0&=[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]\\&=b(q([x,y]),q(z))+b(q([y,z]),q(x))+b(q([z,x]),q(y))\\&=b([q(x),q(y)],q(z))+b([q(y),q(z)],q(x))+b([q(z),q(x)],q(y)).\end{aligned}$$

因此，b 在 $\operatorname{im}(q)$ 上的限制是一个李代数余循环；由于 $\operatorname{im}(q)$ 稠密且 b 连续，b 是 $\mathfrak{g}$上的李代数余循环。

(4) 首先我们注意到，双线性映射 $\mathfrak{g}\times\widehat{\mathfrak{g}}\to\widehat{\mathfrak{g}}, (x,y)\mapsto b(x,q(y))$ 是连续的。此外，(1) 表明

$$q(\widehat{\mathrm{ad}}(x)y)=q(b(x,q(y)))=[x,q(y)],$$

即，$q\circ\mathrm{ad}(x)=\mathrm{ad}\,x\circ q$。

由余循环恒等式

$$b([x,y],z)+b([y,z],x)+b([z,x],y)=0,\quad x,y,z\in\mathfrak{g},$$

我们特别对 $x\in\mathfrak{g}$ 和 $y,z\in\widehat{\mathfrak{g}}$ 推导得：

$$\begin{aligned}0&=b([x,q(y)],q(z))+b([q(y),q(z)],x)+b([q(z),x],q(y))\\&=b(q(\widehat{\mathrm{ad}}(x)y),q(z))+b(q([y,z]),x)-b(q(\widehat{\mathrm{ad}}(x)z),q(y))\\&=[\widehat{\mathrm{ad}}(x)y,z]-\widehat{\mathrm{ad}}(x)[y,z]-[\widehat{\mathrm{ad}}(x)z,y].\end{aligned}$$

因此，每个 $\mathrm{ad}(x)$ 都是 $\widehat{\mathfrak{g}}$的导子。另一方面，b 的余循环恒等式对 x, $y\in\mathfrak{g}$ 和 $z\in\widehat{\mathfrak{g}}$ 给出

$$\begin{aligned}0&=b([x,y],q(z))+b([y,q(z)],x)+b([q(z),x],y)\\&=\widehat{\mathrm{ad}}([x,y])z+b(q(\widehat{\mathrm{ad}}(y)z),x)-b(q(\widehat{\mathrm{ad}}(x)z),y)\\&=\widehat{\mathrm{ad}}([x,y])z-\widehat{\mathrm{ad}}(x)\widehat{\mathrm{ad}}(y)z+\widehat{\mathrm{ad}}(y)\widehat{\mathrm{ad}}(x)z,\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{ad}\colon\mathfrak{g}\to\mathrm{der}(\widehat{\mathfrak{g}})$ 是由 $\widehat{\mathfrak{g}}$的导子构成的 $\mathfrak{g}$ 表示，并且映射 q 相对于 $\mathfrak{g}$的伴随表示是等变的。(5) 令 $\widehat{\mathfrak{z}}(\mathfrak{g}):=q^{-1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$。我们首先注意到，$[\widehat{\mathfrak{z}}(\mathfrak{g})\ \widehat{\mathfrak{g}}]$ 包含在 $\ker q\subseteq\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ 中，因为 $q([\widehat{\mathfrak{z}}(\mathfrak{g})\ \widehat{\mathfrak{g}}])\subseteq[\mathfrak{z}(\mathfrak{g})\ \mathfrak{g}]=\{0\}$. 由此得到

$$[\widehat{\mathfrak{z}}(\mathfrak{g}),[\widehat{\mathfrak{g}},\widehat{\mathfrak{g}}]]\subseteq[\widehat{\mathfrak{g}},[\widehat{\mathfrak{z}}(\mathfrak{g}),\widehat{\mathfrak{g}}]]\subseteq[\widehat{\mathfrak{g}},\ker q]=\{0\}.$$

若 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 是拓扑完美的，则我们得到 $\widehat{\mathfrak{z}}(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$。另一重包含关系由 q 的像稠密性可得。□

下面的命题表明，广义中心扩张可以刻画为由余循环定义的中心扩张中的某些闭子代数（参见例 15.4.16(b)）。

命题 15.4.18。记 $|\mathfrak{g}|$ 为 $\mathfrak{g}$ 所对应的局部凸空间，并将其视为阿贝尔李代数。若 $q\colon\widehat{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g}$ 是一个广义中心扩张，且 $b\colon\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\widehat{\mathfrak{g}}$ 是相应的余循环，则映射

$$\psi\colon\widehat{\mathfrak{g}}\to|\widehat{\mathfrak{g}}|\oplus_b\mathfrak{g},\quad x\mapsto(x,q(x))$$

是从 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 到 $|\widehat{\mathfrak{g}}|\oplus_b\mathfrak{g}$ 的拓扑嵌入，其像是一个包含交换子代数的闭理想。映射

$$\eta\colon|\widehat{\mathfrak{g}}|\oplus_b\mathfrak{g}\to|\mathfrak{g}|,\quad(x,y)\mapsto y-q(x)$$

是核为 $\mathrm{im}(\psi)\cong\widehat{\mathfrak{g}}$ 的李代数商态射。

证明。 $|\widehat{\mathfrak{g}}| \oplus_b \mathfrak{g}$ 中的括号由下式给出

$$[(x,y),(x',y')] = (b(y,y'),[y,y']). \tag{15.23}$$

Now

$$\begin{aligned}[\psi(x),\psi(x')] &= [(x,q(x)),(x',q(x'))] = (b(q(x),q(x')),[q(x),q(x')]) \\ &= ([x,x'],q([x,x'])) = \psi([x,x'])\end{aligned}$$

这意味着连续线性映射 ψ 是李代数态射。由于 ψ 是连续线性映射 q的图，因此它是 $|\widehat{\mathfrak{g}}| \oplus_b \mathfrak{g}$的闭子空间；而到第二个因子的投影是连续线性映射。因此， ψ 是到一个闭子代数上的拓扑嵌入。

此外，由（15.23）和 $q(b(x,\ x'))=[x,x']$ 可知，$\mathrm{im}(\psi)$包含所有括号，因此是一个理想。因此，映射 η: $|\widehat{\mathfrak{g}}| \oplus_b \mathfrak{g} \to |\mathfrak{g}|$ 的核为$\mathrm{im}(\psi)$，且它是李代数态射。它是商映射这一点，可由其在子空间 $\mathfrak{g}$ 上的限制是拓扑同构这一事实得出。□

定理 15.4.19。 如果 q: $\widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 是局部指数李代数 $\mathfrak{g}$的 *Mackey*完备广义中心扩张，那么 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 也是局部指数的。

证明。 **步骤 1：** 首先考虑特殊情形： $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{z} \oplus_\omega \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 由麦基完备空间 $\mathfrak{z}$ 作中心扩张，其中$\omega \in Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{z})$是连续 2-余循环。

设 $(\mathfrak{g},*,D)$ 是 $\mathfrak{g}$和 U_n上的局部指数李代数的数据，如定义 8.2.1 所述。接着，我们在U_1 上定义一个左不变的 $\mathfrak{z}$值 2-形式 ω^l ：

$$\omega^l(x)(v,w) := \omega(d\lambda^*_{-x}(x)v, d\lambda^*_{-x}(x)w).$$

由于 ω 是 2-余循环，故由命题 8.1.20， ω^l 是闭的。由于 U_1 是凸的且 $\mathfrak{z}$ 是麦基完备的，因此存在一个 $\mathfrak{z}$值 1-形式 θ 定义在 U_1 上，使得 $\omega^l = d\theta$（推论 3.6.29）。

相应的光滑局部群余圈可以按如下方式构造。我们用路径连接两点 $x,y \in U_2$

$$\alpha_{x,y}\colon [0,1] \to U, \quad t \mapsto x * t((-x) * y).$$

对于 $x,y,z,z*x,z*y \in U_2$， 于是有

$$\alpha_{z*x,z*y} = \lambda^*_z \circ \alpha_{x,y} \quad \text{and} \quad \alpha_{0,y}(t) = ty.$$

回忆一下标准二维单纯形 $\Delta_2 := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \le s,t;\ \ s+t \le 1\}$。对于$x,y,z \in U_2$，我们得到一个奇异光滑二维圈

$$\alpha_{x,y,z} := \alpha_{x,y} + \alpha_{y,z} - \alpha_{x,z},$$

其对应于由 $\alpha_{x,\ y,\ z}$给出的分段光滑映射： $\partial\Delta_2 \to \mathfrak{g}$

$$\alpha_{x,y,z}(s,t)=\begin{cases}\alpha_{x,y}(s), & \text{for } t=0\\ \alpha_{y,z}(1-s), & \text{for } s+t=1\\ \alpha_{x,z}(t), & \text{for } s=0.\end{cases}$$

对于 $x,\ y,\ z\in U_3$，现在考虑光滑映射

$$\begin{aligned}&\gamma_{x,y,z}\colon \Delta_2\to U,\\ &(s,t)\mapsto x*\big(s\cdot\alpha_{(-x)*y,(-x)*z}(t)+t\cdot\alpha_{(-x)*y,(-x)*z}(1-s)\big)\end{aligned}\tag{15.24}$$

其在边界 $\partial\Delta_2$ 上的限制与 $\alpha_{x,y,z}$一致。对于 $a,x,y,z\in U_4$，我们还有

$$\gamma_{a*x,a*y,a*z}=\lambda_a^*\circ\gamma_{x,y,z}.\tag{15.25}$$

现在我们考虑光滑函数

$$\begin{aligned}&F\colon U_3\times U_3\times U_3\to\mathfrak{z},\\ &F(x,y,z):=\int_{\gamma_{x,y,z}}\omega^l=\int_{\gamma_{x,y,z}}d\theta=\int_{\alpha_{x,y}}\theta+\int_{\alpha_{y,z}}\theta-\int_{\alpha_{x,z}}\theta.\end{aligned}\tag{15.26}$$

由 ω^l 的左不变性和 (15.25)，我们得到

$$F(a*x,a*y,a*z)=F(x,y,z)\quad\text{for}\quad a,x,y,z\in U_4.$$

对于函数

$$f\colon U_3\times U_3\to\mathfrak{z},\quad (x,y)\mapsto F(0,x,x*y)$$

由此对于 $x,y,z\in U_4$ 得到余循环关系

$$\begin{aligned}&f(x,y)+f(x*y,z)-f(x,y*z)-f(y,z)\\ &=F(0,x,x*y)+F(0,x*y,x*y*z)-F(0,x,x*y*z)-F(0,y,y*z)\\ &=F(0,x,x*y)+F(0,x*y,x*y*z)-F(0,x,x*y*z)\\ &\quad -F(x,x*y,x*y*z)\\ &=\int_{\alpha_{0,x}}\theta+\int_{\alpha_{x,x*y}}\theta-\int_{\alpha_{0,x*y}}\theta+\int_{\alpha_{0,x*y}}\theta+\int_{\alpha_{x*y,x*y*z}}\theta-\int_{\alpha_{0,x*y*z}}\theta\\ &\quad -\int_{\alpha_{0,x}}\theta-\int_{\alpha_{x,x*y*z}}\theta+\int_{\alpha_{0,x*y*z}}\theta-\int_{\alpha_{x,x*y}}\theta-\int_{\alpha_{x*y,x*y*z}}\theta+\int_{\alpha_{x,x*y*z}}\theta\\ &=0.\end{aligned}$$

现在，我们在 $\widehat{U}:=\mathfrak{z}\times U_4\subseteq\widehat{\mathfrak{g}}$ 上定义光滑结合乘法:

$$(z,x)*(z',x'):=(z+z'+f(x,x'),x*x').\tag{15.27}$$

若 $x'\in\mathbb{R}x$，则映射 $\gamma_{0,\ x,\ x*x'}$ 的像包含在线 $\mathbb{R}x$ 中，因此定义 $f(x,x')$ 的积分 (15.26) 为零，从而

$$(z,x)*(z',x')=(z+z',x+x'),$$

这就意味着 (8.7)。接下来我们注意到，f 的余循环关系意味着，乘法 (15.27) 在 $\mathfrak{z}\times U_5$ 中所有 $\widehat{\ }$ 有定义的三元组上都是结合的。我们回顾注 8.1.7，乘积 (15.27) 的泰勒级数的二阶项 b_2 在 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上定义了一个李括号，其形式为

$$\widehat{b}_2((z,x),(z',x'))-\widehat{b}_2((z',x'),(z,x))=(\eta(x,x'),[x,x']),$$

其中 $\eta\colon\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{z}$ 是交错双线性的。接下来需要证明 $\eta=\omega$，即

$$\frac{1}{2}\delta^2_{(0,0)}f(x,y)-\frac{1}{2}\delta^2_{(0,0)}f(y,x)=\omega(x,y). \tag{15.28}$$

这意味着 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 是我们构造的指数局部李群（U_4，$*$）的李代数，因此是局部指数的。

为验证 (15.28)，令 $\gamma_{x,\ y}:=\gamma_{0,\ x,\ x*y}$，于是

$$f(x,y)=\int_{\gamma_{x,y}}\omega^l=\int_{\Delta^2}\omega^l(\gamma_{x,y}(s,t))\Big(\frac{\partial\gamma_{x,y}}{\partial s}(s,t),\frac{\partial\gamma_{x,y}}{\partial t}(s,t)\Big)\,d(s,t).$$

From

$$\gamma_{x,0}(s,t)=(s+t)x\quad\text{ and }\quad\gamma_{0,y}(s,t)=ty \tag{15.29}$$

特别地，可得 $\frac{\partial\gamma_{0,\ \ 0}}{\partial t}=0$，并且 $\frac{\partial}{\partial s}\gamma_{x,\ y}\wedge\frac{\partial}{\partial t}\gamma_{x,\ y}=0$，当 $x=0$ 或 $y=0$ 时。因此我们得出 $f(x,\ 0)=f(0,\ y)=0$，所以 f 在 $(0,\ 0)$ 处的 1-喷射为零，并且二次映射 $\delta^2_{(0,0)}f$ 是双线性的（引理 5.1.7）。我们还从 (15.29) 推得，$\frac{\partial\gamma_{x,\ \ y}}{\partial s}$ 在 $(0,\ 0)$ 处的一阶项为 x，而 $\frac{\partial\gamma_{x,\ \ y}}{\partial t}$ 在 $(0,\ 0)$ 处的一阶项为 $x+y$。由此可得被积函数的二阶项为

$$\omega^l(\gamma_{0,0}(s,t))(x,x+y)=\omega(x,y),$$

因此

$$\frac{1}{2}\delta^2_{(0,0)}f(x,y)=\int_{\Delta_2}ds\,dt\cdot\omega(x,y)=\frac{1}{2}\omega(x,y).$$

这就证明了 (15.28)。

步骤 2： 令 $b\in Z^2_c(\mathfrak{g},\ \widehat{\mathfrak{g}})$ 为广义中心扩张（定义 15.4.15）的余循环，并且

$$\mathfrak{g}_1:=|\widehat{\mathfrak{g}}|\oplus_b\mathfrak{g},\quad q_1\colon\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g},\quad(z,x)\mapsto x$$

表示由平凡的 $\mathfrak{g}$-模 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 对 $\mathfrak{g}$ 作出的相应拓扑分裂中心扩张，记作 $|\widehat{\mathfrak{g}}|$，以区别于李代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$。那么映射

$$\alpha\colon\mathfrak{g}_1\to|\mathfrak{g}|,\quad(z,x)\mapsto x-q(z)$$

是一个李代数同态，其核

$$\ker \alpha = \{(z, q(z)) \colon z \in \widehat{\mathfrak{g}}\}$$

作为李代数与 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 同构（命题 15.4.18），并且它是一个包含所有交换子的闭理想。

由于每个阿贝尔李代数都是局部指数的，且根据步骤 1，$\mathfrak{g}$ 的拓扑分裂中心扩张 $\mathfrak{g}_1$ 是局部指数的，因此根据命题 8.3.3，$\mathfrak{g}_1$ 的理想 $\widehat{\mathfrak{g}}$是局部指数的。□

下面的推论给出了局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 可扩张性的判据，前提是已知存在一个李群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并且该李群具有指数函数。

推论 15.4.20。设 G 是一个李群，其李代数$\mathfrak{g}$ 麦基完备，并且具有指数函数 $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$。进一步假设，$\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个闭中心子空间，且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$是局部指数且可扩张的。那么 $\mathfrak{g}$ 是局部指数的；并且，如果加法子群

$$\Gamma := \{z \in \mathfrak{z} \colon \exp_G z = e\}$$

若 $\mathfrak{z}$ 是离散的，则 $\mathfrak{g}$ 是可扩张的。

证明。首先，我们利用定理 15.4.19 得知 $\mathfrak{g}$ 是局部指数的。将 G 替换为其单位连通分支的万有覆盖群后，不妨设 G 是单连通的。根据推论 9.2.10，只需证明

$$\Gamma_{\mathfrak{g}} := \{z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \colon \exp_G z = e\}$$

是离散的。为从我们的假设推出这一点，设 Q 是一个连通的局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$。根据积分定理 7.2.9，存在一个李群态射 $\varphi\colon G \to Q$，使得 $q := \mathbf{L}(\varphi)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{q}$ 是商映射。取一个凸零邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$，使得 $\exp_Q$ 在 $q(U)$ 上是单射，并且 $U \cap \Gamma = \{0\}$。于是，对于 $z \in \Gamma_{\mathfrak{g}} \cap U$，有 $\exp_Q q(z) = \varphi(\exp z) = e = \exp_Q 0$，因此 $q(z) = 0$，即 $z \in \mathfrak{z}$。由此可得 $z \in \Gamma \cap U = \{0\}$。因此 $\Gamma_{\mathfrak{g}}$ 是离散的，结论由推论 9.2.10 得出。□

命题 15.4.21.（广义中心扩张的可扩张性）设G 是一个光滑可缩的局部指数李群，其李代数为$\mathfrak{g}$，且 $q\colon \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ 是一个广义中心扩张，其中 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 是麦基完备的。则 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 是可扩张的。

证明。设 $b\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ 为相应的余循环，定义为

$$b(q(x), q(y)) = [x, y] \quad \text{for} \quad x, y \in \widehat{\mathfrak{g}}.$$

首先，我们考虑相应的拓扑分裂中心扩张

$$\mathfrak{g}_1 := |\widehat{\mathfrak{g}}| \oplus_b \mathfrak{g}.$$

定理 15.4.19 表明， $\widehat{\mathfrak{g}}$ 和 $\mathfrak{g}_1$ 是局部指数的。此外

$$\widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}_1, \quad x \mapsto (x, q(x))$$

将 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 实现为 $\mathfrak{g}_1$的闭理想。根据积分子群定理 9.2.4，只需证明 $\mathfrak{g}_1$具有可扩张性。由命题 15.4.13，我们得到一个李代数为 $\mathfrak{g}_1$ 的中心李群扩张 G_1 ，它与 $\widehat{\mathfrak{g}} \times G$微分同胚。最后，推论 15.4.2 表明 G_1 是局部指数的。□

备注 15.4.22。前述命题可以推广到这样的情形： G 仅为可缩的，不一定是光滑可缩的。此时，可以采用 [Ne02a，定理 7.12] ，而非命题 15.4.13，将拓扑分裂中心扩张 $\mathfrak{g}_1$ 积分为李群扩张。其他论证相同。

第15.4节注记：

15.4.3: 对于有限维李群的中心扩张，命题 15.4.13 中所述的构造源自 E. Cartan，他用它构造了一个单连通有限维李群被加法群 $\mathfrak{z}$扩张得到的中心扩张。在这种情况下

$$H^2_{\mathrm{dR}}(G, \mathfrak{z}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_2(G), \mathfrak{z}) = \{0\} \quad \text{and} \quad H^1_{\mathrm{dR}}(G, \mathfrak{z}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(G), \mathfrak{z}) = \{0\},$$

(参见 [God71]；另见第 14.2 节），该构造的条件对每个李代数余循环 $\omega \in Z^2_c(\mathfrak{g}, \mathfrak{z})$ 都成立。将此应用于有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随群 G_{ad}，以及由 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 对 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 的中心扩张$\mathfrak{g}$，这一论证便推出了 $\mathfrak{g}$ 的可积性；另见下文的推论 15.5.14。

15.4.4：广义中心扩张的一个有趣之处在于，拓扑完美的局部凸李代数具有泛广义中心扩张，尽管本文并未利用这一点。这一点颇为惊人，因为泛中心扩张并非总是存在，即使对于拓扑完美的巴拿赫–李代数也是如此。关于这一问题的详细讨论，请参阅 [Ne03] 。

对于巴拿赫–李代数的中心扩张，命题 15.4.18 的部分内容已可见于脚注 [vES73，第 58] 页。

15.5 局部指数李代数的可扩张性

设 $\mathfrak{g}$ 是一个满足以下条件的 Mackey完备的局部指数李代数：

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

也为 Mackey 完备。若 $\mathfrak{g}$ 是 Fr´echet 空间，或 $\mathfrak{g}$ 是 Mackey 完备且 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 为分裂子空间，则满足这一条件。我们为 $\mathfrak{g}$ 指定其中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 的一个加法子群 $\Pi(\mathfrak{g})$，称为它的周期群。周期群有一个显著性质：它能检测可扩张性：当且仅当 $\mathfrak{g}$ 可扩张时，$\Pi(\mathfrak{g})$ 是离散的。若此条件成立，且 G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$ 的单连通局部指数李群，那么

$$\Pi(\mathfrak{g}) \cong \pi_1(Z(G)).$$

由于巴拿赫–李代数是局部指数的，因此特别得到一个适用于巴拿赫–李代数的方便空间可扩张性判据。

15.5.1 李群的路径群

定义 15.5.1。设 G 是一个连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且$r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。我们记

$$P^{(r)}(G) := \{\gamma \in C^r([0,1], G) : \ \gamma(0) = e\}$$

为 G的 C^r-路径群，其中 $P^{(r)}(G)$上的乘法是逐点定义的。根据定理 5.4.2，这是一个李群，并且

$$P^{(r)}(\mathfrak{g}) := \{\gamma \in C^r([0,1], \mathfrak{g}) : \ \gamma(0) = 0\}$$

是 $P^{(r)}(G)$的李代数。求值映射

$$\mathrm{ev}_1 \colon P^{(r)}(G) \to G, \quad \gamma \mapsto \gamma(1)$$

是一个李群满态射。它的核

$$\Omega^{(r)}(G) = \{\gamma \in C^r([0,1], G) \colon \gamma(0) = \gamma(1) = e\}$$

称为 C^r-环群 G。它是一个李群，其李代数为

$$\Omega^{(r)}(\mathfrak{g}) = \{\gamma \in C^r([0,1], \mathfrak{g}) \colon \gamma(0) = \gamma(1) = 0\}$$

（练习 15.5.4）。我们还分别用 $P(G) := P^{(\infty)}(G)$ 和 $\Omega(G) := \Omega^{(\infty)}(G)$ 表示 G 的光滑路径群和环群，以及分别用 $\Omega(\mathfrak{g})$ 表示它们的李代数。

引理 15.5.2。李群态射 $\mathrm{ev}_1 \colon P^{(r)}(G) \to G$ 具有光滑局部截面。特别地，$P^{(r)}(G)$ 是 G 由 $\Omega^{(r)}(G)$ 扩张而成的李群扩张，而 $G \cong P^{(r)}(G)/\Omega^{(r)}(G)$。

证明。对于任意坐标图 $\varphi \colon U \to G$，其中 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 是 0 的凸开邻域，且 $\varphi(0) = e$，映射 $\sigma \colon \varphi(U) \to P_{(r)}(G)$ $\sigma(\varphi(x))(t) := \varphi(tx)$ 是 ev_1 的一个光滑截面（练习 15.5.5）。□

在李代数层面上，$\{\alpha \in P^{(r)}(\mathfrak{g}) : (\forall t)\ \alpha(t) = t\,\alpha(1)\}$ 是 $P^{(r)}(\mathfrak{g})$ 中 $\Omega^{(r)}(\mathfrak{g})$ 的一个自然向量空间补空间，但除非 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，否则这个子空间不是李子代数。

命题 15.5.3。对于每个 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，群 $P^{(r)}(G)$ 都是可缩的；而对于 $r = \infty$，它是光滑可缩的。

证明。对于 $r = \infty$，映射

$$H\colon [0,1] \times P^{(r)}(G) \to P^{(r)}(G), \quad H(t,\gamma)(s) := \gamma(ts)$$

是光滑的。事实上，由于 ev 关于第二分量是乘法的，只需验证它在单位元邻域内的光滑性，而这归结为求值映射 $[0,1] \times P^{(r)}\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 的光滑性；后者由命题 4.1.15 可知。

对于 $r < \infty$，H 的连续性可由求值映射 $[0,1] \times P^{(r)}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ 的连续性类似地推出。□

注 15.5.4。由命题 15.5.3，$P^{(r)}(G)$ 是单连通的，因此自然同态 $P(G)/\Omega(G)_0 \to G$ 是一个单连通覆盖群（推论 14.1.10）。特别地可得

$$\pi_1(G) \cong \pi_0(\Omega(G)) \tag{15.30}$$

（参见小节 14.8.1）。更一般地，主纤维丛 $\mathrm{ev}_1\colon P^{(r)}(G) \to G$（其纤维为 $\Omega^{(r)}(G)$，见定理 14.1.8）的长正合同伦序列导出同构

$$\delta_k\colon \pi_k(G) \to \pi_{k-1}(\Omega^{(r)}(G)) \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

15.5.2 路径李代数的可扩张性

在本小节中，$\mathfrak{g}$ 是一个局部指数李代数。

引理 15.5.5。$P^{(r)}(\mathfrak{g})$ 和 $\Omega^{(r)}(\mathfrak{g})$ 都是局部指数李代数。

证明。对于每个带边界的紧流形 M，李代数 $C^r(M,\mathfrak{g})$ 都是局部指数的（例 8.2.5）。由于 $\mathrm{ev}_0\colon C^r([0,1],\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}, \xi \mapsto \xi(0)$ 是局部指数李代数之间的态射，$P^{(r)}(\mathfrak{g}) = \ker(\mathrm{ev}_0)$ 是局部指数的（命题 8.3.3）。同理，$\Omega^{(r)}(\mathfrak{g})$ 是局部指数的，因为它是同态 $\mathrm{ev}_1\colon P^{(r)}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ 的核。□

定理 15.5.6（路径李代数可扩张性定理）。如果$\mathfrak{g}$ 是局部指数的且 $r \geq 1$，那么局部指数李代数$P^{(r)}$（$\mathfrak{g}$） 是可扩张的。任何具有李代数 $P^{(r)}$（$\mathfrak{g}$） 的 <替换>*1*</替换>连通局部指数李群都是可缩的，且其中心是单连通的

证明。 （a）我们考虑局部指数李代数 $\mathfrak{m} := C^{r-1}([0,1],\ \mathfrak{g})$（习题 8.4.8）。根据命题 8.3.16，李代数

$$\widehat{\mathfrak{m}} := |\mathfrak{m}| \rtimes \mathfrak{m}_{\mathrm{ad}}$$

是局部指数且可扩张的。相应的李群是 $\widehat{}$半直积 $M := |\mathfrak{m}| \rtimes M_{\mathrm{ad}}$，其中 M_{ad} 是李代数为 $\mathfrak{m}$ 的单连通局部指数李群（定理 8.3.13）。现在，子代数 $P^{(r)}(\mathfrak{g})$ 对 $\mathfrak{m}$ 的伴随作用导出一个同态

$$\alpha\colon P^{(r)}(\mathfrak{g}) \to \widehat{\mathfrak{m}} = |\mathfrak{m}| \rtimes \mathfrak{m}_{\mathrm{ad}},\quad \xi \mapsto (\xi', \operatorname{ad}\xi)$$

由于 $\xi' = 0$ 蕴含 $\xi = 0$，而 $\xi(0) = 0$，因此该同态是单射。接下来我们注意到，对于 $\xi \in \mathfrak{z}(P^{(r)}(\mathfrak{g})) = P^{(r)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$，有 $\alpha(\xi) = (\xi',\ 0)$，于是

$$\exp_{\widehat{M}}(\alpha(\xi)) = (\xi', e) = (0, e)$$

导出 $\xi = 0$。因此，积分子群定理 9.2.4 蕴含存在一个李代数为 $P^{(r)}(\mathfrak{g})$ 的局部指数李群。该积分子群 $\exp\left(P^{(r)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))\right)$ 的中心包含于 $|\mathfrak{m}| \times \{0\}$ 中，故为单连通的。

(b) 现在设 H 是一个李代数为 $P^{(r)}(\mathfrak{g})$的单连通局部指数李群。对每个 $t \in [0,1]$，我们得到一个连续自同态

$$f_t\colon P^{(r)}(\mathfrak{g}) \to P^{(r)}(\mathfrak{g}),\quad f_t(\xi)(s) := \xi(ts).$$

设 $F_t\colon H \to H$ 是相应的李群态射，且 $\mathbf{L}(F_t) = f_t$。于是 $F_0 = e$ 是常数，且 $F_1 = \mathrm{id}_H$。还需证明映射$F\colon [0,1] \times H \to H, (t,h) \mapsto F_t(h)$ 连续。设 $U \subseteq \mathfrak{g}$是一个开 0 邻域，经指数映射微分同胚地映到 $\exp(U)$。由

$$F_t(\exp\xi) = \exp(f_t(\xi))$$

以及映射 $[0,1]\times P^{(r)}(\mathfrak{g}) \to P_{(r)}(\mathfrak{g}),\ (t,\xi) \mapsto f_t(\xi)$ 的连续性（命题 15.5.3），可知 $F|_{[0,1]\times\exp(U)}$ 是连续的。由于 F 关于第二个变量具有乘法性，且 $H = \langle \exp U\rangle$，所有曲线 $t \mapsto F_t(h), h \in H$都是连续的。由 $F_t(h_0 h) = F_t(h_0)F_t(h)$可知，这意味着$F$在每一对 $(t_0, h_0) \in [0,1] \times H$ 上都是连续的。□

在下面的命题 15.5.24 中，我们将看到，连续路径李代数 $P^{(0)}(\mathfrak{g})$ 也是可扩张的，但这需要采用不同的论证，其依据是它的伴随群是可缩的这一事实。

注15.5.7。 假设 $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是一个中心理想，且 $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ 可扩张。如果 $\mathfrak{z}$ 不是拓扑分裂的，那么自然映射 $P(\mathfrak{g}) \to P(\mathfrak{q})$ 是否为满射并不明确。尽管如此，推论 8.3.11 表明商 $P(\mathfrak{g})/P(\mathfrak{z})$ 是局部指数的。

如果 $P_{\mathfrak{g}}$ 是李代数为 $P(\mathfrak{g})$ 的单连通李群，那么它的中心是单连通的，因此 exp: $P(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \to Z(P_{\mathfrak{g}})_0$ 是一个同胚。特别地， $P_{\mathfrak{z}} := \exp(P(\mathfrak{z}))$ 是一个闭李子群；又由于 $P(\mathfrak{g})/P(\mathfrak{z})$ 是局部指数的， $P_{\mathfrak{g}}/P_{\mathfrak{z}}$ 是一个李代数为 $P(\mathfrak{g})/P(\mathfrak{z})$ 的局部指数李群（定理 9.4.1）。

由于压缩映射 $F\colon [0,1] \times P_{\mathfrak{g}} \to P_{\mathfrak{g}}$ 是连续的，且每个 F_t 都保持子群 $P_{\mathfrak{z}}$ 不变，我们得到一个良定义映射

$$\overline{F}\colon [0,1] \times (P_{\mathfrak{g}}/P_{\mathfrak{z}}) \to P_{\mathfrak{g}}/P_{\mathfrak{z}}, \quad \overline{F}_t([g]) := [F_t(g)].$$

由于映射 $[0,1] \times P_{\mathfrak{g}} \to [0,1] \times (P_{\mathfrak{g}}/P_{\mathfrak{z}})$ 是开映射，它是一个商映射，因此 F 是连续的。这意味着 $P_{\mathfrak{g}}/P_{\mathfrak{z}}$ 也是可缩的。

注 15.5.8。如果 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，那么 $P(G)$ 是一个李群，其李代数为 $P(\mathfrak{g})$（定义 15.5.1）。对数导数$\delta\colon P(G) \to C^\infty([0,1], \mathfrak{g})$ 是一个满足以下条件的光滑映射

$$\delta(\alpha\beta) = \delta(\beta) + \mathrm{Ad}(\beta)^{-1}.\delta(\alpha) \quad \text{and} \quad T_e(\delta)(\xi) = \xi'$$

（命题 6.2.3）。由于 $[\xi,\eta]' = [\xi',\eta] + [\xi,\eta']$，可得

$$T_e(\delta)\colon P(\mathfrak{g}) \to C^\infty([0,1],\mathfrak{g}), \quad \xi \mapsto \xi'$$

如果赋予 $C^\infty([0,1], \mathfrak{g})$ 以下括号，它就成为李代数的一个拓扑同构

$$[\xi,\eta](t) := \Big[\xi(t), \int_0^t \eta(\tau)\,d\tau\Big] + \Big[\int_0^t \xi(\tau)\,d\tau, \eta(t)\Big]. \tag{15.31}$$

求值映射 $\mathrm{ev}_1\colon P(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ 对应于商映射

$$C^\infty([0,1],\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}, \quad \xi \mapsto \int_0^1 \xi(\tau)\,d\tau.$$

此外，若 G 是正则的，则 δ 是一个微分同胚，因此可知，赋予括号（15.31）的 $C^\infty([0,1], \mathfrak{g})$是可积的。由于这一性质显然是 $\mathfrak{g}$正则可积性的必要条件，具有这一性质的李代数在 [RK97] 中称为预可积分的 （另见 [Les93]）。

15.5.3 周期群

设 $\mathfrak{g}$ 是一个 Mackey完备的局部指数李代数， $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是其中心，且 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$。我们假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 也是 Mackey完备的；特别是，当 $\mathfrak{g}$ 是 Fr´echet 空间，或 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是一个分裂子空间时，情况便是如此。定理 8.3.13 表明， $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 可积为一个连通李群 $G_{\mathrm{ad}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$。该中心扩张

$$\mathfrak{z} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$$

可以通过求值映射 $\mathrm{ev}_1\colon P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 拉回为一个中心扩张

$$\mathfrak{z} \hookrightarrow \widehat{P}(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}), \quad \text{where} \quad \widehat{P}(\mathfrak{g}) := \{(\xi, x) \in P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{g} : \xi(1) = \mathrm{ad}\, x\}.$$

$\widehat{\ }$那么根据推论 8.3.4，$P(\mathfrak{g})$ 也是局部指数的。

鉴于命题 15.5.3，群 $P(G_{\mathrm{ad}})$ 是光滑可缩的。其李代数 $P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$ 是麦基完备的，因为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 是麦基完备的（习题 15.5.1），且 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的，所以闭子空间 $P(\mathfrak{g}) \subseteq P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{g}$ 也是麦基完备的。因此，命题 15.4.21 表明 $P(\mathfrak{g})$ 是可扩张的（参见例 15.4.16）。设 $\widehat{P_{\mathfrak{g}}}$是一个李代数为 $P(\mathfrak{g})$ 的单连通局部指数李群。在命题 15.4.21 的证明中，由嵌入构造出一个李代数为 $P(\mathfrak{g})$ 的李群

$$\widehat{P}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{g}_1 := |\widehat{P}(\mathfrak{g})| \oplus_b P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}), \quad x \mapsto (x, q(x))$$

$\widehat{\ }$并且由于积分得到 $\mathfrak{g}_1$ 的群使得 $|P(\mathfrak{g})|$ 是一个单连通子群，特别可知 $\exp_{\widehat{P}_{\mathfrak{g}}}|_{\mathfrak{z}}$ 是单射。因此我们有一个中心扩张

$$\mathfrak{z} \hookrightarrow \widehat{P}_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{q} P(G_{\mathrm{ad}}) \tag{15.32}$$

$\widehat{\ }$因为 $P_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{z}$ 是具有李代数 $P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$的唯一单连通局部指数李群。如果子空间 $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{g}$ 不是分裂的，这未必是一个李群扩张，也就是说，光滑局部截面未必存在。

考虑同态

$$\widehat{\mathrm{Ad}}_1 := \mathrm{ev}_1 \circ q : \widehat{P}_{\mathfrak{g}} \to G_{\mathrm{ad}} \quad \text{with} \quad \mathbf{L}(\widehat{\mathrm{Ad}}_1)(\xi, x) := \xi(1).$$

Then

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}} := \ker \widehat{\mathrm{Ad}}_1 = q^{-1}(\Omega(G_{\mathrm{ad}}))$$

$\widehat{\ }$是 $P_{\mathfrak{g}}$ 的局部指数李子群，其李代数为

$$\widehat{\Omega}(\mathfrak{g}) := \ker \mathbf{L}(\widehat{\mathrm{Ad}}_1) = \Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{z} \tag{15.33}$$

（命题 9.3.11），并且

$$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{z} \cong \Omega(G_{\mathrm{ad}}). \tag{15.34}$$

$\widetilde{\ }$设 $q_\Omega\colon \Omega(G_{\mathrm{ad}}) \to \Omega(G_{\mathrm{ad}})_0$ 是单位连通分支 $\Omega(G_{\mathrm{ad}})_0$ 的万有覆盖同态，其中$\mathbf{L}(q_\Omega) = \mathrm{id}_{\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})_\circ}$ 现在，包含同态$\widehat{\ }$ $\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \to \Omega(\mathfrak{g})$积分为一个李群态射

$$f\colon \widetilde{\Omega}(G_{\mathrm{ad}}) \to \widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}} \quad \text{with} \quad q \circ f = q_\Omega. \tag{15.35}$$

特别地，$f(\ker q_\Omega) \subseteq \mathfrak{z}_\circ$ 将 $\pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}}))$ 与 $\ker q_\Omega$ 等同（定理 5.3.7），于是我们得到一个同态

$$\mathrm{per}_{\mathfrak{g}} := f|_{\pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}}))}\colon \pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}})) \to \mathfrak{z}.$$

定义 15.5.9. 我们称 $\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的周期同态，其像为

$$\Pi(\mathfrak{g}) := \mathrm{im}(\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

周期群 $\mathfrak{g}$。

回顾一下，$\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \trianglelefteq P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$ 是求值态射 $P(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 的核，该态射是局部指数李代数之间的态射。因此，根据命题 8.3.3，$\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$ 是局部指数的，从而包含映射 $\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \hookrightarrow P(\mathfrak{g})$ 可积分为积分子群 $N \hookrightarrow P_{\mathfrak{g}}$。下面的引理将此积分子群的性质与 $\mathfrak{g}$ 的周期群联系起来。

引理 15.5.10。 令 $N \subseteq P_{\mathfrak{g}}$ 为与闭局部指数子代数 $\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \subseteq P(\mathfrak{g})$ 相对应的连通积分子群。则 $N \cap \mathfrak{z} = \Pi(\mathfrak{g})$，并且 N 是李子群，当且仅当 $\Pi(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{z}$ 的离散子群。

证明。 将 $(\Omega_{\mathfrak{g}})_0$ 描述为商

$$\widetilde{\Omega}(G_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{z} \to (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}})_0, \quad (g, z) \mapsto f(g)z$$

（见 (15.35)）表明 $N \cap \mathfrak{z} \cong \mathrm{im}(\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}) = \Pi(\mathfrak{g})$，因为 N 是 $\Omega(G_{\mathrm{ad}})$ 在 $\Omega_{\mathfrak{g}}$ 中的像。

正规子群 $N \subseteq P_{\mathfrak{g}}$ 等价于 N 是 $\Omega_{\mathfrak{g}}$ 的李子群。李代数 $\Omega(\mathfrak{g})$ 是直积 $\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{z}$。因此，$N$ 是李子群，当且仅当在 $\mathfrak{z}$ 中存在一个零邻域 U，使得 $N \cap U = \{0\}$（引理 9.3.9）；这又等价于 $\Pi(\mathfrak{g})$ 是离散的。 □

定理 15.5.11（局部指数李代数的可扩张性）。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 *Mackey*完备的局部指数李代数，且 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 也 *Mackey*完备。那么，$\mathfrak{g}$ 可扩张，当且仅当 $\Pi(\mathfrak{g})$ 是离散的。

证明。 我们在构造 $\Pi(\mathfrak{g})$ 时已经看到，存在群扩张 $\Omega_{\mathfrak{g}} \hookrightarrow P_{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow G_{\mathrm{ad}}$，其中 $P_{\mathfrak{g}}$ 是一个李代数为 $P(\mathfrak{g})$ 的单连通局部指数群。

若 $\mathfrak{g}$ 是局部指数李群 G 的李代数，那么我们不妨假设 G 是单连通的。$P_{\mathfrak{g}}$ 的单连通性使我们能够将局部指数李代数的同态 $P(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ 积分为李群同态 $p\colon P_{\mathfrak{g}} \to G$，满足

$$\mathbf{L}(\ker p) = \ker \mathbf{L}(p) = \Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}).$$

$\widehat{}$ 根据定理 7.2.9，我们有 $G \cong P_{\mathfrak{g}}/\ker p$，其中 $\ker p$ 是连通的，因为 G 是单连通的。因此，$\ker p$ 与对应于李子代数 $\mathfrak{n} := \Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})\widehat{}$ 的连通积分子群 N 一致，该子代数属于 $P(\mathfrak{g})$。根据引理 15.5.10，这意味着 $\Pi(\mathfrak{g})$ 是离散的。

反过来，如果 $\Pi(\mathfrak{g})$ 是离散的，那么 N 是李子群；又由于 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }P(\mathfrak{g})/\mathfrak{n} = P(\mathfrak{g})/\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \cong \mathfrak{g}$ 是局部指数的，定理 9.4.1 表明 $\widehat{\ }$ $P_{\mathfrak{g}}/N$ 是一个李代数为 $P(\mathfrak{g})/\mathfrak{n} \cong \mathfrak{g}$ 的局部指数李群。□

推论 15.5.12。如果 $\pi_2(G_{\mathrm{ad}})$ 是平凡的，那么 $\mathfrak{g}$ 可扩张。

证明。这由同构 $\delta_2\colon \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \to \pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}}))$ 得出（旁注 15.5.4）。□

由于每个巴拿赫–李群都自动是局部指数的，因此前述定理对于巴拿赫–李代数可以表述得更简单。

推论 15.5.13（巴拿赫–李代数的可扩张性定理）。巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 可积，当且仅当 $\Pi(\mathfrak{g})$是离散的。

推论 15.5.14。（李第三定理）每个有限维李代数 $\mathfrak{g}$都是可扩张的。

证明。若 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，则 G_{ad} 也有限维，因此 $\pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \cong \pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}}))$ 消失（注 14.2.1 ）。所以周期群 $\Pi(\mathfrak{g})$ 是平凡的，因而是离散的。□

注 15.5.15。若 $\mathfrak{g}$ 是有限维李代数，那么验证其可扩张性的另一种工具是阿多定理：存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 和一个嵌入 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$。然后我们可以使用积分子群定理 9.2.4。关于这一方法的更多细节，请参阅 [HiNe12，第 9.4 节。11]

引理 15.5.16。（周期群的自然性）设 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是局部指数李代数之间的同态，其中 $\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ ，且$\varphi^{G_{\mathrm{ad}}}\colon \widetilde{G}_{\mathrm{ad}} \to \widetilde{H}_{\mathrm{ad}}$ 是由 φ 诱导的群同态。那么

$$\varphi(\Pi(\mathfrak{g})) \subseteq \Pi(\mathfrak{h}),$$

并且下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \cong \pi_2(\widetilde{G}_{\mathrm{ad}}) & & \xrightarrow{\pi_2(\varphi^G_{\mathrm{ad}})} & & \pi_2(H_{\mathrm{ad}}) \cong \pi_2(\widetilde{H}_{\mathrm{ad}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{per}_{\mathfrak{g}}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{per}_{\mathfrak{h}}} \\ \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) & & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & & \mathfrak{z}(\mathfrak{h}). \end{array} \tag{15.36}$$

证明。由于 φ 将 $\mathfrak{z}$（$\mathfrak{g}$）映射到 $\mathfrak{z}$（$\mathfrak{h}$），它诱导出一个同态

$$\varphi_{\mathrm{ad}}\colon \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{h}_{\mathrm{ad}}, \quad \mathrm{ad}\, x \mapsto \mathrm{ad}\, \varphi(x)$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$从而得到一个同态 $P(\varphi):\ P(\mathfrak{g}) \to P(\mathfrak{h})$，$(\xi,\ x) \mapsto (\varphi\circ\xi,\ \varphi(x))$，其中$\widehat{P}(\varphi)\big(\widehat{\Omega}(\mathfrak{g})\big) \subseteq \widehat{\Omega}(\mathfrak{h})$。积分到单连通群 $\widehat{P}_{\mathfrak{g}}$ 进一步导出一个群同态

$$\widehat{P}_\varphi\colon \widehat{P}_{\mathfrak{g}} \to \widehat{P}_{\mathfrak{h}} \quad \text{with} \quad \mathbf{L}(\widehat{P}_\varphi) = \widehat{P}(\varphi).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$显然，此同态将子群 $\Omega_{\mathfrak{g}}$ 映射到 $\Omega_{\mathfrak{h}}$，因此$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$诱导出一个同态 $\pi_1(\Omega_{\mathfrak{g}}) \to \pi_1(\Omega_{\mathfrak{h}})$。这意味着诱导映射

$$(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}})^{\sim} \cong \widetilde{\Omega}(G_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to \widetilde{\Omega}(H_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cong (\widehat{\Omega}_{\mathfrak{h}})^{\sim}$$

将单连通覆盖群的图映射到 $\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}$ 的图中。这等价于

$$\varphi|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})} \circ \mathrm{per}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{per}_{\mathfrak{h}} \circ \pi_1\big(\Omega(\varphi^G_{\mathrm{ad}})\big), \tag{15.37}$$

其中 $\varphi^G_{\mathrm{ad}}\colon \widetilde{G}_{\mathrm{ad}} \to \widetilde{H}_{\mathrm{ad}}$ 是满足$\mathbf{L}(\varphi^G_{\mathrm{ad}}) = \varphi_{\mathrm{ad}}$的同态，而 $\Omega(\varphi^G_{\mathrm{ad}})$ 是相应的同态

$$\Omega(\widetilde{G}_{\mathrm{ad}}) \cong \Omega(G_{\mathrm{ad}})_0 \to \Omega(\widetilde{H}_{\mathrm{ad}}) \cong \Omega(H_{\mathrm{ad}})_0, \quad \gamma \mapsto \varphi^G_{\mathrm{ad}} \circ \gamma$$

（参见注 15.5.4）。接下来我们注意到，连接同态 $\delta_2^{\mathfrak{g}}:\ \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \to \pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}}))$ 的自然性（注 15.5.4）导出了如下交换图

$$\begin{array}{ccc}
\pi_2(G_{\mathrm{ad}}) & \xrightarrow{\pi_2(\varphi^G_{\mathrm{ad}})} & \pi_2(H_{\mathrm{ad}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_2^{\mathfrak{g}}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_2^{\mathfrak{h}}} \\
\pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}})) & \xrightarrow{\pi_1(\Omega(\varphi^G_{\mathrm{ad}}))} & \pi_1(\Omega(H_{\mathrm{ad}})) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{per}_{\mathfrak{g}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{per}_{\mathfrak{h}}} \\
\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{z}(\mathfrak{h}).
\end{array}$$

现在通过 δ_2^G 将 $\pi_2(G_{\mathrm{ad}})$ 与 $\pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}}))$ 识别，便可推出图表 (15.36) 交换，因此特别有 $\varphi(\Pi(\mathfrak{g})) \subseteq \Pi(\mathfrak{h})$。□

推论 *15.5.17. (a)* 若 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是局部指数李代数之间的同态，且 $\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$，并且由此诱导的同态 $\pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \to \pi_2(H_{\mathrm{ad}})$ 是满射，则 $\varphi(\Pi(\mathfrak{g})) = \Pi(\mathfrak{h})$。*(b)* 若 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是局部指数李代数之间的商同态，且 $\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$，并且 $\ker\varphi \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，则 $\varphi(\Pi(\mathfrak{g})) = \Pi(\mathfrak{h})$。

证明。 (a) 这是引理 15.5.16 的直接推论。
(b) 我们的假设蕴含 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}/\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \cong \mathfrak{h}_{\mathrm{ad}}$. 因此，诱导映射 $\varphi^G_{\mathrm{ad}}\colon G_{\mathrm{ad}} \to H_{\mathrm{ad}}$ 是一个同构，结论由 (a) 得出。□

推论 15.5.18. 如果 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是麦基完备的局部指数李代数，且其伴随代数也麦基完备，那么

$$\Pi(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2) = \Pi(\mathfrak{g}_1) \times \Pi(\mathfrak{g}_2).$$

注 15.5.19。令 **LZ** 表示这样一个范畴：其对象是伴随商也麦基完备的 Mackey 完备局部指数李代数，其态射是将中心映到中心的连续李代数同态。于是，引理 15.5.16 表明，Π: $\mathfrak{g} \mapsto \Pi(\mathfrak{g})$ 定义了一个从 **LZ** 到阿贝尔拓扑群范畴的函子。

命题 15.5.20。若 G 是一个单连通局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 麦基完备，则

$$Z(G)_0 \cong \mathfrak{z}/\Pi(\mathfrak{g}) \quad \textit{and} \quad \pi_1(Z(G)) \cong \Pi(\mathfrak{g}) = \ker(\exp_G|_{\mathfrak{z}}).$$

证明。与定理 15.5.11 的证明相同，记 $G = P_{\mathfrak{g}}/\ker p$。由于 G 单连通，群 $\ker p$ 连通。此外，$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong \Omega(\mathfrak{g})/\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$ 意味着

$$Z(G)_0 \cong \widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}}/\ker p,$$

因此，$\widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}} \cong (\Omega(G_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{z})/\Gamma(-\mathrm{per}_{\mathfrak{g}})$ 得出 $Z(G)_0 \cong \mathfrak{z}/\operatorname{im}(\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{z}/\Pi(\mathfrak{g})$。□

注 15.5.21.（不可扩张李代数）设 $\mathfrak{g}$ 是一个麦基完备的局部指数李代数，其中心有限维，且满足 $\Pi(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}d$ 和 $d \neq 0$。令 $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$。那么 $\mathfrak{z} := \{(x, \theta x) : x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\}$ 是 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 的中心理想，因此 $\mathfrak{h} := (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})/\mathfrak{z}$ 是局部指数的（推论 8.3.11）。注意，$\mathfrak{h}$ 是麦基完备的，因为 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 是麦基完备的，而 $\mathfrak{z}$ 是有限维的。推论 15.5.18 和引理 15.5.16 现在推出

$$\Pi(\mathfrak{h}) \cong \mathbb{Z}[(d, 0)] + \mathbb{Z}[(0, d)] = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta)[(d, 0)],$$

它不是离散的。因此，$\mathfrak{h}$ 不可扩张。

例 15.5.22.（不可扩张巴拿赫–李代数）（a）van Est 和 Korthagen 运用注 15.5.21 中描述的方法，给出了第一个不可扩张巴拿赫–李代数的例子（[EK64]）。它是巴拿赫–李代数 $C^1(\mathbb{S}^1, \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}))$ 的中心扩张 $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \oplus_\omega C^1(\mathbb{S}^1, \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}))$，该代数由以下余循环定义

$$\omega(f, g) := \int_0^1 \operatorname{tr}(f(t)g'(t))\, dt,$$

其中，我们将 $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的函数视为 $\mathbb{R}$上的1-周期函数。于是，$\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \cong C^1(\mathbb{S}^1, \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}))$和$G_{\mathrm{ad}} \cong C^1(\mathbb{S}^1, \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}))$导出

$$\pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \cong \pi_3(\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})) \cong \pi_3(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{Z}.$$

现在可以证明，$\mathrm{per}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{per}_{\omega}$ 是非平凡的；验证 $\Pi(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{Z}$ 并非易事（有关此计算，另见 [MN03] ）。

(b) Douady 与 Lazard 发现了一个更简单的例子（[DL66]），他们观察到无限维复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的酉群 $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ 的单连通性（Kuiper 定理 14.4.3）蕴含其李代数 $\mathfrak{u}(\mathcal{H}) := \{X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \colon X^* = -X\}$ 满足

$$\Pi(\mathfrak{u}(\mathcal{H})) \cong \pi_1(Z(\mathrm{U}(\mathcal{H}))) = \pi_1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}$$

（命题 15.5.20）。

(c) 基于 $\mathrm{U}(\mathcal{H})$ 是单连通的这一事实，还可以给出如下直接论证。对任意无理数 $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，直线 $\mathfrak{n} := \mathbb{R}i(\mathbf{1}, \theta\mathbf{1})$ 生成单连通群 $\mathrm{U}(\mathcal{H}) \times \mathrm{U}(\mathcal{H})$ 的中心 $Z(\mathrm{U}(\mathcal{H}) \times \mathrm{U}(\mathcal{H})) \cong \mathbb{T}^2$ 的一个稠密子群，从而定理 9.4.10 蕴含商李代数 $\mathfrak{q} := (\mathfrak{u}(\mathcal{H}) \times \mathfrak{u}(\mathcal{H}))/\mathfrak{n}$ 不可扩张。如同注记 15.5.21 中那样，可以证明，

$$\Pi(\mathfrak{q}) = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{q}) \cong \mathbb{R},$$

它不是离散的。

注 15.5.23. 利用 [Ne02a]中为无限维李群的中心扩张所发展的精细方法，对于每个 Mackey 完备的局部指数李代数 $\mathfrak{g}$，都可得到一个周期映射

$$\mathrm{per}_b \colon \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \to |\mathfrak{g}|$$

它对应于余循环 $b\colon \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \times \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{g}$，由 $b(\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y) := [x, y]$定义。这不要求 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$具有麦基完备性。这个周期映射通过对左不变闭 2-形式 $\omega \in \Omega^2(G_{\mathrm{ad}}, |\mathfrak{g}|)$ 积分得到，其中 $\omega_e = b$。

由于 $\operatorname{ad} \circ b$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$的李括号，它就是李代数余边界$-d_{\mathfrak{g}}(\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}})$（参见附录 3.8 ）。因此，相应的 2- 形式 $\operatorname{ad} \circ \omega$ 是正合的，所以根据 Stokes 定理，其周期均为零。这意味着 $\operatorname{im}(\mathrm{per}_b) \subseteq \operatorname{kerad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，从而得到一个同态

$$\mathrm{per}_b \colon \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

无需假设 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 是 Mackey 完备的。

命题 15.5.24。设 $\mathfrak{g}$ 是一个 *Mackey* 完备的局部指数李代数，且其伴随代数也 *Mackey* 完备。那么，连续路径代数 $P_{(0)}(\mathfrak{g})$ 是可扩张的。特别地，对于每个 *Fr´echet*–李代数，$P^{(0)}(\mathfrak{g})$ 都是可扩张的。

证明。 **第一种证明：** 首先注意到，路径李代数 $P^{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$ 是可缩局部指数群 $P(G_{\mathrm{ad}})$ 的李代数（命题 15.5.3 ）。接下来我们证明

$$q := P_{\mathrm{ad}} \colon P^{(0)}(\mathfrak{g}) \to P^{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}), \quad \xi \mapsto \mathrm{ad} \circ \xi$$

是一个广义中心扩张（定义 15.4.15）。由于 $P^{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$ 中的折线路径可以提升为 $P_{(0)}(\mathfrak{g})$ 中的元素，q 的像是稠密的。令

$$b_{\mathfrak{g}} \colon \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \times \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{g}, \quad (\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y) \mapsto [x, y]$$

是广义中心扩张 $\mathsf{Ad} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 的典范余循环。那么

$$b \colon P^{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \times P^{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \to P^{(0)}(\mathfrak{g}), \quad b(\xi_1, \xi_2)(t) := b_{\mathfrak{g}}([\xi_1(t), \xi_2(t)])$$

是一个连续双线性映射，并且

$$b(q(\xi_1), q(\xi_2)) = [\xi_1, \xi_2] \quad \text{for} \quad \xi_1, \xi_2 \in P^{(0)}(\mathfrak{g}).$$

这表明 q 定义了一个广义中心扩张。

$\mathfrak{g}$ 的麦基完备性蕴含 $P^{(0)}(\mathfrak{g})$的麦基完备性（习题 15.5.1）。因此，我们由注 15.4.22 得出 $P^{(0)}(\mathfrak{g})$的可扩张性。[2]

由于 $P_{(0)}(\mathfrak{g})$自然嵌入 $\mathfrak{h} \cong |P^{(0)}(\mathfrak{g})| \oplus_b P_{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$（命题 15.4.18），由积分子群定理 9.2.4 可知，$P^{(0)}(\mathfrak{g})$是可扩张的。

第二个证明： 通过证明 $\pi_2(P_{\mathrm{ad}})$ 消失，可以由推论 15.5.12 推出 $\mathfrak{p} := P^{(0)}(\mathfrak{g})$ 的可扩张性的另一种证明。我们有 $\mathfrak{p}_{\mathrm{ad}} = P^{(0)}(\mathfrak{g})/P_{(0)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$，它是 $P_{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$ 的子代数，由所有能连续提升到 $\mathfrak{g}$ 的元素组成。令

$$F \colon [0,1] \times P^{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \to P^{(0)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}), \quad F_t(\xi)(s) := \xi(ts)$$

表示典范收缩。于是每个 F_t 都将 $\mathfrak{p}_{\mathrm{ad}}$ 映入自身，因此我们得到一个映射

$$\overline{F} \colon [0,1] \times \mathfrak{p}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{p}_{\mathrm{ad}}, \quad \overline{F}_t(\mathrm{ad}\, \xi)(s) = \mathrm{ad}(\xi(st)).$$

这个映射是连续的，因为 $[0,1] \times \mathfrak{p} \to [0,1] \to \mathfrak{p}_{\mathrm{ad}}$ 是开映射，而且映射

$$[0,1] \times \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_{\mathrm{ad}}, \quad (t, \xi) \mapsto (s \mapsto \mathrm{ad}(\xi(st)))$$

是连续的。因此，由习题 15.5.6 可知，P_{ad} 的单连通覆盖群 $\widetilde{P}_{\mathrm{ad}}$ 是可缩的。因此，群 $\pi_2(P_{\mathrm{ad}}) \cong \pi_2(\widetilde{P}_{\mathrm{ad}})$（参见引理 14.1.9）是平凡的。□

[2] 注意，命题 15.4.13 在此不适用，因为我们不知道上同调空间 $H^k_{\mathrm{dR}}(P^{(0)}(G_{\mathrm{ad}}) \mid P_{(0)}(\mathfrak{g})|)$、$k = 1, 2$ 是否为零。若 $P^{(0)}(G_{\mathrm{ad}})$ 是光滑可缩的，则由此可得，但我们只知道它是拓扑可缩的。

备注 15.5.25。由命题 15.5.24 与定理 15.5.6 可知，当 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 麦基完备时，所有路径代数 $P^{(r)}(\mathfrak{g})$ 都是可扩张的。由于群 $P^{(r)}(G_{\mathrm{ad}})$ 是可缩的，我们可以利用备注 15.4.22 看出，相应的中心扩张 $\widehat{P}^{(r)}(\mathfrak{g})$ 可扩张为中心扩张

$$\mathfrak{z} \hookrightarrow \widehat{P}^{(r)}_{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow P^{(r)}(G_{\mathrm{ad}}).$$

因此，我们得到自然同态

$$f^{(r)}\colon \widetilde{\Omega}^{(r)}(G_{\mathrm{ad}}) \to \widehat{\Omega}^{(r)}_{\mathfrak{g}} = \ker(\widehat{\mathrm{Ad}}^{(r)}_1)$$

它们导出周期同态

$$\mathrm{per}^{(r)}_{\mathfrak{g}}\colon \pi_1(\Omega^{(r)}(G_{\mathrm{ad}})) \to \mathfrak{z}.$$

由于包含映射 $\Omega(G_{\mathrm{ad}}) \hookrightarrow \Omega^{(r)}(G_{\mathrm{ad}})$ 是弱同伦等价（定理 14.7.2），我们得到同构

$$\eta_r\colon \pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}})) \to \pi_1(\Omega^{(r)}(G_{\mathrm{ad}})) \quad \text{with} \quad \mathrm{per}^{(r)}_{\mathfrak{g}} \circ \eta_r = \mathrm{per}_{\mathfrak{g}},$$

因此，所有周期映射 $\mathrm{per}^{(r)}_{\mathfrak{g}}$具有相同的值域 $\Pi(\mathfrak{g})$。

15.5.4 非麦基完备代数的一个周期群

在本小节中，我们还引入局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 的周期群 $\Pi'(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$；该李代数不必是麦基完备的，而且也可以通过周期群的离散性来刻画其可扩张性。如果 $\mathfrak{g}$ 是 Fr´echet，或者 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是拓扑分裂的，那么两个周期群 $\Pi(\mathfrak{g})$ 和 $\Pi'(\mathfrak{g})$ 重合（命题 15.5.31）。这种替代方法值得关注，因为对于局部指数李代数 $\mathfrak{g}$，尚不清楚其完备化或麦基完备化是否也具有局部指数性。

我们从光滑路径李代数 $P(\mathfrak{g}) := P^{\infty}(\mathfrak{g})$ 开始，并回顾定理 15.5.6：$P(\mathfrak{g})$ 是可扩张的局部指数李代数。设 $P_{\mathfrak{g}}$ 是相应的单连通局部指数李群。于是，求值映射 $\mathrm{ev}_1\colon P(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}, \xi \mapsto \xi(1)$ 是一个核为 $\Omega(\mathfrak{g})$ 的商同态，因此 $\mathfrak{g} \cong P(\mathfrak{g})/\Omega(\mathfrak{g})$。现在，命题 9.4.8 表明，$\mathfrak{g}$ 可扩张，当且仅当积分子群 $\langle \exp \Omega(\mathfrak{g}) \rangle \subseteq P_{\mathfrak{g}}$ 是局部指数李子群。我们希望利用商的可扩张性定理 9.4.10，更直接地刻画 $\mathfrak{g}$ 的可扩张性。

$P(G)$ 对 $\mathfrak{g}$ 的作用对应于一个态射

$$\mathrm{Ad}_1\colon P_{\mathfrak{g}} \to G_{\mathrm{ad}} \quad \text{with} \quad \mathbf{L}(\mathrm{Ad}_1)\colon P(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}, \quad \xi \mapsto \mathrm{ad}(\xi(1)).$$

我们考虑核

$$N_{\mathfrak{g}} := \ker(\mathrm{Ad}_1) \quad \text{with Lie algebra} \quad \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}} := \{\xi \in P(\mathfrak{g}) \colon \xi(1) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\}.$$

由于 $\mathbf{L}(\mathrm{Ad}_1)$ 是商映射， $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \cong P(\mathfrak{g})/\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}$. 因此， $N_{\mathfrak{g}}$ 是一个闭正规子群，且满足 $G_{\mathrm{ad}} \cong P_{\mathfrak{g}}/N_{\mathfrak{g}}$。遗憾的是，如果不对 $\mathfrak{g}$ 作进一步假设，我们无法确定 Ad_1 是否具有连续局部截面。问题在于线性商映射 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 的连续局部截面的存在性。现在

$$\mathrm{ev}_1 \colon \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \quad \xi \mapsto \xi(1)$$

是李代数同态，即在所有括号上为零的连续线性映射。这导出了一个周期同态

$$\mathrm{per}'_{\mathfrak{g}} \colon \pi_1(N_{\mathfrak{g}}) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \quad [\gamma] \mapsto \int_0^1 \delta(\gamma)_t(1)\, dt,$$

其中 $\gamma \in \Omega(N_{\mathfrak{g}})$ 是一个光滑环路。

定义 15.5.26。我们称加法子群

$$\Pi'(\mathfrak{g}) := \mathrm{per}'_{\mathfrak{g}}(\pi_1(N_{\mathfrak{g}})) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

为 $\mathfrak{g}$的第二周期群。

由定理 9.4.10 可得:

定理 15.5.27. 局部指数李代数 $\mathfrak{g}$ 可扩张，当且仅当 $\Pi'(\mathfrak{g})$ 是离散的。

在本小节的余项中，我们讨论 $\Pi'(\mathfrak{g})$ 的自然性，以及在两者均有定义时它与 $\Pi(\mathfrak{g})$ 的重合。

定义 15.5.28。若存在一个 0-邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 以及一个连续映射 $\sigma \colon U \to \mathfrak{g}$，使得 $\mathrm{ad} \circ \sigma = \mathrm{id}_U$，则称 $\mathfrak{g}$ 拓扑 ad-分裂 。

引理 15.5.29。若 $\mathfrak{g}$ 是 *Fr´echet*，或 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的分裂子空间，则 $\mathfrak{g}$ 是拓扑 ad-分裂的。

证明。 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是分裂子空间，意味着存在连续线性映射 $\sigma \colon \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{g}$，使得 $\mathrm{ad} \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}}$。

若 $\mathfrak{g}$ 是 Fr´echet，则连续局部截面的存在性由迈克尔选择定理得出；关于巴拿赫情形见 [MicE59]，关于一般结果见 [Bou87，第 II 章，§4.7，命题 12] 。 □

下面的命题给出了一些推论。

命题 15.5.30。假设 $\mathfrak{g}$ 在拓扑意义下是 伴随表示-分裂的。那么，同态 伴随表示$_1$: $P_{\mathfrak{g}} \to G_{\mathrm{ad}}$ 有连续局部截面，因此我们在 $P_{\mathfrak{g}}$ 上得到一个局部平凡的 $N_{\mathfrak{g}}$-主丛结构，其底空间为 G_{ad}。相应的连接同态

$$\delta_2 \colon \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \to \pi_1(N_{\mathfrak{g}})$$

是一个同构。

证明。 由于 $\mathrm{ev}_1\colon P(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ 有线性连续截面，根据我们的假设，$\mathrm{ad}_1\colon P(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 有连续局部截面；又由于 $P_{\mathfrak{g}}$ 和 G_{ad} 是局部指数的，同态 Ad_1 有连续局部截面。因此， $P_{\mathfrak{g}}$ 是一个主 $N_{\mathfrak{g}}$-丛，从而我们得到一个正合列

$$\cdots \to \pi_2(N_{\mathfrak{g}}) \to \pi_2(P_{\mathfrak{g}}) \to \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \xrightarrow{\delta_2} \pi_1(N_{\mathfrak{g}}) \to \cdots$$

（定理 14.1.8）。由于 $P_{\mathfrak{g}}$ 是可缩的（定理 15.5.6），其所有同伦群都是平凡的，因此 δ_2 是一个同构。□

命题 15.5.31。如果 $\mathfrak{g}$ 是 *Fr´echet* 或麦基完备的，且 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 分裂，那么

$$\mathrm{per}'_{\mathfrak{g}} \circ \delta_2 = \mathrm{per}_{\mathfrak{g}}\colon \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \to \mathfrak{z}.$$

特别地， $\Pi(\mathfrak{g})$ 与 $\Pi'(\mathfrak{g})$ 相同。

证明。我们的假设意味着 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 是麦基完备的，因此 $\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}\colon \pi_1(N_{\mathfrak{g}}) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 有定义。

（a）：由注 15.5.4 可知，连接同态

$$\delta_2^{\mathfrak{g}}\colon \pi_2(G_{\mathrm{ad}}) \to \pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}}))$$

是一个同构。回顾一下，$\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}\colon \pi_1(\Omega(G_{\mathrm{ad}})) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是通过限制自然同态而得到的

$$f\colon \widetilde{\Omega}(G_{\mathrm{ad}}) \to \widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}} = \ker(\mathrm{Ad}_1) \subseteq \widehat{P}_{\mathfrak{g}}$$

$\widehat{\ }$对包含映射 $\Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \hookrightarrow \Omega(\mathfrak{g}) \cong \Omega(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}) \times \mathfrak{z}$进行积分。

在备注 15.5.25 中，我们已经看到如何得到周期同态 $\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}^{(r)}\colon \pi_1(\Omega^{(r)}(G_{\mathrm{ad}})) \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 和自然同构

$$\eta_r\colon \pi_1(\Omega)(G_{\mathrm{ad}})) \to \pi_1(\Omega^{(r)}(G_{\mathrm{ad}}))$$

满足 $\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}^{(r)} \circ \eta_r = \mathrm{per}_{\mathfrak{g}}$。

(b)：另一个周期同态 $\mathrm{per}'_{\mathfrak{g}}\colon \pi_1(N_{\mathfrak{g}}) \to \mathfrak{g}$ 是通过将自然同态 $f'\colon N_{\mathfrak{g},\,0} \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 限制到 $\pi_1(N_{\mathfrak{g}})$ 而得到的。F

对于 $r < \infty$，我们的假设蕴 $\quad \mathrm{ly\ that\ th}$自然 $\quad \mathrm{l\ map}$

$$P^{(r)}(\mathfrak{g}) \to P^{(r)}(\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}})$$

是一个核为 $P^{(r)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ 的商映射（习题 15.5.2）。因此，我们得到一个商映射

$$q^{(r)}\colon P^{(r)}(\mathfrak{g}) \to \widehat{P}^{(r)}(\mathfrak{g}), \quad \xi \mapsto (\mathrm{ad}\,\xi, \xi(1))$$

其核为 $\Omega^{(r)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$，因此 $\widehat{P}^{(r)}(\mathfrak{g}) \cong P^{(r)}(\mathfrak{g})/\Omega^{(r)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$，对于相应的局部指数群，

$$q_G^{(r)}\colon P_{\mathfrak{g}}^{(r)} \to \widehat{P}_{\mathfrak{g}}^{(r)} \quad \text{yields} \quad \widehat{P}_{\mathfrak{g}}^{(r)} \cong P_{\mathfrak{g}}^{(r)}/\Omega^{(r)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})).$$

如果 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是分裂的，那么这甚至对 $r=\infty$ 也成立。

同态 $\mathsf{ad}_1^{(r)}\colon P^{(r)}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 和 $\widehat{\ }\mathsf{ad}_1^{(r)}\colon \widehat{P}_{(r)}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}$ 满足 $\widehat{\ }\mathsf{ad}_1^{(r)} \circ q_r = \mathsf{ad}_1^{(r)}$。在群层面上，这导出了一个行与列正合的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^{(r)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \Omega^{(r)}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
N_{\mathfrak{g}}^{(r)} & \xrightarrow{i_1} & P_{\mathfrak{g}}^{(r)} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_1^{(r)}} & G_{\mathrm{ad}} \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_G^{(r)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ad}}}} \\
\widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}}^{(r)} & \xrightarrow{i_2} & \widehat{P}_{\mathfrak{g}}^{(r)} & \xrightarrow{\widehat{\mathrm{Ad}}_1^{(r)}} & G_{\mathrm{ad}}.
\end{array}$$

这里最左侧一列是一个具有可缩核的拓扑分裂商态射，因此它诱导出同构

$$\pi_1(N_{\mathfrak{g}}^{(r)}) \to \pi_1(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{g}}^{(r)}) \cong \pi_1(\Omega^{(r)}(G_{\mathrm{ad}}))$$

（定理 14.1.8）。接下来我们注意到，该图

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}^{(r)} & \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} & \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \\
\downarrow{\scriptstyle q^{(r)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}} \\
\widehat{\Omega}^{(r)}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}} & \mathfrak{z}(\mathfrak{g})
\end{array}$$

可交换，这意味着

$$\mathrm{per}_{\mathfrak{g}}^{(r)} \circ \pi_1(q_G^{(r)}) = \mathrm{per}_{\mathfrak{g}}^{\prime(r)}.$$

结合 (a) 中从 r 有限过渡到无限的情形，结论便得证。□

引理 *15.5.32.* 设 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是局部指数李代数的一个同态，且 $\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$。那么，$\varphi$ 通过复合诱导出一个同态 $P(\mathfrak{g}) \to P(\mathfrak{h})$，并进一步诱导出一个李群态射 $P_\varphi\colon P_{\mathfrak{g}} \to P_{\mathfrak{h}}$，它限制为连续同态 $\varphi_N\colon (N_{\mathfrak{g}})_0 \to (N_{\mathfrak{h}})_0$。于是，$\varphi(\Pi'(\mathfrak{g})) \subseteq \Pi'(\mathfrak{h})$，且下图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(N_{\mathfrak{g}}) & \xrightarrow{\pi_1(\varphi_N)} & \pi_1(N_{\mathfrak{h}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{per}'_{\mathfrak{g}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{per}'_{\mathfrak{h}}} \\
\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{z}(\mathfrak{h}).
\end{array}$$

证明。 该同态

$$P(\varphi)\colon P(\mathfrak{g}) \to P(\mathfrak{h}), \quad \xi \mapsto \varphi \circ \xi$$

积分为群同态 $P_\varphi\colon\ P_{\mathfrak{g}} \to P_{\mathfrak{h}}$. 由于 $\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, φ诱导一个连续同态 $\varphi^{\mathrm{ad}}\colon$ $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{h}_{\mathrm{ad}}$, $\mathrm{ad}\ x \mapsto \mathrm{ad}\ \varphi(x)$; 设$\varphi^{\mathrm{ad}}_G\colon\ \widetilde{G}_{\mathrm{ad}} \to \widetilde{H}_{\mathrm{ad}}$ 为相应的李群态射。设

$$\mathrm{ad}_1^{\mathfrak{g}}\colon P(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}}, \qquad \xi \mapsto \mathrm{ad}(\xi(1)) \quad \text{and} \quad \mathrm{Ad}_1^{\mathfrak{g}}\colon P_{\mathfrak{g}} \to G_{\mathrm{ad}}$$

是相应的群同态。于是我们有

$$\mathrm{ad}_1^{\mathfrak{h}}\left(P(\varphi)\xi\right) = \mathrm{ad}(\varphi(\xi(1))) = \varphi^{\mathrm{ad}}\,\mathrm{ad}(\xi(1)) = \varphi^{\mathrm{ad}} \circ \mathrm{ad}_1^{\mathfrak{g}}(\xi) \quad \text{for} \quad \xi \in P(\mathfrak{g}),$$

即,

$$\mathrm{ad}_1^{\mathfrak{h}} \circ P(\varphi) = \varphi^{\mathrm{ad}} \circ \mathrm{ad}_1^{\mathfrak{g}}\colon P(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{h}_{\mathrm{ad}}.$$

在群的层面上，这导出

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_1 \circ P_\varphi = \varphi^{\mathrm{ad}}_G \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_1^G\colon P_{\mathfrak{g}} \to \widetilde{H}_{\mathrm{ad}}.$$

我们得出 $P_G(\varphi)((N_G)_0) = P_\varphi(\ker \widetilde{\text{伴随表示}}_1^G)_0 \subseteq (\ker \widetilde{\text{伴随表示}}_1^H)_0 = (N_{\mathfrak{h}})_0$,, 因此得到一个连续态射 $\varphi_N\colon (N_{\mathfrak{g}})_0 \to (N_{\mathfrak{h}})_0$。此外，$\mathrm{ev}_1^{\mathfrak{g}}\colon$ $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 满足

$$\varphi \circ \mathrm{ev}_1^{\mathfrak{g}} = \mathrm{ev}_1^{\mathfrak{h}} \circ P(\varphi)|_{\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}},$$

这导出

$$\varphi \circ \mathrm{per}'_{\mathfrak{g}} = \mathrm{per}'_{\mathfrak{h}} \circ \pi_1(\varphi_N).$$

特别是，这个关系表明 $\varphi(\Pi'(\mathfrak{g})) \subseteq \Pi'(\mathfrak{h})$。 □

第15.5节习题

习题 15.5.1. 设 E 是一个麦基完备空间， M 是一个紧流形（可能带角）。证明，对于 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，空间 $C^r(M, E)$也是麦基完备的。

提示：设 $\gamma\colon\ [0,1] \to C^r(M,E)$是一条光滑曲线，令 $\Gamma(m) := \int_0^1 \gamma(t)(m)\ dt$，并证明 $\Gamma \in C^r(M,E)$是 γ的一个弱积分。

习题 15.5.2.设 E 是一个弗雷歇空间， $F \subseteq E$ 是一个闭子空间，且$q\colon\ E \to E/F$ 是商映射。证明，对每个 $r < \infty$，映射

$$P^{(r)}(q)\colon P^{(r)}(E) \to P^{(r)}(E/F), \quad \gamma \mapsto q \circ \gamma$$

是一个商映射，因而特别是满射。
提示：对 $r = 0$ 使用迈克尔选择定理，并对 r 使用归纳法。

练习 15.5.3. 设 $\varphi\colon\ G \to H$ 是连通李群之间的一个态射，且 $\widetilde{\varphi}\colon\ G \to H$ 是一个提升，其中 $q_H \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$，而 $q_H\colon$ $H \to H$ 是万有覆盖态射。证明 $(\ker \varphi)_0 = (\ker \widetilde{\varphi})_0$。

练习 15.5.4. 设 M 是一个带边紧流形，K 是一个局部指数李群，且 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。对于闭子集 $S \subseteq M$，我们考虑子群

$$C^r_S(M,K) := \{f \in C^r(M,K) \colon (\forall s \in S)\, f(s) = e\}.$$

证明 $C^r_S(M,K)$ 是 $C^r(M,K)$ 的局部指数李子群（定理 5.4.2）。

提示：考虑限制映射 $C^r(M,K) \to C(S,K)$，并利用命题 9.3.11。

练习 15.5.5. 设 G 为李群，且 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，并考虑求值态射

$$\mathrm{ev}_1 \colon P^{(r)}(G) \to G, \quad f \mapsto f(1).$$

证明：对任意坐标图 $\varphi\colon U \to G$，其中 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 是凸零邻域且 $\varphi(0) = e$，映射

$$\sigma \colon \varphi(U) \to P^{(r)}G, \quad \sigma(\varphi(x))(t) := \varphi(tx)$$

是 ev_1 的光滑截面。

习题 15.5.6。 设 G 是一个单连通局部指数李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。假设存在连续函数 $F\colon [0,1] \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，满足 $F_0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 和 $F_1 = 0$，且每个 F_t 都是李代数同态。证明 G 是可缩的。

提示：仿照定理 15.5.6(b) 的证明中的论证，并使用开 0 邻域 $U_1, U_2 \subseteq \mathfrak{g}$，使得 $\exp|_{U_2}$ 是到 G 的开子集上的微分同胚，且对每个 $t \in [0,1]$ 都有 $F_t(U_1) \subseteq U_2$。

习题 15.5.7。 设 $(V, \hbar\mathrm{eis}\ V\ \omega$ *Heisenberg algebra* $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times V$ $\mathfrak{g} =$ $)$ 是一个局部凸辛向量空间，而 $:(,)$ 是相应的，即，其括号为

$$[(z,v),(z',v')] := (\omega(v,v'),0).$$

证明 $f_t(z,\ v) := (t^2 z,\ tv)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李代数自同态族，并满足习题 15.5.6 的假设。

习题 15.5.8。 设 G 是一个李群，$q_G\colon G \to G_0$ 是其单位分支的单连通覆盖群。证明：

(a) 对每个 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，映射 $P^{(r)}(\widetilde{G}) \to P_{(r)}(G)$ $\gamma \mapsto q_G \circ \gamma$ 是李群同构。(b) $\widetilde{G} \cong P_{(r)}(G)/\Omega^{(r)}(G)_0$ (c) $\pi_1(G) \cong \pi_0(\Omega^{(r)}(G))$.

练习 15.5.9。 设 $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是局部凸李代数之间的连续满同态。证明：

(a) $\varphi(\mathfrak{z}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. (b) 对于每个连续导子 $D \in \mathrm{der}(\mathfrak{g})$，至多存在一个满足 $D' \circ \varphi = \varphi \circ D$ 的连续导子 $D' \in \mathrm{der}(\mathfrak{h})$。此外，

$$\mathfrak{d} := \{D \in \mathrm{der}(\mathfrak{g}) \colon (\exists D' \in \mathrm{der}(\mathfrak{h}))\ \varphi \circ D = D' \circ \varphi\}$$

是一个李子代数，并且 $\mathfrak{d} \to \mathrm{der}(\mathfrak{h})$ $D \mapsto D'$ 是一个李代数同态。

(c) 对于每个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$，至多存在一个满足 $\alpha' \circ \varphi = \varphi \circ \alpha$ 的自同构 $\alpha' \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$。此外，

$$A := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \colon (\exists \alpha' \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}))\ \varphi \circ \alpha = \alpha' \circ \varphi\}$$

是一个子群，并且 $A \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ $\alpha \mapsto \alpha'$ 是一个群同态。

（d）此外，如果 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 都是局部指数的，那么存在一个连续同态 $\varphi_{\mathrm{ad}} \colon G_{\mathrm{ad}} \to H_{\mathrm{ad}}$，使得 $\varphi_{\mathrm{ad}}(e^{\mathrm{ad}\, x}) = e^{\mathrm{ad}\, \varphi(x)}$ 对于 $x \in \mathfrak{g}$ 成立。

习题 15.5.10。 证明：对于任意复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，李代数 $\mathfrak{u}(\mathcal{H})$（由斜厄米有界算子组成）的中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}(\mathcal{H}))$ 与 $i\mathbb{R}\mathbf{1}$重合。提示：考察任意中心元素与秩-1-投影 $P_v(w) := \langle w,\ v\rangle v$交换这一条件，其中 $v \in \mathcal{H}$ 是一个单位向量。

第15.5节笔记

对巴拿赫–李代数的可扩张性进行系统研究，始于 van Est 和 Korthagen [EK64]。特别地，他们对每个可扩张巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心扩张 $\widehat{\mathfrak{g}}$（其扩张核为$\mathfrak{z}$）引入了一个子群 $\Pi \subseteq \mathfrak{z}$，并证明其离散性等价于 $\widehat{\mathfrak{g}}$的可扩张性。他们的周期同态作为 $H^2_{\mathrm{sing}}(G,\ \mathfrak{z}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(G)\ \mathfrak{z})$ 中的一个元素出现，该元素由 van Est [Est62]的局部群可扩张性理论得到。这里，G 是一个李代数为 $\mathfrak{g}$的单连通巴拿赫–李群。于是，Hurewicz 同态 $\pi_2(G) \to H_2(G)$ 是一个同构，因此他们的周期同态也是一个同态 $\pi_2(G) \to \mathfrak{z}$，甚至可以证明，除符号外，它就是上文引入的那个同态。按照 [Ne02a]中通过积分微分形式给出的周期同态定义，比起 [EK64]中的隐式构造，这一定义更加易于理解。

本节的结果将 [EK64] 推广到局部指数李代数，并大大简化了研究不可扩张性的思路。我们的要点是，可扩张性定理 15.5.11 可以相当直接地由路径李代数 $P(\mathfrak{g})$ 的可扩张性以及商群可扩张性定理 9.4.10 得出。

命题 15.5.24 特别推出了每个巴拿赫–李代数的 $P^{(0)}(\mathfrak{g})$ 的可积性，这一结果由 Swierczkowski [Sw71] 证明。研究局部指数 Fr´echet–李代数 $\mathfrak{g}$ 的可扩张性时，将其表示为某个可扩张李代数（例如 $P(\mathfrak{g})$）的商，这种方法已见于 Robart 的工作（参见 [Rob02，定理 5]）。这种方法是研究某类比李群更一般的拓扑群（即李群的商群）的一种理论的起点。由此引出了**李群概形**，或 **S-李群** 的概念（参见 [Sr92], [DL66] 和 [Est84]）。

在 [Woj06], Wojty´nski 中，他描述了我们针对巴拿赫–李代数的方法的一种变体。他不考虑巴拿赫–李代数 $P^{(0)}(\mathfrak{g})$ 或弗雷歇–李代数 $P(\mathfrak{g})$，而是考虑解析路径 $\gamma(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ in $\mathfrak{g}$，其 $\|\gamma\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ 为有限值。将这些曲线与其系数

序列对应起来，我们将这个空间记为 $\ell^1(\mathfrak{g}) := \ell^1(\mathbb{N},\ \mathfrak{g})$。这个序列空间上的李括号定义为

$$[(a_n),(b_n)] = (c_n) \quad \text{with} \quad c_n = \sum_{j=1}^{n-1} [a_j, b_{n-j}]. \tag{15.38}$$

取相同的李括号，我们也将完整序列空间 $\mathfrak{g}^{\mathbb{N}}$ 赋予原幂零 Fr´echet–李代数结构，该代数是指数的（命题 7.3.12）。由于巴拿赫–李代数 $\ell^1(\mathfrak{g})$嵌入指数李代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{N}}$，根据积分子群定理 9.2.4，它是可扩张的（也可以利用 $P(\mathfrak{g})$ 的可扩张性）。我们有一个求值映射

$$q\colon \ell^1(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}, \quad (a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

它是李代数的一个商态射；又由于子群$\langle \exp \ell^1(\mathfrak{g}) \rangle$ 是可缩的 [Woj06], ，因此可以采用与 $P^{(0)}(\mathfrak{g})$ 类似的方式，应用商群的可扩张性定理 9.4.10。

在 [Pe93a, Pe95a], 中，Pestov 证明，若 E 是维数为 $E > 1$ 的巴拿赫空间，则 $F(E)$ 上由 E 生成的自由巴拿赫–李代数具有平凡中心。因此，维数为 > 1 的每个巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 都是一个无中心巴拿赫–李代数 $F(\mathfrak{g})$ 的商；后者是巴拿赫空间 $\mathfrak{g}$ 上的自由巴拿赫–李代数，由于其中心平凡，故可扩张（推论 8.3.14）。同样，我们可以应用定理 9.4.10 推导可扩张性判据。

文献中还可以找到这一主题的有趣变体，例如 Swierczkowski 的以下结果，其中假设理想 $\mathfrak{n}$可扩张，且商 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ ([Sw67，定理，节 12])。

定理 15.5.33。设 $\mathfrak{g}$ 是一个巴拿赫–李代数，且 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是一个闭可扩张理想，并且 $\mathfrak{q} := \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 可扩张为某个群 Q。若$\pi_2(Q)$ 为零，则 $\mathfrak{g}$ 可扩张。

请注意，若 $\mathfrak{q}$是阿贝尔的或有限维的，则该假设总是成立。它推广了下文的定理 15.8.7。

定义 15.5.34。如果存在一个序数 α 以及一个闭子代数升链，则称巴拿赫–李代数为下可解

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}$$

使得以下条件得到满足 :

(a) 如果 $\beta \leq \alpha$ 不是极限序数，那么 $\mathfrak{g}_{\beta-1}$ 是 $\mathfrak{g}_\beta$ 的一个理想，包含所有交换子。(b) 如果 $\beta \leq \alpha$ 是极限序数，那么 $\mathfrak{g}_\beta$ 是 $\bigcup_{\gamma<\beta} \mathfrak{g}_\gamma$ 的闭包。

以下定理（[Sw65，定理 2]）是将定理 15.5.33 应用于 $\mathfrak{q}$ 为阿贝尔群的情形后立即得到的推论。它尤其蕴含了下面的定理 15.8.7。

定理 15.5.35。每个下可解巴拿赫–李代数都是可扩张的。

若李代数 $\mathfrak{g}$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 满足次乘性，即对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$ 都有 $\|[x, y]\| \leq \|x\|\|y\|$，则称该范数为次乘性范数。若巴拿赫–李代数 $(\mathfrak{g}, \|\cdot\|)$ 的范数是次乘性的，则称其为压缩 巴拿赫–李代数。对于任意压缩巴拿赫–李代数，我们定义

$$\delta_{\mathfrak{g}} := \inf\{\|x\| \colon 0 \neq x \in \Pi(\mathfrak{g})\} \in [0, \infty]$$

并注意到 $\mathfrak{g}$ 可扩张，当且仅当 $\delta_{\mathfrak{g}} > 0$，这等价于周期群 $\Pi(\mathfrak{g})$ 的离散性（定理 15.5.11）。以下定理最初由 Pestov 提出，他使用非标准方法证明了该定理。D. Beltiță 在 [Bel04] 中给出了一种“标准”证明˘。

定理 15.5.36.（Pestov 局部可扩张性定理） 一个压缩巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 可扩张，当且仅当存在 $\mathfrak{g}$ 的一族有向闭子代数 $\mathcal{H}$，其并在 $\mathfrak{g}$ 中稠密，并且

$$\inf\{\delta_{\mathfrak{h}} \colon \mathfrak{h} \in \mathcal{H}\} > 0.$$

问题 15.5.37.将 Pestov 定理（定理 15.5.36）推广到局部指数李代数。

由于对每个有限维李代数 $\mathfrak{g}$，周期群都是平凡的，我们有 $\delta_{\mathfrak{g}} = \infty$，而将前述定理应用于 $\mathfrak{g}$ 的有限维子代数的有向族，便得到:

推论 15.5.38.（[Pe92, Bel04]） 若 $\mathfrak{g}$ 是包含一个局部有限维稠密子代数的巴拿赫–李代数，则 $\mathfrak{g}$ 是可扩张的。

循着类似的思路，Pestov 还得到了下述可扩张性判据（[Pe93b，定理 7]）。

定理 15.5.39。巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 可扩张，当且仅当它的所有可分闭子代数都是可扩张的。

线性巴拿赫–李代数： 如果一个巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 是线性的，即它存在到某个巴拿赫代数 $\mathcal{A}$中的忠实同态，我们就称之为线性。根据阿多定理，每个有限维李代数都是线性的，但对于巴拿赫–李代数，情况则更有趣，也更复杂。根据积分子群定理（定理 9.2.4），可扩张性是线性的必要条件，但并非充分条件。事实上，若单连通巴拿赫–李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 含有元素 p, q，使得 $[p, q]$ 是非零中心元素，且 $\operatorname{Exp}_G([p, q]) = \mathbf{1}$，那么 $\mathfrak{g}$就不是线性的，因为任意态射 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$（ E 为巴拿赫空间）都会导出一个线性

表示，即三维海森堡群 H模去一个循环中心子群 Z所得商群 H/Z 的表示。此类元素存在于由 $\mathbb{R}$ 对巴拿赫–李代数 $C^1(\mathbb{S}^1, \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}))$ 作中心扩张所得的李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$中（例 15.5.22, [vES73]）。由于对每个巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，商代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 都是线性的，所有 $\mathfrak{g}$ 的线性表示的核的交 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个中心理想。这使线性问题与中心扩张紧密相关：线性巴拿赫–李代数的中心扩张何时是线性的？既然可扩张性是必要条件，相应周期群的离散性也是必要条件，那么还需要什么条件？

在 [vES73], [Swi75], [Wil] 和 [Wil82] 中，van Est 和 Swierczkowski 描述了中心扩张的上同调类满足的一项条件，该条件足以保证线性。他们特别应用这一结果证明：对于巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，在满足某个涉及中心的上同调条件时，C^1-路径代数 $P^{(1)}(\mathfrak{g})$ 是线性的。值得注意的是，他们的论证不适用于 C^0-曲线。与这一系列思想密切相关的是 van Est 对阿多定理的证明（[Est66]），该证明基于每个有限维李群 G 的 $\pi_2(G)$ 消失（参见注 14.2.3）。

还值得注意的是，对于实巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，线性意味着其复化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$也线性，而这又意味着 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$可扩张；这一点对于相应群的泛复化的存在性至关重要（参见下文定理15.7.10）。根据积分子群定理（定理 9.2.4），我们由此得到以下蕴含关系

$$\mathfrak{g} \quad \text{linear} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \quad \text{enlargeable} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g} \quad \text{enlargeable.} \qquad (15.39)$$

15.6 可积性

我们回顾一下：如果存在某个李群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$，则称局部凸李代数 $\mathfrak{g}$ 是可积的。我们已经看到许多关于局部指数李代数可扩张性的结果。对于并非局部指数的李代数，目前只有相当孤立的结果可用。

15.6.1 解析群

命题 15.6.1。设 G 是一个连通实解析李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。则 $\mathfrak{g}$ 的每个闭理想在 $\mathrm{Ad}(G)$ 下都是不变的。

证明。设 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g} = \mathbf{L}(G)$ 是一个闭理想。由于 G 是连通的，只需证明存在一个 e 邻域 $U_G \subseteq G$，使得 $\mathrm{Ad}(U_G)\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}$。令$U \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个开凸零邻域，且 $\varphi: U \to G$ 是一个双解析微分同胚，将其映到 G 的一个开子集上，并满足 $\varphi(0) = e$。令 $x \in U$, $w_0 \in \mathfrak{n}$ 和 $w(t) := \mathrm{Ad}(\varphi(tx))w_0$，其中 $t \in [0,1]$。我们需要证明 $w(1) \in \mathfrak{n}$。对于$p(t) := \varphi(tx)$，其右对数导数 $v := \mathrm{Ad}(p)\delta(p) : [0,1] \to \mathfrak{g}$ 满足微分方程

$$\begin{aligned} w'(t) &= \mathrm{Ad}(p(t))[p^{-1}(t)p'(t), w_0] \\ &= \mathrm{Ad}(p(t))[\delta(p)_t, w_0] = [v(t), w(t)]. \end{aligned} \tag{15.40}$$

由于 v 和 w 是解析的，它们的泰勒展开在 t 接近 0 时收敛：

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n \quad \text{and} \quad w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n t^n \quad \text{in} \quad \mathfrak{g}.$$

于是， w 的微分方程 (15.40) 可写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)w_{n+1}t^n = w'(t) = [v(t), w(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n}[v_k, w_{n-k}].$$

比较系数可得

$$w_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}[v_k, w_{n-k}],$$

因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都可以归纳地得到 $w_n \in \mathfrak{n}$ 。由于 $\mathfrak{n}$ 是闭的，当 t 接近 0 时，我们有 $w(t) \in \mathfrak{n}$ 。在其他点$t_0 \in [0,1]$应用同样的论证可知，集合 $w^{-1}(\mathfrak{n})$ 是 $[0,1]$, 中的开闭子集，因此 $w(1) \in \mathfrak{n}$ ，因为 $w(0) \in \mathfrak{n}$ 且 $[0,1]$ 是连通的。□

推论 15.6.2。设 G 是一个连通复李群，其李代数 $\mathfrak{g}$麦基完备。那么， $\mathfrak{g}$ 的每个闭理想在 $\mathrm{Ad}(G)$下不变。

证明。 我们只需注意到，根据定理 2.1.12 以及 $\mathfrak{g}$的麦基完备性，复李群 G 是复解析的，因而也是实解析的。□

对于下面的推论，我们回顾一下：如果理想 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 在 $e^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$ 作用下不变（定义 8.3.5），则称其为稳定的。

推论 15.6.3。如果 $\mathfrak{g}$ 是一个包含非稳定闭理想的复 *Fr´echet*–李代数，那么 $\mathfrak{g}$ 不能积分为复李群。

15.6.2 向量场李代数

命题 15.6.1 对向量场李代数也有直接的推论。

推论 15.6.4。如果 M 是一个紧致光滑流形，那么李群微分同胚群(M) 不具有解析李群结构。

证明。 对于每个非稠密开子集 $U \subseteq M$，子空间

$$\mathcal{V}(M)_U := \{X \in \mathcal{V}(M) \colon X|_U = 0\}$$

是李代数 $\mathcal{V}(M)$ 的一个闭理想，但在 Diff(M) 下不不变，因为对于 $\varphi \in$ Diff(M)，Ad$(\varphi)\mathcal{V}(M)_U = \mathcal{V}(M)^{\varphi(U)}$。因此命题 15.6.1 适用。□

定理 15.6.5。如果 M 是一个紧流形，那么 *Fr´echet*–李代数$\mathcal{V}(M)_{\mathbb{C}}$ 不可积为正则复李群。

证明。（证明思路；见 [Mil84]）设 $\mathfrak{g} := \mathcal{V}(M)_{\mathbb{C}}$，且 $U \subseteq M$ 是 M 的一个非空开子集，但它不是稠密的。那么

$$\mathfrak{n}_U := \{x \in \mathfrak{g} \colon x|_U = 0\}$$

是 $\mathfrak{g}$的一个闭理想。设 G 是一个正则复李群，其李代数为 $\widetilde{\mathfrak{g}}$，并设 $q\colon \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Diff}(M)_0$ 表示 $\mathrm{Diff}(M)_0$的万有覆盖同态。那么，包含映射 $\mathcal{V}(M) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ 可以积分为一个李群同态 $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Diff}(M) \to G$。对于 $g \in \mathrm{Diff}(M)$，于是有

$$\mathrm{Ad}(\varphi(g))\mathfrak{n}_U = \mathfrak{n}_{\varphi(g)(U)},$$

这与 $\mathfrak{n}_U$ 在 $\mathrm{Ad}(G)$ 下的不变性相矛盾（命题 15.6.1）。 □

L. Lempert 的以下不可积性结果（[Lem97]）要强得多，因为它不假设任何正则性。它甚至不假设指数函数的存在。其结论是，向量场李代数的复化很少是可积的。

定理 15.6.6（Lempert 不复化定理）。设 M 是正维数的紧流形。那么，下列李代数 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 均不可积：

（1）流形 M 上光滑向量场的李代数 $\mathcal{V}(M)$。（2）若 M 是解析的，则流形 M 上解析向量场的李代数 $\mathcal{V}^{\omega}(M)$。（3）若 M 上有一个辛 *2*-形式 Ω，则其辛向量场的李代数

$$\mathcal{V}(M,\Omega) := \{X \in \mathcal{V}(M) \colon \mathcal{L}_X \Omega = 0\}$$

流形 M 上的辛向量场。

（4）若 M 是解析的，且 M 上有一个解析辛 *2*-形式 Ω，则流形 M 上解析辛向量场的李代数 $\mathcal{V}^{\omega}(M,\Omega)$。

证明。（概要）Lempert 的证明基于以下结果，该结果由偏微分方程方法得到：若 $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是一条光滑曲线，且对每个 $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，初值问题

$$\gamma(0) = x, \quad \dot{\gamma}(t) = [\xi(t), \gamma(t)]$$

存在光滑解，则 $\xi(0) \in \mathfrak{g}$。

Lempert 给出了另一种论证，其依据是以下事实：

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{V}(M)_{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{V}(M)) \rtimes \{\mathrm{id}, \sigma\} \cong \mathrm{Diff}(M) \rtimes \{\mathrm{id}, \sigma\}, \tag{15.41}$$

其中 σ 表示在 $\mathcal{V}(M)_{\mathbb{C}}$ 上的复共轭作用。第一个同构利用 [Ame75]，在 [Lem97]，中得到，第二个则是 Pursell 和 Shanks 的一项较早结果 [PuSh54]（参见 [Ne06a, 第 IX.2.1] 定理）。

显然，(15.41) 意味着，对于任何其李代数为 $\mathbf{L}(G) = \mathcal{V}(M)_{\mathbb{C}}$ 的连通李群 G，群 $\mathrm{Ad}(G) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{V}(M)_{\mathbb{C}})$ 保持实子空间 $\mathcal{V}(M)$。对轨道映射取导数，便得到矛盾 $[\mathcal{V}(M)_{\mathbb{C}}, \mathcal{V}(M)] \subseteq \mathcal{V}(M)$。

Lempert 证明的另一个关键点是，对于任意 $X \in \mathcal{V}(M)$，单参数群 $\exp(\mathbb{R}X)$作用于 $\mathfrak{g}$，恰好如同 $\mathrm{Diff}(M)$ 中相应的单参数群一样。该论证需要一个针对取值于 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 的“光滑”映射的唯一性引理，而 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 远非李群（参见引理D.1.10）。□

解析向量场不再构成 Fr´echet 空间，因为它们具有自然的归纳极限结构。它们作为解析微分同胚群的李代数出现。

定理 15.6.7。([Les82, Les83]) 设 M 是一个紧解析流形，$\mathcal{V}^{\omega}(M)$ 是 M 上解析向量场的李代数。那么 $\mathcal{V}^{\omega}(M)$ 带有自然的 ***Silva*** 空间结构，从而成为一个拓扑李代数；而解析微分同胚群 微分同胚群$^{\omega}(M)$ 带有光滑李群结构，使得 $\mathcal{V}^{\omega}(M)^{\mathrm{op}}$ 是其李代数。

Tagnoli [Ta68] 证明，紧解析流形 M 上的群 $\mathrm{Diff}^{\omega}(M)$ 不具有解析李群结构（参见 [Mil82，例 6.12]）。通过验证映射 $(X, Y) \mapsto \mathrm{Ad}(\Phi_1^X)Y$ 在 $\mathcal{V}^{\omega}(M) \times \mathcal{V}^{\omega}(M)$ 的某个零邻域上并非解析的，可以看出不存在具有解析指数函数、李代数为 $\mathcal{V}^{\omega}(M)$ 的解析李群（参见 [Mil82，例 6.17]）。

定理 15.6.8。([Omo81]) 对于任意非紧致的 σ-紧光滑正维数流形 M，李代数 $\mathcal{V}(M)$ 都不能积分为具有指数函数的任何李群。

证明。（略述）若 G 是李群，其李代数为 $\mathbf{L}(G) = \mathcal{V}(M)$，且具有指数函数，那么对于每个 $X \in \mathcal{V}(M)$，我们都得到一个光滑单参数群 $t \mapsto \mathrm{Ad}(\exp_G(tX))$，它由 $\mathcal{V}(M)$ 的自同构构成，生成元为 $\mathrm{ad}\ X$。根据 [Ame75，定理 2],$\mathrm{Aut}(\mathcal{V}(M)) \cong \mathrm{Diff}(M)$，我们得到一个 $\mathrm{Diff}(M)$ 的单参数群 γ_X，随后可证明它与由 X 生成的流一致（命题 D.1.11；[KYM85，第 3.4 节）。这与 M 上存在非完备向量场相矛盾。□

15.6.3 线性算子的可积性

本小节讨论李理论与连续算子的可积性之间若干有趣的联系：$E \to E$ 在局部凸空间上，也就是说，它们是光滑线性 $\mathbb{R}$作用在 E上的生成元。特别地，我们证明可解李代数 $E \rtimes_D \mathbb{R}$ 可积，当且仅当 D 可积。

定义15.6.9。（参见定义D.2.4）设 E 是一个局部凸空间，且$D \in \mathcal{L}(E)$是 E上的连续线性算子。我们称 D 是可积的，若存在一个同态 $\gamma_D\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E)$，它是光滑的，这里光滑是指相应的作用 $\mathbb{R} \times E \to E,\ (t,\ v) \mapsto \gamma_D(t)v$ 是光滑的，并且

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_D(t)v = Dv \quad \text{for every} \quad v \in E.$$

注意，只要 γ_D 存在，它就是唯一确定的（引理D.1.10）。

例15.6.10。(a) 若 E 是巴拿赫空间，则每个有界算子$D \in \mathcal{L}(E)$ 都可积分为同态 α；该同态关于一般线性群 $\mathrm{GL}(E)$ 上的范数拓扑连续，并由收敛的指数级数 $\gamma_D(t)$ 给出：$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k = e^{tD}$.

反过来，若 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E)$ 定义了 E 上的光滑 $\mathbb{R}$-作用，则其无穷小生成元 $D := \gamma'(0)$ 是一个处处有定义的闭算子，因此根据闭图像定理，它是有界的。

(b) 若 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E)$ 是局部凸空间 E 上定义连续作用的单参数群，则光滑向量构成的子空间 $E^\infty \subseteq E$ 具有从嵌入继承的自然拓扑

$$E^\infty \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}, E), \quad v \mapsto \gamma^v, \quad \gamma^v(t) = \gamma(t)v.$$

它也可以由 E^∞ 上的半范数 $p_n(v) := p(D^n v)$ 得到，其中 p 是 E 上的连续半范数，且 $D := \gamma'(0)$。于是，诱导的一参数群 $\gamma^\infty\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E^\infty)$ 根据 Ne10, Thm. 4.4], 定义了一个光滑作用，因此算子 D 在 E^∞ 上是可积的。从这个意义上说，每个连续线性作用都会在光滑向量空间上导出一个可积算子。

例15.6.11. 如果 M 是有限维 σ-紧流形，且 $X \in \mathcal{V}(M)$ 是一个向量场，那么相应的 Fr´echet 代数 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ 上的导子可积，当且仅当向量场 X 完备。

例15.6.12.设 E 是实预希尔伯特空间，$\mathcal{H}$ 是 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的希尔伯特空间完备化。我们考虑一个斜对称算子 $D \in \mathcal{L}(E)$，即，

$$\langle Dv, w \rangle = -\langle v, Dw \rangle \quad \text{for} \quad v, w \in E,$$

并假设 E 上的拓扑可由半范数定义

$$p_n(v) := \|D^n v\|, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

那么包含映射 $E \hookrightarrow \mathcal{H}$ 是连续的。

首先假设 D 是可积的。那么 $\gamma_D\colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群(E) 保持标量积不变，因为

$$\frac{d}{dt}\langle\gamma_D(t)v,\gamma_D(t)w\rangle=\langle D\gamma_D(t)v,\gamma_D(t)w\rangle+\langle\gamma_D(t)v,D\gamma_D(t)w\rangle=0.$$

因此， γ_D 延拓为 U_t 上的强连续正交单参数群 $\mathcal{H}$。由于 U_t 保持子空间 E 不变，斯通定理[RS75，定理 VIII.10] 表明， $A=\gamma_D'(0)$ 是 D的闭包，即图 $\Gamma(A)\subseteq\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 是图 $\Gamma(D)$ 的闭包。

反过来，设 A的闭包 D 是斜自伴的，即 $D=-D^*$ （按照无界算子的意义；参见 [Ru91]）。那么 Stone 定理 [RS75，第 VIII.10]定理蕴含着一个强连续单参数群 $\gamma\colon\ \mathbb{R}\to\mathrm{O}(\mathcal{H})$ 的存在性，其无穷小生成元为 A；也就是说， $\mathcal{D}(A)$ 的定义域是满足以下条件的元素集合： A 的 $t\mapsto\gamma(t)v$ 是 C^1 ，并且对每个 $v\in\mathcal{D}(A)$都有 $Av=\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma(t)v$ 。此外，设每个 $\gamma(t)$都保持 E 不变。令 $\gamma_D(t):=\gamma(t)|_E$。现在， E 由关于 γ的光滑向量组成，即 $E\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}(A^n)=\mathcal{H}^\infty$ ；我们还记得，根据 [Ne10] ，$\mathbb{R}$在 $\mathcal{H}^\infty$ 上的作用是光滑的。由于 $\mathcal{H}^\infty$ 上的 Fr´echet 拓扑由半范数 $p_n(v)=\|A^nv\|$, $n\in\mathbb{N}_0$定义，包含映射 $E\hookrightarrow\mathcal{H}^\infty$ 是一个拓扑嵌入。因此， $\mathcal{H}^\infty$ 上的作用的光滑性蕴含了 E上的作用的光滑性。

这一讨论表明， D 可积，当且仅当其闭包是斜自伴的，并且相应的 $\mathcal{H}$ 等距变换单参数群保持E 不变。若 E 完备，则后一个条件自动满足，因为这意味着 $E=\mathcal{H}^\infty$。

前面的例子表明，Fr´echet 空间上线性算子的可积性问题，尤其包含了这样一个问题：对于希尔伯特空间稠密子空间 $\mathcal{D}$ 上的对称算子 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{D})$，如何判定它是否自伴。

引理 15.6.13。若 $\mathfrak{g}$ 是具有指数函数的李群 G 的李代数，则每个算子伴随表示 $x\in\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ 都是可积的。

证明。 单参数群 $\gamma(t):=\mathrm{Ad}(\exp tx)$定义了 $\mathfrak{g}$ 上的一个光滑 $\mathbb{R}$-作用，并且根据命题 5.2.5， $\gamma'(0)=$ 伴随表示 x 。□

由于豪斯多夫级数可用于在任意幂零局部凸李代数上定义李群结构，因此所有这类李代数都是可积的（定理 7.3.10）。对于可解李代数这一类，可积性问题尤其包含局部凸空间上线性连续算子的可积性问题：

定理 15.6.14。 设 E 是一个局部凸空间，且 $D\in\mathfrak{gl}(E)$。那么李代数

$$\mathfrak{g}:=E\rtimes_D\mathbb{R}\quad\textit{with the bracket}\quad[(v,t),(v',t')]:=(tDv'-t'Dv,0)$$

当且仅当 D 可积。

证明。 如果 D 可积为光滑表示 $\alpha\colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群(E)，且$\alpha'(0) = D$，那么半直积 $G := E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ (命题 5.2.8)。

反过来，设 G是一个李代数为 $\mathfrak{g}$的连通李群。将 G替换为其万有覆盖群后，可以假设 G是单连通的。于是，加法群 $(\mathbb{R}, +)$ 的正则性蕴含存在一个光滑同态 $\chi\colon G \to \mathbb{R}$，使得 $\mathrm{L}(\chi) = q$，其中$q(v,t) = t$ 是投影 $\mathfrak{g} = E \rtimes_D \mathbb{R} \to \mathbb{R}$（定理 6.1.16）。设 $\varepsilon > 0$和 $\gamma\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to G$ 是任意满足 $\gamma(0) = e$ 且 $q(\gamma'(0)) = 1$的光滑曲线。则 $\eta := \chi \circ \gamma\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ 是一条满足 $\eta(0) = 0$ 且 $\eta'(0) = 1$的光滑曲线。对 γ重新缩放后，甚至可以假设对每个 $|t| \leq \varepsilon$，都有 $\eta'(t) > 0$。因此，一维反函数定理蕴含反函数 $\eta^{-1}\colon \mathrm{im}(\eta) = [\eta(-\varepsilon)\ \eta(\varepsilon)] \to [-\varepsilon, \varepsilon]$的光滑性。于是，$\beta := \gamma \circ \eta^{-1}$ 是 G 中的一条满足 $\chi \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\eta)}$的光滑曲线。

接下来我们观察到，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq E$ 意味着 E 是 $\mathrm{Ad}(G)$-不变的，因此 $\mathrm{Ad}_E(g) := \mathrm{Ad}(g)|_E$ 定义了 G 在 E 上的光滑作用，其导出表示由 $\mathrm{ad}_E(x,\ t) = tD$ 给出。现在令 $\alpha(t) := \mathrm{Ad}_E(\beta(t))$，并观察到

$$\delta(\alpha)_t = \mathrm{ad}_E(\delta(\beta)_t) = q(\delta(\beta)_t) \cdot D = \delta(\chi \circ \beta)_t \cdot D = D.$$

容易推出，对于 $|t| \leq \varepsilon$，有 $\alpha(\frac{t}{n})^n = \alpha(t)$，因此

$$\alpha(t) := \lim_{n\to\infty} \alpha\Big(\frac{t}{n}\Big)^n$$

定义了 α 到 E 上的光滑 $\mathbb{R}$-作用的延拓（习题 8.4.9）。因此D 是可积的。□

下面这个例子对于形式向量场李代数的可积性也有一定意义（习题 15.6.16）。

例 15.6.15. 我们考虑空间 $E := \mathbb{R}[[x]]$，即单变量形式幂级数$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ 构成的空间，并赋予其 Fr´echet 拓扑，使映射$\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{R}[[x]]$，$(a_n) \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ 成为拓扑同构。于是导数

$$D\Big(\sum_{n=0}^\infty a_n x^n\Big) := \sum_{n=0}^\infty a_{n+1}(n+1)x^n$$

在 E上定义了一个连续线性算子。我们断言，该算子不可积。

我们用反证法，假设 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E)$ 是一个光滑的$\mathbb{R}$-作用，作用于 E，且 $\alpha'(0) = D$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to E$，$\gamma(t) := (x+t)^n$，满足 $\dot\gamma(t) = n(x+t)^{n-1} = D\gamma(t)$，因此由引理 D.1.12 可得，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\alpha(t)x^n = (x+t)^n$。于是我们得到

$$\alpha(1)x^n = 1 + nx + \dots.$$

鉴于 $\lim_{n\to\infty} x^n \to 0$ 属于 E，这与算子 $\alpha(1)$ 的连续性矛盾。因此 D 不可积。

例 15.6.16。令

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{gf}_n(\mathbb{R})_{-1} := \mathbb{R}^n[[x_1, \dots, x_n]]$$

表示所有以 n 个变量为自变量、取值于 $\mathbb{R}^n$ 的形式幂级数所构成的空间，并将其视为形式向量场李代数，赋予括号

$$[f, g](x) := dg(x)f(x) - df(x)g(x),$$

这在形式层面上是有意义的，因为若 f 是次数为 p 的齐次元素，且 g 是次数为 q 的齐次元素，则 $[f, g]$ 是次数为 $p + q - 1$ 的齐次元素。

我们已在小节 5.6.4 中看到，所有常数项为零的元素构成的子代数 $\mathfrak{gf}_n(\mathbb{R})$ 是形式微分同胚的 Fr´echet–李群 $\mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})$ 的李代数，该群由固定 0 的 $\mathbb{R}^n$ 上的形式微分同胚构成。若 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 表示常向量场构成的阿贝尔李子代数，则 $\mathfrak{g}$ 是李子代数 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{gf}_n(\mathbb{R})$ 的向量空间直和。

我们断言，李代数 $\mathfrak{g}$ 不可积为任何具有指数函数的李群。这强化了 [KYM85，第 80], 页中的一个结论：它不可积为 μ-正则 Fr´echet–李群。假设 $\mathfrak{g}$ 是某个具有指数函数的李群的李代数。那么引理 15.6.13 蕴含所有算子 $\mathrm{ad}\, x$ 都可积。对于 $x = e_1$，我们有 $[e_1, g] = \frac{\partial g}{\partial x_1}$，现在可以像例 15.6.15 中那样论证，$\mathrm{ad}\, e_1$ 不可积，因此 $\mathfrak{g}$ 不可积为任何具有指数函数的李群。

前面的例子表明，在对形式向量场李代数进行积分时，常数项会带来问题。这很自然，因为形式完备化区分了点 $0 \in \mathbb{R}^n$。在局部微分同胚芽群的背景下，也会出现类似现象。对于 0 处的函数芽，具有非零常数项的向量场不可积，这是因为所有自同构都保持由在 0 处消失的函数构成的唯一极大理想。

令 $\mathfrak{gs}_n(\mathbb{R})_{-1}$ 表示 0 处光滑映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的芽空间，并将其视为 0 处向量场的芽。根据 [RK97，第 5.2], 节，这个空间具有自然的西尔瓦结构，从而成为一个局部凸李代数。令 $\mathfrak{gs}_n(\mathbb{R})$ 表示所有在 0 处消失的芽构成的子空间，并令 $\mathfrak{gs}_n(\mathbb{R})_1$ 表示在 0 处 1-喷射消失的芽集。

定理 15.6.17。([RK97，定理 3]) 在 $\mathrm{Gs}_n(\mathbb{R})$ 中，固定 $\mathbb{R}^n$ 内 0 的 0 点的微分同胚芽群具有李群结构，其李代数是由在 0 点消失的向量场芽构成的空间 $\mathfrak{gs}_n(\mathbb{R})$。

我们有一个半直积分解$\mathrm{Gs}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Gs}_n(\mathbb{R})_1 \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，其中 $\mathrm{Gs}_n(\mathbb{R})_1$ 是由满足 $\varphi - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$的1阶喷射为零的那些芽 $[\varphi]$ 构成的正规子群。映射

$$\Phi\colon \mathfrak{gs}_n(\mathbb{R})_1 \to \mathrm{Gs}_n(\mathbb{R})_1, \quad \xi \mapsto \mathrm{id} + \xi$$

是一个整体微分同胚。

鉴于前述定理，将在基点处消失的向量场芽李代数积分为微分同胚芽李群，是一个自然的问题。N. Kamran 和 T. Robart 已在多篇论文中实现了这一方案（参见 [RK97], [KR01, KR04], [Rob02]）。该方案给出了若干有趣的西尔瓦–李群，它们由光滑以及解析局部微分同胚的芽构成；相应的西尔瓦–李代数则依赖于某些参数，这些参数用于获得良好的拓扑。

以下命题（参见 [Gl08a]）是 E. Borel 关于光滑函数泰勒级数定理的一个变体。它揭示了微分同胚群的光滑整体视角与形式视角之间一个有趣的联系。

命题 15.6.18. 设 M 为光滑有限维流形，$m_0 \in M$，并记 微分同胚群$c(M)^{m_0}$ 为 m_0的稳定子。对于每个 $\varphi \in$微分同胚群$c(M)^{m_0}$，令 $T^{\infty}_{m_0}(\varphi) \in \mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})$ 表示 φ 在 m_0 处相对于某个局部坐标图的泰勒级数。则映射

$$T^{\infty}_{m_0}\colon \mathrm{Diff}_c(M)_{m_0,0} \to \mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})_0$$

是李群之间的满同态。这里，单位分量$\mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})_0 \subseteq \mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})$ 是由满足2 指标的形式微分同胚 ψ 构成的子群，其中$\det(T_0(\psi)) > 0$。

例 15.6.19。（全纯芽）设 $\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$ 表示在 0 处满足 $f(0) = 0$ 的全纯映射 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 的芽空间。我们在此空间上赋予巴拿赫空间 E_k 的局部凸归纳极限拓扑，其中这些巴拿赫空间由 $\mathbb{C}^n$ 中半径为 $\frac{1}{k}$ 的闭单位圆盘上的全纯函数构成（关于任意范数）。将 $\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$ 的元素视为 0 处的向量场芽，可得到李括号

$$[f, g](z) := dg(z)f(z) - df(z)g(z),$$

它使 $\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$ 成为拓扑李代数。这可由命题 10.2.11 在 $K = \{0\}$ 的情形下直接推出。

所有满足 $\det(f'(0)) \neq 0$的芽 $[f]$构成的集合 $\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})$ 是 $\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$ 的一个开子集；关于复合 $[f][g] := [f \circ g]$，它是一个群。在 [Pis77]，中，D. Pisanelli 证明了 $\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})$ 上的复合和求逆都是全纯的，因此，按照其作为 $\mathfrak{gh}_n(\mathbb{C})$ 的开子集所继承的流形结构，$\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})$ 是一个复李群。这个李群

具有一个全纯指数函数，但它不是局部满射；后一事实可通过改编 Sternberg 的例子得到。

$$f(z) = e^{\frac{2\pi i}{m}} z + pz^{m+1} \quad \text{for} \quad m > 0$$

来自小节 5.6.4（另见 [Pis76]）。

注意，$\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})_1 \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，其中 $\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})_1$ 是所有线性项为 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ 的微分同胚所组成的子群。

近期解决的问题

Eyn [J.-M. Eyni 得到了以下结果：

定理 15.6.20。（Banach 补子群定理）设 G 是一个李群，且 $\mathfrak{h} \subseteq \mathbf{L}(G)$ 是一个闭李子代数，使得存在一个巴拿赫子空间 $E \subseteq \mathbf{L}(G)$，从而加法映射 $\mathfrak{h} \oplus E \to \mathbf{L}(G)$ 是一个拓扑同构。那么存在一个 $H \subseteq G$，其李代数为 $\mathfrak{h}$。

推论 15.6.21. (有限余维子群定理) 设 G 是一个李群，且 $\mathfrak{h} \subseteq \mathbf{L}(G)$ 是一个有限余维闭李子代数。那么存在一个积分子群 $H \subseteq G$，其李代数为 $\mathfrak{h}$。

对于 μ-正则群，这个推论可由 [OMY83a, 定理 4.2] 得出。在 [Da11], 中，R. Dahmen 特别证明了：

命题 15.6.22. 由 $0 \in \mathbb{C}^n$ （例 15.6.19）附近的复解析微分同胚芽组成的群 $\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})$ 是一个正则李群。

一些公开问题

问题 15.6.23.（二步可解李代数）定理 15.6.14 给出了类型为 $\mathfrak{g} = E \rtimes_D \mathbb{R}$ 的可解李代数的可积性判据。

由于阿贝尔李代数显然可积，因此讨论可解李代数的可积性问题时，自然可以先将范围限定为可解长度 为 2 的代数，即 $D^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的阿贝尔理想。显然，伴随作用为阿贝尔李代数 $W := \mathfrak{g}/D^1(\mathfrak{g})$ 在 $E := D^1(\mathfrak{g})$ 上定义了自然的拓扑模结构。以下是关于这种情形的一些问题：

(1) $\mathfrak{g}$ 的可积性是否蕴含 W 在 E 上的李代数模结构积分为李群$(W, +)$在 E 上的光滑作用？若 W 是有限维的，则可用与定理 15.6.14 的证明类似的论证来证明这一点。(2)假设 W 在 E 上的李代数模结构积分为$(W, +)$的光滑作用。这是否蕴含 $\mathfrak{g}$ 是可积的?

若 $\mathfrak{g} \cong E \rtimes W$ 是半直积，则后者是显然的；但若 $\mathfrak{g}$ 是 W 通过 V的非平凡延拓，则情形更为复杂。注意，由定理 15.5.35，所有可解巴拿赫–李代数都是可积的。

问题 15.6.24.对于固定 0 的微分同胚芽群 $\mathrm{Gs}_n(\mathbb{R})_1$ ，其中 $\varphi\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ 的线性项消失，它是否（局部）指数?

问题 15.6.25. 子群 $\mathrm{Gh}_n(\mathbb{C})_1$ （例 15.6.19）是指数李群吗? （参见问题 15.6.24）

第 15.6 节注记

命题 15.6.1 是 [Mil84] 中的引理 9.1。对于 ILB–李群的李代数的复化，Omori 在 [Omo97, Cor. 4.4] 中描述了与定理 15.6.6 类似的结果。

15.7 BCH–李群

我们回顾定义 8.4.2：BCH–李代数是具有如下性质的局部凸李代数：豪斯多夫级数

$$x * y = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x,y) = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \cdots$$

在某个开零邻域 x， y 内收敛，并在 U 的某个零邻域上定义解析指数局部群结构。

在全局层面上，我们有以下结果，其证明需要用到定理 8.4.5 中的唯一性断言：

定理 15.7.1。对于李代数为 $\mathfrak{g}$ 的李群 G ，以下条件等价：

(1) G 是解析的，且其解析指数函数在 0 处是局部解析微分同胚。(2) G 是局部指数的，且 $\mathfrak{g}$ 是 *BCH*。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：设 $U \subseteq 0$ 是一个开零邻域，使得 $\exp|_U$ 是到 G 的一个开子集上的解析微分同胚。那么

$$x * y := \exp|_U^{-1}(\exp x \exp y)$$

在 $\mathfrak{g}$的一个零邻域上定义了一个解析指数局部李群。因此，根据定理 8.4.5， $\mathfrak{g}$ 是 BCH。

(2) $\Rightarrow$ (1)：如果 G 是局部指数的，我们可以从 e附近的一个指数图出发，按照定理 5.3.1 构造一个图册。随后，BCH 性质表明图变换实际上是解析的，因此我们在 G上得到一个解析李群结构。□

定义 15.7.2。满足定理 15.7.1 等价条件的群称为 *BCH* 李群。

在例 7.1.8 中，我们描述了一个解析李群 G，其解析指数函数是一个光滑微分同胚，但 $\mathfrak{g}$ 不是 BCH。这否定了 [Mil84 第 31] 页提出的一个问题。

例 15.7.3。(a) 对于每个原幂零李代数 $\mathfrak{g}$，由豪斯多夫级数定义的相应群 $(\mathfrak{g}, *)$ 是一个 BCH 李群（备注 8.4.3(c)）。

(b) 每个巴拿赫–李群都是 BCH（定理 8.4.1）。

(c) 如果 $\mathcal{A}$ 是一个含幺麦基完备连续逆代数，那么其单位元群 $\mathcal{A}^\times$ 是 BCH（定理 10.1.15）。由于 $M_n(\mathcal{A})$ 也是一个麦基完备连续逆代数（命题 10.3.1），群 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A}) = M_n(\mathcal{A})^\times$ 也同样是 BCH。

(d) 设 K 是 BCH 李群，且 $q\colon P \to M$ 是定义在 σ-紧有限维流形 M 上的光滑 K-主丛。那么，紧支撑规范变换群 $\mathrm{Gau}_c(P)$ 是 BCH 的（例 7.1.4(c)）。

以下结果对于证明某些李代数不是 BCH 李代数颇为有用：

定理 15.7.4。(Robart 判据；[Rob04]) 若 $\mathfrak{g}$ 是序列完备的 *BCH*–李代数，则存在一个0-邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$，使得$f(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{ad} x)^n y$收敛，并在 $U \times \mathfrak{g}$ 上定义一个解析函数。

例 15.7.5。李代数 $\mathfrak{gs}_1(\mathbb{R})_1$ 的形式类比是 $\mathfrak{gf}_1(\mathbb{R})_1$，它由 0 处形如 $x + a_2x^2 + \cdots$ 的微分同胚芽构成，是原幂零的，因此特别是 BCH 的（例 15.7.3(a)）。与此相反，Robart 注意到 $\mathfrak{gs}_1(\mathbb{R})_1$ 不是 BCH。事实上，对于元素 $\xi(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$，和$\eta(x) = x^3$，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big((\operatorname{ad}\xi)^n \eta\big)(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a^n n! x^n,$$

当 $a \neq 0$时，$x \neq 0$不收敛。结合 Fl71，第 155], 页中的 Floret 的结果 [，可知该级数在 Silva 空间 $\mathfrak{gs}_1(\mathbb{R})_1$, 中不收敛，因此定理 15.7.4 表明，$\mathfrak{gs}_1(\mathbb{R})_1$ 不是 BCH 群。

为了讨论以下例子，我们回顾一下 OMY82、OMY83a]中的 [μ-正则性概念：

定义 15.7.6。设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并且

$$\Delta := \{t_0, \ldots, t_m\}$$

实区间 $J := [a,b]$ 的一种划分，具有 $a = t_0$ 和 $b = t_m$。我们记作

$$|\Delta| := \max\{t_{j+1} - t_j \ j = 0, \dots, m-1\}.$$

对于 $|\Delta| \le \varepsilon$，若映射h: $[0,\varepsilon] \times J \to G$ 满足以下条件，则称一对 $(h,\ \Delta)$ 为 $[0,\varepsilon] \times J$ 上的阶梯函数

(1) $h(0,\ t) = e$ 对所有 $t \in J$ 以及所有映射 $h^t(s) := h(s,\ t)$ 都是 C^1。(2) $h(s,\ t) = h(s,\ t_j)$ 对于 $t_j \le t < t_{j+1}$。

对于阶梯函数 $(h,\ \Delta)$，我们将 乘积积分 $\prod_a^t(h,\ \Delta) \in G$ 定义为

$$\prod_a^t(h,\Delta) := h(t-t_k,t_k)h(t_k-t_{k-1},t_{k-1})\cdots h(t_1-t_0,t_0) \quad \text{for} \quad t_k \le t < t_{k+1}.$$

现在设 $(h_n,\ \Delta_n)$ 是一个阶梯函数序列，满足 $|\Delta_n| \to 0$，且该序列 $(h_n,\ \frac{\partial h_n}{\partial s})$ 一致地收敛到函数 h: $[0,\varepsilon] \to J \to G$ 对应的一对 $(h,\ \frac{\partial h}{\partial s})$。那么极限函数 h 是一个 C^1-毛发于 e，也就是说，它是连续的，关于 s 可微，并且 $\frac{\partial h}{\partial s}$ 在 $[0,\varepsilon] \times J$ 上连续。

—

李群 G 称为 μ-正则 [3]（在 [OMY82, OMY83a] 中称为“正则”），如果对每个按上述意义收敛到 e 中某个 C^1-hair 的序列 (h_n, Δ_n)，乘积积分 $\prod_a^t(h_n, \Delta_n)$ 在 J 上一致收敛。此时该极限记为 $\prod_a^t(h, d\tau)$，并称为乘积积分 h。

例 15.7.7.（形式微分同胚）(a) 原幂零 BCH 李群的重要例子是形式微分同胚的 Fr´echet–李群 $\mathrm{Gf}_n(\mathbb{K})$（参见小节 5.6.4、第15.3节和例 15.6.16）。

这些群是 μ-正则李群 [Omo80]：鉴于半直分解以及 μ-正则性是一种扩张性质（[Ne06a，定理 V.1.8]）这一事实，只需注意到原幂零李群是 μ-正则的，而这可由一个简单的射影极限论证得出。

(b) 对于 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$，单位连通分支 $\mathrm{Gf}_1(\mathbb{R})_0$ 是指数的且解析的，但不是 BCH 群。对于 $n \ge 2$，群 $\mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})$ 是解析的，但不是局部指数的。若子群 $H \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 由具有实特征值的矩阵组成，则子群 $\mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})_1 \rtimes H \subseteq \mathrm{Gf}_n(\mathbb{R})$ 是局部指数的（[Rob02，定理 6/7]）。

注 15.7.8。设 $\mathfrak{g}(A)$ 为可对称化的 Kac–Moody 李代数。在[Rod89], E. Rodriguez–Carrington 介绍了 $\mathfrak{g}(A)$ 的若干 Fr´echet 完备化，其中包括光滑版本 $\mathfrak{g}^\infty(A)$ 和解析版本 $\mathfrak{g}^\omega(A)$，它们都是 BCH–李代数（[Rod89，命题 1]）。对于酉实形式，可通过 $\mathfrak{g}(A)$ 的酉最高权模构造相应的群，将其视为 Hilbert 空间酉群的积分子群（参见定理 9.2.4）。在 [Su88],Suto 得到了密切相关的结果，但没有给出李群结构。

[3] μ 表示“乘法的”。

在另一个方向上，Leslie 在 [Les90] 中介绍了 $\mathfrak{g}(A)$ 的一种完备化 $\hat{\mathfrak{g}}(A)$，由此在路径空间 $C^\infty([0,1],\ \mathfrak{g}(A))$ 上得到一种李群结构，与该空间上的逐点李代数结构相对应。由此可得到 $\mathfrak{g}(A)$ 的一个可积李代数扩张，其思路源自预可积李代数（参见注 15.5.8）。关于微分拓扑群背景下的 Kac–Moody 群研究方法，参见 [Les03]（另见 [So84]）；关于代数群背景下的方法，参见 S. Kumar 的专著 [Kum02]。

复化

对于复化而言，BCH–李群的框架是自然的，因为如果 $\mathfrak{g}$ 是一个局部指数李代数，且 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 作为复李代数也是局部指数的，那么局部乘法就是复解析的。这意味着 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是 BCH 的，进而可知 $\mathfrak{g}$ 也是 BCH 的。

定义 15.7.9. 如果 G 是一个实BCH–李群，那么实李群的态射 $\zeta_G\colon G \to G_{\mathbb{C}}$ 到复BCH–李群 $G_{\mathbb{C}}$ 称为泛复化，若对于任意态射 $\alpha\colon G \to H$ 到复 BCH– 李群 H，都存在唯一的态射 $\beta\colon G_{\mathbb{C}} \to H$，使得 $\alpha = \beta \circ \zeta_G$。

众所周知，对于有限维李群，泛复化总是存在的（参见 [Ho65] , [Ne00，定理 XIII.5.6]），但它不一定是局部单射，因此可能出现 $\dim_{\mathbb{C}} G_{\mathbb{C}} < \dim_{\mathbb{R}} G$ 的情况。下述定理表明，由于不可扩张李代数的存在，无限维情形会变得更加复杂。

定理 15.7.10。（万有复化的存在性；[GN03，Gl02c]）设 G 是实 *BCH–*李群，令 $N_G \trianglelefteq G$ 为从 G 到复*BCH–*李群的所有光滑同态的核之交。那么，G 有万有复化，当且仅当 N_G 是 G 的 *BCH–*李子群，且商空间的复化 $\mathbf{L}(G)/\mathbf{L}^e(N_G)$ 具有可扩张性。

由定理 9.4.10 可推出，若 G 是单连通的，则万有复化的存在性等价于 $\mathbf{L}(G)/\mathbf{L}^e(N_G)$ 的可扩张性。在 [GN03]，中可以找到一个巴拿赫–李群的例子，其中 N_G 不是李子群；还可以找到一些例子，其中 $N_G = \{e\}$，但 $\mathbf{L}(G)_{\mathbb{C}}$ 不具有可扩张性。

开放问题

问题 15.7.11。证明一个适当版本的定理 15.7.10，说明局部指数李代数的万有复化存在性。

这已经是李代数层面一个有趣的问题，因为局部指数李代数的复化未必是局部

指数的。事实上，在例 8.3.7 中，我们看到一个指数李代数 $\mathfrak{g}$，其中包含一个不稳定闭子代数 $\mathfrak{h}$。如果 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 作为复李代数是局部指数的，那么 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中的局部乘法就是全纯的，因此 $\mathfrak{g}$ 是 BCH，这与不稳定闭子代数的存在性相矛盾。

第15.7节注释

BCR 中使用的李群概念比我们所说的 BCH 李群概念更强，因为它对李代数要求了额外性质，即李代数必须是所谓的 AE李代数；这一性质体现了某些与李括号相容的半范数的存在性。

15.8 具有正则指数映射的李代数

对于有限维李群，指数函数 exp: $\mathfrak{g} \to G$ 是整体微分同胚的这类李群，其性质已得到充分理解。根据 Dixmier–Saito 定理，当且仅当 G 是单连通的、 $\mathfrak{g}$ 可解，并且算子 $\operatorname{ad} x$、 $x \in \mathfrak{g}$ 没有纯虚特征值时，条件才成立。此外，如果 $\mathfrak{g}$ 是复的，那么 G 必须是单连通幂零李群。

本节讨论这些结果对巴拿赫–李群的若干推广。从注 5.6.24 可知，(exp) 对每个 $x \in \mathfrak{g}$ 都可逆，当且仅当算子 $\operatorname{ad} x$ 没有非零纯虚谱值；下文将此条件称为（SC）。在第15.8.1小节中，我们考察条件（SC），并进一步研究可解巴拿赫–李群。特别地，我们证明所有可解巴拿赫–李代数都可以扩张为可缩李群，并且这些群是指数的，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 满足条件（SC）（定理 15.8.10）。

在第15.8.2小节中，我们接着讨论如下条件：对每个 $x \in \mathfrak{g}$，$\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} x) = \{0\}$，也就是说，所有算子 $\operatorname{ad} x$ 都是拟幂零的；此时我们称 $\mathfrak{g}$ 为拟幂零。在有限维情形下，根据恩格尔定理，这等价于 $\mathfrak{g}$ 的幂零性。对于复巴拿赫–李代数，我们证明了 W. Wojtyński 的杰出定理：拟幂零性等价于豪斯多夫级数在$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$中的所有元素对上收敛，也等价于指数性。在实数情形下，前两个条件仍然等价，并且蕴含指数性；但存在指数的实李代数并非幂零代数。

我们将在第15.8.3小节中简要讨论有限维李代数射影极限的指数性，以此结束本节。这些李代数尤为重要，因为它们出现在许多形式构造中（见例 15.6.16）。

15.8.1 可解巴拿赫–李代数

根据定理 7.3.10，幂零李代数总是指数的，但反之并不成立。在有限维李理论中，Dixmier–Saito 定理 [HiNe12, Thm. 14.4.8]将指数李代数刻画为满足谱条件的李代数：

$$\text{(SC)} \qquad (\forall x \in \mathfrak{g}) \quad \operatorname{Spec}(\operatorname{ad} x) \cap i\mathbb{R} \subseteq \{0\}.$$

因此，我们在本节开头先讨论巴拿赫–李代数的 (SC)。

我们将需要谱理论中的下述事实：

定理 15.8.1.([Ru91，定理 10.18]) 设 $\mathcal{B}$ 为含幺复巴拿赫代数，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ 为包含单位元的闭子代数。则对每个$x \in \mathcal{A}$，相对于 $\mathcal{A}$ 的谱谱$_{\mathcal{A}}(x)$ 是谱$_{\mathcal{B}}(x)$ 与 $\mathbb{C} \setminus$ 谱$_{\mathcal{B}}(x)$的若干有界连通分支的并。

作为应用，我们得到：

引理 15.8.2。设 X 是一个巴拿赫空间，$Y \subseteq X$ 是一个闭子空间。此外，设 $A \in \mathcal{L}(X)$ 是一个连续线性映射，且 $A(Y) \subseteq Y$。那么

$$\operatorname{Spec}(A) \cap i\mathbb{R} \subseteq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Spec}(A|_Y) \cap i\mathbb{R} \subseteq \{0\}.$$

证明。 首先，我们注意到

$$\mathcal{L}(X)_Y := \{\varphi \in \mathcal{L}(X) \colon \varphi(Y) \subseteq Y\}$$

是 $\mathcal{L}(X)$ 的一个闭含幺巴拿赫子代数。条件

$$\operatorname{Spec}(A) \cap i\mathbb{R} \subseteq \{0\}$$

意味着 $\operatorname{Spec}^{\mathcal{L}(X)}(A)$ 包含于 $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^\times$。于是，$i\mathbb{R}_+^\times$ 和 $i\mathbb{R}_-^\times$ 都包含在 A 的预解集的无界连通分支中，因此由定理 15.8.1 可知，$\operatorname{Spec}^{\mathcal{L}(X)_Y}(A)$ 也包含于 $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^\times$。

映射 $\mathcal{L}(X)_Y \to \mathcal{L}(Y)$ $\varphi \mapsto \varphi|_Y$ 是含幺巴拿赫代数同态，因此 $\operatorname{Spec}(A|_Y) \subseteq \operatorname{Spec}^{\mathcal{L}(X)_Y}(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^\times$. □

命题 15.8.3。对于满足 (SC) 的巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，以下断言成立：

(1) $\mathfrak{g}$ 的每个闭子代数都满足 (SC)。(2) $\mathfrak{g}$ 的每个商都满足 (SC)。(3)如果 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，那么 $\mathfrak{g}$ 可解。

证明。 (1) 设 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ 是闭子代数，且 $x \in \mathfrak{h}$。那么，算子 $\operatorname{ad} x$ 在 $\mathfrak{g}$ 上保持 $\mathfrak{h}$ 不变，因此由引理 15.8.2 可得 (1)。

(2) 设 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{n} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是闭理想。那么，对每个 $\lambda \in \mathbb{R}^\times$，算子 $\operatorname{ad} x + i\lambda e$ 在 $\mathfrak{g}$ 上可逆，并保持 $\mathfrak{n}$ 不变。此外，由 (1) 可知，它在 $\mathfrak{n}$ 上的限制可逆，因此它在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 上也可逆。

(3) 假设 $\mathfrak{g}$ 是一个非有限维且非可解的李代数。那么 Levi 分解表明，它包含一个非平凡的单子代数 $\mathfrak{s}$。设 $\mathfrak{s} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{s}$ 的 Cartan 分解（[HiNe12，定理13.1.7]），且 $0 \neq x \in \mathfrak{k}$。于是 $\operatorname{ad} x$ 是半单的，且 $\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} x) \subseteq i\mathbb{R}$，因此我们的假设推出 $\operatorname{ad} x = 0$。由于 $\mathfrak{z}(\mathfrak{s}) = \{0\}$，这与 $x \neq 0$ 矛盾。□

命题15.8.4。设 G 是一个1-连通巴拿赫–李群，$n \in \mathbb{N}$ 和 $D^n(\mathfrak{g}) := D^n(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的闭导出级数。则 $D^n(G) := \langle \exp D^n(\mathfrak{g}) \rangle$ 是 G 的李子群，且包含映射 $D^n(G) \hookrightarrow G$ 是弱同伦等价。特别地，每个子群 $D^n(G)$ 都是1-连通的。

证明。我们对 n 使用归纳法。鉴于 $D^n(\mathfrak{g}) = D^1(D^{n-1}(\mathfrak{g}))$，以及李子群的李子群仍是李子群这一事实，只需处理情形 $n = 1$。

首先我们注意到 $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}/D^1(\mathfrak{g})$ 是一个阿贝尔Banach–Lie代数，我们将其视为一个阿贝尔李群。由于 G是单连通的，存在唯一的李群同态 $q\colon G \to \mathfrak{a}$，使得 $\mathbf{L}(q)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$是商映射。现在 $N := \ker q$ 是 G 的正规李子群，其李代数为$D^1(\mathfrak{g})$, 并且 $G/N \cong (\mathfrak{a}, +)$（命题 9.3.11）。由于 $\mathfrak{a}$ 是单连通的，N 是连通的，从而推出 $N = D^1(G)$。

由此特别可知 $G/D^1(G)$ 是可缩的，并且由于 q 根据 Michael 选择定理 [MicE59], 定义了一个拓扑局部平凡的纤维丛，长正合同伦序列（定理 14.1.8）蕴含所有同态 $\pi_k(D^1(G)) \to \pi_k(G)$ 都是同构。这意味着 $D^1(G)$ 的包含映射是一个弱同伦等价。特别地，$\pi_1(D^1(G)) \cong \pi_1(G)$ 为零，因此 $D^1(G)$ 是单连通的。□

推论 15.8.5。单连通可解巴拿赫–李群的所有同伦群都消失。

证明。设 G 是一个单连通可解巴拿赫–李群。根据命题15.8.4，对每个 $n \in \mathbb{N}$，包含映射 $D^n(G) \to G$ 都是弱同伦等价。由于 G 可解，对某个 N，我们有 $D^N(G) = \{e\}$，结论由此得证。□

注 15.8.6。根据 Palais 定理 14.1.27，前述命题甚至意味着所有单连通可解巴拿赫–李群都是可缩的。

定理 15.8.7。每个可解巴拿赫李代数 $\mathfrak{g}$ 都是可扩张的。

证明。设 G_{ad} 是一个李代数为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 的单连通李群（定理 8.3.13）。鉴于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 的可解性，推论 15.8.5 表明 $\pi_2(G_{\mathrm{ad}})$ 消失，结论由推论 15.5.12 得出。□

命题 15.8.8. 若 $\mathfrak{g}$ 是满足(SC)的可解巴拿赫–李代数，且 G 是以 $\mathfrak{g}$为李代数的连通李群，则$\exp_G$ 是满射。

证明. 我们对 $\mathfrak{g}$的可解长度作归纳。显然只需假定 G 是单连通的。设 $\mathfrak{a} := D^k(\mathfrak{g}) \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$的导出列的最后一个非零项。则 $\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的阿贝尔理想，且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是长度为 k的可解李代数，而 $\mathfrak{g}$ 的长度为 $k+1$。

若 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的，则 $G \cong \mathbb{R}^n/\Gamma$，其中 Γ 是离散子群，因此 G 的指数函数是满射。现在我们按 $\mathfrak{g}$的可解长度归纳地进行论证。阿贝尔情形对应于可解长度1。利用定理 15.8.7，我们得到一个单连通李群 H，满足$\mathbf{L}(H) = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$。由于商$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 也满足谱条件（命题 15.8.3），归纳假设蕴含 H 的指数函数是满射。接下来我们回顾：存在唯一的李群同态 $\varphi\colon G \to H$，使得$\mathbf{L}(\varphi)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$为商同态。其核 $A := \ker \varphi$是满足 $H \cong G/A$的正规李子群。由$\exp_H$ 的满射性，现在对每个 $g \in G$ 以及满足 $gA = \exp_H(x + \mathfrak{a}) = \exp_G(x)A$的 $x \in \mathfrak{g}$，我们得到相应关系。这意味着 $g \in \exp_G(x)A$，因此尚需证明 G 的子群$\exp_G(\mathbb{R}x)A$ 包含在指数函数的像中。

由于 $G/A \cong H$ 是单连通的，子群 A 是连通的。此外，它是阿贝尔群，因此 $\exp_A\colon \mathfrak{a} \to A$ 是满射的。因此，我们可以假设 $g \notin A$，这意味着 $x \notin \mathfrak{a}$。于是 $\mathfrak{b} := \mathfrak{a} + \mathbb{R}x$ 是 $\mathfrak{g}$的闭子代数，且与 $\mathfrak{a} \rtimes_D \mathbb{R}$ 同构，其中 $D := $ 伴随表示 $x|_{\mathfrak{a}}$。由此可得，取 $\alpha(t) := e^{tD}$，我们得到一个单连通群 $B := \mathfrak{a} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$，其李代数为 $\mathfrak{b}$。B 的指数函数显式表示为

$$\exp_B(v,t) = (\beta(t)v, t), \quad \text{where} \quad \beta(t) = \int_0^1 e^{-stD}\,ds = \frac{\mathbf{1} - e^{-t\operatorname{ad} x}}{t \operatorname{ad} x}$$

（命题 5.6.10）。根据谱条件和命题 15.8.3，我们得出，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，算子 $\beta(t)$ 都是可逆的，这意味着 $\exp_B$ 的满射性。

现在令 $j_B\colon B \to G$ 为唯一的李群同态，使得$\mathbf{L}(j_B)\colon \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ 是自然包含映射。于是

$$g \in A \exp_G(\mathbb{R}x) = j_B(B) = j_B(\exp_B(\mathfrak{b})) = \exp_G(\mathfrak{b})$$

意味着 $g \in \exp_G(\mathfrak{g})$。□

注 15.8.9. 设 G 为李代数 $\mathfrak{g}$ 满足 (SC) 的单连通巴拿赫–李群。则对每个 $x \in \mathfrak{g}$，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 可逆（注 5.6.24），这意味着 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ 在每个 $x \in \mathfrak{g}$ 处是局部微分同胚。因此 $\operatorname{im}(\exp_G)$ 是 G 的开子集。

此外，$\exp_G(x) = \exp_G(y)$ 蕴含 $\exp_G(x-y) = 0$（命题 5.6.25），由谱条件可得 $x - y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。设

$$\Gamma_{\mathfrak{z}} := \{x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \colon \exp x = e\} \cong \pi_1(Z(G)).$$

那么，$\Gamma_{\mathfrak{z}}$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$的离散子群，并且指数映射

$$\exp_G \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{im}(\exp_G)$$

是覆盖映射，其中 $\Gamma_{\mathfrak{z}}$ 以加法方式作为覆盖变换作用。

下面的定理是经典的有限维李群 [HiNe12，定理 14.4.8] 的巴拿赫版本，即 Dixmier–Saito 定理。

定理 15.8.10。设 G 是一个连通巴拿赫–李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。对于以下断言

(1) 对于每个 $x \in \mathfrak{g}$，都有 $\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}\, x) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$。(2) 指数函数 $\exp_G \colon \mathfrak{g} \to G$ 没有奇点。(3) $\mathfrak{g}$ 是指数的。(4) 指数函数 $\exp_{\widetilde{G}} \colon \mathfrak{g} \to G$ 是微分同胚。

我们有以下蕴含关系

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftarrow (3) \Leftrightarrow (4).$$

如果 $\mathfrak{g}$ 是有限维的或可解的，那么所有断言都等价。

证明。(1) $\Leftrightarrow$ (2)：由命题 5.6.22 可知，指数函数的对数导数为

$$\delta(\exp)_x = \kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\, x}\, dt = \frac{\mathbf{1} - e^{-\mathrm{ad}\, x}}{\mathrm{ad}\, x}.$$

根据谱映射定理，当且仅当 $\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}\, x) \cap 2\pi i\mathbb{Z} \subseteq \{0\}$时，该算子可逆。因此，当且仅当满足(1)时，$G$ 的指数函数没有奇点。

(3) $\Leftrightarrow$ (4)：由于具有李代数 $\mathfrak{g}$的两个单连通巴拿赫–李群同构，因此(3)与(4)等价。

(4) $\Rightarrow$ (2)是显然的。

(2) $\Rightarrow$(4)：若 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，则命题 15.8.3(3) 蕴含 $\mathfrak{g}$ 是可解的。

设 $\mathfrak{g}$ 是可解巴拿赫–李代数。命题 15.8.8 蕴含 $\widetilde{\ }$，因此 $\exp_G$ 是满射。将 G 替换为 G 后，可假设 G 是单连通的。接下来只需证明 $\exp_G$ 是单射。鉴于 $\exp_G$ 的正则性，关系 $\exp_G x = \exp_G y$ 蕴含 $\exp_G(x - y) = e$（命题 5.6.25），因此只需证明 $\exp_G^{-1}(e) = \{0\}$。

设 $x \in \mathfrak{g}$ 满足 $\exp_G x = e$。若 $x \neq 0$, 则存在极大性 n 满足 $x \in D^n(\mathfrak{g})$。那么子群 $D^n(G) \subseteq G$ 是单连通的，因为

命题15.8.4。用 $\overline{D^n(G)}$ 替换 G 后，我们因此可以假设$n = 0$，即 $\overline{x \notin [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$。考虑商映射 $p\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{q} := \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$。由于群 G 是单连通的，存在相应的群同态$p_G\colon G \to (\mathfrak{q}, +)$。由此得到 $0 = p_G(\exp_G x) = \exp_{\mathfrak{q}} q(x) = q(x)$，这与假设 $x \notin D^1(\mathfrak{g})$ 矛盾。 — □

推论 15.8.11.有限维复李代数是指数的，当且仅当它是幂零的。

证明。 我们已经看到，任何幂零李代数都是指数的。根据恩格尔定理 [HiNe12], ，只需证明每个 $\operatorname{ad} x$,$x \in \mathfrak{g}$ 都是幂零的。若情况并非如此，则存在一个 $x \in \mathfrak{g}$，使得 $\operatorname{ad} x$ 有一个非零特征值 λ。于是 $i \in \operatorname{Spec}(\operatorname{ad}(i\lambda^{-1}x)) \cap i\mathbb{R}$。鉴于 Dixmier–Saito 定理，这与 $\mathfrak{g}$ 的指数性矛盾。□

15.8.2 准幂零巴拿赫李代数

本小节的主要目标是证明 Wojty´nski 定理，该定理根据所有算子 $\operatorname{ad} x$ 的拟幂零性，刻画豪斯多夫级数处处收敛的巴拿赫–李代数。

我们先对多重次调和函数作一些预备说明。

定义 15.8.12。（参见 [He89，定义 4.1.3]）设 X 是一个复局部凸空间，$\Omega \subseteq X$ 是一个开子集。若函数 $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ 满足以下条件，则称其为多重次调和[4] 函数:

(PS1) u 是上半连续的，即对任意 $t \in \mathbb{R}$，集合 $\{z \in \Omega\colon u(z) < t\}$是开的。

(PS2) 对于 $a \in \Omega$ 和 $b \in X$，若 $a + \zeta b \in \Omega$ 对 $|\zeta| \le 1$成立，则

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + e^{i\theta} b)\, d\theta.$$

注 15.8.13。 若 $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty[$ 是多重次调和函数，Ω是连通的，且 $u^{-1}(-\infty)$有一个内点，则根据 [He89，命题 4.1.2(a)]，u 是常数 $-\infty$ 。

引理15.8.14。 设 $f\colon \mathbb{C}^2 \to [0, \infty[$ 是齐次的，即存在一个 $\sigma \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(\lambda z) = |\lambda|^{\sigma} f(z) \quad for \quad z \in \mathbb{C}^2, \lambda \in \mathbb{C}.$$

如果 f 是多重次调和函数，并且在 $\mathbb{R}^2$上为零，则 $f = 0$。

[4] 在 [He89]中，这些函数称为多重亚调和函数；如果 $u^{-1}(-\infty)$ 没有内部点，则称函数 u 为多重次调和函数。

证明。任意元素 $z \in \mathbb{C}^2$ 都可写成 $z = a + ib$ 的形式，其中 $a,\ b \in \mathbb{R}^2$。如果 $a,\ b$ 线性相关，那么 $z \in \mathbb{C} \cdot \mathbb{R}^2$，因此 $f(z) = 0$，因为 f 是齐次的。如果 $a,\ b$ 线性无关，我们就将它们选作一组新基，因此只需证明 $f(1,\ i) = 0$。对于 $|\zeta| = 1$，

$$(1, i) + \zeta(1, -i) = (1 + \zeta, i(1 - \zeta)) \in \mathbb{C} \cdot \mathbb{R}^2$$

因为 $i(1-\zeta)/(1+\zeta) \in \mathbb{R}$ 当 $\zeta \neq -1$时。因此，由 $h(\zeta) := f(1+\zeta,\ i(1-\zeta))$ 定义的次调和函数$h\colon \mathbb{C} \to [0, \infty[$ 在单位圆上为零，所以根据平均值性质 (PS2) 和 $h \geq 0$可得 $h(\zeta) = 0$ 当 $|\zeta| \leq 1$ 时。特别地，我们得到 $f(1,\ i) = h(0) = 0$。□

我们需要以下由 E. Vesentini 得出的结果（参见 [Ves68，定理 2]）。

定理 15.8.15（Vesentini）。若 $\mathcal{A}$ 是含幺复巴拿赫代数，则谱半径

$$\rho\colon \mathcal{A} \to [0, \infty[, \qquad \rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

以及函数 对数函数ρ 是多重次调和的。

证明。鉴于 [He89，例 4.1.5(d)]，，只需证明 $\log \rho$ 是多重次调和的。若 $\rho(a) = 0$，则对每个 $t \in \mathbb{C}$都有 $\rho(a + t\mathbf{1}) = |t|$。这表明 (PS3)。此外，(PS1) 由谱 [HP57，定理 5.2.3]的下半连续性得出。

注意

$$\log(\rho(a)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \log \|a^{2^n}\|$$

并且函数 $f_n(a) := \frac{1}{2^n} \log\|a^{2^n}\|$ 是多重次调和的，因为幂函数 $a \mapsto a^{2^n}$ 是全纯的（[He89，例 4.1.5(c)]）。我们还有 $f_{n+1} \leq f_n$，因此根据（[He89，命题 4.1.2(d)]），$\log \rho = \lim_n f_n$ 是多重次调和的。□

定义 15.8.16。若满足以下条件，则称巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 为

$$\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} x) = \{0\} \quad \text{for every} \quad x \in \mathfrak{g},$$

也就是说，若所有算子 $\operatorname{ad} x$ 都是拟幂零的。

定理15.8.17（Wojty´nski 定理）。对于复巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，以下条件等价：

(a) $\mathfrak{g}$ *is quasi-nilpotent.*
(b) *All operators* $\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x}\, dt = \frac{\mathbf{1} - e^{-\operatorname{ad} x}}{\operatorname{ad} x}$ *are invertible.*
(c) $\mathfrak{g}$ *satisfies (SC).*
(d) $\mathfrak{g}$ *is exponential.*

(e) 豪斯多夫级数 $x * y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x,y)$，其中 $H_n(x,y)$ 是 n 阶齐次项，在任意两个元素 x、$y \in \mathfrak{g}$ 上都收敛。

证明。(a) ⇔ (b) ⇔ (c)：注 5.6.24 中我们已经看到，$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 不可逆，当且仅当 $\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} x)$ 包含一个形如 $2\pi i n$ with$n \in \mathbb{Z}$ 非零的元素。由于 $\mathfrak{g}$ 是复的，对于任意 $x \in \mathfrak{g}$，这都不会发生，当且仅当对每个 $x \in \mathfrak{g}$，$\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} x) = \{0\}$；而这又等价于 (SC)。

(b) ⇒ (d)：对于 x，$y \in \mathfrak{g}$，考虑全纯函数

$$F\colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathfrak{g}), \quad F(z) := e^{z \operatorname{ad} x} e^{z \operatorname{ad} y} - \mathbf{1}.$$

如果 z 足够小，那么

$$F(z) = e^{(z \operatorname{ad} x) * (z \operatorname{ad} y)} - \mathbf{1} = e^{\operatorname{ad}(zx * zy)} - \mathbf{1},$$

并且由于 $\mathfrak{g}$ 是拟幂零的，当 z 接近 0 时，$\operatorname{Spec}(F(z)) = \{0\}$。由于 F 是全纯的，函数

$$f\colon \mathbb{C} \to [-\infty, \infty[, \quad f(z) := \log \rho(F(z))$$

根据定理 15.8.15 以及全纯函数与多重次调和函数复合后仍为多重次调和函数这一事实，该函数是多重次调和的（[He89，定理 4.3.1]）。我们已经看到，$f^{-1}(-\infty)$ 是 0 的一个邻域，因此注 15.8.13 表明 f 是常数 $-\infty$。这说明对每个 z，$\operatorname{Spec}(F(z)) = \{0\}$，因此对于 x，$y \in \mathfrak{g}$，$\operatorname{Spec}(e^{\operatorname{ad} x} e^{\operatorname{ad} y}) = \{1\}$。

在小节 8.4.1 中，我们已经看到，对于实幂级数

$$\Psi(X) = \frac{(X+1)\log(X+1)}{X} = (X+1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} X^k \in \mathbb{R}[[X]]$$

其收敛半径为 1，且对于 $\|x\| + \|y\| < \log 2$，我们有

$$x * y = x + \int_0^1 \Psi(e^{\operatorname{ad} x} e^{t \operatorname{ad} y} - \mathbf{1}) y \, dt. \tag{15.42}$$

由于

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \Omega := \{a \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})\colon \rho(a) < 1\}, \quad (x,y) \mapsto e^{\operatorname{ad} x} e^{\operatorname{ad} y} - \mathbf{1}$$

是全纯映射，而且将 a 插入 $\Psi(a)$ 作为映射 $\Omega \to \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ 也是全纯的（定理 10.7.5），因此我们看到，(15.42) 的右端定义了一个全纯函数 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$。由此我们得到一个指数复巴拿赫李群 $(\mathfrak{g}, *)$。

(d) ⇒ (e)：由定理 8.4.5 可知，全纯乘法 $x * y$ 在 0 处的泰勒级数就是豪斯多夫级数；根据推论 2.1.14，该级数处处收敛。

(e) $\Rightarrow$ (b)：如果豪斯多夫级数对每一对 $(x,\ y) \in \mathfrak{g}^2$ 都收敛，那么[BS71b，定理 5.2] 表明，由此得到的函数 $x * y$ 是解析的，因此我们得到一个指数李群 $(\mathfrak{g},\ *)$。

(d) $\Rightarrow$ (c) 若 $(\mathfrak{g},\ *)$ 是指数李群，则命题 8.2.10 表明 $\kappa_{\mathfrak{g}} \in \Omega^1(\mathfrak{g},\ \mathfrak{g})$ 是相应的 Maurer–Cartan形式，因此在每个 $x \in \mathfrak{g}$ 中都可逆。□

定理15.8.18。 对于实巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，以下条件等价：

(a) $\mathfrak{g}$ 是拟幂零的。(b) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是拟幂零的。(c) 豪斯多夫级数 $x*y = x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x, y)$ 对任意两个元素 x、$y \in \mathfrak{g}$ 都收敛。

证明。 (a) $\Leftrightarrow$ (b)：显然，(b) 蕴含 (a)。为证明逆向结论，我们考虑函数

$$F\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to [0,\infty[, \quad F(x) := \rho(\operatorname{ad} x) = \lim_{n\to\infty} \|(\operatorname{ad} x)^n\|^{1/n}$$

根据韦森蒂尼定理15.8.15，该函数是多重次调和的。对于 $x,\ y \in \mathfrak{g}$，函数

$$f\colon \mathbb{C}^2 \to [0,\infty[, \quad f(z,w) := F(zx+wy)$$

根据 [He89，定理 4.3.1]，它是多重次调和的。由 (a) 可知，它在 $\mathbb{R}^2$ 上为零；又因它是齐次的，引理15.8.14推出 $f = 0$。这表明，对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，$\operatorname{Spec}(\operatorname{ad}(x+iy)) = \operatorname{Spec}(\operatorname{ad}\ x + i\operatorname{ad}\ y) = \{0\}$，这意味着 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是拟幂零的。

(b) $\Rightarrow$ (c)由定理15.8.17推出。

(c) $\Rightarrow$ (b)：如果豪斯多夫级数在每一对 $(x,y) \in \mathfrak{g}^2$ 中都收敛，那么[BS71b，命题 4.1]表明，它在包含于有限维子空间中的任意紧子集上一致收敛。根据 [BS71a，引理 4.1]，这一性质可由齐次多项式 $H_n\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 到映射 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的自然延拓继承。因此，豪斯多夫级数在每一对 $(x,y) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^2$ 中也收敛，结论由 Wojty´nski 的定理15.8.17得出。[5] □

注 15.8.19. (a) 若实巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$ 是拟幂零的，则与定理15.8.17的证明中相同的论证表明，它是指数的且为BCH。但存在并非拟幂零的实指数巴拿赫-李代数。最小的例子是实直线仿射群的二维非阿贝尔李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$（例7.1.7）。

(b) 若 $\mathcal{A}$ 是由拟幂零元素构成的巴拿赫代数，那么其底层巴拿赫–李代数也是拟幂零的，因为对每个$a \in \mathcal{A}$，都有 $\operatorname{Spec}(\operatorname{ad} a) \subseteq \operatorname{Spec}(a) - \operatorname{Spec}(a) = \{0\}$ ([BelN08，命题 3.3])。

[5] 或者，也可以直接根据 [BS71b，命题8.2]来论证。

在这种情况下， $\mathcal{A}^\times = \mathbf{1} + \mathcal{A}$ 是含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}_+$ 的一个仿射子空间，对数函数在其上有定义，且是指数函数的逆映射。因此， $\mathcal{A}^\times$ 是一个指数巴拿赫–李群。若$\mathcal{A}$ 是复的，那么 Wojty´nski 的定理15.8.17由此推出，其底层李代数是拟幂零的。

例 15.8.20. (a) 在希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ 上，取其标准正交基 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$，考虑由所有具有严格下三角矩阵的紧算子A 构成的巴拿赫代数 $\mathcal{A}$，即 $\langle Ae_m, e_n\rangle = 0$ 对 $n \le m$ 成立。由于根据紧算子的谱定理， A 的所有谱值都是特征值，因此 $\mathrm{Spec}(A) = \{0\}$ 对 $A \in \mathcal{A}$ 成立。于是，根据注 15.8.19，底层的巴拿赫–李代数是拟幂零的。

(b) 在希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2([0,1], \mathbb{C})$ 上，考虑由以下形式的所有积分算子生成的巴拿赫代数$\mathcal{A}$

$$(A_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy,$$

其中 $K \in C([0,1]^2)$ 且 $K(x, y) = 0$ 对 $x \le y$ 成立。由于这些算子都是希尔伯特–施密特的，且

$$\|A\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2\, dx\, dy,$$

它们特别是紧的，因此 $\mathcal{A}$由紧算子构成。

若存在一个 $\varepsilon > 0$，使得当 $x \le y - \varepsilon$ 时 $K(x, y)$ 消失，那么 $(A_K f)(x)$ 只取决于 $y < x+\varepsilon$ 时的值 $f(y)$，这意味着A_K 是幂零的，因而特别是拟幂零的。因此， $\mathcal{A}$ 包含一个由拟幂零元素构成的稠密子空间，故其是拟幂零的，因为谱在紧算子集上连续。这是由它们的谱全不连通这一事实得出的（[New51]；另见 [CM79]，其中有更一般的结果）。

15.8.3 指数型前有限李代数

本小节简要讨论有限维李代数的射影极限（前有限李代数）的指数性。这些李代数尤为重要，因为它们出现在许多形式构造中（见例 15.6.16）。

命题 15.8.21。设 $\mathfrak{g}$ 是一个投射有限李代数。当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是有限维指数李代数系统的射影极限时，它才是指数的。

特别地，原幂零李代数是指数的。

证明。 我们已经在命题 7.3.12 中看到，指数李代数的射影极限仍是指数的。

反过来，假设 $\mathfrak{g}$ 是指数的，且 $\mathfrak{g}=\varprojlim \mathfrak{g}_j$，其中每个 $\mathfrak{g}_j$ 都是有限维的。由于不失一般性，我们可以假设相应映射 $\alpha_j\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}_j$ 的值域稠密，因此它们是满射。我们断言，每个李代数 $\mathfrak{g}_j$ 都是指数的。对于每个 $x\in\mathfrak{g}$，算子 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 都是可逆的，并且我们有

$$\alpha_j\circ\kappa_{\mathfrak{g}}(x)=\kappa_{\mathfrak{g}_j}(\alpha_j(x))\circ\alpha_j \quad \text{for} \quad x\in\mathfrak{g}.$$

因此，对于每个 $x\in\mathfrak{g}$，$\kappa_{\mathfrak{g}_j}(\alpha_j(x))$ 都是满射；又由于 $\mathfrak{g}_j$ 是有限维的，对于每个 $z\in\mathfrak{g}_j$，$\kappa_{\mathfrak{g}_j}(z)$ 都是可逆的。根据定理 15.8.10，这意味着 $\mathfrak{g}_j$ 是指数的。□

在前述命题中，我们遇到这样的情形：有一个商映射 $q\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 满射到有限维李代数 $\mathfrak{h}$。上面的论证表明，如果 $\mathfrak{g}$ 是指数的，那么 $\mathfrak{h}$ 也是指数的（命题15.8.4）。这进而意味着 q 是指数李代数之间的态射，因此 $\mathfrak{n}:=\ker q$ 是有限余维的指数理想（命题 8.3.3）。

下面的例子表明，反过来说，如果 $\mathfrak{n}\trianglelefteq\mathfrak{g}$ 是投射有限李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限余维指数理想，那么 $\mathfrak{g}$ 未必是局部指数的。

例15.8.22。(a) 首先，我们考虑形式有限李代数

$$\mathfrak{s}:=(\mathbb{C}\rtimes_{\alpha_n}\mathbb{R})^{\mathbb{N}},$$

其中 $\alpha_n=1+in\in\mathrm{End}(\mathbb{C})$。这意味着

$$[(z_n,t_n),(z_n',t_n')]=(t_n\alpha_n z_n'-t_n'\alpha_n' z_n,0).$$

由于所有李代数 $\mathbb{C}\rtimes_{\alpha_n}\mathbb{R}$ 根据定理15.8.10 都是指数的，因此它们的乘积 $\mathfrak{s}$也是指数的。

现在我们构造 $\mathfrak{g}:=\mathfrak{s}\rtimes_D\mathbb{R}$，其中 $D\in\mathrm{der}(\mathfrak{s})$ 定义为 $D(z_n,\ t_n)=(z_n,\ 0)$。于是

$$\mathfrak{g}\cong\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\rtimes\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0},$$

并且，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有

$$[(0,te_n-te_0),(e_n,0)]=\big((t(1+in)-t)e_n,0\big)=(itne_n,0),$$

这表明 $(e_n,\ 0)$ 是 $\frac{2\pi}{n}(0,\ e_n-e_0)$ 对应于特征值 $2\pi i$ 的特征向量。由于该序列在 $\mathfrak{g}$ 中收敛于 0，每个零邻域都包含指数函数的奇点，因此李代数 $\mathfrak{g}$不是局部指数的。

(b) 我们考虑这个原有限李代数

$$\mathfrak{g}:=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\rtimes_D\mathbb{R},$$

其中 D 通过 $De_n=ine_n$作用于 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$。那么 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 是阿贝尔的，因此是余维为 1 的指数理想，并且在每个点 $(0,\ \frac{2\pi}{n})$，算子 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 都是奇异的。因此，$\mathfrak{g}$不是局部指数的。

第15.8节注

第15.8.1小节： 在命题 15.8.8 中，我们遇到了验证某些可解巴拿赫–李群的指数映射满射性这一难题。为理解相关困难，我们考虑连通李群 G 的子集

$$E^n(G) := (\exp \mathfrak{g})^n = \{\exp X_1 \cdots \exp X_n \colon X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}\}, n \in \mathbb{N},$$

由指数函数像中的元素的 n 重乘积组成。对于有限维李群，众所周知，$G = E^1(G) = \exp \mathfrak{g}$ 对于李代数为紧或幂零的连通李群成立。但很容易找到一些可解连通李群或单李群的例子，例如 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，其指数函数并非满射（参见 [Wue03, Wue05]）。因此，一个显著的事实是，$G = E^2(G)$ 对所有连通有限维李群都成立（[MS03]），也就是说，每个元素都是两个指数的乘积。得出这一结果的关键方法是采用类似于岩泽分解的分解，这蕴含了该结论对约化李群成立。对于无限维李群，目前尚无此类一般性结果。即使是紧群的自然类比，例如实希尔伯特空间上的正交群 $\mathrm{O}(\mathcal{H})$，也可能表现出病态行为；特别是，$\mathrm{O}(\mathcal{H})$ 的指数函数不是满射（见第5章注）。

第15.8.2小节： Wojtyński 的定理 15.8.17 见于 [Woj98]，其中还指出，该定理可推出定理 15.8.18。

对于有限维李代数 $\mathfrak{g}$，交换子代数 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 总是幂零的，并且 $\operatorname{ad} x$ 对于 $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是幂零的。因此，我们可以询问巴拿赫–李代数中关于拟幂零性的类似结果。Yu. V. Turovskii 在 [Tu85] 中取得了这一方向上的一些有趣成果。特别是，他将谱半径推广到巴拿赫代数的有界子集，并在这一背景下得到了韦森蒂尼定理（定理 15.8.15）的推广。该理论的大部分内容都围绕算子巴拿赫–李代数的“三角化”展开，从而推广李定理。将可解李代数的有限维表示论推广到巴拿赫空间背景，是 D. Beltiţă 和 M. Sabac 所著专著 [BS01] 的中心主题之一。

15.9 半直积的局部指数性

一般来说，局部指数李群的半直积并非局部指数。本节将介绍若干出现这种情况的自然半直积例子。

例 15.9.1。设 E 是一个麦基完备空间，α 是对 E的光滑 $\mathbb{R}$-作用。我们考虑一个半直积李群

$$G = E \rtimes_\alpha \mathbb{R} \quad \text{with the exponential function} \quad \exp_G(v,t) = (\beta(t)v, t)$$

和 $D = \alpha'(0)$。这个群中的乘法定义为

$$(v,t)(v',t') = (v + \alpha(t)v', t + t'), \quad \text{so that} \quad T_e(\lambda_{v,t})(v',t') = (\alpha(t)v', t').$$

我们还有

$$T_{(v,t)}(\exp_G)(v',t') = (\beta(t)v' + \beta'(t)t', t').$$

因此，$\kappa_{\mathfrak{g}}(v,\ t)$ 是单射，当且仅当 $\beta(t)$ 是单射。

关系 $\exp_G(v,\ t) = \exp_G(v',\ t')$ 等价于 $t = t' \text{ and } \beta(t)(v' - v) = 0$。因此，$\exp_G$ 在某个零邻域内是单射，当且仅当 $\beta(t)$ 对充分小的 t 是单射。

根据命题 D.2.14，$\beta(t)$ 的核由以下子空间拓扑生成

$$\ker(t^2D^2 + n^2 4\pi^2 \mathbf{1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

我们用 $\mathrm{Spec}_p(D)$ 表示 D 的所有特征值组成的集合。因此，条件 $\beta(t)$ 是单射

$$\frac{-n^2 4\pi^2}{t^2} \notin \mathrm{Spec}_p(D^2), \quad \text{resp.,} \quad \frac{n2\pi i}{t} \notin \mathrm{Spec}_p(D),$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。当且仅当 $|t| \le \varepsilon$

$$\mathrm{Spec}_p(D) \cap 2\pi i\left[\varepsilon^{-1}, \infty\right[= \emptyset. \tag{15.43}$$

由于 $\exp_G^{-1}(e) = \{0\}$，元素 $x = (v,\ t) \in \mathfrak{g}$ 在 $\exp_G$ 的纤维中是孤立的，当且仅当 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$ 是单射；这等价于$\beta(t)$ 的单射性（命题 5.6.25）。

命题 15.9.2。设 G 是一个具有光滑指数映射的李群，并假设

(1)$\mathbf{L}(G)$ 是局部指数的，并且(2) 同态 $\exp_{\mathfrak{z}} := \exp_G|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}\colon \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to G$ 具有离散核。

那么存在一个0-邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$，使得$\exp_G|_U$ 是单射。

证明。设 $H \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个指数局部李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。那么对每个 $x \in H$，算子 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x) = (\kappa_H)_x$ 都是可逆的，这意味着$H \subseteq \mathrm{Reg}_p(\mathfrak{g})$。

设 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个包含 $U + U \subseteq H$ 的平衡零邻域。如果对于 $x,\ y \in U$，$\exp_G x = \exp_G y$ 成立，那么命题 5.6.25 蕴含 $x - y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$，且 $\exp_G(x-y) = e$。因此，(2) 蕴含 $\exp_G|_U$ 是单射。□

问题 15.9.3。设 G 是一个李群，其李代数 $\mathbf{L}(G)$ 是局部指数的，并且具有光滑指数映射 $\exp_G\colon \mathbf{L}(G) \to G$。同态 $\exp_Z := \exp_G|_{\mathfrak{z}(\mathbf{L}(G))}\colon \mathfrak{z}(\mathbf{L}(G)) \to G$ 的核是离散的吗?

命题 15.9.4。设 M 是一个光滑有限维流形，且$X \in \mathcal{V}(M)$是一个非零完备向量场，满足 Exp $X = \mathrm{id}_M$。那么李代数 $\mathfrak{g} := C^\infty(M, \mathbb{R}) \rtimes_{\mathcal{L}_X} \mathbb{R}$ 不是局部指数的。

证明。存在非零整数 $k \in \mathbb{Z}$ 以及 $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$，使得 $\mathcal{L}_X f = 2\pi i k f$。于是对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\mathcal{L}_X f^n = 2\pi i n k f$，因此 $(0, \frac{1}{n}) \in \mathfrak{g}$是 exp-奇异的。□

命题 15.9.5。设 (M, Ω) 是一个连通光滑有限维辛流形，且 $X \in \mathcal{V}(M, \Omega)$ 是一个非零完备辛向量场，并且 $\exp X = \mathrm{id}_M$。那么李代数 $\mathfrak{g} := \mathfrak{ham}(M, \omega) \rtimes_{\mathcal{L}_X} \mathbb{R}$ 不是局部指数的。

证明。这可由与上面相同的论证得到，因为 $\mathfrak{ham}(M, \omega) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})/\mathbb{R}\mathbf{1}$。□

问题 15.9.6。设 M是一个紧流形，$X \in \mathcal{V}(M)$ 和 $\gamma_X(t) := \exp(tX)$ 是相应的光滑 $\mathbb{R}$-作用在 M 上。这导出在 E 上的光滑作用 $\alpha := C^\infty(M, \mathbb{R})$。群 $G := E \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 何时是局部指数的?

如果 $f \in E_{\mathbb{C}}$ 是某个纯虚特征值 $i\mu$ 对应的 $\mathcal{L}_X$-特征向量，那么 $i\mu$ 的所有非零正倍数都是 $\mathcal{L}_X$ 在 $E_{\mathbb{C}}$ 上的特征值，这意味着 $E \rtimes_{\mathcal{L}_X} \mathbb{R}$ 不是局部指数的。因此，关键在于证明：如果 M 是紧群，那么导子 $\mathcal{L}_X$ 在 $E_{\mathbb{C}}$ 上总是具有一个纯虚特征值。

命题 15.9.7。如果 $\mathfrak{k}$ 是有限维李代数，那么李代数 $\mathfrak{g} := C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{k}) \rtimes_D \mathbb{R}$（其中 $Df = f'$）不是局部指数的。

证明。对于 $x \in \mathfrak{k}$，考虑由 $\xi(t) := \cos(\omega t)x$ 定义的 $\xi \in \mathfrak{g}$。于是

$$D^2\xi = -\omega^2\xi,$$

因此，根据例 15.9.1 中的讨论，断言得证。 □

例 15.9.8。如果 $\mathbb{R}$ 在环面 $\mathbb{T}^n$ 上“线性地”作用，并且具有稠密轨道，那么 $\mathbb{R}$ 在 $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ 上的表示可延拓为环面 $\mathbb{T}^n$ 的表示，这意味着存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$，使得子群

$$\Gamma := \mathbb{Z}\lambda_1 + \ldots + \mathbb{Z}\lambda_n$$

$\mathbb{R}$ 的秩为 n，且 $i\Gamma$ 是 $\mathcal{L}_X$ 在 $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$ 上的特征值集合。

A 点集拓扑工具

我们假设读者熟悉拓扑学最基本的概念，例如邻域（不一定是开邻域）的概念、映射的连续性以及紧致性。在本附录中，我们汇集了与本书目的相关的其他拓扑概念和结果。A.1 至 A.6 节对于本书的许多部分都很重要，既涉及理论，也涉及例子。关于直极限的 A.7 节仅用于特定例子（例如有限维李群的递增并），以及一种相关的泛函分析工具（命题 B.13.13）。

A.1 网

网的概念是序列概念的推广。对于度量空间中的拓扑问题，通常可以用序列的语言来表述；而要处理任意拓扑空间，则必须使用更一般的网的概念。

定义 A.1.1. 回忆一下，有向集 是一个非空偏序集 $(A, \leq)$，满足对于所有 $\alpha, \beta \in A$，都存在 $\gamma \in A$ 使得 $\alpha, \beta \leq \gamma$。

注 A.1.2. 如果 $(A, \leq)$ 是一个有向集，且 $F \subseteq A$ 是一个有限子集，那么存在 $\beta \in A$，使得对所有 $\alpha \in F$都有 $\alpha \leq \beta$；这一点可由简单的归纳法证明。

定义 A.1.3.集合 X 中的一个网是元素 X的一个族 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$，其中 $(A, \leq)$ 是一个有向集。

例 A.1.4. $(\mathbb{N}, \leq)$ 是一个有向集；由给定集合 X中的元素构成的每个序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $x_n \in X$，都是一个网。

因此，网是序列的推广，它通过用更一般的有向集替代 $\mathbb{N}$ 得到。推广序列收敛的定义，可如下定义网的收敛：

定义 A.1.5。拓扑空间 X 中的网 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ 称为<投入收敛到一个元素 $x \in X$（此时记作 $x_\alpha \to x$），如果对于 x的每个邻域 U，都存在 $\alpha \in A$ 使得

$$x_\beta \in U \quad \text{for all } \beta \in A \text{ such that } \beta \geq \alpha.$$

如果 X 是豪斯多夫的（即，如果 X 中的所有元素 $x \neq y$ 都有互不相交的邻域），那么网 (x_α) 在 X 中至多收敛到一个点 $x \in X$。

拓扑空间中的邻域滤子是有向集的重要例子。我们回顾相关定义。

定义 A.1.6。集合 $\mathcal{F}$ 若由集合 X 的若干子集组成，且满足以下条件，则称为滤子：

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$；(F2) $U \in \mathcal{F}$ 和 $U \subseteq V \subseteq X$ 推出 $V \in \mathcal{F}$；并且 (F3) 对所有 $U, V \in \mathcal{F}$，均有 $U \cap V \in \mathcal{F}$。

定义 A.1.7。若 X 是一个拓扑空间，且 $x \in X$，则 X 中 x 的所有（不一定是开集的）邻域组成的集合$\mathcal{U}_x(X)$称为 x的邻域滤子 。 x 的邻域集合 $\mathcal{B}$ 若满足每个 x 的邻域都包含某个 $U \in \mathcal{B}$，则称为基x-邻域 的基。

显然， $\mathcal{U}_x(X)$ 是一个滤子。

引理 A.1.8. 邻域滤子 $\mathcal{U}_x(X)$ 在逆包含下构成有向集，即在由 $U \leq V :\Leftrightarrow V \subseteq U$ 定义的偏序下构成有向集。

证明。显然，“$\leq$”是 $\mathcal{U}_x(X)$ 上的偏序。如果 U， $V \in \mathcal{U}_x(X)$，那么 $W := U \cap V \in \mathcal{U}_x(X)$ 且 $W \subseteq U$， V，因此 U， $V \leq W$。此外，由于 $\mathcal{U}_x(X)$ 非空（因为 $X \in \mathcal{U}_x(X)$），我们可知 $(\mathcal{U}_x(X)\ \leq)$ 是一个有向集。□

以下是网在拓扑中的两个典型应用。

命题 A.1.9。设 X、 Y 是拓扑空间， $f\colon\ X \to Y$ 是一个映射，且 $x \in X$。那么 f 在 x 处连续，当且仅当对于 X 中收敛到 x 的每个网 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ，都有 $f(x_\alpha) \to f(x)$。

证明。若 f 在 x处连续，设 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ 是一个收敛于 x 的网，且 X 。若 U是 f（x）的一个邻域，则 f^{-1}（U）是 x的一个邻域；由于$x_\alpha \to x$，存在 $\alpha \in A$，使得对于所有 $\beta \geq \alpha$，都有 $x_\beta \in f^{-1}$（U）。因此，对于所有 $\beta \geq \alpha$，都有 f（x_β）$\in U$。我们已证明 f（x_α）$\to f$（x）。

反之，若 f在 x处不连续，则可找到 Y中 f（x）的一个邻域 U，使得 f^{-1}（U）不是 X中 x的邻域。因此，对于 X中 x的每个邻域 V，都有 $V \not\subseteq f^{-1}$（U），由此存在 $x_V \in V$，使得 f（x_V）$\notin U$。按照引理 A.1.8，将 $\mathcal{U}_x$（X）视为一个有向集，则 $(x_V)_{V \in \mathcal{U}_x}$（$x$）成为 X中的一个网；显然 $x_V \to x$，因为给定任意 $W \in \mathcal{U}_x$（X），对于所有 $V \geq W$，都有 $x_V \in V \subseteq W$。由于对于所有 V，都有 f（x_V）$\notin U$，网 $(f$（x_V）$)_{V \in \mathcal{U}_x}$（x）不收敛于 f（x）。证明完毕。□

命题 A.1.10。设 X 是一个拓扑空间， M 是 X的一个子集，且$x \in X$。那么 $x \in \overline{M}$（ M的闭包）当且仅当存在一个网（x_α）$_{\alpha \in A}$，它在 M 中收敛到 X中的 x 。

证明。设 $x \in \overline{M}$。对于 x 在 X中的每个邻域 U，都存在一个元素 $x_U \in U \cap M$。那么 $(x_U)_{U\in\mathcal{U}_x(X)}$ 是 M中的一个网，显然收敛到 X中的 x。

反过来，令 $x \in X$ 并假设存在一个网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$，它位于 M 中并收敛到 x。那么，对每个 x 的邻域 U，都存在 $\beta \in A$，使得对于所有 $\alpha \geq \beta$，都有 $x_\alpha \in U$。特别地，$x_\beta \in U$。由于 $x_\beta \in M$，我们有$U \cap M \neq \emptyset$。这意味着 $x \in M$。□

定义 A.1.11. 设 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是集合 X 中的一个网，其中 $(A, \leq)$ 是一个有向集。$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 的一个子网 是形如 $(x_{f(j)})_{j\in J}$ 的网，其中 $(J, \leq)$ 是一个有向集，且 $f\colon J \to A$ 是一个单调映射，具有如下性质：对每个 $\alpha \in A$，都存在 $j_0 \in J$，使得 $\alpha \leq f(j_0)$。

若网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 在拓扑空间 X 中收敛到 $x \in X$，那么 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 的每个子网也收敛到 x。

A.2 始拓扑；直积

定义 A.2.1。设 X 是一个集合，$(f_i)_{i\in I}$ 是一族映射f_i：从 $X \to Y_i$ 到拓扑空间 Y_i。那么在 X 上存在一个使每个 f_i 连续的最粗拓扑 $\mathcal{O}$；它称为相对于映射族 $(f_i)_{i\in I}$ 在 X 上的始拓扑。

事实上，形如 $\bigcap_{i\in F} f_i^{-1}(U_i)$ 的集合，其中 $F \subseteq I$ 是有限的且$U_i \subseteq Y_i$ 是开集，构成了 X 上某个拓扑 $\mathcal{O}$ 的基，并具有所需性质。为后续使用，注意到如果我们只从 Y_i 上拓扑的某个基中选取 U_i，仍然能得到 X 上拓扑的一个基。

例 A.2.2。如果 Y 是一个拓扑空间，$X \subseteq Y$ 是其子集，那么 X 上的诱导拓扑定义为相对于包含映射 $f\colon X \to Y$, $f(x) := x$ 的始拓扑。

例 A.2.3。如果 $f\colon X \to Y$ 是一个双射，且 Y 是一个拓扑空间，那么 X 上相对于 f 的始拓扑使 f 成为同胚。

例 A.2.4。设 $X := \prod_{i\in I} X_i$ 是拓扑空间族 $(X_i)_{i\in I}$ 的笛卡尔积，其典范投影为 $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_j$, $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$，其中 $j \in I$。X 上的乘积拓扑定义为 X 上相对于族 $(\mathrm{pr}_i)_{i\in I}$ 的始拓扑。我们总是为直积赋予乘积拓扑。

引理 A.2.5。设 X 赋予相对于一族映射 $(f_i)_{i\in I}$ 的始拓扑，这些映射为 $f_i\colon X \to Y_i$，其值域是拓扑空间 Y_i。则下述结论成立：

（a）设（x_α）是 X 中的一个网，且 $x \in X$。那么，$x_\alpha \to x$ 属于 X 当且仅当 f_i（x_α）$\to f_i$（x）对每个 $i \in I$ 都成立。

（b）从拓扑空间 Z 到 X 的映射 $f\colon Z \to X$ 连续，当且仅当对每个 $i \in I$，$f_i \circ f\colon Z \to Y_i$ 连续。

证明。(a) 若 $x_\alpha \to x$，则由 f_i 的连续性可得 $f_i(x_\alpha) \to f_i(x)$。反之，假设对每个 $i \in I$，都有 $f_i(x_\alpha) \to f_i(x)$。x 的每个邻域都包含形如 $V := \bigcap_{i\in F} f_i^{-1}(U_i)$ 的邻域，其中 $F \subseteq I$ 是有限集，且 $U_i \subseteq Y_i$ 是 $f_i(x)$ 的一个开邻域。对每个 $i \in I$，存在 α_i，使得对所有 $\alpha \geq \alpha_i$ 都有 $f_i(x_\alpha) \in U_i$。取 β，使得对每个 $i \in F$ 都有 $\beta \geq \alpha_i$。于是对所有 $\alpha \geq \beta$ 都有 $x_\alpha \in V$。因此 $x_\alpha \to x$。

(b) 若 $x_\alpha \to x$ 属于 Z，则由 (a) 可知，$f(x_\alpha) \to f(x)$ 当且仅当对所有 $i \in I$，都有 $f_i(f(x_\alpha)) \to f_i(f(x))$。根据命题 A.1.9，结论成立。□

将引理 A.2.5 应用于笛卡儿积，我们得到：

引理 A.2.6.设 $(X_i)_{i\in I}$ 为一拓扑空间族，且 $X := \prod_{i\in I} X_i$ 为其笛卡尔积，典范投影为 $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$。则下列结论成立：

(a) $\prod_{i\in I} X_i$ 中的网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 收敛，当且仅当对每个 $i \in I$，网 $(\mathrm{pr}_i(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ 在 X_i 中收敛。若 $\mathrm{pr}_i(x_\alpha) \to x_i$，则 $x_\alpha \to (x_i)_{i\in I}$。(b) 映射 $f\colon Z \to \prod_{i\in I} X_i$ 连续，当且仅当其所有分量 $f_i := \mathrm{pr}_i \circ f$ 均连续。□

引理 A.2.7（始拓扑的传递性）。设 $(f_i)_{i\in I}$ 为一族映射 $f_i\colon X \to Y_i$，映入拓扑空间 Y_i，其拓扑关于映射族 $(g_j)_{j\in J_i}$（映射 $g_j\colon Y_i \to Z_j$ 映入拓扑空间 Z_j）是始拓扑。令 $K := \{(i,j)\colon i \in I, j \in J_i\}$。则 X 上关于族 $(f_i)_{i\in I}$ 的始拓扑与关于 $(g_j \circ f_i)^{(i,j)\in K}$ 的始拓扑重合。

证明。两种拓扑的一个基由集合 $\bigcap_{(i,\ j)\in P} f_i^{-1}(g_j^{-1}(U_{i,\ j}))$ 构成，其中 $P \subseteq K$ 是一个有限子集，且每个 $U_{i,\ j}$ 都是 Z_j 的开子集。□

注 A.2.8。设 X 是一个集合，$(f_i)_{i\in I}$ 是一个映射族 $f_i\colon X \to Y_i$ 到拓扑空间 Y_i。引理 A.2.7 表明，关于映射族 $(f_i)_{i\in I}$ 的 X 上的始拓扑，与关于映射 $f := (f_i)_{i\in I}\colon X \to \prod_{i\in I} Y_i$ 的始拓扑相同，其分量为 $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$。

定义 A.2.9。拓扑空间之间的映射 $f\colon X \to Y$ 称为（拓扑）嵌入，如果 f 是单射，且 X 上的拓扑是关于 f 的始拓扑。

注 A.2.10。根据例 A.2.3 和引理 A.2.7，拓扑空间之间的单射映射 $f\colon X \to Y$ 是嵌入，当且仅当限制映射 $f|^{f(X)}\colon X \to f(X)$ 是同胚，其中 $f(X)$ 赋有由 Y 诱导的拓扑。

A.3 终拓扑与商映射

定义 A.3.1。设 X 是一个集合，$(f_i)_{i\in I}$ 是从拓扑空间 Y_i 到 X的映射族f_i: $Y_i \to X$。那么，在 X 上存在使每个 f_i 连续的最细拓扑 $\mathcal{O}$；它称为相对于族（）的终拓扑$_{i\in I}$。

为证明 $\mathcal{O}$存在，规定当且仅当对每个 $i \in I$， $f_i^{-1}(U)$ 在 Y_i 中是开集时，称 $U \subseteq X$为开集。于是， $\mathcal{O}$ 是 X 上具有所需性质的拓扑。

引理 A.3.2。设 X 赋予相对于映射族 $(f_i)_{i\in I}$ 的终拓扑，其中映射为 $Y_i \to X$，如定义 A.3.1所述。则从 X 到拓扑空间 Z 的映射 f: $X \to Z$ 连续，当且仅当对于每个 $i \in I$， $f \circ f_i$ 连续。

证明。 映射 f连续，当且仅当对于每个开子集 $U \subseteq Z$， $f^{-1}(U)$ 在 X中是开集。这里，当且仅当对于每个 i， $f^{-1}(U)$ 是开集时， $f_i^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ f_i)^{-1}(U)$ 是开集。对于每个 U和每个 i，后一个条件成立，当且仅当所有映射 $f \circ f_i$ 都连续。□

引理 A.3.3（终拓扑的传递性）。设$(f_i)_{i\in I}$ 是一个映射族 f_i: $Y_i \to X$，其映射从拓扑空间 Y_i 到 X，且 Y_i 上的拓扑是关于映射族$(g_j)^{j\in J_i}$ 的终拓扑，这些映射 g_j: $Z_j \to Y_i$从某些拓扑空间 Z_j 映射到 Y_i。定义 $K := \{(i, j)$: $i \in I, j \in J_i\}$。那么，关于映射族$(f_i)_{i\in I}$ 的 X 上的终拓扑 $\mathcal{S}$，与关于$(f_i \circ g_j)^{(i,j)\in K}$ 的终拓扑 $\mathcal{T}$一致。

证明。设 $U \subseteq X$。那么 $U \in \mathcal{S}$ 当且仅当 $f_i^{-1}(U)$ 在 Y_i中对每个 $i \in I$ 都是开集；这当且仅当 $g_j^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g_j)^{-1}(U)$ 在 Z_j中对每个 $j \in J_i$ 都是开集。但这一条件等价于 $U \in \mathcal{T}$。□

定义 A.3.4。 拓扑空间之间的映射 q: $X \to Q$ 称为商映射，如果 q 是满射，并且子集 $U \subseteq Q$ 在 Q 中是开集，当且仅当 $q^{-1}(U)$ 在 X中是开集。在这种情况下， Q 上的拓扑称为相对于 q的商拓扑。

注意，每个商映射都是连续的。显然，拓扑空间之间的映射 q: $X \to Q$ 是商映射，当且仅当 q 是满射，且Q 赋予相对于 q的终拓扑。因此，作为引理 A.3.2 的特殊情形，我们得到：

引理 A.3.5。 如果 q: $X \to Q$ 是一个商映射，且 f: $Q \to Y$是到拓扑空间 Y的映射，那么 f连续，当且仅当 $f \circ q$: $X \to Y$连续。□

引理 A.3.6. </style)令： $X \to Q$ 是拓扑空间之间的满连续映射。如果 f 是闭映射或开映射，那么 f 是商映射。

证明。假设 f是开映射，即对于每个开子集 $W \subseteq X$， $f(W)$ 在 Q中是开集。令 $U \subseteq Q$。如果 U是开集，那么根据 f的连续性， $f^{-1}(U)$ 是开集。如果 $f^{-1}(U) \subseteq X$是开集，那么由于 f是满射， $U = f(f^{-1}(U))$，并且该集合是开集，因为 f 是开映射。因此 f 是商映射。如果 f 是闭映射且 $A \subseteq Q$，那么根据类似的论证， $f^{-1}(A)$ 在 X 中是闭集，当且仅当 A 在 Q中是闭集。因此，在这种情况下， f 也同样是商映射。□

A.3 节习题

习题 A.3.1. 设 E 是一个拓扑空间，其拓扑相对于一族单射映射 $(f_j)_{j\in J}$ 是终拓扑 f_j: $X_j \to E$ 的定义域是拓扑空间 X_j。假设 $f_i^{-1}(f_j(X_j)) = f_i^{-1}(f_i(X_i) \cap f_j(X_j))$ 在 X_i 中是开集，并且

$$f_j^{-1} \circ f_i \colon f_i^{-1}(f_i(X_i) \cap f_j(X_j)) \to f_j^{-1}(f_i(X_i) \cap f_j(X_j))$$

对所有 i， $j \in J$ 都是同胚。

(a) 证明对于每个 $j \in J$， $f_j(X_j)$ 在 E 中是开集，并且 f_j 是到其开像 $f_j(X_j)$ 上的同胚。(b) 如果对于某个 $j \in J$， X_j 是豪斯多夫空间，证明 $\varphi(X_j)$ 是豪斯多夫空间，并且 $x \neq y$ 中的所有点在 $f_j(X_j)$ 中都有不相交开邻域 X。(c) 假设对于所有 $j \in J$， X_j 都是豪斯多夫空间，并且存在一个连续映射 $f\colon E \to M$ 到豪斯多夫空间 M，使得对于 x， $y \in E$， $f(x) = f(y)$ 蕴含 x， $y \in f_j(X_j)$ 对某个 $j \in J$ 成立。证明 E 是豪斯多夫空间。

[这些观察结果对某些向量丛的构造很有用]。

A.4 紧致性与局部紧空间

我们汇集了一些关于紧拓扑空间和局部紧空间的事实。

回忆一下，拓扑空间 K 称为紧的，如果它是豪斯多夫的，并且每个 K 的开覆盖都有有限子覆盖。因此，若 $(V_j)_{j\in J}$ 是 K 的开子集族 V_j ，满足

$$K = \bigcup_{j\in J} V_j,$$

那么存在有限子集 $F \subseteq J$ ，使得 $K = \bigcup_{j\in F} V_j$。拓扑空间 X 的子集 $K \subseteq X$ 称为紧的，如果它在诱导拓扑下是紧的。当且仅当 K 是豪斯多夫空间，并且对于每个 X 的开子集族 $(W_j)_{j\in J}$ ，满足

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J} W_j,$$

存在有限子集 $F \subseteq J$，使得 $K \subseteq \bigcup_{j\in F} W_j$。

拓扑空间的其他性质也会发挥作用。

定义 A.4.1。设 X 为一个拓扑空间。

(a) X 称为局部紧，如果 X 是豪斯多夫空间，并且每个点 $x \in X$ 的邻域 U 都包含一个紧 x-邻域。(b) 如果 X 是豪斯多夫空间，并且点$x \in X$ 的每个邻域 U 都包含一个在 X中闭的 x-邻域，则称 X 为正则。(c) 如果 X 是豪斯多夫空间，并且对于 X 的任意两个满足 $A \cap B = \emptyset$的闭子集 A 和 B，都存在 X 的开子集 U和 V，使得 $A \subseteq U$、 $B \subseteq V$和 $U \cap V = \emptyset$，则称 X 为正规。(d) 如果 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ 对 X中由紧子集 K_n 构成的序列$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 成立，则称 X 为 σ-紧。

注 A.4.2。请注意，每个局部紧拓扑空间都是正则的，因为豪斯多夫空间 X 中的紧子集在 X中是闭的。

引理 A.4.3（华莱士引理）。设 X_1 和 X_2 为拓扑空间，$K_1 \subseteq X_1$ 和 $K_2 \subseteq X_2$ 为紧子集，且 $U \subseteq X_1 \times X_2$ 为开子集，使得

$$K_1 \times K_2 \subseteq U.$$

则存在开子集 $P \subseteq X_1$ 和 $Q \subseteq X_2$，使得

$$K_1 \times K_2 \subseteq P \times Q \subseteq U.$$

证明。对于所有 $x \in K_1$ 和 $y \in K_2$，分别存在 x 和 y 的开邻域 $P_{x,\,y} \subseteq X_1$ 及 $Q_{x,\,y} \subseteq X_2$，使得

$$P_{x,y} \times Q_{x,y} \subseteq U.$$

设 $x \in X_1$。则 $(Q_{x,\,y})_{y\in K_2}$ 是 X_2 的开子集族，使得

$$K_2 \subseteq \bigcup_{y\in K_2} Q_{x,y}.$$

由于 K_2的紧致性，存在有限子集 $F_x \subseteq K_2$，使得

$$K_2 \subseteq \bigcup_{y\in F_x} Q_{x,y} =: Q_x.$$

则 $P_x := \bigcap_{y\in F_x} P_{x,\,y}$ 是 x 在 X_1 中的开邻域，使得

$$P_x \times Q_x \subseteq U.$$

现在，$(P_x)_{x\in K_1}$ 是 X_1 的开子集族，使得 $K_1 \subseteq \bigcup_{x\in K_1} P_x$。由于 K_1的紧致性，存在一个有限子集 $F \subseteq K_1$ 使得

$$K_1 \subseteq \bigcup_{x\in F} P_x =: P.$$

现在， $Q := \bigcap_{x\in F} Q_x$在 X_2和 $K_2 \subseteq Q$中是开子集。根据构造， $P \times Q \subseteq U$。□

引理 A.4.4。每个紧拓扑空间都是正规空间。

证明。 设 K 是一个紧拓扑空间；设 A 和 B 是 K的不相交闭子集。由于 K 是豪斯多夫的， $U:=\{(x,\ y)\in K\times K:\ x\neq y\}$ 是 $K\times K$的一个开子集。 A 和 B 不相交等价于 $A\times B\subseteq U$。利用华莱士引理，我们得到开子集 $P,\ Q\subseteq K$ ，使得$A\subseteq P$、 $B\subseteq Q$和 $P\times Q\subseteq U$，从而 $P\cap Q=\emptyset$。□

备注 A.4.5。在前述引理中，总可以使闭包 P 和 Q 也互不相交。事实上，若 P 和 Q_1 是 K 的互不相交的开子集，且 $A\subseteq P$ 和 $B\subseteq Q_1$，则 P（因而 P 也）包含于闭集 $K\setminus Q_1$ 中。因此， P 和 B 是互不相交的闭集，再次应用该引理，我们可找到互不相交的开子集 $P_1,\ Q\subseteq K$ ，使得 $P\subseteq P_1$ 且$B\subseteq Q$。于是 $Q\subseteq K\setminus \overline{P_1}$，从而 $Q\cap P=\emptyset$。

注 A.4.6. 若 X 是一个局部紧拓扑空间， $K\subseteq X$ 是一个紧子集，且 $U\subseteq X$ 是一个满足 $K\subseteq U$ 的开子集，那么存在一个包含 K 于其内部的紧子集 $L\subseteq U$ 。

事实上，我们可以用有限个在 U 中相对紧的开子集覆盖 K ，并将它们的闭包之并定义为 L 。

定义 A.4.7。 设 X 是一个局部紧拓扑空间。由 K_n 中 X 的紧子集组成的序列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 X 的紧耗尽，如果 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n=X$ 且对每个 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $K_n\subseteq K_{n+1}^0$ 。

引理 A.4.8。 每个 σ-紧的局部紧拓扑空间 X 都存在一个紧耗尽。

证明。 存在由 X 的紧子集组成的序列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，使得 $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$。令 $L_1:=K_1$。若已构造出 X 的紧子集 $L_1,\ .....,\ L_n$，使得对所有 $j\in\{1,\dots,n\}$ 都有 $K_j\subseteq L_j$，并且若 $j<n$，则 $L_j\subseteq L_{j+1}^0$ ，那么 $L_n\cup K_{n+1}$ 是 X 的紧子集。根据备注 A.4.6，存在 X 的一个紧子集 L_{n+1} ，使得 $L_n\cup K_{n+1}\subseteq L_{n+1}^0$。于是 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个紧耗尽。□

A.5 仿紧性

我们回顾仿紧拓扑空间的定义，并记录一些在无穷维微积分中有用的推论。

A.5.1.设 $(U_i)_{i\in I}$ 是拓扑空间 X的一个开覆盖。若子集族 $(Y_j)_{j\in J}$ 从属于 $(U_i)_{i\in I}$ ，则称之为从属于该开覆盖；也就是说，对每个 $j\in J$，都存在 $i\in I$ 使得 $Y_j\subseteq U_i$。若子集族 $(Y_j)_{j\in J}$ 满足：对每个 $x\in X$ ，都存在一个邻域 $W\subseteq X$ 使得$\{j\in J:\ Y_j\cap W\neq\emptyset\}$ 是有限的，则称该子集族为局部有限族。

定义 A.5.2. 若拓扑空间 X 是豪斯多夫空间，且满足以下性质，则称其为仿紧空间：对于每个开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$，都存在 M 的一个局部有限开覆盖 $(V_j)_{j\in J}$，它从属于 $(U_i)_{i\in I}$。

引理 A.5.3.设 X 是一个拓扑空间，且 $(A_j)_{j\in J}$ 是 X的一个局部有限子集族。那么有以下结论：

(a) 闭包族 $(A_j)_{j\in J}$ 也是局部有限的。(b) 对于每个紧子集 $K\subseteq X$，集合 $\{j\in J\colon K\cap A_j\neq\emptyset\}$ 是有限的。(c) 如果对每个 $j\in J$，A_j 在 X 中是闭的，那么 $A:=\bigcup_{j\in J}A_j$ 在 X中是闭的。

证明。 (a) 每个 $x\in X$ 都有一个开邻域 $W=W(x)$，它在 X 中满足

$$J_x:=\{j\in J\colon A_j\cap W\neq\emptyset\}$$

是有限的。对于 $j\in J\setminus J_0$，有 $\overline{A_j}\subseteq X\setminus W$。由于后一个集合是闭的，$\overline{A_j}\subseteq X\setminus W$ 成立，故 $A_j\cap W=\emptyset$。因此 $\{j\in J\colon A_j\cap W\neq\emptyset\}=J_x$是有限的。

(b) 子集 K 是紧的，因此我们可以找到 $x_1,\dots,x_n\in K$，使得

$$K\subseteq W(x_1)\cup\dots\cup W(x_n).$$

对于每个 $j\in J$，条件 $A_j\cap K\neq\emptyset$ 蕴含 $A_j\cap W(x_k)\neq\emptyset$ 对某个 $k\in\{1\dots,n\}$ 成立，因此 j 包含于有限集 $J_{x_1}\cup\dots\cup J_{x_n}$ 中。

(c) 对每个 $x\in X\setminus A$，存在一个开 x-邻域 $W\subseteq X$，使得 $J_0:=\{j\in J\colon W\cap A_j\neq\emptyset\}$ 是有限的。于是 $W\setminus A=W\setminus\bigcup_{j\in J_0}A_j$ 是 X 中的一个开 x-邻域，因此 $x\in(X\setminus A)^0$。故 $X\setminus A$ 是开的。□

每个仿紧拓扑空间都是正规的。我们只需证明：

命题 A.5.4。每个仿紧拓扑空间都是正则的。

证明。设 $x\in X$ 和 U 是 X中 x 的一个开邻域。对于每个$y\in X\setminus\{x\}$，在 X 中存在 x 的开邻域 P_y 和 y的开邻域 Q_y，它们不相交。因此，$X\setminus\{x\}=\bigcup_{y\neq x}Q_y$ 是开的，故 $\{x\}$ 在 X中是闭的。令$Q_x:=U$。由于假设 X 是仿紧的，我们可以找到一个从属于$(Q_y)_{y\in X}$的 X 的局部有限开覆盖$(V_j)_{j\in J}$。于是，对于每个 $j\in J$，存在 $x(j)\in X$ 使得 $V_j\subseteq Q_{x(j)}$。对于 J_1 中的每个 j：$=\{j\in J\colon x(j)\neq x\}$，我们有 $V_j\subseteq Q_{x(j)}$，从而 $V_j\subseteq X\setminus P_{x(j)}$，因此 $V_j\subseteq X\setminus P_{x(j)}$也成立，这就意味着$x\notin V_j$。由于$(V_j)_{j\in J_1}$ 由引理 A.5.3(a)可知是局部有限的，$A:=\bigcup_{j\in J_1}V_j$ 由引理 A.5.3(b)可知在 X 中是闭的。由于 $x\notin A$，我们看到$W:=X\setminus A$ 是 X中的一个开 x-邻域。现在 $X=U\cup\bigcup_{j\in J_1}V_j$ 意味着

$$X\setminus U\subseteq\bigcup_{j\in J_1}V_j\subseteq A,$$

由此得到 $U\supseteq X\setminus\bigcup_{j\in J_1}V_j\supseteq X\setminus A=W$。由于第二个集合在 X 中是闭的，我们可推出$W\subseteq X\setminus\bigcup_{j\in J_1}V_j\subseteq U$。□

接下来讨论局部紧空间。

引理 A.5.5。设 X 是一个局部紧拓扑空间，$A \subseteq X$ 是一个 σ-紧闭子集。那么存在紧子集 $L_j \subseteq A$ 和开子集 $O_j \subseteq X$，使得对于 $j \in \mathbb{N}$，有 $L_j \subseteq O_j$，并且满足 $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} L_j = A$，

$$O_i \cap O_j \neq \emptyset \Rightarrow |i-j| \leq 1, \quad and \tag{A.1}$$

$$L_i \cap L_j \neq \emptyset \Rightarrow |i-j| \leq 1. \tag{A.2}$$

证明。设 $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 A 的一个紧子集序列，其并为 A。那么存在 X 的一个紧子集序列 $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$，令 $K_{-1} := K_0 := \emptyset$，则有

$$K_{j-1} \subseteq K_j^0 \quad \text{and} \quad C_j \subseteq K_j$$

利用 K_j的内部 K_j^0作为 X的子集，该结论对所有 $j \in \mathbb{N}$都成立。事实上，若已为 $i \in \{0,\ldots,j-1\}$构造了 $j \in \mathbb{N}$和 K_i，那么根据注 A.4.6，紧集 $K_{j-1} \cup C_j$ 包含于 X的某个紧子集 K_j 中。现在我们定义

$$L_j := A \cap (K_j \setminus K_{j-1}^0) \text{ and } U_j := K_{j+1}^0 \setminus K_{j-2}$$

对于 $j \in \mathbb{N}$。于是 L_j 是紧的，U_j 是 X 和 $L_j \subseteq U_j$的开子集，因为$K_j \subseteq K_{j+1}^0$和 $K_{j-2} \subseteq K_{j-1}^0$。如果 $1 \leq i \leq j-2$，那么 $L_i \subseteq K_i \subseteq K_{j-2} \subseteq K_{j-1}^0$，因而 $L_i \cap L_j = \emptyset$，由此 (A.2) 成立。类似地，$1 \leq i \leq j-3$ 意味着 $U_i \subseteq K_{i+1} \subseteq K_{j-2}$，因而 $U_i \cap U_j = \emptyset$。因此，

$$(\forall i,j \in \mathbb{N})\ U_i \cap U_j \neq \emptyset \Rightarrow |i-j| \leq 2,$$

这意味着 $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$（因此 $(L_j)_{j\in\mathbb{N}}$也）在 X的开子集$U := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ 中局部有限。因此，对于每个子集 $J \subseteq \mathbb{N}_0$，$A_J := \bigcup_{j\in\mathbb{N}\setminus J} L_j$ 在 U 中是闭的。令 $O_{-1} := O_0 := \emptyset$。递归地，利用注 A.4.6，我们找到 U 的相对紧开子集 O_j（$j \in \mathbb{N}$），使得 $L_j \subseteq O_j$ 并且

$$\overline{O_j} \subseteq (U \setminus A_{\{j-1,j,j+1\}}) \setminus \bigcup_{i=-1}^{j-2} \overline{O_i}, \tag{A.3}$$

由于右端项是开集且包含 L_j。由 (A.3)，我们得到 (A.1)。 □

引理 A.5.6。每个 σ-紧局部紧空间 X 都是仿紧的。

证明。令 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 如引理 A.5.5 中所述，并应用于 $A := X$。令 $(U_i)_{i\in I}$ 为 X 的一个开覆盖。对于每个 $x \in X$，存在 $i(x) \in I$ 使得 $x \in U_{i(x)}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，这些开集

$$V_{(n,x)} := O_n \cap U_{i(x)}$$

覆盖 L_n 对于 $x \in L_n$，因此 $L_n \subseteq \bigcup_{x\in\Phi_n} V_{(n,x)}$ 对于某个有限子集 $\Phi_n \subseteq L_n$。我们定义 $J := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times \Phi_n$，并得到 X 的开覆盖 $(V_j)_{j\in J}$，它从属于 $(U_i)_{i\in I}$，因为 $V_{(n,x)} \subseteq U_{i(x)}$；且该覆盖局部有限，因为每个 $x \in X$ 都包含在某个 $n \in \mathbb{N}$ 对应的 O_n 中，而 $O_n \cap V_{(m,y)}$ 蕴含$m \in \{n-1,n,n+1\}$，其中 y属于有限集 Φ_m。 □

我们需要把拓扑和作为一种工具。

A.5.7. 设 $(X_j, \mathcal{O}_j)_{j\in J}$ 是一个拓扑空间族，使得$X_i \cap X_j = \emptyset$ 对所有 $i \neq j$ 属于 J 都成立。并集 $X := \bigcup_{j\in J} X_j$ 称为拓扑空间 X_j 的拓扑和，若它赋予关于包含映射 $\lambda_j\colon X_j \to X, x \mapsto x$ 的终拓扑。

根据习题 A.3.1，每个 X_j 在 X 中都是开集，且子集 $U \subseteq X_j$ 在 $(X_j, \mathcal{O}_j)$ 中是开集，当且仅当它在 $(X, \mathcal{O})$ 中是开集。若每个 X_j 都是豪斯多夫的，则拓扑和 X 也是如此。事实上，X_j 中不同的点可以用 X_j 中的开集分离。若 $x \in X_i$ 且 $y \in X_j$，其中 $i \neq j$，则 X_i 和 X_j 分别是 x 和 y 的不相交邻域。

命题 A.5.8。局部紧拓扑空间是仿紧的，当且仅当它是 σ-紧局部紧空间的拓扑和。

证明。如果 X 是仿紧的，那么每个 $x \in X$ 在 X中都有一个相对紧的开邻域 $U(x)$。由仿紧性，存在一个从属于 $(U(x))_{x\in X}$的局部有限开覆盖 $(V_j)_{j\in J}$，覆盖 X。于是，对于每个 $j \in J$，V_j都是相对紧的，因为对于某个 $x_j \in X$，有 $V_j \subseteq U(x_j)$。对于 $x, y \in X$，如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$，使得 $x_0 = x$、$x_n = y$，并且对于所有 $k \in \{0, \ldots, n-1\}$，存在 $j \in J$，满足

$$\{x_k, x_{k+1}\} \subseteq \overline{V_j}.$$

容易验证，$\sim$ 是 X上的一个等价关系。现在我们证明等价类 $[x]$ 在 X 中是开的（因此它们是局部紧的），并且是 σ-紧的。若 $y \in [x]$，则存在 $j \in J$ 使得 $y \in V_j$。现在，对每个 $z \in V_j$，都有 $\{y, z\} \subseteq V_j$，因此 $z \sim y$，从而 $V_j \subseteq [x]$。于是 $[x]$是 y 的一个邻域，因此是开的，因为 $y \in [x]$ 是任意的。对于 $x \in X$，令 $C_n(x)$ 表示所有 $y \in [x]$的集合；对此，我们可以像上面那样使用 $x = x_0, \ldots, x_n = y$，并取给定的 n。由引理 A.5.3(a), 族 $(\overline{V_j})_{j\in J}$ 是局部有限的，$I_1 := \{j \in J\colon x \in V_j\}$ 是有限的，因此

$$C_1(x) = \bigcup_{j\in I_1} \overline{V_j}$$

紧。如果已知对于某个有限子集 $I_n \subseteq J$，$C_n(x) = \bigcup_{j\in I_n} V_j$，那么根据引理 A.5.3 中的 (a) 和 (b)，对每个 $j \in I_n$，$J_j := \{i \in J\colon V_i \cap C_n(x) \neq \emptyset\}$ 都是有限集。令

$$I_{n+1} := \bigcup_{j\in I_n} J_j,$$

我们由此推得 $C_{n+1}(x) = \bigcup_{j\in I_{n+1}} V_j$ 是紧的。因此 $[x] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n(x)$ 是σ-紧的。

反之，如果 X 是由一族 $(X_a)_{a\in A}$ 的 σ 个紧局部紧拓扑空间作拓扑和得到的，那么根据引理 A.5.6，每个 X_a 都是仿紧的。

如果 $(U_i)_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖，那么存在一个从属于开覆盖 $(U_i\cap X_a)_{i\in I}$ 的 X_a 的局部有限开覆盖 $(V_{(a,b)})_{b\in B_a}$。令 $J:=\bigcup_{a\in A}\{a\}\times B_a$。那么 $(V_j)_{j\in J}$ 是 $X=\bigcup_{a\in A}X_a$ 的一个从属于 $(U_i)_{i\in I}$ 的局部有限开覆盖。□

我们经常知道某个映射是局部同胚。下面的定理将保证它在一个较大的开集上是同胚。

定理 A.5.9. 设 $f\colon Y\to Z$ 是拓扑空间之间的映射，且 $X\subseteq Y$ 是一个子集。我们作如下假设：

(a) f 是局部同胚；(b) $f(X)$ 在 Z 中是闭的，且 $f|_X\colon X\to f(X)$ 是同胚；(c) Z 是仿紧的。

那么存在一个开子集 $U\subseteq Y$，使得 $X\subseteq U$，并且 $f(U)$ 在 Z 中是开集，且 $f|_U\colon U\to f(U)$ 是同胚。

定理 A.5.9 的证明用到了下面这个引理，它本身也很有独立价值（参见命题 2.2.19）。

引理 A.5.10. 设 Y 和 Z 是拓扑空间，$A\subseteq Z$ 是一个闭子集，且 $(V_i)_{i\in I}$ 是 Z 的一个开子集族，其中 $A\subseteq\bigcup_{i\in I}V_i$。对每个 $i\in I$，令 $g_i\colon V_i\to Y$ 为连续函数。我们假设：

(a) 对所有 i、$j\in I$ 和 $a\in V_i\cap V_j\cap A$，存在一个开 a-邻域 $O=O(a,i,j)\subseteq V_i\cap V_j$，使得 $g_i|_O=g_j|_O$；(b) Z 是仿紧的。

那么存在一个开子集 $V\subseteq\bigcup_{i\in I}V_i$，使得 $A\subseteq V$，并且存在一个连续函数 $g\colon V\to Y$，使得每个 $x\in V$ 都有一个开邻域 $W\subseteq V$，满足对于某个 $i\in I$ 和 $g|_W=g_i|_W$，有 $W\subseteq V_i$。

证明。对于每个 $z\in A$，存在 $\iota(z)\in I$ 使得 $z\in V_{\iota(z)}$。由于 Z 是仿紧的，因而也是正则的（见命题 A.5.4），我们可以在 Z 中找到 z 的一个闭邻域 Q_z，使得 $Q_z\subseteq V_{\iota(z)}$。对于 $z\in Z\setminus A$，令 $Q_z:=Z\setminus A$。由 Z 的仿紧性可知，存在一个从属于 $((Q_z)^0)_{z\in Z}$ 的 Z 的局部有限开覆盖 $(W_j)_{j\in J}$。因此，对于每个 $j\in J$，存在 $z(j)\in Z$ 使得 $W_j\subseteq(Q_{z(j)})^0$。令 $J_0:=\{j\in J\colon z(j)\in A\}$。那么 $(W_j)_{j\in J_0}$ 是 Z 的开子集局部有限族，且 $A\subseteq\bigcup_{j\in J_0}W_j$。对于每个 $j\in J_0$，我们有

$$\overline{W_j}\subseteq Q_{z(j)}\subseteq V_{i(j)}\quad\text{with}\quad i(j):=\iota(z(j)).$$

由引理 A.5.3(a)，每个 $a\in A$ 在 Z 中都有一个开邻域 U_a，使得

$$\Phi(a):=\{j\in J_0\colon U_a\cap\overline{W_j}\neq\emptyset\}$$

是有限的。如果 $\Psi:=\{j\in\Phi(a)\colon a\overline{\notin W_j}\}\neq\emptyset$，我们可以用它的开子集替换 U_a

$$U_a \setminus \bigcup_{j\in\Psi} \overline{W_j};$$

因此，我们可以假设对所有 $j \in \Phi(a)$，$\overline{\ } a \in W_j$ 均成立。对于所有 $j,k \in \Phi(a)$，我们有 $a \in V_{i(j)} \cap V_{i(k)} \cap A$，因此 $a \in O(a, i(j)\ i(k))$；将 U_a 替换为

$$U_a \cap \bigcap_{j,k\in\Phi(a)} O(a, i(j), i(k)),$$

我们可以假设，对所有 $j,k \in \Phi(a)$，都有 $U_a \subseteq O(a, i(j)\ i(k))$。进一步缩小该集合，我们可以假设对某个 $j(a) \in J_0$ 有 $U_a \subseteq W_{j(a)}$；于是 $j(a) \in \Phi(a)$。现在

$$V := \bigcup_{a\in A} U_a$$

是 Z 的一个开子集，满足 $A \subseteq Z$ 且 g：对 $z \in U_a$，$V \to Y, z \mapsto g_{i(j(a))}(z)$ 是良定义的。事实上，若 $z \in U_a \cap U_b$，则 $z \in U_b \subseteq W_{j(b)}$，从而 $j(b) \in \Phi(a)$，因此 $U_a \subseteq O(a, i(j(a))\ i(j(b))) =: O$；故

$$g_{i(j(a))}(z) = g_{i(j(a))}|_O(z) = g_{i(j(b))}|_O(z) = g_{i(j(b))}(z).$$

值得注意的是，对每个 $a \in A$ 都有 $g|_{U_a} = g_{i(j(a)}|_{U_a}$，从而 $g|_{U_a}$ 是连续的。因此g 是连续的。□

定理 A.5.9 的证明 对于 $z \in f(X)$，存在唯一的 $x \in X$，使得 $f(x) = z$。根据假设，x 在 Y 中有一个开邻域 U_z，使得 $V_z := f(U_z)$ 在 Z 中是开集，且 $f|_{U_z}$：$U_z \to V_z$ 是一个同胚。令

$$g_z := (f|_{U_z})^{-1} : V_z \to U_z.$$

由于 $f(X \cap U_z)$ 在 $f(X)$ 中相对开，存在 Z 的一个开子集 P，使得 $f(X \cap U_z) = f(X) \cap P$。将 U_z 替换为 $U_z \cap f^{-1}(P)$ 后，我们可以假设

$$f(X) \cap V_z = f(X \cap U_z);$$

那么 $g_z|_{f(X)\cap V_z} = (f|_{X\cap U_z})^{-1} = (f|_X)^{-1}|_{f(X)\cap V_z}$。如果 $a \in f(X) \cap V_z \cap V_w$，且 $z,\ w \in f(X)$，那么 $(f|_X)^{-1}(a) \in X \cap U_z \cap U_w$。现在

$$O = O(a, z, w) := f(U_z \cap U_w) = f|_{U_z}(U_z \cap U_w)$$

是 $V_z \cap V_w$ 中的一个开 a-邻域，且 $g_z|_O = (f|_{U_z\cap U_w})^{-1} = g_w|_O$. 由引理 A.5.10，存在开子集 $V \subseteq \bigcup_{z\in f(X)} V_z$，满足 $f(X) \subseteq V$，以及连续函数 $g : V \to Y$，使得每个 $x \in V$ 都有一个开邻域 $W \subseteq V$，使得对某个 $z \in f(X)$ 与 $g|_W = g_z|_W$ 有 $W \subseteq V_z$。因此 g 是局部同胚，从而 $U := g(V)$ 在 Y 中为开的。此外，$(f \circ g)|_W = (f \circ g_z)|_W = \mathrm{id}_W$，故 $f|_U \circ g = \mathrm{id}_V$；因此映射 $f|_U : U \to V$ 与 $g : V \to U$ 是互逆的同胚。若 $x_0 \in X$，则 $x := f(x_0) \in V$ 且对如上的 W 与 z，我们有 $g(x) = g_z(x) = (f|_X)^{-1}(x) = x_0$，故 $X \subseteq U$。□

A.6 紧开拓扑

在本节中，我们给出函数空间上紧开拓扑的自成体系的引言。大多数结果是经典的，并不声称具有原创性（参见 [Bou66，第X章，§1–§3], ，例如）。然而，处理该主题的文献侧重点不同。在此，我们恰好汇集那些构成函数空间之间非线性映射及其可微性研究基础的结果。

回顾：若 X 和 Y 是豪斯多夫拓扑空间，则 $C(X,Y)$ 上的紧开拓扑 是由以下开子集构成的子基所生成的拓扑

$$\lfloor K,U\rfloor := \{\gamma \in C(X,Y)\colon \gamma(K)\subseteq U\}, \tag{A.4}$$

其中 K 遍历 X 的所有紧子集组成的集合 $\mathcal{K}(X)$，而 U遍历 Y的所有开子集组成的集合。换言之，形如 (A.4) 的集合的有限交构成了 $C(X,Y)$ 上紧开拓扑的一个基。我们总是在 $C(X,Y)$ 上赋予紧开拓扑（除非另有说明）。

注 A.6.1. $C(X,Y)$ 上的紧开拓扑使点求值

$$\mathrm{ev}_x\colon C(X,Y)\to Y,\quad \gamma\mapsto\gamma(x)$$

对每个 $x\in X$ 都连续。（如果 $U\subseteq Y$ 是开集，那么 $\mathrm{ev}_x^{-1}(U) = \lfloor\{x\},\ U\rfloor$ 在 $C(X,\ Y)$ 中是开集。）由于映射 ev_x 在 $C(X,\ Y)$ 上对 $x\in X$ 分离点，因此 $C(X,\ Y)$ 上的紧开拓扑是豪斯多夫的。

引理 A.6.2。设 X 和 Y 是豪斯多夫拓扑空间，且 $\mathcal{S}$ 是 Y 的开子集子基。那么

$$\mathcal{V} := \{\lfloor K,U\rfloor\colon K\in\mathcal{K}(X), U\in\mathcal{S}\}$$

是 $C(X,Y)$ 上紧开拓扑的子基。

证明。这些集合 $V\in\mathcal{V}$ 在紧开拓扑中都是开集。为说明 $\mathcal{V}$ 是后者的一个子基，只需证明对于每个 $K\in\mathcal{K}(X)$ 和开子集 $U\subseteq Y$，$\lfloor K,\ U\rfloor$ 在由 $\mathcal{V}$ 生成的拓扑中是开集。为验证这一点，取 $\gamma\in\lfloor K,\ U\rfloor$。对于每个 $x\in K$，存在一个有限子集 $F_x\subseteq\mathcal{S}$，使得

$$\gamma(x)\in\bigcap_{S\in F_x} S\subseteq U.$$

令 $S_x := \bigcap_{S\in F_x} S$。由于 K 是紧的，因此也是局部紧的，每个 $x\in K$ 在 K 中都有一个紧邻域 $K_x\subseteq\gamma^{-1}(S_x)$。由紧致性可知，存在一个有限子集 $\Phi\subseteq K$，使得 $K=\bigcup_{x\in\Phi}K_x^0$（其中 K_x^0 表示 K_x 关于 K 的内部）。于是 $V:=\bigcap_{x\in\Phi}\lfloor K_x,\ S_x\rfloor=\bigcap_{x\in\Phi}\bigcap_{S\in F_x}\lfloor K_x,\ S\rfloor$ 是由 $\mathcal{V}$ 生成的拓扑中的开集，并且 $V\subseteq\lfloor K,\ U\rfloor$。事实上，令 $\gamma\in V$。对每个 $y\in K$，都存在 $x\in\Phi$ 使得 $y\in K_x$。因此 $\gamma(y)\in\gamma(K_x)\subseteq S_x\subseteq U$，从而 $\gamma\in\lfloor K,\ U\rfloor$。□

形如 $C(X,\ f)$ 的函数空间之间的映射（所谓的叠加算子）经常被使用。

引理 A.6.3.设 X、 Y_1 和 Y_2 均为豪斯多夫拓扑空间。若映射$f\colon\ Y_1 \to Y_2$ 连续，则下列映射也连续：

$$C(X,f)\colon C(X,Y_1) \to C(X,Y_2),\quad \gamma \mapsto f\circ\gamma\,.$$

证明。 若子基开子集的原像都是开集，则映射 $C(X,f)$连续。为此，设 $K \in \mathcal{K}(X)$ 和 $U \subseteq Y_2$ 是开集。那么$C(X,f)^{-1}(\lfloor K,U\rfloor) = \lfloor K,f^{-1}(U)\rfloor$ 确实是 $C(X,Y_1)$中的开集。□

引理 A.6.4.设 X 和 Y 是豪斯多夫拓扑空间。假设 Y 上的拓扑是关于一族映射$(f_j)_{j\in J}$ $f_j\colon\ Y \to Y_j$ 到豪斯多夫拓扑空间 Y_j的初始拓扑。那么 $C(X,Y)$ 上的紧开拓扑是关于映射族$(C(X,f_j))_{j\in J}$ $C(X,f_j)\colon\ C(X,Y) \to C(X,Y_j)$的初始拓扑。

证明。令 $\mathcal{S}$ 为 Y 的所有形如 $f_j^{-1}(W)$ 的子集构成的集合，其中 $j \in J$，且 W 是 Y_j 的一个开子集。根据假设， $\mathcal{S}$ 是 Y 的拓扑的一个子基。因此，由引理 A.6.2 可知，集合 $\lfloor K、\ f_j^{-1}(W)\rfloor$ 构成 $C(X,Y)$ 上紧开拓扑的一个子基，其中 j、W 如前，且 $K \in \mathcal{K}(X)$。但是，$\lfloor K、\ f_j^{-1}(W)\rfloor = C(X,f_j)^{-1}(\lfloor K,W\rfloor)$（因为 $\gamma(K) \subseteq f_j^{-1}(W)$ 等价于 $f_j(\gamma(K)) \subseteq W$，而这又等价于 $(f_j\circ\gamma)(K) \subseteq W$），并且这些集合构成关于族 $(C(X,f_j))_{j\in J}$ 的 $C(X,Y)$ 上始拓扑的一个子基。□

我们提及引理 A.6.4 的三个推论。

引理 A.6.5. 若 X 是豪斯多夫拓扑空间，且 $f\colon\ Y_1 \to Y_2$ 是豪斯多夫拓扑空间之间的拓扑嵌入，则映射$C(X,f)\colon\ C(X,Y_1) \to C(X,Y_2)$ 也是拓扑嵌入。

证明。 由于 f是单射， $C(X,f)$ 也是单射。根据假设， Y_1上的拓扑是关于 f的初始拓扑。因此， $C(X,Y_1)$ 上的拓扑是关于 $C(X,f)$ 的初始拓扑（由引理 A.6.4）。由此，单射映射 $C(X,f)$ 是拓扑嵌入。□

注 A.6.6.特别地，若 X 和 Y_2 是豪斯多夫拓扑空间，且 $Y_1 \subseteq Y_2$ 是一个赋予诱导拓扑的子集，那么 $C(X,Y_2)$ 在 $C(X,Y_1)$ 上诱导的拓扑与 $C(X,Y_1)$ 上的紧开拓扑一致。

Next, we deduce that $C(X,\prod_{j\in J}Y_j) = \prod_{j\in J}C(X,Y_j)$.

引理 A.6.7. 设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间，且 $(Y_j)_{j\in J}$ 是由豪斯多夫拓扑空间组成的一个族，其笛卡尔积 $Y := \prod_{j\in J}Y_j$ (赋予乘积拓扑)，并配有投影 $\mathrm{pr}_j\colon\ Y \to Y_j$。则自然映射

$$\Phi := (C(X, \mathrm{pr}_j))_{j\in J} \colon C(X,Y) \to \prod_{j\in J} C(X, Y_j)$$

是一个同胚。

证明。 映射 Φ 是一个双射，因为映射 $f\colon X \to Y$ 连续，当且仅当它的所有分量 $\mathrm{pr}_j \circ f$ 都连续。由于 Y 上的拓扑是关于族 $(\mathrm{pr}_j)_{j\in J}$ 的始拓扑，$C(X, Y)$ 上的拓扑是关于族 $(C(X,\mathrm{pr}_j))_{j\in J}$ 的始拓扑（引理 A.6.4）。因此，Φ 是一个拓扑嵌入，进而是一个同胚（因为它是双射）。□

It is often useful that $C(X, \varprojlim Y_j) = \varprojlim C(X, Y_j)$.

引理 *A.6.8.* 设 $(J, \leq)$ 是一个有向集，$((Y_j)_{j\in J}, (\varphi_{j,k})_{j\leq k})$ 是由豪斯多夫拓扑空间构成的一个射影系统[1]，Y 是其射影极限，极限映射为 $\varphi_j\colon Y \to Y_j$。那么拓扑空间 $C(X, Y)$ 是 $((C(X, Y_j))_{j\in J}, (C(X, \varphi_{j,k}))_{j\leq k})$ 的射影极限，并配有极限映射 $C(X, \varphi_j)\colon C(X, Y) \to C(X, Y_j)$。

证明。 令 $P := \prod_{j\in J} Y_j$，并令 $\mathrm{pr}_j\colon P \to Y_j$ 为到第 j 个分量的投影。映射

$$\varphi := (\varphi_j)_{j\in J} \colon Y \to P$$

是一个拓扑嵌入，其像为

$$\varphi(Y) = \{(x_j)_{j\in J} \in P \colon (\forall j, k \in J)\ j \leq k \Rightarrow x_j = \varphi_{j,k}(x_k)\}.$$

因此，$C(X, \varphi)$ 是一个拓扑嵌入（见引理 A.6.5），因而

$$\Phi \circ C(X, \varphi) \colon C(X, Y) \to \prod_{j\in J} C(X, Y_j),$$

利用引理 A.6.7 中的同胚 $\Phi := (C(X, \mathrm{pr}_j))_{j\in J}\colon C(X, P) \to \prod_{j\in J} C(X, Y_j)$。$\Phi \circ C(X, \varphi)$ 的像包含于射影极限

$$L := \left\{(f_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} C(X, Y_j) \colon (\forall j, k \in J)\ j \leq k \Rightarrow f_j = \varphi_{j,k} \circ f_k\right\}$$

空间 $C(X, Y_j)$ 中。若 $(f_j)_{j\in J} \in L$ 且 $x \in X$，则对所有 $j \leq k$，有 $\varphi_{j,k}(f_k(x)) = f_j(x)$，故存在 $f(x) \in Y$，使得 $\varphi_j(f(x)) = f_j(x)$。由于 Y 上的拓扑是相对于映射 φ_j 的初始拓扑，由映射 $\varphi_j \circ f = f_j$ 的连续性可推出 $f\colon X \to Y$ 连续。现在 $(\Phi \circ C(X, \varphi))(f) = (f_j)_{j\in J}$。因此，$\Phi \circ C(X, \varphi)$ 是从 $C(X, Y)$ 到 L 的同胚，断言得证。□

[1] 因此 $\varphi_{j,\,k}\colon Y_k \to Y_j$ 是一个连续映射，对任意 $j,\ k \in J$，满足 $j \leq k$，其中 $\varphi_{j,\,j} = \mathrm{id}^{Y_j}$ 且 $\varphi_{j,\,k} \circ \varphi_{k,\,\ell} = \varphi_{j,\,\ell}$ 若 $j \leq k \leq \ell$。

此外，复合算子（或拉回） $C(f,\ Y)$ 是重要工具。

引理 A.6.9。设 X_1、 X_2 和 Y 为豪斯多夫拓扑空间。若映射$f\colon\ X_1 \to X_2$ 连续，则映射

$$C(f,Y)\colon C(X_2,Y) \to C(X_1,Y),\quad \gamma \mapsto \gamma \circ f$$

也是连续的。

证明。若 $K \subseteq X_1$ 是紧的，且 $U \subseteq Y$ 是开子集，则 $f(K) \subseteq X_2$是紧的，并且 $C(f,Y)^{-1}(\lfloor K,U\rfloor) = \lfloor f(K)\ U\rfloor$，因为$(\gamma \circ f)(K) \subseteq U$等价于 $\gamma(f(K)) \subseteq U$，其中 $\gamma \in C(X_2,Y)$。□

备注 A.6.10。若 X_2 和 Y是豪斯多夫拓扑空间，且 $X_1 \subseteq X_2$是一个子集，则限制映射

$$\rho\colon C(X_2,Y) \to C(X_1,Y),\quad \gamma \mapsto \gamma|_{X_1}$$

是连续的。事实上，由于 $\gamma|_{X_1} = \gamma \circ f$ 通过连续包含映射$f\colon\ X_1 \to X_2$, $x \mapsto x$，我们有 $\rho = C(f,Y)$，因此引理 A.6.9 适用。

引理 A.6.11。设 X 和 Y 是豪斯多夫拓扑空间，且 $(X_j)^{j\in J}$ 是 X 的一个子集族，其内部 X_j^0 覆盖 X。那么映射

$$\rho\colon C(X,Y) \to \prod_{j\in J} C(X_j,Y),\quad \gamma \mapsto (\gamma|_{X_j})_{j\in J}$$

是像为闭集的拓扑嵌入。

证明。显然，映射 ρ 是单射；根据前面的注，由于它的每个分量都是连续的，因此该映射连续。 ρ 的像由所有满足下列条件的 $(\gamma_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} C(X_j,Y)$ 构成:

$$(\forall j,k \in J)\,(\forall x \in X_j \cap X_k)\quad \gamma_j(x) = \gamma_k(x)\,.$$

若 $x \in X_j \cap X_k$，则点求值 $\mathrm{ev}_x\colon\ C(X_j,Y) \to Y$ 以及 $C(X_k,Y)$ 上相应的点求值映射均连续。由于 Y 是豪斯多夫空间（因此对角线在 $Y \times Y$ 中是闭集），可知 $\mathrm{im}(\rho)$ 是闭集。由于 ρ 是单射，若它将子基中的元素映为相对开子集，就会成为到其像上的开映射。为验证这一性质，设 $K \subseteq X$ 为紧集， $U \subseteq Y$ 为开集。每个 $x \in K$ 都包含在某个 $j_x \in J$ 的内部 $X_{j_x}^0$ 中（相对于 X）。由于 K 是局部紧的， x 在 K 中有一个紧邻域 K_x，使得 $K_x \subseteq X_{j_x}^0$。由紧致性，存在有限子集 $\Phi \subseteq K$，使得 $K = \bigcup_{x\in\Phi} K_x$。于是，对于所有 $x \in \Phi$， $W_x := \lfloor K_x,\ U\rfloor \subseteq C(X_{j_x},U)$ 是 $C(X_{j_x},Y)$ 的开子集。因此

$$W := \Big\{(\gamma_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} C(X_j,Y)\colon\ (\forall x \in \Phi)\ \gamma_{j_x} \in W_x\Big\}$$

在 $\prod_{j\in J} C(X_j,Y)$ 中是开的。由于 $\rho(\lfloor K,U\rfloor) = W \cap \mathrm{im}(\rho)$，我们看到 $\rho(\lfloor K,U\rfloor)$ 在 $\mathrm{im}(\rho)$ 中是相对开的，由此完成证明。□

引理 A.6.12。如果 X 是局部紧空间，且 Y 是豪斯多夫拓扑空间，那么求值映射

$$\varepsilon\colon C(X,Y)\times X\to Y,\quad (\gamma,x)\mapsto\gamma(x)$$

是连续的。

证明。设 $U\subseteq Y$为开集，且 $(\gamma,x)\in\varepsilon^{-1}(U)$。由局部紧致性，存在 x 的一个紧邻域 $K\subseteq X$，使得 $K\subseteq\gamma^{-1}(U)$。于是$\lfloor K,U\rfloor\times K$是 $C(X,Y)\times X$中 (γ,x) 的一个邻域，且 $\lfloor K,U\rfloor\times K\subseteq\varepsilon^{-1}(U)$。因此，$\varepsilon^{-1}(U)$ 是开的，从而 ε是连续的。□

引理 A.6.13。设 X、Y 与 Z 为豪斯多夫拓扑空间。若 Y 是局部紧的，则复合映射

$$\Gamma\colon C(Y,Z)\times C(X,Y)\to C(X,Z),\quad (\gamma,\eta)\mapsto\gamma\circ\eta$$

是连续的。

证明。设 $K\subseteq X$ 为紧的，且 $U\subseteq Z$ 为开子集。设 $(\gamma,\eta)\in\Gamma^{-1}(\lfloor K,U\rfloor)$。对每个 $x\in K$，在 Y 中存在 $\eta(x)$ 的紧邻域 L_x，使得 $L_x\subseteq\gamma^{-1}(U)$。我们在 Y 中选取 $\eta(x)$ 的紧邻域 M_x，使得 $M_x\subseteq L_x^0$。于是 $K_x:=K\cap\eta^{-1}(M_x)$ 是 x 在 K 中的紧邻域。因此，存在有限子集 $\Phi\subseteq K$，使得 $K=\bigcup_{x\in\Phi}K_x$。于是 $W:=\bigcap_{x\in\Phi}\lfloor K_x,L_x^0\rfloor$ 是 η 在 $C(X,Y)$ 中的开邻域，且 $V:=\bigcap_{x\in\Phi}\lfloor L_x,U\rfloor$ 是 γ 在 $C(Y,Z)$ 中的开邻域。我们断言 $V\times W\subseteq\Gamma^{-1}(\lfloor K,U\rfloor)$。若此为真，则 $\Gamma^{-1}(U)$ 是开的，从而 Γ 是连续的。为证明该断言，设 $\sigma\in V$ 与 $\tau\in W$。若 $y\in K$，则对某个 $x\in\Phi$ 有 $y\in K_x$。因此 $\tau(y)\in\tau(K_x)\subseteq L_x^0$，从而 $\sigma(\tau(y))\in\sigma(L_x)\subseteq U$，这表明 $\sigma\circ\tau\in\lfloor K,U\rfloor$ 确实成立。□

引理 A.6.14。设 X 和 Y 是豪斯多夫拓扑空间，$\mathcal{L}$ 是 X的紧子集集。假设对于每个紧子集 $K\subseteq X$和开子集 $V\subseteq X$，若 $K\subseteq V$，则存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $K_1,\ldots,K_n\in\mathcal{L}$，使得 $K\subseteq\bigcup_{i=1}^n K_i\subseteq V$。那么这些集合

$$\lfloor K,U\rfloor,\quad \textit{for } K\in\mathcal{L} \textit{ and open subsets } U\subseteq Y,$$

构成 C（X,Y）上紧开拓扑的一个基。

证明。给定紧子集 $K\subseteq X$ 和开子集 $U\subseteq Y$，令$\gamma\in\lfloor K,U\rfloor$。那么 $V:=\gamma^{-1}(U)$ 是 X的一个开子集，且包含 K，因此我们可以找到假设中所述的 $K_1,\ldots,K_n\in\mathcal{L}$。于是$\gamma\in\bigcap_{i=1}^n\lfloor K_i,U\rfloor\subseteq\lfloor K,U\rfloor$。断言得证。□

注 A.6.15.（a）回忆一下，拓扑空间 X 称为 k-空间，如果 X 是豪斯多夫空间，并且其拓扑是关于包含映射$K\to X$的终拓扑，其中 K 遍历 X的紧子集集合 $\mathcal{K}(X)$。更

明确地说，这意味着子集 $A \subseteq X$ 是闭集，当且仅当对于每个 $K \in \mathcal{K}(X)$，$A \cap K$都是闭集。或者等价地，子集 $U \subseteq X$ 是开集，当且仅当对于每个 $K \in \mathcal{K}(X)$，$U \cap K$ 在 K 中是（相对）开集。豪斯多夫空间是 k-空间，当且仅当映射 $f\colon X \to Y$从 X 到拓扑空间 Y 连续，当且仅当对每个紧子集 $K \subseteq X$，$f|_K$ 都连续（见习题 A.6.2）。

(b) 如果拓扑空间 X 满足 X 是豪斯多夫空间，且其拓扑是相对于 $C(X, \mathbb{R})$ 的初始拓扑，其中该集合由 X 上所有连续实值函数组成，那么称 X 为**完全正则**。容易看出，每个局部凸拓扑向量空间都是完全正则的（习题 A.6.3）。我们提到，更一般地，每个豪斯多夫拓扑群都是完全正则的（参见 [HR79，定理 8.4]）。

(c) 如果拓扑空间 X 满足 X 是豪斯多夫空间，且 X 上的实值函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 连续当且仅当其在每个紧子集 $K \subseteq X$ 上的限制 $f|_K$ 连续，那么称 X 为 $k_{\mathbb{R}}$-**空间**。如果 X 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间，那么从 X 到完全正则拓扑空间 Y 的映射 $f\colon X \to Y$ 连续，当且仅当其在每个紧子集 $K \subseteq X$ 上的限制 $f|_K$ 连续（根据 (b)，这可由引理 A.2.5(b) 清楚地看出）。

注 A.6.16.(a) 特别要注意，每个 k-空间都是 $k_{\mathbb{R}}$-空间。对于任意基数至少与 $\mathbb{R}$ 相等的不可数集 I，实直线的 $X := \mathbb{R}^I$ （带有乘积拓扑）是一个 $k_{\mathbb{R}}$- 空间（见 [Nb70]，或也见 [GM20]），但不是 k-空间。事实上，$(X, +)$ 有一个非离散的闭子群 A，使得 A 的每个紧子集都是有限的（参见 [FHS17]）。如果 X 是一个 k- 空间，那么闭子集 A 也将是一个 k- 空间（见习题 A.6.5 ）。因此 A 将是离散的（因为 A 的每个紧子集都是有限的，因而是一个离散拓扑空间），矛盾。

(b) 如果 X 和 Y 是 k-空间，那么乘积拓扑未必使 $X \times Y$ 成为 k-空间（反例见习题 A.7.4）。

命题 A.6.17。设 X、Y 和 Z 是豪斯多夫拓扑空间。若$f\colon X \times Y \to Z$ 连续，则

$$f^\vee\colon X \to C(Y, Z), \quad f^\vee(x) := f(x, \cdot) \tag{A.5}$$

连续。此外，映射

$$\Phi\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z)), \quad f \mapsto f^\vee \tag{A.6}$$

是拓扑嵌入。若 Y 局部紧，或 $X \times Y$ 是一个 k-空间，或$X \times Y$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间且 Z 完全正则，则 Φ 是同胚。

证明。令 $\gamma \in C(X \times Y, Z)$。为证明 $\gamma^\vee$ 连续，取 $K \subseteq Y$为紧集，$U \subseteq Z$为开子集。若 $x \in X$使得 $\gamma^\vee(x) \in \lfloor K, U \rfloor$，则 $\gamma(\{x\} \times K) \subseteq U$，因此紧集的乘积 $\{x\} \times K$ 是

包含于开子集 $\gamma^{-1}(U)$ 中。根据华莱士引理 A.4.3，存在一个开子集 $V \subseteq X$，使得 $\{x\} \subseteq V$ 且 $V \times K \subseteq \gamma^{-1}(U)$。于是 $V \subseteq (\gamma^\vee)^{-1}(\lfloor K, U \rfloor)$，这表明 $(\gamma^\vee)^{-1}(\lfloor K, U \rfloor)$ 是 x 的一个邻域，因此是开的（因为 x 是任意的）。因此 $\gamma^\vee$ 连续。

为证明 Φ 连续，回想一下，集合 $\lfloor L, U \rfloor$，其中 $L \in \mathcal{K}(Y)$ 且 $U \subseteq Z$ 为开子集，构成了 $C(Y, Z)$ 上紧开拓扑的一个子基。因此，由引理 A.6.2 可知，集合 $\lfloor K, \lfloor L, U \rfloor \rfloor$ 构成了 $C(X, C(Y, Z))$ 上紧开拓扑的一个子基，其中 L 和 U 同前，且 $K \in \mathcal{K}(X)$。显然，我们有

$$\Phi^{-1}(\lfloor K, \lfloor L, U \rfloor \rfloor) = \lfloor K \times L, U \rfloor, \tag{A.7}$$

因此 Φ 连续。由于 Φ （显然）是单射，若它将子基中的开子集映为相对开子集，则它到其像上的开映射。令 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}(X \times Y)$ 为所有乘积 $K \times L$ 构成的集合，其中 $K \in \mathcal{K}(X)$ 且 $L \in \mathcal{K}(Y)$。我们断言， $\mathcal{L}$ 满足引理 A.6.14 的假设（对于函数空间 $C(X \times Y, Z)$）。若确实如此，则集合 $\lfloor K \times L, U \rfloor$，其中 $K \in \mathcal{K}(X)$ 且 $L \in \mathcal{K}(Y)$，构成了 $C(X \times Y, Z)$ 上紧开拓扑的一个子基；此时由 (A.7) 可知， Φ 到其像上的开映射（因而是拓扑嵌入）。

为验证该断言，令 $\pi_1 \colon X \times Y \to X$ 和 $\pi_2 \colon X \times Y \to Y$ 分别为到第一分量和第二分量的投影。若 $M \subseteq X \times Y$ 是紧集，且 $V \subseteq X \times Y$ 是一个开子集，使得 $K \subseteq V$，则 $M \subseteq M_1 \times M_2$，其中 $M_1 := \pi_1(M)$ 和 $M_2 := \pi_2(M)$ 是紧集。对于每个 $(x, y) \in M$，存在 $U_{x,y} \subseteq X$，它们分别是 x 的开邻域和 y 的开邻域，使得 $U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq V$。由于 M_1 和 M_2 是局部紧的，存在紧邻域 $K_{x,y} \subseteq M_1$ 分别属于 x 和 $L_{x,y} \subseteq M_2$ 属于 y，使得 $K_{x,y} \subseteq U_{x,y}$ 以及 $L_{x,y} \subseteq V_{x,y}$。然后

$$K_{x,y} \times L_{x,y} \subseteq U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq V.$$

由紧致性可知， K 被有限多个集合 $K_{x,y} \times L_{x,y}$ 覆盖。因此，引理 A.6.14 的所有假设确实都满足。

现在假设 Y 是局部紧的。令 $\eta \in C(X, C(Y, Z))$。由于根据引理 A.6.12，求值映射 $\varepsilon \colon C(Y, Z) \times Y \to Z$ 是连续的，因此映射 $\gamma := \eta^\wedge := \varepsilon \circ (\eta \times \mathrm{id}_Y) \colon X \times Y \to Z, (x, y) \mapsto \eta(x)(y)$ 是连续的。由于 $\Phi(\gamma) = (\eta^\wedge)^\vee = \eta$，可知 Φ 是满射，因此（作为嵌入）是一个同胚。

最后，假设 $X \times Y$ 是一个 k-空间（或者， $X \times Y$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间，且 Z 完全正则）。同样，我们只需证明 Φ 是满射。取 $\eta \in C(X, C(Y, Z))$，并定义 $\gamma := \eta^\wedge \colon X \times Y \to Z, (x, y) \mapsto \eta(x)(y)$。如果能证明 γ 连续，那么 $\Phi(\gamma) = \eta$ （如所需）。由于 $X \times Y$ 是一个 k- 空间（或者， $X \times Y$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$- 空间，且 Z 完全正则），只需证明对每个紧子集 $K \subseteq X \times Y$， $\gamma|_K$ 连续（注 A.6.15(c)）。若对所有紧子集 $K_1 \subseteq X$ 和 $K_2 \subseteq Y$， $\gamma|_{K_1 \times K_2}$ 都连续，这一点便可推出（像之前一样取 K ，则 K 包含于

满足 $K_1 := \pi_1(K)$、$K_2 := \pi_2(K)$ 的紧集 $K_1 \times K_2$ 中）。现在我们利用限制映射 $\rho\colon C(Y, Z) \to C(K_2, Z)$ 是连续的这一事实（参见备注 A.6.10），因此映射也

$$\zeta := \rho \circ \eta|_{K_1} \colon K_1 \to C(K_2, Z).$$

由于 K_2 是紧的，$\zeta^\wedge\colon K_1 \times K_2 \to Z$ 是连续的（由证明前面的部分可知）。因为 $\gamma|_{K_1 \times K_2} = \zeta^\wedge$，所以 γ 的连续性成立。□

$k_{\mathbb{R}}$版本的指数律可追溯至 [Hu71]。

注 A.6.18. (a) 给定豪斯多夫拓扑空间 X、Y、Z 以及一个映射$\eta\colon X \to C(Y, Z)$，定义

$$\eta^\wedge \colon X \times Y \to Z, \quad (x, y) \mapsto \eta(x)(y).$$

前述命题意味着：如果 $\eta^\wedge$ 连续，那么 $\eta = (\eta^\wedge)^\vee$ 连续。如果 Y 局部紧，或者 $X \times Y$ 是一个 k空间，或者 $X \times Y$ 是一个$k_{\mathbb{R}}$空间且 Z 完全正则，那么 $\eta = (\eta^\wedge)^\vee$ 连续，当且仅当 $\eta^\wedge$ 连续。

(b) 命题 A.6.17 中的映射 Φ 不一定是满射（参见习题 B.9.7）。

引理 A.6.19。设 X 和 Y 是豪斯多夫拓扑空间。对于 $y \in Y$，令 $c_y\colon X \to Y$ 为常值映射 $x \mapsto y$。那么映射

$$c\colon Y \to C(X, Y), \quad y \mapsto c_y$$

是连续的，并且(如果 $X \neq \emptyset$) 事实上还是一个拓扑嵌入。

证明。如果 $K \subseteq X$ 是紧的，且 $U \subseteq Y$是一个开子集，那么 $c^{-1}(\lfloor K, U \rfloor) = U$（如果 $K \neq \emptyset$），并且 $c^{-1}(\lfloor K, U \rfloor) = Y$（如果 $K = \emptyset$）。无论哪种情况，原像都是开集，因此 c是连续的。如果 X 非空，我们取 $x \in X$。那么点求值 $\mathrm{ev}_x\colon C(X, Y) \to Y, \gamma \mapsto \gamma(x)$ 是连续的，且 $\mathrm{ev}_x \circ c = \mathrm{id}_Y$，因此 c 是一个拓扑嵌入。□

根据下一个引理，所谓的推前是连续的。

引理 A.6.20。设 X、Y 和 Z 为豪斯多夫拓扑空间，且 $f\colon X \times Y \to Z$ 为连续映射。那么下面的映射也连续：

$$f_*\colon C(X, Y) \to C(X, Z), \quad \gamma \mapsto f \circ (\mathrm{id}_X, \gamma).$$

注意，$f_*(\gamma)(x) = f(x, \gamma(x))$。

证明。按照引理 A.6.7，将 $C(X, X) \times C(X, Y)$ 与 $C(X, X \times Y)$ 识别后，可以写成 $f_*(\gamma) = C(X, f)(\mathrm{id}_X, \gamma)$。由于根据引理 A.6.3，$C(X, f)$ 是连续的，因此 f_* 的连续性随即得到。□

我们还有两个带参数的版本。

引理 A.6.21. 设 X, Y, Z 和 P 是豪斯多夫拓扑空间，且 $f\colon X \times Y \times P \to Z$ 是连续映射。对于 $p \in P$，记

$$f^p := f(\cdot, p)\colon X \times Y \to Z.$$

那么下面的映射也是连续的：

$$C(X,Y) \times P \to C(X,Z), \quad (\gamma, p) \mapsto f^p \circ (\mathrm{id}_X, \gamma).$$

证明. 设 $c\colon P \to C(X,P)$, $p \mapsto c_p$ 是引理 A.6.19 中讨论的连续映射。映射 $C(X,f)\colon C(X, X \times Y \times P) \to C(X,Z)$ 连续（由引理 A.6.3）。将 $C(X,X) \times C(X,Y) \times C(X,P)$ 与 $C(X, X \times Y \times P)$ 视为同一对象，我们有 $f^p \circ (\mathrm{id}_X, \gamma) = C(X,f)(\mathrm{id}_X, \gamma, c_p)$，它在 (γ, p) 中连续。□

引理 A.6.22. 设 X、Y、Z 和 P 是豪斯多夫拓扑空间，且 $f\colon Y \times P \to Z$ 是连续映射。对于 $p \in P$，令 $f^p := f(\cdot, p)\colon Y \to Z$。那么下面的映射也是连续的：

$$\psi\colon C(X,Y) \times P \to C(X,Z), \quad (\gamma, p) \mapsto f^p \circ \gamma. \tag{A.8}$$

证明。由于 $g\colon X \times Y \times P \to Z$, $g(x,y,p) := f(y,p)$ 是连续的，根据引理 A.6.21，$\psi\colon C(X,Y) \times P \to C(X,Z)$, $(\gamma, p) \mapsto g^p \circ (\mathrm{id}_X, \gamma)$ 也是连续的。□

A.6.23.回顾一下，如果一个拓扑空间 X 可以表示为紧子集 $K_n \subseteq X$ 的并集 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$，则称其为 σ-紧的。如果一个拓扑空间 X 存在一个由 X 的紧子集组成的序列 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$，且 X 的每个紧子集都包含于其中某个 K_n，则称其为半紧的（于是，X 特别是 σ- 紧的，因为 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$）。

例如，每个 σ-紧局部紧空间都是半紧的（见习题 A.6.10）。

引理 A.6.24。如果 X 是豪斯多夫拓扑空间，且 G 是拓扑群，则以下结论成立：

(a) $C(X,G)$ 配备紧开拓扑后，关于逐点群运算构成一个拓扑群。*(b)* 设 $\mathcal{L}$ 是 X 的一族紧子集，使得每个 $K \in \mathcal{K}(X)$ 都包含于某个 $L \in \mathcal{L}$ 中。另设 $\mathcal{U}$ 是 G 中由单位元的开邻域组成的一个基。对于 $\gamma \in C(X,G)$，集合 $\gamma \cdot \lfloor K, U \rfloor$ 因而构成 $C(X,G)$ 中 γ 的开邻域基（分别对应 $K \in \mathcal{L}$ 和 $U \in \mathcal{U}$）；集合 $\lfloor K, U \rfloor \cdot \gamma$ 也构成这样的基。因此，紧开拓扑与紧集上一致收敛拓扑相同，无论是关于 G 上的左平移还是右一致结构。*(c)* 如果 X 是半紧的，且 G 可度量化，那么 $C(X,G)$ 可度量化。

(d) 如果 X 是一个 $k_{\mathbb{R}}$ 空间（例如，如果 X 是一个 k 空间），且 G 完备，那么 $C(X,G)$ 完备。*(e)* 如果 X 是一个 $k_{\mathbb{R}}$ 空间，且 G 序列完备，那么 $C(X,G)$ 序列完备。*(f)* 如果 E 是一个以 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 为底域的拓扑向量空间，那么逐点运算使 $C(X,E)$ 成为一个拓扑 $\mathbb{K}$ 向量空间。此外，$C(X,\mathbb{K})$ 是一个拓扑 $\mathbb{K}$ 代数，而 $C(X,E)$ 是一个拓扑 $C(X,\mathbb{K})$ 模。*(g)* 如果 $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 和 E 是局部凸拓扑 $\mathbb{K}$ 向量空间，那么 $C(X,E)$ 也局部凸。*(h)* 如果 X 是一个 $k_{\mathbb{R}}$ 空间，且 E 是 *Mackey*完备局部凸空间，那么 $C(X,E)$ 也麦基完备。*(i)* 如果 X 是一个 $k_{\mathbb{R}}$ 空间，且 E 是拟完备局部凸空间，那么 $C(X,E)$ 也拟完备。

证明。(a) 由于 G 是拓扑群，群乘法 $\mu\colon G\times G\to G,(x,y)\mapsto xy$ 和求逆映射 $\iota\colon G\to G,x\mapsto x^{-1}$ 都是连续的。将 $C(X,G)\times C(X,G)$ 识别为 $C(X,G\times G)$（如引理 A.6.7 所示），则 $C(X,G)$ 的群乘法就是映射

$$C(X,\mu)\colon C(X,G\times G)\to C(X,G),$$

根据引理 A.6.3，该映射是连续的。群求逆是映射 $C(X,\iota)\colon C(X,G)\to C(X,G)$，因此也是连续的。于是 $C(X,G)$ 是拓扑群。

(b) 若 $K_1,\dots,K_n\in\mathcal{K}(X)$ 和 $U_1,\dots,U_n\subseteq G$ 是开单位元邻域，则可找到 $U\in\mathcal{U}$ 使得 $U\subseteq U_1\cap\dots\cap U_n$，并找到 $K\in\mathcal{L}$ 使得 $K_1\cup\dots\cup K_n\subseteq K$。于是 $\bigcap_{j=1}^n\lfloor K_j,U_j\rfloor\supseteq\lfloor K,U\rfloor$。因此，满足 $K\in\mathcal{L}$ 和 $U\in\mathcal{U}$ 的集合 $\lfloor K,U\rfloor$ 构成 $C(X,G)$ 的开单位元邻域基。由于拓扑群 $C(X,G)$ 中的左平移和右平移都是同胚，(b) 的其余部分随之成立。

(c) 设 $K_1\subseteq K_2\subseteq\cdots$ 为 X 的紧子集的递增序列，其并为 X，且 X 的每个紧子集都包含于某个 K_n 中。又设 $U_1\supseteq U_2\supseteq\cdots$ 为 G 中开单位邻域的递减序列，它给出单位元邻域滤子的一个基。由 (b)，对 $n\in\mathbb{N}$，集合 $\lfloor K_n,U_n\rfloor$ 给出 $C(X,G)$ 中单位邻域的一个可数基。因此，拓扑群 $C(X,G)$ 是可度量化的 [HR79，定理 8.3]。

(d) 设 $(\gamma_a)_{a\in A}$ 是 $C(X,G)$ 中的一个柯西网。对每个 $x\in X$，点求值 $\mathrm{ev}_x\colon C(X,G)\to G$ 是一个连续同态。因此，$(\gamma_a(x))_{a\in A}$ 是 G 中的一个柯西网，故收敛到某个元素 $\gamma(x)\in G$（因为假设 G 是完备的）。对于每个紧子集 $K\subseteq X$，限制映射 $\rho_K\colon C(X,G)\to C(K,G)$ 是一个连续同态（参见备注 A.6.10），因此 $(\gamma_a|_K)_{a\in A}$ 是 $C(K,G)$ 中的一个柯西网。我们断言 $C(K,G)$ 是完备的。如果此断言成立，那么 $\gamma_a|_K\to\gamma_K$ 对某个连续映射 $\gamma_K\in C(K,G)$ 成立。由于对每个 $x\in K$，$\gamma(x)=\gamma_K(x)$，可知

$\gamma|_K = \gamma_K$ 是连续的。由于 X 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间，而 G （作为拓扑群）是完全正则的，这意味着 γ 是连续的。若 $K \in \mathcal{K}(X)$ 且 $U \subseteq G$ 是一个单位元邻域，则对于充分大的 a，$(\gamma_K)^{-1}\gamma_a|_K \in \lfloor K, U \rfloor$ 位于 $C(K, G)$ 内（见 (b)），因此 $\gamma^{-1}\gamma_a \in \lfloor K, U \rfloor$ 位于 $C(X, G)$ 内，从而说明 $\gamma_a \to \gamma$。

为证明该断言，我们可以假设 $X = K$ 是紧的。设 $U \subseteq G$为一个开单位元邻域，且 $V \subseteq U$ 为一个开单位元邻域，其闭包为 $V \subseteq U$。存在 $a \in A$ 使得 $\gamma_b^{-1}\gamma_c \in \lfloor K, V \rfloor$ 对所有 $b, c \geq a$属于 A均成立。因此，对所有 $x \in K$，$\gamma_b(x)^{-1}\gamma_c(x) \in V$。在 c中取极限，得到 $\gamma_b(x)^{-1}\gamma(x) \in V \subseteq U$，于是

$$\gamma(x) \in \gamma_b(x)U, \quad \text{for all } x \in K \text{ and } b \geq a. \tag{A.9}$$

若 W 是 G中的任意一个单位元邻域，我们可以将前面选取的 U 取得足够小，使得 $U^{-1}UU \subseteq W$。由 γ_a的连续性可知，每个 $x \in K$都有一个邻域 $L \subseteq K$，使得对所有 $y \in L$，$\gamma_a(y)^{-1}\gamma_a(x) \in U$。结合 (A.9)，我们得到

$$\gamma^{-1}(y)\gamma(x) \in U^{-1}\gamma_a(y)^{-1}\gamma_a(x)U \subseteq U^{-1}UU \subseteq W$$

对所有 $y \in L$ 均成立。因此，γ 在 x 处连续，因而是连续的。最后，根据 (A.9)，对所有 $b \geq a$ 都有 $\gamma_b^{-1}\gamma \in \lfloor K, U \rfloor$。因此，$\gamma_b \to \gamma$ 属于 $C(K, G)$。

(e) 按照 (d) 进行，将柯西网替换为柯西序列。(f) 根据 (a)，$C(X, E)$ 是一个拓扑群。令 $\sigma\colon \mathbb{K} \times E \to E$，$(z, v) \mapsto zv$ 表示标量乘法。则映射 $\mathbb{K} \times C(X, E) \to C(X, E)$，$(z, \gamma) \mapsto \sigma(z, \cdot) \circ \gamma$ 是连续的（根据引理 A.6.22 ）。由于这就是 $C(X, E)$ 中的标量乘法，后者是一个拓扑向量空间。令 $\mu\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ 表示域 $\mathbb{K}$ 中的乘法。将 $C(X, \mathbb{K}) \times C(X, \mathbb{K})$ 与 $C(X, \mathbb{K} \times \mathbb{K})$ 视为同一对象，$C(X, \mathbb{K})$ 的代数乘法是映射 $C(X, \mu)\colon C(X, \mathbb{K} \times \mathbb{K}) \to C(X, \mathbb{K})$，根据引理 A.6.3，该映射是连续的。因此，$C(X, \mathbb{K})$ 是一个拓扑代数。将 $C(X, \mathbb{K}) \times C(X, E)$ 与 $C(X, \mathbb{K} \times E)$ 视为同一对象，$C(X, \mathbb{K})$-模在 $C(X, E)$ 上的模乘法是映射 $C(X, \sigma)\colon C(X, \mathbb{K} \times E) \to C(X, E)$，根据引理 A.6.3，该映射是连续的。因此，$C(X, E)$ 是一个拓扑 $C(X, \mathbb{K})$-模。

(g) 根据假设，开凸零邻域 $U \subseteq E$ 构成 E 中的零邻域基。对于每个 $K \in \mathcal{K}(X)$，集合 $\lfloor K, U \rfloor$ 因而是 $C(X, E)$ 中的开零邻域。由 (b) 部分可知，这些集合构成 $C(X, E)$ 中的零邻域基。因此，$C(X, E)$ 是局部凸的。

(h) 设 $\gamma\colon [0, 1] \to C(X, E)$ 是一条利普希茨曲线。若 E 是 $\widetilde{E}$ 的完备化，且 $E \subseteq \widetilde{E}$，则 $C(X, E)$ 是完备的（由 (d) 得出）。因此，弱积分 $\theta := \int_0^1 \gamma(t)\, dt$ 存在于 $C(X, \widetilde{E})$ 中（见命题 1.1.15）。对于 $x \in X$，令 $\widetilde{\varepsilon}_x\colon C(X, E) \to E$ 以及 $\widetilde{\varepsilon}_x\colon C(X, E) \to E$ 分别为在 x 处的点求值$\eta \mapsto \eta(x)$，它们是连续且线性的。于是 $\varepsilon_x \circ \gamma\colon [0, 1] \to E$ 是一条利普希茨曲线，从而 $\zeta(x) := \int_0^1 (\varepsilon_x \circ \gamma)(t)\, dt$ 存在于 E 中。利用习题 1.1.3 (a) 和 (b)，我们得到

$$\theta(x) = \widetilde{\varepsilon}_x(\theta) = \int_0^1 (\widetilde{\varepsilon}_x \circ \gamma)(t)\, dt = \zeta(x).$$

因此，$\theta \in C(X, E)$，从而 $\theta = \int_0^1 \gamma(t)\, dt$ 存在于 $C(X, E)$ 中，再次使用习题 1.1.3(b)。

~ ~
(i) 设 E 是带有 $E \subseteq E$的 E 的一个完备化。若 $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 $C(X,E)$ 中的一个有界柯西网，则由 (d)，γ_α 在 $C(X,E)$ 中收敛到一个连续函数 $\gamma\colon X \to E$。对每个 $x \in X$，点求值 $C(X,E) \to E, \eta \mapsto \eta(x)$ 是连续且线性的，因此 $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ 是 E 中的一个有界柯西网，从而收敛，由此可得 $f(x) \in E$。于是 $f \in C(X,E)$，并且 $f_\alpha \to f$ 也在 $C(X,E)$ 中。□

命题 A.6.25. 设 X 与 Y 为豪斯多夫拓扑空间。在$C(X,Y)$上，紧开拓扑与图拓扑一致，即由如下形式的集合所生成的拓扑

$$C(X,Y)_{U,K} := \{f \in C(X,Y)\colon \Gamma(f|_K) \subseteq U\},$$

其中 $U \subseteq X \times Y$是开集，$K \subseteq X$是紧集，而 $\Gamma(f) \subseteq X \times Y$是 f的图。

此外，如果 X 是紧集，则图拓扑的一个基由以下集合构成：

$$C(X,Y)_U := \{f \in C(X,Y)\colon \Gamma(f) \subseteq U\},$$

其中 $U \subseteq X \times Y$是开集。

证明。设 $f \in C(X, Y)$为紧集，且 $U \supseteq \Gamma(f|_K)$是 $X \times Y$的一个开子集。那么，对于每个 $x \in X$，存在 K_x 在 K 中的一个紧邻域 x 以及 $U_{f(x)}$ (x) 在 Y中的一个开邻域 f，使得 $K_x \times U_{f(x)} \subseteq U$且 $f(K_x) \subseteq U_{f(x)}$。用有限多个集合 K_{x_i}、$i = 1, \ldots\ldots, n$覆盖 K，我们得到

$$\bigcap_{i=1}^{n} \lfloor K_{x_i}, U_{f(x_i)} \rfloor \subseteq C(X,Y)_{U,K}.$$

这意味着每个集合 $C(X, Y)_{U,\ K}$ 在紧开拓扑中都是开集。

反过来，设 $K \subseteq X$ 是紧集，$O \subseteq Y$ 是开集。那么

$$\lfloor K, O \rfloor = \{f \in C(X,Y)\colon \Gamma(f|_K) \subseteq X \times O\} = C(X,Y)_{X\times O,K}$$

在图拓扑中是开集。由此可得，图拓扑与紧开拓扑一致。

此外，假设 X 是紧的。集合族 $C(X,Y)_U$ 在交运算下稳定，因此构成其生成拓扑的一个基。每个集合 $C(X,Y)_U = C(X,Y)_{U,X}$ 在图拓扑中都是开的。反过来，若 $K \subseteq X$ 是紧的，且 $U \subseteq X \times Y$ 是开的，并且 $f \in C(X,Y)_{U,K}$，那么 $V := \big((X \setminus K) \times Y\big) \cup U$ 是 $X \times Y$ 的一个开子集，且 $f \in C(X,Y)_V \subseteq C(X,Y)_{U,K}$。证明完毕。□

A.6 节习题

习题 A.6.1. 设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间， $\mathcal{O}$ 是它的拓扑，$\mathcal{K}(X)$ 是 $K \subseteq X$ 的所有紧子集构成的集合。设 $\mathcal{O}_k$ 是 X 上关于包含映射 $K \to X$（其中 $K \in \mathcal{K}(X)$）的终拓扑。证明 $(X, \mathcal{O}_k)$ 是一个 k-空间，且 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_k$。此外，对于 X 上满足 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ 且 $(X, \mathcal{T})$ 是一个 k-空间的任意拓扑 $\mathcal{T}$，都有 $\mathcal{O}_k \subseteq \mathcal{T}$。

习题 A.6.2. 设 $(X, \mathcal{O})$ 是一个豪斯多夫拓扑空间。证明， X 是一个 k-空间，当且仅当 X 具有以下性质：映射 $f\colon X \to Y$ 到拓扑空间 Y 连续，当且仅当对每个紧集 $K \subseteq X$， $f|_K$ 都连续。

[提示：取 $Y := X$，赋予如习题 A.6.1 中所述的拓扑 $\mathcal{O}_k$ 。]

习题 A.6.3.证明，每个局部凸空间 E 作为拓扑空间都是完全正则的。

[提示：连续半范数 q 的开单位球 $B_1^q(0) = q^{-1}([-1, 1[)$ 的平移集 $E \to \mathbb{R}$： E构成] 的拓扑的一个基。

习题 A.6.4。 (a) 证明：豪斯多夫拓扑空间是完全正则的，当且仅当它具有以下性质：对于 $x \in X$ 以及 X 中的 x 的邻域 U，存在连续函数 f： $X \to [0, 1]$，使得 $f(x) = 1$，且 $\operatorname{supp}(f) := \{y \in X : f(y) \neq 0\} \subseteq U$。

(b) 证明：对于 x 的某个邻域 $V \subseteq U$，甚至可以做到 $f|_V = 1$ 。

[提示：设 U 是 X 中的邻域。不妨设 X 为完全正则空间。 $f_j^{-1}([a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[)$，其中 $f_1, \ldots\ldots, f_n \in C(X, \mathbb{R})$、 $a_1, \ldots\ldots, a_n \in \mathbb{R}$ 为某些 $\varepsilon > 0$。于是 $g := \sum_{j=1}^n (f_j - a_j)^2/\varepsilon^2 \geq 0$，且 $g^{-1}([-1, 1[) \subseteq U$。现在借助 g 构造更多函数（最终还要构造一个合适的 f）。]

习题 A.6.5。设 X 是一个 k 空间，且 $Y \subseteq X$ 是闭子集或开子集。证明，在 X 所诱导的拓扑下， Y 是一个 k 空间。

[提示：若 Y 在 X 中是开集，且 $K \subseteq X$ 是紧子集，则每个 $x \in K \cap Y$ 在 K 中都有一个紧邻域 L，且该邻域包含于 K 的（相对）开子集 $K \cap Y$ 中。]

习题 A.6.6。 设 X 是一个完全正则拓扑空间。则在 X 所诱导的拓扑下，任意子集 $Y \subseteq X$ 都是完全正则的。

习题 A.6.7。 设 X 是一个 $k_{\mathbb{R}}$ 空间且完全正则的拓扑空间。证明，在诱导拓扑下，任意开子集 $U \subseteq X$ 都是 $k_{\mathbb{R}}$ 。

[提示：习题 A.6.4(b) 可能会有帮助。]

习题 A.6.8。 设 X 和 Y 是底集非空的豪斯多夫拓扑空间。证明，若 $X \times Y$ 是一个 $k_{\mathbb{R}}$ 空间，则 X 和 Y 都是 $k_{\mathbb{R}}$ 空间。

习题 A.6.9. 设 X 是一个 k-空间（分别是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间）， Y 是一个豪斯多夫空间，且 $q\colon X \to Y$ 是一个商映射。证明 Y 是一个 k-空间（分别是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间）。

习题 A.6.10. 证明每个局部紧、 σ-紧的拓扑空间 X 都有一个 *exhaustion by compact sets*，即一个紧子集 X 的序列 $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$，使得 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = X$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $K_n \subseteq K_{n+1}^0$。推论得出 X 是半紧的。

A.7 拓扑空间的归纳极限

现在我们讨论一种特殊的终拓扑，即定义在拓扑空间递增并上的归纳极限拓扑。

定义 A.7.1. 设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是一个拓扑空间的递增序列（$X_n, \mathcal{O}_n$），使得对于所有 $n \leq m$ 属于 $\mathbb{N}$，包含映射 $j_{m,n}\colon X_n \to X_m$ 都是连续的。我们称 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 为一个拓扑空间的直序列。关于包含映射 $j_n\colon X_n \to X$，$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 上的终拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 称为 X 上的归纳极限拓扑。如果 X 赋予归纳极限拓扑，那么称 X 是拓扑空间 X_n 的归纳极限，或者也称

$$X = \varinjlim X_n$$

作为一个拓扑空间。如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$j_{n+1,n}$（从而每个 $j_{m,n}$）都是拓扑嵌入，那么称 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 为一个严格直序列。如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X_n$，都存在 X_n 中 x 的一个邻域 V 以及 $m \geq n$，使得 V 在 $(X_m, \mathcal{O}_m)$ 中的闭包 V 是紧的，则称该直序列是紧化的。

注 A.7.2。(a) 根据终拓扑的定义，子集 $M \subseteq X$ 在 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 中是开的，当且仅当对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$M \cap X_n$ 在 $(X_n, \mathcal{O}_n)$ 中是开的。同样地，子集 $M \subseteq X$ 在 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 中是闭的，当且仅当对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$M \cap X_n$ 在 $(X_n, \mathcal{O}_n)$ 中是闭的。

(b) 根据终拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 的定义，每个包含映射 $j_n\colon (X_n, \mathcal{O}_n) \to (X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 都是连续的，并且 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 是具有此性质的最细拓扑。

(c) 如果每个 X_n 都是紧的，则 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是严格的。如果每个 X_n 都是局部紧的，则 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是紧化的。关于紧化直序列的更多例子将在 B.13 节中遇到，具体是在所谓的 Silva 空间的相关内容中。在这种情况下，每个 E_n 都是巴拿赫空间，并且每个包含映射 $E_n \to E_{n+1}$ 都是紧算子。

(d) 对于 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的任意子序列 $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，我们有

$$\varinjlim X_n = \varinjlim X_{n_k}.$$

事实上，若 $V \subseteq \varinjlim X_n$ 是开集，那么对每个 k，$V \cap X_{n_k}$ 都是开集，由此 V 在 $\varinjlim X_{n_k}$ 中是开集。反过来，若 $V \subseteq \varinjlim X_{n_k}$ 是开集，给定 $n \in \mathbb{N}$，我们可以找到 $k \in \mathbb{N}$，使得 $n_k \geq n$。于是 $V \cap X_{n_k}$ 在 X_{n_k} 中是开集，这意味着 $V \cap X_n = j_{n_k,\,n}^{-1}(V \cap X_{n_k})$ 在 X_n 中是开集。因此 V 在 $\varinjlim X_n$ 中是开集。

引理 A.7.3. 设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是拓扑空间的一个直序列，且 $\mathcal{O}$ 是 $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 上的一个拓扑。那么，$(X, \mathcal{O}) = \varinjlim X_n$ 是一个拓扑空间，当且仅当满足以下两个条件：

(i) $j_n\colon (X_n, \mathcal{O}_n)$ 是 $(X, \mathcal{O})$ 的包含映射，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都是连续的；

(ii) 对于到某个拓扑空间的任意映射 $f\colon X \to Y$， f 在$(X,\mathcal{O})$上连续，当且仅当 $f|_{X_n}$ 在 $(X_n,\mathcal{O}_n)$ 上对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都连续。

证明。归纳极限拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 满足这两个条件，因为它是相对于 $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的终拓扑（见定义 A.3.1 和引理 A.3.2）。

反过来，若 $\mathcal{O}$ 满足 (i) 和 (ii)，则 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$（见注 A.7.2(b)）。若 $h\colon (X,\mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$， $h(x) := x$，则 $h \circ j_n = j_n\colon X_n \to (X,\mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 是连续的，因此 h 也是连续的，这是由 (ii) 对于 $\mathcal{O}$ 得出的。因此 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}} \subseteq \mathcal{O}$ 且 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$。□

关于紧化序列的一些观察将会很有用。

引理 A.7.4。设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是由豪斯多夫拓扑空间构成的紧化直序列，且 $n \in \mathbb{N}$。则下述结论成立。

(a) 对于每个紧子集 $K \subseteq X_n$，都存在开子集 $V \subseteq X_n$和 $m \geq n$，使得 $K \subseteq V$，并且 V 在 X_m中的闭包 V 是紧的。如果 U 是 X_m 的开子集，且 $K \subseteq U$，那么此外还可以做到$V \subseteq U$ （必要时缩小 V）。(b) 如果 K 和 L是 X_n中的不交紧子集，那么存在 X_n 中的开子集 V和 W，使得 $K \subseteq V$且 $L \subseteq W$，此外，它们在 X_m 中的闭包V和 W 是紧且不交的。

证明。(a) 排除平凡情形后，我们可以假设 $K \neq \emptyset$。对于每个$x \in K$，存在 X_n 中的 x 的开邻域 W_x 以及 $m_x \geq n$，使得 W_x 在 X_{m_x}中的闭包 W_x 是紧的。由于 K 是紧的，我们有$K \subseteq \bigcup_{x\in F} W_x =: $ 对于某个有限子集 $F \subseteq K$， W。令 $m := \max\{m_x\colon x \in F\}$。由于对于每个 $x \in F$， W_x 在 X_m 中也是紧的，我们看到 W 在 X_m 中的闭包为 $W = \bigcup_{x\in F} W_x$，因此是紧的。现在假设 $U \subseteq X_m$ 是一个开子集，且 $K \subseteq U$（例如， $U = X_m$）。由于 K和 $W\setminus U$是 W中的不交紧子集，存在一个开子集 $P \subseteq W$，使得 $K \subseteq P$且 $P \cap (W\setminus U) = \emptyset$（见备注 A.4.5）。那么 $V := P\cap W$是 W （因此也是 X_n）的开子集，包含 K，并且$V \subseteq P$是紧的，且包含于 $W \setminus (W \setminus U) \subseteq U$。

(b) 利用 (a)，我们找到开子集 $Y, Z \subseteq X_n$ 和 $m \geq n$，使得 $K \subseteq Y$、$L \subseteq Z$，并且 Y 和 Z 在 X_m 中的闭包是紧的。于是 $C := Y \cup Z$ 是 X_m 的紧子集。由于 K 和 L 是 C 中不交的紧子集，因此存在开子集 P, $Q \subseteq C$，使得 $K \subseteq P$、$L \subseteq Q$，并且 P 和 Q 在 C 中的闭包互不相交（见备注 A.4.5）。于是 $V := Y \cap P$ 和 $W := Z \cap Q$ 具有所需的性质。□

下述性质在归纳极限的语境中很有用。

定义 A.7.5。设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是拓扑空间的一个直序列 $(X_n, \mathcal{O}_n)$。假设 $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 赋有一种拓扑，使所有包含映射 $X_n \to X$ 都连续。如果对 X 的每个紧子集 K，都存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 K 包含于 X_n，且 $(X_n, \mathcal{O}_n)$ 在 K 上诱导出给定的紧拓扑，则称 $(X,(X_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 紧正则 。

现在我们来记录归纳极限拓扑的若干基本性质。回顾一下，若拓扑空间 X 对每个 $x \in X$ 都满足分离公理 T_1，即单点集 $\{x\}$ 在 X 中是闭的，则称该空间满足分离公理 T_1。

引理 A.7.6. 设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是一个拓扑空间的直序列，且 $X = \varinjlim X_n$ 是其归纳极限拓扑空间。

(a) 若 $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$ 是开子集 $V_n \subseteq X_n$ 的递增序列，则 $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ 在 $X = \varinjlim X_n$ 中是开集。*(b)* 在 *(a)* 中，X 在 V 上诱导的拓扑与 $V = \varinjlim V_n$ 上的归纳极限拓扑一致。*(c)* 若 $M \subseteq X$ 是开集或闭集，则 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 在 M 上诱导的拓扑与 $M = \varinjlim (M \cap X_n)$ 上的归纳极限拓扑一致，其中使用 $(X_n, \mathcal{O}_n)$ 在 $M \cap X_n$ 上诱导的拓扑。*(d)* 若每个 X_n 都是 T_1，则 X 也是 T_1。*(e)* 若每个 X_n 都是 T_1，则每个紧子集 $K \subseteq X$ 都包含于某个 X_n，其中 $n \in \mathbb{N}$。*(f)* 若 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是严格归纳序列，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，$(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 在 X_n 上诱导的拓扑与 $\mathcal{O}_n$ 一致。*(g)* 若 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是 T_1-空间的严格归纳序列，则 $(X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 是紧正则的。*(h)* 若每个 X_n 都是豪斯多夫的，且直序列 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是紧化的，则 $\varinjlim X_n$ 也是豪斯多夫的。

证明。(a) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，原像 $j_n^{-1}(V) = X_n \cap \bigcup_{m\geq n} V_m = \bigcup_{m\geq n} j_{m,\,n}^{-1}(V_m)$ 在 $(X_n, \mathcal{O}_n)$ 中是开的，因此 V 在 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 中是开的。

(b) 子集 $W \subseteq V$ 在 $\varinjlim V_n$ 中是开的，当且仅当 $W \cap V_n$ 在每个赋予由 X_n 诱导拓扑的 V_n 中是开的。由于 V_n 在 X_n 中是开的，后者成立当且仅当 $W \cap V_n$ 在 X_n 中是开的。若 W 在 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 中是开的，则满足此性质（此时 $W \cap X_n$ 在 X_n 中是开的，因此 $W \cap V_n = (W \cap X_n) \cap V_n$ 在 X_n 中是开的，因为它是两个开子集的交）。反之，如果对每个 n，$W \cap V_n$ 在 X_n 中是开的，那么根据 (a)，$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (W \cap V_n)$ 在 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 中是开的。

(c) 由于 M 在 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 中是开（分别为闭）集，因此对每个 $n \in \mathbb{N}$，交集 $M \cap X_n$ 在 $(X_n, \mathcal{O}_n)$ 中是开（分别为闭）集。子集 $N \subseteq M$ 在 $\varinjlim (M \cap X_n)$ 中是开（分别为闭）集，当且仅当 $N \cap X_n = N \cap M \cap X_n$ 在 $M \cap X_n$ 中是开（分别为闭）集。后者成立，当且仅当 $N \cap X_n$ 在 X_n 中是开（分别为闭）集，因为 $M \cap X_n$ 是 X_n 的开（分别为闭）子集。但这个条件定义了 N 在 X 中的开性（分别为闭性）。

(d) 若 $x \in X$，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\{x\} \cap X_n$ 要么是 $\{x\}$，要么是空集，因此在 X_n 中是闭集。于是 $\{x\}$ 在 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 中是闭集。

(e) 如果不是，那么我们就可以为每个 $n \in \mathbb{N}$ 找到某个 $x_n \in K \setminus X_n$。那么 $D := \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ 将是一个无限集。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，交集 $D \cap X_n \subseteq \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ 是 T_1-空间 X_n 的有限子集，因此是闭的，这意味着 D 是 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 的闭子集，因而是紧的

（如 $D \subseteq K$）。然而， T_1-空间 X_n 在其有限子集 $D \cap X_n$ 上诱导离散拓扑（习题 A.7.1）。由 (c) 可知， $D = \varinjlim (D \cap X_n)$，因此我们推得 D 是离散的（习题 A.7.2）。由于 D 既紧又离散，它必定是有限的（矛盾）。

(f) 由注 A.7.2(d)，我们可以假设 $n = 1$。包含映射 $j_1\colon (X_1, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 是连续的。为了看出 j_1 是拓扑嵌入，设 W_1 是 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ 的一个开子集；我们证明，对 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 的某个开子集 W，有 $W_1 = j_1^{-1}(W)$。递归地，对每个 $m \in \mathbb{N}$，我们找到 $(X_{m+1}, \mathcal{O}_{m+1})$ 的一个开子集 W_{m+1}，使得 $X_m \cap W_{m+1} = j_{m+1}^{-1}$，$_m(W_{m+1}) = W_m$，因为 j_{m+1}，$_m$ 是拓扑嵌入。由 (a)， $W = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m$ 在 $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 中是开的。由于对所有 m 都有 $W_m \cap X_1 = W_1$，我们有 $j_1^{-1}(W) = W \cap X_1 = W_1$。

(g) 由 (e) 和 (f) 立即得出。

(h) 给定 $x \neq y \in X$，则对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$，有 $x, y \in X_{n_0}$。于是 $K_0 := \{x\}$ 和 $L_0 := \{y\}$ 是 X_{n_0} 的紧子集。利用引理 A.7.4(b) 和归纳法，我们可找到整数 $n_i > n_{i-1}$ 和开子集 $V_i, W_i \subseteq X_{n_{i-1}}$，其中 $i \in \mathbb{N}$，使得 $K_{i-1} \subseteq V_i$、$L_{i-1} \Subset W_i$，并且闭包 $K_i := V_i$ 和 $L_i := W_i$ 在 X_{n_i} 中是紧且不相交的。于是 $V := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ 和 $W := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i$ 分别是 $\varinjlim X_{n_i} = \varinjlim X_n$ 中 x 和 y 的不相交开邻域（见 (a) 和注 A.7.2(d)）。注意， $V_i \subseteq V_{i+1}$ 和 $W_i \subseteq W_{i+1}$ 由构造可知成立。□

注 A.7.7. 若 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是紧化的，则引理 A.7.6(a) 中的 $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$ 也紧化。事实上，若 $x \in V_n$，则对于某个 $m \geq n$， x 在 X_n 中有一个开邻域 P，其在 X_m 中的闭包 P 是紧的。令 Q 为 x 在 P 中的一个紧邻域，使得 $Q \subseteq V_m$，并令 Q^0 为其相对于 P 的内部。则 $W := P \cap Q^0 \cap V_n$ 是 x 在 V_n 中的一个开邻域，且 $W \subseteq Q \subseteq V_m$ 是紧的。

定义 A.7.8. 设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 和 $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$ 是拓扑空间的归纳序列。赋予 $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 和 $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ 归纳极限拓扑，并令 $j_n\colon Y_n \to Y$ 为包含映射。若 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是连续映射序列 $f_n\colon X_n \to Y_n$，且对所有 $n \leq m$ 都有 $f_m|_{X_n} = f_n$，则

$$\varinjlim f_n\colon X \to Y, \quad x \mapsto f_n(x) \quad \text{if } x \in X_n$$

是一个良定义映射。由于 $(\varinjlim f_n)|_{X_n} = j_n \circ f_n$ 连续，因此

$$\varinjlim f_n\colon \varinjlim X_n \to \varinjlim Y_n$$

根据引理 A.7.3，是连续的。

设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 和 $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$ 是拓扑空间的直序列， $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 和 $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$。那么在 $X \times Y$ 上有两种自然的拓扑：一方面，我们可以将 $X \times Y$ 视为 $\varinjlim X_n$ 与 $\varinjlim Y_n$ 的乘积，并赋予其乘积拓扑 $\mathcal{O}$。另一方面 $\varinjlim$ $\varinjlim$，我们可以将 $X \times Y$ 视为并

$$X \times Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \times Y_n$$

并赋予其拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$，使其成为归纳极限

$$X \times Y = \varinjlim (X_n \times Y_n)$$

拓扑空间 $X_n \times Y_n$（在 $X_n \times Y_n$上取乘积拓扑）。那么，根据下一个引理，$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$； $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 可能出现（习题 A.7.4）。

引理 A.7.9。如果 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$和 $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$是拓扑空间的直序列，那么恒等映射

$$h\colon \varinjlim (X_n \times Y_n) \to \left(\varinjlim X_n\right) \times \left(\varinjlim Y_n\right), \quad (x,y) \mapsto (x,y)$$

是连续的。如果 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$和 $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$都是紧化的，且所有空间 X_n 和 Y_n 都是豪斯多夫的，那么 h 是一个同胚。

证明。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathrm{pr}_{1,n}\colon X_n \times Y_n \to X_n$ 和 $\mathrm{pr}_{2,n}\colon X_n \times Y_n \to Y_n$ 分别为投影到第一分量和第二分量的投影。则 $\mathrm{pr}_{1,n}$ 和 $\mathrm{pr}_{2,n}$ 是连续的，因此 $h = \left(\varinjlim \mathrm{pr}_{1,n}, \varinjlim \mathrm{pr}_{2,n}\right)$也连续。于是 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$。

现在假设 X_n 与 Y_n 是豪斯多夫的，且两个直序列都是紧化的。我们证明 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}} \subseteq \mathcal{O}$（从而完成证明）。为此，设 $U \subseteq \varinjlim (X_n \times Y_n)$为一个开子集。只需证明，关于乘积拓扑，$U$是每个$(x,y) \in U$的邻域。我们有$(x,y) \in X_{n_0} \times Y_{n_0}$，对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$。于是 $K_0 := \{x\}$与 $L_0 := \{y\}$分别是X_{n_0}与Y_{n_0}的紧子集，且 $K_0 \times L_0$ 包含于 $X_{n_0} \times Y_{n_0}$的开子集 $U \cap (X_{n_0} \times Y_{n_0})$之中。由引理 A.7.4(a)，我们找到$n_1 > n_0$ 以及开子集 $V_1 \subseteq X_{n_0}$ 和 $W_1 \subseteq Y_{n_0}$，使得 $K_0 \subseteq V_1$、$L_0 \subseteq W_1$，并且闭包 $\overline{V_1} \subseteq X_{n_1}$ 与 $\overline{W_1} \subseteq Y_{n_1}$ 是紧的。华莱士引理给出开子集 $P \subseteq X_{n_1}$ 与 $Q \subseteq Y_{n_1}$，使得

$$K_0 \subseteq P,\ L_0 \subseteq Q,\ \text{and}\ \ P \times Q \subseteq U \cap (X_{n_1} \times Y_{n_1}).$$

根据引理 A.7.4(a)，缩小 V_1 和 W_1后，我们可以假设 $K_1 := V_1 \subseteq P$ 且 $L_1 := W_1 \subseteq Q$，从而得到 $\overline{K_1} \times \overline{L_1} \subseteq U \cap (X_{n_1} \times Y_{n_1})$。

如此继续，我们得到 $n_j > n_{j-1}$，对应于 $j \in \mathbb{N}$，以及开子集 $V_j \subseteq X_{n_{j-1}}$ 和 $W_j \subseteq Y_{n_{j-1}}$，其闭包 $K_j := \overline{V_j} \subseteq X_{n_j}$ 和 $L_j := \overline{W_j} \subseteq Y_{n_j}$ 是紧的，并且满足 $K_{j-1} \subseteq V_j$、$L_{j-1} \subseteq W_j$ 和 $K_j \times L_j \subseteq U \cap (X_{n_j} \times Y_{n_j})$。于是，$V := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j$ 和 $W := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j$ 分别是 $\varinjlim X_n$ 和 $\varinjlim Y_n$的开子集（见注 A.7.2(d)和引理 A.7.6(a)），且 $(x,y) \in V \times W \subseteq U$。 □

定义 A.7.10. (a) 若拓扑群的递增序列 $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ 中的所有包含映射 $G_n \to G_m$（对于 $n \leq m$）都是连续群同态，则称该序列为**拓扑群的正向序列**。于是

$G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 可以视为一个群：设 $\mu_{G_n}\colon G_n \times G_n \to G_n$ 是 G_n 的群乘法。群乘法 $\mu_G\colon G\times G\to G$ 为

$$\mu_G(g,h) := \mu_{G_n}(g,h)$$

对于 $g,h\in G$，其中选择 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $g,h\in G_n$。由于所有包含映射 $G_n\to G_m$（对于 $n\le m$）都是群同态，因此乘积定义良好，且与 n 的选择无关。对于 G 上前述的群结构，每个包含映射 $G_n\to G$ 都是群同态，并且由这一性质唯一确定。

（b）若拓扑向量空间的递增序列 $E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots$ 的所有包含映射$E_n\to E_m$（对于 $n\le m$）都是连续且线性的，则称其为拓扑向量空间的直序列。那么 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$具有唯一的向量空间结构，使得每个 E_n 都是一个向量子空间。

现在我们来研究使 G（或 E）上的归纳极限拓扑 $\mathcal{O}_{\rm dl}$ 能将后者变为拓扑群（或拓扑向量空间）的条件。情况并非总是如此（见习题 A.7.6）；群乘法作为映射 $(G,\mathcal{O}_{\rm dl})\times(G,\mathcal{O}_{\rm dl})\to(G,\mathcal{O}_{\rm dl})$ 未必连续。

命题 A.7.11. 设 $G_1\subseteq G_2\subseteq\cdots$ 是拓扑群的一个正向序列。在 $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 上定义群乘法，使每个包含映射 $G_n\to G$ 都成为同态，并赋予 G 归纳极限拓扑。则求逆映射 $\eta_G\colon G\to G, x\mapsto x^{-1}$ 连续；对于每个 $g\in G$，左平移 $\lambda_g^G\colon G\to G, x\mapsto gx$ 和右平移 $\rho_g^G\colon G\to G, x\mapsto xg$ 也连续。如果正向序列 $G_1\subseteq G_2\subseteq\cdots$ 是紧化的，那么 G 是拓扑群，并且这些集合

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_1U_2\cdots U_n$$

构成 G 中单位元开邻域的一个基 $\mathcal{B}$，其中 U_n 遍历 G_n 中单位元开邻域的一个基 $\mathcal{B}_n$。

证明。设 $\mu_{G_n}\colon G_n\times G_n\to G_n$ 是 G_n的连续群乘法，$\eta_{G_n}\colon G_n\to G_n$ 是连续求逆映射。那么 $\eta_G=\varinjlim \eta_{G_n}$ 是连续的。设 $g\in G$。为了证明 λ_g^G和 ρ_g^G连续，我们可以假设 $g\in G_1$（见注 A.7.2(d)）。于是

$$\lambda_g^G=\varinjlim \lambda_g^{G_n} \quad\text{and}\quad \rho_g^G=\varinjlim \rho_g^{G_n}$$

就拓扑群 G_n中的连续左平移（分别地，右平移）而言，因此 λ_g^G和 ρ_g^G是连续的。如果 $G_1\subseteq G_2\subseteq\cdots$是紧化映射，那么引理 A.7.6(h)表明，$G$是豪斯多夫的（回顾一下，我们根据定义假设所有拓扑群都是豪斯多夫的）。此外，

$$G\times G=\varinjlim (G_n\times G_n)$$

作为一个拓扑空间（见引理 A.7.9），这意味着 $\mu_G = \varinjlim \mu_{G_n}$ 是连续的。因此， G是一个拓扑群。

为证明最后一个断言，令 $W \in \mathcal{B}$。存在 $V_n \in \mathcal{B}_n$，对于 $n \in \mathbb{N}$，使得 $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$，其中

$$W_n := V_1 V_2 \cdots V_n.$$

现在， W_n 是 G_n 中的开集（它是开子集 V_n 的平移集之并）。由于 $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots$，引理 A.7.6(a) 表明 $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ 是 G 中的开集。因此，每个 $W \in \mathcal{B}$ 都是开单位元邻域。为证明 $\mathcal{B}$ 是一个基，设 $P_0 \subseteq G$ 是一个开单位元邻域。由于 G 是一个拓扑群，我们递归地找出开单位元邻域 $P_n \subseteq G$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $P_n P_n \subseteq P_{n-1}$。于是，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $P_1 P_2 \cdots P_n \subseteq P_0$。由于 $\mathcal{B}_n$ 是 G_n 中单位元邻域的一个基，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都能找到 $U_n \in \mathcal{B}_n$，使得 $U_n \subseteq P_n \cap G_n$。于是

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_1 \dots U_n \in \mathcal{B}$$

和 $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_1 \cdots P_n \subseteq P_0$。 □

推论 A.7.12。给定一个拓扑向量空间的直序列 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$，按自然方式将 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 赋予向量空间结构。设 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$是 E上的归纳极限拓扑。若 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$是紧化的，则$(E, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 是一个拓扑向量空间。此外，若每个 E_n 都是局部凸的，则$(E, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 也是局部凸的。

证明。根据命题 A.7.11，归纳极限拓扑使 $(E, +)$ 成为一个拓扑群。设 $m_{E_n}\colon \mathbb{K}\times E_n \to E_n$ 和 $m_E\colon \mathbb{K}\times E \to E$ 是标量乘法。由于 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \cdots$ 和 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是紧化的，

$$\mathbb{K} \times (E, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}) = \varinjlim (\mathbb{K} \times E_n)$$

作为一个拓扑空间。因此， $m_E = \varinjlim m_{E_n}$ 是连续的，因而 E 是一个拓扑向量空间。若每个 E_n 都是局部凸的，令 $\mathcal{B}_n$ 为 E_n中所有绝对凸开零邻域组成的集合。若对 $n \in \mathbb{N}$有 $U_n \in \mathcal{B}_n$，则

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_1 + \cdots + U_n) \subseteq E$$

是绝对凸集的递增并，因此也是绝对凸的。由于这类集合 U 根据命题 A.7.11 构成 E 中零邻域的一个基 $\mathcal{B}$，我们看到拓扑向量空间 E 是局部凸的。□

例 A.7.13. 若 $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ 是局部紧拓扑群的直序列，则归纳极限拓扑使 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 成为一个（豪斯多夫）拓扑群（见命题 A.7.11 和注记 A.7.2(c)）。

例 A.7.14.设 $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ 是由所有满足如下条件的标量序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 构成的向量子空间：对除有限多个 n 以外的所有 n，均有 $x_n = 0$。将 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ 视为 $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$，我们可以写成

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^n$$

并赋予 $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ 归纳极限拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$。根据推论 A.7.12，$(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$是一个局部凸拓扑向量空间。

注 A.7.15. (a) 设$(A, \leq)$是一个有向集，$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是一个拓扑空间族，使得 $X_\alpha \subseteq X_\beta$，并且当 $\alpha \leq \beta$时，包含映射$j_{\beta,\alpha}\colon X_\alpha \to X_\beta$是连续的。那么，$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ 称为一个拓扑空间的归纳系统。相对于包含映射 $X_\alpha \to X$，$X := \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ 上的终拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 称为 X上的归纳极限拓扑，并且我们称$(X, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}) = \varinjlim X_\alpha$ 是拓扑空间意义下的归纳极限。

(b) 若递增序列 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$ in A 满足以下条件，则称其为共尾：对每个 $\beta \in A$，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\beta \leq \alpha_n$。于是 $(X_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个拓扑空间直序列，称为 $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ 的共尾子序列。若 $\mathcal{O}$ 是 $X = \varinjlim X_{\alpha_n}$ 上的归纳极限拓扑，则根据定义，$\mathcal{O}_{\mathrm{dl}} \subseteq \mathcal{O}$。若 $V \in \mathcal{O}$ 且 $\beta \in A$，取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\beta \leq \alpha_n$。于是

$$V \cap X_\beta = (V \cap X_{\alpha_n}) \cap X_\beta = j^{-1}_{\alpha_n,\beta}(V \cap X_{\alpha_n})$$

在 X_β 中是开集，因而 $V \in \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$。因此 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$，从而

$$\varinjlim X_\alpha = \varinjlim X_{\alpha_n}$$

对每个共尾子序列都成立。本书中遇到的所有归纳系统都具有共尾子序列，因此可以归约到直序列的情形，正如本附录所讨论的那样。

(c) 更一般地，可以考虑直系统 $((X_\alpha)_{\alpha\in A}, (j_{\alpha,\beta})_{\alpha\geq\beta})$ 及其相应的归纳极限，其中 $(A, \leq)$ 是一个有向集，每个 X_α 都是一个拓扑空间，并且对于 A 中的 $\alpha \geq \beta$，$j_{\alpha,\beta}\colon X_\beta \to X_\alpha$ 是连续映射，满足 $j_{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha}$ 且 $j_{\alpha,\beta} \circ j_{\beta,\gamma} = j_{\alpha,\gamma}$ 对所有 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ 都成立。这里我们可以不引入这些对象，以及与之相伴的更技术性的记号。

例 A.7.16.设 E 是一个无限维向量空间。那么，E 的所有有限维向量子空间 A 在包含映射下构成一个有向集。为每个 $F \in A$ 赋予使其成为拓扑向量空间的唯一拓扑（见命题 B.6.8）。于是 $(F)_{F\in A}$是一个局部凸拓扑向量空间的归纳系统。令 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 为 $E = \bigcup_{F\in A} F$上的归纳极限拓扑；文献中有时称此拓扑为有限拓扑。现在假设 E 是可数维的。令 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 E 的一组基，并设

$$F_n := \mathbb{K}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}v_n \subseteq E.$$

那么，$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$是$(F)_{F\in A}$中的一个共尾子序列，因此 $\varinjlim F = \varinjlim F_n$。因此，$(E,\ \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$是一个局部凸拓扑向量空间（见推论 A.7.12）。若 E上有任意一种向量拓扑，则 $(E,\ \mathcal{O})$在每个 $F \in A$ 上诱导出唯一的向量拓扑，因此使包含映射$F \to (E,\ \mathcal{O})$连续，从而 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$。因此， $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 是 E上的最细向量拓扑，也是最细局部凸向量拓扑。[2] 由于

$$f_n\colon \mathbb{K}^n \to F_n,\quad (x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1v_1+\cdots+x_nv_n$$

对每个 n 和 $f_{n+1}|_{F_n} = f_n$，都是拓扑向量空间同构，

$$\varinjlim f_n\colon \varinjlim \mathbb{K}^n \to \varinjlim F_n$$

是拓扑向量空间同构（逆映射为 $\varinjlim f_n^{-1}$），因此 $E \cong \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ 是拓扑向量空间。

例 A.7.17。如果 X 是豪斯多夫拓扑空间，那么 $\mathcal{K}(X)$ 中 X 的紧子集在包含映射下构成有向集（因为若 K_1 和 K_2 都是紧的，则 $K_1\cup K_2$ 也是紧的）。于是 $(K)_{K\in\mathcal{K}(X)}$ 是拓扑空间的归纳系统，并且 X 是 k-空间，当且仅当 $X = \varinjlim K$。

定义 A.7.18。如果拓扑空间 X 是 k_ω-空间，且 X 是 k-空间并且半紧（如 A.6.23 所述），我们就称之为 k_ω-空间。因此， X 有一个紧子集序列 $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$，它在 $\mathcal{K}(X)$ 中共尾（也就是说，每个紧子集$K \subseteq X$ 都包含在某个 K_n 中）。在此语境下，$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 称为k_ω-序列，对应于 X。如果拓扑空间 X 是豪斯多夫空间，且每个点 $x \in X$ 在 X 中都有一个开邻域 V，该邻域在诱导拓扑下是 k_ω-空间，则称拓扑空间 X 为局部 k_ω-空间。于是， X 中 x 的每个邻域都包含这样的邻域 V（参见练习 A.7.8）。

注 A.7.19。(a) 每个 k_ω-空间都是局部 k_ω的。每个 σ-紧的局部紧空间都是一个 k_ω-空间；每个局部紧空间都是局部 k_ω的。

(b) 拓扑空间 X 是 k_ω 当且仅当对于由紧拓扑空间构成的直序列 $K_1 \subseteq K_2 \cdots$，有 $X = \varinjlim K_n$ （参见引理 A.7.6(g)）。(c) 每个局部 k_ω-空间都是一个 k-空间（参见习题 A.7.9）。

命题 A.7.20。若由豪斯多夫拓扑空间构成的直序列 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$是紧化的，则 $X := \varinjlim X_n$ 是局部 k_ω 的，且（X，$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$）是紧正则的。

证明。若 $x \in X_{n_1}$，令 $K_1 := \{x\}$并找出整数 $n_1 < n_2 < \cdots$以及 X_{n_j} 的开子集 V_j，满足 $K_j \subseteq V_j$，使得 $K_{j+1} := \overline{V_j}$ 在$X_{n_{j+1}}$中是紧的（引理 A.7.4）。于是 $V = \varinjlim V_j$ 在 $\varinjlim X_n = \varinjlim X_{n_j}$ 中是开的，由

[2] 在不可数维向量空间上，有限拓扑、最细向量拓扑和最细局部凸向量拓扑彼此不同，参见 [KK63] 和 [Bisg93]。

引理 A.7.6(a)。此外，$V = \varinjlim K_j$（见引理 A.7.6(b) 与习题 A.7.7），从而 V 是一个 k_ω-空间。

若 $\emptyset \neq K \subseteq X$ 是紧的，则每个 $x \in K$ 在 X 中都有一个开邻域 V_x，它是一个 k_ω-空间，并且存在一个 k_ω-序列 $(K_{x,\,j})_{j\in\mathbb{N}}$，使得每个 $K_{x,\,j}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 都是 X_n 的紧子集（如上所示）。现在，x 在 K 中有一个紧邻域 L_x，使得 $L_x \subseteq V_x$。由 K 的紧致性，

$$K = \bigcup_{x\in F} L_x$$

对某个有限子集 $F \subseteq K$。由于 $(V_x,\ (K_{x,\,j})_{j\in\mathbb{N}})$ 根据引理 A.7.6(g) 是紧正则的，我们找到满足 L_x 的 $j_x \in \mathbb{N}$，其中 L_x 对 $K_{x,\,j_x}$ 是紧的，因此对某个 $m_x \in \mathbb{N}$，它对 X_{m_x} 也紧。于是，对于$m := \max\{m_x : x \in F\}$，$K$ 包含于 X_m；并且由于 X_m 对每个 $x \in F$ 都在 L_x 上诱导给定的紧拓扑，因此在诱导拓扑下，$K = \bigcup_{x\in F} L_x$ 在 X_m 中也是紧的；该拓扑更粗，且与 K 上给定的拓扑一致。□

注 A.7.21。(a) 如 [GHK10]，所示，对于每个 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 个 k_ω-空间（分别地，局部 k_ω-空间）的直序列，$k_\omega \varinjlim X_n$ 是 k_ω（分别地，局部k_ω）。特别地，归纳极限是豪斯多夫的。

(b) 设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 和 $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$ 是k_ω-空间（分别地，局部 k_ω-空间）的直序列，且 $X := \varinjlim X_n$，$Y := \varinjlim Y_n$。那么 $X \times Y$ 是 k_ω（分别地，局部 k_ω），并且

$$X \times Y = \varinjlim (X_n \times Y_n)$$

作为拓扑空间（见 [GHK10]）。

引理 A.7.22。考虑一个局部紧拓扑空间的递增序列 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$，其中所有包含映射 $X_n \to X_{n+1}$ 都是连续的。赋予 $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 归纳极限拓扑。若 $x \in X_1$，且 $U \subseteq X$ 是一个开 x-邻域，则存在一个序列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 个开 x-邻域 $V_n \subseteq X_n$，其紧闭包为 $V_n \subseteq X_n \cap U$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$V_n \subseteq V_{n+1}$。

证明。由 X_1的局部紧致性，开 x 邻域 $X_1 \cap U$ 在 X_1 中包含一个紧 x 邻域 K_1；我们令 V_1 为 K_1在 X_1中的内部。若已找到 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 的相对紧开 x邻域 V_j，使得对所有 $j < n$都有 $V_j \subseteq V_{j+1}$，则 V_n作为 $X_n \cap U$的紧子集,—也是 $X_{n+1}\cap U$这一 X_{n+1}开子集中的紧子集。根据注 A.4.6，存在一个紧子集 $K_{n+1} \subseteq X_{n+1} \cap U$，其内部$V_{n+1}$ 满足：$= K^0_{n+1}$ 在 X_{n+1} 中包含 V_n。□

A.7 节的习题

习题 A.7.1。证明：T_1-空间 X 的每个有限子集都是 X闭集。

习题 A.7.2. 设 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是拓扑空间的一个直序列。证明：如果每个 X_n 都是离散的，那么 $X = \varinjlim X_n$ 也是离散的。⟶

习题 A.7.3. 证明：若 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ 是 k空间的一个直序列，则 $\varinjlim X_n$ 也是 k空间。$k_{\mathbb{R}}$空间的情形也同理。⟶

习题 A.7.4.考虑双线性映射

$$\beta\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}, \quad \beta(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

对于 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 和 $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$。我们在 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上赋予乘积拓扑（由 B.4.14(a) 可知该拓扑可度量化，因此使 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 成为 k空间），并在$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ 上赋予使其成为其向量子空间$\mathbb{R}^n \times \{0\}$ $\mathbb{R}^n$ $\overrightarrow{7\ 3}$的归纳极限 $\varinjlim \mathbb{R}^n$ 的拓扑，我们将这些向量子空间与 认同。由习题 A. . 可知， $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ 是 k空间。

(a) 证明对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $\beta|_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^n}$ 都是连续的。(b) 证明 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ 的每个紧子集 K 都包含于某个 $n \in \mathbb{N}$中的 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^n$。因此， $\beta|_K$ 是连续的。(c) 证明 β 在 (0, 0) 处不连续。因此， $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ 不是 k空间（也不是$k_{\mathbb{R}}$空间），尽管 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 和 $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ 都是 k空间。此外， $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ 上的乘积拓扑必定严格比 $\varinjlim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^n)$ 上的归纳极限拓扑更粗（因为后者使 β 连续）。

习题 A.7.5. 设 $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots$ 和 $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots$ 是拓扑群的直序列；在群 $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ 和 $H := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ 上赋予归纳极限拓扑。

(a) 利用映射 $j_n\colon G_n \to G_n \times H_n, x \mapsto (x,e)$ 连续这一事实，证明

$$j_G\colon G \to \varinjlim (G_n \times H_n), \quad x \mapsto (x,e)$$

是连续的。同样， $j_H\colon H \to \varinjlim (G_n \times H_n), y \mapsto (e,y)$ 是连续的。

(b) 证明：若 $\varinjlim (G_n \times H_n)$ 是拓扑群，则它与赋予乘积拓扑的 $G \times H$ 一致。

[提示：映射 $G \times H \to \varinjlim (G_n \times H_n), (x,y) \mapsto (x,y)$ 连续，因为 $(x,y) = j_G(x) j_H(y)$。]

习题 A.7.6。 利用习题 A.7.4 和习题 A.7.5，推导出 $\varinjlim (\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^n)$ 上的归纳极限拓扑并不能使后者成为拓扑群。

练习 A.7.7。 设 $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$ 是拓扑空间的一个直序列，且 $L_n \subseteq V_n$ 是 $n \in \mathbb{N}$ 的一个子集，使得 $V_n \subseteq L_{n+1}$。赋予 L_n 由 V_n 诱导的拓扑。证明，作为拓扑空间，$\varinjlim L_n = \varinjlim V_n$。⟶ ⟶
[$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都是 $L_1 \subseteq V_1 \subseteq L_2 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$ 的子序列]

练习 A.7.8。设 X 是一个 k_ω-空间。

(a) 证明每个闭子集 $A \subseteq X$ 在诱导拓扑下都是一个 k_ω-空间。

(b) 设 $x \in X$。证明 X 中 x 的每个开邻域 U 都包含一个 x 的开邻域 V，它是一个 k_ω-空间。[提示：设 $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的一个 k_ω-序列。令 $L_0 := \{x\}$，并且对 $n \in \mathbb{N}$，选取一个紧子集 $L_n \subseteq K_n \cap U$，使得 L_{n-1} 位于其内部 L_n^0（相对于 K_n）。现在取 $V := \varinjlim L_n = \varinjlim L_n^0$.]

习题 A.7.9. 设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间。证明：如果 X 有一个开覆盖 $(U_j)_{j\in J}$，使得每个 X_j 都是一个 k-空间，那么 X 就是一个 k-空间。

A.8 附录 A 的注释

本附录中的大部分内容都是标准内容，因此除少数结果外，我们不再提供参考文献；一般拓扑学方面的主要参考文献是 [Bou88], [Ek89], , 以及 [Sch75] 和 [Kel75]。就我们的目的而言，只需考虑其有向指标集按序排列（而不只是拟序）的网。关于 k-空间的背景知识，可参见 [Kel75]；从代数拓扑的角度出发，也可参见 [Ste67]。习题 A.7.4 参考了 [Bcz91，注 17.9]。关于 k_ω-空间的更多信息，见 [Mic68], [Mr56], [FS77], 和 [GHK10]；后者也讨论了局部 k_ω 的空间。关于 $k_{\mathbb{R}}$-空间的背景知识，可参见 [Hu71] 和 [Nb70]；与后者不同，我们不要求这类空间完全正则（因为这一性质对我们关于指数律的应用并不起作用。当然，所有局部凸空间及其子集都是完全正则的）。紧开拓扑的子基集采用的记号 $\lfloor K, U \rfloor$ 源自 [Str06]。关于拓扑空间归纳极限的基本性质，参见[NRW91], [NRW93], [Gl03a], 和 [Gl05c]，后者对应引理 A.7.6 (a)–(d) 和 (f)；引理 A.7.6 (e) 和 (g) 见[Han71]。拓扑群的归纳极限与其底层拓扑空间的归纳极限之间的比较，见 [TSH98], [HST01], 、 [Ym98], , 以及 [Gl03a], [Gl07a], [Gl11], [Gl13a], ；另见 [GHK10]，其中重点讨论了 k_ω-空间。紧化直序列这一主题将在附录 B.13 中继续讨论，届时我们会介绍所谓的西尔瓦空间，即其粘合映射为紧算子的巴拿赫空间的归纳极限。局部凸归纳极限部分也会继续讨论紧正则性。在无限维李理论中关于紧正则性的应用，例如见 [Da14], [Gl11], 和 [Gl12b]；它有助于证明李群递增并的李理论正则性。此外，它还可以简化此类群的同伦群计算，见 [Gl08c]。

关于仿紧性的更多信息，参见例如 [Ek89]。定理 A.5.9 和引理 A.5.10 改编自 [Gd58，第 150 页]；关于管状邻域的讨论，参见 [La99]。

B 关于局部凸空间的基本事实

在本附录中，我们回顾局部凸拓扑向量空间的定义，介绍各种基本构造，并证明本书所需的所有结果。在下文中，$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$。除非另有说明，所有向量空间均为$\mathbb{K}$-向量空间，所有线性映射均为 $\mathbb{K}$-线性映射。我们假设读者熟悉点集拓扑和赋范空间的一些基本事实（例如一致有界原理）。

B.1 基本定义和初步性质

定义 B.1.1。拓扑向量空间是一个向量空间 E，配备一种拓扑，使加法映射

$$E \times E \to E\,, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

和数乘

$$\mathbb{K} \times E \to E\,, \quad (z, x) \mapsto zx$$

成为连续映射。[1] 这种拓扑也称为向量拓扑。如果每个零邻域都包含一个凸零邻域，则称拓扑向量空间局部凸。[2] 我们使用局部凸空间作为“局部凸拓扑向量空间”的简称。除非另有说明，我们总是假设拓扑向量空间是豪斯多夫的。

给定向量空间 E 的子集 U 和 V，以及 $t \in \mathbb{K}$，我们记作

$$U + V := \{x + y \colon x \in U, y \in V\} \quad \text{and} \quad tU := \{tx \colon x \in U\}.$$

我们记 $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{K} \colon |z| \le r\}$ 为 $r > 0$，并记 $\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$。

引理 B.1.2。对于每个拓扑向量空间 E，以下结论成立：

[1] 这里 $\mathbb{K}$ 赋予通常拓扑，乘积赋予乘积拓扑。[2] 向量空间的子集 U 称为 *convex*，如果它对任意两点 x，$y \in U$ 也包含连接它们的线段，即 $tx + (1-t)y \in U$ 对所有 $t \in [0, 1]$ 均成立。

(a) 对于每个 $x \in E$，平移 $\tau_x\colon E \to E$, $\tau_x(y) := x + y$ 是一个同胚。*(b)* 对于每个 $t \in \mathbb{K}^\times$，映射 $h_t\colon E \to E$, $h_t(x) := tx$ 是一个同胚。*(c)* 每个零邻域 $U \subseteq E$ 都包含一个“平衡”的零邻域 V，也就是说，对于每个满足 $|t| \leq 1$ 的 $t \in \mathbb{K}$，都有 $tV \subseteq V$。于是，特别地有 $V = -V$。*(d)* 对于每个零邻域 $U \subseteq E$，都存在一个零邻域 $V \subseteq E$，使得 $V + V \subseteq U$。*(e)* 每个零邻域 $U \subseteq E$ 都是“吸收”的，也就是说，$E = \bigcup_{r>0} rU$。*(f)* 如果 $\mathcal{B}$ 是 E中的零邻域基，那么对于每个 $x \in E$，集合$\{x + U\colon U \in \mathcal{B}\}$ 是 E中 x 的邻域基。*(g)* 每个零邻域都包含一个闭零邻域。*(h)* 如果 $M \subseteq E$ 是紧集，且 $U \subseteq E$ 是满足 $K \subseteq U$的开子集，那么存在一个开零邻域 $W \subseteq E$，使得 $K + W \subseteq U$。*(i)* 如果 $M \subseteq E$ 是一个子集，且 $\mathcal{B}$ 是 E中的零邻域基，那么 M 的闭包由 $M = \bigcap_{U\in\mathcal{B}}(M + U)$ 给出。

—

证明。 (a) 加法映射 $\alpha\colon E \times E \to E$, $\alpha(u, v) := u + v$ 和映射 $i_x\colon E \to E \times E$, $i_x(y) := (x, y)$ 连续，因此 $\tau_x = \alpha \circ i_x$也连续。显然，$\tau_x$ 可逆，其逆映射 τ_{-x} 连续。因此，τ_x 是一个同胚。

(b) 数乘 $\mu\colon \mathbb{K} \times E \to E$ 连续，因此其部分映射 $h_t = \mu(t, \cdot)$ 和 $(h_t)^{-1} = h_{t^{-1}}$也连续。

(c) 由数乘 μ的连续性可知，原像 $\mu^{-1}(U)$ 在 $\mathbb{K}\times E$中是开集，因此存在 $\varepsilon > 0$ 和一个零邻域 $W \subseteq E$，使得 $\mathbb{D}_\varepsilon \times W \subseteq \mu^{-1}(U)$，从而 $V := \mathbb{D}_\varepsilon W = \mu(\mathbb{D}_\varepsilon \times W) \subseteq U$。于是$V \subseteq U$ 且 $\mathbb{D}V = V$，因为 $\mathbb{D}\mathbb{D}_\varepsilon = \mathbb{D}_\varepsilon$。

（d）由于加法 $\alpha\colon E \times E \to E$连续，且 $\alpha(0, 0) = 0$，原像 $\alpha^{-1}(U)$ 是一个（$0, 0$）-邻域。由于 $E \times E$ 赋予了乘积拓扑，存在零邻域 $V_1, V_2 \subseteq E$，使得 $V_1 \times V_2 \subseteq \alpha^{-1}(U)$。于是 $V := V_1 \cap V_2$ 具有所需的性质。

（e）给定 $x \in E$，映射 $f\colon \mathbb{K} \to E$, $f(t) := tx$ 连续，且 $f(0) = 0$。因此，$f^{-1}(U)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个零邻域，从而存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{n} \in f^{-1}(U)$。于是 $\frac{1}{n}x \in U$，因此 $x \in nU$。

（f）由 τ_x 是一个同胚（根据（a））这一事实可得。

(g) 给定一个零邻域 $U \subseteq E$，令 $V \subseteq E$ 为一个零邻域，使得 $V - V \subseteq U$（见 (d) 和 (c)）。给定 $w \in V$，根据 (f)，集合 $w + V$ 是 E 中 w 的一个邻域。因此，存在 $v_1 \in V$ 使得 $v_1 \in w + V$，从而又存在 $v_2 \in V$ 使得 $v_1 = w + v_2$。于是 $w = v_1 - v_2 \in U$。因此 $V \subseteq U$。

(h) 由 (f)，对每个 $x \in K$，都存在一个零邻域 $V_x \subseteq V$，使得 $x + V_x \subseteq U$。由 (d)，存在一个开零邻域 $W_x \subseteq E$，使得$W_x + W_x \subseteq V_x$。于是 $(x + W_x)_{x\in K}$ 是 K 的开覆盖。由 K的紧致性，存在一个有限子集 $F \subseteq K$，使得 $K \subseteq \bigcup_{x\in F}(x + W_x)$。于是$W := \bigcap_{x\in F} W_x$ 是一个开零邻域。给定 $y \in K$，存在 $x \in F$

使得 $y \in x + W_x$。于是 $y + W \subseteq x + W_x + W \subseteq x + V_x \subseteq U$。由于 y 是任意的，推出 $K + W = \bigcup_{y \in K}(y + W) \subseteq U$。

(i) 由于映射 $E \to E, x \mapsto -x$ 是一个同胚，集合 $-U$ 也构成零邻域基，其中 $U \in \mathcal{B}$。令 $x \in E$。那么，$x \in M$ 当且仅当对 x 的邻域基中的所有 V，都有 $V \cap M \neq \emptyset$。因此，$x \in M$ 当且仅当

$$(x - U) \cap M \neq \emptyset \tag{B.1}$$

对所有 $U \in \mathcal{B}$ 都成立（利用 (f)）。由于 (B.1) 等价于 $x \in M + U$，故结论得证。□

引理 B.1.3。设 E 是一个拓扑向量空间，且 $U \subseteq E$ 是凸的。那么以下结论成立：

(a) 对于每个 $t \in \mathbb{K}$ 和 $x \in E$，集合 tU 和 $U + x$ 都是凸的。(b) U 的内部 U^0 和闭包 $\overline{U}$ 是凸的。此外，对于所有 $x \in U$ 和 $t \in [0, 1[$，我们有 $tx + (1 - t)U^0 \subseteq U^0$。(c) 如果 $U^0 \neq \emptyset$，那么 U^0 在 U 中稠密。(d) 如果 U 是一个零邻域，$x \in U$，并且存在 $r > 1$ 使得 $rx \in U$，那么 $x \in U^0$。

证明。(a) 是平凡的。

(b) 给定 $t \in [0, 1]$，考虑 $\varphi\colon E \times E \to E, \varphi(x, y) := tx + (1 - t)y$。由于 U 是凸的，我们有 $\varphi(U \times U) \subseteq U$，从而 $\varphi(U \times U) \subseteq U$，这由 φ 的连续性可得。因此 $\overline{U}$ 是凸的。给定 $x \in U$ 和 $t \in [0, 1[$，集合 $tx + (1 - t)U^0 \subseteq U$ 依引理 B.1.2 (a) 和 (b) 在 E 中为开集，从而 $tx + (1 - t)U^0 \subseteq U^0$。因此 $tU^0 + (1 - t)U^0 \subseteq U^0$ 对每个 $t \in]0, 1[$ 成立，从而 U^0 是凸的。

(c) 给定 $x \in U$ 和 $y \in U^0$，我们有 $u_t := tx + (1 - t)y \in tx + (1 - t)U^0 \subseteq U^0$ 对每个 $t \in]0, 1[$ 成立，如刚才所证，其中 $u_t \to x$ 随 $t \to 1$。因此 $x \in U^0$。

(d) By (b), we have $x = \frac{1}{r}rx \in \frac{1}{r}(rx) + (1 - \frac{1}{r})U^0 \subseteq U^0$. □

注 B.1.4. 同样，若 $U \subseteq E$ 是平衡的，则 tU、$\overline{U}$、$x + U$ 和 U 也是平衡的。若 $U \subseteq E$ 是平衡零邻域，则 U^0 也是平衡零邻域。

回顾一下，向量空间 E 的子集 U 称为绝对凸，如果 U 既是平衡的又是凸的。

引理 B.1.5. 设 U 是向量空间 E 的一个子集。那么

(a) 存在一个最小的凸子集 $\operatorname{conv}(U) \subseteq E$ 包含 U。(b) 元素 $x \in E$ 属于 $\operatorname{conv}(U)$ 当且仅当存在 $k \in \mathbb{N}$、元素 $x_1, \ldots, x_k \in U$ 以及 $t_1, \ldots, t_k \in]0, \infty[$，使得 $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$ 且 $x = \sum_{j=1}^{k} t_j x_j$。(c) $\operatorname{absconv}(U) := \operatorname{conv}(\mathbb{D}U)$ 是 E 中包含 U 的最小绝对凸子集。

证明。设 C 为(b)中所述的所有元素 $x=\sum_{j=1}^{k} t_j x_j$ 的集合。我们断言：若 $D \subseteq E$ 是凸的且 $U \subseteq D$，则 $C \subseteq D$。为此，我们对 k 用归纳法证明，C 中每个形如 $x=\sum_{j=1}^{k} t_j x_j$ 的元素都属于 D。情形 $k=1$ 是平凡的。若该断言对 k 和 $x=\sum_{j=1}^{k+1} t_j x_j \in C$成立，则 $x=(1-t_{k+1})y+t_{k+1}x_{k+1}$，其中 y: $=\sum_{j=1}^{k} \frac{t_j}{1-t_{k+1}} x_j \in D$由归纳法得到，且 $x_{k+1} \in U \subseteq D$，从而 $x \in D$，因为集合 D 是凸的。因此 $C \subseteq D$。

要证明 C 是凸的，注意到在公式 $x=\sum_{j=1}^{k} t_j x_j$ 中，我们可以假设元素 x_j 两两不同。此外，显然，如果允许 $t_j=0$，我们得到的仍是同一个集合 C。因此，给定 $x,y \in C$，我们可以假设 $x=\sum_{j=1}^{k} t_j x_j$ 和 $y=\sum_{j=1}^{k} s_j x_j$，使用相同的元素 $x_1,\dots,x_k \in C$ 以及满足 $\sum_{j=1}^{k} t_j=\sum_{j=1}^{k} s_j=1$ 的某些 s_j, $t_j \in [0,\infty[$。给定 $t \in [0,1]$，于是有 $tx+(1-t)y=\sum_{j=1}^{k} r_j x_j$，其中 r_j: $=tt_j+(1-t)s_j \geq 0$，并且 $\sum_{j=1}^{k} r_j = t\sum_{j=1}^{k} t_j + (1-t)\sum_{j=1}^{k} s_j = t+(1-t) = 1$，因此 $tx+(1-t)y \in C$。所以 C 是凸的，从而 $C=\mathrm{conv}(U)$。

由于每个包含 U 的绝对凸集 D 也包含 $\mathbb{D}U$，因此必有 $\mathrm{conv}(\mathbb{D}U) \subseteq D$。另一方面，由 (b) 中的公式显然可知，$\mathrm{conv}(\mathbb{D}U)$ 是平衡的，因而是绝对凸的。因此，$\mathrm{conv}(\mathbb{D}U)$ 是包含 U 的 E 的最小绝对凸子集。□

引理 B.1.6。若 E 是局部凸空间，则每个零邻域$U \subseteq E$ 都包含一个开绝对凸零邻域和一个闭绝对凸零邻域。此外，点 $x \in E$ 的每个邻域都包含一个开 x 邻域和一个闭凸 x 邻域。

证明。由引理 B.1.2(g)，存在一个闭零邻域 $V \subseteq E$，使得 $V \subseteq U$。根据局部凸空间的定义，存在一个凸零邻域 $C \subseteq E$，使得 $C \subseteq V$。由引理 B.1.2(c)，存在一个平衡零邻域 $B \subseteq C$。于是 $Q := \mathrm{absconv}(B) = \mathrm{conv}(\mathbb{D}B) = \mathrm{conv}(B) \subseteq C$ 是绝对凸零邻域。由引理 B.1.3(b) 和注 B.1.4，集合 Q^0 和 $Q \subseteq V \subseteq U$ 是包含于 U 的 E 的绝对凸零邻域，且分别为开集和闭集。因此，所有开（分别为闭）绝对凸零邻域组成的集合 $\mathcal{B}$ 是零邻域基。给定 $x \in E$，集合 $\{x+W\colon W \in \mathcal{B}\}$ 根据引理 B.1.2(f) 是 x 邻域基。这里，$x+W$ 是开集（分别为闭集），因为平移 x 是一个同胚（引理 B.1.2(a)）。此外，W 是凸的，因此 $x+W$ 也是凸的（引理 B.1.3(a)）。□

引理 B.1.7。设 E 是一个我们不假定为豪斯多夫的拓扑向量空间。若 $\{0\}$ 在 E 中是闭集，则 E 是豪斯多夫空间。

证明。由于平移映射是同胚，当 $x \neq y$ 是 E 中的不同元素时，$\{x-y\}$ 是闭集（参见引理 B.1.2 (a)）。因此，$U := E \setminus \{x-y\}$ 是一个零邻域。利用引理 B.1.2 (c) 和 (d)，我们可以找到一个零邻域$V \subseteq E$，使得 $V-V \subseteq U$。于是 $x+V$ 和 $y+V$ 是不相交邻域

分别属于 x 和 y。事实上，若 $x+v=y+w$ 满足 $v,w\in V$，则会得到矛盾 $x-y=w-v\in V-V\subseteq U$。□

B.1节习题。

习题 B.1.1. 设 E 是一个拓扑向量空间， $U\subseteq E$ 是一个凸开零邻域。

(a) 证明集合 $V:=\{x\in U\colon \mathbb{D}x\subseteq U\}$ 是绝对凸的。利用华莱士引理（引理 A.4.3），证明 V 是开的。由此推出， V 是包含在 U中的最大绝对凸零邻域。(b) 设 α: $E\to E_1$ 是到拓扑向量空间 E_1 的线性映射，且 $U_1\subseteq E_1$ 是一个开凸零邻域，使得 $\alpha(U)\subseteq U_1$。若定义 $V_1:=\{y\in E_1\colon \mathbb{D}y\subseteq U_1\}$，证明 $\alpha(V)\subseteq V_1$。

B.2 线性映射的连续性与开性

命题 B.2.1. 设 $f\colon E\to F$ 是拓扑向量空间之间的线性映射。则有以下结论：

(a) f 连续，当且仅当 f 在0处连续。(b) f是开集，当且仅当对于每个0-邻域 $U\subseteq E$， $f(U)$是 F中的一个0-邻域。

证明。显然，每种情形下该条件都是必要的。下面证明其充分性。

(a) 假设 f 在 0 处连续；给定 $x\in E$，我们证明 f 在 x处连续。分别在 E 和 F上使用平移映射 τ_x 和 $\tau_{f(x)}$，得到 $f\circ\tau_x=\tau_{f(x)}\circ f$为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。因此

$$f=\tau_{f(x)}\circ f\circ\tau_x^{-1}. \tag{B.2}$$

现在，由于 τ_x^{-1}连续且 $\tau_x^{-1}(x)=0$，(B.2) 的右端在 x 处连续，因此左端 f也连续。

(b) 设 $U\subseteq E$ 为一个开子集。对于每个 $x\in U$，集合 $U-x$ 是 E中的一个零邻域（见引理B.1.2(a)），因此根据假设， $f(U-x)=f(U)-f(x)$是 F中的一个零邻域。因此， $f(U)=f(U-x)+f(x)$是 F中 $f(x)$ 的一个邻域，从而 $f(x)\in f(U)^0$。因此 $f(U)=f(U)^0$,，故 $f(U)$ 是开集。□

当然，只需在命题 B.2.1(b) 中考虑 U 的零邻域基中的 E 。

注 B.2.2.设 E 是一个向量空间， $\mathcal{O}_1$和 $\mathcal{O}_2$ 是 E上的向量拓扑。将命题 B.2.1(a)应用于恒等映射 $(E,\mathcal{O}_1)\to(E,\mathcal{O}_2)$，可知 $\mathcal{O}_2\subseteq\mathcal{O}_1$ 当且仅当 $(E,\mathcal{O}_2)$ 的每个零邻域都包含 $(E,\mathcal{O}_1)$的一个零邻域。

B.3 向量子空间、商群与直积

命题 B.3.1.设 E 是一个拓扑向量空间，且$(E_i)_{i\in I}$ 是由拓扑向量空间组成的族。

(a) 如果 $F \subseteq E$ 是一个向量子空间，那么诱导拓扑使 F 成为一个拓扑向量空间。此外， F 的闭包 $\overline{F}$ 是 E的一个向量子空间。如果 E 是局部凸的，那么 F也是局部凸的。(b) 笛卡尔积 $P := \prod_{i\in I} E_i$配备乘积拓扑以及逐分量加法和数乘后，是一个拓扑向量空间。如果每个 E_i 都是局部凸的，那么 P 也是局部凸的。(c) 如果 $F \subseteq E$ 是一个闭向量子空间，那么关于 q: $E \to E/F$, $q(x) := x + F$的商拓扑使商向量空间E/F 成为一个拓扑向量空间；若 E是局部凸的，则该空间也是局部凸的。商映射 q: $E \to E/F$ 是开映射。

证明。 (a) 由于加法 α: $E \times E \to E$ 是连续的，它的限制$\alpha|_{F\times F}$: $F \times F \to E$以及余限制 $\alpha|^F_{F\times F}$: $F \times F \to F$也连续，而后者就是 F上的加法。同理， F 上的数乘连续性继承自 E上的数乘连续性。因此， F 是一个拓扑向量空间。由于 α 是连续的且 $F + F = \alpha(F \times F) \subseteq F$，我们推得 $\overline{F} + \overline{F} = \overline{\alpha}(\overline{F} \times \overline{F}) \subseteq \overline{F}$。同样， $\mathbb{K}\overline{F} \subseteq \overline{F}$，因此 $\overline{F}$是 E的一个向量子空间。如果 E是局部凸的，且 $V \subseteq F$ 是一个零邻域，根据诱导拓扑的定义，存在一个零邻域 $U \subseteq E$ 使得 $U \cap F \subseteq V$。存在一个凸零邻域 $W \subseteq E$ 使得 $W \subseteq U$。那么 $F \cap W$ 是凸的（因为它是凸集的交集），并且它是 F 的一个零邻域，包含于 V中。因此 F 是局部凸的。

(b) 令 pr_i: $P \to E_i$ 为 $i \in I$的坐标投影。加法α: $P \times P \to P$由 $\alpha((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) = (\alpha_i(x_i, y_i))_{i\in I}$给出，其中用到了 E_i的加法 α_i。因此，对每个 $i \in I$，$\mathrm{pr}_i \circ \alpha = \alpha_i \circ (\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i)$ 都是连续的，从而由引理 A.2.6(b)可知 α 是连续的。类似地，我们可知 P 上的数乘是连续的。若每个 E_i 都是局部凸的，且 $U \subseteq P$ 是一个零邻域，则存在有限集 $J \subseteq I$ 和零邻域$U_i \subseteq E_i$，使得 $V := \bigcap_{i\in J} \mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) \subseteq U$，这是由乘积拓扑的定义得出的。缩小 U_i后，可假设每个 U_i 都是凸的。于是，线性映射 pr_i 下，集合U_i的原像 pr_i^{-1} 也为凸集（习题）；因此，凸集的交集 V 也是凸的，从而 V 是包含于 U中的凸零邻域。

(c) 我们赋予 $Q := E/F$ 商拓扑。若 $U \subseteq E$ 是开集，则对每个 $x \in F$， $U + x$ 在 E 中也为开集（参见引理 B.1.2 (a)），因此 $q^{-1}(q(U)) = U + F = \bigcup_{x\in F}(U + x)$ 是开子集之并，故为开集。因此，根据商拓扑的定义，$q(U)$ 在 Q 中是开集。现在 q 是开且满射的，因此 $q \times q$: $E \times E \to Q \times Q$, $(x, y) \mapsto (q(x), q(y))$ 也是开且满射的，由此 $q \times q$ 也是商映射。对于 E 上的加法映射 α 和 Q 上的加法映射 β，我们有

$$\beta \circ (q \times q) = q \circ \alpha .$$

这里右端是连续的，因此 $\beta \circ (q \times q)$ 也连续。由于 $q \times q$ 是商映射，这意味着 β 是连续的（见引理 A.3.5）。类似地，我们发现数乘在 $\mathbb{K} \times Q$ 上是连续的。因此， Q 是一个不一定为豪斯多夫的拓扑向量空间。现在 $\{0\}$ 在 Q 中是闭的，因为 $q^{-1}(\{0\}) = F$ 在 E 中是闭的，且 q 是一个商映射。因此 Q 是豪斯多夫的（见引理 B.1.7 ），从而 Q 是一个拓扑向量空间。

最后，如果 E 是局部凸的，且 $R \subseteq Q$ 是一个零邻域，那么 $q^{-1}(R)$ 是 E 中的零邻域，因此包含 E 的一个凸开零邻域 S。于是 $q(S) \subseteq R$ 在 Q 中是开集，并且是凸集，因为它是凸集在线性映射下的像（习题）。□

有一种特殊类型的向量子空间值得关注。

定义 B.3.2。拓扑向量空间 E 的向量子空间 X 称为（在 E 中）可补或分裂，如果存在一个向量子空间 $Y \subseteq E$（称为“补空间”），使得加法映射

$$X \times Y \to E, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

是拓扑向量空间同构。此时我们记作 $E = X \oplus Y$。

注 B.3.3。我们汇总一些关于可补向量子空间的基本事实。细节留作习题，供读者完成。

(a) 如果 F 在 E 中可补，那么 F 在 E 中是闭的。(b) 如果 E 是巴拿赫空间，且 $F \subseteq E$ 是闭向量子空间，那么向量子空间 $H \subseteq E$ 是 F 的补空间，当且仅当 H 是闭的、$F + H = E$，并且 $F \cap H = \{0\}$。这由开映射定理得出。(c) 希尔伯特空间的每个闭向量子空间都是可补的。

B.3 节习题

习题 B.3.1. 设 E 是一个向量空间，$(f_j)_{j \in J}$ 是一族线性映射 $f_j\colon E \to E_j$ 到拓扑向量空间 E_j，它们在 E 上分离点。那么，相对于 $(f_j)_{j \in J}$ 的 E 上的始拓扑 $\mathcal{O}$，使线性映射

$$f := (f_j)_{j \in J}\colon E \to \prod_{j \in J} E_j$$

成为到其像上的同胚。推导出，$(E, \mathcal{O})$ 是一个拓扑向量空间。如果每个 E_j 都是局部凸的，那么 $(E, \mathcal{O})$ 也是局部凸的。

B.4 零的邻域与连续半范数

虽然局部凸空间未必可赋范（也就是说，其上未必存在一个定义其拓扑的范数），但局部凸空间与赋范空间并非相去甚远：至少，它们的拓扑总可以由一组半范数定义，下面回顾这一点。

定义 B.4.1. 设 E 是一个向量空间。映射 $p\colon E \to [0,\infty[$ 称为 E 上的半范数，若它满足以下条件：

(a) 对所有 $x,\ y \in E$，有 $p(x+y) \le p(x) + p(y)$（次可加性）；(b) 对所有 $z \in \mathbb{K}$ 和 $x \in E$，有 $p(zx) = |z|p(x)$。

给定 $x \in E$ 和 $\varepsilon > 0$，我们将 $B_\varepsilon^p(x) := \{y \in E\colon p(y-x) < \varepsilon\}$ 以及 $B_\varepsilon^p(x) := \{y \in E\colon p(y-x) \le \varepsilon\}$。如果 $(E,\ \|\cdot\|)$ 是赋范空间，我们通常用 $B_r^E(x)$（或简单地用 $B_r(x)$）表示 $B_r^{\|\cdot\|}(x)$，并用 $B_r^E(x)^-$（或 $B_r(x)^-$）表示 $B_r^{\|\cdot\|}(x)$。

B.4.2. 与范数的情形不同，可能存在非零向量 $x \in E$ 使得 $p(x) = 0$。由 (a) 和 (b) 可知，对于 E 上的每个半范数 p，$N_p := \{x \in E\colon p(x) = 0\}$ 是 E 的向量子空间（例如，当 $x,\ y \in N_p$ 时，我们有 $0 \le p(x+y) \le p(x) + p(y) = 0$，因此 $p(x+y) = 0$，从而$x+y \in N_p$）。我们令 $E_p := E/N_p$ 为商向量空间，它由满足 $x \in E$ 的陪集 $x + N_p$ 构成。于是

$$\|\cdot\|_p\colon E_p \to [0,\infty[\,, \quad \|x+N_p\|_p := p(x)$$

是良定义的（若 $x + N_p = y + N_p$，则对某个 $z \in N_p$有 $x = y + z$，因此 $p(x) \le p(y) + p(z) = p(y)$；同理，$p(y) \le p(x)$。此外，由于 p 是半范数，$\|.\|_p$也是半范数；事实上，它是 E_p 上的范数，因为$0 = \|x+N_p\|_p = p(x)$ 蕴含 $x \in N_p$。我们令 $\alpha_p\colon E \to E_p$, $\alpha_p(x) := x + N_p$为典范商映射。[3]

凸零邻域与连续半范数密切相关。

命题 B.4.3。设 E 是一个拓扑向量空间，$U \subseteq E$ 是一个绝对凸零邻域。那么，闵可夫斯基泛函

$$\mu_U\colon E \to [0,\infty[\,, \quad \mu_U(x) := \inf\{t > 0\colon x \in tU\}$$

是 E上的连续半范数。若 U 是闭的，则 U 与 μ_U的闭单位球 $\{x \in E\colon \mu_U(x) \le 1\}$相同。反过来，对于每个连续半范数 $p\colon _E \to [0,\infty[,$，其闭单位球 $B\colon = B_1^p(0)$是 E 中的一个绝对凸零邻域，并且 $\mu_B = p$。

证明。最后一个断言显然成立。为证明其余断言，设 $U \subseteq E$ 为一个绝对凸零邻域。由引理 B.1.2(e)，U 是吸收的，因此对每个 $x \in E$，都有 $\mu_U(x) < \infty$。显然 $\mu_U(0) = 0$，因此若 $z = 0$，则 $\mu_U(zx) = 0$。现在假设 $z \in \mathbb{K}^\times$。若 $t > 0$ 使得 $zx \in tU$，则$x \in tz^{-1}U = t|z|^{-1}U$，从而 $t|z|^{-1} \ge \mu_U(x)$。取下确界，得到 $\mu_U(zx)|z|^{-1} \ge \mu_U(x)$，因此 $\mu_U(zx) \ge |z|\mu_U(x)$。类似地，$\mu_U(x) = \mu_U(z^{-1}zx) \ge |z|^{-1}\mu_U(zx)$，因此 $\mu_U(zx) \le |z|\mu_U(x)$，故等号成立。

[3] 有时，为了提高可读性，我们也会把 E上的半范数写成 $\|\cdot\|_p$，而不是 p。这不太可能与刚刚定义的 E_p 上的 $\|\cdot\|_p$ 相混淆。

若 $x,\ y\in E$ 且 $t,\ s>0$ 使得 $x\in tU$ 和 $y\in sU$，则

$$x+y\in tU+sU=(t+s)\big(\frac{t}{t+s}U+\frac{s}{t+s}U\big)=(t+s)U,$$

这意味着 $\mu_U(x)+\mu_U(y)\geq\mu_U(x+y)$。因此 μ_U 是一个半范数。

现在假设 U 是闭的。若 $x\in U$，则对 $t=1$ 有 $x\in tU$，因此$\mu_U(x)\leq 1$。反过来，设 $x\in E$ 满足 $\mu_U(x)\leq 1$。若 $\mu_U(x)<1$，则存在 $t\in\,]0,\ 1[$，使得 $x\in tU\subseteq U$，从而 $x\in U$。若 $\mu_U(x)=1$，则对每个 $t\in\,]0,\ 1[$，都有$\mu_U(tx)=t<1$，因此根据刚才证明的结论,一$tx\in U$。令 $t\to 1$，便得到 $x\in U=U$。因此，U 确实是 μ_U的闭单位球。

由于对每个 $\varepsilon>0,\ \mu_U$ 作为 $\mu_U^{-1}([0,\varepsilon])\supseteq\varepsilon U$，在零点连续。给定 $x\in E$，根据 μ_U 的次可加性，对于所有 $x,\ y\in E$，都有 $|\mu_U(x)-\mu_U(y)|\leq|\mu_U(x-y)|$。因此，对于每个 $\varepsilon>0,\ \mu_U(x+\varepsilon U)\subseteq[\mu_U(x)-\varepsilon,\ \mu_U(x)+\varepsilon]$，这意味着 μ_U 在 x 连续。□

定义 B.4.4。设 E 为一个向量空间。

(a) 若 $\mathcal{P}$ 是 E 上的半范数集，则称其为 分离的，如果对所有 $p\in\mathcal{P},\ p(x)=0$ 蕴含 $x=0$。(b) 若 $\mathcal{P}$ 是 E 上的分离半范数集，则映射

$$\alpha:=(\alpha_p)_{p\in\mathcal{P}}\colon E\to\prod_{p\in\mathcal{P}}E_p\,,\quad \alpha(x):=(\alpha_p(x))_{p\in\mathcal{P}}$$

是单射且线性的（其中 E_p 和 α_p 如 B.4.2 中所述）。我们赋予赋范空间的乘积以乘积拓扑（见命题 B.3.1(b)）。存在唯一确定的拓扑 $\mathcal{O}$ 作用于 E，使得 α 成为到 $\alpha(E)$ 上的同胚，其中 $\alpha(E)$ 赋予子拓扑；该拓扑称为 上由半范数集 $\mathcal{P}$ 定义的局部凸拓扑。

因此，$\mathcal{O}$ 是关于族（α_p）$_{p\in\mathcal{P}}$在 E 上的始拓扑。

注 B.4.5。由于 α（E）是局部凸空间（因为它是局部凸空间的向量子空间），且余限制映射 $\alpha|^{\alpha(E)}\colon\ E\to\alpha$（$E$）是向量空间的同构，因此显然 $\mathcal{O}$ 使 E 成为局部凸空间。此外，每个 $p\in\mathcal{P}$ 都是（$E,\ \mathcal{O}$）上的连续半范数，因为它可以写成连续映射的复合 $p=\|\cdot\|_p\circ\mathrm{pr}_p\circ\alpha$（其中$\mathrm{pr}_p$ 是从笛卡尔积到因子 E_p的投影）。

注 B.4.6.请注意，在定义 B.4.4(b) 的情形中，由 $\mathcal{P}$ 定义的 E 上的局部凸拓扑的零邻域基由以下形式的集合构成：

$$B_\varepsilon^{p_1}(0)\cap\cdots\cap B_\varepsilon^{p_n}(0)\,,\tag{B.3}$$

其中 $\varepsilon > 0$、 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$。事实上，显然，(B.3) 中的每个集合都是 E中的开零邻域，因为由 $\mathcal{P}$ 定义的局部凸拓扑使每个 $p \in \mathcal{P}$ 都是连续半范数。给定一个零邻域$U \subseteq E$，存在一个有限子集 $F \subseteq \mathcal{P}$ 以及针对$p \in F$的零邻域 $U_p \subseteq E_p$，使得 $\alpha(U) \supseteq \alpha(E) \cap \bigcap_{p\in F} \mathrm{pr}_p^{-1}(U_p)$（根据乘积拓扑的定义以及 α (E)上的诱导拓扑）。现在，由于 E_p是赋范的，我们可找到 ε_p，使得 $\{x \in E_p\colon \|x\|_p < \varepsilon_p\} \subseteq U_p$。令 $\varepsilon := \min\{\varepsilon_p\colon p \in F\}$。于是 $V := \bigcap_{p\in F} B_\varepsilon^p(0) \subseteq U$，因为 $\alpha(V) \subseteq \alpha(E) \cap \bigcap_{p\in F} \mathrm{pr}_p^{-1}(U_p) \subseteq \alpha(U)$，而这又是因为对于每个 $x \in V = \bigcap_{p\in F} B_\varepsilon^p(0)$和每个 $p \in F$，都有 $\|\mathrm{pr}_p(\alpha(x))\|_p = \|\alpha_p(x)\|_p = p(x) < \varepsilon$。

从注记 B.2.2 和 B.4.6 可清楚地看出以下观察：

引理 B.4.7。设 E 为一个向量空间，且 $\mathcal{P}_1$、 $\mathcal{P}_2$ 是 E 上的分离半范数集。对于 $j \in \{1, 2\}$，设 $\mathcal{O}_j$ 是 E 上由 $\mathcal{P}_j$ 定义的向量拓扑。那么以下条件等价：

(a) 对于每个 $p \in \mathcal{P}_2$，存在 $n \in \mathbb{N}$、 p_1、…、 $p_n \in \mathcal{P}_1$ 以及 r_1、…、 $r_n > 0$，使得 $p \leq r_1 p_1 + \ldots + r_n p_n$。(b) $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ 成立，即 $\mathcal{O}_2$ 比 $\mathcal{O}_1$ 更粗。 □

特别地，引理 B.4.7 告诉我们，何时两组半范数定义相同的向量拓扑。以下事实可由命题 B.4.3 推出：

命题 B.4.8。若 E 是局部凸拓扑向量空间，则 E 上的所有连续半范数构成的集合 $\mathcal{P}$ 是分离的。对于每个 $p \in \mathcal{P}$，映射 $\alpha_p\colon E \to E_p$ 是连续的，并且

$$\alpha := (\alpha_p)_{p\in\mathcal{P}}\colon E \to \prod_{p\in\mathcal{P}} E_p =: P$$

是线性的拓扑嵌入（即到其像上的同胚）。换言之， $\mathcal{P}$ 定义了 E上的给定局部凸拓扑。

证明。对于每个 $p \in \mathcal{P}$，线性映射 α_p 是连续的，因为 $\alpha^{-1}(B_\varepsilon^{\|\cdot\|_p}(0)) = B_\varepsilon^p(0)$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 都是一个零邻域。令 $\mathrm{pr}_p\colon P \to E_p$ 为典范投影。由于对每个 $p \in \mathcal{P}$，$\mathrm{pr}_p \circ \alpha = \alpha_p$ 都是连续的，因此映射 α 连续（见引理 A.2.6(b)）。此外，显然 α 是线性的，因为每个 α_p 都是线性的。给定 $0 \neq x \in E$，存在一个零邻域 $U \subseteq E$使得 $x \notin U$。由引理 B.1.6，存在一个闭的绝对凸零邻域 $B \subseteq E$，使得 $B \subseteq U$。由命题 B.4.3，存在一个连续半范数 $p \in \mathcal{P}$，其闭单位球为 B。由于 $x \notin B$，我们推得 $1 < p(x) = \|\alpha_p(x)\|_p$，从而 $\alpha_p(x) \neq 0$，进而 $\alpha(x) \neq 0$。因此 α 是单射。剩下要证明 α 是到其像上的开映射。由命题 B.2.1(b)，我们只需证明，对每个零邻域 $V \subseteq E$， $\alpha(V)$ 是 $\alpha(E)$ 中的一个零邻域。与前面一样，我们看到 V 包含某个连续半范数 $q \in \mathcal{P}$ 的闭单位球 Q。给定 $y \in \alpha(E)$，对某个 $x \in E$，有 $y = \alpha(x)$；由于 α 的单射性，

$$y = \alpha(x) \in \alpha(Q)$$

当且仅当 $y \in Q$ 时成立。后者当且仅当

$$1 \geq q(x) = \|\alpha_q(x)\|_q = \|\operatorname{pr}_q(y)\|_q,$$

即，当且仅当 $y \in \operatorname{pr}_q^{-1}(R)$，其中 $R \subseteq E_q$ 是 $\|\cdot\|_q$的闭单位球。因此 $\alpha(V) \supseteq \alpha(Q) = \alpha(E) \cap \operatorname{pr}_q^{-1}(R)$，它是一个零邻域。□

注 B.4.9。在命题 B.4.8 的情形下，设 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ 是一个连续半范数集，使得对每个 $p \in \mathcal{P}$，都存在 $q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{Q}$和 $r_1, \ldots, r_n > 0$，使得 $p \leq r_1 q_1 + \cdots + r_n q_n$。那么 $\mathcal{Q}$定义了给定的局部凸向量拓扑于 E 上（由命题 B.4.8 和引理 B.4.7 可知）。因此 $(\alpha_q)_{q\in\mathcal{Q}}\colon E \to \prod_{q\in\mathcal{Q}} E_q$ 是一个拓扑嵌入。

注 B.4.10. 设 E 是一个向量空间，且 p，q 是满足 $p \leq q$（逐点）的半范数。那么 $q(x)$ 蕴含 $p(x) = 0$，因此 $N_q \subseteq N_p$。根据同态定理，存在唯一的线性映射

$$\alpha_{pq}\colon E_q \to E_p$$

使得 $\alpha_{pq} \circ \alpha_q = \alpha_p$。给定 $y \in E_q$，有 $y = \alpha_q(x)$，其中某个 $x \in E$。于是

$$\|\alpha_{pq}(y)\|_p = \|\alpha_{pq}(\alpha_q(x))\|_p = \|\alpha_p(x)\|_p = p(x) \leq q(x) = \|\alpha_q(x)\|_q = \|y\|_q$$

这表明 α_{pq} 是一个连续线性映射，其算子范数为 $\|\alpha_{pq}\| \leq 1$。

例 B.4.11. 设 $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$。对于满足 $k \leq r$ 的 $k \in \mathbb{N}_0$，映射

$$p_k\colon C^r([0,1],\mathbb{R}) \to [0,\infty[\,, \quad p_k(\gamma) := \sup\{|\gamma^{(k)}(t)|\colon t \in [0,1]\}$$

是空间 $C^r([0,1],\ \mathbb{R})$ 上的一个半范数，其中该空间由 $[0,1]$ 上取实值的 C^r-映射构成。所有如前所述的 p_k 所组成的集合 $\mathcal{P}$，是 $C^r([0,1],\ \mathbb{R})$ 上的一个分离半范数集。我们赋予 $C^r([0,1],\ \mathbb{R})$ 由 $\mathcal{P}$ 所定义的局部凸拓扑。

回顾一下，如果存在一个定义在 X 上的度量 d，使其诱导的拓扑与给定拓扑一致，那么拓扑空间 X 就称为可度量化。

推论 B.4.12。对于局部凸拓扑向量空间 E，以下条件等价：

(a) E 可度量化；(b) E 是第一可数的，即对于每个 $x \in E$，都存在一个由 x-邻域组成的可数基；(c) E中存在一个由 0-邻域组成的可数基；(d)在 E 上存在一个可数集 $\mathcal{P}$，其元素为连续半范数，并由此定义其拓扑。

证明。(a)⇒(b)：设 E 上的度量 d 定义了其拓扑。那么，对于每个$x \in E$，球 $B_{1/n}(x) := \{y \in E\colon d(x,\ y) < 1/n\}$（由 $n \in \mathbb{N}$ 编号）构成一个由 x-邻域组成的可数基。

(b)⇒(c) 是平凡的。

(c)⇒(d)：设 $\mathcal{U}$ 是 E 中零邻域的一个可数基。对每个$U \in \mathcal{U}$，都存在一个闭绝对凸零邻域 $B_U \subseteq U$（见引理 B.1.6）以及一个定义在 E 上的连续半范数 p_U，其闭单位球为 B_U（见命题 B.4.3）。于是 $\mathcal{P} := \{p_U\colon U \in \mathcal{U}\}$ 是一组可数的连续半范数，并且它们是分离的，因为 $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} B_U = \{0\}$。令$\mathcal{B}\colon = \{B_U\colon U \in \mathcal{U}\}$。对于 $\mathcal{U}$ 中的每个有限序列 U_1、.....、U_n 以及 $r > 0$，集合 $rB_{U_1} \cap \cdots \cap rB_{U_n}$ 是 E 中的一个零邻域，因此包含某个$U \in \mathcal{U}$，进而也包含 B_U。因此，注 B.4.6 表明，$\mathcal{B}$ 是由 $\mathcal{P}$ 定义的 E 上局部凸拓扑的一个零邻域基。但$\mathcal{U}$ 也是原拓扑的一个零邻域基，这意味着两个向量拓扑一致。

(d)⇒(a)：设 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E 上的一列连续半范数，它们定义了 E 上的局部凸拓扑 $\mathcal{O}$。那么

$$d\colon E \times E \to [0,\infty[\,, \quad d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}\, p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$$

是连续函数，因为该级数在 $E \times E$ 上一致收敛。此外，利用

$$h\colon [0,\infty[\to [0,1[\,, \qquad h(t) := \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{t+t}$$

是单调递增的，且对所有 $s,t \in [0,\infty[$，$h(s+t) \le h(s) + h(t)$，不难看出 d 是一个度量（习题）。由于 d 在 $(E,\mathcal{O})$ 上连续，由 d 确定的拓扑 $\mathcal{T}$ 比给定的拓扑 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$ 更粗。给定 $x \in E$ 以及 $(E,\mathcal{O})$ 中 x 的一个邻域 U，利用引理 B.1.2(f) 和注 B.4.6，我们可以找到 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，使得 $B := \bigcap_{k=1}^{n} B_\varepsilon^{p_k}(x) \subseteq U$。令 $\delta := 2^{-n}h(\varepsilon)$。若 $y \in E$ 满足 $d(x,y) < \delta$，则对每个 $k \in \{1,\dots,n\}$，都有 $2^{-k}h(p_k(x-y)) < \delta$，因此 $h(p_k(x-y)) < 2^k\delta \le 2^n\delta = h(\varepsilon)$，从而 $p_k(x-y) < \varepsilon$，因为 h 严格单调递增。因此 $\{y \in E\colon d(x,y) < \delta\} \subseteq B \subseteq U$。由于对每个 $x \in E$，$(E,\mathcal{O})$ 中的每个 x- 邻域也是 $(E,\mathcal{T})$ 中的一个 x-邻域，我们可推得 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$。所以两个拓扑一致。□

定义 B.4.13. 如果一个局部凸空间 E 的局部凸向量拓扑可以由单个范数定义，则称其为**可赋范** 的。

B.4.14（更多例子）。 以下是局部凸空间的更多例子（它们不可赋范）：

(a) 根据推论 B.4.12，乘积拓扑使 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ 成为一个可度量化局部凸空间（因为半范数的可数集

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0,\infty[, f \mapsto |f(n)|$ 其中 $n \in \mathbb{N}$ 是分离的，并根据定义 B.4.4(b) 定义了乘积拓扑）。更一般地，任意可数个赋范空间的直积都是可度量化的。

(b) 我们在 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上赋予局部凸拓扑；这里的 $\mathbb{R}$ 上的连续实值函数空间由所有形如

$$p_K \colon C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to [0,\infty[\,, \quad p_K(\gamma) := \sup\{|\gamma(x)| \colon x \in K\}\,,$$

的半范数组成，其中 K 遍历 $\mathbb{R}$ 的所有紧子集 K。在 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上定义的（相同）局部凸拓扑由可数集 $\{p_{[-n,n]} \colon n \in \mathbb{N}\}$ 个半范数生成（习题），由此可知 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 可度量化。依照同样的方式，对于每个拓扑空间 X，$C(X, \mathbb{K})$ 都可以成为局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间。

(c) 给定一个开子集 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$，所有全纯函数 $\gamma \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 构成局部凸空间 $C(\Omega, \mathbb{C})$（按 (b) 中的方式定义）的一个向量子空间 $\mathrm{Hol}(\Omega)$。该空间可度量化，因为我们可以找到 Ω 的紧子集序列 $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$，使得 $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$，并且 $K \subseteq \Omega$ 的每个紧子集都包含于某个 K_n 中（见习题 A.6.10）。诱导拓扑使 $\mathrm{Hol}(\Omega)$ 成为可度量化局部凸空间。

B.4 节习题

习题 B.4.1. 证明在命题 B.4.3 的情形下，$\{x \in E \colon \mu_U(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x \in E \colon \mu_U(x) \leq 1\}$。若 U 是开集，则 $U = \{x \in E \colon \mu_U(x) < 1\}$。

B.5 线性泛函与 Hahn–Banach 定理

给定一个拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间 E，令 E' 为所有连续线性映射（“泛函”）$\lambda \colon E \to \mathbb{K}$ 构成的集合。由于连续线性泛函的和与数乘仍是连续线性泛函，E' 是空间 $\mathbb{K}^E$ 上所有 E 值函数的空间 $\mathbb{K}^E$ 的一个向量子空间。我们称 E' 为 E 的**对偶空间**。

Hahn–Banach 定理能够提供具有特定性质的连续线性泛函。值得注意的是，它们保证局部凸空间 E 上的连续线性泛函能够分离 E 中的点（定理 B.5.6）。Hahn–Banach 定理是泛函分析学中的有力工具。我们将采用一种几何的、无需计算的方法来研究 Hahn–Banach 定理。

将使用两个预备引理：

引理 B.5.1. 设 E 是一个实拓扑向量空间。如果 $E \setminus \{0\}$ 不连通，那么 E 是一维的。

证明。 如果 $\dim(E) > 1$，令 $x, y \in E \setminus \{0\}$。如果 x 和 y 线性无关，那么 $[0,1] \to E, t \mapsto x + t(y-x)$是 $E \setminus \{0\}$中一条从 x 到 y 的路径。如果 x 和 y线性相关，我们取 $z \in E \setminus \operatorname{span}\{x, y\}$。于是 x 和 z 以及 z 和 y 线性无关，因此 x 和 z （分别地， z 和 y）可如上所示，在 $E \setminus \{0\}$中由路径 γ （分别地， η）连接。将这两条路径连接起来，我们得到一条从 x 到 y的路径。由此可知 $E \setminus \{0\}$ 是路径连通的，因而是连通的。□

引理 B.5.2。设 E 是一个实拓扑向量空间。若存在一个非空开凸子集 $U \subseteq E \setminus \{0\}$，使得对每个 $x \in E \setminus \{0\}$都有 $U \cap \mathbb{R}x \neq \emptyset$，那么 E 是1维的。

证明。 简记 $P :=]0, \infty[$。集合 PU在正标量乘法下稳定（因为 $PP = P$）。此外，$PU + PU \subseteq PU$，因为对于所有 $a, b \in P$ 和 $v, w \in U$，利用 U 的凸性可得 $av + bw = (a+b)\left(\frac{a}{a+b}v + \frac{b}{a+b}w\right) \in (a+b)U \subseteq PU$。因此， PU 是所谓的“锥”（在加法和正标量乘法下稳定的集合）。由于 $PU = \bigcup_{r>0} rU$，集合 PU是开集。此外， $0 \notin PU$，因为 $0 \notin U$。我们还有 $PU \cap (-PU) = \emptyset$，因为若 $au = -bv$ 且 $a, b > 0, u, v \in U$，便会推出 $0 = au + bv \in PU + PU \subseteq PU$，而这正是我们刚刚排除的情况。由于对于每个 $0 \neq x \in E$， U 与 $\mathbb{R}x$ 相交，因此我们有

$$E = PU \cup (-PU) \cup \{0\}. \tag{B.4}$$

根据前面的论述，(B.4) 中的并是不交的。因此 $E \setminus \{0\} = PU \cup (-PU)$ 是不交并，其中 PU和 $-PU$都是开且非空的。于是 $E \setminus \{0\}$ 不连通，从而根据引理 B.5.1， E 是一维的。□

定理 B.5.3（Hahn–Banach 定理，实数情形）。若 E 是一个实拓扑向量空间，且 $U \subseteq E$ 是一个开凸子集，并且 $0 \notin U$，那么存在 $\lambda \in E'$ 使得

$$\lambda(U) \subseteq]0, \infty[.$$

证明。不妨设 $U \neq \emptyset$ （否则，取 $\lambda := 0$）。考虑由所有满足 $F \cap U = \emptyset$的向量子空间 $F \subseteq E$ 组成的集合 $\mathcal{A}$。集合的包含关系在 $\mathcal{A}$ 上给出了一个偏序，使得 $\mathcal{A}$ 成为一个归纳集。事实上，设 $\Gamma \subseteq \mathcal{A}$ 是一个链（即一个全序子集）。若 $\Gamma = \emptyset$，则平凡向量空间 $\{0\} \in \mathcal{A}$是 Γ的一个上界。否则，显然有 $\bigcup \Gamma \in \mathcal{A}$，且这个并是 Γ的一个上界。因此，根据佐恩引理，存在一个极大元 $H \in \mathcal{A}$。我们断言， H 是一个闭超平面，即一个满足 $\dim(E/H) = 1$的闭向量子空间。

H 是闭的：由于闭包 $\overline{H}$ 是一个向量子空间，而 $H \subseteq E \setminus \overline{U}$（因为后一个集合是闭的且包含 H），我们由 H的极大性推出 $H = \overline{H}$。

E/H 是 1维的。为此，令 $q\colon\ E \to E/H$ 为商映射，并设 $V := q(U)$。由于 q 是线性且开映射，集合 V 是 E/H的一个开凸子集。注意，V不包含商空间的零元素 H，因为 $H \in V$ 将意味着

$$\emptyset \neq q^{-1}(\{H\} \cap V) = q^{-1}(\{H\}) \cap q^{-1}(V) = H \cap (U + H)$$

因此存在 h_1、$h_2 \in H$ 和 $u \in U$，使得 $h_1 = u + h_2$，从而 $u = h_1 - h_2 \in U \cap H$，这就导出了矛盾。现在证明，每个满足 $K \cap V = \emptyset$ 的向量子空间 $K \subseteq E/H$ 都是平凡的。为此，注意到 $q^{-1}(K)$ 是 E 的一个向量子空间，且满足 $H \subseteq q^{-1}(K)$。此外，$U \cap q^{-1}(K) \subseteq q^{-1}(q(U)) \cap q^{-1}(K) = q^{-1}(V) \cap q^{-1}(K) = q^{-1}(V \cap K) = \emptyset$。因此，由 H 的极大性可知 $H = q^{-1}(K)$，于是 $K = q(q^{-1}(K)) = \{H\}$ 是平凡向量子空间。利用引理 B.5.2 可知，局部凸空间 E/H 是一维的，因此根据推论 B.6.8，它与 $\mathbb{R}$ 同构。我们选取一个拓扑向量空间同构$\varphi\colon\ E/H \to \mathbb{R}$，并令 $\lambda := \varphi \circ q\colon\ E \to \mathbb{R}$。于是 λ 是一个连续线性泛函，且 $\ker \lambda = H$ 与 U 不相交，因此 $0 \notin \lambda(U)$。由于 $\lambda(U)$ 是凸集在一个线性映射下的像，它是 $\mathbb{R}$ 的凸子集。由于 $0 \notin \lambda(U)$，必有 $\lambda(U) \subseteq]0, \infty[$ 或 $\lambda(U) \subseteq]-\infty, 0[$。第一种情形下，结论成立；第二种情形下，我们用 $-\lambda$ 替换 λ。□

为了将实数情形下的 Hahn–Banach定理推广到复数情形，我们先在复拓扑向量空间上建立实线性泛函与复线性泛函之间的一一对应。

引理 B.5.4. 设 E 是一个复拓扑向量空间。若 $\lambda\colon\ E \to \mathbb{C}$是 E上的连续复线性泛函，则 实部 $\circ\lambda\colon\ E \to \mathbb{R}$ 是一个连续实线性泛函。反之，对于每个连续实线性泛函 $u\colon\ E \to \mathbb{R}$，都存在唯一的连续复线性泛函$\lambda\colon\ E \to \mathbb{C}$，使得 $u =$实部 $\circ\lambda$；它由以下公式给出

$$\lambda(x) \ = \ u(x) - iu(ix) \qquad \textit{for all } x \in E. \tag{B.5}$$

证明。显然，若 $\lambda \in E'$，则 $u :=$ 实部$\circ\lambda$ 是连续实线性的。反之，设 $u\colon\ E \to \mathbb{R}$ 是一个连续实线性泛函。若存在 $\lambda \in E'$ 使得 $u =$ 实部 $\circ\lambda$，则 $\lambda = u + iv$，其中 $v :=$虚部 $\circ\lambda$。对于每个$x \in E$，我们有

$$u(ix) + iv(ix) \ = \ \lambda(ix) \ = \ i\lambda(x) \ = \ i(u(x) + iv(x)) \ = \ iu(x) - v(x)\,;$$

比较实部与虚部，我们得到 $v(x) = -u(ix)$。因此$\lambda(x) = u(x) - iu(ix)$ 确实成立，特别表明 λ 由其实部 u唯一确定。为了看出存在实部为 u 的复线性泛函，我们只需通过 (B.5) 定义映射 $\lambda\colon\ E \to \mathbb{C}$。于是 λ 是连续的、实线性的，且 $u = \operatorname{Re} \circ \lambda$。由于它是实线性的，显然只要能证明 $\lambda(ix) = i\lambda(x)$，则 λ 就是复线性的。情况正是如此：我们有$\lambda(ix) = u(ix) - iu(i(ix)) = i(u(x) - iu(ix)) = i\lambda(x)$。□

定理 B.5.5（Hahn–Banach 定理，复数情形）。若 E 是复拓扑向量空间，且 $U \subseteq E$ 是满足 $0 \notin U$ 的开凸子集，则存在 $\lambda \in E'$ 使得

$$\mathrm{Re}(\lambda(U)) \subseteq]0, \infty[.$$

证明。根据定理 B.5.3，存在一个连续实线性泛函u： $E \to \mathbb{R}$，使得 $u(U) \subseteq]0, \infty[$。引理 B.5.4 给出 $\lambda \in E'$，使得 Re $\circ\lambda = u$。于是 Re$(\lambda(U)) = u(U) \subseteq]0, \infty[$。□

定理 B.5.6。若 E 是一个局部凸拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间，则 E'在 E上分离点；也就是说，对所有满足 $x \neq y$的 x、$y \in E$，都存在$\lambda \in E'$，使得 $\lambda(x) \neq \lambda(y)$。

证明。由于 $x - y \neq 0$，存在一个开凸零邻域 $U \subseteq E$，使得 $x - y \notin U$。于是 $U - (x - y)$是 E 的一个开凸子集，且满足 $0 \notin U - (x - y)$。Hahn–Banach 定理给出 $\lambda \in E'$，使得 Re$(\lambda(U - (x - y))) \subseteq]0, \infty[$。于是

$$\mathrm{Re}(\lambda(y)) - \mathrm{Re}(\lambda(x)) = \mathrm{Re}(\lambda(-(x - y))) \in]0, \infty[$$

因此 Re$(\lambda(x))$ ≠Re$(\lambda(y))$，从而也有 $\lambda(x) \neq \lambda(y)$。□

下面这个观察很有用：

引理 B.5.7. 若 E 是一个拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间，且 λ: $E \to \mathbb{K}$ 是一个满足 $\lambda \neq 0$的线性泛函，则 λ 是开映射。

证明. 由命题 B.2.1(b)，我们只需证明：对于 E中的每个零邻域 U， $\lambda(U)$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个零邻域。缩小 U后，不妨设 U 是平衡的。于是 $\lambda(U) \subseteq \mathbb{K}$ 也平衡。由于$\lambda \neq 0$，存在 $x_0 \in E$ 使得 $\lambda(x_0) \neq 0$；将 x_0 替换为tx_0 并取足够小的 $0 \neq t \in \mathbb{K}$后，不妨设 $x_0 \in U$。令$r := |\lambda(x_0)| > 0$，于是有 $\mathbb{D}_r = \mathbb{D}\lambda(x_0) \subseteq \lambda(U)$，这说明$\lambda(U)$确实是一个零邻域。□

定理 B.5.8（Hahn–Banach 分离定理）。设 E 为实或复局部凸空间，$A \subseteq E$ 为闭凸子集，$K \subseteq E$ 为紧、凸且非空的集合，并且 $K \cap A = \emptyset$。那么存在 $\lambda \in E'$ 和 $r \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Re}(\lambda(A)) \subseteq]-\infty, r[\quad and \quad \mathrm{Re}(\lambda(K)) \subseteq]r, \infty[. \tag{B.6}$$

证明。由于 $K \subseteq E \setminus A$，其中 $E \setminus A$ 是开集（因为 A 是闭集），根据引理 B.1.2 (h)，我们可以找到一个绝对凸的开零邻域 $W \subseteq E$，使得 $K+W \subseteq E\setminus A$。于是 $K\cap(A+W) = \emptyset$（否则，对适当的元素 $x \in K$、$a \in A$和 $w \in W$，有 $x = a+w$，从而 $a = x-w \in A\cap(K+W)$,

矛盾）。因此， $U := A + W - K$ 是 E 的一个开凸子集，使得 $0 \notin U$。定理 B.5.3（分别地，定理 B.5.5）给出 $\mu \in E'$，使得

$$u(A) + u(W) - u(K) \;=\; u(U) \;\subseteq\;]0, \infty[\,, \tag{B.7}$$

其中 $u :=$ 实数 $\circ \mu$: $E \to \mathbb{R}$. 由于 $u(W)$ 是 $\mathbb{R}$中的一个开零邻域（根据引理 B.5.7），因此存在 $w \in W$ 使得 $u(w) < 0$. 集合 K 是紧的，因此对某个 $x_0 \in K$，有 $\max u(K) = u(x_0)$. 现在由 (B.7) 可知，$u(A) \subseteq]u(x_0) - u(w) \infty[,$ 故 $u(A) \subseteq]r, \infty[$，且 $u(x_0) \in]-\infty, r[$，其中$r := u(x_0) - \frac{1}{2}u(w)$. 于是 $u(K) \subseteq]-\infty, r[$. 现在令 $\lambda := -\mu$. □

因此，在实数情形下， A 和 K 分别包含于互不相交的开半空间 $\lambda^{-1}(]-\infty, r[)$ 和 $\lambda^{-1}(]r, \infty[)$ 中。换言之， A和 K可由闭超平面 $\lambda^{-1}(\{r\})$ 分离。

请注意，定理 B.5.8 尤其适用于 $K := \{x_0\}$，其中 $x_0 \in E \backslash A$。

定理 B.5.9（双极定理）。设 E 是实或复局部凸空间， $A \subseteq E$ 是绝对凸、闭且非空的子集，并且$x_0 \in E$ 满足 $x_0 \notin A$。那么存在 $\lambda \in E'$，使得 $|\lambda（x）| \leq 1$ 对所有$x \in A$均成立，但 $|\lambda（x_0）| > 1$。

证明。根据 Hahn–Banach 分离定理，存在 $\mu \in E'$ 和$r \in \mathbb{R}$，使得 $\mathrm{Re}(\mu(A)) \subseteq]-\infty, r[$ 且 $\mathrm{Re}(\mu(x_0)) > r$。令 $x \in A$。存在 $z \in \mathbb{K}$，使得 $|z| = 1$ 且 $\mu(zx) = z\mu(x) \in [0, \infty[$。现在，由于$A$ 是平衡的，因此 $zx \in A$。于是 $0 \leq |\mu(x)| = z\mu(x) = \mu(zx) = \mathrm{Re}(\mu(zx)) \in]-\infty, r[$，这意味着 $r > 0$ 且 $|\mu(x)| < r$。对于 $\lambda := \frac{1}{r}\mu$，我们于是有 $|\lambda(x)| < 1$，对每个 $x \in A$均成立；此外，$\mathrm{Re}(\lambda(x_0)) > -1$，因此 $|\lambda(x_0)| > 1$。□

双极定理这个名称的由来如下。

注 B.5.10。给定局部凸空间 E 的一个子集 A，称

$$A^\circ \;:=\; \{\lambda \in E' \colon |\lambda(x)| \leq 1 \text{ for all } x \in A\}$$

A 在 E'中的极集。类似地，给定 $B \subseteq E'$，将 B 在 E中的极集定义为集合 $B_\circ := \{x \in E\colon |\lambda(x)| \leq 1$ 对所有 $\lambda \in B\}$ 均成立。从这些定义显然可知，对于每个子集 $A \subseteq E$， $A \subseteq (A^\circ)_\circ$。双极定理蕴含

$$A \;=\; (A^\circ)_\circ\,, \tag{B.8}$$

对于每个绝对凸、闭且非空的子集 $A \subseteq E$，上述结论成立（习题）。

定理 B.5.11（Hahn–Banach 延拓定理）。设 E 是一个实向量空间， q: $E \to [0, \infty[$ 是一个半范数， $E_0 \subseteq E$ 是一个向量子空间，且 λ: $E_0 \to \mathbb{R}$ 是一个线性泛函，使得

$$|\lambda(x)| \leq q(x) \quad \textit{for all } x \in E_0.$$

那么存在一个线性泛函 $\Lambda\colon E \to \mathbb{R}$，使得 $\Lambda|_{E_0} = \lambda$ 且

$$|\Lambda(x)| \le q(x) \quad \textit{for all } x \in E.$$

若 E 是一个局部凸空间且 q 连续，则 Λ 连续。

证明。最终结论：若 q 连续，则对每个 $\varepsilon > 0$， $\Lambda^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) \supseteq q^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ 都是一个零邻域，因此 Λ 连续。

为证明 Λ 的存在性，在 E 上赋予任意一种豪斯多夫局部凸向量拓扑，使得 q 连续。于是

$$U := \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}\colon t > q(x)\}$$

是 $E \times \mathbb{R}$ 的一个开凸子集，使得

$$\operatorname{graph}(\lambda) \cap U = \emptyset.$$

Hahn–Banach 分离定理（在其证明中，我们可以考虑包含 $\operatorname{graph}(\lambda)$ 的向量子空间）给出了一个连续线性泛函

$$\theta\colon E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

使得 $\operatorname{graph}(\lambda) \subseteq \ker(\theta)$ 且 $\ker(\theta) \cap U = \emptyset$。我们可以写成

$$\theta(x,t) = \Lambda(x) + bt$$

其中 $\Lambda(x) := \theta(x,0)$，且 $b := \theta(0,1)$。假设 $b = 0$，则 $\{0\} \times \mathbb{R} \subseteq \ker(\theta)$，从而 $\{0\} \times]0,\infty[\subseteq U \cap \ker(\theta)$，矛盾。因此 $b \neq 0$，将 θ 替换为 $-\frac{1}{b}\theta$ 后，我们可以假设 $b = -1$。于是

$$\ker(\theta) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}\colon \Lambda(x) - t = 0\} = \operatorname{graph}(\Lambda).$$

值得注意的是，$\operatorname{graph}(\lambda) \subseteq \operatorname{graph}(\Lambda)$，因此 $\Lambda|_{E_0} = \lambda$。对于每个 $x \in E$，我们有 $(x,\Lambda(x)) \in \ker(\theta)$，从而 $(x,\Lambda(x)) \notin U$。因此

$$\lambda(x) \le q(x).$$

同样，$-\lambda(x) = \lambda(-x) \le q(-x) = q(x)$，从而 $|\lambda(x)| \le q(x)$。 □

推论 B.5.12. 设 E 为实局部凸空间，且 $q\colon E \to [0,\infty[$ 为连续半范数。对每个 $z \in E$，存在连续线性泛函 $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$，使得

$$\lambda(z) = q(z) \textit{ and } |\lambda(x)| \le q(x) \textit{ for all } x \in E.$$

证明。线性泛函 $\lambda_0\colon \mathbb{R}z \to \mathbb{R}$，对 $t \in \mathbb{R}$ 有 $tz \mapsto tq(z)$，满足 $\lambda_0(z) = q(z)$，且对所有 t 有 $|\lambda_0(tz)| = |t|q(z) = q(tz) \le q(tz)$，即

$$|\lambda_0(x)| \le q(x) \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}z.$$

Hahn–Banach 延拓定理（定理 B.5.11）给出 $\lambda \in E'$ 使得对于所有 $x \in E$ 和 $\lambda|_{\mathbb{R}z} = \lambda_0|_{\mathbb{R}z}$，$|\lambda(x)| \le q(x)$，因此特别有 $\lambda(z) = \lambda_0(z) = q(z)$。□

附录 B.5 的习题

习题 B.5.1。证明注 B.5.10 中的公式 (B.8)。

习题 B.5.2. 设 E 为局部凸空间。给定一个子集 $M \subseteq E$，我们称 $M^{\perp} := \{\lambda \in E' \colon (\forall x \in M)\ \lambda(x) = 0\}$ 为其在 E' 中的 *annihilator*。给定一个子集 $N \subseteq E'$，我们称 $N_{\perp} := \{x \in E \colon (\forall \lambda \in N)\ \lambda(x) = 0\}$ 为其在 E 中的湮灭子。

(a) 证明 $M^{\perp}$ 是 E' 的向量子空间。证明 $N_{\perp}$ 是 E 的闭向量子空间。(b) 证明如果 M 是 E 的向量子空间，则 $M^{\perp} = M^{\circ}$。同样，如果 N 是 E' 的向量子空间，则 $N_{\perp} = N_{\circ}$。(c) 利用注 B.5.10 中的 (B.8)，推导出对于每个闭向量子空间 $M \subseteq E$，都有 $M = (M^{\perp})_{\perp}$。

B.6 完备性与序列完备性

现在我们来研究拓扑向量空间的完备性，这些性质对分析学很有用，因为它们常可用于证明某些关心的极限存在。尽管关于序列的结果通常已足以满足我们的需要，但讨论网的收敛更为自然。网以及网的收敛的定义可参见附录 A。

定义 B.6.1。设 E 是一个拓扑 $\mathbb{K}$ 向量空间。

(a) 若对每个 E 中的零邻域 U，都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$x_n - x_m \in U \qquad \text{for all } n, m \geq N.$$

(b) 若空间 E 中的每个柯西序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都收敛，则称其为 序列完备。(c) 若对每个 E 中的零邻域 U，都存在 $\alpha_0 \in A$，使得对所有 $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ 都有 $x_\alpha - x_\beta \in U$，则称 E 中的网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 为柯西网。(d) 若 E 中的每个柯西网都收敛，则称 E 为完备。

注意，序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E 是柯西序列，当且仅当它是柯西网。因此，每个完备拓扑向量空间 Ealsois 都是序列完备的。

若 E 是拓扑向量空间，$F \subseteq E$ 是向量子空间，且 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 F 中的网，则 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 F 中的柯西网，当且仅当它是 E 中的柯西网（这从诱导拓扑的定义可知）。由此我们推得：

引理 B.6.2。如果 E 是一个拓扑向量空间，且 $F \subseteq E$ 是一个在诱导拓扑下完备的向量子空间，那么 F 在 E 中是闭的。

证明。如果 $x \in E$ 属于 F 的闭包，那么存在一个网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$，它位于 F 中并收敛到 x。因此，$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 E 中的柯西网，因而也是 F 中的柯西网，所以它在 F 中（因而也在 E 中）收敛到某个 $y \in F$。根据豪斯多夫空间中网极限的唯一性，我们有 $x = y \in F$。□

命题 B.6.3。可度量化拓扑向量空间 E 完备，当且仅当它是序列完备的。

证明。反向结论显然，因此我们只需考虑一个可度量化、序列完备的拓扑向量空间 E，并证明它是完备的。

由于 E 可度量化，存在一个由零邻域构成的序列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它们构成零邻域基。将 U_n 替换为$\bigcap_{k\le n} U_k$后，不妨设 $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$。

设 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 E中的一个柯西网。由于 (x_α) 是柯西网，存在一个元素 $\alpha_1 \in A$，使得对所有 α，$\beta \ge \alpha_1$，都有 $x_\alpha - x_\beta \in U_1$。接下来，我们找到 $\alpha_2 \in A$，使得对所有 α，$\beta \ge \alpha_2$，都有 $x_\alpha - x_\beta \in U_2$。注意，由于 A是有向的，存在 $\alpha_2' \in A$，使得 $\alpha_2' \ge \alpha_1$ 且 $\alpha_2' \ge \alpha_2$。将 α_2 替换为 α_2'后，不妨设 $\alpha_2 \ge \alpha_1$。如此继续，我们在 A中找到一个递增序列$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \cdots$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$x_\alpha - x_\beta \in U_n \qquad \text{for all } \alpha, \beta \ge \alpha_n.$$

对于所有的 k，$m \ge n$，我们有 α_k，$\alpha_m \ge \alpha_n$，因此 $x_{\alpha_k} - x_{\alpha_m} \in U_n$；于是 $(x_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ 是柯西序列，故根据假设收敛到某个 $x \in E$。设 U 是 E 中 x 的任意一个邻域。那么存在某个$n \in \mathbb{N}$，使得 $U_n + x \subseteq U$。根据引理 B.1.2(d)，存在某个 $m \in \mathbb{N}$，使得 $U_m + U_m \subseteq U_n$。由于序列 $(x_{\alpha_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到 x，因此存在一个自然数 $\ell \ge m$，使得对所有 $k \ge \ell$，都有 $x_{\alpha_k} \in U_m + x$。对于每个 $\alpha \ge \alpha_\ell$，我们得到

$$x_\alpha = (x_\alpha - x_{\alpha_\ell}) + x_{\alpha_\ell} \in U_\ell + U_m + x \subseteq U_m + U_m + x \subseteq U_n + x \subseteq U.$$

因此，网 (x_α) 收敛到 x。 □

例如，根据前述命题，每个巴拿赫空间都是完备局部凸空间。完备的可度量化局部凸空间十分常见，值得拥有自己的名称。

定义 B.6.4。完备的、可度量化的局部凸空间称为*Fr´echet* 空间。

引理 B.6.5。若 $\lambda\colon E \to F$ 是拓扑向量空间之间的连续线性映射，且 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 E中的柯西网，则 $(\lambda(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ 是 F中的柯西网。

证明。事实上，给定一个零邻域 $U \subseteq F$，由于 λ 的连续性，原像 $\lambda^{-1}(U)$ 是 E 中的零邻域。现在，由于 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是柯西网，存在 $\alpha_0 \in A$ 使得对于所有 α, $\beta \geq \alpha_0$，都有 $x_\alpha - x_\beta \in \lambda^{-1}(U)$。那么，对于所有 $\alpha, \beta \geq \alpha_0$，我们有

$$U \supseteq \lambda(\lambda^{-1}(U)) \ni \lambda(x_\alpha - x_\beta) = \lambda(x_\alpha) - \lambda(x_\beta),$$

因此，$(\lambda(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ 确实是一个柯西网。 □

定义 B.6.6。设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间。若对 A 中每个在 X 中收敛的序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，都有 $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$，则称子集 $A \subseteq X$ 为序列闭 的。

注意，若 $A \subseteq X$ 是闭集，则 A 是序列闭的。

以下构造保持完备性。

命题 B.6.7。（a）若（E_i）$_{i\in I}$ 是一族完备（分别地，序列完备）拓扑向量空间，则其直积$P := \prod_{i\in I} E_i$ 也完备（分别地，序列完备）。（b）设 E 是一个完备（分别地，序列完备）拓扑向量空间，$F \subseteq E$ 是一个闭（分别地，序列闭）向量子空间，则 F 也完备（分别地，序列完备）。

证明。我们只讨论完备性；要证明关于序列完备性的类似结论，只需将网替换为序列。

(a) 设 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 P 中的柯西网。给定 $i \in I$，典范投影 $\mathrm{pr}_i\colon P \to E_i$ 是连续线性映射，因此 $x_{i,\alpha} := \mathrm{pr}_i(x_\alpha)$ 是 E_i 中的柯西网（引理 B.6.5），从而收敛于某个 $y_i \in E_i$，因为假定 E_i 是完备的。于是 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 收敛于 $y := (x_i)_{i\in I} \in P$，因为$x_{i,\alpha} \to y_i$ 对每个 i 成立（见引理 A.2.6(b)）。

(b) 若 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 F 中的柯西网，则 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 也是 E 中的柯西网（将引理 B.6.5 应用于连续线性包含映射 $F \to E$），因而在 E 中收敛，设收敛于 $x \in E$。由于 F 在 E 中是闭的，我们由 $\{x_\alpha\colon\ \alpha \in A\} \subseteq F$ 推出 $x \in F = F$（见命题 A.1.10）。于是$x_\alpha \to x$ 在 F 中，后者配备由 E 诱导的拓扑（习题）。□

命题 B.6.8。每个有限维 $\mathbb{K}$向量空间 E上，都恰有一种拓扑 $\mathcal{O}$ 使其成为一个（豪斯多夫）拓扑 $\mathbb{K}$向量空间。E 上的每个范数都定义了这个向量拓扑，并且（$E, \mathcal{O}$）是完备的。

证明。证明采用对 E的维数 n 进行归纳的方法。设 E上有一个向量拓扑 $\mathcal{O}$。只需找到一个同构

$$\varphi\colon \mathbb{K}^n \to (E, \mathcal{O})$$

拓扑向量空间，其中 $\mathbb{K}^n$ 赋予乘积拓扑。事实上，若 $\mathcal{O}'$ 也是 E 上的向量拓扑，且 $\psi\colon \mathbb{K}^n \to (E,\ \mathcal{O}')$ 是

一个拓扑向量空间同构，那么 $\psi^{-1} \circ \mathrm{id}_E \circ \varphi$ 是向量空间 $\mathbb{K}^n$ 的自同态，因此是一个同胚（这可由初等微积分得知）。由此可得，$\mathrm{id}_E\colon (E,\ \mathcal{O}) \to (E,\ \mathcal{O}')$ 是一个同胚，因此 $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$。

若 $n = 1$，取 $0 \neq v \in E$。那么映射 $h\colon \mathbb{K} \to E,\ z \mapsto zv$ 是一个向量空间同构，且连续。若 $r > 0$，则存在一个平衡开零邻域 $W \subseteq E$，使得 $rv \notin W$。因此，$h^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{K}$ 的一个平衡开子集，且满足 $r \notin h^{-1}(W)$，于是对于某个 $s \in\,]0,\ r]$，有 $h^{-1}(W) = \mathbb{D}^0_s$。由此可得 $h(\mathbb{D}^0_r) \supseteq W$，因此 $h(\mathbb{D}^0_r)$ 是一个零邻域。于是 h 是开映射（由命题 B.2.1(b)），从而 h 是一个同胚。

若 $n > 1$，令 $F \subseteq E$ 为一个维数为 $n-1$ 的向量子空间。赋予 F 由 E 诱导的拓扑。由归纳法，F 是完备的，且我们得到一个拓扑向量空间同构 $\varphi\colon \mathbb{K}^{n-1} \to F$。由于 F 完备，它在 E 中是闭的，因此 E/F 是一个（豪斯多夫）拓扑向量空间。令 $q\colon E \to E/F,\ x \mapsto x + F$ 为典范商映射。由于 E/F 的维数为 1，我们得到一个拓扑向量空间同构 $\theta\colon \mathbb{K} \to E/F$。取 $v \in E$ 使得 $q(v) = \theta(1)$。根据一维向量空间向量拓扑的唯一性，向量空间同构 $q|_{\mathbb{K}v}\colon \mathbb{K}v \to E/F$ 是一个同胚。现在

$$\psi\colon \mathbb{K}^n \to E, \quad (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \varphi(z_1, \ldots, z_{n-1}) + z_n v =: w$$

是连续的，且是向量空间同构。由于 $z_n = \theta^{-1}(q(w))$ 和 $(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \varphi^{-1}(w - z_n v)$ 关于 w 连续依赖，我们可知 ψ^{-1} 连续。因此，ψ 是拓扑向量空间同构。□

命题 B.6.9。每个局部紧拓扑向量空间都是有限维的。

证明。若 E 局部紧，取 $K \subseteq E$ 为一个紧零邻域。由于 $2K$ 被 K^0的平移集覆盖，我们有

$$2K \subseteq \Phi + K \tag{B.9}$$

对于某个有限子集 $\Phi \subseteq E$。那么 $F := \operatorname{span}(\Phi)$ 是有限维的。根据命题 B.6.8，F 是完备的，因此在 E中是闭的，由此 E/F 是豪斯多夫的。令 $q\colon E \to E/F$ 为商映射。由 (B.9)，我们有

$$q(2K) \subseteq q(K) \ \text{ and thus } \ (\forall n \in \mathbb{N}_0)\ 2^n q(K) \subseteq q(K) \subseteq 2^{-n} q(K).$$

因此，$E/F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} 2^n q(K) = q(K) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} 2^{-n} q(K) = \{0\}$，这里用到了$q(K)$是吸收且有界的。因此 $E/F = \{0\}$，进而 $E = F$。□

注 B.6.10. 如果 E 是完备局部凸空间，且 $F \subseteq E$ 是闭向量子空间，那么 E/F 不一定完备（显式反例见例 B.13.17）。如果 E 可度量化，则不会出现这种病态情况（见引理 B.9.10(c)）。

B.7 局部凸空间的完备化

每个局部凸空间都可以完备化，这一点很有用。

定义 B.7.1。局部凸空间 E 的完备化是一个完备局部凸空间 $\widetilde{E}$，连同一个具有稠密像的线性拓扑嵌入 $\kappa_E\colon E \to \widetilde{E}$。

若完备化存在，则可使用标准的集合论论证来构造一个完备化（$\widetilde{E}$，κ_E），使得 $\widetilde{E}$ 是 E的向量子空间，且 κ_E 为包含映射，$x \mapsto x$。

命题 B.7.2。每个局部凸空间 E 都有完备化。

证明。令 $\mathcal{P}$ 为 E上所有连续半范数的集合。对每个 $p \in \mathcal{P}$，$\widetilde{E_p}$，我们令 E_p 为通过完备化赋范空间（E_p，$\|\cdot\|_p$）得到的巴拿赫空间，其中 $E_p := E/N_p$，且 $N_p := \{x \in E\colon p(x) = 0\}$，范数通过 $\|x + N_p\|_p := p(x)$ 对于 $x \in E$定义。我们可以假设 $E_p \subseteq \widetilde{E_p}$。对每个 $p \in \mathcal{P}$，令 $\alpha_p\colon E \to E_p$，$\alpha_p(x) := x + N_p$ 为自然的映射。设 $\alpha := (\alpha_p)_{p\in\mathcal{P}}\colon E \to \prod_{p\in\mathcal{P}} E_p =: P$。由于它是完备局部凸空间的直积，$P$ 是完备的（命题 B.6.7(a)）。于是$\widetilde{\alpha(E)}$，像 α 的闭包 $\widetilde{E} := \overline{\alpha(E)}$ 也是完备局部凸空间，因为它是完备局部凸空间 P的闭向量子空间（命题 B.6.7(b)）。令 $\kappa_E := \alpha|^{\widetilde{E}}\colon E \to \widetilde{E}$为$\alpha$ 到 $\widetilde{E}$的余限制。根据命题 B.4.8，线性映射 α，因而 κ_E也是拓扑嵌入。由$\widetilde{E}$的构造，κ_E 的像在 $\widetilde{E}$ 中稠密，因此（$\widetilde{E}$，κ_E）是 E的完备化。□

完备化在典范同构意义下是唯一的（见注 B.8.2 (c)）。

B.8 线性映射的连续延拓

命题 B.8.1.设 E 是一个局部凸空间，$E_0 \subseteq E$ 是一个稠密向量子空间，F 是一个完备局部凸空间，且 $\lambda\colon E_0 \to F$ 是一个连续线性映射。那么存在唯一的连续线性映射

$$\Lambda\colon E \to F$$

它延拓了 λ，即 $\Lambda|_{E_0} = \lambda$。

证明。**步骤 1：** 定义 Λ。给定 $x \in E$，命题 A.1.10 给出一个网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$，它在 E_0 中收敛于 x，且 x 属于 E，因为 $E_0 = E$。根据引理 B.6.5，$(\lambda(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ 是 F 中的柯西网，因此收敛，因为假设 F 是完备的。我们要定义

$$\Lambda(x) := \lim \lambda(x_\alpha) \tag{B.10}$$

为 $(\lambda(x_\alpha))_{\alpha\in A}$的极限。为证明此定义与所选网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$无关，再设 $(y_\beta)_{\beta\in B}$ 是 E_0 中的一个网，且在 E中收敛于 x。设$W \subseteq F$为一个开零邻域。于是， $\lambda^{-1}(W)$ 是 E_0中的开零邻域。由于 E_0 配备了诱导拓扑，我们可以找到 0 的一个开邻域 $V \subseteq E$，使得 $V\cap E_0 = \lambda^{-1}(W)$。设 $U \subseteq E$ 为一个零邻域，使得 $U - U \subseteq V$。我们可以找到 $\alpha_0 \in A$ 和 $\beta_0 \in B$，使得对所有 $A \ni \alpha \geq \alpha_0$ 和 $B \ni \beta \geq \beta_0$，均有 $x - x_\alpha \in U$ 和$x - y_\beta \in U$。注意到 E_0 是一个向量子空间，因此得到

$$x_\alpha - y_\beta \;=\; x - y_\beta - (x - x_\alpha) \;\in\; (U - U) \cap E_0 \;\subseteq\; V \cap E_0 \;=\; \lambda^{-1}(W)$$

对于任意这样的 α 和 β，因此 $\lambda(x_\alpha) - \lambda(y_\beta) = \lambda(x_\alpha - y_\beta) \in W$。先在 α 中取极限，再在 β中取极限，我们推得

$$\lim \lambda(x_\alpha) - \lim \lambda(y_\beta) \;\in\; \overline{W}\,.$$

由于形如 W 的集合构成零邻域基，且 F 是豪斯多夫的，我们推得 $\lim \lambda(x_\alpha) - \lim \lambda(y_\beta) = 0$，由此，映射$\Lambda\colon E \to F$ 由 (B.10) 定义良好。

步骤 2： Λ 是线性的。事实上，给定 x、$y \in E$ 和 $z \in \mathbb{K}$，设 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 和 $(y_\beta)_{\beta\in B}$ 是 E_0 中的网，分别收敛于 E中的 x 和 y。那么 $C := A \times B$通过规定 $(\alpha_1,\beta_1) \leq (\alpha_2,\beta_2)$（当且仅当 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 且 $\beta_1 \leq \beta_2$）成为一个有向集（习题）。此外，网 $(x_\alpha)_{(\alpha,\beta)\in C}$ 收敛于 x，而 $(y_\beta)_{(\alpha,\beta)\in C}$ 收敛于 y（习题）。用这些网代替 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 和 $(y_\beta)_{\beta\in B}$，不失一般性地可假设 $(A,\leq) = (B,\leq)$。那么容易看出，$(x_\alpha + zy_\alpha)_{\alpha\in A}$是 E_0 中的柯西网，收敛于 E中的 $x + zy$，因此

$$\begin{aligned}\Lambda(x + zy) &= \lim \lambda(x_\alpha + zy_\alpha) \;=\; \lim (\lambda(x_\alpha) + z\lambda(y_\alpha)) \\ &= \lim \lambda(x_\alpha) + z \lim \lambda(y_\alpha) \;=\; \Lambda(x) + z\Lambda(y)\,,\end{aligned}$$

根据命题 A.1.9 和引理 A.2.6(a)（利用加法以及数乘 z 都是连续映射）。因此，Λ 确实是线性的。

步骤 3： Λ 是连续的。给定任意零邻域 $Q \subseteq F$，存在一个开零邻域 $W \subseteq F$，其闭包 W 包含于 Q。于是，$V := \lambda^{-1}(W)$ 是 E_0 中的一个开零邻域。令 $U \subseteq E$ 为 E 中的一个开零邻域，使得 $U \cap E_0 = V$。由于 E_0 在 E中稠密，集合$U\cap E_0 = V$在 U中稠密，因此 $U = V$，即 V在 E中的闭包。给定 $x \in U$，有 $x \in V$，故存在一个网 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 属于 V，使得 $x_\alpha \to x$属于 E。由于对每个 α， $\lambda(x_\alpha) \in W \subseteq W$，由命题 A.1.10 可得

$$\Lambda(x) \;=\; \lim \lambda(x_\alpha) \;\in\; \overline{W} \;\subseteq\; Q\,.$$

因此 $\Lambda(U) \subseteq Q$，这表明线性映射 Λ 在零点连续，因而连续。由于 E_0 在 E中稠密，延拓 λ 的连续映射 Λ 是唯一确定的。□

注 B.8.2.设 E 是一个局部凸空间，E 是 E的完备化，并配有典范嵌入 $\kappa\colon E \to E$。我们可以假设满足 $E \subseteq E$ 和 $\kappa(x) = x$。

(a) 由于 $\mathbb{K}$ 是完备局部凸空间，命题 B.8.1 表明，每个连续线性泛函 $\lambda\colon E \to \mathbb{K}$ 都可唯一延拓为连续线性泛函 $E \to \mathbb{K}$。反过来，对每个 $\lambda \in (E)'$，$\kappa'(\lambda) := \lambda \circ \kappa = \lambda|_E$ 都是 E上的连续线性泛函。因此，由于它也是线性的，双射

$$\kappa'\colon (\widetilde{E})' \to E', \qquad \lambda \mapsto \kappa'(\lambda) = \lambda \circ \kappa$$

是向量空间同构。

(b) 同样，每个从 E到完备局部凸空间 F的连续线性映射 $E \to F$都可唯一延拓为连续线性映射 $E \to F$。这意味着自然线性映射

$$\mathcal{L}(\kappa, F)\colon \mathcal{L}(\widetilde{E}, F) \to \mathcal{L}(E, F), \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \kappa$$

在所示的连续线性映射空间之间构成向量空间同构。

(c) 特别地，对于每个 E 的完备化 $\gamma\colon E \to F$，都存在唯一的连续线性映射 $\gamma_1\colon E \to F$和 $\kappa_1\colon F \to E$，使得 $\gamma_1 \circ \kappa = \gamma$和 $\kappa_1 \circ \gamma = \kappa$。那么 $(\gamma_1 \circ \kappa_1) \circ \gamma = \gamma_1 \circ \kappa = \gamma = \mathrm{id}_F \circ \gamma$ 蕴含 $\gamma_1 \circ \kappa_1 = \mathrm{id}_F$，同理 $\kappa_1 \circ \gamma_1 = \mathrm{id}_{\tilde{E}}$。因此，$\gamma_1\colon E \to F$和 $\kappa_1\colon F \to E$ 是拓扑向量空间之间互为逆映射的同构。因此，E 和 F 自然同构。

附录 B.8 习题

习题 B.8.1. 设 E是局部凸空间，E是 E的完备化，且满足 $E \subseteq \widetilde{E}$。则每个 $\lambda \in E'$ 都有唯一延拓，成为 $\widetilde{E}$上的连续线性泛函 $\widetilde{\lambda}$。我们证明：若子集 $\Lambda \subseteq E$在 E上分离点，则 $\{\widetilde{\lambda}\colon \lambda \in \Lambda\} \subseteq (\widetilde{E})'$未必在 E上分离点。

为给出一个例子，设 F是具有真稠密向量子空间 E的完备局部凸空间；设 $0 \neq v \in F \setminus E$（例如，$F := \ell^1$，$E \subseteq F$为有限序列的子空间，$v = (1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$）。于是 F是 E的完备化。则 $M := \mathbb{R}v$是 F的闭向量子空间（参见命题 B.6.8），从而 $(M^\perp)_\perp = M$（见习题 B.5.2）。证明 $\Lambda := \{\lambda|_E\colon \lambda \in M^\perp\}$在 E上分离点，但 $M^\perp = \{\widetilde{\lambda}\colon \lambda \in \Lambda\}$不能在 $F = \widetilde{E}$上分离点。

练习 B.8.2。设 X 是一个豪斯多夫拓扑空间，E 是一个局部凸空间，且 $\widetilde{E}$ 是 E的一个完备化，使得 $E \subseteq \widetilde{E}$。记 $k(X)$ 为 X，并赋予其关于包含映射 $i_K\colon K \to X$（其中 K 属于 X 的紧子集集合）的终拓扑。则映射 $k(X) \to X, x \mapsto x$ 是连续的。

(a) 证明子集 $K \subseteq X$ 在 X 中紧，当且仅当它在 $k(X)$中紧。由此推得 $k(X)$是一个 k-空间。对于每个豪斯多夫拓扑空间 Y，证明包含映射 $C(X, Y) \to C(k(X) Y)$是一个拓扑嵌入。

˜(b) 证明 $C(X, E)$ 在 $C(k(X) E)$ 中的闭包是 $C(X, E)$ 的一个完备化 $C(X, E)^{\sim}$。(c) 在元素 $x \in X$ 处的点求值 $\varepsilon_x\colon C(k(X) E)$ 可以分离 $\sim C(X, E)^{\sim} \subseteq C(k(X) E)$ 中的点，因此映射 $\lambda \circ \varepsilon_x$（其中 $x \in X$ 且 $\lambda \in (\widetilde{E})'$）也可以分离点。因此，例 B.8.1 中描述的病态现象不会出现在 Λ 中: $= \{\lambda \circ \varepsilon_x\colon x \in X, \lambda \in E'\} \subseteq C(X, E)'$，也用 ε_x 表示 $C(X, E)$ 上的点求值；这在讨论取值于 $C(X, E)$ 的弱积分时可能会有用。

B.9 有界集与弱拓扑

定义 B.9.1. 拓扑向量空间 E 的子集 $B \subseteq E$ 称为有界 的，如果它被每个零邻域吸收，即，对于 0 的每个邻域$U \subseteq E$，都存在 $r > 0$ 使得 $B \subseteq rU$。

引理 B.9.2。 如果 $\alpha\colon E \to F$ 是拓扑向量空间之间的连续线性映射，并且 $B \subseteq E$ 是有界的，那么 $\alpha(B) \subseteq F$ 是有界的。

证明。 如果 U是 F中的零邻域，则 $\alpha^{-1}(U)$是 E中的零邻域。由于 B 有界，我们找到 $r > 0$ 使得 $B \subseteq r\alpha^{-1}(U) = \alpha^{-1}(rU)$。因此， $\alpha(B) \subseteq rU$。□

引理 B.9.3。若 E 是拓扑向量空间， $F \subseteq E$ 是向量子空间，并且 $B \subseteq F$, 则 B 在 F 中有界，当且仅当 B 在 E 中有界。

证明。若 B 在 F 中有界，则 $B = \lambda(B)$ 在 E 中有界，因为包含映射 $\lambda\colon F \to E \to \lambda(x) := x$ 是连续线性的（引理 B.9.2）。反过来，假设 B 在 E 中有界，并设 $U \subseteq F$ 是一个零邻域。则存在一个零邻域 $V \subseteq E$，使得 $F \cap V \subseteq U$。由于集合 B 在 E 中有界，我们可以找到 $r > 0$，使得 $B \subseteq rV$。因此，$B \subseteq F \cap rV = r(F \cap V) \subseteq rU$，这表明 B 在 F 中有界。□

引理 B.9.4。 设$(E_j)_{j\in J}$ 是拓扑向量空间族，且 $E := \prod_{j\in J} E_j$ 是它们的直积，并带有典范投影 $\mathrm{pr}_j\colon E \to E_j$。则子集 $B \subseteq E$ 是有界的，当且仅当对于每个 $j \in J$，$\mathrm{pr}_j(B)$ 在 E_j 中是有界的。

证明。 若 B 是有界的，则根据引理 B.9.2（投影 pr_j 是连续线性的），对于每个 $j \in J$，$\mathrm{pr}_j(B)$ 也是有界的。反之，假设对于每个 $j \in J$，$\mathrm{pr}_j(B)$ 都是有界的。若 $U \subseteq E$ 是一个零邻域，则存在一个有限子集 $F \subseteq J$ 以及零邻域 $U_j \subseteq E_j$，使得

$$\bigcap_{j\in F} \mathrm{pr}_j^{-1}(U_j) \subseteq U.$$

缩小 U_j 后，我们可以假设每个 U_j 都是平衡的。由于 $\mathrm{pr}_j(B)$ 有界，我们可以找到 $r_j > 0$，使得 $\mathrm{pr}_j(B) \subseteq r_j U_j$。令 $r := \max\{r_j\colon j \in F\}$。

于是 $\mathrm{pr}_j(B) \subseteq r_j U_j \subseteq rU_j$，因此对每个$j \in F$，都有 $B \subseteq \mathrm{pr}_j^{-1}(rU_j) = r\mathrm{pr}_j^{-1}(U_j)$，这里用到了 U_j 是平衡的。因此 $B \subseteq r\bigcap_{j\in F}\mathrm{pr}_j^{-1}(U_j) \subseteq rU$，这表明 B 是有界的。□

引理 B.9.5. 若 E 是一个局部凸空间，则子集 $B \subseteq E$ 有界，当且仅当对于 E 上的每个连续半范数 p，$p(B)$ 都是 $\mathbb{K}$的有界子集。

证明。若 B有界，且$p\colon E \to [0,\infty[$是连续半范数，则球 $U := \{x \in E\colon p(x) \leq 1\}$ 是一个零邻域，因此 $B \subseteq rU$ 对某个$r > 0$成立，从而 $p(B) \subseteq p(rU) = rp(U) \subseteq [0, r]$。反之，假设对于每个连续半范数 p，$p(B)$ 都有界。若 $U \subseteq E$ 是一个零邻域，则由引理 B.1.6 和命题 B.4.3 可得一个连续半范数 q，使得 $V := \{x \in E\colon q(x) \leq 1\} \subseteq U$。根据假设，对于某个$r > 0$，$q(B) \subseteq [0, r]$，因此 $q(r^{-1}B) \subseteq [0, 1]$，从而 $r^{-1}B \subseteq V$，于是 $B \subseteq rV \subseteq rU$。□

定义 B.9.6。局部凸空间 E 上的弱拓扑 是相对于由所有连续线性泛函组成的集合 E' 所定义的始拓扑，即使下式成为

$$\eta\colon (E, \mathcal{O}_w) \to \prod_{\lambda\in E'} \mathbb{K} = \mathbb{K}^{E'}, \qquad x \mapsto (\lambda(x))_{\lambda\in E'} \tag{B.11}$$

一个拓扑嵌入，其中右端赋予乘积拓扑。我们将 E_w 记作 E，并赋予其弱拓扑 $\mathcal{O}_w$。由于 (B.11) 右端的乘积是一个局部凸空间，E_w也如此。若 E 的一个子集在 E_w中是开（分别为闭、有界）的，则称它为弱开 （弱闭、分别为弱有界）。

注意，根据弱拓扑的定义，每个 $\lambda \in E'$ 在 E_w上都是连续的；因此 $E' \subseteq (E_w)'$。由于弱拓扑比原拓扑更粗，我们也有 $E' \supseteq (E_w)'$，从而

$$E' = (E_w)'. \tag{B.12}$$

引理 B.9.7。设 E 是一个局部凸空间。则子集 $B \subseteq E$ 是弱有界的，当且仅当对于每个 $\lambda \in E'$，λ（B）都是 $\mathbb{K}$的有界子集。

证明。若 $B \subseteq E_w$ 有界，则根据引理 B.9.2，对于每个 $\lambda \in E' = (E_w)'$，$\lambda(B) \subseteq \mathbb{K}$ 有界。反之，若对于每个 $\lambda \in E'$，$\lambda(B)$ 在 $\mathbb{K}$ 中有界，则对于每个 $\lambda \in E'$，$\mathrm{ev}_\lambda(\eta(B)) = \lambda(B)$ 有界（其中 $\eta\colon E \to \mathbb{K}^{E'}$ 如 (B.11) 中所示，且 $\mathrm{ev}_\lambda = \mathrm{pr}_\lambda\colon \mathbb{K}^{E'} \to \mathbb{K}, \xi \mapsto \xi(\lambda)$ 是求值映射）。因此，根据引理 B.9.4，$\eta(B)$ 在 $\mathbb{K}^{E'}$ 中有界。由于 $\eta(B) \subseteq \eta(E)$，这意味着 $\eta(B)$ 在 $\eta(E)$ 中有界。因此，根据引理 B.9.2，$B = (\eta|^{\eta(E)})^{-1}(\eta(B))$ 在 E_w 中有界。□

定理 B.9.8（Mackey 定理）。局部凸空间 E 的子集 B 有界，当且仅当它是弱有界的。

证明。映射 $\Lambda\colon E \to E_w$ 连续，因此 B 在 E 中有界，意味着 $B = \Lambda(B)$ 在 E_w 中有界。反过来，假设 $B \subseteq E$ 弱有界。设 $\mathcal{P}$ 为 E 上所有连续半范数构成的集合。根据引理 B.9.5，若能证明对每个 $p \in \mathcal{P}$，$p(B)$ 在 $\mathbb{R}$ 中有界，则 B 有界。定义 $E_p := E/N_p$，并令 $\|.\|_p$ 为由 $\|\alpha_p(x)\|_p = p(x)$ 确定的 E_p 上的范数，如 B.4.2 所述。取巴拿赫空间 $\widetilde{E_p} := \widetilde{(E_p, \|\cdot\|_p)}$，它是赋范空间 $(E_p, \|\cdot\|_p)$ 的完备化；也就是说，另有一个线性等距映射 $\gamma_p\colon E_p \to E_p$，其像稠密。于是 $\beta_p := \gamma_p \circ \alpha_p\colon E \to \widetilde{E_p}$ 是一个连续线性映射，并且对每个 $x \in E$，$\|\beta_p(x)\|_p^{\sim} = p(x)$。因此，若能证明对每个 $p \in \mathcal{P}$，$\|\beta_p(B)\|_p^{\sim} = p(B)$ 有界，则 B 有界。注意，对每个连续线性泛函 $\lambda\colon E_p \to \mathbb{K}$，复合映射 $\lambda \circ \beta_p$ 是 E 上的连续线性泛函，因此 $\lambda(\beta_p(B)) = (\lambda \circ \beta_p)(B) \subseteq \mathbb{K}$ 有界。因此，$\beta_p(B)$ 在 E_p 中弱有界，只需证明 $\beta_p(B)$ 在 E_p 中有界。于是，不失一般性，现在可以假设 E 是巴拿赫空间，且 $B \subseteq E$ 弱有界。正如我们从赋范空间的泛函分析中所知，赋予算子范数后，E' 成为巴拿赫空间。重复这一过程，双对偶 E''（即 E' 的对偶）也成为巴拿赫空间。众所周知，求值同态

$$\eta\colon E \to E''$$

取 $x \in E$ 到 $\eta(x)\colon E' \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto \lambda(x)$ 是线性等距映射。[4] 根据引理 B.9.3，若能证明 $\eta(B)$ 在 E'' 中有界，则 B 有界。给定 $\lambda \in E'$，令 $\mathrm{ev}_\lambda\colon E'' \to \mathbb{K}$，$\mathrm{ev}_\lambda(\xi) = \xi(\lambda)$ 为点求值。由于对每个 $x \in E$，$\mathrm{ev}_\lambda(\eta(x)) = \eta(x)(\lambda) = \lambda(x)$，我们得到 $\mathrm{ev}_\lambda(\eta(B)) = \lambda(B)$，它在 $\mathbb{K}$ 中有界。因此，将一致有界原理（参见 [Ru87，定理 5.8]；另见 [Ru91，定理 2.6]）应用于巴拿赫空间 E' 上由连续线性映射 $E' \to \mathbb{K}$ 构成的集合$\eta(B)$，可知 $\eta(B)$ 在 E'' 中有界，证毕。□

命题 B.9.9。局部凸空间 E 可赋范，当且仅当它具有一个有界的 0-邻域。

证明。 如果 E 上的拓扑来自一个范数，那么单位球 $B_1^E(0)$ 是一个有界零邻域。反过来，假设 $U \subseteq E$ 是一个有界零邻域。必要时缩小 U 后，我们可以假设 U 是绝对凸且闭的（见引理 B.1.6）。令 $p := \mu_U$ 为与 U 相关联的闵可夫斯基泛函。那么 p 是 E 上的连续半范数。如果 $V \subseteq E$ 是任意一个零邻域，那么 $U \subseteq rV$ 对某个 $r > 0$ 成立，因此

[4]这也可由双极定理（定理 B.5.9）推出。注意，闭单位球 $U \subseteq E$ 的极集 U° 是 E' 中的闭单位球，因此，E'' 中 U° 的极集 $U^{\circ\circ}$ 是 E''中的闭单位球。根据双极定理，$\eta(U) = U^{\circ\circ} \cap \eta(E)$。

$\mathcal{B}^p_{1/r}(0) = \frac{1}{r}\mathcal{B}^p_1(0) = \frac{1}{r}U \subseteq V$。由 p 产生的向量拓扑 $\mathcal{T}$ 因而比给定拓扑更细。由于 $\mathcal{T}$ 也比给定拓扑更粗，这两个拓扑相同。因此 $\mathcal{T}$ 是豪斯多夫的，这意味着半范数 p 是一个范数。□

引理 B.9.10.设 E 是一个局部凸空间， $F \subseteq E$ 是一个闭向量子空间，且 q: $E \to E/F$ 是商映射。则有以下结论:

(a) E 可度量化，当且仅当 F 和 E/F 都可度量化。(b) E 可赋范，当且仅当 F 和 E/F 都可赋范。(c) E 是弗雷歇空间，当且仅当 F 和 E/F 都是弗雷歇空间。(d) E 是巴拿赫空间，当且仅当 F 和 E/F 都是巴拿赫空间。

证明。令 $Q := E/F$。

(a) 若 E 可度量化，则 F也可度量化。此外， E 有一个由零邻域组成的可数基$\{U_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$。于是 $\{q(U_n)\colon\ n \in \mathbb{N}\}$是可数的，且构成 Q 的零邻域基（参见命题 B.3.1(c)），因此根据推论 B.4.12， Q 可度量化。反过来，若 F 和 Q 都可度量化，则分别取 F和 Q的零邻域可数基 $\{V_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{W_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 。对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个零邻域 $U_n \subseteq E$，使得 $F \cap U_n \subseteq V_n$ 和 $U_n \subseteq q^{-1}(W_n)$。借助引理 B.1.2 (d)和(c)，缩小 U_2， U_3，...后，我们可以假设

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - U_{n+1} \subseteq U_n\,. \tag{B.13}$$

Then

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} \subseteq E \setminus (U_{n+1} + (F \setminus U_n))\,. \tag{B.14}$$

事实上，否则对于某些 $x, y \in U_{n+1}$ 和 $z \in F \setminus U_n$，就会有 $x = y + z$，从而导致矛盾 $z = x - y \in U_{n+1} - U_{n+1} \subseteq U_n$。我们证明 $\{U_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 是 E 的零邻域基（因此，根据推论 B.4.12， E 可度量化）。为此，任取一个零邻域 $R \subseteq E$，并取一个满足 $S + S \subseteq R$ 的零邻域 $S \subseteq E$。存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $F \cap U_n \subseteq F \cap S$。此外，存在 $k > n$ 使得 $W_k \subseteq q(S \cap U_{n+1})$，因此

$$U_k \subseteq (S \cap U_{n+1}) + F\,. \tag{B.15}$$

利用 (B.14)，我们推得

$$U_k \subseteq U_{n+1} \subseteq E \setminus (U_{n+1} + (F \setminus U_n)) \subseteq E \setminus ((S \cap U_{n+1}) + (F \setminus U_n)).$$

将这个包含关系与 (B.15) 结合起来，我们得到

$$U_k \subseteq (S \cap U_{n+1}) + (F \cap U_n) \subseteq S + (F \cap S) \subseteq R.$$

(b) 若 $U \subseteq E$ 是有界零邻域，则 $U \cap F$ 是 F 中的有界零邻域（引理 B.9.3），而 $q(U)$ 是 Q 中的有界零邻域（见命题 B.3.1 和引理 B.9.2），这意味着 F 和 Q是可赋范的（命题 B.9.9）。反过来，假设 F 和 Q 都是

可赋范的。设 $V \subseteq F$ 和 $W \subseteq Q$ 是有界零邻域（见命题 B.9.9）。存在一个绝对凸零邻域 $U \subseteq E$，使得 $F \cap U \subseteq V$和 $q(U) \subseteq W$。对 $n \in \mathbb{N}$，定义 $U_n := 2^{-n}U$。那么，集合$F \cap U_n \subseteq 2^{-n}V$和 $q(U_n) \subseteq 2^{-n}W$（对 $n \in \mathbb{N}$）分别构成 F 和 Q的零邻域基。此外，(B.13) 成立。因此，$\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$是 E 的零邻域基（由 (a) 的证明可知），这意味着 U 是有界的，因而 E 可赋范。

(c) 令 $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$ 为 E 的 0 的绝对凸闭邻域基，并令 $p_1 \leq p_2 \leq \cdots$ 为相应的闵可夫斯基泛函。

如果 E 是 Fr´echet 空间，那么它的闭向量子空间 F 也是完备的（见命题 B.6.7 (b)），因而是 Fr´echet 空间。Q 的完备性也可类似证明：若 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Q 中的柯西序列，只要能找到一个收敛子序列，它就会收敛。因此，取一个子序列后，不妨假设对所有 $n \in \mathbb{N}$，$y_{n+1} - y_n \in 2^{-n}q(U_n)$，从而对某个 $z_n \in 2^{-n}U_n$，$y_{n+1} - y_n = q(z_n)$。选取 $x_1 \in E$，使得 $q(x_1) = y_1$。递归地定义 $x_{n+1} := x_n + z_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$。由归纳法可得 $q(x_n) = y_n$：事实上，$q(x_{n+1}) = q(x_n) + q(z_n) = y_n + (y_{n+1} - y_n) = y_{n+1}$。此外，$x_{n+1} - x_n = z_n \in 2^{-n}U_n$。于是对所有 $n, m \in \mathbb{N}$，都有 $p_n(x_{n+m} - x_n) \leq 2^{-n} + \cdots + 2^{-n-m+1} \leq 2^{-n+1} \leq 1$，故 $x_{n+m} - x_n \in U_n$，从而对所有$k, \ell \geq n$，$x_k - x_\ell \in 2U_n$。因此 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E 中的柯西序列，故收敛到某个 $x \in E$。于是 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $q(x)$。

反过来，假设 F 和 Q 是 Fr´echet 空间。我们必须证明每个属于 E 的柯西序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都收敛。同样，我们可以假设对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $x_{n+1} - x_n \in 2^{-n}U_n$。于是

$$(\forall n, m \in \mathbb{N}) \quad p_n(x_{n+m} - x_n) \leq (2^{-n} + \cdots + 2^{-n-m+1}) \leq 2^{-n+1} \leq 1 \quad \text{(B.16)}$$

因此 $q(x_{n+m}) - q(x_n) \in q(U_n)$。于是，$(q(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Q 中的柯西序列，因而收敛，设其极限为 $y \in Q$。取 $a \in E$ 使得 $q(a) = y$。由 (B.16) 可知，对所有 n，$m \in \mathbb{N}$，都有 $q(x_{n+m}) - q(x_n) \in 2^{-n+1}q(U_n)$；因此，令 $m \to \infty$，

$$y - q(x_n) \in 2^{-n+1}\overline{q(U_n)}\,.$$

因此，利用 $q(U_n) \subseteq q(U_n) + q(U_n) = 2q(U_n)$（见引理 B.1.2 (i)），可得 $y - q(x_n) \in 2^{-n+2}q(U_n)$。于是，我们可以找到 $z_n \in F$ 使得

$$a + z_n - x_n \in 2^{-n+2}U_n. \qquad \text{(B.17)}$$

Then

$$\begin{aligned} p_n(z_{n+1} - z_n) &= p_n((a + z_{n+1} - x_{n+1}) - (a + z_n - x_n) + (x_{n+1} - x_n)) \\ &\leq 2^{-n+1} + 2^{-n+2} + 2^{-n} \leq 2^{-n+3} \end{aligned}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，由此可知 $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 F 中的柯西序列，因此收敛于某个 $z \in F$。接着，$a + z_n \to a + z$ 当 $n \to \infty$ 时成立，因此$x_n \to a + z$也成立，因为根据 (B.17)，$(a + z_n) - x_n \to 0$。

(d) 由 (b) 和 (c) 直接得出。 □

定义 B.9.11。若 E 是局部凸空间，我们用 E'_σ 表示 E'，并赋予其关于点求值的始拓扑 $\mathcal{O}_\sigma$

$$\varepsilon_x\colon E'\to\mathbb{K},\quad \lambda\mapsto\lambda(x)$$

对于 $x\in E$ （所谓的弱 $*$-拓扑）。于是（$E',\mathcal{O}_\sigma$）是一个局部凸空间，因为 ε_x 是线性的，并且在 E'上分离点。

为以后使用，我们提及：

引理 B.9.12. 设 E 是一个局部凸空间，且 $\theta\in(E'_\sigma)'$。则对某个 $x\in E$，有 $\theta=\varepsilon_x$。

证明. 由于 $\theta^{-1}(\mathbb{D})\subseteq E'_\sigma$是一个零邻域，我们可找到 $x_1,\dots,x_n\in E$和$r_1,\dots,r_n>0$，使得

$$\{\lambda\in E'\colon(\forall j\in\{1,\dots,n\})\ \ |\lambda(x_j)|\le r_j\}\subseteq\theta^{-1}(\mathbb{D})$$

因此 $F:=\ker(\varepsilon_{x_1})\cap\cdots\cap\ker(\varepsilon_{x_n})\subseteq\ker\theta$。设 $\beta\colon E\to\mathbb{K}^n$是以 $\varepsilon_{x_1},\dots,\varepsilon_{x_n}$为分量的线性映射。于是$\ker\beta=F\subseteq\ker\theta$，从而存在唯一的线性映射

$$\overline{\theta}\colon\beta(E)\to\mathbb{K}$$

满足 $\overline{\theta}\circ\beta=\theta$。将 θ延拓为线性映射 $\Theta\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$。令 $e_1,\dots,e_n$为 $\mathbb{K}^n$的标准基向量，并令 $a_j:=\Theta(e_j)\in\mathbb{K}$对所有 $j\in\{1,\dots,n\}$成立。于是

$$\Theta(t)=\sum_{j=1}^n a_jt_j$$

对所有 $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{K}^n$均成立。因此

$$\theta(\lambda)=\overline{\theta}(\beta(\lambda))=\Theta(\beta(\lambda))=\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_{x_j}(\lambda)=\lambda(x)=\varepsilon_x(\lambda)$$

对 $x:=\sum_{j=1}^n a_jx_j$成立。 □

定理 B.9.13（巴拿赫-阿劳格鲁定理）。设 E 是局部凸空间，且$U\subseteq E$ 是一个0-邻域。那么极集 U° 在 E'_σ中是紧的。

证明。若 $\lambda\colon E\to\mathbb{K}$是线性的，且 $\lambda(U)\subseteq\mathbb{D}$，则 λ是连续的。因此

$$U^\circ=\{\lambda\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})\colon(\forall x\in U)\ \lambda(x)\in\mathbb{D}\},$$

它是同态集 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})$ 的闭子集，因此在赋予乘积拓扑的 $\mathbb{K}^E$ 中也闭（习题 B.9.1）。对每个 $x\in E$，存在 $r_x>0$使得 $x\in r_xU$。于是 $\lambda(x)\in r_x\lambda(U)\subseteq r_x\mathbb{D}$，这意味着 U°是.....的闭子集

$$\prod_{x\in E}r_x\mathbb{D}\subseteq\mathbb{K}^E.$$

由于根据 Tychonoff定理，紧集的乘积是紧集，我们看到 U° 是紧的。□

定义 B.9.14。设 E 是一个局部凸空间。我们将 E'_b 记作 E'，并赋予由以下半范数定义的局部凸向量拓扑

$$\|\cdot\|_B\colon E' \to [0,\infty[, \quad \|\lambda\|_B := \sup_{x\in B}|\lambda(x)|,$$

当 B 遍历 E的所有有界子集时。我们将 E'_c 记为E'，并赋予其由 $\|\cdot\|_K$ 定义的局部凸向量拓扑 $\mathcal{O}_c$，其中 K 遍历 E的所有紧子集。

注记 B.9.15. (a) 由于每个紧集 $K \subseteq E$ 都是有界的，因此映射

$$E'_b \to E'_c, \quad x \mapsto x$$

是连续的。

(b) $\mathcal{O}_c$ 与由 C诱导的紧开拓扑一致（E，$\mathbb{K}$）（参见引理 A.6.24(b)）。

(c) 对每个 $x \in E$，点求值 $\varepsilon_x\colon E'_b \to \mathbb{K}, \lambda \mapsto \lambda(x)$ 是线性且连续的（因为 $|\varepsilon_x(\lambda)| = |\lambda(x)| \le \|\lambda\|_{\{x\}}$）。$E'_c$ 的情形也类似。

(d) 由于对于每个有界子集 $B \subseteq E$ 和 $r > 0$，都有 $r\|\cdot\|_B = \|\cdot\|_{rB}$，因此闭单位球

$$\{\lambda \in E'\colon \|\lambda\|_B \le 1\} = B^\circ$$

（它们与极集重合）构成 E'_b 中的零邻域基，其中 B 遍历 E 的有界子集集。

(e) 若 $U \subseteq E$ 是一个零邻域，则其极集 U° 在 E'_b 中有界。为此，取一个零邻域 $V \subseteq E'_b$。那么，对于某个有界子集 $B \subseteq E$，有 $B^\circ \subseteq V$。现在，对于某个 $r > 0$，有 $B \subseteq rU$，因此 $V \supseteq B^\circ \supseteq (rU)^\circ = \frac{1}{r}U^\circ$。 –

命题 B.9.16。设 E 是一个局部凸空间。

(a) 若 E 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间，则 E'_c 完备。(b) 若 E'_c 完备，则 E'_b 也完备。

证明。(a) 由于 E' 在 $C(E, \mathbb{K})$ 中是闭的（参见习题 B.9.1），且 $C(E, \mathbb{K})$ 完备（参见引理 A.6.24(d)），所以 E'_c 完备。

(b) 若 $(\lambda_j)_{j\in J}$ 是 E'_b 中的一个柯西网，则它也是 E'_c 中的柯西网。因此，它在 E'_c 中收敛到某个 $\lambda \in E'_c$。若 $B \subseteq E$ 是一个有界集且 $\varepsilon > 0$，则可找到 $j_0 \in J$，使得

$$\|\lambda_i - \lambda_j\|_B \le \varepsilon$$

对于所有满足 $i \ge j_0$ 和 $j \ge j_0$ 的 i，$j \in J$。因此

$$|\lambda_i(x) - \lambda_j(x)| \le \varepsilon$$

对于所有 $x \in B$ 和 i，j 如前所述。令 i 趋于极限，得到

$$|\lambda(x) - \lambda_j(x)| \le \varepsilon \quad \text{for all } x \in B \text{ and } j \ge j_0.$$

因此 $\|\lambda - \lambda_j\|_B \le \varepsilon$ 对所有 $j \ge j_0$ 均成立，进而 $\lambda_j \to \lambda$ 属于 E'_b。 □

注 B.9.17。 设 E 是一个局部凸空间。如果对于每个紧子集 $K \subseteq E$， λ: $E \to \mathbb{K}$ 的线性映射连续当且仅当 $\lambda|_K$ 连续，那么命题 B.9.16(a) 的结论仍然成立。此性质可由局部凸归纳极限继承（参见 B.13 节）；特别是，所有 (LF)空间都具有此性质（因此它们的对偶空间是完备的）。

更一般地，对于局部凸空间 E 和 F，我们可以考虑空间 $\mathcal{L}(E,F)$ 上的拓扑，其中该空间由所有连续线性映射 A: $E \to F$ 构成。

定义 B.9.18。 我们将 $\mathcal{L}(E,F)_b$ 记作 $\mathcal{L}(E,F)$，并赋予由下列半范数定义的局部凸向量拓扑 $\mathcal{O}_b$：

$$\|\cdot\|_{B,q}\colon \mathcal{L}(E,F) \to [0,\infty[, \quad \|A\|_{B,q} := \sup_{x\in B} q(Ax),$$

其中 B 遍历 E 的有界子集， q 属于 F 上连续半范数的集合（即 有界收敛拓扑）。当 K 遍历 E 的紧子集时，半范数 $\|\cdot\|_{K,q}$ 定义了紧开拓扑（参见引理 A.6.24(b)）；使用该拓扑时，我们记作 $\mathcal{L}(E,F)_c$。

B.9 节习题

习题 B.9.1。 证明：对于每个向量空间 E，线性映射构成的向量子空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E,\mathbb{K})$ 在 $\mathbb{K}^E$ 中是闭的（相对于乘积拓扑／逐点收敛拓扑）。

习题 B.9.2. 设 $(E,\|\cdot\|)$ 是赋范空间， q: $E \to [0,\infty[$ 是连续半范数。证明存在 $r>0$，使得对所有 $x \in E$，都有 $q(x) \le r\|x\|$。
[由于 $B_1^{\|\cdot\|}(0)$ 有界，因此对于某个 $r>0$，有 $B_1^{\|\cdot\|}(0) \subseteq rB_1^q(0) = B_r^q(0)$。对于 $0 \neq x \in E$，这意味着 $q(x) = \|x\| q\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) \le r\|x\|$。]

习题 B.9.3.证明：若 E 和 F 是赋范空间，则 $\mathcal{O}_b$ 上的有界收敛拓扑与算子范数定义的向量拓扑一致。

习题 B.9.4。设 E 和 F 是局部凸空间。

(a) 固定 $\lambda \in E'$。证明线性映射 $F \to \mathcal{L}(E,F)_b$, $y \mapsto \lambda \otimes y$（其中 $(\lambda\otimes y)(x) := \lambda(x)y$）是连续的。(b) 若 E 是有限维的，设 $v_1,\dots,v_n$ 是 E 的一组基， $v_1^*,\dots,v_n^* \in E'$ 是由 $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$（对 $i,j \in \{1,\dots,n\}$）确定的对偶基。证明映射 Φ: $\mathcal{L}(E,F)_b \to F^n$, $\alpha \mapsto (\alpha(v_1)\dots,\alpha(v_n))$ 是拓扑向量空间同构。[验证 $\Phi^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \sum_{j=1}^n v_j^* \otimes y_j$。]

练习 B.9.5. 证明，只要 E 是 $k_{\mathbb{R}}$-空间且 F 完备， $\mathcal{L}(E,F)_b$ 就是完备的。

习题 B. 9 6 4 14 6 7 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = ..$ 根据例 B.. (a) 和命题 B..(a)，全体实数序列构成一个弗雷歇空间。证明该空间不可赋范。

[提示：每个 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 零邻域都包含 $\{0\}^n \times \mathbb{R}^{\{n+1,n+2,\dots\}}$ 某个 $n \in \mathbb{N}$非平凡向量子空间。]

习题 B.9.7。证明，对于每个非可赋范实局部凸空间 E，映射 $\Phi\colon\ C(E'_c \times E,\ \mathbb{R}) \to C(E'_c,\ C(E,\ \mathbb{R})),\ f \mapsto f^\vee$（如命题 A.6.17 中所述）都不是满射。

[提示：包含映射 $j\colon\ E'_c \to C(E,\ \mathbb{R}),\ \lambda \mapsto \lambda$ 是 $C(E'_c,\ C(E,\ \mathbb{R}))$的一个元素，但 $j^\wedge = \varepsilon$ 是求值映射 $E'_c \times E \to \mathbb{R}$，根据命题 B.11.12，它不是连续的。]

B.10 自反空间与桶空间

本节简要讨论局部凸空间的自反性。若 E 是局部凸空间，则点求值 $\varepsilon_x\colon E'_b \to \mathbb{K}$ 是$(E'_b)'$ 的一个元素（见注记 B.9.15(c)）。因此我们得到一个线性映射

$$\eta_E\colon E \to (E'_b)'_b,\quad x \mapsto \varepsilon_x$$

它是单射，因为 E' 在 E上分离点。

定义 B.10.1。若 η_E 是拓扑向量空间同构，则称 E 为自反的。

注 B.10.2。自反性是建立完备性性质的有用工具：若 E 是自反的局部凸空间，且 E'_b 是一个 $k_{\mathbb{R}}$-空间（或具有注记 B.9.17 中所述的弱化性质），那么根据命题 B.9.16，$E \cong (E'_b)'_b$ 是完备的。

引理 B.10.3。对于每个局部凸空间 E，映射 η_E 到其像上的开映射。

证明。如果 $U \subseteq E$ 是一个绝对凸的闭零邻域，那么 U° 在 E'_b 中有界（见注记 B.9.15(e)），因此 $(U^\circ)^\circ$ 是 $(E'_b)'_b$中的一个零邻域。由于 $\eta_E(E) \cap (U^\circ)^\circ = \eta_E((U^\circ)^\circ) = \eta_E(U)$（因为根据双极定理，$U = (U^\circ)^\circ$），我们看到 η_E 作为到 $\eta_E(E)$的映射是开映射。□

定义 B.10.4。局部凸空间 E 的子集 W 称为桶，如果 W 是绝对凸、闭且吸收的。

例如，每个绝对凸的闭零邻域都是一个桶。

定义 B.10.5。如果局部凸空间 E 中的每个桶都是零邻域，则称该空间桶化 。

命题 B.10.6。每个弗雷歇空间 F 都是桶化的。

证明。若 $B \subseteq F$ 是一个桶，则 $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB$ 是闭的，因此由贝尔纲定理，某个 $n \in \mathbb{N}$ 的内部 $(nB)^0 = nB^0$ 非空，进而 $B^0 \neq \emptyset$。令 $x \in B^0$；由于 $B^0 = -B^0$，可知$0 \in \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}B^0 \subseteq B$，因此 B是一个零邻域。□

命题 B.10.7. 局部凸空间 E 自反，当且仅当 E 是桶化的，并且每个绝对凸、有界、闭子集 $B \subseteq E$ 都是弱紧的(即在 E_w中紧)。

证明。若 E 自反且 $W \subseteq E$ 是一个桶，则 $\eta_E(W)$（如 W）是吸收的，因此其极集 W°在 E_b'中弱有界，从而有界。因此，$(W^\circ)^\circ$是$(E_b')_b'$中的一个零邻域，进而 $W = \eta_E^{-1}((W^\circ)^\circ)$ 是 E 中的一个零邻域（由双极定理知两者相等）。

若 E 自反，且 $B \subseteq E$ 是一个绝对凸、有界、闭子集，则由双极定理有 $B = \eta_E^{-1}((B^\circ)^\circ)$。注意，

$$B^\circ = \{\lambda \in E' : \|\lambda\|_B \leq 1\}$$

是 E_b'中的一个零邻域。因此，由巴拿赫-阿劳格卢定理（定理 B.9.13），在赋予弱 $*$拓扑后，$(B^\circ)^\circ$ 在$(E_b')'$中是紧的。由于 $\eta_E\colon E_w \to (E_b')'$ 关于此拓扑是一个同胚，我们推得$B = \eta_E^{-1}((B^\circ)^\circ)$是弱紧的。

若 E 是桶化的，且 $U \subseteq (E_b')_b'$ 是一个零邻域，则对某个有界子集 $B \subseteq E_b'$，有 $U \supseteq B^\circ$（见注记 B.9.15(d)）。那么 B 在弱 $*$拓扑下也有界，因此对每个 $x \in E$，$\varepsilon_x(B) \subseteq \mathbb{K}$ 都有界，故存在某个 $n \in \mathbb{N}$使得 $x \in nB_\circ$。因此 $B_\circ$ 在 E中是吸收的，从而 $B_\circ$ 是 E中的一个桶，因而是一个零邻域。由于 $\eta_E^{-1}(U) \supseteq \eta_E^{-1}(B^\circ) = B_\circ$，我们推得 $\eta_E^{-1}(U)$是 E中的一个零邻域，因此 η_E是连续的。由引理 B.10.3，η_E 是到其像上的一个同胚。

现在假设 E 的绝对凸、有界、闭子集都是弱紧的。设 η_E 不是满射；我们将导出矛盾。令 $\alpha \in (E_b')' \setminus \eta_E(E)$。那么，极集 $\{\alpha\}_\circ$是 E_b'中的一个零邻域。因此，我们可以找到一个有界子集 $B \subseteq E$，使得 $B^\circ \subseteq \{\alpha\}_\circ$。将 B 替换为其闭绝对凸包后，不妨设 B 此外还是绝对凸且闭的。于是，B 是弱紧的（根据假设），从而 $\eta_E(B)$是$(E_b')'$中的一个紧的、绝对凸子集，并赋予弱 $*$-拓扑。由于 $\alpha \notin \eta_E(B)$，双极定理给出 $\theta \in ((E_b')_\sigma')'$，使得 $\theta(\eta_E(B)) \subseteq \mathbb{D}$ 且 $|\theta(\alpha)| > 1$。根据引理 B.9.12，对于某个 $\lambda \in E'$，我们有 $\theta = \varepsilon_\lambda$，其中 $\varepsilon_\lambda\colon (E_b')' \to \mathbb{K}$ 是在 λ处的求值。因此

$$\lambda(B) \subseteq \mathbb{D}$$

（由此得到 $\lambda \in B^\circ$）以及 $|\alpha(\lambda)| > 1$（由此得到 $\lambda \notin \{\alpha\}_\circ$）。但是 $B^\circ \subseteq \{\alpha\}_\circ$。 □

B.11 等度连续性、双线性与多重线性映射

本节将记录有关多重线性映射的实用基本事实，并定义这类映射空间上的拓扑。接着回顾等连续性的概念，并将其应用于线性映射。之后，我们将讨论双线性映射的弱连续性。初次阅读时，可以跳过最后这个主题。

引理 B.11.1。 设实向量空间 $E_1, \ldots, E_n$ 和 F，考虑一个 n-线性映射 $\beta\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$。设 $q_1, \ldots, q_n$ 和 p 分别是定义在 $E_1, \ldots, E_n$ 和 F 上的半范数，且 $r_1, \ldots, r_n, s > 0$。若对所有 $(x_1, \ldots, x_n) \in B^{q_1}_{r_1}(0) \times \cdots \times B^{q_n}_{r_n}(0)$，都有 $p(\beta(x_1, \ldots, x_n)) \leq s$，则

$$p(\beta(x_1, \ldots, x_n)) \leq \frac{s}{r_1 \cdots r_n} q_1(x_1) \cdots q_n(x_n)$$

对所有 $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$。

证明。 若对于 $j \in \{1, \ldots, n\}$，$t_j > q_j(x_j)$，则 $q_j(r_j x_j / t_j) < r_j$，因此

$$\begin{aligned} p(\beta(x_1, \ldots, x_n)) &= (t_1/r_1) \cdots (t_n/r_n) \beta(r_1 x_1/t_1, \ldots, r_n x_n/t_n) \\ &\leq s(t_1/r_1) \cdots (t_n/r_n). \end{aligned}$$

令 $(t_1, \ldots, t_n) \to (q_1(x_1), \ldots, q_n(x_n))$ 属于 $\mathbb{R}^n$，结论得证。 □

在此取 $q_j := q$、$r_j := r$、$x_j := x$ 和 $t_1 = \cdots = t_n$，我们还得到

引理 B.11.2。 设 E 和 F 为实向量空间，$\beta\colon E^n \to F$ 为 n-线性的，且 $f\colon E \to F$、$x \mapsto \beta(x, \ldots, x)$ 为相应的齐次多项式。设 q 和 p 分别为 E 和 F 上的半范数，且 r、$s > 0$。若

$$p(f(x)) \leq s \ \text{for all}\ x \in B^q_r(0),$$

则对所有 $x \in E$，有 $p(f(x)) \leq \frac{s}{r^n} q(x)^n$。 □

引理 B.11.3。 设 E_1、…、E_n 和 F 为局部凸空间，并设 $\beta\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ 为一个 n-线性映射。以下条件等价：

(a) β 是连续的；(b) β 在0处连续；(c) 对 F上的每个连续半范数 p，存在 E_k上的连续半范数q_k（对 $k \in \{1, \ldots, n\}$），使得

$$p(\beta(x_1, \ldots, x_n)) \leq q_1(x_1) \cdots q_n(x_n) \ \text{for all}\ (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n. \tag{B.18}$$

证明。 平凡地，(a)蕴含(b)。若(b)成立且 p 是 F 上的连续半范数，则 $\beta^{-1}(B_1^p(0))$是 $E_1\times\cdots\times E_n$中的零邻域，由此我们可找到 E_k 上的连续半范数 q_k（对 $k\in\{1,\dots,n\}$），使得

$$B_1^{q_1}(0)\times\cdots\times B_1^{q_n}(0)\subseteq\beta^{-1}(B_1^p(0)).$$

由引理 B.11.1，(B.18) 成立。

若 (c) 成立，我们来证明 β 在每个 $x=(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$ 处连续。设 p 是 F 上的连续半范数，$q_1,\dots,q_n$ 如 (b) 中所述。对于 $y=(y_1,\dots,y_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$，有

$$\begin{aligned}p(\beta(y)-\beta(x))&\le\sum_{k=1}^n p(\beta(x_1,\dots,x_{k-1},y_k-x_k,y_{k+1},\dots,y_n))\\&\le\sum_{k=1}^n q_1(x_1)\cdots q_{k-1}(x_{k-1})q_k(y_k-x_k)q_{k+1}(y_{k+1})\cdots q_n(y_n),\end{aligned}$$

当 $y\to x$ 时，它趋于 0。 □

定义 B.11.4. 给定 $n\in\mathbb{N}$，设 $E_1,\dots,E_n$ 以及 F 都是局部凸空间。我们将所有连续n-线性映射 $\beta\colon E_1\times\cdots\times E_n\to F$ 构成的空间记作 $\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;F)$。我们将赋予由以下半范数定义的局部凸向量拓扑的 $\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;F)_b$ 记作 $\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;F)$，

$$\|\cdot\|_{B,p}\colon\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;F)\to[0,\infty[,\quad\|\beta\|_{B,p}:=\sup_{x\in B}p(\beta(x)),$$

其中，B 遍历 $E_1\times\cdots\times E_n$ 的所有有界子集，p属于 F上的所有连续半范数所构成的集合。我们将 $\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;F)_c$记作 $\mathcal{L}^n(E_1,\dots,E_n;F)$，并赋予它由$\|\cdot\|_{K,\,p}$ 定义的局部凸向量拓扑 $\mathcal{O}_c$，其中 K 遍历 $E_1\times\cdots\times E_n$的所有紧子集，连续半范数 p则与前述相同。因此，$\mathcal{O}_c$是由 $C(E_1\times\cdots\times E_n,\ F)$上的紧开拓扑诱导的拓扑（参见引理 A.6.24(b)）。

注意，$\|\beta\|_{B,\,p}<\infty$。为此，设 B_k 是 B 到第k个分量上的投影，其中 $k\in\{1,\dots,n\}$。那么，B_k在 E_k中有界。若 $q_1,\dots,q_n$如引理 B.11.3(c)中所述，则$\|\beta\|_{B,\,p}\le\sup q_1(B_1)\cdots\sup q_n(B_n)<\infty$。

定义 B.11.5。(a) 一个 $\mathbb{K}$-代数（简称“代数”）是一个 $\mathbb{K}$-向量空间 $\mathcal{A}$，配备了一个双线性映射

$$\beta\colon\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}.$$

我们将 β 称为<STYLE_PLACEHOLDER>代数乘法，并记作 $xy:=\beta(x,\ y)$。如果结合律 $x(yz)=(xy)z$ 在 $\mathcal{A}$ 中成立，我们称 $\mathcal{A}$ 为<STYLE_PLACEHOLDER>结合的。此外，如果存在

一个元素 $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$，满足 $\mathbf{1} \neq 0$，使得对于每个 $x \in \mathcal{A}$ 都有 $\mathbf{1}x = x\mathbf{1}$，我们称 $\mathcal{A}$ 为<STYLE_PLACEHOLDER>含幺 结合代数。在这种情况下，我们令

$$\mathcal{A}^\times := \{x \in \mathcal{A} \colon (\exists x^{-1} \in \mathcal{A})\, x^{-1}x = xx^{-1} = \mathbf{1}\}$$

是所有可逆元（“单位元”）的集合 $\mathcal{A}$。那么 $\mathcal{A}^\times$ 在乘法运算下构成一个群，称为 $\mathcal{A}$的 单位群。

(b) 若 $\mathbb{K}$-代数 $\mathfrak{g}$ 配备双线性乘法 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，且 $(x, y) \mapsto [x, y]$，则称其为李代数，如果对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$，都有 $[y, x] = -[x, y]$，并且满足雅可比恒等式：

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ for all } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

(c) 除非讨论李代数，否则我们总是假定代数是结合的，而不再特别说明。

(d) 拓扑代数是一个拓扑 $\mathbb{K}$-向量空间 $\mathcal{A}$，配备连续双线性映射 β: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，使其成为结合代数。如果拓扑向量空间 $\mathcal{A}$ 是局部凸空间、弗雷歇空间或巴拿赫空间，则分别称 $\mathcal{A}$ 为局部凸代数、弗雷歇代数或巴拿赫代数。

(e) 拓扑李代数是一个拓扑 $\mathbb{K}$向量空间 $\mathfrak{g}$，配备了连续双线性映射 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，$(x, y) \mapsto [x, y]$，使其成为李代数。若该拓扑向量空间 $\mathfrak{g}$ 是局部凸空间、弗雷歇空间或巴拿赫空间，则分别称 $\mathfrak{g}$ 为局部凸李代数、弗 ´雷歇–李代数或巴拿赫–李代数。

(f) 按照惯例，对于（不一定是结合的）代数之间的映射 α: $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$，若其为线性映射，且对所有 $x, y \in \mathcal{A}_1$，都有 $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$，则称其为代数同态。若 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 是含幺结合代数，且 α: $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$是满足 $\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$的代数同态，则称 α 为含幺代数同态。拓扑李代数之间的连续李代数同态也称为拓扑李代数态射。

注 B.11.6. 定义含幺巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 上拓扑的范数 $\|\cdot\|$ 总可以选取得满足以下条件（见练习 B.11.1）：

(a) $\|\mathbf{1}\| = 1$; (b) $\|\cdot\|$ 具有次乘法性，即对于所有 $x, y \in \mathcal{A}$, $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$。

我们将始终假设含幺巴拿赫代数上的范数满足 (a) 和 (b)，而不再特别说明。

例如，对任意巴拿赫空间 $(E, \|\cdot\|)$，若 $E \neq \{0\}$，则带有算子范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 的 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ 是含幺巴拿赫代数。

定义 B.11.7。设 X 是一个集合， E 是一个拓扑向量空间，$\Gamma \subseteq E^X$ 是从 X 到 E 的函数所成的集合。给定 $x \in X$，集合 Γ 称为在 x 处等度连续，如果对于每个零邻域 $V \subseteq E$，都存在 X 中 x 的一个邻域 U，使得

$$\gamma(y) - \gamma(x) \in V \text{ for all } \gamma \in \Gamma \text{ and } y \in U.$$

若 Γ 在每个 $x \in X$处等度连续，则称 Γ 为等度连续。

若 Γ 是等度连续的，则 $\Gamma \subseteq C(X, E)$。下列简单事实的证明留给读者。

引理 B.11.8.设 X 与 Y 为拓扑空间， E 与 F 为拓扑向量空间，且 $\Gamma \subseteq E^Y$。

(a) 若 $f\colon X \to Y$ 在点 $x \in X$ 处连续，且 Γ 在 $f(x)$处等度连续，则 $\{\gamma \circ f\colon \gamma \in \Gamma\} \subseteq E^X$在 x处等度连续。*(b)* 若 Γ 在 $y \in Y$ 处等度连续，且 $g\colon E \to F$ 是连续的仿射线性映射，则 $\{g \circ \gamma\colon \gamma \in \Gamma\} \subseteq F^Y$在 y处也等度连续。若 $g\colon E \to F$ 是任意一致连续映射，则同样的结论成立。[5] *(c)* 若$E = \prod_{j\in J} E_j$ 具有拓扑向量空间 E_j 及典范投影$\mathrm{pr}_j\colon E \to E_j$，则 Γ 在 $y \in Y$ 处等度连续，当且仅当对每个 $j \in J$，$\{\mathrm{pr}_j \circ \gamma\colon \gamma \in \Gamma\} \subseteq E_j^Y$在 y处等度连续。

引理 B.11.9. 若 E 和 F 是拓扑向量空间，则线性映射集 $\Gamma \subseteq F^E$ 等度连续，当且仅当 Γ 在 0 处等度连续。

证明。 若 $V \subseteq F$ 和 $U \subseteq E$ 是零邻域，且对所有 $\gamma \in \Gamma$， $\gamma(U) \subseteq V$，则

$$(\forall x \in E)\,(\forall \gamma \in \Gamma) \quad \gamma(x + U) - \gamma(x) = \gamma(U) \subseteq V.$$

因此， Γ 在 0 处等度连续意味着它等度连续。 □

我们提及巴拿赫–施泰因豪斯定理的一个版本。

命题 B.11.10.设 E 和 F 为局部凸空间， $\Gamma \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ 为一组连续线性映射，它们逐点有界，即对每个 $x \in E$， $\Gamma(x) := \{\gamma(x)\colon \gamma \in \Gamma\}$ 在 F 中有界。若 E 是桶化的，则 Γ 等度连续。

证明。 令 $V \subseteq F$ 为一个零邻域。缩小 V后，我们可以假设 V 是绝对凸且闭的。于是

$$U := \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(V)$$

[5] $g\colon E \to F$ 称为 *uniformly continuous*，如果对每个零邻域 $V \subseteq F$，都存在一个零邻域 $W \subseteq E$，使得对所有 $y \in E$ 和 $z \in y + W$， $g(z) - g(y) \in V$。

是 E的一个绝对凸闭子集。为证明 U 是吸收的（因而是一个桶），令 $x \in E$。根据假设，$\Gamma(rx) = r\Gamma(x) \subseteq V$，其中$r > 0$，从而 $rx \in U$。由于 E 是桶化的，U 是一个零邻域。按照构造，对每个 $\gamma \in \Gamma$，都有$\gamma(U) \subseteq V$，因此 Γ 在 0 处等度连续，进而等度连续；这是引理 B.11.9 的结论。□

注 B.11.11. 若 E 和 F 是局部凸空间，且 $\Gamma \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ 是等度连续的，那么 Γ 是 $\mathcal{L}(E,F)$ 的有界子集 $_b$（因此也是 $\mathcal{L}(E,F)$ 的有界子集$_c$）。

[给定有界子集 $B \subseteq E$ 和 F 上的连续半范数 p，存在一个零邻域 $U \subseteq E$，使得对所有 $\gamma \in \Gamma$，$\gamma(U) \subseteq B_1^p(0)$。取$r > 0$使得 $B \subseteq rU$。那么对所有 $\gamma \in \Gamma$，$\gamma(B) \subseteq rB_1^p(0) = B_r^p(0)$，因此 $\sup\{\|\gamma\|_{B,p} : \gamma \in \Gamma\} \leq r$。由引理 B.9.5 可知，$\Gamma$ 是有界的。]

许多自然的双线性映射例子（如下所示）都不是连续的。这促使我们研究弱连续性。

命题 B.11.12。设 E 是一个局部凸空间。如果 E' 具有一种向量拓扑 $\mathcal{O}$，使得求值映射

$$\varepsilon : (E', \mathcal{O}) \times E \to \mathbb{K}, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda(x)$$

连续，那么 E 可赋范。

证明。存在开零邻域 $U \subseteq E'$ 和 $V \subseteq E$，使得

$$\varepsilon(U \times V) \subseteq \mathbb{D}.$$

由于 U 是吸收的，对每个 $\lambda \in E'$，我们都能找到 $r > 0$，使得 $\lambda \in rU$，因此 $\lambda(V) \subseteq r\mathbb{D}$。所以 V 弱有界，因而根据定理 B.9.8，它是有界的。因此根据命题 B.9.9，E 可赋范。□

设 E_1、E_2 和 F 是拓扑向量空间。双线性映射 $\beta : E_1 \times E_2 \to F$ 称为分别连续，如果对每个 $x \in E_1$，$\beta(x,\cdot) : E_2 \to F$ 都连续，并且对每个 $y \in E_2$，$\beta(\cdot,y) : E_1 \to F$ 都连续。局部凸空间之间的分别连续双线性映射称为亚连续（关于第二个变量），如果它满足以下等价条件之一（因而也满足所有条件）。

命题 B.11.13。设 E_1、E_2 和 F 为局部凸空间。对于分别连续双线性映射 $\beta : E_1 \times E_2 \to F$，以下三个条件等价：

(a) 对每个有界子集 $B \subseteq E_2$，限制 $\beta|_{E_1 \times B} : E_1 \times B \to F$是连续的。(b) 对每个有界子集 $B \subseteq E_2$ 和每个0-邻域 $V \subseteq F$，存在一个0-邻域 $U \subseteq E_1$，使得 $\beta(U \times B) \subseteq V$。

(c) 对每个有界子集 $B \subseteq E_2$，集合 $\{\beta(\cdot, y)\colon y \in B\} \subseteq \mathcal{L}(E_1, F)$ 是等度连续的。

证明。 (c) (c) 中各集合的等度连续性等价于它们在 0 处等度连续（见引理 B.11.9）；后者就是条件（b）。

(a)⇒(b)：将 B 替换为其绝对凸包后，我们可以假设 B 是绝对凸的。设 $V \subseteq F$ 是一个零邻域。由于 $\beta|_{E\times B}$ 在 (0,0) 处连续，存在零邻域 $U \subseteq E_1$ 和 $W \subseteq E_2$，使得

$$\beta(U \times (B \cap W)) \subseteq V.$$

由于 B 有界，我们可以找到 $r \in]0,1]$，使得 $rB \subseteq W$。于是 rU 是 E_1 中的一个零邻域，由 $rB \subseteq B \cap W$ 可得

$$\beta((rU) \times B) = \beta(U \times (rB)) \subseteq \beta(U \times (B \cap W)) \subseteq V.$$

(b)⇒(a)：设 $B \subseteq E_2$ 是一个有界集，且 $(x, y) \in E \times B$。设 $W \subseteq F$ 是一个零邻域；缩小 W 后，我们可以假设 W 是绝对凸的。由于 $\beta(x, \cdot)$ 和 $\beta(\cdot, y)$ 连续，我们可以找到零邻域 $U \subseteq E_1$ 和 $V \subseteq E_2$，使得

$$\beta(U \times \{y\}) \subseteq \frac{1}{3}W \quad \text{and} \quad \beta(\{x\} \times V) \subseteq \frac{1}{3}W.$$

由于 $B - B$ 有界，缩小 U 后，我们还可以假设

$$\beta(U \times (B - B)) \subseteq \frac{1}{3}W,$$

由 (b) 得。对所有 $(x_1, y_2) \in (x + U) \times (B \cap (y + V))$，

$$\begin{aligned}\beta(x_1, y_1) - \beta(x, y) &= \beta(x_1 - x, y_1 - y) + \beta(x_1 - x, y) + \beta(x, y_1 - y)\\ &\in \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W \subseteq W\end{aligned}$$

由此可得。因此，$\beta|_{E\times B}$ 是连续的，故 (b) 蕴含 (a)。 □

例 B.11.14。若 E 和 F 是局部凸空间，则赋予 $\mathcal{L}(E, F)$ 有界收敛拓扑。此时，求值映射

$$\varepsilon\colon \mathcal{L}(E, F)_b \times E \to F, \quad (A, x) \mapsto A(x)$$

是分别连续双线性映射。若 $B \subseteq E$ 是有界子集，且 $V \subseteq F$ 是一个零邻域，则存在一个连续半范数 $q\colon F \to [0, \infty[$ 定义在 F 上，使得 $B_1^q(0) \subseteq V$。于是

$$U := \{A \in \mathcal{L}(E, F)\colon \|A\|_{B,q} < 1\}$$

（符号约定同定义 B.9.18）是 $\mathcal{L}(E, F)_b$ 中的一个零邻域，且 $\varepsilon(U \times B) \subseteq B_1^q(0) \subseteq V$。因此，根据命题 B.11.13(b)，$\varepsilon$ 是亚连续的。然而，若 $F = \mathbb{K}$ 且 E 不可赋范，则 ε 不连续（见命题 B.11.12）。

在以下两个推论中， E_1、 E_2和 F 是局部凸空间。

推论 B.11.15。 每个亚连续双线性映射 β: $E_1 \times E_2 \to F$都是序列连续的。

证明。 设 $(x_n,\ y_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 $E_1\times E_2$ 中的一个收敛序列，其极限为 $(x,\ y)$。则 $B := \{y_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$是 E_2 的紧子集，因而有界。由于 β 是亚连续的， $f := \beta|_{E_1\times B}$ 根据命题 B.11.13(a) 是连续的。因此 $\beta(x_n,\ y_n) = f(x_n,\ y_n) \to f(x,\ y) = \beta(x,\ y)$，因为 $n \to \infty$。□

推论 B.11.16。如果 E_1 是桶化的，那么每个分别连续的双线性映射 β: $E_1 \times E_2 \to F$ 都是亚连续的。

证明。 若 $B \subseteq E_2$是有界子集，则 $\{\beta(\cdot, y) : y \in B\} \subseteq \mathcal{L}(E_1, F)$ 逐点有界，因为对每个 $x \in E_1$， $\{\beta(x, y) : y \in B\} \subseteq F$ 有界；这里用到了 $\beta(x, \cdot)$: $E_2 \to F$ 是连续线性的。因此，由命题 B.11.10， $\{\beta(\cdot, y) : y \in B\}$ 等度连续。于是，由命题 B.11.13， β 是亚连续的。□

B.11节习题

习题 B.11.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺拓扑代数，其底层拓扑向量空间可赋范。设 $\|\cdot\|$ 是定义 $\mathcal{A}$ 的拓扑的范数。由引理 B.11.3 和习题 B.9.2，存在 $C \geq 0$，使得对所有 $a, b \in \mathcal{A}$ 都有 $\|ab\| \leq C\|a\|\,\|b\|$。对于 $a, b \in \mathcal{A}$，我们通过 $L_a(b) := ab$ 定义 $L_a \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$。那么，对所有 $a \in \mathcal{A}$ 都有 $\|L_a\|_{\mathrm{op}} \leq C\|a\|$。

(a) 证明映射 L: $\mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A})$ 是含幺代数同态且连续（作为 $\|L\|_{\mathrm{op}} \leq C$）。（b）验证 $\varepsilon_{\mathbf{1}}$: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, $S \mapsto S(\mathbf{1})$ 是连续线性映射，并由 $\varepsilon_{\mathbf{1}} \circ L = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ 推出 L 是拓扑嵌入。（c）证明 $\|a\|' := \|L_a\|_{\mathrm{op}}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个范数，且与 $\|\cdot\|$等价。此外，$\|\mathbf{1}\|' = 1$ 和 $\|\cdot\|'$ 是次乘性的。

练习 B.11.2。 设 E_1、 E_2和 F 是局部凸空间， β: $E_1\times E_2 \to F$ 是连续双线性映射，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E_1 中的一个序列，满足当 $n \to \infty$时 $x_n \to 0$，且 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 E_2 中的一个有界序列（即 $\{y_n: n \in \mathbb{N}\}$ 在 E_2中有界）。由引理 B.11.3(c) 推出，当 $n \to \infty$时， $\beta(x_n, y_n) \to 0$。证明，若仅假设 β 关于第二个变量亚连续，结论仍然成立。

练习 B.11.3. 设 F 是一个局部凸空间， $E := E_1 \times \cdots \times E_n$ 是局部凸空间的乘积，且 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\Gamma \subseteq F^E$ 是一组 n-线性映射。证明下列条件等价:

(a) Γ 等度连续; (b) Γ 在
0 处等度连续;

(c) 对于 F 上的每个连续半范数 p，存在 E_i 上的连续半范数 q_i，使得对于 $i \in \{1, \dots, n\}$

$$(\forall \beta \in \Gamma)\,(\forall (x_1, \dots, x_n) \in E)\; p(\beta(x_1, \dots, x_n)) \le q_1(x_1) \cdots q_n(x_n).$$

习题 B.11.4. 设 $(E, \|\cdot\|_E)$ 和 $(F, \|\cdot\|_F)$ 是赋范空间，且 B 是 $(\mathcal{L}(E,F)\ \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ 中的有界子集；因此 $\sup\{\|A\|_{\mathrm{op}} \colon A \in B\} < \infty$。对于 $y \in E$，令

$$\varepsilon_y \colon B \to F, \quad A \mapsto A(y)$$

表示在 y 处的求值。令 $\mathcal{O}$ 为 B 关于 $(\varepsilon_y)_{y\in E}$ 的始拓扑，令 $\mathcal{O}_D$ 为 B 关于 $(\varepsilon_y)_{y\in D}$ 的始拓扑，其中 $D \subseteq E$ 是稠密向量子空间。

(a) 证明，B 中的网 $(A_j)_{j\in J}$ 关于 $\mathcal{O}$ 收敛到 $A \in B$，当且仅当它在 $(B, \mathcal{O}_D)$ 中收敛到 $A \in B$。推得 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_D$。(b) 证明求值映射

$$\varepsilon \colon (B, \mathcal{O}) \times E \to F, \quad (A, y) \mapsto A(y)$$

是连续的。

(c) 设 X 是拓扑空间，且 $f \colon X \times E \to F$ 是一个映射，使得对每个 $x \in X$，$f^\vee(x) = f(x,\cdot) \in B$。证明 f 是连续的，当且仅当

$$f(\cdot, y) \colon X \to F, \quad x \mapsto f(x,y)$$

对每个 $y \in D$ 都是连续的。

[Hint: We have $f(x,y) = \varepsilon(f^\vee(x), y)$ for $x \in X$ and $y \in E$.]

习题 B.11.5。设 E 是一个局部凸空间。

(a) 证明：子集 $\Gamma \subseteq E'$ 是等度连续的，当且仅当对于某个零邻域 $U \subseteq E$，$\Gamma \subseteq U^\circ$。特别地，对于每个零邻域，U° 都是等度连续的。(b) 证明：在等度连续子集 $\Gamma \subseteq E'$ 上，由 E'_σ 和 E'_c 诱导的拓扑一致。

结合 (a)、(b) 与巴拿赫-阿劳格鲁定理可知，对于每个开零邻域 $U \subseteq E$，极集 U° 是 E'_c 的紧子集。

习题 B.11.6。设 E 是一个实局部凸空间。证明，求值映射 $\varepsilon \colon E'_c \times E \to \mathbb{R}$，$(\lambda, x) \mapsto \lambda(x)$ 是连续的，当且仅当 E 是有限维的。[若 ε 是连续的，则存在零邻域 $U \subseteq E$ 和 $V \subseteq E'_c$，使得 $\varepsilon(V \times U) \subseteq [-1,1]$，从而 $V \subseteq U^\circ$；因此 U° 是 E'_c 中的紧零邻域（见习题 B.11.5），故 $\dim(E') < \infty$，从而 $\dim(E) < \infty$。]

B.12 射影极限

现在我们定义拓扑向量空间的射影极限；它们是本书多个章节中的有用工具。

定义 B.12.1. 设 $(I,\leq)$ 是一个有向集（参见定义 A.1.1）。拓扑向量空间的**射影系统**（在 I 上）是由拓扑向量空间组成的族 $(E_i)_{i\in I}$，其指标取自 I，并配有连续线性映射族 $(q_{ij})_{i\leq j}$，其中线性映射 $q_{ij}\colon E_j\to E_i$ 以满足 $i\leq j$ 的各对 $(i,j)\in I\times I$ 为指标，且具有如下性质：

(a) $q_{ii}=\mathrm{id}_{E_i}$ 对每个 $i\in I$ 成立，且 (b) $q_{ij}\circ q_{jk}=q_{ik}$ 对所有满足 $i\leq j\leq k$ 的 $i,j,k\in I$ 成立。

给定一个拓扑向量空间的射影系统 $\mathcal{S}=((E_i)_{i\in I},(q_{ij})_{i\leq j})$，令 $P:=\prod_{i\in I}E_i$ 为它们的笛卡尔积（赋予乘积拓扑），并定义

$$E:=\Big\{(x_i)_{i\in I}\in P\colon q_{ij}(x_j)=x_i \text{ for all } i,j\in I \text{ such that } i\leq j\Big\}. \tag{B.19}$$

那么，E 是 P 的闭向量子空间（习题）；赋予诱导拓扑后，它成为一个拓扑向量空间，称为该射影系统 $\mathcal{S}$ 的**射影极限**。映射 $\pi_i:=\mathrm{pr}_i|_E\colon E\to E_i$（其中 $\mathrm{pr}_i\colon P\to E_i$ 是相应的坐标投影）称为**极限映射**。更一般地，若 F 是一个与 E 同构的拓扑向量空间，且 $\varphi\colon F\to E$ 是一个拓扑向量空间同构，则称 F 连同映射 $q_i:=\pi_i\circ\varphi$ 为 $\mathcal{S}$ 的射影极限，也记作 $\varprojlim E_i:=F$。根据上下文，总能明确我们讨论的是标准射影极限 $(E,(\pi_i)_{i\in I})$，还是射影极限 $(F,(q_i)_{i\in I})$。

注 B.12.2.(a) 显然，局部凸空间的射影极限仍是局部凸的。若每个 E_i 都是完备的，则 $\varprojlim E_i$ 也是完备的，因为它同构于直积 $\prod_{i\in I}E_i$ 的一个闭向量子空间。

(b) 若在定义 B.12.1 的情形下，每个 $\mathcal{A}_i:=E_i$ 都是局部凸拓扑代数，且每个 q_{ij} 都是连续代数同态，则 $((\mathcal{A}_i)_{i\in I},(q_{ij})_{i\leq j})$ 称为一个**局部凸拓扑代数的射影系统**，并且 (B.19) 中的 $\mathcal{A}:=E$ 是 P 的子代数，因而是一个拓扑代数。若每个 $\mathcal{A}_i$ 都含幺，且对所有 $i\leq j$ 都有 $q_{ij}(\mathbf{1})=\mathbf{1}$，则 $\mathcal{A}$ 含幺。

(c) 拓扑空间也有类似的定义：设 $(I,\leq)$ 是一个有向集，$(X_i)_{i\in I}$ 是一个拓扑空间族，且 $(q_{ij})_{i\leq j}$ 是一族连续映射 $q_{ij}\colon X_j\to X_i$，其中 $i\leq j$ 属于 I，并且对所有 $i\in I$ 都有 $q_{ii}=\mathrm{id}_{X_i}$，且满足定义 B.12.1 的条件（b）。那么

$$\varprojlim X_i:=\Big\{(x_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}X_i\colon (\forall i\leq j)\ q_{ij}(x_j)=x_i\Big\},$$

赋予由直积诱导的拓扑后，称为给定拓扑空间射影系统的**射影极限**。我们用 π_i（或 q_i）表示从射影极限到第 i 个分量 X_i 的投影。

下一个引理包含局部凸空间的射影极限。

引理 B.12.3。考虑拓扑空间的一个射影系统$((X_i)_{i\in I}, (q_{ij})^{i\le j})$的射影极限 X，其极限映射为 $q_i\colon X \to X_i$。设$x \in X$。那么集合 $q_i^{-1}(U)$构成 X中的 x-邻域基，其中 i遍历 I，而 U 遍历 $q_i(x)$ 中的邻域。

证明。 $X \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ 中的每个邻域 V都包含一个形如 $X \cap \prod_{i\in I} V_i$的邻域，其中 V_i 是 x_i 的邻域：$= q_i(x)$ 在 X_i 中，且$F := \{i \in I\colon V_i \neq X_i\}$ 是有限的。令 $i_0 \in I$满足对于所有 $i \in F$都有 $i_0 \ge i$。那么

$$U := \{y \in X_{i_0} : (\forall i \in F)\ q_{ii_0}(y) \in V_i\}$$

是 X_{i_0} 中的 x_{i_0} 的一个邻域，并且 $q_{i_0}^{-1}(U) \subseteq V$，因为 $z \in q_{i_0}^{-1}(U)$意味着 $q_i(z) = q_{ii_0}(q_{i_0}(z)) \in q_{ii_0}(U) \subseteq V_i$对于所有 $i \in F$都成立。□

下述事实常常可以将给定的局部凸空间识别为一个射影极限。

命题 B.12.4。 设 $((E_i)_{i\in I}, (q_{ij})^{i\le j})$ 是拓扑向量空间的一个射影系统，$E \subseteq \prod_{i\in I} E_i$ 是它的射影极限，其极限映射为$q_i\colon E \to E_i$。设 F是一个拓扑向量空间，且对 $i \in I$， $\varphi_i\colon F \to E_i$ 是连续线性映射，并满足

$$q_{ij} \circ \varphi_j = \varphi_i \quad \textit{for all } i, j \in I \textit{ such that } i \le j. \tag{B.20}$$

于是存在唯一的映射 $\varphi\colon F \to E$，使得

$$q_i \circ \varphi = \varphi_i \quad \textit{for all} \in I, \tag{B.21}$$

且 φ 连续且线性。以下结论成立：

(a) 若对所有 $i \in I$， φ_i 在 E_i 中的像稠密，则 φ 的像稠密。(b) 若集合 $\varphi_i^{-1}(U)$ 构成 F 中0-邻域的一个基，其中 i 遍历 I，而 U 遍历 E_i中的0-邻域集，则 φ 是一个拓扑嵌入。(c) 若 F 完备，且(a) 和(b) 的假设均成立，则$\varphi\colon F \to E$ 是拓扑向量空间的同构。

证明。 映射 $(\varphi_i)_{i\in I}\colon F \to \prod_{i\in I} E_i$ 连续且线性。根据 (B.20)，其像包含于 E 中。现在 $\varphi := (\varphi_i)_{i\in I}|^E$ 具有所需性质。

(a) 设 $x \in E$，并设 V是 E中 x 的一个邻域。根据引理 B.12.3，存在 $i \in I$ 以及 E_i 中 $q_i(x)$ 的一个邻域 U，使得 $q_i^{-1}(U) \subseteq V$。根据假设，存在 $y \in F$ 使得 $\varphi_i(y) \in U$。于是 $q_i(\varphi(y)) = \varphi_i(y) \in U$表明 $\varphi(y) \in q_i^{-1}(U) \subseteq V$。因此， $\varphi(F)$在 E中稠密。

（b）由于 F 是豪斯多夫的，（b）的假设意味着，当 $i \in I$时，映射 φ_i在 F 上分离点。因此， φ 是单射。我们已知 φ 是连续且线性的。为证明 φ 是到其像上的开映射，令 $V \subseteq F$ 为一个零邻域。根据假设，存在 $i \in I$ 以及一个

零邻域 $U \subseteq E_i$，使得 $\varphi_i^{-1}(U) \subseteq V$。那么，$q_i^{-1}(U) \cap \varphi(F)$是 $\varphi(F)$中的一个零邻域，其中采用由 E诱导的拓扑。由于 $q_i(\varphi(x)) = \varphi_i(x)$，我们得到

$$q_i^{-1}(U) \cap \varphi(F) = \{\varphi(x) \colon x \in F \text{ with } q_i(\varphi(x)) \in U\} = \varphi(\varphi_i^{-1}(U)) \subseteq \varphi(V),$$

这表明 $\varphi(V)$ 也是 $\varphi(E)$ 中的一个零邻域。因此，根据命题 B.2.1(b)，φ 是开映射（因而是拓扑嵌入）。

(c) 由 (a) 和 (b)，φ 是一个稠密像的拓扑嵌入。由于 $\varphi(F)$（如同 F）是完备的，根据引理 B.6.2，它在 E 中是闭的。因此 $E = \varphi(F) = \varphi(F)$，且 φ 是拓扑向量空间同构。□

例 B.12.5。$\mathbb{N}_0$ 配备通常的序后是一个有向集。序列 $(C^i([0,1], \mathbb{R}))_{i\in\mathbb{N}_0}$，连同包含映射

$$q_{ij} \colon C^j([0,1],\mathbb{R}) \to C^i([0,1],\mathbb{R}), \quad q_{ij}(\gamma) := \gamma \tag{B.22}$$

对于 $i \leq j$，显然构成一个射影系统。我们断言

$$C^\infty([0,1],\mathbb{R}) \cong \varprojlim C^k([0,1],\mathbb{R}). \tag{B.23}$$

为此，令 $P := \prod_{i\in\mathbb{N}_0} C^i([0,1], \mathbb{R})$。由于 $q_{ij}(\gamma_j)$ 对 $\gamma_j \in C^j([0,1], \mathbb{R})$ 和 $\gamma_i \in C^i([0,1], \mathbb{R})$ 成立当且仅当 $\gamma_i = \gamma_j$（见 (B.22)），我们得到

$$E := \big\{(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in P \colon q_{ij}(\gamma_j) = \gamma_i \text{ if } i \leq j\big\} = \{(\gamma)_{i\in\mathbb{N}_0} \colon \gamma \in C^\infty([0,1],\mathbb{R})\}.$$

因此，$\varphi\colon C^\infty([0,1], \mathbb{R}) \to E, \varphi(\gamma) := (\gamma)_{i\in\mathbb{N}_0} = (\gamma, \gamma, \ldots)$ 是向量空间同构。于是，对每个 $i \in \mathbb{N}_0$，$q_i := \mathrm{pr}_i \circ \varphi\colon C^\infty([0,1], \mathbb{R}) \to C^i([0,1], \mathbb{R})$ 都是包含映射，依拓扑的定义，它是连续的。由于 φ 的每个分量 q_i 都连续，φ 也是连续的。命题 B.12.4(b) 表明 φ 是开映射。因此，φ 是拓扑向量空间同构，故 (B.23) 成立。

例 B.12.6. 每个弗雷歇空间 E 都是赋范空间的射影极限。事实上，由命题 B.4.12，存在一个连续半范数序列 $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$，定义其拓扑。将每个 p_n 替换为逐点最大值 $\max\{p_1, \ldots, p_n\}$后，不妨设 $p_1 \leq p_2 \leq \cdots$。对于满足 $n \leq m$ 的 $n, m \in \mathbb{N}$，注 B.4.10 给出唯一的连续线性映射 $\alpha_{n,m}\colon E_{p_m} \to E_{p_n}$，使得 $\alpha_{n,m} \circ \alpha_{p_m} = \alpha_{p_n}$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们将 E_{p_n} 完备化为巴拿赫空间 F_n，使得 $E_{p_n} \subseteq F_n$。我们用 q_n 表示α_{p_n}，并将其视为到 F_n的映射。对于 $n \leq m$，令 $q_{n,m}\colon F_m \to F_n$ 为由命题 B.8.1 给出的 $\alpha_{n,m}$ 的唯一连续延拓。于是$\mathcal{S} := ((F_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_{n,m})_{n\leq m})$ 是一个射影系统，而 E连同映射 q_n，是 $\mathcal{S}$ 的射影极限（这是命题 B.12.4(c) 的特殊情形）。类似的论证表明，每个完备局部凸空间 E 都是巴拿赫空间的射影极限；该射影系统为 $((E_p)_{p\in\mathcal{P}}, (\widetilde{\alpha}_{p,q})_{p\leq q})$，其中 $\mathcal{P}$ 是 E 上的所有连续半范数构成的集合，而 $\widetilde{\alpha}_{p,q}\colon E_q \to E_p$是 $\alpha_{p,q}\colon E_q \to E_p$ 到完备化之间映射的唯一连续延拓。

B.13 直和与局部凸归纳极限

现在我们来考察局部凸直和，因为它们是研究紧支撑光滑函数空间（以及向量丛中的紧支撑光滑截面空间）的重要工具。之后，我们将考察局部凸空间递增序列$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$的局部凸归纳极限 $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$。我们汇总了关于两个重要情形的事实（它们只在本书的特定例子中用到）：

(i) 严格归纳极限（当 E_{n+1} 在 E_n 上诱导给定拓扑时）；[6](ii) 西尔瓦空间 E（当每个 E_n 都是巴拿赫空间，且每个包含映射$E_n \to E_{n+1}$ 都是紧算子时）。

局部凸直和

对于一族$(E_j)_{j\in J}$局部凸空间，其指标集 J可数，我们考虑向量子空间

$$\bigoplus_{j\in J} E_j := \Big\{(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} E_j \colon x_j = 0 \text{ for all but finitely many } j\Big\} \subseteq \prod_{j\in J} E_j.$$

对于 $j \in J$，令 $\mathcal{P}_j$ 为 E_j 上所有连续半范数构成的集合。那么

$$p\colon \bigoplus_{j\in J} E_j \to [0,\infty[, \quad (x_j)_{j\in J} \mapsto \sup\{p_j(x_j)\colon j\in J\} \tag{B.24}$$

对于所有 $(p_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J}\mathcal{P}_j$，都是半范数。令 $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$ 为 $\bigoplus_{j\in J} E_j$ 上由 (B.24) 中所有半范数 p 定义的局部凸向量拓扑。赋予此拓扑后，$\bigoplus_{j\in J} E_j$ 称为空间 E_j（$j \in J$）的**局部凸直和**。若所有空间 E_j 都相同，记为 $E_j = E$，则我们简写为

$$E^{(J)} := \bigoplus_{j\in J} E.$$

注 B.13.1。（a）注意

$$B_r^p(x) = \bigoplus_{j\in J} B_r^{p_j}(x_j)$$

对所有如（B.24）中的 p，$x = (x_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} E_j$ 和 $r > 0$，记为

$$\bigoplus_{j\in J} V_j := \bigoplus_{j\in J} E_j \cap \prod_{j\in J} V_j$$

[6]尽管紧支撑函数空间和截面空间是严格归纳极限的例子，但将它们嵌入局部凸直和，更容易确立其本质性质。

对所有满足以下条件的子集 $V_j \subseteq E_j$ ：对于除有限多个 j 外的所有情况，$0 \in V_j$ 。由于半范数可以替换为正倍数，这意味着形如以下形式的集合

$$\bigoplus_{j\in J} B_{r_j}^{q_j}(x_j)$$

其中 $p_j \in \mathcal{P}_j$ 和 $r_j > 0$ 构成 x 的开邻域基，因此，如果对每个 j， V_j 遍历 E_j 中x_j 的开邻域基，那么集合 $\bigoplus_{j\in J} V_j$也构成其开邻域基。

(b) 由 (a) 可知，包含映射 $\bigoplus_{j\in J} E_j \to \prod_{j\in J} E_j$ 是连续的。

(c) 对于有限子集 $M \subseteq J$，考虑线性映射

$$\lambda_M \colon \prod_{j\in M} E_j \to \bigoplus_{j\in J} E_j$$

它将 $(x_j)_{j\in M}$ 映射为 $(y_j)_{j\in J}$ ，其中 $y_j := x_j$ （若 $j \in M$），否则 $y_j := 0$ 。由 (a) 可知， λ_M 是一个拓扑嵌入。利用 λ_M，我们将$\prod_{j\in M} E_j$ 与 im(λ_M)等同。特别地，我们可以将 E_j 与 $\lambda_{\{j\}}(E_j)$等同。若 J 是有限的，则 $\bigoplus_{j\in J} E_j = \prod_{j\in J} E_j$ 带有乘积拓扑。

引理 B.13.2。设 $(E_j)_{j\in J}$ 是一个可数的局部凸空间族。
(a) 若 α:$\bigoplus_{j\in J} E_j \to F$是到拓扑向量空间 F的线性映射，则 α 连续，当且仅当对每个 $j \in J$， $\alpha|_{E_j}$都连续。(b)若 $(J_i)_{i\in I}$ 是 J 的一个划分，其元素为非空且两两不相交的子集 J_i，则该向量空间同构

$$\bigoplus_{j\in J} E_j \to \bigoplus_{i\in I} \Big(\bigoplus_{j\in J_i} E_j \Big), \quad (x_j)_{j\in J} \mapsto ((x_j)_{j\in J_i})_{i\in I}$$

是拓扑向量空间的同构。
(c)若 $(E_j)_{j\in J}$ 和 $(F_j)_{j\in J}$ 是可数的局部凸空间族，则下述映射是拓扑向量空间的同构:

$$\bigoplus_{j\in J}(E_j \times F_j) \to \Big(\bigoplus_{j\in J} E_j\Big) \times \Big(\bigoplus_{j\in J} F_j\Big), \ (x_j, y_j)_{j\in J} \mapsto ((x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J}).$$

(d) 若对每个 $j \in J$， $F_j \subseteq E_j$ 都是一个向量子空间，则由 $\bigoplus_{j\in J} E_j$ 诱导的拓扑使 $\bigoplus_{j\in J} F_j$ 成为空间 F_j（ $j \in J$）的局部凸直和。

（e） $E := \bigoplus_{j\in J} E_j$ 的每个有界子集都包含于某个有限子集 $M \subseteq J$ 的 $\prod_{j\in M} E_j$ 中。
(f)如果每个空间 E_j 都是完备的(分别为拟完备、序列完备、麦基完备)，那么 $\bigoplus_{j\in J} E_j$ 也(分别为完备、拟完备、序列完备、麦基完备)。

证明。(a) 对于非平凡的蕴含，设 $Q_0 \subseteq F$ 是一个零邻域；对于 $k \in \mathbb{N}$，取一个零邻域 $Q_k \subseteq F$，使得 $Q_k + Q_k \subseteq Q_{k-1}$。于是对所有 k都有$Q_1 + \cdots + Q_k \subseteq Q_0$。设 $J \to \mathbb{N}, j \mapsto n_j$是一个单射。现在

$$W := \bigoplus_{j \in J} (\alpha|_{E_j})^{-1}(Q_{n_j})$$

is $\bigoplus_{j\in J} E_j$中的一个零邻域，使得 $\alpha(W) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(Q_1+\cdots+Q_k) \subseteq Q_0$。(b) 这由如下事实可知：形如

$$\bigoplus_{i \in I} \Big(\bigoplus_{j \in J_i} B_r^{p_j}(0) \Big)$$

的集合构成 $\bigoplus_{i\in I} \left(\bigoplus_{j\in J_i} E_j\right)$ 中的零邻域基（见注记 B.13.1(a)）。

(c) 可由 (b) 应用于指标集 $J \times \{1,2\}$的两个划分得到。(d) 集合 $\bigoplus_{j\in J}(F_j \cap V_j)$对这两种拓扑而言，构成 $\bigoplus_{j\in J} F_j$中的零邻域基，其中 V_j 取遍 E_j中所有开零邻域。

(e) 假设 $B \subseteq E$ 有界，但不包含在有限部分乘积中；我们将推出矛盾。不妨假设 $J = \mathbb{N}$。存在正整数 $m_1 < m_2 < \cdots$ 和元素 $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in B$，使得对于 $n \in \mathbb{N}$， $x_{m_n}^{(n)} \neq 0$；其构造如下：令 $m_0 := 0$。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，已经找到了满足 $x_{m_j}^{(j)} \neq 0$ 的元素 $m_j \in \mathbb{N}$ 和 $x^{(j)} \in B$，其中 $j \in \{1, \ldots, n-1\}$，且对于所有 $i \in$， $m_{i-1} \leq m_i \{1, \ldots, n-1\}$（若 $n = 1$，这是一个空条件）。由于 $B \not\subseteq \prod_{k=1}^{m_{n-1}} E_k$，存在 $x^{(n)} \in B \setminus \prod_{k=1}^{m_{n-1}} E_k$。因此，对于某个 $m_n > m_{n-1}$，有 $x_{m_n}^{(n)} \neq 0$，构造至此完成。

取一个平衡开零邻域 $V_n \subseteq E_{m_n}$，使得 $x_{m_n}^{(n)} \notin V_n$。于是

$$W := \left\{ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon (\forall n \in \mathbb{N})\ y_{m_n} \in \frac{1}{n} V_n \right\}$$

是 E 中的一个零邻域，使得 $x^{(n)} \notin nW$，因此对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $B \not\subseteq nW$，这与 B 的有界性矛盾。

(f) 由于 E 的每个有界子集都包含于一个有限部分乘积中，且 E 在后者上诱导乘积拓扑，因此，关于拟完备性、序列完备性和麦基完备性的断言均成立，因为这些性质对于有限直积而言是众所周知的。现在假设对每个 $j \in J$， E_j 都是完备的，并令 $(x^{(\alpha)})_{\alpha\in A}$ 是 $\bigoplus_{j\in J} E_j$ 中的一个柯西网，其中 $x^{(\alpha)} = (x_j^{(\alpha)})_{j\in J}$。根据注 B.13.1(b)，$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 也是 $\prod_{j\in J} E_j$ 中的一个柯西网，因此

$$x_\alpha \to x \quad \text{in } \prod_{j\in J} E_j$$

对某个 $x = (x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} E_j$。为证明 $x \in \bigoplus_{j\in J} E_j$，反设 $I := \{j \in J: x_j \neq 0\}$ 是无限的。对于 $j \in I$，选取一个闭零邻域 $V_j \subseteq E_j$，使得 $-x_j \notin V_j$。对于 $j \in J \setminus I$，令 $V_j := E_j$。存在 $\alpha_0 \in A$，使得

$$x^{(\alpha)} - x^{(\beta)} \in \bigoplus_{j\in J} V_j$$

对所有 α, $\beta \geq \alpha_0$。因此，对于 $j \in J$，我们有

$$x_j^{(\alpha)} - x_j^{(\beta)} \in V_j$$

对所有 α, $\beta \geq \alpha_0$。令其趋于极限，我们看到 $x_j^{(\alpha)} - x_j \in V_j$ 对所有 $\alpha \geq \alpha_0$均成立。因此

$$x_j^{(\alpha_0)} \in x_j + V_j$$

从而 $x^{(\alpha_0)}{}_j \neq 0$ 对所有 $j \in J$均成立，这与 $x^{(\alpha_0)} \in \bigoplus_{j\in J} E_j$矛盾。

为证明 $x^{(\alpha)} \to x$ 属于 $\bigoplus_{j\in J} E_j = E$，设 $U \subseteq E$ 为一个零邻域；则 U 包含一个形如 W 的零邻域

$$W = \bigoplus_{j\in J} W_j$$

其零邻域 $W_j \subseteq E_j$为闭集。存在 $\alpha_0 \in A$ 使得 $x^{(\alpha)} - x^{(\beta)} \in W$ 对所有 α, $\beta \geq \alpha_0$均成立。对于每个 $j \in J$，我们于是有

$$x_j^{(\alpha)} - x_j^{(\beta)} \in W_j \quad \text{for all } \alpha, \beta \geq \alpha_0.$$

在 β 中取极限，可知对于所有 $\alpha \geq \alpha_0$ 和 $j \in J$, $x_j^{(\alpha)} - x_j \in W_j$，因此 $x^{(\alpha)} - x \in E \cap \prod_{j\in J} W_j = \bigoplus_{j\in J} W_j = W \subseteq U$。□

例 B.13.3。由例 A.7.14 可知，归纳极限拓扑（作为拓扑空间）使 $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \varinjlim \mathbb{R}^n$ 成为一个局部凸空间。显然，

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$$

作为一个向量空间。下面验证 $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ 是一个局部凸空间；这将意味着，例如， $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ 是完备的（根据引理 B.13.2(f)）。

我们需要证明恒等映射 $\varphi\colon \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ 是一个同胚。根据注 B.13.1(c)，对每个 $n \in \mathbb{N}$，限制映射 $\varphi|_{\mathbb{R}^n} = \lambda_{\{1,\ldots,n\}}$ 都是连续的；由引理 A.7.3(ii)，映射 φ 连续。记 $\mathbb{R}e_n = \lambda_{\{n\}}(\mathbb{R})$ 为 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ 中的第 n 个直和项。由于 $\varphi^{-1}|_{\mathbb{R}e_n}$ 可以写成以下复合映射，因此它是连续的

$$\mathbb{R}e_n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

的连续线性包含映射。由于 φ^{-1} 是线性的，引理 B.13.2(a)表明 φ^{-1} 是连续的。因此， φ是一个同胚。

局部凸直极限

许多值得关注的向量空间都可以写成局部凸空间的递增并。

定义 B.13.4。 对于 $n \in \mathbb{N}$，局部凸空间 $(E_n, \mathcal{O}_n)$ 的递增序列 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$，若每个包含映射 $E_n \to E_{n+1}$ 都是连续线性映射，则称为局部凸空间的直接序列。我们赋予 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 其自然的向量空间结构（见定义 A.7.10）。令 P 为所有满足以下条件的半范数 p: $E \to [0,\infty[$ 的集合:

$$p|_{E_n} : (E_n, \mathcal{O}_n) \to [0,\infty[$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，该映射都是连续的。由半范数 $p \in P$ 定义在 E 上的（不一定是豪斯多夫的）局部凸向量拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$，称为 E 上的局部凸归纳极限拓扑；$(E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$ 称为该序列的局部凸归纳极限。如果我们说 $E = \varinjlim E_n$ 作为局部凸空间，指的是 E上的拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$。如果每个 E_n 都是巴拿赫空间（分别地，弗雷歇空间），则称 $(E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$ 为 (LB)空间（分别地，(LF)空间）。

注 B.13.5. (a) 注意，每个包含映射 j_n: $(E_n, \mathcal{O}_n) \to (E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$ 都是连续的，因为对每个 $p \in P$ 和 $x \in E_n$，$p(j_n(x)) = (p|_{E_n})(x)$。

(b) 事实上，$\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$ 是 E 上使每个包含映射 j_n: $E_n \to E$ 连续的最细局部凸拓扑。[7]

(c) 若 E 上的半范数 p 满足：对某个 n，$p|_{E_n}$ 连续，则对所有正整数 $m \le n$，$p|_{E_m}$ 都连续。因此，若 $n_1 < n_2 < \cdots$是正整数，则 p 在每个 E_n 上连续，当且仅当对每个 j，$p|_{E_{n_j}}$ 连续，由此局部凸归纳极限相同:

$$\varinjlim E_n = \varinjlim E_{n_j}.$$

(d) 若 λ: $E \to F$ 是到一个（不一定是豪斯多夫的）局部凸空间 F 的线性映射，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$\lambda|_{E_n}$: $(E_n, \mathcal{O}_n) \to F$ 连续，则λ: $(E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}) \to F$ 连续。为此，取一个零邻域 $V \subseteq F$。我们可以找到 F 上的连续半范数 q，使得 $B_1^q(0) \subseteq V$。于是，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$q \circ \lambda|_{E_n}$ 都是$(E_n, \mathcal{O}_n)$上的连续半范数，因此 $p := q \circ \lambda \in P$。由构造可知，$\lambda(B_1^p(0)) \subseteq B_1^q(0) \subseteq V$，所以 λ 在零点连续，进而连续。

(e) 如果存在一个单射线性映射 λ: $E \to F$ 到豪斯多夫局部凸空间 F，使得对每个 n，$\lambda|_{E_n}$: $(E_n, \mathcal{O}_n) \to F$是连续的，那么$\lambda$ 也是连续的（由 (d) 可知），因此 $(E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$ 是豪斯多夫的。这个简单的判据适用于许多值得关注的情形。关于豪斯多夫性质的其他充分条件，将在命题 B.13.9(b) 和 B.13.13(b) 中给出。

[7] 如果 $\mathcal{O}$ 是 E 上的局部凸向量拓扑，使得每个 j_n 都连续，并且 p是 $(E, \mathcal{O})$ 上的连续半范数，那么对每个 $n \in \mathbb{N}$，$p|_{E_n} = p \circ j_n$ 都是连续的，因此 $p \in P$，从而 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$。

(f) 在 $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 上，还有一个拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$，使其成为归纳极限拓扑空间（见定义 A.7.1）。那么 $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ （作为映射

$$(E, \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}) \to (E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}), \quad x \mapsto x$$

由 (a) 与引理 A.7.3 可知是连续的）。我们提醒读者，$\mathcal{O}_{\mathrm{dl}} \neq \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$在许多情形下（一个例子可见习题 A.7.6）。一种特殊情形，其中 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}} = \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$ 将在命题 B.13.13 中遇到，并且对微分学是有用的（见第 2.7 节）。

下面的引理有助于阐明局部凸归纳极限中的零邻域。

引理 B.13.6. 若 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是局部凸空间的直接序列（E_n，$\mathcal{O}_n$），且 $E = \varinjlim E_n$ 为其局部凸归纳极限，则有：

(a) 满足 $0 \in V$ 的凸子集 $V \subseteq E$ 是 $(E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$ 中的零邻域，当且仅当对每个 $n \in \mathbb{N}$，$V_n := V \cap E_n$ 是 $(E_n, \mathcal{O}_n)$ 中的零邻域。*(b)* 凸子集 $V \subseteq E$ 在 $(E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$ 中是开的，当且仅当对每个 $n \in \mathbb{N}$，$V_n := V \cap E_n$在 $(E_n, \mathcal{O}_n)$ 中是开的。*(c)* 若 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $(E_n, \mathcal{O}_n)$ 中开零邻域 V_n 的序列，则

$$V := \sum_{n\in\mathbb{N}} V_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V_1 + \cdots + V_n)$$

是$(E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$中的一个开0-邻域。这样的集合 V 构成$(V, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$中0-邻域的一个基。

(d) $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$ 是求和映射下的商拓扑

$$q\colon \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \to E, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n,$$

其定义域是局部凸直和。

(e) 若对每个 $n \in \mathbb{N}$，E_n 都是桶化的，则$(E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$ 也是桶化的。

证明。(d) 设 $\mathcal{O}_q$ 是 E上的商拓扑。到一个直和项的限制 $q|_{E_n}$ 与连续包含映射 $(E_n, \mathcal{O}_n) \to (E, \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$一致。因此由引理 B.13.2(a)，$q$ 是连续的，从而 $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}} \subseteq \mathcal{O}_q$。由于对每个 n，$q|_{E_n}\colon (E_n, \mathcal{O}_n) \to (E, \mathcal{O}_q)$是连续的，且 $\mathcal{O}_q$是局部凸的，我们有 $\mathcal{O}_q \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$ （见注 B.13.5(b)），从而 $\mathcal{O}_q = \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$。

(c) 由 (d) 可知 q 连续且是开映射，并且集合 $W := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ 构成 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 中开零邻域的基，因此集合 $V = q(W)$ 构成 E 中零邻域的基。

(a) 由 (c) 可得，因为 $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} V_n \subseteq V$。

(b) 假设每个 V_n 都是开集。令 $x \in V$，比如 $x \in E_m$。取一个子序列后，我们可以假设 $m = 1$。那么对于每个 n，$(V - x) \cap E_n = V_n - x$ 都是 E_n 中的零邻域。由 (a) 可知，$V - x$ 是零邻域，因此 V 是 x 的邻域。

(e) 如果 $V \subseteq E$ 是一个桶，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$V \cap E_n$ 都是 V_n 中的一个桶。因此，$V \cap E_n$ 是 E_n 中的一个零邻域（因为假设 E_n 是桶化的），从而根据 (a)，V 是 E 中的一个零邻域。□

局部凸空间的严格归纳极限

由局部凸空间构成的直序列 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 称为严格的，如果对于每个 $n \in \mathbb{N}$，E_{n+1} 在 E_n 上诱导给定的拓扑（见定义 A.7.1）；在这种情况下，局部凸归纳极限 $\varinjlim E_n$ 称为严格归纳极限。现在我们来记录它们的一些性质。下面这个概念很有用：

定义 B.13.7。设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是局部凸空间的直接序列（E_n，$\mathcal{O}_n$），其局部凸归纳极限为 $E = \varinjlim E_n$。若对于每个有界子集 $B \subseteq E$，都存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 B 包含于（并且在）（E_n，$\mathcal{O}_n$）中且有界，则称（E，（E_n）$_{n\in\mathbb{N}}$）是有界正则[8]的。

关于紧正则性的相关概念，请参见定义 A.7.5。我们回顾一个有用的事实：

引理 B.13.8。设 E 是一个局部凸空间，$F \subseteq E$ 是一个向量子空间，且 $V \subseteq F$ 是一个开、绝对凸的0-邻域。则存在一个绝对凸的开0-邻域 $Q \subseteq E$，使得 $V = F \cap Q$。

证明。根据诱导拓扑的定义，存在一个开零邻域 $P \subseteq E$，使得 $F \cap P = V$。取 E 中的一个开绝对凸零邻域 $W \subseteq P$，并令

$$Q := \operatorname{conv}(V \cup W).$$

那么 Q 是绝对凸的。若 $x \in Q$，则对于某些 $t \in [0,1]$、$v \in V$ 和 $w \in W$，有 $x = tv + (1-t)w$（见习题 B.13.1）。现在假设 $x \in F \cap Q$。若 $t = 1$，则 $x = v \in V$。若 $1 - t \neq 0$，我们推出 $w = (x - tv)/(1-t) \in F$。因此 $w \in F \cap W \subseteq F \cap P = V$，由此可得 $x = tv + (1-t)w \in V$（因为 V 是凸的）。于是 $F \cap Q \subseteq V$，从而 $F \cap Q = V$（因为 $V \subseteq Q$）。由于 $W \subseteq Q$，我们知道 Q 是 E 中的一个零邻域。若 $x \in Q$，则像之前一样写作 $x = tv + (1-t)w$。由于 V 在 F 中是开的，且 W 在 E 中是开的，我们可找到 $r > 1$，使得 $rv \in V$ 且 $rw \in W$。于是 $rx = t(rv) + (1-t)(rw) \in Q$，由引理 B.1.3(d) 可得 $x \in Q^0$。因此 $Q \subseteq Q^0$，这表明 $Q = Q^0$ 是开的。□

命题 B.13.9. 如果 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是局部凸空间的严格归纳序列，且 $E := \varinjlim E_n$ 是其局部凸归纳极限，那么我们有：
(a) E 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都在 E_n 上诱导给定的拓扑；(b) E 是豪斯多夫的；(c) 若对每个 $n \in \mathbb{N}$，E_n 在 E_{n+1} 中是闭的，则 $(E,(E_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 是有界正则且紧正则的；(d) 若对每个 $n \in \mathbb{N}$，E_n 都是完备的，则 E 也完备；(e) 若 E_n 在 E_{n+1} 中是闭的，且对每个 $n \in \mathbb{N}$，E_n 都是序列完备的（（分别为拟完备、麦基完备），则 E 也序列完备（（分别为拟完备、麦基完备）。

[8] 在文献中，这种归纳极限通常简称为 *regular*。

证明。(a) 包含映射 $j_n\colon E_n \to E$ 是连续的。为证明 j_n 是拓扑嵌入，不妨假设 $n = 1$。令 $V_1 \subseteq E_1$ 为一个绝对凸开零邻域。由引理 B.13.8，对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个绝对凸开零邻域 $V_{n+1} \subseteq E_{n+1}$，使得 $V_{n+1} \cap E_n = V_n$。利用引理 B.13.6(b)，我们看到 $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ 是 E 中的一个开零邻域。根据构造，$V \cap E_1 = V_1$。因此，j_1 是拓扑嵌入。

(b) 根据引理 B.1.7，只需证明 $\{0\}$ 在 E 中是闭的。设 $0 \neq x \in E$，例如 $x \in E_n$；我们证明 $x \notin \{0\}$。取一个开零邻域 $V \subseteq E_n$，使得 $x \notin V$。根据 (a)，存在一个开零邻域 $W \subseteq E$，使得 $E_n \cap W = V$，因此 $x \notin W$。于是，$x - W$ 是 E 中 x 的一个开邻域，使得 $0 \notin x - W$，因此 $\{0\} \subseteq E \setminus (x - W)$。

(c) 根据 (a)，我们只需证明每个有界子集 $B \subseteq E$ 都包含于某个 E_n，其中 n。否则，对每个 n，都有 $B\setminus E_n \neq \emptyset$。取 $x_1 \in B\setminus E_1$ 和 $m_1 \in \mathbb{N}$，使得 $x_1 \in E_{m_1}$。递归地，找出 $x_{n+1} \in B \setminus E_{m_n}$ 和 $m_{n+1} > m_n$，使得 $x_{n+1} \in E_{m_{n+1}}$。取子序列 E_1，E_{m_1}，E_{m_2}，$\ldots$ 后，不妨设对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $m_n = n+1$。设 $V_1 \subseteq E_1$ 是一个开绝对凸零邻域。归纳地，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们找出一个开绝对凸零邻域 $V_{n+1} \subseteq E_{n+1}$，使得

$$V_{n+1} \cap E_n = V_n \tag{B.25}$$

and

$$x_n \notin (n+1)V_{n+1}. \tag{B.26}$$

事实上，利用引理 B.13.8，我们可以找到一个平衡开零邻域 $V_{n+1} \subseteq E_{n+1}$，使得 (B.25) 成立。由于 E_n 在 E_{n+1} 和 $x_{n+1} \notin E_n$ 中是闭的，因此存在一个开绝对凸零邻域 $W \subseteq E_{n+1}$，使得 $(x_n + (n+1)W) \cap E_n = \emptyset$，从而

$$x_n \notin E_n + (n+1)W = (n+1)(E_n + W). \tag{B.27}$$

将 V_{n+1} 替换为 $V_{n+1} \cap (E_n + W)$后，我们不妨假设 $V_{n+1} \subseteq E_n + W$。因此，由 (B.27) 可得 (B.26) 成立。

现在，$V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ 是 E 中的一个开零邻域，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $V \cap E_{n+1} = V_{n+1}$，因而 $x_n \notin (n+1)V$，这意味着 B 不是 $(n+1)V$ 的子集。这与 B 的有界性矛盾。

(d) 设 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 E 中的柯西网。设 $\mathcal{U}$ 是 E 中所有 0-邻域的集合。我们断言存在 $m \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $\alpha \in A$ 和 $W \in \mathcal{U}$，都存在 $\beta \geq \alpha$，使得

$$x_\beta \in E_m + W.$$

如果这是真的，那么

$$A_W := \{\alpha \in A\colon x_\alpha \in E_m + W\}$$

在 A 中是共尾的，因此

$$M := \{(W, \alpha) \in \mathcal{U} \times A \colon \alpha \in A_W\}$$

若定义 $(W_1, \alpha_1) \leq (W_2, \alpha_2)$ 当且仅当 $W_2 \subseteq W_1$且 $\alpha_1 \leq \alpha_2$，则它成为一个有向集。对于 $a = (W, \alpha) \in M$，取 $y_a \in E_m$和 $w_a \in W$使得

$$x_\alpha = y_a + w_a. \tag{B.28}$$

于是 $(y_a)_{a \in M}$ 是 E_m中的柯西网。事实上，若 $U \subseteq E_m$ 是一个开 0-邻域，则由 (a) 可得 $Q \in \mathcal{U}$使得 $U = E_m \cap Q$。取 $P \in \mathcal{U}$使得 $P - P + P \subseteq Q$，并取 $\gamma \in A$ 使得

$$x_\alpha - x_\beta \in P \quad \text{for all } \alpha, \beta \geq \gamma.$$

我们不妨假设 $\gamma \in A_P$。对于 M 中所有的 $a, b \geq (P, \gamma)$，设其为 $a = (V, \alpha)$ 和 $b = (W, \beta)$，则有

$$y_a - y_b = x_\alpha - x_\beta - w_a + w_b \in P - V + W \subseteq Q$$

因此 $y_a - y_b \in E_m \cap Q = U$。设 $y \in E_m$为 $(y_a)_{a \in M}$的极限。那么$y_a \to y$也在 E中。给定 $W \in \mathcal{U}$，令 $\beta \in A_W$。由于对 $a \geq (W, \beta)$ 有 $w_a \in W$，网 $(w_a)_{a \in M}$ 在 E中收敛到 0。根据 (B.28)，子网

$$(x_\alpha)_{(\alpha, V) \in M}$$

因此收敛到 y（关于 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$，因而也关于柯西网 $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$）。

为证明该断言，假设它不成立。那么，对每个 $m \in \mathbb{N}$，都存在 $\alpha_m \in A$ 和 $W_m \in \mathcal{U}$，使得

$$x_\alpha \notin E_m + W_m \quad \text{for all } \alpha \geq \alpha_m. \tag{B.29}$$

我们可以假设，对于每个 m和 $W_1 \supseteq W_2 \supseteq \cdots$，$W_m$都是绝对凸的。令 W 为.....的凸包

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (W_n \cap E_n).$$

Then

$$E_m + W \subseteq E_m + W_m \tag{B.30}$$

对每个 $m \in \mathbb{N}$均成立。事实上，若 $x \in W$，则存在 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}}($ $W_n \cap E_n)$，以及一个实数序列 $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$，其和为 1，使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n = \sum_{n=1}^{m} r_n x_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} r_n x_n$$

（见习题 B.13.1(b)）。由于 $E_n \subseteq E_m$对于 $n \in \{1, \ldots, m\}$，第一部分和是 E_m中的一个元素。由于 $W_n \subseteq W_m$ 若 $n \geq m$ 且 W_m 是绝对凸的，第二部分和属于 W_m。因此 $x \in E_m + W_m$ 确实如此。

根据柯西网的定义，我们找到 $\gamma \in A$ 使得

$$x_\alpha - x_\beta \in W \tag{B.31}$$

对所有 $\alpha,\ \beta \geq \gamma$。现在 $x_\gamma \in E_{m_0}$ 对于某个 $m_0 \in \mathbb{N}$。由于 A 是有向的，我们找到$\alpha \in A$ 使得 $\alpha \geq \gamma$ 且 $\alpha \geq \alpha_{m_0}$。利用 (B.31)，得到

$$x_\alpha = x_\gamma + (x_\alpha - x_\gamma) \in E_{m_0} + W.$$

但根据 (B.29)，$x_\alpha \notin E_{m_0} + W_{m_0}$，因此 $x_\alpha \notin E_{m_0} + W$（根据 (B.30)），这显然矛盾。

(e) 由 (c) 和 (a) 立即得出。 □

注 B.13.10。若由局部凸空间 $(E_\alpha,\ \mathcal{O}_\alpha)$ 组成的族 $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ 满足：A 是一个有向集；对于所有 $\alpha,\ \beta \in A$，$E_\alpha \subseteq E_\beta$，且$\alpha \leq \beta$，包含映射 $j_{\beta,\ \alpha}$: $E_\alpha \to E_\beta$ 是连续线性的，则称该族为一个归纳系统。此外，若每个 $j_{\beta,\ \alpha}$都是拓扑嵌入，则称该归纳系统是严格的。赋予 $E := \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha$ 向量空间结构，使每个 E_α 成为向量子空间，并令 P 为 E 上所有满足以下条件的半范数 q 组成的集合：对于每个 $\alpha \in A$，$q|_{E_\alpha}$在 $(E_\alpha,\ \mathcal{O}_\alpha)$ 上连续。由半范数 $p \in P$ 定义在 E 上的局部凸向量拓扑$\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$ 称为局部凸归纳极限拓扑；当使用$\longrightarrow$这一拓扑时，我们称 $E = \varinjlim E_\alpha$ 是一个局部凸空间。

若 q 是 E 上的半范数，且对于某个 $\beta \in A$，$q|_{E_\beta}$ 是连续的，那么 $q|_{E_\alpha} = q|_{E_\beta} \circ j_{\beta,\ \alpha}$ 对所有 $\alpha \leq \beta$都连续。因此，如果 $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ 有一个共尾子序列 $(E_{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$（如注 A.7.15(b) 所示），那么

$$\varinjlim E_\alpha = \varinjlim E_{\alpha_n}$$

作为局部凸空间。本书中，我们只讨论存在共尾子序列的归纳系统，以避免额外的复杂性。

例 B.13.11. 对于每个紧子集 $K \subseteq \mathbb{R}$，令 $C^\infty_K(\mathbb{R}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ 为所有满足支集 $\mathrm{supp}(f) \subseteq K$ 的光滑函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 构成的闭向量子空间。于是，$C^\infty_{[-n,n]}(\mathbb{R})$ 构成 $n \in \mathbb{N}$ 的一个共尾子序列，因此局部凸归纳极限

$$C^\infty_c(\mathbb{R}) := \varinjlim C^\infty_K(\mathbb{R}) = \varinjlim C^\infty_{[-n,n]}(\mathbb{R})$$

（即所谓的测试函数空间）是一个严格的 (LF)空间，因此具有命题 B.13.9 中所述的全部性质。

紧算子与西尔瓦空间 s

另一类对分析学和无限维李理论很重要的局部凸归纳极限是西尔瓦空间。回顾一下，线性映射

$$\alpha\colon E \to F$$

巴拿赫空间之间的映射称为紧算子，如果对每个有界子集 $B \subseteq E$，其闭包 $\overline{\alpha(B)}$ 在 F 中是紧的。取 $B := B_1^E(0)$，我们看到，任何紧算子都是有界的，因而是连续的。

定义 B.13.12. 如果一个局部凸空间 E 是某个由巴拿赫空间构成的直序列 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 的局部凸归纳极限 $E = \varinjlim E_n$，且每个包含映射 $E_n \to E_{n+1}$ 都是紧算子，则称 E 为 **西尔瓦空间**。

下面的命题汇总了西尔瓦空间的性质。

命题 B.13.13. 设 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是一个由巴拿赫空间构成的直序列，且所有包含映射 $E_n \to E_{n+1}$ 都是紧算子。考虑局部凸归纳极限 $E = \varinjlim E_n$，并赋予其局部凸归纳极限拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$。则有以下结论：

(a) $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$ 与 $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 上的归纳极限拓扑 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 一致；(b) $(E,(E_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 是豪斯多夫且紧正则的；$(E,(E_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 是有界正则的；(d) E 的每个有界子集都是相对紧的；(e) E 是自反的；(f) E_b' 是弗雷歇空间，且 E 是完备的。(g) E 是一个 k_ω-空间。

证明。(a) 由于每个包含映射 $E_n \to (E,\ \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}})$ 都是连续的，因此我们有 $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$。直序列 $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ 是紧化的（按定义 A.7.1 的意义），因为每个包含映射 $E_n \to E_{n+1}$ 都是紧算子，因而将球映射为相对紧集。因此，$\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$ 是局部凸向量拓扑（参见推论 A.7.12）。由于包含映射 $E_n \to (E,\ \mathcal{O}_{\mathrm{dl}})$ 是连续的，我们推得 $\mathcal{O}_{\mathrm{dl}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathrm{lcx}}$，从而有 $\mathcal{O}_{\mathrm{lcx}} = \mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$。

(b) 根据命题 A.7.20，$(E,\ (E_n)_{n\in\mathbb{N}})$ 是紧正则且 Hausdorff 的（因为它是局部 k_ω）。

(c) 将每个 E_n 上的范数 $\|\cdot\|_n$ 替换为适当的倍数后，我们可以假设

$$\|x\|_{n+1} \le \|x\|_n \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } x \in E_n. \tag{B.32}$$

设 $B \subseteq E$ 有界。那么对某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $B \subseteq E_n$；否则，我们就能为每个 $n \in \mathbb{N}$ 找到一个元素 $x_n \in B \setminus E_n$。由于 B 有界，

$$\frac{1}{n} x_n \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

这意味着 $K := \{0\} \cup \{\frac{x_n}{n}\colon \ n \in \mathbb{N}\}$ 在 E 中是紧的，因此根据 (b)，它是某个 E_n 的紧子集。这与 $x_n \notin E_n$ 矛盾。

因此 $B \subseteq E_n$，我们可以假设 $B \subseteq E_1$。于是，B 在某个 $n \in \mathbb{N}$中是有界的，其中 E_n，因为否则我们可以找到 $x_n \in B$ 使得

$$\|x_n\|_n \geq n, \tag{B.33}$$

对每个 $n \in \mathbb{N}$。那么 $L := \{0\} \cup \{x_n/\sqrt{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ 是 E的紧子集，因此也是某个 E_n 的紧子集，其中 $n \in \mathbb{N}$。因此 L在 E_n中有界。然而，对于每个 $m \geq n$，由 (B.32) 和 (B.33) 可得

$$\|x_m/\sqrt{m}\|_n \geq \|x_m/\sqrt{m}\|_m = \|x_m\|_m/\sqrt{m} \geq \sqrt{m},$$

这些数构成一个无界集（矛盾）。

(d) 设 $B \subseteq E$ 有界。由 (c)，B 是某个$n \in \mathbb{N}$的 E_n 有界子集。由于包含映射 $E_n \to E_{n+1}$ 是一个紧算子，这意味着 E_{n+1} 中 B 的闭包 K 是紧的。因此，K 在 E中也紧。

(e) 每个 E_n 都是桶化的（见命题 B.10.6），因此由引理 B.13.6(e)，E 也是桶化的。由 (d)，E 中有界子集 $B \subseteq E$的闭包 K 是紧的。因此 K 在 E_w 中也紧，故由命题 B.10.7，E 是自反的。

（f）和（g）。由（d），有 $E'_b = E'_c$。按照（c）的证明中使用范数的方法，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $r > 0$，有 $B_r^{E_n}(0) \subseteq B_r^{E_{n+1}}(0)$。令 K_n 为 $B_n^{E_n}(0)$ 在 E_{n+1}中的闭包。于是每个 K_n 都是紧的，并且 $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$。如果 $K \subseteq E$ 是紧的，那么根据（b），K 包含于某个 $B_k^{E_n}(0)$ 中，其中 n、$k \in \mathbb{N}$，从而 $K \subseteq K_m$，且 $m := \max\{n, k\}$。因此，E 是半紧的（如 A.6.23 中所述），于是 $E'_b = E'_c$ 是可度量化的（由引理 A.6.24(c)）。因此，$(E'_b)'_b$ 是完备的（由命题 B.9.16），从而 E 也完备，因为 $\eta_E \colon E \to (E'_b)'_b$ 是拓扑向量空间同构。由于（E，$\mathcal{O}_{\mathrm{dl}}$）是巴拿赫空间 E_n 的归纳极限，而这些空间是 k-空间，因此 E 也是一个 k-空间（见习题 A.7.3），这意味着 E'_b 是完备的（见命题 B.9.16），因而是一个 Fr´echet 空间。作为一个半紧的 k-空间，E 是一个 k_ω-空间。□

注记 B.13.14. 利用紧算子的对偶 $\alpha' \colon Y' \to X'$ 仍然是紧算子这一点，可以证明 Silva 空间的对偶 E'_b 是所谓的 Fr´echet–Schwartz 空间，即由一个巴拿赫空间射影序列的射影极限构成，其中粘合映射是紧算子。因此，E 同构于 Fr´echet–Schwartz 空间的对偶（这一性质也刻画了 Silva 空间）。因此，部分文献将 Silva 空间称为 (DFS) 空间。

不完备商空间

我们描述一个不完备的 (LF)空间。然而，它是一个完备局部凸空间的商空间。

B.13.15.考虑由所有实数序列构成的 Fr´echet 空间 $F := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$。那么

$$E_n := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}} \colon (\forall m \geq n)\, x_m \in \ell^1\} \cong F^{n-1} \times (\ell^1)^{\{n,n+1,\dots\}}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，它都是一个 Fr´echet 空间。局部凸归纳极限

$$E := \varinjlim E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

是豪斯多夫的，因为包含映射

$$\varphi \colon E \to F^{\mathbb{N}}$$

是连续的（因为它是线性的，并且在 $n \in \mathbb{N}$ 上对 E_n 连续）。

引理 B.13.16.在 B.13.15 的情形下，φ 是一个拓扑嵌入。因此，E 是 $F^{\mathbb{N}}$ 的真稠密向量子空间，并带有诱导拓扑；由此，E 是一个非完备可度量局部凸空间。

证明。 我们必须证明，局部凸归纳极限 E 中的每个零邻域 U 也是 $F^{\mathbb{N}}$ 在 E 上诱导的拓扑中的零邻域。缩小 U 后，不妨设 U 在 E 中是闭的且绝对凸的。由于 $U \cap E_1$ 是 $E_1 = (\ell^1)^{\mathbb{N}}$ 中的一个零邻域，存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $r > 0$，使得

$$V := (B_r^{\ell^1}(0))^n \times (\ell^1)^{\{n+1,\dots\}} \subseteq U.$$

对于每个 $m > n$，交集 $U \cap E_m$ 在 E_m 中是闭的，因此包含 V 在 E_m 中的闭包。后者包含

$$V_m := (B_r^{\ell^1}(0))^n \times F^{m-n-1} \times (\ell^1)^{\{m,\dots\}},$$

由于 ℓ^1 在 F中稠密。因此

$$P := (B_r^{\ell^1}(0))^n \times E = \bigcup_{m>n} V_m \subseteq U.$$

由于 $U \cap E_{n+1}$ 是 E_{n+1}中的一个零邻域，存在 $s > 0$、$k > n$ 以及一个零邻域 $W \subseteq F$，使得

$$Q := W^n \times (B_s^{\ell^1}(0))^{k-n} \times (\ell^1)^{\{k+1,\dots\}} \subseteq U \cap E_{n+1} \subseteq U.$$

Then

$$U \supseteq \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q \supseteq \left(\frac{1}{2}W^n\right) \times E = E \cap \left(\left(\frac{1}{2}W^n\right) \times F^{\mathbb{N}}\right),$$

这表明 U 是 E上由 $F^{\mathbb{N}}$ 诱导的拓扑中的一个零邻域。 □

例 B.13.17。 在 B.13.15 的情形下，$S := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 是一个完备局部凸空间（由引理 B.13.2(f) 或引理 B.13.9(d) 得出）。该映射

$$q\colon \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \to E, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

是连续线性的，并且根据引理 B.13.6(d)， E 赋有相对于 q的商拓扑。因此，ker(q)是完备局部凸空间 S （它是一个严格(LF)空间）的闭向量子空间，但 $S/\ker(q) \cong E$却不完备。此外，根据引理 B.13.16 和 B.13.6(e)， $S/\ker(q) \cong E$ 是可度量化且桶化的。

B.13 节习题

习题 B.13.1.设 E 为一个向量空间。

(a) 证明 $\operatorname{conv}(A\cup B) = \{ta+(1-t)b\colon\ t\in[0,1], a\in A, b\in B\}$ 对所有非空凸子集 $A, B\subseteq E$ 成立。(b) 设 $(W_j)_{j\in J}$ 为 E 的一族非空凸子集。证明 $\bigcup_{j\in J} W_j$ 的凸包与所有形如下式的元素 $x\in E$ 的集合重合

$$x = \sum_{j\in J} r_j w_j,$$

其中对 $j\in J$ 有 $w_j\in W_j$，且 $(r_j)_{j\in J}\in\mathbb{R}^{(J)}$ 使得对所有 $j\in J$ 有 $0\le r_j$，并且 $\sum_{j\in J} r_j = 1$。

习题 B.13.2. 设 E 是一个向量空间， $F\subseteq E$ 是一个向量子空间，$V\subseteq F$ 和 $W\subseteq E$ 是凸子集，且满足 $W\cap F\subseteq V$。证明 $F\cap\operatorname{conv}(V\cup W) = V$。

习题 B.13.3. 设 $E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots$ 是由 Fr´echet 空间构成的严格归纳序列，且对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $E_n\neq E_{n+1}$。证明局部凸归纳极限 $E:=\varinjlim E_n$ 不可度量化。⟶

[提示：若存在度量 d，使其定义 E 上的拓扑，则对 $n\in\mathbb{N}$ 取 $x_n\in E_{n+1}\setminus E_n$，并且不妨设 $d(x_n,0) < \frac{1}{n}$，这是通过将 x_n 替换为适当的数乘得到的。于是 $x_n\to 0$，因为 $n\to\infty$，故 $\{x_n\colon\ n\in\mathbb{N}\}$ 是 E 的有界子集。导出矛盾。]

习题 B.13.4。利用命题 B.6.8，证明:

(a) 若 $F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots$ 是有限维向量空间的递增序列，且每个包含映射 $F_n\to F_{n+1}$ 都是线性的，则 $\varinjlim F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ 上的局部凸归纳极限拓扑是最细局部凸向量拓扑（如例 A.7.16 所示）。(b) 若 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是任意的有限维向量空间序列，则局部凸直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 赋有最细局部凸向量拓扑。

习题 B.13.5. 设 E和 F是可数维向量空间。赋予 E和 F最细局部凸向量拓扑。证明每个线性映射 $\lambda\colon E\to F$都是连续的。每个双射线性映射 $\lambda\colon E\to F$都是拓扑向量空间同构。

B.14 关于附录 B 的注记与评论

本附录的大部分结果都是众所周知的，可见于教科书和专著，例如 [Bou87], [Jr81], [Ru91], 和 [ShW99]；对于这类事实，我们不逐一列出参考文献，也不声称原创。特别是，我们从 [Bou87]中获益良多。

Hahn–Banach定理的几何方法可追溯至 Mazur [Maz33]。我们在引理 B.9.10 中对三空间性质的讨论，受到 [HR79, 5.38(e)] 中关于拓扑群扩张性质的讨论的启发（另见 [Grv50]）。我们提及一个相关的一般事实：如果 N 是拓扑群 G 的闭正规子群，并且 N 和 G/N 都是完备的，那么 G 是完备的（参见 [RD81, Thm. 12.3(a)]）。

非可赋范 E 空间上求值映射 $\varepsilon\colon\ E' \times E \to \mathbb{K}$ 的不连续性（命题 B.11.12）取自 [KM97], , 其作者引用了 [Ms63]。关于亚连续性的进一步讨论，参见 [Bou87] 和 [Gr73] （另见 [Tr67]）。由于每个半连续双线性映射都是序列连续的，因此在某种程度上，它的行为类似于可微映射（例如参见习题 1.4.3，以及 [Th96], [Gl07e], 和 [Gl08b]）。颇为技术性的习题 B.11.4 在习题 2.3.12 中用于得到一个映射$f\colon\ L^1[0,1] \to L^1[0,1]$，该映射是 C^1，但在经典意义下不是连续 Fr´echet 可微的。

我们对局部凸直和与严格归纳极限的讨论基于 [Bou87]。严格归纳极限的一个典型例子是分布理论中使用的 $\mathbb{R}$ 上的测试函数空间$C_c^\infty(\mathbb{R})$ [Schw57]。在无限维李理论的背景下，需要某些推广，例如定义在 σ-紧致有限维光滑流形上的向量值紧支撑光滑函数空间，以及其上的紧支光滑向量场空间。任何此类空间都可线性拓扑嵌入到适当局部凸直和的一个闭（且可补）向量子空间中，这一点可用于微分学（例如参见第 12 章）。因此，局部凸直和这一专业但简单的概念值得关注。

西尔瓦空间最早由 J. Sebast˜ao e Silva [SeS55] 和 Ra˘ıkov[Rai59],研究（另见 [Gr54]）；此外，我们也受益于 [Fl71]。西尔瓦空间的例子包括：$\mathbb{K}^n$ 中 0 （或任意非空紧子集）附近的 $\mathbb{K}$- 值解析函数芽空间，以及紧实解析流形上的实解析函数空间或实解析向量场空间。关于（LF）空间的紧正则性和有界正则性，更多信息可参见 [We03]。

B.13.15 和引理 B.13.16 中讨论的非完备、可度量化 (LF)空间的例子基于 [SN81，第 1] 例。关于桶状局部凸空间的更多结果见 [PCB87]；关于 Fr´echet 空间的深入结果，参见 [MV97]。

C 拓扑群

本附录汇集了一些关于拓扑群的基础材料，这些材料用于发展李群理论。

C.1 由局部数据得到的群拓扑

定义 C.1.1。拓扑群 G 是一个豪斯多夫空间 G，其上赋予了群结构，并且乘法映射和求逆映射都是连续的。

如果 G 和 H 是拓扑群，那么群同态$\varphi\colon\ G \to H$ 称为拓扑群态射，如果 φ 是连续的。

下面的引理描述了如何从一个群上的子集滤子基构造群拓扑，使其随后成为该群拓扑的单位邻域滤子基。

定义 C.1.2. 设 X 是一个集合。若子集 $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}(X)$（ X的所有子集组成的集合）满足以下条件，则称其为一个滤子基：
(F1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$。(F2) 每个集合 $F \in \mathcal{F}$ 都非空。
(F3) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow (\exists C \in \mathcal{F})\ C \subseteq A \cap B.$

引理 C.1.3.设 G 是一个群， $\mathcal{F}$ 是 G 的子集滤子基，满足 $\bigcap \mathcal{F} = \{e\}$ 和

(U1) $(\forall U \in \mathcal{F})(\exists V \in \mathcal{F})\ VV \subseteq U$.(U2) $(\forall U \in \mathcal{F})($
$\exists V \in \mathcal{F})\ V^{-1} \subseteq U$.(U3) $(\forall U \in \mathcal{F})(\forall g \in G)($
$\exists V \in \mathcal{F})\ gVg^{-1} \subseteq U.$

那么， G上存在唯一的群拓扑，使得 $\mathcal{F}$ 是 G 中 e-邻域的基；也就是说，子集 $U \subseteq G$ 是 e- 邻域，当且仅当它是 $\mathcal{F}$ 中某个元素的超集。该拓扑由下式给出：

$$\{U \subseteq G\colon (\forall g \in U)(\exists V \in \mathcal{F})\ gV \subseteq U\}.$$

证明。设

$$\tau := \{U \subseteq G \colon (\forall g \in U)(\exists V \in \mathcal{F})\ gV \subseteq U\}.$$

首先我们证明 τ 是一个拓扑。显然 $\emptyset$，$G \in \tau$。设 $(U_j)_{j\in J}$ 是 τ 中元素的一个族，且 $U := \bigcup_{j\in J} U_j$。对每个 $g \in U$，存在一个 $j_0 \in J$ 使得 $g \in U_{j_0}$，以及一个 $V \in \mathcal{F}$ 使得 $gV \subseteq U_{j_0} \subseteq U$。因此 $U \in \tau$，我们看到 τ 在任意并下是稳定的。

若 U_1，$U_2 \in \tau$ 且 $g \in U_1 \cap U_2$，则存在 V_1，$V_2 \in \mathcal{F}$ 使得 $gV_i \subseteq U_i$，$i = 1$，2。由于 $\mathcal{F}$ 是一个滤子基，存在 $V_3 \in \mathcal{F}$ 使得 $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$，进而 $gV_3 \subseteq U_1 \cap U_2$。我们得出 $U_1 \cap U_2 \in \tau$，从而 τ 是 G 上的一个拓扑。

我们断言，子集 $U \subseteq G$ 的内部 U^0 由下式给出

$$U_1 := \{u \in U \colon (\exists V \in \mathcal{F})\ uV \subseteq U\}.$$

事实上，若 $u \in U_1$ 且存在一个 $V \in \mathcal{F}$ 满足 $uV \subseteq U$，那么我们取一个 $W \in \mathcal{F}$ 满足 $WW \subseteq V$，并得到 $uWW \subseteq U$，因此 $uW \subseteq U_1$。于是 U_1 是开集，而且显然是包含于 U 中的最大开子集，即 $U_1 = U^0$。特别地，U 是 g 的邻域，当且仅当 $g \in U_1$。特别地，$\mathcal{F}$ 是 e 的邻域滤子的一个基。性质 $\bigcap \mathcal{F} = \{e\}$ 意味着，对于 $x \neq y$，存在 $U \in \mathcal{F}$ 满足 $y^{-1}x \notin U$。对于满足 $VV \subseteq U$ 的 $V \in \mathcal{F}$，以及满足 $W^{-1} \subseteq V$ 的 $W \in \mathcal{F}$，我们便得到 $y^{-1}x \notin VW^{-1}$，即 $xW \cap yV = \emptyset$。因此，(G, τ) 是一个豪斯多夫空间。

为了看出 G 是拓扑群，我们必须验证该映射

$$f \colon G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

是连续的。因此设 x，$y \in G$，$U \in \mathcal{F}$，并选取满足 $yVy^{-1} \subseteq U$ 的 $V \in \mathcal{F}$ 以及满足 $WW^{-1} \subseteq V$ 的 $W \in \mathcal{F}$。则

$$f(xW, yW) = xWW^{-1}y^{-1} = xy^{-1}y(WW^{-1})y^{-1} \subseteq xy^{-1}yVy^{-1} \subseteq xy^{-1}U,$$

蕴含 f 在 (x, y) 处连续。 □

在转向李群结构之前，先考虑下述定理的拓扑变体是有启发意义的。

引理 C.1.4. 设 G 是一个群，$U = U^{-1}$ 是包含 e 的对称子集。我们进一步假设 U 带有一个拓扑，使得

(T1) $D := \{(x, y) \in U \times U \colon xy \in U\}$ 是开子集，且群乘法 $m_U \colon D \to U$，$(x, y) \mapsto xy$ 是连续的，(T2) 求逆映射 $\eta_U \colon U \to U$，$u \mapsto u^{-1}$ 是连续的，并且(T3)对每个 $g \in G$，在 U 中存在开 e-邻域 U_g，满足 $c_g(U_g) \subseteq U$，使得共轭映射

$$c_g \colon U_g \to U, \quad x \mapsto gxg^{-1}$$

是连续的。

那么，存在唯一的群拓扑，使得包含映射$U \hookrightarrow G$ 是到 G的一个开子集上的同胚。

此外，若 U 生成 G，则$(\mathrm{T1}/2)$ 蕴含$(\mathrm{T3})$。

证明。 首先考虑 U 中 e 邻域的滤子基 $\mathcal{F}$ 。于是 (T1) 蕴含 (U1)，(T2) 蕴含 (U2)，而 (T3) 蕴含 (U3)。此外， U 是豪斯多夫空间这一假设蕴含 $\bigcap \mathcal{F} = \{e\}$。因此，由引理 C.1.3 可知， G 上存在唯一的（豪斯多夫）拓扑群结构，使得 $\mathcal{F}$ 是 e 邻域的基。

我们断言包含映射 $U \to G$ 是开嵌入。因此，设 $x \in U$。那么

$$U_x := U \cap x^{-1}U = \{y \in U \colon (x, y) \in D\}$$

在 U 中是开集，而 λ_x 限制为一个连续映射 $U_x \to U$ ，其像为 $U_{x^{-1}}$。其逆映射也连续。因此， $\lambda_x^U \colon U_x \to U_{x^{-1}}$ 是一个同胚。由此可知， $x \in U$ 的邻域滤子的一组基由形如 xV 的集合构成，其中 V 是 e 的一个邻域；因此包含映射 $U \hookrightarrow G$ 是开嵌入。

此外，假设 G 由 U生成。对于每个 $g \in U$，都存在一个开 e邻域 U_g，使得 $gU_g \times \{g^{-1}\} \subseteq D$。那么 $c_g(U_g) \subseteq U$，而 m_U 的连续性意味着 $c_g|_{U_g} \colon U_g \to U$ 是连续的。因此，对于每个 $g \in U$，共轭作用 c_g 在 e的某个邻域内连续。所有这些 g构成 G的一个子幺半群，且包含 U；因此，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，它都包含 U^n，从而包含整个 G ，因为 G 由 $U = U^{-1}$生成。因此，(T3) 可由 (T1) 和 (T2) 推出。□

C.2 拓扑群的局部同态延拓

下文中，我们称一个连通拓扑群 G 单连通，如果它的每个连通群覆盖都是平凡的。虽然在李群的语境中我们不会用到这个概念，但它的优点是也适用于不一定局部弧连通的群。如果 G 是一个李群，那么推论 5.3.5 意味着，G 作为拓扑群是单连通的，当且仅当 $\pi_1(G)$ 消失，也就是说，当且仅当 G 作为拓扑空间是单连通的。

命题 C.2.1. 设 G 是一个连通单连通拓扑群， H 是一个群。设 V 是 G 中一个开、对称且连通的单位元邻域，并设 $f \colon V \to H$ 是一个函数，满足

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \textit{for} \quad x, y, xy \in V.$$

因此，存在唯一一个延拓 f 的群同态。此外，如果 H 是拓扑群且 f 连续，那么它的延拓也连续。

证明。 我们考察群 $G\times H$ 以及由子集 U 生成的子群 $S\subseteq G\times H\colon =\{(x, f(x))\colon x\in V\}$。我们赋予 U 如下拓扑，使得 $x\mapsto(x, f(x))$ $V\to U$ 是一个同胚。注意， $f(e)^2=f(e^2)$ $=f(e)$ 蕴含 $f(e)=e$，进而得到 $e=f(xx^{-1})$ $=f(x)f(x^{-1})$，因此 $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$。故 $U=U^{-1}$。

由于 S 由 U 生成，而引理 C.1.4 中的 (T1/2) 性质由 V的相应性质推出，因此我们在 S上得到一个群拓扑。 $S=\langle U\rangle$ 的连通性由 U 的连通性推出（习题 C.2.2(7)）。投影 $p_G\colon G\times H\to G$ 诱导出一个覆盖同态 $q\colon S\to G$ （习题 C.2.9(3) ），因此， S 的连通性和 G 的单连通性意味着 q 是一个同胚。现在，$F:=p_H\circ q^{-1}\colon G\to H$给出了所需的 f延拓。事实上，对于 $x\in U$，我们有 $q^{-1}(x)=(x, f(x))$，因此 $F(x)=f(x)$。□

附录 C 的习题

习题 C.2.1。设 G 是一个拓扑群， $\Gamma\subseteq G$ 是一个子群。那么，Γ是离散的（相对于子空间拓扑）当且仅当存在 G 中的一个 e-邻域 U，使得 $U\cap\Gamma=\{e\}$。

习题 C.2.2。设 G 是一个拓扑群。证明:

(1) 若 $U\subseteq G$ 是开集，而 $V\subseteq G$ 是任意的，则

$$V\cdot U:=\{vu\colon v\in V, u\in U\}$$

是 G 中的开集。

(2) 若 U， $V\subseteq G$ 是紧的，则 $U\cdot V$ 是紧的。(3) 若 $H\subseteq G$ 是包含一个单位元邻域的子群，则它是开且闭的。特别地，每个开子群都是闭的。提示：考虑 G 中 H 的陪集。(4) 若 $e\in U=U^{-1}\subseteq G$ 是一个开子集，则每个集合 $U^n:=U^{n-1}\cdot U$ 都定义了 G 的一个递增开子集序列，并且 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U^n$ 是一个开闭子群。(5) 若 $e\in U=U^{-1}\subseteq G$ 是一个紧的单位元邻域，则每个集合 U^n 都是紧的，并且 $\bigcup_n U^n$ 包含 G 的单位连通分支。(6) 每个局部紧拓扑群 G 都是仿紧的，也就是说，它的所有连通分支都是 σ-紧的。(7) 若 G 由一个（弧）连通子集生成，则 G 是（弧）连通的。

习题 C.2.3.证明，在拓扑群 G 中，子集 S 的闭包由下式给出

$$\overline{S}=\bigcap_{U\in\mathcal{U}(e)}SU.$$

提示： $g\in\overline{S}$ 等价于对 G 中每个 e-邻域， $S\cap gU\neq\emptyset$ 。

习题 C.2.4. 设 G 是一个群，并赋予其一种拓扑，使得乘法和求逆都是连续映射。证明：若 $\{e\}$ 是闭子集，则 G 是豪斯多夫的。

练习 C.2.5.（引理 C.1.4 的加强）证明：如果将假设 (T1) 弱化为如下条件，引理 C.1.4 的结论仍然成立：存在一个开子集 $D \subseteq U \times U$，对所有 $(x,\ y) \in D$，均有 $xy \in U$，且该开子集包含所有满足 $x \in U$ 的点对 $(x,\ x^{-1})$、$(x,\ e)$、$(e,\ x)$，使得群乘法 $m\colon D \to U$ 连续。

练习 C.2.6. 设 X 是豪斯多夫拓扑空间，G 是拓扑群。证明，紧开拓扑使 $C(X,G)$ 成为拓扑群。提示：先证明，由所有形如 $W(K,U)$ 的集合 $\mathcal{F}$ 构成的集合族，其中 $e \in U$ 在 G 中开，且 U 在 X 中紧，是 $C(X,G)$ 的子集滤子基，并满足引理 C.1.3 中的所有条件。为验证 (U3)，对 $g \in C(X,G)$ 和 $W(K,U)$，找一个开 e-邻域 $U' \subseteq G$，使得对所有 $x \in K$，都有 $g(x)U'g(x)^{-1} \subseteq U$。于是，引理 C.1.3 给出一个群拓扑，其中 $\mathcal{F}$ 是局部基。容易看出，所有形如 $W(K,U)$ 的集合，其中 K 在 X 中紧且 U 在 G 中开，都是该群拓扑中的开集，因为它们包含于某个常值映射 g 对应的 $g\mathcal{F}$ 中。反过来，需要证明任意形如 $g \cdot W(K,U)$ 的集合 $e \in U$ 在紧开拓扑中是开集。设 $V \subseteq U$ 是一个开对称 e-邻域，且 $VV \subseteq U$。接着证明，存在有限多个点 x_1、……、$x_n \in K$，以及由紧子集 K 构成的 K 的覆盖 K_1、……、K_n，使得对于 $i = 1$、……、n，有 $g(K_i) \subseteq g(x_i)V$。现在，$f \in \bigcap_{i=1}^{n} W(K_i, g(x_i)V)$ 意味着对于 $x \in K_i$，关系 $g(x)^{-1}f(x) \in g(x)^{-1}g(x_i)V \subseteq VV \subseteq U$ 成立，因此

$$g \in \bigcap_{i=1}^{n} W(K_i, g(x_i)V) \subseteq gW(K,U).$$

习题 C.2.7. 设 G 是一个拓扑群，$H \leq G$ 是它的一个子群。我们赋予集合 $G/H = \{gH\colon g \in G\}$（$H$ 的左陪集的集合）商拓扑。证明：G/H 是豪斯多夫的，当且仅当 H 在 G 中是闭的。提示：若 H 是闭的且 $g \notin H$，则存在一个开对称的 e-邻域 $U \subseteq G$，使得 $UU \cap gH = \emptyset$。

习题 C.2.8. 证明：拓扑群 G 的子群 H 是闭的，当且仅当 G 中存在一个 e-邻域 U，使得 $U \cap H$ 在 U 中是闭的。提示：对于 $x \in H$，注意到 $x \in HU^{-1}$，并选取 $u \in U$，使得 $y := xu \in H$。那么 $u = x^{-1}y \in U$ 属于 $H \cap U$ 的闭包。

练习 C.2.9. 设 $\varphi\colon G \to H$ 是拓扑群之间的一个满态射。证明下列条件等价：

(1) φ 是开映射且核离散。(2) φ 是覆盖映射，也就是说，每个 $h \in H$ 都有一个开邻域 U，使得 $\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ 是一些开子集 U_i 的不交并，并且所有限制 $\varphi|_{U_i}\colon U_i \to U$ 都是同胚。(3) 存在一个开 e-邻域 $U \subseteq G$，使得 $\varphi|_U\colon U \to \varphi(U)$ 是到 H 的一个开子集上的同胚。

提示：对于蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2)，选取一个开对称的 e-邻域 $U_G \subseteq G$，使得 $U_G^3 \cap \ker(\varphi) = \{e\}$，并证明 U_G 到其像是同胚映射。

练习 C.2.10。设 G 是一个连通拓扑群，$\Gamma \trianglelefteq G$ 是一个离散正规子群。那么 Γ 是中心的。

习题 C.2.11。设 G 是一个单连通拓扑群，$\alpha\colon\ H_1 \to H_2$ 是一个覆盖态射，且 $f\colon\ G \to H_2$ 是一个拓扑群态射。证明存在一个拓扑群态射 $\widetilde{f}\colon\ G \to H_1$，使得 $\alpha \circ \widetilde{f} = f$。提示：考虑群

$$\Gamma := \{(g, h_1) \in G \times H_1 \colon f(g) = \alpha(h_1)\}$$

并证明投影 $p_G\colon\ \Gamma \to G$ 是一个覆盖态射，前提是为 Γ 赋予 $G \times H_1$的子空间拓扑。

关于附录 C 的注释与评论

关于局部同态的延拓的命题 C.2.1 也见于 [HoM98, Cor.A.2.26]。

D 非李群中的光滑映射

在本附录中，我们建立一个框架，用于处理映射到某些群中的光滑映射，例如无限维流形的微分同胚群。这些群并非李群，但光滑映射的概念可以如下定义：设 M 为一个以局部凸空间为模型的光滑流形，令 Diff(M) 为 M的微分同胚群。此外，设 N为一个光滑流形。尽管 Diff(M) 没有自然李群结构，我们称映射 $\varphi\colon N \to$Diff(M) 光滑 ，如果映射

$$\widetilde{\varphi}\colon N \times M \to M \times M, \quad (n,m) \mapsto (\varphi(n)(m), \varphi(n)^{-1}(m))$$

是光滑的。即使在如此一般的情形下，我们仍有左、右对数导数，它们是取值于 $\mathcal{V}$(M) 的 N 上的 1-形式。若 N 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间，它们便是 M 上的时变向量场。

一个关键工具是唯一性引理，它指出：在连通流形上， N 一个光滑映射 $\varphi\colon N \to$微分同胚群(M)，由其左对数导数或右对数导数，以及它在 N 任意一点处的取值唯一确定。这尤其意味着，只要某些初值问题存在解，该解就是唯一的。在这种一般情形下，这相当令人惊讶，因为在 Fr´echet 空间 E 上，存在解不唯一的常系数常微分方程组。尽管如此，唯一性引理仍然意味着，只要相应的算子值初值问题存在解，它在群一般线性群(E) 上的解就是唯一的。这里，我们只需将群一般线性群(E) 视为微分同胚群(E) 的一个子群。

唯一性引理还表明，连通李群 G在 M 上的光滑作用，唯一地由相应的李代数同态$\mathbf{L}(G) \to \mathcal{V}(M)$确定；任何光滑表示 $\pi\colon G \to$ GL(E)也唯一地由其导出表示$d\pi\colon \mathbf{L}(G) \to \mathfrak{gl}(E)$确定。

唯一性引理的另一个推论是，我们可以将 X 上的完备向量场定义为那些等于光滑单参数子群 γ_X 的导数 $X = \gamma_X'(0)$ 的向量场，其中 $\mathbb{R} \to$ Diff(M)。完备向量场构成了 Diff(M) 的指数函数 exp(X) := $\gamma_X(1)$ 的定义域。同样，GL(E) 的指数函数的定义域是所有连续线性算子 D 上的集合，其中对应的线性

向量场 $v \mapsto Dv$ 是完备的，也就是说，存在一个光滑表示α: $\mathbb{R} \to \mathsf{GL}(E)$, 满足 $\alpha'(0) = D$。对于每个李群 G，我们还可以将 G 的指数函数的定义域定义为李代数中那些对应的左不变向量场完备的元素。

我们以讨论以下类型的自动光滑性结果作为本附录的结尾。若 $\varphi\colon N \to \mathsf{Diff}(M)$ 是一个映射，且映射$\widetilde{\varphi}_1\colon N\times M \to M$，$(n,\ m) \mapsto \varphi(n)(m)$ 是光滑的，并且 M是巴拿赫流形，那么第二分量 $\widetilde{\varphi}_2(n,\ m) := \varphi(n)^{-1}(m)$ 自动光滑。一般而言，我们至少需要要求 $\widetilde{\varphi}_2$ 是 C^1。若 $M = E$ 是一个向量空间，且 $\varphi(N) \subseteq \mathsf{GL}(E)$，那么 $\widetilde{\varphi}_2$ 的连续性蕴含其光滑性。

D.1 微分同胚群中的光滑映射

本节研究取值于群 $\mathsf{Diff}(M)$ 的“光滑”映射；$\mathsf{Diff}(M)$ 是一个可能为无限维的光滑流形 M 上的微分同胚群。主要观点之一是，群 $\mathsf{Diff}(M)$ 在许多方面表现得像李群，尽管当 M 不紧时，它与李群相去甚远。我们首先讨论 $\mathsf{Diff}(M)$ 的“切丛”上的群结构，这使我们能够以一种方式定义光滑映射 $N \to \mathsf{Diff}(M)$ 的左、右对数导数，使得对数导数是取值于局部凸空间 $\mathcal{V}(M)$ 的 N 上的光滑 1-形式。这里，$\mathcal{V}(M)$ 带有一种自然的局部凸拓扑，该拓扑继承自 $C^\infty(M,\ T(M))$ 上的C^∞-拓扑。我们还讨论 $\mathsf{Diff}(M)$ 在 $\mathcal{V}(M)$ 上的伴随表示，其“导出表示”由负李括号给出。我们还证明唯一性引理，并说明如何将其应用于 $\mathsf{Diff}(M)$ 的“指数函数”。

微分同胚群的切丛

定义 D.1.1. ($\mathsf{Diff}(M)$ 的切丛) (

a)

设 M 是一个以局部凸空间为模型的流形。我们用 $\mathsf{Diff}(M)$ 表示 M的所有微分同胚构成的群，用 $\mathcal{V}(M)$ 表示 M上的光滑向量场的李代数，即所有满足 $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_M$ 的光滑映射$X\colon M \to TM$的集合，其中 $\pi_{TM}\colon TM \to M$是丛投影。

尽管我们并未在群 $\mathsf{Diff}(M)$ 上定义可微结构（如果 M 不是紧的），但我们仍将集合

$$T(\mathrm{Diff}(M)) := \{X \in C^\infty(M, TM)\colon \pi_{TM} \circ X \in \mathrm{Diff}(M)\}$$

作为 $\mathsf{Diff}(M)$ 的切丛，其中映射

$$\pi\colon T(\mathrm{Diff}(M)) \to \mathrm{Diff}(M), \quad X \mapsto \pi_{TM} \circ X$$

是丛投影，而 T_φ(Diff(M)) := $\pi^{-1}(\varphi)$ 被视为 $\varphi \in$ Diff(M) 中的切空间。向量空间结构源于这样一个事实：对于 X，$Y \in T_\varphi$(Diff(M))，值 $X(m)$ $Y(m)$ $\in T_{\varphi(m)}(M)$ 可以相加。

(b) Diff(M) 在 T(Diff(M)) 上有自然的左作用和右作用，定义如下：

$$\varphi.X = T(\varphi) \circ X \quad \text{and} \quad X.\varphi := X \circ \varphi.$$

作用

$$\mathrm{Ad}\colon \mathrm{Diff}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M), \quad (\varphi, X) \mapsto \mathrm{Ad}(\varphi)X := T(\varphi) \circ X \circ \varphi^{-1}$$

称为 Diff(M) 在 $\mathcal{V}(M)$ 上的伴随作用 。

(c) 通过嵌入，我们在空间 $\mathcal{V}(M)$ 上得到一个自然的局部凸拓扑

$$\mathcal{V}(M) \hookrightarrow \prod_{k\in\mathbb{N}_0} C(T^k(M), T^{k+1}(M))_{c.o.}, \quad X \mapsto (T^k(X))_{k\in\mathbb{N}_0},$$

其中右侧乘积的每个因子都赋予紧开拓扑。

引理 D.1.2. (a) 集合 T(微分同胚群(M)) 具有如下群结构：

$$X * Y := T(\varphi) \circ Y + X \circ \psi \quad \textit{for} \quad X \in T_\varphi(\mathrm{Diff}(M)), Y \in T_\psi(\mathrm{Diff}(M)).$$

该群中的求逆运算定义为

$$X^{-1} = -T(\varphi)^{-1} \circ X \circ \varphi^{-1} \quad \textit{for} \quad X \in T_\varphi(\mathrm{Diff}(M)).$$

映射 π: T(微分同胚群(M)) $\to$微分同胚群(M) 和 ι: 微分同胚群(M) $\to T$(微分同胚群(M)) （零截面）是群同态，且 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}^{\mathrm{Diff}(M)}$。因此我们得到一个群同构

$$(\mathcal{V}(M), +) \rtimes_{\mathrm{Ad}} \mathrm{Diff}(M) \to T(\mathrm{Diff}(M)), \quad (X, \varphi) \mapsto X * \iota(\varphi) = X \circ \varphi.$$

(b) 映射 $T^\sharp$: T(微分同胚群(M)) $\to$微分同胚群($T(M)$) 定义为

$$T^\sharp(X)(v) := T(\varphi)v + X(p) \quad \textit{for} \quad X \in T_\varphi(\mathrm{Diff}(M))$$

定义了群 T(微分同胚群(M)) 在 $T(M)$上的一个作用。

证明。(a) 首先，我们观察到确实有 $X * Y \in T_{\varphi\circ\psi}$(微分同胚群($M$))。为验证结合律，我们注意到，对于 $X \in T_\varphi$(微分同胚群(M))、$Y \in T_\psi$(微分同胚群(M)) 和 $Z \in T_\zeta$(微分同胚群(M))，有

$$\begin{aligned}(X * Y) * Z &= (T(\varphi) \circ Y + X \circ \psi) * Z \\ &= T(\varphi \circ \psi) \circ Z + (T(\varphi) \circ Y + X \circ \psi) \circ \zeta \\ &= T(\varphi) \circ T(\psi) \circ Z + T(\varphi) \circ Y \circ \zeta + X \circ \psi \circ \zeta \\ &= T(\varphi) \circ (T(\psi) \circ Z + Y \circ \zeta) + X \circ (\psi \circ \zeta) = X * (Y * Z).\end{aligned}$$

显然， $e := \iota(\mathrm{id}_M)$ 是 T(微分同胚群(M)) 中的单位元。直接计算可得，每个元素 $X \in T_\varphi$(微分同胚群(M)) 都可逆，且其逆映射为 $X^{-1} = -T(\varphi)^{-1} \circ X \circ \varphi^{-1}$。由此可知，$T$(微分同胚群($T(M)$)) 是一个群，并且$\pi$ 和 ι 是群同态。最后一个断言由下式得出

$$\iota(\varphi) * X * \iota(\varphi^{-1}) = T(\varphi) \circ X \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Ad}(\varphi)X.$$

(b) 由于 $T(\varphi) \in$微分同胚群($T(M)$)，每个映射 $T^\sharp(X)$ 都是$T(M)$的微分同胚。此外， $T^\sharp$是群同态，因为对于 $X \in T_\varphi$(微分同胚群(M))、 $Y \in T_\psi$(微分同胚群(M)) 和 $v \in T_p(M)$，我们有：

$$\begin{aligned} T^\sharp(X * Y)v &= T(\varphi \circ \psi)v + (X * Y)(p) = T(\varphi)T(\psi)v + T(\varphi)Y(p) + X(\psi(p)) \\ &= T(\varphi)\big(T(\psi)v + Y(p)\big) + X(\psi(p)) = T^\sharp(\varphi)T^\sharp(\psi)v. \end{aligned}$$ □

定义 D.1.3. (a) 设 N为光滑流形。映射 $\varphi\colon N \to$微分同胚群(M) 称为光滑，如果相应映射

$$\widetilde{\varphi}\colon N \times M \to M \times M, \quad (n, m) \mapsto (\varphi(n)(m), \varphi(n)^{-1}(m))$$

是光滑的。我们也记

$$\widetilde{\varphi}_1(n, m) := \varphi(n)(m) \quad \text{and} \quad \widetilde{\varphi}_2(n, m) := \varphi(n)^{-1}(m)$$

$\widetilde{\varphi}$ 的两个分量。

(b) 若 $\widetilde{\varphi}_1$ 是光滑的，则我们有一个光滑切映射

$$T(\widetilde{\varphi}_1)\colon T(N \times M) \cong T(N) \times T(M) \to T(M),$$

并且，对每个 $v \in T_p(N)$，部分映射

$$T_p(\varphi)v\colon M \to T(M), \quad m \mapsto T_{(p,m)}(\widetilde{\varphi}_1)(v, 0)$$

是 $T_{\varphi(p)}$(微分同胚群(M)) 的一个元素。因此我们得到一个切映射

$$T(\varphi)\colon T(N) \to T(\mathrm{Diff}(M)), \quad T_p(N) \ni v \to T_p(\varphi)v.$$

现在我们定义 φ 在 p 中的左对数导数为

$$\delta^l(\varphi)_p\colon T_p(N) \to \mathcal{V}(M), \quad v \mapsto \varphi(p)^{-1}.T_p(\varphi)(v) = T(\varphi(p))^{-1} \circ T_p(\varphi)(v).$$

关于光滑性的讨论留待下文命题 D.1.8。我们将 $\delta^l(\varphi)$ 解释为 N 上取值于 $\mathcal{V}(M)$ 的 1-形式。类似的论证也适用于右对数导数，其定义为

$$\delta^r(\varphi)_p\colon T_p(N) \to \mathcal{V}(M), \quad v \mapsto T_p(\varphi)(v).\varphi(p)^{-1} = T_p(\varphi)(v) \circ \varphi(p)^{-1}.$$

如果 $N = J$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个区间，那么我们也记作

$$\varphi'(t) := T_t(\varphi)(1) \in T_{\varphi(t)}(\mathrm{Diff}(M))$$

并注意到，对数导数 $\delta^l(\varphi)_t := \varphi(t)^{-1}.\varphi'(t)$ 描述了 M 上的时变向量场。

引理 D.1.4. 如果 $\varphi\colon\ N\to$微分同胚群(M)是光滑的，那么

$$T^\sharp\varphi\colon T(N)\to \mathrm{Diff}(T(M)),\quad v\mapsto T^\sharp(T(\varphi)v)$$

也光滑。将其限制到零截面上，得到光滑映射

$$N\to \mathrm{Diff}(T(M)),\quad n\mapsto T(\varphi(n)).$$

证明。 首先注意到，对于 $v\in T_p(N)$ 和 $w\in T_m(M)$，有

$$\begin{aligned}(T^\sharp\varphi)(v)w &= (T_p(\varphi)v)^\sharp w = T(\varphi(p))w + (T_p(\varphi)v)(m)\\ &= T_{(p,m)}(\widetilde{\varphi}_1)(0,w)+T_{(p,m)}(\widetilde{\varphi}_1)(v,0)=T_{(p,m)}(\widetilde{\varphi}_1)(v,w),\end{aligned}$$

因此

$$(T^\sharp\varphi)\tilde{}_1 = T(\widetilde{\varphi}_1)\colon T(N)\times T(M)\to T(M).$$

根据引理 D.1.2(a)，我们还有

$$\begin{aligned}&(T^\sharp\varphi)(v)^{-1}w = ((T_p(\varphi)v)^{-1})^\sharp w = \big(-T(\varphi(p))^{-1}\circ(T_p(\varphi)v)\circ\varphi(p)^{-1}\big)^\sharp w\\ &= T(\varphi(p))^{-1}w - T(\varphi(p))^{-1}\circ(T_p(\varphi)v)\big(\varphi(p)^{-1}(m)\big)=T_{(p,m)}(\widetilde{\varphi}_2)(v,w),\end{aligned}$$

由此得到 $(T^\sharp\varphi)\tilde{}_2 = T(\widetilde{\varphi}_2)\colon T(N)\times T(M)\to T(M)$。这表明$\widetilde{\ }T^\sharp\varphi$是光滑的，且 $T^\sharp\varphi = T(\widetilde{\varphi})$. □

注 D.1.5. 若 $\sigma\colon G\times M\to M$是李群 G在光滑流形 M上的作用，则 σ 光滑，当且仅当相应映射

$$\widetilde{\sigma}\colon G\to \mathrm{Diff}(M),\quad g\mapsto\sigma_g,\quad \sigma_g(m):=\sigma(g,m)$$

光滑。事实上，若 σ光滑，则映射 $(g,m)\mapsto\sigma_g^{-1}(m)=\sigma(g^{-1},m)$ 自动光滑。反向显然。

命题 D.1.6.(a) 若 M 是有限维的，则 $\mathcal{V}(M)$上的李括号关于 $\mathcal{V}(M)$上的自然拓扑是连续的。

(b) 对每个 $\varphi\in\mathrm{Diff}(M)$，映射 $\mathrm{Ad}(\varphi)$ 都是李代数 $\mathcal{V}(M)$的线性拓扑自同构。

证明。 （a）设 $\mathcal{A}=\{(\varphi_i,U_i)\colon i\in I\}$是 M的一个 E-图册。那么限制映射定义了一个拓扑嵌入

$$\mathcal{V}(M)\to\prod_{i\in I}\mathcal{V}(U_i)\cong\prod_{i\in I}C^\infty(U_i,E),\tag{D.1}$$

因此只需证明，对每个 i，映射

$$\mathcal{V}(M)\times\mathcal{V}(M)\to\mathcal{V}(U_i),\quad (X,Y)\mapsto[X,Y]|_{U_i}$$

是连续的。由于限制映射 $\mathcal{V}(M)\to\mathcal{V}(U_i)$ 是连续的，并且 $[X,Y]|_{U_i}=[X|_{U_i},Y|_{U_i}]$，只需证明每个$\mathcal{V}(U_i)$上的李括号是连续的。

因此，我们可以假设 M 是某个有限维~向量空间 E的开子集。于是，我们将向量场写作 $X(m) = (m, X(m))$，其中~$X \in C^\infty(M, E)$。于是我们有

$$[X, Y]^\sim(m) = d\widetilde{Y}(m, \widetilde{X}(m)) - d\widetilde{X}(m, \widetilde{Y}(m)),$$

根据链式法则，这是 $\mathcal{V}(M) \cong C^\infty(M,\ E)$ 上的双线性运算是连续的，这很容易得出。

(b) 由 $\mathrm{Ad}(\varphi)X = T(\varphi) \circ X \circ \varphi^{-1}$ 和链式法则，对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，我们得到：

$$T^k(\mathrm{Ad}(\varphi)X) = T^{k+1}(\varphi) \circ T^k(X) \circ T^k(\varphi)^{-1}.$$

由于映射

$$C(T^k(M), T^{k+1}(M)) \to C(T^k(M), T^{k+1}(M)), \quad f \mapsto T^{k+1}(\varphi) \circ f \circ T^k(\varphi)^{-1}$$

关于紧开拓扑是连续的（引理 A.6.3、引理 A.6.9），因此 $\mathrm{Ad}(\varphi)$ 的连续性可由映射 $\mathcal{V}(M) \to C(T^k(M)\ T^{k+1}(M))\ X \mapsto T^k(X)$ 的连续性推出。

由于每个映射 $\mathrm{Ad}(\varphi)$ 都是连续的，关系 $\mathrm{Ad}(\varphi)^{-1} = \mathrm{Ad}(\varphi^{-1})$ 意味着每个 $\mathrm{Ad}(\varphi)$ 都是拓扑向量空间同构。对于 $X,\ Y \in \mathcal{V}(M)$，向量场 X 和 $\mathrm{Ad}(\varphi)(X)$ 是 φ-相关的

$$T(\varphi) \circ X = (\mathrm{Ad}(\varphi)X) \circ \varphi.$$

同样， Y与 $\mathrm{Ad}(\varphi)Y$是 φ-相关的，因此向量场 $[X, Y]$与 $[\mathrm{Ad}(\varphi)X,\mathrm{Ad}(\varphi)Y]$ 是 φ-相关的（引理 3.4.17），这意味着 $\mathrm{Ad}(\varphi)[X, Y] = [\mathrm{Ad}(\varphi)X,\mathrm{Ad}(\varphi)Y]$，即 $\mathrm{Ad}(\varphi)$ 是李代数自同构。

□

注 D.1.7。如果 M 是无限维的，我们不能指望 $\mathcal{V}(M)$ 上的括号是连续的。为此，假设 $M = U$ 是局部凸空间 E 的一个开子集，并考察仿射向量场 $X_{A,b}$ 的子代数 $\mathfrak{aff}(E) \cong E \rtimes \mathfrak{gl}(E)$，其中 $X_{A,b}(v) = Av + b$, $A \in \mathcal{L}(E)$, $b \in E$。容易看出， $\mathcal{V}(U)$ 上的自然拓扑在 $\mathfrak{aff}(E)$ 上诱导出乘积拓扑，该乘积拓扑由 E 上的原拓扑与 $\mathfrak{gl}(E)$ 上的紧开拓扑构成：$= (\mathcal{L}(E)\ [\cdot, \cdot])$。鉴于

$$[X_{A,b}, X_{A',b'}] = X_{[A',A],A'b-Ab'},$$

因此，只需证明当 $\dim E = \infty$ 时，双线性求值映射 $\mathcal{L}(E)_{c.o.} \times E \to E$ 不连续。取 $0 \neq v \in E$，并通过将 $\alpha \in E'$ 映射为算子 $v \otimes \alpha\colon\ x \mapsto \alpha(x)v$，将 $E'_c \hookrightarrow \mathcal{L}(E)_{c.o.}$ 嵌入其中。因此，只需证明求值映射

$$\mathrm{ev}\colon E'_c \times E \to \mathbb{R}, \quad (\alpha, v) \mapsto \alpha(v)$$

不连续。 $E_c' \times E$ 中 (0，0) 的基本邻域形式为$\curvearrowleft K \times U_E$，其中 $U_E \subseteq U$ 是一个零邻域， $K \subseteq E$ 是紧的，并且

$$\widehat{K} := \{f \in E' \colon (\forall k \in K)\, |f(k)| \leq 1\}$$

$\widehat{\ }$是 K的极集。在 $K \times U_E$ 上，求值映射有界，当且仅当 U_E 包含于双极 K的某个倍数中；根据双极定理 B.5.9，该双极与 K的平衡凸闭包$\curvearrowleft\widehat{\ }$重合，而后者是预紧的（[Tr67，命题 7.11]）。于是， K 是 E中的预紧零邻域，因此 E 是有限维的（参见 [Ru91，定理 1.22]的证明）。类似的论证表明，若在 E的有界子集上一致收敛所诱导的更细拓扑赋予 E' ，那么求值映射连续，当且仅当 E 可赋范；这等价于存在一个（弱）有界零邻域（命题 B.4.13）。

命题 D.1.8。设 M 和 N 为光滑流形。

(1) 映射 $f\colon N \to \mathcal{V}(M)$ 是光滑的，当且仅当相应映射

$$\widehat{f}\colon N \times M \to T(M), \quad (n, m) \mapsto f(n)(m)$$

是光滑的。特别地，对于满足 $\widehat{\alpha}\colon T(N) \times M \to T(M), (v, m) \mapsto \alpha(v(m)$ 光滑的逐纤维线性映射 $\alpha\colon T(N) \to \mathcal{V}(M)$，它定义了 $\mathcal{V}(M)$值的光滑 1-形式于 N 上。

(2) 若 $\alpha \in \Omega^1(N, \mathcal{V}(M))$ 满足 $\widehat{\alpha}$ 光滑且 $f\colon N \to$微分同胚群(M) 光滑，则

$$\mathrm{Ad}(f).\alpha\colon T(N) \to \mathcal{V}(M), \quad \big(\mathrm{Ad}(f).\alpha\big)_p := \mathrm{Ad}(f(p)) \circ \alpha_p$$

定义了 $\mathcal{V}(M)$值的光滑 1-形式于 N 上。

(3) 若 $\varphi\colon N \to$微分同胚群(M) 是光滑映射，则 φ 的左、右对数导数都是光滑的 $\mathcal{V}(M)$值 1-形式，且函数$\delta^l(\varphi)\widehat{\ }$和 $\delta^r(\varphi)\widehat{\ }$是光滑的。

证明。 (1) 根据 (D.1)，只需证明对于 M 的每个坐标图 (φ_i, U_i)，映射

$$n \mapsto f(n)|_{U_i}\colon N \to \mathcal{V}(U_i)$$

是光滑的。因此，我们可以假设 M 是某个局部凸空间 E 的开子集。于是 $\mathcal{V}(M) \cong C^\infty(M, E)$，并且

$$\widehat{f}(n, m) = (f(n), f^\sharp(n, m)),$$

其中 $f^\sharp\colon N \times M \to E$ 根据假设是光滑的。现在，相应映射 $N \to C^\infty(M, E) \cong \mathcal{V}(M)$ 的光滑性由命题 4.1.21 得出。

(2) 鉴于 (1)，这可由

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}(f(p)).\alpha_p(v)(m) = T(f(p)).\alpha_p(v)\big(f(p)^{-1}(m)\big)\\ &= T_{(p,f_2(p,m))}(\widehat{f})\Big(0,\alpha_p(v)(f(p)^{-1}(m))\Big) = T_{(p,f_2(p,m))}(\widehat{f})\Big(0,\widetilde{\alpha}(v,\widetilde{f_2}(p,m))\Big)\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$对于 $v \in T_p(N)$，因为映射 $T(f)$、$\widetilde{\alpha}$和 f_2是光滑的。

(3) 对每个 $m \in M$ 和 $v \in T_p(N)$，我们有

$$(\delta^l(\varphi)v)(m) = T(\widetilde{\varphi}_2)(0_p, T(\widetilde{\varphi}_1)(v, 0_m)),$$

因此， $\delta^l(\varphi)$ 的光滑性可类似于 (2) 得出。 □

唯一性引理及其应用

现在我们来讨论对数导数的法则和唯一性引理；二者都是贯穿本书的重要工具。下面的引理将引理5.5.3中关于李代数值形式的相应结果推广到以 Diff(M) 为值的映射；该结果适用于李群值映射。

引理 D.1.9（乘积与商法则）。对于两个光滑映射f, g： $N \to$微分同胚群(M)，以下断言成立：

(1) (乘积法则) 映射 $(fg)(p) := f(p) \circ g(p)$ 是光滑的，且

$$\delta^l(fg) = \delta^l(g) + \mathrm{Ad}(g^{-1}).\delta^l(f) \quad \textit{and} \quad \delta^r(fg) = \delta^r(f) + \mathrm{Ad}(f).\delta^r(g).$$

(2) (商法则) 映射 fg^{-1}: $p \mapsto f(p) \circ g(p)^{-1}$ 是光滑的，且

$$\delta^l(fg^{-1}) = \mathrm{Ad}(g).(\delta^l(f) - \delta^l(g)).$$

特别地，我们有

$$\delta^l(f^{-1}) = -\mathrm{Ad}(f).\delta^l(f) = -\delta^r(f).$$

证明。 f^{-1} 的光滑性可直接由定义得出。对于乘积映射 fg的光滑性，我们注意到映射

$$N^2 \times M \to M, \quad (t,s,x) \mapsto f(t)\big(g(s)(x)\big) = \big(f(t) \circ g(s)\big)(x)$$

and

$$N^2 \times M \to M, \quad (t,s,x) \mapsto \big(f(t) \circ g(s)\big)^{-1}(x) = g(s)^{-1}\big(f(t)^{-1}(x)\big)$$

作为光滑映射的复合，是光滑的。

由链式法则可得

$$T_p(fg)v = T(f(p))(T_p(g)v) + (T_p(f)v) \circ g(p),$$

这就得出

$$\begin{aligned}\delta^l(fg)_p &= g(p)^{-1}.T_p(g) + g(p)^{-1}f(p)^{-1}.\big(T_p(f)\circ g(p)\big)\\ &= \delta^l(g)_p + \mathrm{Ad}(g(p)^{-1}).\delta^l(f)_p,\end{aligned}$$

进而得出

$$\delta^r(fg) = \mathrm{Ad}(fg).\delta^l(fg) = \mathrm{Ad}(f).\delta^r(g) + \delta^r(f).$$

对于 $g = f^{-1}$，我们特别得到

$$0 = \delta^l(ff^{-1}) = \delta^l(f^{-1}) + \mathrm{Ad}(f).\delta^l(f).$$

将其与(1)结合，我们得到商法则。 □

引理D.1.10（唯一性引理）。设 N 是连通的，且 f、g：$N \to$微分同胚群(M)是光滑的。

(1) 关系$\delta^l(f) = \delta^l(g)$等价于 $\varphi \in$微分同胚群(M)的存在性，使得对所有 $p \in N$有 $g(p) = \varphi \circ f(p)$。*(2)* 关系 $\delta^r(f) = \delta^r(g)$等价于 $\varphi \in$微分同胚群(M)的存在性，使得对所有 $p \in N$有 $g(p) = f(p) \circ \varphi$。

证明。(1) 若对每个 $p \in N$有 $g(p) = \varphi \circ f(p)$，则 $T_p(g) = \varphi(p).T_p(f)$，从而 $\delta^l(g) = \delta^l(f)$。

反之，若 $\delta^l(g) = \delta^l(f)$，则由乘积与商法则可得

$$\delta^l(gf^{-1}) = \delta^l(f^{-1}) + \mathrm{Ad}(f).\delta^l(g) = \delta^l(f^{-1}) + \mathrm{Ad}(f).\delta^l(f) = \delta^l(ff^{-1}) = 0.$$

设 $\gamma := gf^{-1}$。那么 $\delta^l(\gamma) = 0$意味着 $T_p(\gamma) = 0$对每个 $p \in N$都成立，因此，对每个 $x \in M$，映射 $p \mapsto \gamma(p)(x)$ 的导数处处为零，故为局部常数，因为 M 是以局部凸空间为模型的（引理 1.2.7）。由于 N 是连通的，γ 是常数。由此可知，gf^{-1} 是常数，这意味着存在某个 $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$，使得 $g = \varphi \circ f$。

(2) 可用与 (1) 类似的论证得出。 □

命题 D.1.11（时变向量场的唯一性）。设 $J \subseteq \mathbb{R}$是一个区间，$t_0 \in J$，$\varphi_0 \in$微分同胚群(M)，且 X：$J \to \mathcal{V}(M)$是一条光滑曲线。那么，至多存在一条光滑曲线 γ：$J \to$微分同胚群(M)满足初值问题

$$\gamma'(t) = \gamma(t).X(t) = T(\gamma(t)) \circ X(t), \quad \gamma(t_0) = \varphi_0 \tag{D.2}$$

or

$$\gamma'(t) = X(t).\gamma(t) = X(t) \circ \gamma(t), \quad \gamma(t_0) = \varphi_0. \tag{D.3}$$

证明。</style>曲线 γ 是 (D.2) 的解，当且仅当 $\delta^l(\gamma) = X$。若 η 是 (D.2) 的另一个解，则 $\eta(t_0) = \gamma(t_0)$，因此由唯一性引理 D.1.10 可得 $\varphi = \psi$。对于 (D.3) 及 $\delta^r(\gamma) = X$，我们也同理论证。□

我们甚至可以进一步强化前述命题：只要存在一条光滑曲线 $\gamma\colon J\to$ 微分同胚群(M) 满足初值问题

$$\gamma(0)=\mathrm{id}_M \quad \text{and} \quad \gamma'(t)=X_t\circ\gamma(t) \tag{D.4}$$

对于时变向量场 $X\colon J\to\mathcal{V}(M)$，$M$ 上 X 的所有积分曲线都具有如下形式

$$\eta(t)=\gamma(t)(m), \tag{D.5}$$

因此解是唯一的。特别地，X 存在多条积分曲线意味着 (D.4) 无解。下面我们将看到这种情况也会在线性微分方程中出现。

引理 D.1.12. 设 $J\subseteq\mathbb{R}$ 是包含 0 的区间，$\gamma\colon J\to$微分同胚群(M) $J\to$ 是一条光滑曲线，且 $\gamma(0)=\mathrm{id}_M$，并且 $m_0\in M$。设 $X_t:=\delta^r(\gamma)_t$ 是 M 上对应的时变向量场，满足 $X_t\circ\gamma(t)=\gamma'(t)$，并假设 $\eta\colon J\to M$ 是以下初值问题的解：

$$\eta(0)=m_0 \quad and \quad \eta'(t)=X_t(\eta(t)) \quad for \quad t\in J.$$

那么，对所有 $t\in J$，都有 $\eta(t)=\gamma(t)(m_0)$。

证明。光滑曲线 $\alpha\colon J\to M, t\mapsto\gamma(t)^{-1}(\eta(t))$ 满足 $\alpha(0)=m_0$，并且

$$\begin{aligned}\alpha'(t)&=(\gamma^{-1})'(\eta(t))+T(\gamma(t)^{-1})(\eta'(t))=T(\gamma(t)^{-1})\Big(\delta(\gamma^{-1})_t(\eta(t))+\eta'(t)\Big)\\&=T(\gamma(t)^{-1})\big(-\delta^r(\gamma)_t(\eta(t))+\eta'(t)\big)\\&=T(\gamma(t)^{-1})\big(-X_t(\eta(t))+\eta'(t)\big)=0.\end{aligned}$$

因此，α 是常数 m_0，结论得证。 □

命题 D.1.13.设 G 是一个李群，M 是一个光滑流形。

(1) 若 $\sigma\colon M\times G\to M$ 是 G 在 M 上的光滑右作用，则

$$\dot\sigma\colon\mathfrak{g}\to\mathcal{V}(M),\qquad \dot\sigma(x):=T_{(p,e)}(\sigma)(0,x)$$

定义了一个李代数同态。

(2) 若 G 连通，且 $\alpha\colon\mathfrak{g}\to\mathcal{V}(M)$ 是一个李代数同态，则至多存在一个光滑右作用 σ，使得 G 在 M 上的作用满足 $\dot\sigma=\alpha$。

证明。(1) 任取 $p\in M$，并记 $\sigma^p\colon G\to M, g\mapsto p.g:=\sigma(p,g)$ 为 p 的光滑轨道映射。于是 $\sigma^p\circ\lambda_g=\sigma^{p.g}$ 推出

$$T(\sigma^p)(x_l(g))=T_e(\sigma^{p.g})x=\dot\sigma(x)_{p.g}=(\dot\sigma(x)\circ\sigma^p)(g),$$

这意味着向量场 x_l 和 $\dot\sigma(x)$ 是 σ^p-相关的。由此可得，对于 $x,\ y\in\mathfrak{g}$，向量场 $[x_l,y_l]=[x,y]_l$和 $[\dot\sigma(x)\ \dot\sigma(y)]$ 也σ^p-相关（引理 3.4.17），由此得到

$$[\dot\sigma(x),\dot\sigma(y)](p)=T_e(\sigma^p)[x,y]_l(e)=T_{(p,e)}(\sigma)(0,[x,y])=\dot\sigma([x,y])(p).$$

(2) 若 σ 是一个光滑右作用，且 $\dot\sigma=\alpha$ 和 $\sigma_g(p):=\sigma(p,\ g)$，则$\sigma(gh)=\sigma(h)\sigma(g)$ 蕴含映射 $\sigma^\vee\colon\ G\to$微分同胚群(M)，$\sigma^\vee(g):=\sigma_g$满足

$$T_g(\sigma^\vee)\circ T_e(\lambda_g)=T_e(\sigma^\vee)(\cdot)\circ\sigma(g),$$

使得

$$\delta^r(\sigma^\vee)_g=T_g(\sigma^\vee)(\cdot)\circ\sigma(g)^{-1}=T_e(\sigma^\vee)\circ T_e(\lambda_g)^{-1}=\dot\sigma\circ T_e(\lambda_g)^{-1}.$$

因此，(2) 由唯一性引理得出。 □

伴随表示的导数

在下面的引理中，我们计算 Diff(M) 在李代数 $\mathcal{V}(M)$ 上的伴随表示的导数。这里得到的“错误”符号，是因为 $\mathcal{V}(M)$ 上的李括号使其成为反群 Diff$(M)^{\mathrm{op}}$ 的“李代数”，其乘积为 $\varphi\psi:=\psi\circ\varphi$。该群通过 $(m,\ \varphi)\mapsto\varphi(m)$ 从右侧作用于 M（参见命题 D.1.13）。

引理 D.1.14。设 $J\subseteq\mathbb{R}$ 是一个区间，且 $\gamma\colon\ J\to\mathrm{Diff}(M)$、$\alpha\colon J\to\mathcal{V}(M)$ 是光滑曲线。则曲线

$$\beta\colon J\to\mathcal{V}(M),\quad t\mapsto\mathrm{Ad}(\gamma(t))\alpha(t)$$

是光滑的，并满足微分方程

$$\beta'(t)=\mathrm{Ad}(\gamma(t))\Big([\alpha(t),\delta^l(\gamma)_t]+\alpha'(t)\Big).$$

证明。 首先我们证明 β 是光滑的。根据命题D.1.8证明中的相同论证，我们看到，只需证明该映射

$$\widehat\beta\colon J\times M\to T(M),\quad (t,m)\mapsto\beta(t)(m)$$

是光滑的。这由下式可得

$$\beta(t)(m)=T(\gamma(t))\alpha(t)\big(\gamma(t)^{-1}(m)\big)=T(\widehat\gamma)\big(0,\alpha(t)(\widetilde\gamma_2(t,m))\big).$$

令 $t_0\in J$。由线性映射 Ad$(\gamma(t_0))$ 的连续性（命题 D.1.6(b)），我们得到

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}(\gamma(t))\alpha(t)=\mathrm{Ad}(\gamma(t_0))\frac{d}{dt}\Big(\,\mathrm{Ad}\,\big(\gamma(t_0)^{-1}\gamma(t)\big)\alpha(t)\Big).$$

现在 $\eta(t):=\gamma(t_0)^{-1}\gamma(t)$ 满足 $\eta(t_0)=\mathrm{id}_M$，并令 $X:=\alpha(t_0),\ \ Y:=\eta'(t_0)=\delta^l(\gamma)_{t_0}$ 以及 $Z:=\alpha'(t_0)$。接下来只需证明 $\beta(t):=$伴随表示$(\eta(t))\alpha(t)$ 满足 $\beta'(t_0)=[X,Y]+Z$。

对关系 $\eta(t)(\eta(t)^{-1}(m)) = m$ 求导，得到

$$(\eta^{-1})'(t) = -T(\eta(t))^{-1} \circ \eta'(t) \circ \eta(t)^{-1}.$$

因此，$\beta(t) = T(\eta(t)) \circ \alpha(t) \circ \eta(t)^{-1}$ 对每个 $m \in M$ 都得到

$$\begin{aligned}\beta'(t_0)(m) &= (T\circ\eta)'(t_0)\big(\alpha(t_0)(\eta(t_0)^{-1}m)\big) + T^2(\eta(t_0))(\alpha'(t_0)(\eta(t_0)^{-1}m)) \\ &\quad + T^2(\eta(t_0))T(\alpha(t_0))(\eta^{-1})'(t_0)(m) \\ &= (T\circ\eta)'(t_0)X(m) + Z(m) - T(X)Y(m). \end{aligned} \tag{D.6}$$

现在我们在局部坐标中计算这个表达式，此时有 $X(m) = (m, X^\sharp(m))$，$Y(m) = (m, Y^\sharp(m))$，并且

$$T(\eta(t))(m,v) = \big(\eta(t)(m), d(\eta(t))(m)v\big),$$

由此得到

$$\begin{aligned}(T\circ\eta)'(t_0)X(m) &= \Big((m, X^\sharp(m)), \big(\eta'(t_0)(m), d(\eta'(t_0))(m)X^\sharp(m)\big)\Big) \\ &= \Big((m, X^\sharp(m)), (Y^\sharp(m), dY^\sharp(m)X^\sharp(m))\Big) \end{aligned} \tag{D.7}$$

and

$$T(X)Y(m) = \big((m, X^\sharp(m)), (Y^\sharp(m), dX^\sharp(m)Y^\sharp(m))\big). \tag{D.8}$$

将 (D.8) 从 (D.7) 中减去，并结合 (D.6)，我们得到

$$\beta'(t_0)(m) - Z(m) = ((m,0),(0, dY^\sharp(m)X^\sharp(m) - dX^\sharp(m)Y^\sharp(m))) = [X,Y](m),$$

其中，我们将 $T_m(M)$ 与任意点 $v \in T_m(M)$ 处的切空间 $T_v(T_m(M)) \subseteq T(T(M))$ 认作同一对象。□

命题 D.1.15。设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，$\gamma\colon J \to \mathrm{Diff}(M)$ 是一条光滑曲线，$t_0 \in J$，并且 $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ 满足

(1) $\gamma(t_0)$ 与 φ 可交换，并且(2) 伴随表示

$(\varphi)\delta^l(\gamma)_t = \delta^l(\gamma)_t$ 对每个 $t \in J$ 都成立。

那么，φ 与每个 $\gamma(t)$，$t \in J$ 都可交换。

证明。设 $\beta(t) := \varphi \circ \gamma(t) \circ \varphi^{-1}$。那么 $\beta\colon J \to \mathrm{Diff}(M)$ 是一条光滑曲线，且 $\beta(t_0) = \gamma(t_0)$。此外，

$$\begin{aligned}\delta^l(\beta)_t &= \big(\varphi\circ\gamma(t)^{-1}\circ\varphi^{-1}\big).((\varphi.\gamma'(t))\circ\varphi^{-1}) \\ &= (\varphi.\delta^l(\gamma)_t)\circ\varphi^{-1} = \mathrm{Ad}(\varphi)\delta^l(\gamma)_t = \delta^l(\gamma)_t.\end{aligned}$$

现在由唯一性引理 D.1.10 可得所述结论。 □

下面的命题给出了判定 $\mathrm{Diff}(M)$ 中两条曲线可交换的判据。

命题 D.1.16. 设 $J \subseteq \mathbb{R}$ 为一个区间，$\gamma, \eta\colon J \to \mathrm{Diff}(M)$ 为光滑曲线，且 $X \in \mathcal{V}(M)$。则以下断言成立：

(a) 若对所有 $t \in J$，$[X, \delta^l(\gamma)_t] = 0$ 或 $[X, \delta^r(\gamma)_t] = 0$，则对所有 $t \in J$，$\mathrm{Ad}(\gamma(t))X = X$。*(b)* 若对所有 t、$s \in J$，$[\delta^l(\gamma)_t, \delta^l(\eta)_s] = 0$，则对所有 t、$s \in J$，$\gamma(t)\eta(s) = \eta(s)\gamma(t)$，且 $\delta^l(\gamma\eta) = \delta^l(\gamma) + \delta^l(\eta)$。

证明。(a) 若 X 与 $\delta^l(\gamma)$ 对易，则由引理 D.1.14 可知，曲线 $\beta(t) := \mathrm{Ad}(\gamma(t))X$ 属于 $\mathcal{V}(M)$ 且为常数，故断言成立。若 X 与 $\delta^r(\gamma) = -\delta^l(\gamma^{-1})$ 对易（引理 D.1.9），则将前述论证应用于 $\beta(t) := \mathrm{Ad}(\gamma(t))^{-1}X$。

(b) 首先利用 (a) 可知，对于所有 t、$s \in J$ 以及，$\mathrm{Ad}(\gamma(t))\delta^l(\eta)_s = \delta^l(\eta)_s$ 成立；然后由命题 D.1.15 可知，每个 $\gamma(t)$ 都与每个 $\eta(s)$ 交换。最后，引理 D.1.9(2) 推出 $\delta^l(\gamma\eta) = \delta^l(\gamma) + \delta^l(\eta)$. □

Diff(M) 的指数映射

定义 D.1.17。设 M 是一个局部凸流形。如果存在一条光滑曲线 $\gamma_X\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$，使得我们称向量场 $X \in \mathcal{V}(M)$ 完备，且

$$\delta^l(\gamma_X)_t = X \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \gamma_X(0) = \mathrm{id}_M\,. \tag{D.9}$$

鉴于命题 D.1.11，对于每个向量场 X，初值问题 (D.9) 至多有一个解，而向量场的完备性意味着存在一个光滑解。我们将在下文的引理 D.1.19(3) 中看到，向量场 X 的完备性等价于在 M 上存在一个以 X 为无穷小生成元的光滑 $\mathbb{R}$-作用。

我们将 $\mathcal{D}_{\exp}(\mathrm{Diff}(M)) := \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}} \subseteq \mathcal{V}(M)$ 记为完备向量场的集合，并将 $\mathrm{Diff}(M)$ 的指数映射定义为

$$\exp\colon \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}} \to \mathrm{Diff}(M), \quad X \mapsto \gamma_X(1).$$

注 D.1.18. 如果 M 是紧流形，那么 $\mathcal{D}_{\exp}(\mathrm{Diff}(M)) = \mathcal{V}(M)$，因为 M 上的每个光滑向量场都是完备的（[La99，推论 IV.2.4]）；但如果 M 不紧致，那么 $\mathcal{D}_{\exp}(\mathrm{Diff}(M))$ 严格小于 $\mathcal{V}(M)$。如果 M 是无限维的，情况甚至更糟（参见下文例 D.2.5）。

引理 D.1.19. 指数映射的定义域 $(M)^{\mathrm{cp}}$ 对 $\mathrm{Diff}(M)$ 满足：

(1) $0 \in \mathcal{V}(M)^{\mathrm{cp}}$。(2) $\mathbb{R} \cdot \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}} = \mathcal{V}(M)^{\mathrm{cp}}$。(3) 对于 $X \in \mathcal{V}(M)^{\mathrm{cp}}$，我们有 $\exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX)$ 对于 s，$t \in \mathbb{R}$，即 $\gamma_X(t) := \exp(tX)$ 是一个群同态 $\gamma_X\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$。

(4) $\mathrm{Ad}(\varphi)\mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}} = \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$ 对所有 $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ 以及 $\exp \circ \mathrm{Ad}(\varphi) = c_\varphi \circ \exp$ 在 $\mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$。(5) 如果 X，$Y \in \mathcal{D}_{\exp}$ 对易，即 $[X,Y]=0$，那么 (a) $X+Y \in \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$。(b) $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y = \exp Y \exp X$。(c) $\mathrm{Ad}(\exp X)Y = Y$。

证明。(1) 是平凡的。

(2) 令 $X \in \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$ 和 $s \in \mathbb{R}$。考虑曲线 $\eta\colon \mathbb{R} \to$ 微分同胚群(M)，由 $\eta(t) := \gamma_X(st)$ 定义。它满足初值问题

$$\eta'(t) = s\eta(t).X = \eta(t).(sX), \quad \eta(0) = \mathrm{id}_M,$$

由唯一性可得 $\eta = \gamma_{sX}$。因此 $sX \in \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$。

(3) 固定 $s \in \mathbb{R}$。那么曲线 $\eta(t) := \gamma_X(s)^{-1}\gamma_X(t+s)$ 满足初值问题

$$\eta'(t) = \gamma_X(s)^{-1}.\gamma_X'(t+s) = \gamma_X(s)^{-1}.(\gamma_X(t+s).X) = \eta(t).X, \quad \eta(0) = \mathrm{id}_M,$$

因此，解的唯一性（命题 D.1.11）推出，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\eta(t) = \gamma(t)$，从而得到 (3)。

(4) 令 $X \in \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$。我们考虑光滑曲线

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M), \quad t \mapsto c_\varphi(\exp tX) = \varphi \circ (\exp tX) \circ \varphi^{-1}.$$

Then

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \big(\varphi \circ (\exp tX)\big).(X \circ \varphi^{-1}) \\ &= \big(\varphi \circ (\exp tX) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi\big).(X \circ \varphi^{-1}) = \gamma(t).\,\mathrm{Ad}(\varphi)X,\end{aligned}$$

使得 $\delta^l(\gamma) = \mathrm{Ad}(\varphi)X$ 为常数。这意味着 $\mathrm{Ad}(\varphi)X \in \mathcal{V}(M)_{\mathrm{cp}}$，其中

$$\exp(\mathrm{Ad}(\varphi)X) = \varphi \circ (\exp X) \circ \varphi^{-1}.$$

(5) 断言 (a) 和 (b) 由命题 D.1.16(b) 得出。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，由 (4) 和 (5) 可得

$$\exp(tY) = \exp(X)\exp(tY)\exp(-X) = \exp(t\,\mathrm{Ad}(\exp X)Y),$$

因此，我们只需对 $t=0$ 求导，即可得到 (c)。 □

如果考虑依赖于参数的完备向量场族，下面的引理非常有用。它在非常一般的情形下给出了指数函数的适当微分。

引理 D.1.20. 设 $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ 是两个光滑向量场，且满足性质：$E := \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y$ 由完备向量场组成。若函数 $\mathrm{Exp} := \exp_{\mathrm{Diff}(M)}|_E$ 是光滑的，则在局部凸空间 $\mathcal{V}(M)$ 中有：

$$\delta^l(\mathrm{Exp})_X(Y) = \int_0^1 \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(-tX))Y\,dt \quad \textit{for} \quad X, Y \in E.$$

证明. 我们断言，光滑函数

$$\psi\colon I \to \mathcal{V}(M), \quad \psi(t) := \delta^l(\mathrm{Exp})_{tX}(tY),$$

满足函数方程

$$\psi(t+s) = \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(-sX))\psi(t) + \psi(s). \tag{D.10}$$

我们考虑三个光滑函数 $F, G, H\colon E \to$ 微分同胚群(M)，定义如下

$$F(X) := \mathrm{Exp}((t+s)X), \quad G(X) := \mathrm{Exp}(tX) \quad \text{and} \quad H(X) := \mathrm{Exp}(sX),$$

逐点满足 $F = G \cdot H$。乘积法则（引理 D.1.9）蕴含

$$\delta^l(F) = \delta^l(H) + \mathrm{Ad}(H)^{-1}.\delta^l(G).$$

现在，(D.10) 由下式推出

$$\delta^l(G)_X(Y) = \psi(t), \quad \delta^l(H)_X(Y) = \psi(s) \quad \text{and} \quad \delta^l(F)_X(Y) = \psi(s+t).$$

显然 $\psi(0) = 0$ 且 $\psi'(0) = \lim_{t\to 0} \delta^l(\mathrm{Exp})_{tX}(Y) = \delta^l(\mathrm{Exp})_0(Y) = Y$对 t 在 0 处求导，(D.10) 因而导出

$$\psi'(s) = \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(-sX))Y,$$

由积分即可推出该断言：

$$\delta^l(\mathrm{Exp})_X(Y) = \psi(1) = \int_0^1 \psi'(s)\, ds = \int_0^1 \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}(-sX)).Y\, ds. \qquad \square$$

D.1 节练习

练习 D.1.1. 证明：若 $\sigma\colon M \times G \to M$是李群 G在 M上的光滑右作用，则 $T\sigma\colon TM \times TG \to TM$是 TG在 TM上的光滑作用。提示：将 $\sigma(\sigma(p, g_1)\ g_2) = \sigma(p, g_1 g_2)$ 表示为

$$\sigma \circ (\sigma \times \mathrm{id}_G) = \sigma \circ (\mathrm{id}_M \times m_G)$$

并应用切函子 T。

D.2 到一般线性群的光滑映射

设 E 为一个局部凸空间。那么一般线性群 GL(E) 是 Diff(E) 的子群，因此前一节的结果特别适用于取值于 GL(E) 的映射。一类重要的此类映射是常微分方程组的解，以及在 E 上的李群光滑表示。在此背景下，我们还将讨论紧李群的光滑表示以及 $\mathbb{R}$ 的光滑表示。

线性常微分方程

下面的引理刻画了 GL(E)，表明它是数乘的中心化子。结合唯一性引理，它为本节内容与 D.1 节材料之间架起了桥梁。

引理 D.2.1。对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}^\times$，我们考虑由 $\mu_\lambda(v) = \lambda v$给出的微分同胚 $\mu_\lambda \in$微分同胚群(E) 。那么以下断言成立：

(1) $\mathrm{GL}(E) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(E) \colon (\forall \lambda \in \mathbb{R}^\times)\ \varphi \circ \mu_\lambda = \mu_\lambda \circ \varphi\}$.
(2) $\{X \in \mathcal{V}(E) \colon (\forall \lambda \in \mathbb{R}^\times)\ \mathrm{Ad}(\mu_\lambda)X = X\}$ *is the set of linear vector fields.*

证明。 (1) 如果 $\varphi \in$ 一般线性群(E)，那么 φ 与所有标量乘法 μ_λ可交换。反之，如果 $\varphi \in$ 微分同胚群(E)与所有标量乘法可交换，那么

$$\lambda\varphi(0) = \varphi(\mu_\lambda(0)) = \varphi(0) \quad \text{for all} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

可推出 $\varphi(0) = 0$。现在对每个 $\lambda \neq 0$，我们得到：

$$\varphi(x) = \lambda^{-1}\varphi(\lambda x) = \lambda^{-1}(\varphi(0 + \lambda x) - \varphi(0)),$$

并令 $\lambda \to 0$趋于极限，我们得到 $\varphi(x) = T_0(\varphi)x$，因此$\varphi$是线性的。

（2）由于 $T(\mu_\lambda)$ 是在 $T(E) \cong E \times E$ 上与 λ 的乘法，故对 $X \in$$\mathcal{V}(E) \cong C^\infty(E, E)$，关系伴随表示$(\mu_\lambda)X = X$ 等价于

$$X(\lambda v) = \lambda X(v) \quad \text{for all} \quad \lambda \in \mathbb{R}, v \in E.$$

该条件对线性向量场显然成立。反之，它意味着

$$X(v) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} X(tv) = T_0(X)v,$$

从而表明 X 是线性的。 □

定义 D.2.2.若 N 是光滑流形，则当映射$\varphi \colon N \to$ 一般线性群(E) 在定义 D.1.3 的意义下光滑时，我们称其光滑 。

注 D.2.3. (a) 我们考虑 E 的连续自同态的李代数 $\mathfrak{gl}(E) := (\mathcal{L}(E)\ [\cdot, \cdot])$，赋予交换子括号$[A, B] = AB - BA$，并注意到，对于线性向量场 $X_A(v) := Av$，我们有 $[X_A, X_B] = -X_{[A,B]}$ （习题）。

对于 $\varphi \in$GL(E) $\subseteq$ 微分同胚群(E)，有

$$\mathrm{Ad}(\varphi)X_A = T(\varphi) \circ X_A \circ \varphi^{-1} = X_{\varphi \circ A \circ \varphi^{-1}},$$

因此，GL(E) $\leq$微分同胚群(E) 在 $\mathfrak{gl}(E) \subseteq \mathcal{V}(E)$ 上的伴随作用与共轭作用一致。

(b) 对于每条曲线 $u \colon J \to \mathfrak{gl}(E)$，初值问题的一个光滑解 $\gamma \colon J \to$GL(E)

$$\gamma'(t) = \gamma(t) \circ u(t), \quad \gamma(t_0) = \gamma_0,$$

可以视为 Diff(E) 上方程 $\delta^l(\gamma) = u$ 的解。因此，命题 D.1.11 表明它至多有一个解。

(c) 假设光滑曲线 $\gamma\colon J \to$ 微分同胚群(E) 满足

$$\gamma'(t) = \gamma(t) \circ u(t), \quad \gamma(t_0) \in \mathrm{GL}(E).$$

那么 $\gamma(t_0)$ 与所有数乘 μ_λ 都可交换，且 $u(t) = \delta^l(\gamma)(t)$ 上的向量场 E 是线性的，因此在每个 μ_λ 下都不变（引理 D.2.1）。现在，命题 D.1.15 表明，每个 $\gamma(t)$都与每个 μ_λ可交换，而引理 D.2.1 得出 $\gamma(J) \subseteq$一般线性群(E)。

这意味着，如果 $u(t)$由线性向量场组成，那么相应的初值问题在群微分同胚群(E)中的任意解，若起始于一般线性群(E)，就始终留在一般线性群(E)中。特别地，相应问题在一般线性群(E)和微分同胚群(E)上的可解性等价。

(d) 由 (c) 可知，对每个 $D \in \mathcal{L}(E)$，初值问题

$$\gamma'(t) = \gamma(t) \circ D, \quad \gamma(0) = \mathrm{id}_E,$$

至多有一个解。如果 E 是巴拿赫空间，那么解总是存在；但一般而言并非如此，下面的例 D.2.5 将说明这一点。

(e) 引理 D.1.19 中的关系对于指数映射 $\exp^{\mathrm{GL}(E)}\colon \mathcal{D}_{\exp}(\mathrm{GL}(E)) \to \mathrm{GL}(E)$ 也成立。

定义D.2.4。若 E 是一个局部凸空间，则 GL(E) 的指数映射的定义域，是所有在 E 上的连续线性算子 D 的集合，其中相应的线性向量场 $X_D(v) = Dv$ 完备，也就是说，存在一个光滑表示 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E)$，使得 $\alpha'(0) = D$。我们称这些算子为可积的。

例 D.2.5。我们考虑 Fr´echet 空间 $E := C^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$（定义 4.1.2）以及该空间上的连续线性算子 $Df := f'$。考虑初值问题

$$\dot\gamma(t) = D \circ \gamma(t) = \gamma(t)', \quad \gamma(0) = \gamma_0. \tag{D.11}$$

假设 $\gamma\colon J \to E$ 是一个光滑解。那么

$$\widehat\gamma\colon J\times]0,1[\to \mathbb{R}, \quad (t,s) \mapsto \gamma(t)(s)$$

是一个满足微分方程的光滑函数

$$\frac{\partial\widehat\gamma}{\partial t} = \frac{\partial\widehat\gamma}{\partial s},$$

这意味着 $\widehat\gamma$ 在直线 $t + s = c$与 $J\times]0,1[$的交点处为常数。若 $\varepsilon > 0$ 且 $[0,\varepsilon] \subseteq J$，则可知 $t \mapsto \gamma(\varepsilon)(t-\varepsilon)$定义了一个

将 γ_0 光滑延拓到区间 $]-1,1+\varepsilon[$，对于 $]-\varepsilon,0[$上的解也同样如此。因此，全局解 $\gamma\colon \mathbb{R}\to E$的存在意味着可以将 γ_0 光滑延拓为函数 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。

这证明存在一些函数 $\gamma_0 \in E$，使得 (D.11) 在任何包含 $\{0\}$ 的非平凡区间 J 上都没有解，因此不存在任何非平凡区间 $J\subseteq\mathbb{R}$，使得初值问题

$$\dot\gamma(t)=\gamma(t)\circ D,\quad \gamma(0)=\mathrm{id}_E$$

在群 GL(E) 上有光滑解。

命题 D.2.6.如果 M 是光滑有限维流形，并且 $X\in\mathcal{V}(M)$ 是完备向量场，那么连续线性算子 伴随表示 X 在 $\mathcal{V}(M)$ 上生成一个光滑的 $\mathbb{R}$-作用，由 $\alpha(t):=\mathrm{Ad}(\exp(-tX))$ 给出。

证明。 由于 $\gamma_X(t):=\exp(tX)$ 定义了一个同态 $\mathbb{R}\to\mathrm{Diff}(M)$（引理 D.1.19(3)），$\alpha$ 定义了 $\mathbb{R}$ 在 $\mathcal{V}(M)$ 上的线性作用。根据命题 D.1.8 和注 D.1.5，该作用的光滑性可由映射的光滑性推出

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}\times\mathcal{V}(M)\times M\to T(M),\\ &\qquad (t,Y,m)\mapsto \big(\mathrm{Ad}(\gamma_X(t))Y\big)(m)=T(\gamma_X(t))Y\big(\gamma_X(t)^{-1}(m)\big),\end{aligned}$$

这又可由.....的光滑性推出

$$\mathbb{R}\times T(M)\to T(M),\quad (t,v)\mapsto T(\gamma_X(t))v$$

（引理 D.1.4）以及求值映射的光滑性

$$\mathrm{ev}\colon \mathcal{V}(M)\times M\to T(M),\quad (Z,m)\mapsto Z(m),$$

这又可由求值映射的光滑性推出

$$\mathrm{ev}\colon C^\infty(U,\mathbb{R}^n)\times U\to\mathbb{R}^n$$

对于任意开子集 $U\subseteq\mathbb{R}^n$（引理 4.1.15）。最后，$\alpha'(0)=$ –伴随表示 X 可由引理 D.1.14 得出。□

李群的光滑表示

定义 D.2.7。设 E 是一个局部凸空间，G 是一个李群。G 在 E 上的一个光滑表示 是一个同态 π: $G\to$ 一般线性群(E)，且其光滑性是指线性作用 $\widehat{\pi}$: $G\times V\to V$是光滑的。对于 G 在 E上的表示，我们通常记作 (π,E)，π 。

命题 D.2.8（导出表示）。设（E,π）是李群 G 的一个光滑表示，其李代数为 $\mathfrak{g}$。那么

$$d\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E), \quad d\pi(X)v := Xv := T_e(\pi)(x)(v)$$

是李代数的一个同态。若 G 是连通的，且 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$是 $\mathfrak{g}$ 在 E 上的一个表示，它在 E 上赋予了拓扑$\mathfrak{g}$-模结构，那么 G 在 E 上的光滑表示至多有一个，且满足$d\pi = \alpha$。

证明。 为证明 $d\pi$ 是李代数同态，我们将命题 D.1.13(1) 应用于光滑右作用 $\sigma(v,\ g) := \pi(g^{-1})v$，并回忆注 D.2.3 中指出的自然嵌入 $\mathfrak{gl}(E) \to \mathcal{V}(E)$ $A \mapsto X_A$是一个反同态。唯一性断言由命题 D.1.13(2) 得出。□

下面的引理使我们能够在通常的完备性要求不满足的情况下应用彼得–外尔定理。

引理 D.2.9。设 K 是一个紧拓扑群，并且

$$\sigma\colon K \times E \to E, \quad (k, v) \mapsto \sigma_k(v)$$

K 在局部凸空间 E上的连续作用。那么， σ 唯一地延拓为 K 在 E的完备化 E 上的连续作用 $\widehat{\sigma}$ 。

证明。 首先我们断言， E 的拓扑可以由 K-不变的连续半范数定义。为此，设 $U \subseteq E$ 是一个凸平衡零邻域。那么

$$U_K := \bigcap_{k \in K} \sigma_k(U)$$

由于 $\sigma^{-1}(U) \subseteq K \times E$ 是紧子集 $K \times \{0\}$ 的一个开邻域，因此它也是 E 中的零邻域。由华莱士引理 A.4.3，存在一个开零邻域 $W \subseteq E$，使得 $K \times W \subseteq \sigma^{-1}(U)$，这意味着 $W \subseteq U_K$。显然， U_K 是 K-不变的，因此它的闵可夫斯基泛函

$$p_{U_K}(v) := \inf\{t > 0\colon v \in tU_K\}$$

是 E 上的一个 K-不变连续半范数（命题 B.4.3）。这表明 E 有一个由 K-不变的凸平衡零邻域构成的基，因此 E 上的拓扑由一族 K-不变半范数 $\mathcal{P}$ 定义。

对于 $p \in \mathcal{P}$，我们记 $q_p\colon E \to E_p$ 为到相应赋范空间 E_p 的商映射。由于 p 是 K-不变的，子空间 $p^{-1}(0)$ 也是 K-不变的，因此我们得到一个作用 $\sigma_p\colon K \times E_p \to E_p$。由 p 的 K- 不变性可知，这个作用是等距的。此外，

$$\sigma_p \circ (\mathrm{id}_K \times q_p) = q_p \circ \sigma,$$

且由于 $\mathrm{id}_K \times q_p$ 是一个商映射， σ_p 是连续的。令 E_p 表示 E_p的完备化，它是一个巴拿赫空间。由于每个$\sigma_{p,\ k}$ 都是等距变换，它

$\widehat{}$唯一地延拓为等距变换 $\widehat{\sigma}_{p,\ k}$，其定义域为 $E_{p\circ}$ 由此得到$\frown K$ 在 E_p上的一个作用 $\widehat{\sigma}_p$。这个作用的连续性源于以下事实： K 通过$\widehat{}$等距变换进行作用，并且 E_p 中轨道连续的元素所构成的集合包含E_p，因此该集合是稠密的，这就推出了 $\widehat{\sigma}_p$ 的连续性（习题 D.2.5）。

构成乘积空间后，我们得到 K 在$\frown\prod_{p\in\mathcal{P}} E_p$上的连续作用 $\widehat{\sigma}_{\mathcal{P}}$。设

$$q_{\mathcal{P}}\colon E \to \prod_{p\in\mathcal{P}} E_p, \quad v \mapsto (q_p(v))_{p\in\mathcal{P}}$$

$\widehat{}$表示典范嵌入。于是完备化 E 可与闭包等同

$$\widehat{E} \cong \overline{q_{\mathcal{P}}(E)} \subseteq \prod_{p\in\mathcal{P}} \widehat{E}_p,$$

因为巴拿赫空间的乘积是完备的（习题）。由于 $q_{\mathcal{P}}$ 是 K-等变的，$q_{\mathcal{P}}(E)$是 K-不变的，通过限制我们得到 K 在 E上的连续$\widehat{}$作用。它是唯一确定的，因为每个算子 $\sigma_k \in$ 一般线性群(E)唯一地延拓到 E。□

定理 D.2.10（彼得–外尔定理）。 设 K 是光滑作用于*Mackey*完备局部凸空间上的紧李群。则 K-有限向量空间在 E中稠密。

Let $\widehat{K}$ be a set of pairwise inequivalent irreducible representations of K. For each $\chi \in \widehat{K}$, let E_χ denote the isotypic component of type χ.

Then every $v \in E$ can be written as a convergent sum

$$v = \sum_{\chi\in\widehat{K}} p_\chi(v),$$

where $p_\chi(v) \in E_\chi$ and the convergence is unconditional in the topology of E.

证明。 利用引理 D.2.9，我们首先将 K 在 E 上的光滑作用 σ 延拓为 K 在完备化 E上的连续作用 $\widehat{\sigma}\widehat{}\,E$。然后，彼得–外尔定理 [HoM98,Thm. 3.5.1] 表明， K-有限向量$\widehat{}$的空间 $\widehat{E}^{[K]}$ 在 E 中稠密。该空间是直和

$$\widehat{E}^{[K]} = \bigoplus_{\chi\in\widehat{K}} \widehat{E}_\chi,$$

$\widehat{}$，其中 E_χ 是对应于不可约特征$\frown\chi \in K$的等型分量。

此外，我们还有到等型分量上的连续投影，其表达式为

$$p_\chi(v) = \chi(e)\int_K \overline{\chi(k)}\sigma(k,v)\,d\mu_K(k),$$

$\widehat{}$其中， μ_K 是 K的归一化哈尔测度。由于 E 在 E中稠密，子空间 p_χ(E)的$\widehat{}$和在 E中也稠密。另一方面， E 的麦基完备性意味着，对于每个 $v \in E$，由光滑函数积分得到的元素 $p_\chi(v)$也属于 E。因此，我们得出 $\sum_\chi p_\chi$(E) $\subseteq E^{[K]}$ 在 E中稠密。

$\widehat{}$ E 中光滑向量的傅里叶级数的收敛性由Harish–Chandra定理（[Wa72，定理4.4.2.1]）得出，但由于 E 由光滑向量组成，该断言成立。□

$\mathbb{R}$的光滑表示

特别重要的是群（$\mathbb{R}$， $+$）的光滑表示。由于它们对应于一般线性群(E)的光滑单参数子群，任一这样的表示 $\alpha\colon \mathbb{R} \to$ 一般线性群(E)都由其无穷小生成元 $D := \alpha'(0)$唯一确定，而它是 $\mathcal{D}_{\exp}$(一般线性群(E))的一个元素。反之，一般线性群(E)的指数函数定义域中的每个元素，都是 $\mathbb{R}$的某个光滑表示的无穷小生成元。采用“指数记号”，在这种情况下我们也写作 $e^{tD} := \exp^{\mathrm{GL}(E)}(tD) = \alpha(t)$。

下面的例子表明，对于 $\mathbb{R}$的光滑表示，子空间在导出作用下的不变性并不蕴含其不变性。

例 D.2.11. 令 $E := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上光滑函数构成的 Fr´echet 空间，并考虑以下闭子空间

$$W(a,b) := \{f \in E\colon \operatorname{supp}(f) \subseteq [a,b]\}, \qquad a < b.$$

这些子空间在连续线性算子作用下不变

$$D\colon E \to E, \quad Df = f'.$$

曲线

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E), \quad \alpha(t)(f)(x) = f(t+x)$$

是光滑的，因为作用

$$\mathbb{R} \times E \to E, \quad (t,f) \mapsto \alpha(t)f$$

是光滑的（注 D.1.5），这又是由映射的光滑性得出的

$$\mathbb{R} \times E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t,f,x) \mapsto f(x+t)$$

（命题 4.1.21(ii)）。鉴于

$$\alpha'(t) = \alpha(t) \circ D \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R},$$

我们有

$$D \in \mathcal{D}_{\exp}(\mathrm{GL}(E)) \quad \text{and} \quad \exp(tD) = \alpha(t).$$

这个例子有趣之处在于，子空间 $W(a,b)$ 在单参数群 α 的无穷小生成元 D 作用下是不变的，但在 α 本身作用下则不是。事实上，我们有

$$\alpha(t)W(a,b) = W(a-t, b-t).$$

指数函数的奇点

下面的命题是我们分析李群指数函数奇点的主要工具之一。

命题 D.2.12. 设 E 是麦基完备的，且 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E)$ 是一个光滑表示，并满足 $\alpha'(0) = D$。则以下断言成立：

(1)算子值积分

$$\beta(t) := \int_0^1 \alpha(st)\,ds = \int_0^1 e^{stD}\,ds \in \mathfrak{gl}(E)$$

逐点存在。

(2)映射 $\widehat{\beta}\colon \mathbb{R} \times E \to E,\ (t, v) \mapsto \beta(t)v$ 是光滑的。

(3) 对每个 $t \in \mathbb{R}^\times$，我们有 $D \circ \beta(t) = \beta(t) \circ D = \frac{\alpha(t) - \mathbf{1}}{t}$。

(4)假设 E 是一个巴拿赫空间。

(a) 则 $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ 是实解析的，并由幂级数给出

$$\beta(t) = \frac{e^{tD} - \mathbf{1}}{tD} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} D^k.$$

(b) $\beta(1)$ 可逆当且仅当 $\operatorname{谱}(D) \cap 2\pi i\mathbb{Z} \subseteq \{0\}$。若 $\|D\| < 2\pi$，则该条件成立，且 $\beta(1)^{-1}$ 由幂级数给出

$$g(D) := \frac{D}{e^D - 1} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} D^n,$$

其中 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是伯努利数。

证明。(1) 源于以下事实：对于每个 $v \in E$，曲线 $s \mapsto \alpha(st)v$ 是光滑的，并且 E 是麦基完备的。

(2) 源于 $\widehat{\beta}(t)v = \int_0^1 \alpha(st)v\,ds$ 以及映射的光滑性

$$I \times \mathbb{R} \times E \to E, \quad (s, t, v) \mapsto \alpha(st)v$$

（引理 D.1.19）。

(3) 由对于每个 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $D =$ 伴随表示$(\alpha(t))D = \alpha(t)D\alpha(t)^{-1}$（引理 D.1.19(5)），我们得到对于每个 $v \in E$

$$Dt\beta(t)v = \int_0^1 Dt\alpha(st)v\,ds = \int_0^t D\alpha(s)v\,ds = \int_0^t \alpha'(s)v\,ds = \alpha(t)v - v,$$

以及更多

$$t\beta(t)Dv = \int_0^1 t\alpha(st)Dv\,ds = \int_0^t D\alpha(s)v\,ds = tD\beta(t)v.$$

(4) (a) 令 $f(z) := \frac{e^z-1}{z}$，并注意到 f 定义了一个整函数。因此，全纯函数演算（第 10.1 节）给出一个全纯映射

$$\mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)_{\mathbb{C}} \cong \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}), \quad z \mapsto f(zD),$$

其在实直线上的限制为 β。

(4)(b) 直接由谱映射定理（[Ru91，定理 10.28]）以及 $f^{-1}(0) = 2\pi i\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 这一事实得出。此外，若 $\|D\| < 2\pi$，则关系式 $g(z)f(z) = 1$ 对于满足 $f(z) \neq 0$ 的 $z \in \mathbb{C}$ 意味着幂级数 $g(D)$ 收敛到一个算子，其逆映射为 $f(D)$。□

注 D.2.13. 伯努利数 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 由幂级数定义

$$g(z) := \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

它在 $\mathbb{C} \setminus \{k2\pi i$ 上定义了一个全纯函数：$0 \neq k \in \mathbb{Z}\}$。特别地（对于 $p \in \mathbb{N}$），它们出现在求和公式中

$$s_p(n) := \sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} B_k \binom{p+1}{k} n^{p-k+1} = p! \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k}{k!} \frac{n^{p-k+1}}{(p-k+1)!}.$$

下面说明如何根据命题 D.2.12 推导出这个公式。令 $E \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 表示次数为 $\leq N$ 的多项式构成的有限维空间。于是，我们在这个空间上得到 $\mathbb{R}$ 的光滑线性作用：

$$(\alpha(t)f)(x) = f(t+x).$$

其无穷小生成元由 $Df = f'$ 给出，因此 $D^{N+1} = 0$。命题 D.2.12(3) 表明，算子

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} D^k = \beta(1)$$

满足

$$D \circ A = \Delta := \alpha(1) - \mathrm{id}_E = e^D - \mathrm{id}_E\,. \tag{D.12}$$

具体而言，我们有

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{and} \quad (Af)(x) = \int_0^1 f(x+t)\,dt.$$

由于 D 是幂零的，A 是幺幂的，且 $A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} D^k$。

假设 $p < N$。那么单项式 x^p 属于微分算子 D的像，并且 (D.12) 表明，对于某个多项式 $F \in E$，有 $x^p = \Delta F$；我们可以假设 $\int_0^1 F(s)\,ds = 0$。鉴于

$1 = \dim(\ker(D)) = \dim(\ker \Delta)$，后一条件唯一确定了 F。现在 F满足 $F(x+1) - F(x) = x^p$，由此立即得到

$$s_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{k=0}^{n-1} F(k+1) - F(k) = F(n) - F(0).$$

另一方面，根据假设，$x^p = (\Delta F)(x) = (DAF)(x)$ 且 $(AF)(0) = \int_0^1 F(s)\, ds = 0$，因此得到 $AF = \frac{x^{p+1}}{p+1}$，进而得到

$$F(x) = A^{-1}\frac{x^{p+1}}{p+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} D^k \frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p+1} B_k \binom{p+1}{k} x^{p-k+1},$$

这意味着

$$s_p(n) = F(n) - F(0) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} B_k \binom{p+1}{k} n^{p-k+1}.$$

虽然局部凸空间上的连续算子并不具备全纯函数演算，但下面的命题为判定与李群指数函数微分相关的某些算子是否为单射提供了一个相当实用的判据。

命题 D.2.14。设 E 是一个麦基完备局部凸空间，$D \in \mathcal{D}_{\exp}(\text{一般线性群}(E))$ 且 $A := \int_0^1 e^{tD}\, dt$。那么

$$\ker(e^D - \mathbf{1}) = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} \ker(D^2 + n^2 4\pi^2 \mathbf{1})} \tag{D.13}$$

and

$$\ker(A) = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ker(D^2 + n^2 4\pi^2 \mathbf{1})}. \tag{D.14}$$

若 E 是复的且 D 是复线性的，那么

$$\ker(e^D - \mathbf{1}) = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \ker(D - n2\pi i \mathbf{1})} \tag{D.15}$$

and

$$\ker(A) = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \ker(D - n2\pi i \mathbf{1})}. \tag{D.16}$$

特别地，$e^D = \mathbf{1}$ 以及对每个 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 都有 $\ker(D - n2\pi i) = \{0\}$，从而推出 $D = 0$。

证明。 由于 e^D 是 E的连续自同态，其不动点空间$W := \ker(e^D - \mathbf{1})$是闭的，因此也是麦基完备的。由

$$\sigma\colon \mathbb{T} \times W \to W, \quad (e^{2\pi i t}, w) \mapsto e^{tD}.w$$

我们得到圆群 $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在 W上的光滑作用。由于群 $\mathbb{T}$ 是紧群，彼得–外尔定理 D.2.10 表明， $\mathbb{T}$有限向量张成了 W 的稠密子空间，在该子空间上， $\mathbb{T}$的表示是半单的，也就是说，它是单模的直和。

如果 E 是复的，那么简单的 $\mathbb{T}$-子模由特征向量 $w \in W$ 当且仅当 $Dw = 2\pi i n w$时对应于 $\mathbb{T}$ 的特征 $\chi_n(z) = z^n$ ，因此 $\ker(e^D - \mathbf{1})$ 的描述随即得出。

如果 E 是实的，那么前述论证适用于 E的复化$E_{\mathbb{C}}$ ，由此可得结论：

$$\ker(D - n2\pi i\mathbf{1}) \oplus \ker(D + n2\pi i\mathbf{1}) = \ker(D^2 + n^2 4\pi^2 \mathbf{1}).$$

由命题 D.2.12，我们得到 $DA = e^D - \mathbf{1}$，从而得到 $\ker(A) \subseteq \ker(e^D - \mathbf{1})$。对于 $Dw = 2\pi i n w$ ，我们有

$$Aw = \int_0^1 e^{t2\pi i n} w \, dt = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq 0 \\ w & \text{for } n = 0. \end{cases}$$

由于 A 与圆群 $\mathbb{T}$ 在空间 W上的作用相交换，其核是一个 $\mathbb{T}$-不变的闭子空间，因此拓扑生成于$\mathbb{T}$-特征向量。这意味着当 E 是复数且 D 是复线性时，(D.16)成立。实数情形可由复数情形立即得到，只需考虑 E的复化 $E_{\mathbb{C}}$ 。□

推论 D.2.15。 设 $\mathcal{A}$ 是麦基完备的复连续逆代数，且 $x \in \mathcal{A}$。(1) $\ker(\lambda_{e^x} - \mathbf{1}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \ker(\lambda_x - n2\pi i\mathbf{1})$，其中右侧的和是有限和。(2) 若 $e^x = \mathbf{1}$，则 x 是系数属于 $2\pi i\mathbb{Z}$的两两正交幂等元的线性组合。

证明。 (1) 对每个元素 $x \in \mathcal{A}$，线性作用 $\mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$，$(t,\ a) \mapsto e^{tx}a$是光滑的，其无穷小生成元为 $D = \lambda_x$。因此 $\lambda_x \in \mathcal{D}_{\exp}(\text{一般线性群}(\mathcal{A}))$，由命题 D.2.14 和谱的有界性（命题 10.1.10）可得所述结论。

(2) 是 (1) 的直接推论。 □

例 D.2.16。(a) 设 V 为局部凸空间。我们考虑空间 $E := C^\infty(\mathbb{R},\ V)$，其算子 $(D\varphi)(x) := ix\varphi(x)$ 生成如下光滑的 $\mathbb{R}$-作用

$$(\alpha(t)\varphi)(x) = e^{itx}\varphi(x).$$

算子 A 由 $A\varphi = f\varphi$ 给出，其中 $f(x) := \frac{e^{ix}-1}{ix}$。因此 A 是单射，因为 f 的零点是孤立的，位于点 $2\pi n$、 $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ 处。因此 $\operatorname{im}(A)$ 中的每个函数都在 f 的零集上取零。

反过来，设 $\varphi\colon \mathbb{R} \to V$ 是一个在 f 的零点处为零的光滑函数。设 $x_0 := 2\pi n$ 是这样一个零点。则

$$\frac{\varphi(x_0+h)}{h} = \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} = \int_0^1 \varphi'(x_0+th)\,dt$$

是关于 h 的光滑函数。因此，函数 $x \mapsto \varphi(x)f(x)^{-1}$ 在 $f^{-1}(0)$ 的补集上可延拓为 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 h，且 $fh = \varphi$。我们得到

$$\operatorname{im}(A) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, V)\colon (\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})\ \varphi(2\pi n) = 0\}.$$

(b) 设 $E := \mathcal{O}(\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的整函数空间。在这个空间上，我们考虑乘法算子（$D\varphi$）$(z) := z\varphi(z)$，它生成一个由下式给出的光滑 $\mathbb{R}$-作用

$$(\alpha(t)\varphi)(z) = e^{tz}\varphi(z).$$

于是，对 $f(z) := \frac{e^z-1}{z}$，有 $A\varphi = f\varphi$，且 A 是单射。$\operatorname{im}(A)$ 中的每个函数都在 f 的零集 $2\pi i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 上为零。对于任意一个在 $f^{-1}(0)$ 处为零的整函数 $\varphi \in E$，函数 $f^{-1}\cdot\varphi$ 在 $\mathbb{C}\setminus f^{-1}(0)$ 上是亚纯的，并且在每个点 $2\pi i n$ 处， $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ 都是可去奇点。因此它是全纯的，并且

$$\operatorname{im}(A) = \{\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\colon (\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})\ \varphi(2\pi i n) = 0\}.$$

回顾欧拉乘积展开

$$f(z) = \frac{e^z-1}{z} = e^{z/2}\frac{e^{z/2}-e^{-z/2}}{z} = e^{z/2}\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)$$

在 $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ 中收敛（[Re95，第 1.3] 节）。这种乘积展开在更一般情形下对分析 $A = f(D)$ 也可能颇有意义。特别是，我们总可以考虑表达式

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{D^2}{4\pi^2n^2}\right)\right)\varphi \quad \text{for} \quad \varphi \in E,$$

并询问与有限乘积相对应的序列是否在 E 中收敛。这取决于序列 $(D^{2n}\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ 的行为。

ad-可积李代数

定义 D.2.17。若局部凸李代数 $\mathfrak{g}$ 满足 ad-可积，即 $\operatorname{ad}\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{D}_{\exp}(\text{一般线性群}(\mathfrak{g}))$，则称其为 ad-可积；也就是说，一般线性群$(\mathfrak{g})$ 的指数函数定义在 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的李子代数 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 上。在这种情况下，我们记作

$$e^{\operatorname{ad} x} := \exp(\operatorname{ad} x) \quad \text{for} \quad x \in \mathfrak{g}.$$

如果该积分

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x)(y) := \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x} y \, dt \tag{D.17}$$

对 x 以及 $\mathfrak{g}$ 中的 y 存在（若 $\mathfrak{g}$ 为麦基完备，则属于这种情况），则我们也记作

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x) := \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x} \, dt.$$

注意，若存在李群 G，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并且存在光滑指数映射 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$，则该积分也存在。在后一种情况下，我们有

$$\delta(\exp_G)_x = \kappa_{\mathfrak{g}}(x)$$

对每个 $x \in \mathfrak{g}$ （定理 5.6.22）。

我们将 $\mathfrak{g}$ 的点正则集定义为

$$\operatorname{Reg}_p(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g}\colon \ker \kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \{0\}\},$$

即所有满足以下条件的点的集合： $x \in \mathfrak{g}$ 的点谱不包含 0。

注 D.2.18。若 $\mathfrak{g}$ 是麦基完备的，则命题 D.2.14 意味着

$$\operatorname{Reg}_p(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g}\colon (\forall n \in \mathbb{N})\ \ker((\operatorname{ad} x)^2 + 4\pi^2 n^2 \mathbf{1}) = \{0\}\}.$$

若 Spec_p 表示某个算子的复化的所有特征值的集合，则可得

$$\{x \in \mathfrak{g}\colon \sup|\operatorname{Im}(\operatorname{Spec}_p(\operatorname{ad} x))| < 2\pi\} \subseteq \operatorname{Reg}_p(\mathfrak{g}).$$

因此，对于范数满足 $\|\operatorname{ad} x\| \le \|x\|$ 的巴拿赫–李代数 $\mathfrak{g}$，可得

$$B_{2\pi}(0) := \{x \in \mathfrak{g}\colon \|x\| < 2\pi\} \subseteq \operatorname{Reg}_p(\mathfrak{g}).$$

引理 D.2.19。若 $\psi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是伴随表示-可积李代数之间的一个态射，则

$$\psi \circ e^{\operatorname{ad} x} = e^{\operatorname{ad} \psi(x)} \circ \psi \quad \textit{for each} \quad x \in \mathfrak{g}$$

and

$$\psi \circ \kappa_{\mathfrak{g}}(x) = \kappa_{\mathfrak{h}}(\psi(x)) \circ \psi$$

若 $\kappa_{\mathfrak{g}}(x)$和 $\kappa_{\mathfrak{h}}(\psi(x))$由 (D.17)定义。

~证明。考虑由 $\sim\psi(x,y) = (0,\psi(x))$ 给出的 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}$ 上的连续自同态 ψ。对于一对 $(\alpha,\beta) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{L}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})$，于是有

$$\widetilde{\psi}(\alpha(x),\beta(y)) = (0,\psi(\alpha(x))) \quad \text{and} \quad (\alpha,\beta)\widetilde{\psi}(x,y) = (0,\beta(\psi(x))).$$

~因此，ψ 与（α，β）可交换，当且仅当 $\beta\circ\psi = \psi\circ\alpha$。

现在我们考虑光滑曲线

$$\begin{aligned}\gamma &: \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \times \mathrm{GL}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{GL}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})\\ \gamma(t) &:= (e^{t\,\mathrm{ad}\,x}, e^{t\,\mathrm{ad}\,\psi(x)}) = \exp\big(t(\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,\psi(x))\big).\end{aligned}$$

~那么，$\gamma(0) = (\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}, \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}}$ 与 $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{h}} + \psi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{h})$ 可交换，并且 $\delta^l(\gamma) =$（伴随表示 x，伴随表示 $\psi(x)$）满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}(\mathbf{1}+\widetilde{\psi})(\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,\psi(x)) = (\mathbf{1}+\widetilde{\psi})(\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,\psi(x))(\mathbf{1}+\widetilde{\psi})^{-1}\\ &= (\mathbf{1}+\widetilde{\psi})(\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,\psi(x))(\mathbf{1}-\widetilde{\psi}) = (\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,\psi(x)) + [\widetilde{\psi}, (\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,\psi(x))].\end{aligned}$$

由于 $\psi\circ$ 伴随表示 $x =$（伴随表示 $\psi(x)$）$\circ\psi$ 可由 ψ 是李代数的态射这一事实推出，因此映射 ψ 与（伴随表示 x，伴随表示 $\psi(x)$）可交换，于是得到

$$\mathrm{Ad}(\mathbf{1}+\widetilde{\psi})(\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,\psi(x)) = (\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,\psi(x)).$$

~ ~现在，命题 D.1.15 表明 $\mathbf{1}+\psi$，因此 ψ，与$\gamma(1)$可交换，这就证明了引理的第一条断言。第二条可由积分立即得到。□

注 D.2.20。设 $\mathfrak{g}$ 是一个满足以下条件的 ad-可积分李代数:

$$\kappa_x(y) := \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x} y\,dt$$

在 $\mathfrak{g}$ 上定义了一个光滑的、取值于 $\mathfrak{g}$ 的 1-形式。我们进一步假设函数

$$E\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}), \quad E(x) := e^{\mathrm{ad}\,x}$$

是光滑的（至少在二维子空间上），因此引理 D.1.20 意味着

$$\delta(E)_x(y) = \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}\,x}}\,\mathrm{ad}\,y\,dt = \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x}\circ\mathrm{ad}\,y\circ e^{t\,\mathrm{ad}\,x}\,dt.$$

现在我们证明，κ 始终满足 Maurer–Cartan 方程，在这种情况下，该方程可写为

$$\partial_y\big(\kappa_x(z)\big) - \partial_z\big(\kappa_x(y)\big) = [\kappa_x(z), \kappa_x(y)] \quad \text{for} \quad x,y,z \in \mathfrak{g}, \tag{D.18}$$

其中， ∂_y 是沿 $y \in \mathfrak{g}$方向相对于 x 的偏导数。右端为

$$[\kappa_x(z), \kappa_x(y)] = \int_0^1 \int_0^1 [e^{-t \operatorname{ad} x} z, e^{-s \operatorname{ad} x} y]\, dt\, ds.$$

我们进一步得到

$$\begin{aligned}
&\partial_y \kappa_x(z) = \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x} \delta(E)_{-tx}(-ty) z\, dt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^{-t \operatorname{ad} x} e^{st \operatorname{ad} x} (-t \operatorname{ad} y) e^{-ts \operatorname{ad} x} z\, ds\, dt \\
&= \int_0^1 \int_0^t e^{-t \operatorname{ad} x} e^{s \operatorname{ad} x} (-\operatorname{ad} y) e^{-s \operatorname{ad} x} z\, ds\, dt \\
&= \int_0^1 \int_0^t e^{-(t-s) \operatorname{ad} x} (-\operatorname{ad} y) e^{-s \operatorname{ad} x} z\, ds\, dt \\
&= \int_0^1 \int_0^t e^{-(t-s) \operatorname{ad} x} [e^{-s \operatorname{ad} x} z, y]\, ds\, dt \\
&= \int_0^1 \int_0^t [e^{-t \operatorname{ad} x} z, e^{-(t-s) \operatorname{ad} x} y]\, ds\, dt = \int_0^1 \int_0^t [e^{-t \operatorname{ad} x} z, e^{-s \operatorname{ad} x} y]\, ds\, dt \\
&= \int_{0 \le s \le t \le 1} [e^{-t \operatorname{ad} x} z, e^{-s \operatorname{ad} x} y]\, ds\, dt.
\end{aligned}$$

同样可得

$$\begin{aligned}
-\partial_z \kappa_x(y) &= -\int_{0 \le s \le t \le 1} [e^{-t \operatorname{ad} x} y, e^{-s \operatorname{ad} x} z]\, ds\, dt \\
&= \int_{0 \le t \le s \le 1} [e^{-t \operatorname{ad} x} z, e^{-s \operatorname{ad} x} y]\, ds\, dt.
\end{aligned}$$

由这些计算可得 (D.18)。

自同构与导子

引理 D.2.21（线性商法则）。若 E 是一个局部凸空间，$J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，且 $\gamma\colon J \to$ 一般线性群(E) 光滑，则

$$(\gamma^{-1})'(t) = -\gamma(t)^{-1} \circ \gamma'(t) \circ \gamma(t)^{-1} \quad \textit{for} \quad t \in J.$$

证明。 对关系 $\gamma(t)\gamma(t)^{-1}v = v$ 求导后，对每个 $v \in E$ 均可得

$$\gamma'(t)\gamma(t)^{-1}v + \gamma(t)(\gamma^{-1})'(t)v = 0,$$

断言由此得证。 □

命题 D.2.22。设 $\mathcal{A}$ 是一个局部凸空间，配备连续的双线性乘法 $m_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, $(a,b)\mapsto ab$。我们记

$$\operatorname{der}(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}}):=\{D\in\mathfrak{gl}(\mathcal{A})\colon(\forall a,b\in\mathcal{A})\,D(ab)=D(a)b+aD(b)\}$$

对于 $(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$ 的导子李代数，以及

$$\operatorname{Aut}(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}}):=\{\varphi\in\operatorname{GL}(\mathcal{A})\colon(\forall a,b\in\mathcal{A})\,\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)\}$$

对于其自同构群。于是，对任意区间 $J\subseteq\mathbb{R}$，以下断言成立：

(1) 若 $\gamma\colon J\to GL(\mathcal{A})$ 是一条取值于 $Aut(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$ 的光滑曲线，则 $\delta^l(\gamma)$ 的取值属于 $der(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$。*(2)* 若 $\gamma\colon J\to GL(\mathcal{A})$ 是一条光滑曲线，且 $\delta^l(\gamma)$ 的取值属于 $der(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$，并且对于某个 $t_0\in J$，$\gamma(t_0)\in Aut(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$，则对所有 $t\in J$，$\gamma(t)\in Aut(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$。

证明。令 $a,b\in\mathcal{A}$。对于每个 $t\in J$，于是有

$$\gamma(t)(ab)=\gamma(t)(a)\cdot\gamma(t)(b),$$

并对两边求导，得到

$$\gamma'(t)(ab)=\gamma'(t)(a)\cdot\gamma(t)(b)+\gamma(t)(a)\cdot\gamma'(t)(b),$$

使得

$$\delta^l(\gamma)_t(ab)=\gamma(t)^{-1}\circ\gamma'(t)(ab)=\delta^l(\gamma)_t(a)\cdot b+a\cdot\delta^l(\gamma)_t(b).$$

（2）现在假设 $\delta^l(\gamma)$ 的取值属于 $\operatorname{der}(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$。考虑光滑曲线 $\alpha(t):=\gamma(t)\big(\gamma(t)^{-1}(a)\cdot\gamma(t)^{-1}(b)\big)$，满足 $\alpha(t_0)=ab$。我们需要证明 α 是常数，即 $\alpha'(t)=0$。根据引理 D.2.21，可由下式推出

$$\begin{aligned}\alpha'(t)&=\gamma'(t)\big(\gamma(t)^{-1}(a)\cdot\gamma(t)^{-1}(b)\big)-\gamma(t)\Big(\gamma(t)^{-1}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1}(a)\cdot\gamma(t)^{-1}(b)\Big)\\&\qquad-\gamma(t)\Big(\gamma(t)^{-1}(a)\cdot\gamma(t)^{-1}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1}(b)\Big)\\&=\gamma(t)\Big(\delta^l(\gamma)_t\big(\gamma(t)^{-1}(a)\cdot\gamma(t)^{-1}(b)\big)-\delta^l(\gamma)_t\big(\gamma(t)^{-1}(a)\big)\cdot\gamma(t)^{-1}(b)\\&\qquad-\gamma(t)^{-1}(a)\cdot\delta^l(\gamma)_t\big(\gamma(t)^{-1}(b)\big)\Big)=0.\end{aligned}$$

□

推论 D.2.23。设 $(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$ 是一个局部凸代数，M 是一个连通光滑流形，且 $f\colon M\to$ 一般线性群$(\mathcal{A})$ 是一个光滑映射。那么以下断言成立：

(1) 如果 $f(M)\subseteq Aut(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$，那么 $\delta^l(f)$ 的值属于 $der(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$。（2）如果 $\delta^l(f)$ 的值属于 $der(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$，且对于某个 $m_0\in M$，$f(m_0)\in Aut(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$，那么 $f(M)\subseteq Aut(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})$。

D.2 节习题

习题 D.2.1。设 $m_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是局部凸空间 $\mathcal{A}$ 上的连续双线性映射，并将其视为乘法。我们考虑微分同胚

$$\varphi_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A}^3\to\mathcal{A}^3,\quad \varphi(a,b,c):=(a,b,c+m_{\mathcal{A}}(a,b)).$$

证明：

(1) $\mathrm{Aut}(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})=\{\psi\in\text{一般线性群}(\mathcal{A})\colon\ \varphi_{\mathcal{A}}\circ\psi^{\times 3}=\psi^{\times 3}\circ\varphi_{\mathcal{A}}\}$. (2) 对于 $D\in\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$，令 $D^{\times 3}$ 表示作用在 $\mathcal{A}^3$ 上的线性算子，由 $D^{\times 3}(a,b,c):=(Da,Db,Dc)$ 给出，我们也将其视为线性向量场。则

$$\mathrm{der}(\mathcal{A},m_{\mathcal{A}})=\{D\in\mathfrak{gl}(\mathcal{A})\colon\ \mathrm{Ad}(\varphi_{\mathcal{A}})(D^{\times 3})=D^{\times 3}\}.$$

(3) 利用 (1)、(2) 和命题 D.1.15，给出命题 D.2.22 的另一种证明。

习题 D.2.2. 设 V 是连通李群 G 的光滑模。证明：V 是平凡的 G 模，当且仅当 V 是平凡的 $\mathfrak{g}$-模。提示："光滑"函数 $\rho_V\colon G\to$ 一般线性群(V) 满足 $\delta(\rho_V)=\dot{\rho}_V\circ\kappa_G$. 现在使用唯一性引理。

习题 D.2.3。设 V 是李群 G 的光滑模，且 $W\subseteq V$ 是一个闭子模。证明，G 在商空间 V/W 上的自然作用在 V/W 上诱导出一个光滑的 G-模结构。

提示：先观察到自然映射 $G\times V\to V/W$ 是光滑的，然后利用引理 1.3.21 推出所述结论。

习题 D.2.4。设 $\alpha\colon G\to\mathrm{GL}(E)$ 定义了李群 G 在局部凸空间 E 上的光滑表示，并对每个 $v\in E$ 考虑光滑函数 $\alpha^v\colon G\to E, g\mapsto\alpha(g)v$。

(1) $\alpha^{\alpha(g)v}=\alpha^v\circ\rho_g$ 对于 $v\in E$, $g\in G$。(2) 映射 $\Phi\colon E\to C^\infty(G,E)$ $v\mapsto\alpha^v$ 是连续且单射的。(3) 求值映射 $\mathrm{ev}_e\colon C^\infty(G,E)\to E, f\mapsto f(e)$ 满足 $\mathrm{ev}_e\circ\Phi=\mathrm{id}_E$。(4) Φ 是一个拓扑嵌入。

习题 D.2.5. 设 G 是一个拓扑群，E 是一个赋范空间，且 $\pi\colon G\to\mathrm{Isom}(E)$ 是一个群同态。证明：如果具有连续轨道映射的元素组成的子集 $E_c\subseteq E$ 稠密，那么 G 在 E 上的相应作用是连续的。

习题 D.2.6. 设 E 是一个局部凸空间，且 $\varphi\in\mathrm{Diff}(E)$，其中 $\varphi(0)=0$。证明

$$\psi(t)(x):=\begin{cases}\frac{1}{t}\varphi(tx) & \text{for}\quad t>0\\ T_0(\varphi)x & \text{for}\quad t=0\end{cases}$$

定义了一条光滑曲线 $\psi\colon[0,1]\to\mathrm{Diff}(E)$。这是从 φ 到线性映射的光滑同伦。

D.3 到李群的光滑映射

在本节中，我们将介绍光滑映射的一般框架 $N \to \mathrm{Diff}(M)$ 与我们已在第 6 章讨论过的到李群的光滑映射之间的桥梁。要点是，每个李群 G都通过 $g \mapsto \lambda_g$自然嵌入到 $\mathrm{Diff}(G)$ 中。它的像是右乘 ρ_g, $g \in G$ 的中心化子。

例 D.3.1。设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。那么我们通过 $g \mapsto \lambda_g$ 将 G 嵌入到 $\mathrm{Diff}(G)$ 中，其中 $\lambda_g(x) = gx$ 表示左乘。若 $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，且 $u\colon J \to \mathfrak{g}$ 是一个光滑函数，那么它也定义了一个光滑函数 $\widetilde{u}\colon J \to \mathcal{V}(G)$，其中 $\widetilde{u}(t)(g) := u(t).g$，其取值为右不变向量场。初值问题的每个光滑解 $\gamma\colon J \to G$

$$\gamma'(t) = u(t).\gamma(t), \quad \gamma(t_0) = \gamma_0 \tag{D.19}$$

定义了初值问题的一个光滑解 $\eta\colon J \to \mathrm{Diff}(G)$ $t \mapsto \lambda_{\gamma(t)}$

$$\eta'(t) = \widetilde{u}(t).\eta(t), \quad \eta(t_0) = \lambda_{\gamma_0}. \tag{D.20}$$

因此，命题 D.1.11 表明解具有唯一性。

反过来，假设 $\eta\colon J \to \mathrm{Diff}(G)$ 满足 (D.20)。令 $g \in G$，并将对应的右乘映射记为 $\rho_g(x) := xg$。于是 $\eta(t_0) = \lambda_{\gamma_0}$ 与每个 ρ_g 可交换，而且每个向量场 $\widetilde{u}(t)$ 都是右不变的，因此命题 D.1.15 表明，每个 $\eta(t)$ 都与每个 ρ_g 可交换。因此，对于满足 (D.19) 的映射 $\gamma\colon J \to G, t \mapsto \eta(g)(e)$，等式 $\eta(t) = \lambda_{\gamma(t)}$ 成立。这证明了 (D.19) 在 G 中有解，当且仅当相应的问题 (D.20) 在 $\mathrm{Diff}(G)$ 中有解。

定义 D.3.2。设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。我们用 gv 表示 $g \in G$ 对切向量 $v \in TG$ 的作用。我们将 $\mathcal{D}_{\exp} := \mathcal{D}_{\exp}(G) \subseteq \mathfrak{g}$ 定义为所有满足以下初值问题的元素 $x \in \mathbf{L}(G)$ 的集合

$$\gamma'(t) = \gamma(t)x, \quad \gamma(0) = e \tag{D.21}$$

在 $\mathbb{R}$ 上有光滑解。根据唯一性引理 D.1.10，只要解存在，它就是唯一的。我们用 $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to G$ 表示相应的积分曲线。由 (D.21) 可知，曲线 γ_x 是光滑的。映射

$$\exp_G\colon \mathcal{D}_{\exp}(G) \to G, \quad x \mapsto \gamma_x(1)$$

称为 G 的指数函数。

引理 D.3.3。 $\mathcal{D}_{\exp}(G)$ 的指数函数定义域具有以下性质：

(1) $0 \in \mathcal{D}_{\exp}(G)$。*(2)* $\mathbb{R} \cdot \mathcal{D}_{\exp}(G) = \mathcal{D}_{\exp}(G)$。*(3)* 对于 $x \in \mathcal{D}_{\exp}(G)$，我们有 $\exp_G((t+s)x) = \exp_G(tx)\exp_G(sx)$，其中 $s, t \in \mathbb{R}$，也就是说，γ_x: $\mathbb{R} \to G$ 是李群同态。*(4)* 对所有 $g \in G$，$\mathrm{Ad}(g)\mathcal{D}_{\exp}(G) = \mathcal{D}_{\exp}(G)$，并且

$$\exp_G \circ \mathrm{Ad}(g) = c_g \circ \exp_G, \qquad where \qquad c_g(h) = ghg^{-1}.$$

(5) 若 x，$y \in \mathcal{D}_{\exp}(G)$ 可交换，则(a) $x + y \in \mathcal{D}_{\exp}(G)$。
(b) $\exp_G(x + y) = \exp_G(x)\exp_G(y) = \exp_G(y)\exp_G(x)$。
(c) $\mathrm{Ad}(\exp_G(x))y = y$。(6) 若 $x \in \mathcal{D}_{\exp}(G)$，则 $\mathrm{ad}\, x \in \mathcal{D}_{\exp}(\mathrm{GL}(\mathfrak{g}))$。

证明。 根据例 D.3.1，(1)-(5) 立即由引理 D.1.19 中关于 $\mathrm{Diff}(G)$ 的相应断言得出。

(6) 由于 G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用是光滑的，$\alpha(t) := \mathrm{Ad}(\exp_G(tx))$ 定义了 $\mathfrak{g}$ 上的一个光滑 $\mathbb{R}$-作用。为计算其无穷小生成元，我们将作用在 $\mathfrak{g}$ 上的作用转移到左不变向量场空间。由 $\alpha(t) = \mathbf{L}(c_{\exp_G(tx)})$ 和习题 D.3.2，可得对于 $y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}(\alpha(t)y)_l &= \mathrm{Ad}(c_{\exp_G(tx)})y_l = \mathrm{Ad}(\rho_{\exp_G(-tx)})\,\mathrm{Ad}(\lambda_{\exp_G(tx)})y_l \\ &= \mathrm{Ad}(\rho_{\exp_G(-tx)})y_l.\end{aligned}$$

由于 $\rho_{\exp_G(-tx)}$ 描述了由左不变向量场 $-x_l$ 在 G 上生成的流（习题 D.3.1），我们可以使用引理 D.1.14 得到

$$\alpha'(0)y = [y_l, -x_l](e) = [x, y],$$

即，$\alpha'(0) =$ 伴随表示 x。 □

引理 D.3.4. 如果 $\varphi\colon G \to H$ 是李群态射，那么

$$\mathbf{L}(\varphi)(\mathcal{D}_{\exp}(G)) \subseteq \mathcal{D}_{\exp}(H) \qquad and \qquad \varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ \mathbf{L}(\varphi).$$

证明. 如果 $x \in \mathbf{L}(G)$，那么 $\varphi \circ \gamma_x\colon \mathbb{R} \to H$ 是光滑单参数子群，且 $(\varphi \circ \gamma_x)'(0) = \mathbf{L}(\varphi)x$。因此

$$\mathbf{L}(\varphi)x \in \mathcal{D}_{\exp}(H) \quad \text{and} \quad \exp_H \circ \mathbf{L}(\varphi) = \varphi \circ \exp_G . \qquad \square$$

引理 D.3.5. 如果 G 是连通李群，且 $\mathbf{L}(G) = \mathfrak{g}$，并且 $q_G\colon G \to G$ 是覆盖态射，满足 $\mathbf{L}(q_G) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$，那么

$$\mathcal{D}_{\exp}(G) = \mathcal{D}_{\exp}(\widetilde{G}) \qquad and \qquad \exp_{\widetilde{G}} = \exp_G \circ q_G.$$

如果 $\mathcal{D}_{\exp}(G) = \mathfrak{g}$ 且 $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ 是光滑的，那么指数函数~指数函数 $\exp_{\widetilde{G}}\colon \mathfrak{g} \to G$也同样光滑。

~证明。引理 D.3.4 表明 $\mathcal{D}_{\exp}(G) \subseteq \mathcal{D}_{\exp}(G)$ 和 $\exp_G = q_G \circ \exp_{\widetilde{G}}$。

~为证明 $\mathcal{D}_{\exp}(G) \subseteq \mathcal{D}_{\exp}(G)$，令 $x \in \mathfrak{g}$ 和 $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to G$ 为满足 $\gamma_x'(0) = x$ 的光滑单参数子群。由于 $\mathbb{R}$ 是单连通的，存在唯一的连续提升 $\widetilde{\gamma}_x\colon \mathbb{R} \to G$，满足 $\widetilde{\gamma}_x(0) = e$ 且 $q_G \circ \widetilde{\gamma}_x = \gamma_x$。由于 q_G 是局部微分同胚，曲线 $\widetilde{\gamma}_x$ 是光滑的，并且有

$$T_{\widetilde{\gamma}_x(t)}(q_G)\widetilde{\gamma}_x'(t) = \gamma_x'(t) = \gamma_x(t)x = T_{\widetilde{\gamma}_x(t)}(q_G)\widetilde{\gamma}_x(t)x,$$

~由此得到 $\widetilde{\gamma}_x'(t) = \widetilde{\gamma}_x(t)x$，进而得到 $x \in \mathcal{D}_{\exp}(G)$。

现在我们假设 $\mathcal{D}_{\exp}(G) = \mathfrak{g}$，并且 $\exp_G$ 是光滑的。令 $V \subseteq G$ 为一个开连通的 e-邻域，使得对于离散集 J，$q_G^{-1}(V) \cong V \times J$ 成立，并令 $\widetilde{V} \subseteq \widetilde{G}$ 表示 $q_G^{-1}(V)$ 的单位连通分支。~于是 $q_G|_{\widetilde{V}}\colon V \to V$ 是一个微分同胚。现在令 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个凸的 0 邻域，满足 $\exp_G(U) \subseteq V$。对于 $x \in U$，我们有

$$\exp_{\widetilde{G}}(tx) \in q_G^{-1}(V)$$

对于 $0 \leq t \leq 1$，由于曲线 $t \mapsto \exp_{\widetilde{G}}(tx)$ 是连续的，因此可推出 ~$\exp_{\widetilde{G}}(x) \in V$，从而 ~$\exp_{\widetilde{G}}(U) \subseteq V$。此外

$$\exp_{\widetilde{G}}|_U = (q_G|_{\widetilde{V}})^{-1} \circ \exp_G|_U,$$

这意味着 $\exp_{\widetilde{G}}|_U$ 是光滑的。现在，由于对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\exp_{\widetilde{G}}(x) = \exp_{\widetilde{G}}(\frac{x}{n})^n$，因此 $\exp_{\widetilde{G}}$ 的光滑性随之得到。□

D.3 节练习

习题 D.3.1。设 G 是一个李群，且 $x \in \mathbf{L}(G)$。则相应的左不变向量场 $x_l \in \mathcal{V}(G)$（其中 $x_l(e) = x$）是完备的，当且仅当 $x \in \mathcal{D}_{\exp}(G)$。在此情形下，相应的光滑 $\mathbb{R}$-作用在 G 上由 $\sigma(t, g) := g\exp_G(tx) = \rho_{\exp_G(tx)}(g)$ 给出。

习题 D.3.2. 设 G 是一个李群，$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，且 $x \in \mathbf{L}(G)$。那么 $\mathrm{Ad}(\varphi)x_l = T(\varphi) \circ x_l \circ \varphi^{-1} = (\mathbf{L}(\varphi)x)_l$。

D.4 逆映射的自动光滑性

我们将光滑映射 $\varphi\colon N \to \mathrm{Diff}(M)$ 定义为满足以下两个映射

$$\widetilde{\varphi}_j\colon N \times M \to M, \qquad \widetilde{\varphi}_1(n,m) = \varphi(n)(m), \quad \widetilde{\varphi}_2(n,m) = \varphi(n)^{-1}(m)$$

是光滑的。在许多情况下，验证 $\widetilde{\varphi}_1$ 的光滑性要容易得多，而验证第二个映射的光滑性通常更困难。本节将介绍若干工具，用于证明 $\widetilde{\varphi}_2$ 的光滑性。

特别是，我们将看到，在线性情形下，即如果 $M = E$ 是局部凸空间且 $\varphi($ $N) \subseteq$ 一般线性群(E)，那么 $\widetilde{\varphi}_1$ 的光滑性和 $\widetilde{\varphi}_2$ 的连续性已经足以推出 $\widetilde{\varphi}_2$ 的光滑性。在非线性情形下，有必要假设 f_2 是 C^1；而如果 M 是巴拿赫空间，则完全不需要对 f_2 作任何假设。

线性情形

定理 D.4.1。设 E 是一个局部凸空间， N 是一个光滑流形，且 $k \in \mathbb{N}$。此外，设 $f\colon \ N \to$ 一般线性群(E) 是一个映射，满足

$$\widetilde{f}_1 = f^\wedge \colon N \times E \to E, \quad (m, v) \mapsto f(m)v$$

是 C^k 且

$$\widetilde{f}_2 \colon N \times E \to E, \quad (m, v) \mapsto f(m)^{-1}v$$

是连续的。那么映射 $\widetilde{f}_2$ 也是 C^k。

证明。 不妨假设 N 是局部凸空间 X的一个开子集。我们用归纳法论证。对于 $k = 1$，有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_2((x, v) + s(h_1, h_2)) - \widetilde{f}_2(x, v) \\
&= f(x + sh_1)^{-1}(v + sh_2) - f(x)^{-1}v \\
&= sf(x + sh_1)^{-1}h_2 + (f(x + sh_1)^{-1} - f(x)^{-1})v \\
&= s\widetilde{f}_2(x + sh_1, h_2) + f(x)^{-1}\big(f(x) - f(x + sh_1)\big)\widetilde{f}_2(x + sh_1, v) \\
&= s\widetilde{f}_2(x + sh_1, h_2) \\
&\quad + f(x)^{-1}\Big(\widetilde{f}_1(x, \widetilde{f}_2(x + sh_1, v) - \widetilde{f}_1\big(x + sh_1, \widetilde{f}_2(x + sh_1, v)\big)\Big) \\
&= s\widetilde{f}_2(x + sh_1, h_2) + sf(x)^{-1}\widetilde{f}_1^{[1]}\big((x, \widetilde{f}_2(x + sh_1, v)), (h_1, 0), s\big)
\end{aligned}$$

（符号记法见 (1.16)）。两边除以 s，得到

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{f}_2)^{[1]}((x, v), (h_1, h_2), s) \\
&= \widetilde{f}_2(x + sh_1, h_2) + f(x)^{-1}\widetilde{f}_1^{[1]}((x, \widetilde{f}_2(x + sh_1, v), (h_1, 0), s) \\
&= \widetilde{f}_2(x + sh_1, h_2) + \widetilde{f}_2\Big(x, \widetilde{f}_1^{[1]}\big((x, \widetilde{f}_2(x + sh_1, v)), (h_1, 0), s\big)\Big),
\end{aligned} \tag{D.22}$$

根据我们的假设，这是一个连续映射。由此可得， f_2是 C^1。对于 $s = 0$，我们得到

$$T_{(x,v)}(\widetilde{f}_2)(h_1, h_2) = f(x)^{-1}h_2 - f(x)^{-1}T_{(x,f(x)^{-1}v)}(\widetilde{f}_1)(h_1, 0). \tag{D.23}$$

结合方程 (D.23) 与链式法则，我们可以迭代这一论证，从而得到：若 $\widetilde{f}_1$ 是 C^k，则 $\widetilde{f}_2$ 是 C^k。□

鉴于前述定理，要验证映射 $\sim f\colon N \to$ 一般线性群(E) 是光滑的，关键在于验证映射 f_2 是连续的，而这也可能很困难。以下观察说明了可以简化这一验证的情形。

命题 D.4.2。设 M 是一个光滑流形，E 是一个巴拿赫空间，且 $f\colon M \to \mathrm{GL}(E)$ 是一个映射。那么以下条件等价：

(1) f 是到巴拿赫–李群 $\mathrm{GL}(E)$ 中的光滑映射。 *(2)* $f\colon M \times E \to E \times E$，$(m, v) \mapsto (f(m)v, f(m)^{-1}v)$ 是光滑的。 *(3)* $f_1\colon M \times E \to E$，$(m, v) \mapsto f(m)v$ 是光滑的。

证明。(1) $\Rightarrow$(2) $\Rightarrow$ (3) 都是平凡的。

(3) $\Rightarrow$ (1)：不失一般性，我们可以假设 M 是一个局部凸空间 F 的开子集。假设映射 f_1 是光滑的。那么 [Gl06a，引理 2.2] 推出该映射

$$d\widetilde{f}_1\colon M \times E \to \mathcal{L}(F \times E, E)_b$$

是光滑的，其中 $\mathcal{L}(F \times E, E)_b$ 是连续线性映射的集合 $F \times E \to E$，赋予在有界子集上一致收敛的拓扑。由于我们有一个自然嵌入 $\mathcal{L}(E) \hookrightarrow \mathcal{L}(F \times E, E)$，其像为在 $F \times \{0\}$ 上为零的线性映射，因此映射

$$f\colon M \to \mathcal{L}(E), \quad f(m)v = d\widetilde{f}_1(m, 0)(0, v)$$

是光滑的。由于其取值落在开子集 $\mathrm{GL}(E)$ 中，(1) 得证。 □

引理 D.4.3。假设 $E = \varprojlim_{\leftarrow} E_j$ 是巴拿赫空间 E_j 的射影极限，并且 $f\colon M \to \mathrm{GL}(E)$ 是一个映射，具有如下性质：对于每个 j，算子 $f(m)$ 在 E_j 上诱导一个可逆连续线性算子$f_j(m)$。如果所有映射 $f_j\colon M \to \mathrm{GL}(E_j)$ 都是光滑的，那么 f 也是光滑的。

证明。令 $q_j\colon E \to E_j$ 表示典范投影。我们的假设意味着映射 $q = (q_j)_{j \in J}\colon E \to \prod_{j \in J} E_j$ 是一个拓扑嵌入。因此，映射 f 光滑，当且仅当它的所有分量

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_j\colon M \times E &\to E_j \times E_j,\\ (m, v) &\mapsto (q_j(f(m)v), q_j(f(m)^{-1}v)) = (f_j(m)q_j(v), f_j(m)^{-1}q_j(v))\end{aligned}$$

是光滑的。这些映射可分解为经过以下映射：

$$M \times E_j \to E_j \times E_j, \quad (m, v_j) \mapsto (f_j(m)v_j, f_j(m)^{-1}v_j)$$

这些映射是光滑的，因为所有映射 $f_j\colon M \to \mathrm{GL}(E_j)$ 都是光滑的（命题 D.4.2）。因此 f 是光滑的。 □

群中求逆的光滑性

设 G 是一个具有流形结构的群，且乘法映射 $m_G\colon G\times G\to G$ 是光滑的。关于求逆映射 η_G 的光滑性，可以得出什么结论？较弱的假设是否也能推出这一点？如果 G 是巴拿赫流形，那么由反函数定理应用于映射可知，η_G 的光滑性成立

$$G\times G\to G\times G,\quad (x,y)\mapsto (x,xy).$$

另一方面，存在一些局部凸代数 $\mathcal{A}$ 是域，因此其单位群 $\mathcal{A}^\times=\mathcal{A}\setminus\{0\}$ 是开集，但求逆映射并不连续。于是 $\mathcal{A}^\times$ 具有自然流形结构，$\mathcal{A}^\times$ 上的群乘法是光滑的，但求逆并不连续。

因此，我们不能指望 η_G 自动具有光滑性。

命题 D.4.4。设 G 是一个具有流形结构的群，且乘法映射 $m_G\colon G\times G\to G$ 是光滑的。若 η_G 是 C^1，则它是光滑的。若 G 是巴拿赫流形，则 η_G 总是光滑的。

证明。设 $T(m_G)\colon TG\times TG\to TG$ 表示切丛上的乘法映射，它使切丛成为一个具有光滑乘法的幺半群（命题 5.2.2）。由于假设 η_G 是 C^1，我们有一个连续的切映射 $T(\eta_G)\colon TG\to TG$，而通常的论证（命题 5.2.2）表明，TG 实际上是一个具有连续求逆映射 $\eta_{TG}=T(\eta_G)$ 的群。将 G 与 TG 中的零截面（它是一个子群）相对应，对关系 $\eta_G(g)g=e$ 求导，得到公式

$$T_g(\eta_G)v=-g^{-1}vg^{-1},$$

由此得到

$$T(\eta_G)v=-\eta_G(q_{TG}(v))\cdot v\cdot\eta_G(q_{TG}(v)),$$

若 $q_{TG}\colon TG\to G$ 表示商映射。因此，TG 中乘法的光滑性以及 η_G 是 C^1 这一假设意味着 $T(\eta_G)$ 是 C^1，也就是说，η_G 是 C^2。重复这一论证可知，η_G 是光滑的。

此外，若 G 是巴拿赫流形，则反函数定理适用于映射

$$\varphi\colon G\times G\to G\times G,\quad (x,y)\mapsto (x,xy)$$

并证明 $\varphi^{-1}\colon G\times G\to G\times G$，$(x,\ y)\mapsto(x,\ xy^{-1})$ 是光滑的，这意味着 η_G 是光滑的。□

微分同胚群中求逆的光滑性

在线性情形和群情形之后，现在我们转向映射到微分同胚群的一般情形。

我们先给出一个引理，将定理 D.4.1 推广到非线性情形。对于两个局部凸空间 E和 W，我们用 Iso(E, W) 表示拓扑同构 $E \to W$的集合。

引理 D.4.5。设 N和 M为光滑流形，$g_j\colon N \to M$, $j = 1, 2$，两个 C^k 映射，

$$\mathbb{E}_j := g_j^* T(M) := \{(n, v) \in N \times TM \colon v \in T_{g_j(n)}(M)\}$$

TM 到 N 的切丛的相应拉回（它们是C^k-流形），$f(n) \in \mathrm{Iso}(T_{g_1(n)}(M)$ $T_{g_2(n)}(M))$使得映射

$$F_1\colon \mathbb{E}_1 \to TM, \quad (\mathbb{E}_1)_n \ni v \mapsto f(n)(v)$$

是 C^k 且映射

$$F_2\colon \mathbb{E}_2 \to TM, \quad (\mathbb{E}_2)_n \ni v \mapsto f(n)^{-1}(v)$$

是连续的。那么 F_2 是 C^k。

证明。设 X 是 N 的模型空间，Y 是 M的模型空间。取$n_0 \in N$。将 N 替换为 n_0 的一个小开邻域，并将 M 替换为 $g_1(n_0)$ 和 $g_2(n_0)$的开邻域之并后，不妨假设 N 是 X 的开子集，且 M 是 Y的开子集。

于是我们有自然同构 $\mathbb{E}_j \cong N \times Y$，在此识别下，$f$ 是一个映射 $N \to \mathrm{GL}(Y)$，而映射 F_j 由下式给出

$$F_1(n, v) = f(n)v \quad \text{and} \quad F_2(n, v) = f(n)^{-1}v.$$

因此，定理 D.4.1 表明，如果 F_1 是 C^k 且 F_2 是连续的，那么 F_2 是 C^k。□

定理 D.4.6。设 M和 N是流形，且 $f\colon N \to$ 微分同胚群(M) 是一个映射 $\widetilde{\ }$，满足 f_1 是光滑的，且 f_2 是 C^1。那么 f_2 是光滑的。

证明。我们的假设意味着切映射

$$T(\widetilde{f}_2)\colon TN \times TM \to TM$$

存在且连续。证明的关键在于说明，对于 $k \in \mathbb{N}_0$，映射 $T(\widetilde{f}_2)$ 是 C^{k+1}，只要它是 C^k。根据假设，它是 C^0，且 $\widetilde{f}_2$ 是C^1，因此我们可以使用归纳法进行论证。我们假设 $\widetilde{f}_2$ 是 C^{k+1}，于是 $T(\widetilde{f}_2)$ 是 C^k。

鉴于

$$T_{(n,m)}(\widetilde{f}_2)(v,w) = T_{(n,m)}(\widetilde{f}_2)(v,0) + T_{(n,m)}(\widetilde{f}_2)(0,w),$$

$T(f_2)$ 是两个可分别处理的映射的纤维逐点和。我们先从第二个直和项开始。

$$T_{(n,m)}(\widetilde{f}_2)(0,w) = T_m(f(n)^{-1})w = T_{\widetilde{f}_2(n,m)}(f(n))^{-1}w. \tag{D.24}$$

借助这两个 C^{k+1}-映射

$$g_1 := \widetilde{f}_2 \colon N \times M \to M \quad \text{and} \quad g_2 \colon N \times M \to M,\ (n,m) \mapsto m,$$

对每一对 $(n,\ m)$，我们得到一个拓扑同构

$$F(n,m) := T_{\widetilde{f}_2(n,m)}(f(n)) \colon T_{g_1(n,m)}(M) \to T_{g_2(n,m)}(M) = T_m(M),$$

而我们的假设意味着相应映射

$$g_1^* T(M) \to T(M), \quad (n,m,v) \mapsto F(n,m)v$$

是 C^{k+1}。因此，前述引理 D.4.5 意味着映射

$$g_2^* T(M) \to T(M), \quad (n,m,v) \mapsto F(n,m)^{-1}v$$

是 C^{k+1}，这意味着 (D.24) 中的映射是 C^{k+1}。

现在我们转向第一个直和项。

$$T_{(n,m)}(\widetilde{f}_2)(v,0) = \big(T_n(f^{-1})v\big)(m),$$

其中我们将 T(微分同胚群(M)) 等同于 $C^\infty(M, TM)$ 的一个子集。对关系 $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_M$ 逐点求导可得

$$T_n(f^{-1})v = -T(f(n)^{-1}) \circ T_n(f)(v) \circ f(n)^{-1} \in C^\infty(M, TM)$$

（商法则）。由前一段我们已经知道，映射 $(n,m,w) \mapsto T_m(f(n)^{-1})w$ 是 C^{k+1}，因此该断言可由如下事实推出：映射

$$\begin{aligned} TN \times M &\to TM, \\ T_p(N) \times M \ni (v,m) &\mapsto T_n(f)(v)(f(n)^{-1}(m)) = T_n(f)(v)(\widetilde{f}_2(n,m)) \\ &= T_{(n,\widetilde{f}_2(n,m))}(\widetilde{f}_1)(v,0) \end{aligned}$$

是 C^{k+1}，这由我们的假设和链式法则可得。

我们得出结论：$T(\widetilde{f}_2)$ 对每个 k 都是 C^k，这意味着 $\widetilde{f}_2$ 是光滑的。□

定理 D.4.7. 设 M 是一个巴拿赫流形，N 是一个局部凸流形，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 且 $f\colon N \to \mathrm{Diff}(M)$ 是一个映射，且 f_1 光滑。那么 f_2 也光滑。

证明。 不失一般性，我们可以假设 N 是某个局部凸空间 E的开子集。令 F 表示 M的模型空间，它是一个巴拿赫空间。

我们固定 $p_0 \in N$、 $m_0 \in M$，以及 U （ p_0的开邻域）、 V（ m_0 的开邻域）和 V'（ m_0'的开邻域）：$= f$（p_0）（m_0），使得 f_1（$U \times V$）$\subseteq V'$，并且存在 M的坐标图（φ、V）和（φ'、V'）。

Now

$$\Phi\colon = \varphi' \circ \widetilde{f_1} \circ (\mathrm{id}_U \times \varphi^{-1})\colon U \times \varphi(V) \to \varphi'(V')$$

是从 $E \times F$的一个开子集到 F的光滑映射，并且映射 Φ_{p_0}： φ（V）$\to \varphi'$（V'） $x \mapsto \Phi$（p_0、x）的微分在每个 $x \in \varphi$（V）处都是可逆的，因为 $\Phi_{p_0} = \varphi' \circ f$（$p_0$）$\circ \varphi^{-1}$是到 F的一个开子集上的微分同胚。根据 [Gl04b，定理 2.3(i)(c)]，，存在 p_0的开邻域 U_1 和 m_0的开邻域 V_1，使得 W：$= \bigcup_{p_1 \in U_1} \{p_1\} \times \Phi_{p_1}$（$\varphi$（$V_1$））是 $E \times F$的一个开子集，映射 $U_1 \times \varphi$（V_1）$\to W$，（p_1，x）$\mapsto$（p_1，Φ_{p_1}（x））是一个微分同胚，并且映射

$$W \to \varphi(V_1), \quad (p_1, v) \mapsto \Phi_{p_1}^{-1}(v)$$

$\widetilde{}$是光滑的。因此，映射 $f_2(p, x) = \varphi^{-1}(\Phi_p^{-1}(\varphi'(x)))$ 在 (p_0, m_0') 的某个邻域内是光滑的；又由于 p_0 和 m_0 是任意的，故 f_2 是光滑的。□

推论 D.4.8.设 M 是一个巴拿赫流形， G 是一个李群，并设$\sigma\colon G \to$微分同胚群(M)是一个同态。那么，映射 σ是光滑的，当且仅当 G 在 M 上的相应作用是光滑的。

证明。 由于该作用就是映射 $\widetilde{\sigma}_1$，结论由定理 D.4.7 得出。 □

我们以如下观察结束本节：此处讨论的一般光滑性概念，在目标群具有自然李群结构的所有情形下，都与自然的光滑性概念一致。

推论 D.4.9.设 M 是一个紧致光滑流形， N 是任意一个光滑流形。那么，映射 $f\colon N \to$微分同胚群(M) 关于微分同胚群(M) 上的李群结构是光滑的，当且仅当它按上文$\widetilde{}$定义的意义是光滑的；换言之，当且仅当 f_1 是光滑的。

证明。 对于 Diff(M) 上的李群结构，求值映射

$$\mathrm{ev}\colon \mathrm{Diff}(M) \times M \to M, \quad (\varphi, m) \mapsto \varphi(m)$$

根据定理 4.2.2(c)，这是光滑的，因为 Diff(M) 是C^∞(M， M)的开子流形。若 f关于 Diff(M) 上的李群结构是光滑的，$\widetilde{}$那么求值映射的光滑性意味着 f_1 是光滑的，并且$\widetilde{}$定理 D.4.7 意味着 f 是光滑的。

反过来，若$f = f^\wedge$是$\widetilde{}$一个光滑映射，那么定理 4.2.2(a)意味着 f是一个映射，取值于李群 Diff(M) $\subseteq C^\infty$(M， M)。□

由命题 D.4.2 可得：

命题 D.4.10。若 E 是巴拿赫空间，则 一般线性群(E) 具有自然李群结构，并且映射 $f\colon\ E \to$ 一般线性群(E) 作为映射到~李群 一般线性群(E) 是光滑的，当且仅当 f_1 是光滑的。

证明。 由于 E 是巴拿赫空间，群 GL(E)具有自然的李群结构。由命题 D.4.2 可知， f 作为映射到李群 GL(E)的映射光滑，当且仅当 f_1 光滑。□

命题 D.4.11。 若 G 是李群，则 $f\colon\ M \to G$ 光滑，当且仅当映射 φ: $M \to$ 微分同胚群(G) $m \mapsto \lambda_{f(m)}$ 光滑。
证明。 映射 $\varphi\colon\ M \to$ 微分同胚群(G) $m \mapsto \lambda_{f(m)}$ 光滑，当且仅当

$$\widetilde{\varphi}\colon M \times G \to G \times G, \quad (m, g) \mapsto (f(m)g, f(m)^{-1}g)$$

光滑。由于 G 是李群，这等价于 f的光滑性。 □

开放问题

前面的结果解决了下述问题的一个特殊情形。若能解决这个问题，将对验证映射到微分同胚群中的映射的光滑性极有价值。

问题 D.4.12。设 N 和 M 是光滑流形。再设$\varphi\colon\ N \to$Diff(M)是一个映射，其中 $\widetilde{\varphi}_1$是光滑的，而 $\widetilde{\varphi}_2$是连续的。这是否意味着 $\widetilde{\varphi}_2$ 是光滑的?

问题 D.4.13。设 G 是一个具有群结构的光滑流形，且乘法映射 m_G 是光滑的。求逆映射的连续性 η_G 是否意味着它是 C^1 ，因而是光滑的? 如果 G 是巴拿赫空间，那么根据反函数定理， η_G 的光滑性无需假设其连续性便可得出。因此，若能找到某个乘法光滑的 Fr´echet 群，其中求逆映射连续但不光滑，将会很有意思。请注意，对于连续逆代数的单位群，这种病态现象不会发生；在这些群中，求逆映射的连续性蕴含其光滑性（推论 1.3.8）。

D.5 向量场的局部指数李代数

R. Palais 的可积性定理 [Pa57]断言，有限维光滑流形M 上任意由完备向量场组成的有限维李代数 $\mathfrak{g}$都可以积分为一个李群 G 在 M上的整体作用。本节旨在将这一结果推广到局部凸流形上的完备向量场的局部指数李代数（参见 [AbNe08]）。

设 M 是一个局部凸流形， $\mathfrak{g}$ 是一个局部指数李代数，且 $\alpha\colon\ \mathfrak{g} \to \mathcal{V}$($M$) 是一个李代数态射。我们将采用以下假设:

(A1) 每个向量场 $\alpha(x)$、 $x \in \mathfrak{g}$ 都是完备的。(A2) Exp_α：$\mathfrak{g} \to$ 微分同胚群(M) $x \mapsto \mathrm{Exp}(-\alpha(x))$ 是光滑的。

注意，(A2) 尤其意味着线性映射 $-T_0(\mathrm{Exp}_\alpha) = \alpha$： $\mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$ 是连续的。

如果 M 是无限维的，那么我们无法期待 $\mathrm{Diff}(M)$ 在 $\mathcal{V}(M)$ 上的作用以任何意义而言是光滑的。更糟的是，对于光滑曲线 φ： $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$，我们不知道相应映射是否

$$\mathbb{R} \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M), \quad (t, X) \mapsto \mathrm{Ad}(\varphi(t))X$$

光滑。因此，无穷维流形上的微分同胚单参数群必须格外谨慎地处理。不过，在我们的语境中，以下引理给出了我们所需的结论。

引理 D.5.1. 对于每个 $x \in \mathfrak{g}$，我们在 $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mathcal{V}(M))$ 中有：

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}_\alpha(x)) \circ \alpha = \alpha \circ e^{\mathrm{ad}\, x}. \tag{D.25}$$

证明。 我们回顾一下，根据 (A2)， $\varphi(t) := \exp(t\alpha(x)) = \mathrm{Exp}_\alpha(-tx)$ 是 $\mathrm{Diff}(M)$ 中的一条光滑曲线，而 $\beta(t) := \alpha(e^{t\,\text{伴随表示}\,x} y)$ 是 $\mathcal{V}(M)$ 中的一条光滑曲线，因此 $\psi(t) := \mathrm{Ad}(\varphi(t))\beta(t)$ 是光滑的，且

$$\psi'(t) = \mathrm{Ad}(\varphi(t))([\beta(t), \delta(\varphi)_t] + \beta'(t)) = \mathrm{Ad}(\varphi(t))\big([\beta(t), \alpha(x)] + \beta'(t)\big)$$

（引理 D.1.14）。由于我们的假设蕴含 α 是连续线性映射，链式法则给出

$$\beta'(t) = \alpha([x, e^{t\,\mathrm{ad}\, x} y]) = [\alpha(x), \alpha(e^{t\,\mathrm{ad}\, x} y)] = [\alpha(x), \beta(t)],$$

这表明 $\psi' = 0$，因此 ψ 是常数，从而得到

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}_\alpha(-x))\alpha(e^{\mathrm{ad}\, x} y) = \mathrm{Ad}(\exp(\alpha(x)))\alpha(e^{\mathrm{ad}\, x} y) = \psi(1) = \psi(0) = \alpha(y),$$

因此 (D.25) 成立。 □

对于下面的命题，我们回顾第 8.2 节中的指数局部李群概念。

命题 D.5.2。设 $G \subseteq \mathfrak{g}$ 是一个指数局部李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且 $D_G^0 \subseteq D_G$ 是 (0,0) 的连通分支。那么，对所有 $(x, y) \in D_G^0$，有：

$$\mathrm{Exp}_\alpha(x * y) = \mathrm{Exp}_\alpha(y) \circ \mathrm{Exp}_\alpha(x).$$

证明。 我们有两个光滑函数

$$f_1 : D_G \to \mathrm{Diff}(M), (x, y) \mapsto \mathrm{Exp}_\alpha(x * y),$$
$$f_2 : D_G \to \mathrm{Diff}(M), (x, y) \mapsto \mathrm{Exp}_\alpha(x)\,\mathrm{Exp}_\alpha(y)$$

满足 $f_1(0,0) = \mathrm{id}_M = f_2(0,0)$。由于 D_G^0 是连通的，根据唯一性引理，只需证明 $\delta^l(f_1) = \delta^l(f_2)$。我们利用引理 D.1.20 和 D.5.1 得到

$$\begin{aligned}\delta^l(\mathrm{Exp}_\alpha)_x y &= \int_0^1 \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}_\alpha(-tx))(-\alpha(y))\,dt = -\alpha\Big(\int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ad}\,x} y\,dt\Big)\\ &= -\alpha\circ(\kappa_G)_x(y),\end{aligned}$$

即，$\delta^l(\mathrm{Exp}_\alpha) = -\alpha\circ\kappa_G$。由此得到

$$\begin{aligned}\delta^l(f_1) &= \delta^l(\mathrm{Exp}_\alpha\circ m_G) = m_G^*\delta^l(\mathrm{Exp}_\alpha) = -m_G^*(\alpha\circ\kappa_G) = -\alpha\circ(m_G^*\kappa_G)\\ &= -\alpha\circ\delta^l(m_G).\end{aligned}$$

令 $p_{1/2}\colon D_G\to\mathfrak{g}$ 表示投影 $p_1(x,\ y) = x$ 和 $p_2(x,\ y) = y$。那么 $f_2 = (\mathrm{Exp}_\alpha\circ p_1)(\mathrm{Exp}_\alpha\circ p_2)$，因此我们可以利用乘积法则（引理 D.1.9）、引理 D.5.1 和注记 8.2.11 得到

$$\begin{aligned}\delta^l(f_2) &= \delta^l(\mathrm{Exp}_\alpha\circ p_2) + \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}_\alpha\circ p_2)^{-1}.\delta^l(\mathrm{Exp}_\alpha\circ p_1)\\ &= p_2^*\delta^l(\mathrm{Exp}_\alpha) + \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}_\alpha\circ p_2)^{-1}.p_1^*\delta^l(\mathrm{Exp}_\alpha)\\ &= -p_2^*(\alpha\circ\kappa_G) - \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}_\alpha\circ p_2)^{-1}.p_1^*(\alpha\circ\kappa_G)\\ &= -\alpha\circ\delta^l(p_2) - \mathrm{Ad}(\mathrm{Exp}_\alpha\circ p_2)^{-1}.(\alpha\circ\delta^l(p_1))\\ &= -\alpha\circ\Big(\delta^l(p_2) + \mathrm{Ad}_G(p_2)^{-1}.\delta^l(p_1)\Big) = -\alpha\circ\delta^l(m_G) = \delta^l(f_1).\end{aligned}$$ □

定理 D.5.3。设 $\mathfrak{g}$ 是一个局部指数李代数，M 是一个光滑局部凸流形，且 $\alpha\colon\ \mathfrak{g}\to\mathcal{V}(M)$ 是一个满足以下条件的李代数单射态射

（A1）每个向量场 $\alpha(x)$，$x\in\mathfrak{g}$，都是完备的。（A2）
$\mathrm{Exp}_\alpha\colon\ \mathfrak{g}\to$微分同胚群$(M)$ $x\mapsto\exp(-\alpha(x))$ 是光滑的。
（A3）子群 $\Gamma_\alpha\colon = \mathrm{Exp}_\alpha^{-1}(\mathrm{id}_M)\cap\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 是离散的。

于是存在一个连通局部指数李群 G 和一个映射$\beta\colon\ G\to$微分同胚群(M)，定义了 M 上的一个有效光滑 G-作用，且 $\beta=\alpha$。

证明。我们考虑子群 $G := \langle\mathrm{Exp}_\alpha(\mathfrak{g})\rangle\subseteq$ 微分同胚群(M)。设 $G_{\mathrm{loc}}\subseteq\mathfrak{g}$是一个李代数为 $\mathfrak{g}$的指数局部李群。若 $x\in G_{\mathrm{loc}}$ 满足 $\mathrm{Exp}_\alpha(x) = \mathrm{id}_M$，那么引理 D.5.1 意味着 $\alpha\circ e^{\mathrm{ad}\,x} = \alpha$，因而 $e^{\mathrm{ad}\,x} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$，因为 α 是单射。

根据伴随可积性定理 8.3.13，我们知道 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ 在 $\{x\in\mathfrak{g}\colon\ e^{\mathrm{ad}\,x} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\}$ 中是开集，因此我们可以缩小 G_{loc}，使得对于$x\in G_{\mathrm{loc}}$，关系 $e^{\mathrm{ad}\,x} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 蕴含 $x\in\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$。鉴于 Γ_α的离散性，我们还可以进一步缩小 G_{loc}，使得

$$\mathrm{Exp}_\alpha^{-1}(\mathrm{id}_M)\cap G_{\mathrm{loc}} = \{0\}.$$

于是，命题 D.5.2 推出存在一个开平衡的 0 邻域 V，位于 G_{loc} 中，且满足 $V\times V\subseteq D_{G_{\mathrm{loc}}}$，使得

$$\operatorname{Exp}_\alpha(x * y) = \operatorname{Exp}_\alpha(x) \operatorname{Exp}_\alpha(y) \quad \text{for all} \quad x, y \in V.$$

为证明 $\operatorname{Exp}_\alpha|_V$ 是单射，假设对于x，$y \in V$，有 $\operatorname{Exp}_\alpha(x) = \operatorname{Exp}_\alpha(y)$。那么

$$\operatorname{Exp}_\alpha((-x) * y) = \operatorname{Exp}_\alpha(-x) \operatorname{Exp}_\alpha(y) = \operatorname{Exp}_\alpha(x)^{-1} \operatorname{Exp}_\alpha(y) = \mathrm{id}_M$$

导出 $(-x) * y \in \operatorname{Exp}_\alpha^{-1}(\mathrm{id}_M) \cap G_{\mathrm{loc}} = \{0\}$。我们得出

$$x = x * 0 = x * ((-x) * y) = (x * (-x)) * y = 0 * y = y$$

因此 $\operatorname{Exp}_\alpha|_V$ 是单射。

这意味着 $\operatorname{Exp}_\alpha(V) \subseteq G$ 带有一种流形结构，使得 $\operatorname{Exp}_\alpha|_V$ 是一个微分同胚，并且乘法和求逆在 V的某个单位元邻域内是光滑的。由于 G 由 V 中每个零邻域的像生成，它带有唯一的李群结构，使得 $\operatorname{Exp}_\alpha$ 在 0 的某个邻域内定义一个坐标图（定理 5.3.1）。

曲线 $\gamma_x\colon\ \mathbb{R} \to G$ 由 $\gamma_x(t) := \operatorname{Exp}_\alpha(tx)$定义，它们定义了光滑的一参数群，且 $\gamma_x'(0) = x$，其中我们通过 $T_0(\operatorname{Exp}_\alpha)$将 $\mathfrak{g}$ 与$T_e(G)$等同。因此，$\operatorname{Exp}_\alpha$ 是 G的一个指数函数。特别地，G是局部指数的，并且包含映射 $\beta\colon G \to \operatorname{Diff}(M)$在某个单位元邻域内光滑，因而处处光滑，于是它定义了 G 在 M 上的一个光滑作用，其中 $\beta = -T_0(\operatorname{Exp}_\alpha) = \alpha$。□

推论 D.5.4。设 G 是一个 1 连通局部指数李群，M 是一个光滑局部凸流形，且 $\alpha\colon \mathbf{L}(G) \to \mathcal{V}(M)$ 是一个满足 (A1)-(A3) 的李代数态射。那么存在唯一的映射 $\beta\colon G \to \operatorname{Diff}(M)$，它在 M 上定义一个有效的光滑 G 作用，并且 $\beta = \alpha$。

幸运的是，如果 M 是有限维、连通且 σ 仿紧，那么条件 (A2) 和 (A3) 会自动满足（在这种情况下，仿紧等价于仿紧性）。由此得到以下更简单的可积性判据：

定理 D.5.5。设 M 是有限维且 σ 仿紧，并且有有限个连通分支；设 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$ 是一个连续的李代数同态，其中 $\mathfrak{g}$ 是局部指数的，且 $\operatorname{im}(\alpha)$ 由完备向量场组成。那么存在一个连通局部指数李群 G 和一个映射 $\beta\colon G \to \operatorname{Diff}(M)$，它在 M 上定义一个有效的光滑 G 作用，并且 $\beta = \alpha$。

证明。 根据定理 D.5.3，我们需要验证 (A2) 和 (A3)。

(A2)：设 $E := \operatorname{im}(\alpha)$，赋予从 $\mathcal{V}(M)$ 继承的子空间拓扑。则 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to E$是连续线性的，因而光滑，因此只需证明映射 $\Phi\colon E \times M \to M, (X, p) \mapsto \operatorname{exp}(X)(p)$ 是光滑的。

由于 M 是 σ-紧的，$\mathcal{V}(M)$ 是 Fr´echet 空间。因此，特别地，E 是可度量化局部凸空间。根据 [BGN04，定理 12.4]，只需证明对于每个光滑映射 $f\colon \mathbb{R}^k \to E$，映射

$$\Phi \circ (f \times \mathrm{id}_M) \colon \mathbb{R}^k \times M \to M$$

是光滑的。

对于任意这样的 f，求值映射 $\mathcal{V}(M) \times M \to T(M)$ 的光滑性意味着映射 $\mathbb{R}^k \times M \to T(M)$，$(x, m) \mapsto f(x)(m)$ 是光滑的。因此我们在流形 $\widehat{M} := \mathbb{R}^k \times M$ 上得到一个光滑向量场 $X(x, m) := (0, f(x)(m))$，满足

$$\Phi_1^X(x, m) = (x, \Phi_1^{f(x)}(m)) = \big(x, \exp(f(x))(m)\big),$$

从而该断言可由映射 Φ_1^X 在 $\mathbb{R}^k \times M$（[La99, 定理 IV.2.6]）上的光滑性得出。

(A3)：假设 Γ_α 不是离散的，即 0 在 Γ_α 中不是孤立点。那么 $\alpha(\Gamma_\alpha)$ 不是离散的，并且由于 $\mathcal{V}(M)$ 可度量化，存在一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathfrak{g}$，满足 $\alpha(x_n) \to 0$，且对每个$n \in \mathbb{N}$都有 $\exp(\alpha(x_n)) = \mathrm{id}_M$。

对于每个有限子集 $F \subseteq \mathbb{N}$，光滑向量场 $\alpha(x_n)$、$n \in F$ 两两对易，并定义圆群 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在 M 上的光滑作用，因此它们组合起来定义了环面 $\mathbb{T}^F$ 在 M 上的光滑作用。若紧群 K 忠实地作用于 M，则 M 存在一个 K-不变的黎曼度量 g，由此对于 $d := \dim M$ 以及 M 的连通分支数目 c，可得估计

$$\dim K \le \dim(\mathrm{Iso}(M, g)) \le c\frac{d(d+1)}{2}$$

（参见 [Ko95，定理 II.1.3]）。

将此应用于上文的环面 $\mathbb{T}^F$ 的作用，可知对于每个有限子集 $F \subseteq \mathbb{N}$，我们有

$$\dim \operatorname{span}\{\alpha(x_n) \colon n \in F\} \le c\frac{d(d+1)}{2},$$

但这意味着 $\operatorname{span}\{\alpha(x_n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ 是有限维的。由于 α 是单射，$\mathfrak{a} := \operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的有限维中心子代数，并且 $\sigma(x, m) := \mathrm{Exp}(x)(m)$ 定义了有限维李群 $A := (\mathfrak{a}, +)$ 在 M 上的光滑作用。特别地，$\Gamma_\alpha = \{x \in \mathfrak{a} \colon \mathrm{Exp}(x) = \mathrm{id}_M\} = \ker \sigma$ 是 A 的闭正规子群，其李代数为 $\ker \alpha \cap \mathfrak{a} = \{0\}$。因此 Γ_α 是离散的。□

推论 D.5.6。设 G 是一个 1-连通的局部指数李群，M 是一个紧致光滑流形，且 $\alpha \colon \mathbf{L}(G) \to \mathcal{V}(M)$ 是拓扑李代数的连续态射。则存在唯一的李群态射 $\beta \colon G \to \mathrm{微分同胚群}(M)$，使得 $\mathbf{L}(\beta) = -\alpha$。

前面的推论也可以通过不同的方法得到：利用这样一个事实，即对于任意紧流形 M，群 $\mathrm{Diff}(M)$ 是正则李群（第 13 章），因此第 6 章中发展的一般理论便适用。

例 D.5.7. </style假设 M 的连通分支数有限至关重要。事实上，令 $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ 为无穷多个圆 $M_n \cong \mathbb{S}^1$ 的不交并。将 M_n 与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 视为同一对象，我们得到一个在 $M \setminus M_n$ 上消失的 M 上的向量场 X_n；在 M_n 上，它由 $\frac{\partial}{\partial x}$ 给出。李代数 $\mathfrak{g} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 是阿贝尔的，因而是局部指数的，于是我们得到一个连续同态

$$\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M), \quad \alpha((t_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} t_n X_n$$

因为在每个连通分支上，右侧的级数只有一个直和项。显然，对每个$n \in \mathbb{N}$, $\exp((t_n)) = \mathrm{id}_M$ 等价于 $t_n \in \mathbb{Z}$，因此 $\Gamma_\alpha = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$不是离散的。

问题 D.5.8.找一个局部指数李代数 $\mathfrak{g}$、一个光滑连通流形 M以及一个连续同态 $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M)$，使得$\Gamma_\alpha$ 不是离散的。为此，不妨假设 $\mathfrak{g}$ 是阿贝尔的。我们已经看到，如果 M 是有限维、连通且 σ-紧的，那么 Γ_α 总是离散的。因此，对于任何这样的例子，流形 M 必须是无限维的或非仿紧的。

问题 D.5.9.找一个具有指数函数的李群 G 和一个阿贝尔子代数 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$，使得 $\ker(\exp|_{\mathfrak{a}})$不是离散的。显然，$G$不可能是局部指数的。

附录 D 注记

在 [OMY82], 中可以找到引理 D.1.12 的一个特定版本，该版本讨论初值问题的解

$$\eta'(t) = [\eta(t), \xi(t)] + \eta(t), \quad \eta(0) = x$$

位于正则李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 中（参见引理 D.1.14），另见[KYM85, 2.5/2/6]。

关于 Fr´echet 空间上常系数线性常微分方程的更多例子（其解并不唯一）可见于 [Mil84]。

局部凸空间上的算子单参数半群早在20世纪60年代就已得到研究 [Yo 63], [Ko64], [Ko68]。特别是在相当一般的背景下，已经证明，在半群等度连续等温和假设下，“无穷小生成元”唯一确定该单参数群。

参考文献

[AbNe08] Abouqateb, A., and K.-H. Neeb, *Integration of locally exponential Lie algebras of vector fields* **33 1** 2008 89 100 , 《全球分析与几何年刊》: ( ), – . [ARS85] Adams, M., T. Ratiu, and R. Schmid, *The Lie group structure of diffeomorphism groups and invertible Fourier integral operators with applications* 1 69 , , pp. – in: V. Kac (ed), “带应用的无限维群” (伯克利, Calif., 1984年), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 4, 施普林格, 纽约, 1985年. [ARS86a] —, *A Lie group structure for pseudodifferential operators*, 《数学年刊》273:4 (1986年), 529–551. [ARS86b] —, *A Lie group structure for Fourier integral operators*, 《数学年刊》276:1 (1986年), 19–41. [AkN96] Akkar, M. and C. Nacir, C., *Structure m-convexe d'une algèbre limite inductive localement convexe d'algèbres de Banach* , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 95 (1996年), 107–126. [AHM93] Albeverio, S., J. Høegh-Krohn, J. A. Marion, D. H. Testard, and B. S. Torr´esani, “《非交换分布》”, Marcel-Dekker, 纽约, 1993年.[AHV83] Albeverio, S., R. Hoegh-Krohn, and A. Vershik, *Factorial representations of path groups* **51** 1983 115 131 , J. Funct. Anal. ( ), – . [Al65] Allan, G. R., *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. 伦敦数学会 (3) 15 (1965年), 399–421. [AAB97] Allison, B. N., S. Azam, S. Berman, Y. Gao, and A. Pianzola, “《扩张仿射李代数及其根系》”, 《美国数学会回忆录》603, 普罗维登斯 R. I., 1997年. [ABG00] Allison, B., G. Benkart, and Y. Gao, *Central extensions of Lie algebras graded by finite-root systems* **316** 1993 499 527 , 《数学年刊》( ), – . [Alz13] Alzaareer, H., “《非紧空间与流形上的映射李群》”, 博士论文, Universit¨ at Paderborn, 2013; http://nbn-resolving.de/urn:n:de:hbz:466 2 11572 : - Alz —, , 《数学探究》30 (2019年), 1036–1060. [Alz21] —, *Differential calculus on multiple products [19] Lie groups of C∞ maps on non-compact manifolds and the fundamental theorem for Lie group-valued mappings* **24** , J. Group Theory (2021年), 1099–1134. [AlS15] Alzaareer, H., and A. Schmeding, *Mappings on products with different degrees of differentiability in the two factors* **33** 2015 , 《数学展望》( ), 184–222.[Ame75] Amemiya, I., *Lie algebra of vector fields and complex structure*, 《日本数学会杂志》27:4 (1975年), 545–549.

[AGS20] Amiri, H., H. Gl ¨ *Lie groupoids of mappings taking values in a Lie groupoid* **56** 2020 307 356 ockner, 和 A. Schmeding, 《数学档案》（布尔诺）（）, –。[AnN09] An, J., Neeb, K.-H., *An implicit function theorem for Banach spaces and some applications* **262 3** 2009 627 643 , 《数学杂志》：（），–。

[AW08] An, J., 和 Z. Wang, *Cartwright selection lemma for semianalytic sets and conjugacy classes of finite order in Lie groups* **51 3** , 《中国科学》A辑：（2008），383–388。[ADG94] Ancel, F.D., Dobrowolski, T., 和 J. Grabowski, *Closed subgroups in Banach spaces* **109 3** 1994 277 , Studia Math.：（），–290

[68] AB Anderson, R. D., 和 R. H. Bing, *A complete elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*, Bull. Am. Math. Soc. 74（1968），771–792。[ADM20] Ando, H., M. Doucha, 和 V. Matsuzawa, *Large scale geometry of Banach–Lie groups* 2011 , arXiv:math.OA:。10376

[64] AW Araki, H., 和 W. Wyss, *Representations of canonical anticommutation relations* **37** 1964 136 159 Helv. Phys. Acta（），–。

[ASS71] Araki, H., M.-S. Bae Smith, 和 L. Smith, *On the homotopical significance of the type of von Neumann algebra factors* , 《Commun. Math. Phys.》22（1971），71–88。[Arn66] Arnold, V. I., *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits* **16 1** 1966 319 361 , Ann. Inst. Fourier：（），–。[AK98] Arnold, V. I., 和 B. A. Khesin, 《流体力学中的拓扑方法》，施普林格出版社，柏林，1998。[At67] Atiyah, M., 《K理论》，Benjamin，阿姆斯特丹，1969。[Au99] Außenhofer, L., 《阿贝尔拓扑群对偶理论及核群理论的贡献》，Diss. Math. 384，华沙，1999。[AS68] Averbukh, V. I., 和 O. G. Smolyanov, *The various definitions of the derivative in linear topological spaces* **23** 1968 67 , Russ. Math. Surv.（），–113。[AI95] de Azcarraga, J. A., 和 J. M. Izquierdo, 《李群、李代数、上同调及其在物理学中的一些应用》，剑桥数学物理专著，剑桥大学出版社，剑桥，1995。[BSZ92] Baez, J. C., I. Segal, 和 Z. Zhou, 《代数与构造量子场论导论》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1992。[Bak01] Baker, H. F., *On the exponential theorem for a simply transitive continuous group and the calculation of the finite equations from the constants of structure* **34** 1901 91 127 , J. London Math. Soc.（），–。[Bak05] —, *On the calculation of the finite equations of a continuous group*, London M. S. Proc. 35（1903），332–333。[BD01] Balan, V., 和 J. Dorfmeister, *Birkhoff decompositions and Iwasawa decompositions for loop groups* 2 **53 4** 2001 593 , Tohoku Math. J.（）：（），–615[BMSY11] Banakh, T., K. Mine, K. Sakai, 和 T. Yagasaki, *Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology* **37** 2011 61 93 , Topol. Proc.（），–。[BR10] Banakh, T. 和 D. Repovš, *Topological structure of direct limits in the category of uniform spaces* **157**, 2010 1091 1100 , Topology Appl.（），–。

[BY15] Banakh, T., 和 T. Yagasaki, *Diffeomorphism groups of non-compact manifolds endowed with the Whitney C^∞-topology* **179**, Topology Appl.（2015）, 51–61。[Bcz91] Banaszczyk, W., 《拓扑向量空间的加法子群》, Lecture Notes in Math. 1466, 施普林格出版社, 柏林, 1991。[Ban97] Banyaga, A., 《经典微分同胚群的结构》, Kluwer Academic Publishers, 1997。[Ban02] —, *On the geometry of locally conformal symplectic manifolds*, 载于《几何与表示论中的无限维李群》, Banyaga, A., J. A. Leslie, 和 T. Robart 编, World Scientific, River Edge, 新泽西州, 2002; 79–104。[BLR02] Banyaga, A., J. A. Leslie, 和 T. Robart 编, 《几何与表示论中的无限维李群》, 2002 World Scientific, River Edge, 新泽西州, [64] Ba Bastiani, A., *Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie* **13** 1964 1 114 , J. Anal. Math.（）, –。[BHM25] Bauer, M., P. Harms 和 P.W. Michor, *Regularity and completeness of half-Lie groups* 10 4171 1587 , J. Europ. Math. Soc., DOI . /JEMS/; arXiv:2302.01631[Bg87] Beggs, E., *De Rham's theorem for infinite-dimensional manifolds*, Quart. J. Math. 38（1987）, 131–154。[Bel04] Beltit ˛ˇ *Asymptotic products and enlargibility of Banach-Lie alge-* a, D., , *bras* **14** 2004 215 226 J. Lie Theory（）, –。[Bel06] —, 《算子理论中的光滑齐性结构》, Chapman and Hall, CRC 《纯数学专著与综述》, 2006。[Bel09] —, *Iwasawa decompositions of some infinite-dimensional Lie groups*, 《美国数学会汇刊》 **361 12** 2009 6613 6644：（）, – BB Beltita, D., 和 I. [15] ˛ˇ *Faithful representations of infinite-* Beltita, *dimensional nilpotent Lie algebras* **27 1** 2015 255 , Forum Math.: 267（）, –[08] ˛ˇ BelN Beltita, D., 和 K.-H. Neeb, *Finite-dimensional Lie subalgebras of algebras with continuous inversion* **185** 2008 249 262 , Studia Math.（）, –。[BelN10] —, *Geometric characterization of Hermitian algebras with continuous inversion* **81** 2010 96 113 , Bull. Aust. Math. Soc.（）, –。[BNi15] Beltit ˛ˇ *On universal enveloping algebras in a topo-* a, D., 和 M. Nicolae, , *logical setting* **230 1** 2015 1 29 Stud. Math.:（）, –。[BP07] Beltiţˇa, D., 和 B. Prunaru, *Amenability, completely bounded projec-tions, dynamical systems and smooth orbits*, Integral Equations Operator Theory 57（2007）, 1–17。[BR05] Beltit ˛ˇ *Symplectic leaves in real Banach Lie-* a, D., 和 T. S. Ratiu, , *Poisson spaces* **15** 2005 753 779 Geom. Funct. Anal.（）, –。[BR07] —, *Geometric representation theory for unitary groups of operator algebras* **208** 2007 299 317 , Adv. Math.（）, –。[BS01] Beltiţˇa, D., 和 M. Saba.c, 《有界算子的李代数》, 算子理论：进展与应用 120, Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2001。[BZ96] Benkart, G., 和 E. Zelmanov, *Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras* **126** 1996 1 45 , Invent. Math.（）, –。[Be74] Berezin, F. A., *Quantization in complex symmetric spaces*, Math. USSR-Izv. 9（1974）, 341–379。

[BGV04] Berline, N., E. Getzler 和 M. Vergne, 《热核与狄拉克算子》, 施普林格出版社, 2004年。[BM92] Berman, S. 和 R. V. Moody, *Lie algebras graded by finite root systems and the intersection matrix algebras of Slodowy* **108**, 《Invent. Math.》（1992）, 323–347。[Ber00] Bertram, W., 《约当与李结构的几何》, Lecture Notes in Math. 1754, 施普林格出版社, 柏林, 2000年。[Ber01] —, *Generalised projective geometries: general theory and equivalence with Jordan structures* **2** 2001 329 369 , 《Adv. Geom.》（）, –。[Ber08] —, 《一般基域与环上的微分几何、李群与对称空间》, 《美国数学会回忆录》192, 2008年。[BGN04] Bertram, W.、H. Glöckner 和 K.-H. Neeb, *Differential calculus over general base fields and rings* **22** 2004 213 282 《数学展望》（）, –。04] BerN *Projective completions of Jordan pairs* Bertram, W. 和 K.-H. Neeb, *Part I. The generalized projective geometry of a Lie algebra* , [, 《代数杂志》277:2（2004年）, 474–519。05] BerN *Projective completions of Jordan pairs—, Part II*, [, 《几何奉献》112:1（2005年）, 75–115。75] BP Bessaga, C. 和 A. Pełczyński, 《无限维拓扑选讲》, PWN, 华沙, 1975年。88] Bi *An introduction to locally convex inductive limits* Bierstedt, K.-D., [, 载于: Hogbe-Nlend, H.（编）, 《泛函分析及其应用》（尼斯, 1986年）, 第35–133页, World Sci. Publ., 新加坡, 1988年。94] BBP *Vector-valued holomorphic germs on Fréchet-Schwartz spaces* **94** Bierstedt, K.-D.、J. Bonet 和 A. Peris, [, 《爱尔兰皇家科学院学报》A辑（1994年）, 31–46。77] BM *Nuclearity and the Schwartz property in the theory of holomorphic functions on metrizable locally convex spaces* Bierstedt, K.-D. 和 R. Meise, [, 载于: Matos, M. C.（编）, 《无限维全纯函数论及其应用》, 第93–129页, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1977年。02] Bil *The exponential law for smooth functions* Biller, H., [, 手稿, 达姆施塔特工业大学, 2002年7月。04] Bil *Continuous inverse algebras with involution—*, [, 《Forum Math.》22（2010年）, 1033–1059。07] Bil *Analyticity and naturality of the multi-variable functional calculus—*, [, 《数学展望》25（2007年）, 131–163。03] Bil *Abelian extensions of the group of diffeomorphisms of a torus* Billig, Y., [, 《数学物理快报》64:2（2003年）, 155–169。08] BiNe *On the cohomology of vector fields on parallelizable manifolds* **58** 2008 1937 Billig, Y. 和 K.-H. Neeb, 1982 [02] , Ann. Inst. Fourier *Free Kac-Moody groups and their Lie algebras* **5 2** 2002 115 136 BiPi Billig, Y. 和 A. Pianzola, [, 《代数表示论》: （）, –。36] Bir *Continuous groups and linear spaces* Birkhoff, G., 1936 635 642 , 《数学文集》1（[38] *Analytic groups* **43** 1938 61 101 ）, – Bir —, , 《美[14] *Continuity of convolution of test functions* 国数学会汇刊》*on Lie groups* **66 1** 2014 102 140 （）, –BG Birth, L. 和 H. Glöckner, *The topology of finitely open sets is not a vector space* [《加拿大数学杂志》; （）, –。93] Bisg *topology* **60** 1993 546 553 Bisgaard, T. M., , 《数学档案》（）, –。

[Bl98] Blackadar, B., 《算子代数的K理论》，第2版，剑桥大学出版社，剑桥，1998年。[BS71a] Bochnak, J. 和 J. Siciak, *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces* **39** 1971 59 76 ，Studia Math.（），–。[BS71b] —, *Analytic functions in topological vector spaces*, Studia Math. 39（1971年），77–112。[Bo46] Bochner, S., *Formal Lie groups*, Ann. of Math. 47（1946年），192–201。[BoMo45] Bochner, S. 和 D. Montgomery, *Groups of differentiable and real or complex analytic transformations* 2 **46** 1945 685 ，Ann. of Math.（） （），– 694。[BDS17] Bogfjellmo, G.、R. Dahmen 和 A. Schmeding, *Overview of (pro-)Lie group structures on Hopf algebra character groups*, 预印本，arXiv: 1711 05963 1 [ ] 。v math.GR Bm Boman, J., [ ] *Differentiability of a function and of its compositions with functions of one variable* **20** 1967 249 268 ，Math. Scand.（），–。[BDM94] Bonet, J.、P. Domanski 和 J. Mujica, *Complete spaces of vector-valued holomorphic germs* **75** 1994 150 160 ，Math. Scand.（），–。[BF12] Bonfiglioli, A. 和 R. Fulci, 《非交换代数专题：坎贝尔–Baker–豪斯多夫–Dynkin定理》，Lecture Notes in Math. 2034，施普林格出版社，2012年。[BD73] Bonsall, F. F. 和 J. Duncan, 《完备赋范代数》，Ergeb. Mathem. und ihrer Grenzgebiete 80，施普林格出版社，纽约、海德堡，1973年。[BB08] Borzellino, J. E. 和 V. Brunsden, *A manifold structure for the group of orbifold diffeomorphisms of a smooth orbifold* **18** 2008 ，《J. Lie Theory》（），979–1007。[BCR81] Boseck, H.、G. Czichowski 和 K.-P. Rudolph, 《拓扑群上的分析——一般李理论》，Teubner Texte zur Mathematik 137，Teubner出版社，莱比锡，1981年。[Bos90] Bost, J.-B., *Principe d'Oka K-theorie et systèmes dynamiques non-* , , 《Invent. commutatifs* **101** 1990 261 333 Math.》（），–。[Bo58] Bott, R., *The space of loops on a Lie group*, 《Michigan Math. J.》5（1958年），35–61。[Bo59] —, *The stable homotopy groups of the classical groups*, Ann. of Math. 70:2（1959年），313–337。[Bo60] —, *A note on the Samelson product in the classical groups*, Comment. Math. Helv. 34（1960年），249–256。[Bo77] —, *On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms*, Enseign. Math. (2) 23:3-4（1977年），209–220。[Bou67] Bourbaki, N., 《微分与解析簇：结果汇编》，Hermann，巴黎，1967年。[Bou87] —, 《拓扑向量空间（第1–5章）》，施普林格出版社，柏林，1987年。[Bou88] —, 《一般拓扑学（第1–6章）》，施普林格出版社，柏林，1988年。[Bou66] —, 《一般拓扑学，第2部分》，Addison-Wesley，雷丁及 Hermann，巴黎，1966年。[Bou89] —, 《李群与李代数（第1–3章）》，施普林格出版社，柏林，1989年。[Bo80] Boyer, R., *Representations of the Hilbert Lie group* $U(\mathcal{H})_2$，《杜克数学杂志》47（1980年），325–344。

[Bo83] —, *Infinite traces of AF-Algebras and characters of U(∞)*, 《算子理论》9 (1983), 205–236.[Bo92] —, *Characters and factor representations of the infinite-dimensional classical groups* **29** 1992 281 307 , J. Oper. Theory ( ), – .[BIP08] 布拉戈，D.、S. 伊万诺夫和L. Polterovich, *Conjugation-invariantnorms on groups of geometric origin*，载于《微分同胚群》， 221 250, **52**, 2008 –日本[89]数学会纯粹数学高级研究，东京，BEG 布拉特利，O.、G. A. 埃利奥特、F. M. 古德曼和P. E. T. 约根森，*Smooth Lie group actions on non-commutative tori*，《Nonlinearity》2 (1989 271 286), – Bre 布雷登，G. E.，《紧变换群导论》，[72]学术出版社，1972年。[Bre93] —，《拓扑学与几何》，数学研究生教材139，施普林格出版社，柏林，1993年。[Br70] 布罗伊尔，M., *On the homotopy type of the groups of regular elements of semifinite von Neumann algebras* **185** 1970 61 74 ，《数学年刊》( ), – .[BJ73] Br¨克尔，Th.，和K. 雅尼希，《微分拓扑导论》，施普林格出版社，柏林，1973年。[Bro82] 布朗，K. S.，《群上同调》，数学研究生教材87，施普林格出版社，柏林，1982年。[BW76] Br ¨ *Eine Verallgemeinerung eines Satzes* 宁，J.，和W. *von N. Kuiper* **220** 1976 47 58 Willgerodt，，《数学年刊》( ), – .[BrW59] 布吕阿，F. 和H. 惠特尼，H., *Quelques proprietes fondamentales des ensembles analytique-réels* **33** 1959 132 160 ，Comment. Math. Helv. ( ), – .[BBM14] 鲍尔，M.、布鲁吉里斯，M 和P.W. Michor, *Overview of the geometries of shape spaces and diffeomorphism groups* ，J. Math. Imaging Vision 50:1-2 (2014), 60–97.[BBM16] —, *Why use Sobolev metrics on the space of curves*，载于《计算机视觉中的黎曼计算》，233–255，施普林格，尚贝里，2016年。[Bry93] 布里林斯基，J.-L.，《环空间、特征类与几何量子化》，Progress in Math. 107，Birkh¨auser 出版社，波士顿，1993年。[CaP19] 卡博，P.，和F. 佩尔蒂埃, *Integrability on direct limits of Banach manifolds* 6 **28 5** 2019 909 956 ，图卢兹大学理学院数学与物理科学年刊，数学 ( ) : ( ), – .[Cal70] 卡拉比，E., *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*，第1–26页，载于：R. C. Gunning（编），《分析问题》（纪念Salomon Bochner的专题讨论会讲座），普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年。[Cam97] 坎贝尔，J. E., *On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups* ，伦敦数学会会刊28 (1897), 381–390。[Cam98] —, *On a law of combination of operators. (Second paper)*，伦敦数学会会刊28 (1897), 381–390。[Ca18] 卡普雷斯，P.-E.， *Non-discrete simple locally compact groups*，预印本，2018[CP89a] 凯里，A.，和J. 帕尔默， *Infinite complex spin groups*，J. Funct. Anal. 83 (1989), 1–43。[CP89b] —， *Gauge anomalies on* $\mathbb{S}^2$ *and group extensions*，J. Math. Phys. 30:9 (1989), 2181–2191。

[CaE98] 卡当, E., *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* **12 1** 1898 1 , 图卢兹大学理学院数学与物理科学年刊 : ( ), B – B64.[CaE01] —, *L'intégration des systèmes d'équations aux differentielles totales*, 高等师范学校科学年刊 (3) 18 (1901), 241–311。[CaE04] —, *Sur la structure des groups infinies des transformations*, 高等师范学校科学年刊21 (1904), 153–206; 22 (1905), 219–308。[CaE08] —, *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, 高等师范学校科学年刊25 (1908), 57–194。[CaE09] —, *Les groupes de transformations continus, infinis, simples*, 高等师范学校科学年刊26 (1909), 93–161。[CaE30] —, *Le troisième théorème fondamental de Lie*, 《巴黎科学院院报》190 (1930), 914–916, 1005–1007。[CaE36] —, *La topologie des groupes de Lie. (Exposés de géométrie Nr. 8.)*, Actual. sci. industr. 358 (1936), 28页。[CaE52a] —, *Le troisième théorème fondamental de Lie*, 第1143–1148页, 载于《全集 I》, Gauthier–Villars, 巴黎, 1952年。[CaE52b] —, *La topologie des espaces représentatifs de groupes de Lie*, 第1307–1330页, 载于《全集 I》, Gauthier–Villars, 巴黎, 1952年。[CaE52c] —, *Les représentations linéaires des groupes de Lie*, 第1339–1350页, 载于《全集 I》, Gauthier–Villars, 巴黎, 1952年。[CaH67] 卡当, H., 《微分演算》, Hermann, 巴黎, 1967年。ˊCVL[卡西内利, G.、E. 德维托、P. 拉赫蒂和A. 莱维罗, 98] , 《数学物理评论》10:7 (1998), 893–924。 *Symmetries of the quantum state space and group representations* Ce[塞尔夫, J., 61] , 《法国数学会通报》89 (1961), 227–380。 *Topologie de certains éspaces de plongements*CP[查里, V., 和A. 普雷斯利, 86] , 《数学年刊》275 (1986), 87–104。 *New unitary representations of loop groups*CM[切尔诺夫, P., 和J. Marsden, 70] , 《美国数学会通报》( ), 1– . *On continuity and smoothness of group actions* **76** 1970 1044 1049 Ch[Chevalley, C., 《李群理论（第一卷）》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 1946年。46] CE[克劳德·谢瓦莱和塞缪尔·艾伦伯格, 48] , 《美国数学会会刊》( ), – . *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras* **63** 1948 85 124 CDD[Y. 肖凯-布吕阿、C. 德威特-莫雷特和M. 迪拉德-布莱克, 《分析学、流形与物理学》, North-Holland（Elsevier）, 21985。85] CH[S. N. 周和J. K. 黑尔, 《分岔理论方法》, 施普林格出版社, 纽约, 1982年。82] CIJM[F. M. 恰利亚、A. 伊博尔特、J. 约斯特和G. 马尔莫, 19] , *Manifolds of classical probability distributions and quantum density operators in infinite dimensions* **2 2** 2019 231 271 《信息几何》( ), – . ClH[D. E. 克拉克和J. 乌西诺, 12] *Faá di Bruno's formula for Gâteaux*, 预印本, 2012年, arXiv:1202.0264。*differentials and interacting stochastic population processes*Co[阿兰·孔涅, 85] , 《高等科学研究所数学出版物》62 (1985), 41–144。 *Noncommutative Differential Geometry*Co[阿兰·孔涅, 《非交换几何》, 学术出版社, 1994年。94] CM[J. B. 康威和B. B. 莫雷尔, 79] , 《积分方程与算子理论》: ( ), – .

[CGM90] Cuenca Mira, J. A., A. Garcia Martin, and C. Martin Gonzalez, *Strate ture theory of L^*-algebras* **107** 1990 ,《剑桥哲学学会数学论文集》( ), 361–365.[Cu04] Cuntz, J., *Cyclic theory and the bivariant Chern–Connes character*, 见: Doplicher, S. 等（编）《非交换几何》, 《Lecture Notes in Math.》1831, 第73–135页。2004年。[Da10] Dahmen, R., *Analytic mappings between LB-spaces and applications in infinite-dimensional Lie theory* **266** 2010 115 140 ,《数学杂志》( ), – .[Da11] —, *Regularity in Mahlo's sense for ascending unions of Banach-Lie* 2011年。[Da14] —, *groups* **24 2** 2014 545 560 , J. Lie Theory : ( ), – .[Da15] —, *Peetre's theorem in the locally convex setting*, Forum Math. 27 (2015), 2957–2979. [DS15] Dahmen, R., and A. Schmeding, *The Lie group of real analytic diffeo- morphisms is not real analytic* **229 2** 2015 141 172 , Stud. Math. : ( ), – .[DGS14] Dahmen, R., H. Glöckner, and A. Schmeding, *Complexifications of infinite-dimensional manifolds and new constructions of infinite- dimensional Lie groups* 2014 1410 6468 , 预印本, ; arXiv: 。.[DP03] Dai, J., and D. Pickrell, *The orbit method and the Virasoro extension of $_+ S^1$. I. Orbital integrals* **44 4** 2003 623 653 微分同胚群 ( ) ,《J. Geom. Phys.》: ( ), – .[Da94] Dazord, P., *Lie groups and algebras in infinite dimension: a new ap- proach* 17 44 ,见《辛几何与量子化》, 第–页，Contemporary Mathematics 179，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。[Dei 77] Deimling, K.,《巴拿赫空间中的常微分方程》，《Lecture Notes in Math.》596，施普林格出版社，柏林，1977年。[De32] Delsartes, J.,《希尔伯特空间中的线性变换群》，《数学科学回忆录》，第57分册，巴黎。[DWL82] De Wilde, M., and P. B. A. Lecomte, *Isomorphisms of Lie algebras of vector fields* **23** 1982 513 523 , Commentat. Math. Univ. Carol. ( ), – .[DW97] Dierolf, S., and J. Wengenroth, *Inductive limits of topological algebras*, Linear Topol. Spaces Complex Anal. 3 (1997), 45–49. [Di44] Dieudonn´e, J., *Sur la completion des groupes topologiques*,《巴黎科学院院报》218 (1944), 774–776. [Di60] Dieudonn´e, J.,《现代分析基础》，学术出版社，纽约，1960年。[DiPe99] Dimitrov, I., and I. Penkov, *Weight modules of direct limit Lie algebras*, International Math. Res. Notices 5 (1999), 223–249. [DJNV21] Diez, T., Janssens, B., Neeb, K.-H., and C. Vizman, *Central extensions of Lie groups preserving a differential form* , Int. Math. Res. Not. IMRN **5** 2021, 3794 3821 – DR Diez, T., and G. Rudolph, [19] *Slice theorem and orbit type stratification in infinite dimensions* **65** 2019 176 211 , Differential Geom. Appl. ( ), – .[Dn81] Dineen, S., *Holomorphic germs on compact subsets of locally convex spaces* 247 263 ,见《泛函分析、全纯性与逼近理论》（里约热内卢，1978年），《Lecture Notes in Math.》843，施普林格出版社，柏林，1981年，第–页。[dCa92] do Carmo, M. P.,《黎曼几何》，Birkh¨auser，波士顿，1992年。[DiD 63] Dixmier, J., and A. Douady, *Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algèbres* **91** 1963 227 284 ,《法国数学会通报》( ), –

[DGV16] Dodson, C. T. J., G. Galanis, and E. Vassiliou,《弗雷歇语境中的几何：一种射影极限方法》，伦敦数学会讲义丛书428，剑桥大学出版社，剑桥，2016年。[DI85] Donato, P., and P. Iglesias, *Exemples de groupes différentiables: flots irrationnels sur le tore* 1, **301** 1985 127 ，《巴黎科学院院报》，系列 ( )，– 130.[Dou61] Douady, A., *Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires*, S´eminaire Henri Cartan, 1961/62, Exp. 1, 11页。[Dou66] Douady, A., *Un espace de Banach dont le groupe linéaire n'est pas connexe* 68 = **27** , Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A《数学探究》(1965), 787–789.[DL66] Douady, A., and M. Lazard, *Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes* **1** 1966 133 151 , Invent. Math. ( ), – .[Dr69] Dress, A., *Newman's Theorem on transformation groups*, Topology 8 (1969), 203–207.[DG01] Dupre, M. J., and J. F. Glazebrook, *The Stiefel bundle of a Banach algebra* **41** 2001 264 287 , Integr. equ. oper. theory ( ), – .[DEG98] Dupre, M. J., J.-C. Evard, and J. F. Glazebrook, *Smooth parametrization of subspaces in a Banach space*, Revista de la Uni´on Mathem´atica Argentina 41:2 (1998), 1–13.[Dy47] Dynkin, E. B., *Calculation of the coefficients in the Campbell–Hausdorff formula* （俄文），**57** 1947 323 Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.) ( ), – 326.[Dy53] —,《赋范李代数与解析群》，美国数学会译著1953年，第97号，66页。[Dz92] Dzhumadildaev, A., *Central extensions of infinite-dimensional Lie algebras* **26 4** 1992 247 253 ,《泛函分析及其应用》：( ), – .[EE67] Earle, C. J., and J. Eells, *The diffeomorphism group of a compact Riemann surface* **73** 1967 557 ,《美国数学会通报》( ), 559 ┤ 69] *A fibre bundle description of Teichmüller theory* EE —, , J. Differential Geometry ( ), – ES Earle, C. J., and A. H. Schatz, *Teichmüller theory for surfaces with boundary* **4** 1970 169 , J. Differential Geometry ( ), 185 ┤ 70] *The manifold of riemannian metrics* Eb Ebin, D. G.,，载于《整体分析》（加利福尼亚州伯克利，1968年），美国数学会《纯数学专题讨论会论文集》15（1970年），11–40。[EM69] Ebin, D. G., and J. E. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the solution of the classical Euler equations for a perfect fluid* ,《美国数学会通报》75 (1969), 962–967.[EM70] —, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid* **92** 1970 102 163 , Ann. of Math. ( ), – .[EMi99] Ebin, D. G., and G. Misiolek, *The exponential map on $\mathcal{D}^s_\mu$*, 载于《 Arnoldfest 》（加拿大安大略省多伦多，1997年），Fields Inst. Commun. 24，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年，第153–163页。[Ee58] Eells, J. Jr., *On the geometry of function spaces*, 载于《国际代数拓扑研讨会》，第303–308页；墨西哥国立自治大学与联合国教科文组织，墨西哥城。[Ee66] —, *A setting for global analysis*,《美国数学会通报》72 (1966), 751–807。

[Ed99] Edamatsu, T., *On the bamboo-shoot topology of certain inductive limits of topological groups* **39** 1999 715 724 , J. Math. Kyoto Univ. ( ), – . [EW17] Egeileh, M. and T. Wurzbacher, *Infinite-dimensional manifolds as ringed spaces* **53 1** 2017 187 209 , Publ. Res. Inst. Math. Sci. : ( ), – . [Ei07] Eichhorn, J.,《开流形上的整体分析》, Nova Science Pub- lishers，纽约，2007年。[ES96] Eichhorn, J. and R. Schmid, *Form preserving diffeomorphisms on open manifolds* **14 2** 1996 147 176 ,《全球分析与几何年刊》: ( ), – . [ES01] —, *Lie groups of Fourier integral operators on open manifolds*, Comm. Anal. Geom. 9:5 (2001), 983–1040. [Ei68] Eichler, M., *A new proof of the Baker–Campbell–Hausdorff formula*,《日本数学会杂志》20 (1968年), 23–25. [El67] Eliasson, H., *Geometry of manifolds of maps*, J. Diff. Geom. 1 (1967), 169–194.[Ek89] Engelking, R.,《一般拓扑学》, Heldermann Verlag，柏林，1989。[Ep70] Epstein, D. B. A., *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Comp. Math. 22 (1970年), 165–173. [Ep84] —, *Commutators of C^∞-diffeomorphisms*, Comment. Math. Helv. 59 (1984年), 111–122. [Est55] van Est, W. T., *On the algebraic cohomology concepts in Lie groups I II* **58**= **17** 1955 225 , , 荷兰皇家艺术与科学院，Proc. A《数学探究》( ), – 233; 286–294. [Est62] —, *Local and global groups*, Ned. Akad. Wet., Proc. A **65**=《数学探究》24 (1962), 391–425. [Est66] —, *On Ado's theorem* **69** , Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. Series A Indag. Math. 28 (1966), 176–191. [Est84] —, *Rapport sur les S-atlas*, Ast´erisque 116 (1984年), 235–292. [Est88] —, *Une démonstration de E. Cartan du troisième théorème de Lie*, 第83–96页，载于: Dazord P. 等（编）《Seminaire sud-rhodanien de g´eom´etrie VIII: Actions hamiltoniennes de groupes; troisi`eme th´eor`eme de Lie》, Hermann，巴黎，1988年。[EK64] van Est, W. T., and Th. J. Korthagen, *Non-enlargible Lie algebras*, Ned. Acad. v. Wet., Proc. A **67**=《数学探究》26 (1964年), 15–31. [ES73] van Est, W. T., and S. ´Swierczkowski, *The path functor and faithful representability of Banach Lie algebras*, 载于《献给Hannare Neumann纪念文集，I》。J. Austral. Math. Soc. 16 (1973年), 54–69. [vES73] van Est, W. T., and S. ´Swierczkowski, *The path functor and faithfulrepresentability of Banach Lie algebras*, 载于《献给 Hannare Neumann 纪念文集，I 》, J. Austral. Math. Soc. **16** 1973 54 69 ( ), – EF Etingof, P. I., and I. B. Frenkel, [94] *Central extensions of current groups in two dimensions* **165** 1994 429 444 ,《Commun. Math. Phys.》( ), – . [EK98] Evans, D. E., and Y. Kawahigashi,《算子代数上的量子对称性》, 牛津数学专著，克拉伦登出版社，1998年。[Eyn12] Eyni, J. M., *Frobeniussätze für Vektordistributionen auf unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, 硕士论文，Universit¨at Paderborn，2012；（导师: H. Gl¨ockner）

[Eyn14] —, *The Frobenius theorem for Banach–Lie algebras on infinite-dimensional manifolds and applications in infinite-dimensional Lie theory* 2014, 1407 3166, 预印本，arXiv: .[

Eyn15] —, *A Lie group structure on the group of real analytic diffeomorphisms of a compact real analytic manifold with corners*, 预印本，2015, arXiv:1512.01506[Eyn16] —, 《无限维李理论中的新例子与构造》，博士论文，Universit¨ at Paderborn，2016年（导师：H. Gl

¨ 466 2 27103 ockner）；参见

[07] *C^m-extension by linear operators* nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz: : - Fef Fefferman, C., ,《数学年刊》166 (2007年), 779–835. [Fe88] Feigin, B. L., *On the cohomology of the Lie algebra of vector fields and the current algebra* **7 1** 1988 49 62, Sel. Math. Sov. : ( ), – . [FF00] Feigin, B. L., and D. B. Fuks, *Cohomologies of Lie groups and Lie algebras*, 载于：I. L.

Onishchik 和 E. B. Vinberg（编），《李群与李代数 II》，《数学科学百科全书》21，施普林格出版社，柏林，2000年。[FHS17] Ferrer, M. V., S. Hern

´ *A countable free* andez, and D. *closed non-reflexive subgroup of $\mathbb{Z}^{\mathfrak{c}}$* **145 8** 2017 Shakhmatov, , Proc. Am. Math. Soc. : ( ), 3599–3605.[Fil82] Filipkiewicz, R. P., *Isomorphisms between diffeomorphism groups*, Er- godic Theory Dynamical Systems 2:2 (1983年), 159–171. [Fl71] Floret, K., *Lokalkonvexe Sequenzen mit kompakten Abbildungen*,《J. Reine Angew. Math.》247 (1971), 155–195. [Fl80] —, *Some aspects of the theory of locally convex inductive limits*, 第205–237页，载于：K.-D. Bierstedt 和 B. Fuchssteiner（编）《泛函分析：综述与结果 II》，North Holland，阿姆斯特丹，1980年。[FS77] Franklin, S. P., and B. V. S. Thomas, *A survey of k_ω-spaces*, Topol. Proc. 2 (1977), 111–124. [Fre25] Fr´echet, M., *La notion de différentielle dans l'analyse générale*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. III 42 (1925), 293–323. [Fr84] Frenkel, I. B., *Orbital theory for affine Lie algebras*, Invent. Math. 77 (1984), 301–352. [FK21] Frenkel, I. B., and H.K. Kim, *Three dimensional construction of the Virasoro–Bott group* 2107 11693, arXiv:math.GT: .

[68] Fre Freifeld, Ch., *One-parameter subgroups do not fill a neighborhood of the identity in an infinite-dimensional Lie (pseudo-) group*, 1968年，巴特尔会议。1967年数学与物理学讲座：538–543. Benjamin，纽约。[Frk07] Frerick, L., *Extension operators for spaces of infinite differentiable Whitney jets* **602** 2007 123 154,《J. Reine Ange

w. Math.》( ), – . [FJW11] Frerick, L., E. Jord

´ *Tame linear extension op-* a, and J. *erators for smooth Whitney functions* **261 3** 2011 Wengenroth, , J. Funct. Anal. : ( ), 591–603.[FJW16] —, *Whitney extension operators without loss of derivatives*, Rev. Mat. Iberoam. 32 (2016), 377–390. [FB66] Fr¨olicher, A., and W. Bucher,《无范数向量空间中的微积分》，Lecture Notes in Math. 30，施普林格出版社，柏林，1966年。[FK88] Fr¨olicher, A., and A. Kriegl,《线性空间与微分理论》，Wiley Interscience，奇切斯特，1988年。

[Fu70] Fuchs, L., 《无限阿贝尔群，I》，学术出版社，纽约，1970年。[Fu73] —, 《无限阿贝尔群，II》，学术出版社，纽约，1973年。[Fu86] Fuks, D. B., 《无限维李代数的上同调》，当代苏联数学，顾问局，纽约，伦敦，1986年。[Fu04] Furutani, K., *Fredholm-Lagrangian–Grassmannian and the Maslov in-* , 《J. Geom. *dex* **51** 2004 269 331 Phys.》（），–[96] Ga Galanis, G., *Projective limits of Banach-Lie groups*, 《匈牙利数学期刊》32:3（1996），179–191。[Ga97] —, *On a type of linear differential equations in Fréchet spaces*, 《比萨高等师范学校科学类年刊》（4）24:3（1997），501–510。[Ga47] G˚arding, L., *Note on continuous representations of Lie groups*, 《美国国家科学院院刊》33（1947），331–332。[GF68] Gelfand, I., 与 D. B. Fuks, *Cohomology of the Lie algebra of vector fields on the circle* **2 4** 1968 342 343 , 《泛函分析及其应用》：（），–。[Gh01] Ghys, E., *Groups acting on the circle*, L' Enseignement Math´ematique **47** 2001 329 407 （），– GG Glashow, [61] S. L., 与 M. Gell-Mann, *Gauge theories of vector particles*, 《物理年刊》15（1961），437–460。[Gl02a] Gl ¨ockner, H., , *Infinite-dimensional Lie groups without completeness re-* *strictions* 43 59 第–页，载于：A. Strasburger、W. Wojtynski、J. Hilgert 与 K.-H. Neeb（编），《有限维与无限维李群上的几何与分析》，巴拿赫中心出版物55，华沙，2002年。[Gl02b] —, *Algebras whose groups of units are Lie groups*, Studia Math. 153（2002），147–177。[Gl02c] —, *Lie group structures on quotient groups and universal complexifications for infinite-dimensional Lie groups* **194** 2002 , J. Funct. Anal.（），347–409。[Gl03a] —, *Direct limit Lie groups and manifolds*, J. Math. Kyoto Univ. 43（2003年），1–26。[Gl03b] —, *Lie groups of measurable mappings*, Canadian J. Math. 55（2003年），969–999。[Gl03c] —, *Patched locally convex spaces, almost local mappings, and diffeomorphism groups of non-compact manifolds*, 准备中的手稿，2003年。[Gl04a] —, *Lie groups of germs of analytic mappings*, 第1–16页，载于：T. Wurzbacher（编），《数学与量子物理学中的无限维群与流形》，IRMA数学讲义与数学物理学，德格鲁伊特出版社，2004年。[Gl04b] —, *Lie groups over non-discrete topological fields*, 预印本，2004年，arXiv:math.GR/0408008[Gl05a] —, *Hölder continuous homomorphisms between infinite-dimensional Lie groups are smooth* **228 2** 2005 419 444 , J. Funct. Anal.；（） [Gl05b] —, *Conveniently Hölder homomorphisms are smooth in the convenient sense* **27** 2005 227 255 , 《全球分析与几何年刊》（），–。[Gl05c] —, *Fundamentals of direct limit Lie theory*, Compositio Math. 141（2005年），1551–1577。[Gl05d] —, 微分同胚群（$\mathbb{R}^n$） *as a Milnor–Lie group*, Math. Nachr. 278:9（2005年），1025– 1032。

[Gl06a] —, *Implicit functions from topological vector spaces to Banach spaces*, Israel J. Math. 155（2006年）, 205–252。[Gl06b] —, *Discontinuous non-linear mappings on locally convex direct limits*, Publ. Math. Debrecen 69（2006年）, 1–13。[Gl06c] —, *Fundamental problems in the theory of infinite-dimensional Lie groups* **5** 2006 24 35 , J. Geom. Symm. Physys.（）, –。[Gl06d] —, *Implicit functions from topological vector spaces to Fréchet spaces in the presence of metric estimates* 2006, 0612673 , 预印本, arXiv:math/。[Gl07a] —, *Direct limits of infinite-dimensional Lie groups compared to direct limits in related categories* **245** 2007 19 61 , J. Funct. Anal.（）, –。[Gl07b] —, *Direct limit groups do not have small subgroups*, Topol. Appl. 154（2007年）, 1126–1133。[Gl07c] —, *Instructive examples of smooth complex differentiable and complex analytic mappings into locally convex spaces* , , J. Math. Kyoto Univ.（2007年）, 631–642。[Gl07d] —, *Finite order differentiability properties fixed points and implicit functions over valued fields* , , 预印本, math/。[Gl07e] —, *Aspects of differential calculus related to infinite-dimensional vector bundles and Poisson vector spaces* 2007, 0811218 2007 , 准备中的手稿, 。[Gl08a] —, *Solutions to open problems in Neeb's recent survey on infinite-dimensional Lie groups* **135** 2008 71 86 , 《几何泰献》（）, –。[Gl08b] —, *Applications of hypocontinuous bilinear maps in infinite-dimensional differential calculus* 171 186 , 第–页, 载于: S. Silvestrov、E. Paal、V. Abramov 与 A. Stolin（编）, 《数学、物理及其他领域中的广义李理论》, 施普林格出版社, 2008年。[Gl08c] —, *Homotopy groups of ascending unions of infinite-dimensional manifolds* 0812 4713 1 , 即将发表于 Ann. Inst. Fourier（参见 arXiv: . v ）[Gl11] —, *Direct limits of infinite-dimensional Lie groups*, 第243–280页, 载于: K.- H. Neeb 与 A. Pianzola（编）, 《无限维李理论的发展与趋势》, Birkh¨auser 数学进展 288, 2011年。[Gl12a] —, *Continuity of bilinear maps on direct sums of topological vector spaces* **262 5** 2012 2013 2030 , J. Funct. Anal. : （）, –。[Gl12b] —, *Regularity properties of infinite-dimensional Lie groups and semiregularity* , , 1208 0715 6, 2016 (二月版本) arXiv:math.FA/。[Gl13a] —, *Continuity of LF-algebra representations associated to representations of Lie groups* **53 3** 2013 567 595 , Kyoto J. Math. : （）, –。[Gl13b] —, *Differentiable mappings between spaces of sections*, 预印本, 2013 年, arXiv:1308.1172。[Gl15a] —, *Fundamentals of submersions and immersions between infinite-dimensional manifolds* 2015, 1502 05795 , 预印本, arXiv: . 。[Gl15b] —, *Measurable regularity properties of infinite-dimensional Lie groups*, 预印本, 2015年, arXiv:1601.02568。[Gl17] —, *Completeness of locally k_ω-groups and related infinite-dimensional Lie groups* **228** 2017 277 284 , Topol. Appl.（）, –。[Gl19a] —, *Completeness of infinite-dimensional Lie groups in their left uniformity* **71** 2019 131 152 , Canadian J. Math.（）, –。[Gl20a] —, *Smoothing operators for vector-valued functions and extension operators* 2020, 2006 00254 , 预印本, arXiv: . 。[Gl20b] —, *Diffeomorphism groups of real-analytic manifolds are L^1-regular*, 预印本, 2020 年, arXiv:2007.15611。

[Gl21a] —, *Direct limits of regular Lie groups*, Math. Nachr. 294 (2021), 74–81. [Gl21b] —, *Manifolds of mappings on rough manifolds and manifold structures on box products*, 准备中。[Gl21c] —, *Semidirect products involving Lie groups of compactly supported diffeomorphisms*, 准备中。[Gl23] —, *Diffeomorphism groups of convex polytopes*, J. Convex Anal. 30 (2023), 343–358. [GHK10] Gl¨ockner, H., T. Hartnick, 和 R. Kohn, *Final group topologies, Kac–Moody groups and Pontryagin duality*, Israel J. Math. **177** (2010), 49–102. [GH23] Gl¨ockner, H. 和 J. Hilgert, *Aspects of control theory on infinite-dimensional Lie groups and G-manifolds*, J. Differ. Equations **343** (2023), 186–232. [GL12] Gl¨ockner, H., 和 B. Langkamp, *Topological algebras of rapidly decreasing matrices and generalizations*, Topol. Appl. **159** (2012), 2420–2422. [GM20] Gl¨ockner, H., 和 N. Masbough, *Products of regular locally compact spaces are $k_{\mathbb{R}}$-spaces*, Top. Proc. **55** (2020), 35–38. [GN03] Gl¨ockner, H., 和 K.-H. Neeb, *Banach-Lie quotients, enlargibility, and universal complexifications*, J. Reine Angew. Math. **560** (2003), 1–28. [GN12] —, *When unit groups of continuous inverse algebras are regular Lie groups*, Studia Math. **211** (2012), 95–109. [GN17] —, *Diffeomorphism groups of compact convex sets*, 《数学探究》 **2** (2017), 760–783. [GS22] Gl¨ockner, H. 和 A. Schmeding, *Manifolds of mappings on Cartesian products*, 《全球分析与几何年刊》 **61** (2022), 359–398. [GSS24] Gl¨ockner, H., A. Schmeding, 和 A. Suri, *Manifolds of continuous BV-functions and vector measure regularity of Banach–Lie groups*, 预印本，2024，arXiv:2407.05190。[GSu23] Gl¨ockner, H. 和 A. Suri, *Strong ILB-Lie groups are L^1-regular*, 手稿，2023。[God71] Godbillon, C., “拓扑学要素”, Hermann, 巴黎, 1971. [Gd58] Godement, R., “代数拓扑与层理论”, Hermann, 巴黎, 1958. [Go04] Goldin, G. A., *Lectures on diffeomorphism groups in quantum physics*, 数理物理中的当代问题，3–93，World Sci. Publ., Hackensack, 新泽西州, 2004. [GW84] Goodman, R., 和 N. R. Wallach, *Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle*, 《J. Reine Angew. Math.》 347 (1984), 69–133. [GW85] —, *Projective unitary positive energy representations of $Diff(\mathbb{S}^1)$*, J. Funct. Anal. 63 (1985), 299–321. [GOV97] Gorbatsevich, V. V., A.L. Onishchik, 和 E.B. Vinberg, “李理论与李变换群基础”，施普林格，1997 [69] Go Goto, M., *On an arcwise connected subgroup of a Lie group*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 157–162. [Grb88] Grabowski, J., *Free subgroups of diffeomorphism groups*, Fund. Math. 131:2 (1988), 103–121.

[Grb93] Grabowski, J., *Derivative of the exponential mapping for infinite-dimensional Lie groups* **11 3** 1993 213 ,《全球分析与几何年刊》: ( ), – 220.[GVF01] Gracia-Bondia, J. M., J.C. Vasilly, 和 H. Figueroa, “非交换几何要素”, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Verlag, 巴塞尔, 2001. [Grv50] Graev, M. I., *Theory of topological groups.* I. *Norms and metrics on groups. Complete groups. Free topological groups* , Usp. Mat. Nauk N.S. 5, 2:36 (1950), 3–56. [Gra84] Gramsch, B., *Relative Inversion in der Störungstheorie von Operatoren und Ψ-Algebren* **269** 1984 27 71 ,《数学年刊》 ( ), – . [Gr57] Grauert, H., *Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen* **133** 1957 450 472 ,《数学年刊》 ( ), – .[Gr58a] —, *Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen*,《数学年刊》135 (1958), 263–273. [Gr58b] —, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, 数学年刊 (2) 68 (1958), 460–472. [GW72] Greenfield, S. J., 和 N. R. Wallach, *Automorphism groups of Banach spaces* **166** 1972 45 57 ,《美国数学会汇刊》( ), – . [GE92] Große-Erdmann, K.-G., *The Borel-Okada theorem revisited*, 资格论文, 哈根远程大学, 1992. [GE04] —, *A weak criterion for vector-valued holomorphy*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 136:2 (2004), 399–411. [Gr54] Grothendieck, A., *Sur les espaces* (F) *et* (DF), Summa Brasil. Math. 3 (1954), 57–121. [Gr55] —, “拓扑张量积与核空间”, Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955. [Gr73] —, “拓扑向量空间”, Gordon and Breach, 纽约, 1973. [Gu08] Gündogan, H., ¨, 预印本, arXiv:math.RA:0803.2800v4[Gu11] Gündogan, H., “光滑截面李代数的分类与结构理论”, 博士论文, 埃朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学, 2011年10月[GR07] Guieu, L., 和 C. Roger, “维拉索罗代数与群”, Les Publications CRM, 蒙特利尔, QC, 2007. [Gu80] Gurarie, D., *Banach uniformly continuous representations of Lie groups and algebras* **36** 1980 401 407 , J. Funct. Anal. ( ), – . [Gu77] Gutknecht, J., *Die C_β^∞-Struktur auf der Diffeomorphismengruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit* ¨ , 博士论文, 苏黎世联邦理工学院, 论文编号5879, Juris Druck Verlag, 苏黎世, 1977. [HV04] Haller, S., 和 C. Vizman, *Nonlinear Grassmannians as coadjoint orbits* **329** 2004 771 785 ,《数学年刊》 ( ), – . [Ham82] Hamilton, R., *The inverse function theorem of Nash and Moser*,《美国数学会通报》7 (1982), 65–222. [Han71] Hansen, V. L., *Some theorems on direct limits of expanding systems of manifolds* **29** 1971 5 36 , Math. Scand. ( ), – . [Han83] —, *The homotopy groups of a space of maps between oriented closed surfaces* **15** 1983 360 364 , 伦敦数学会通报 ( ), – . [Hn19] Hanusch, M., *Differentiability of the evolution map and Mackey continuity* **31** 2019 1139 1177 , Forum Math. ( ), – .

[Hn20] —, *The strong Trotter property for locally μ-convex groups*, J. Lie Theory 30 (2020), 25–32. [Hn22] —, *Regularity of Lie groups*, Commun. Anal. Geom. 30 (2022), 53–152.[Hn23] —,
A C^k-Seeley-Extension-Theorem for Bastiani's differential calculus,《加拿大数学杂志》75 (2023), 170–201. [dlH72] de la Harpe, P., “经典 Banach–李代数与希尔伯特空间中的算子 Banach–李群”, Lecture Notes in Math. 285, 施普林格出版社, 柏林, 1972.[dlH79] —,
Les extensions de $\mathfrak{gl}(H$ par un noyau de dimension finie sont trivi- ( ), J. *ales* **33** 1972 362 373
Funct. Anal. ( ), – . [dlH82] —,
Classical groups and classical Lie algebras of operators,《Proc. Symp. Pure Math.》38:1 (1982), 477–513. [Ha74] Harris, L. A., *Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces* 13 38 , pp. – 收录于: T. L. Hayden 和 T. J. Suffridge（编）, 《无穷维全纯论文集》, Lecture Notes in Math. 364, 施普林格出版社, 柏林, 1974. [HK77] Harris, L. A. 和 W. Kaup, *Linear algebraic groups in infinite dimensions* **21** 1977 666 674 , Illinois J. Math. ( ), – . [Ha81] Hatcher, A., *On the diffeomorphism group of $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$*, Proc. Amer. Math. Soc. **83 2** 1981 427 430 : ( ), – Ha —, *A proof of the Smale conjecture*, Diff($\mathbb{S}^3$) ≅ O(4), Ann. of Math. (2) [83] **117 3** 1983 553 607 : ( ), – Ha —, “代数拓扑”, 剑桥大学出版社, [02] 2002. [Ha12] Hatcher, A., “微分同胚群五十年回顾”, 2012年5月在第50届康奈尔拓扑节上的报告; http://pi.math.cornell.edu/hatcher/ [Hau06] Hausdorff, F., *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie* **58** 1906 19 48 , Leipziger Berichte ( ), – . [HS68] Hausner, M., 和 J. T. Schwartz, “李群; 李代数”, Gordon and Breach, 纽约、伦敦、巴黎, 1968. [HeMa02] Hector, G., 和 E. Macías-Virgós, *Diffeological groups*, Research Exp. Math. 25 (2002), 247–260. [Hel93] Helemskii, A. Ya., “Banach 代数与局部凸代数”, 牛津科学出版社, 牛津大学出版社, 纽约, 1993. [Hel78] Helgason, S., “微分几何、李群与对称空间”, 学术出版社, 伦敦, 1978. [He82] Helton, W., *Non-euclidean functional analysis and electronics*,《美国数学会通报》7 (1982), 1–63. [He71] Hervé, M., “解析函数与多重次调和函数”, Lecture Notes in Math. 198, 施普林格出版社, 柏林, 1971.[He89] —, “无限维空间中的解析性”, 德格鲁伊特出版社, 柏林, 1989.[HR79] Hewitt, E., 和 K. A. Ross, “抽象调和分析 I”, 施普林格出版社, 纽约, 1979. [HG27] Hildebrandt, T. H., 和 L. M. Graves, *Implicit functions and their differentials in general analysis* **29** 1927 127 , 《美国数学会汇刊》 ( ), – 153.[HiNe12] Hilgert, J., 和 K.-H. Neeb, “李群的结构与几何”, 施普林格出版社, 纽约, 2012.

[HP57] Hille, E., 和 R. S. Phillips, “泛函分析与半群”, 美国数学会, 1957年. [Hi99] Hiltunen, S., *Implicit functions from locally convex spaces to Banach spaces* **134** 1999 235 250 , Studia Math. ( ), – . [Hi00] —, *A Frobenius theorem for locally convex global analysis*, 《数学月刊》 129 (2000), 109–117. [HST01] Hirai, T., H. Shimomura, N. Tatsuuma, 和 E. Hirai, *Inductive limits of topologies their direct products and problems related to algebraic* , , , J. Math. *structures* **41** 2001 475 505 Kyoto Univ. ( ), – . [Hr76] Hirsch, M. W.. “微分拓扑”, 数学研究生教材 33, 施普林格出版社, 纽约, 1976年. [HrP70] Hirsch, M. W., 和 C. C. Pugh, *Stable manifolds and hyperbolic sets*, pp. 133–163 收录于: S.-S. Chern 和 S. Smale（编）, “整体分析”, 《Proc. Sympos. Pure Math.》14, 1970. [Hz91] Hirzebruch, F., *Division algebras and topology*, pp. 281–302 收录于: “数字”, 《数学研究生教材》 123, 施普林格出版社, 纽约, 1991年. [HS17] Hielle, E., O. 和 A. Schmeding, *Strong topologies for spaces of smooth maps with infinite-dimensional target* **35** 2017 13 53 ,《数学展望》 ( ), – . [Ho51] Hochschild, G., *Group extensions of Lie groups I, II*, Ann. of Math. 54 (1951), 96–109; 537–551. [Ho65] —, “李群的结构”, Holden Day, 旧金山, 1965年. [HS53a] Hochschild, G., 和 J.-P. Serre, *Cohomology of group extensions*, 《美国数学会汇刊》74 (1953), 110–134. [HS53b] —, *Cohomology of Lie algebras*, Ann. of Math. 57:2 (1953), 591–603. [Hof68] Hofmann, K. H., “紧群理论导论。第一部分”, 图兰大学数学系, 新奥尔良, 路易斯安那州, 1968年.[Hof72] —, *Die Formel von Campbell, Hausdorff und Dynkin und die DefinitionLiescher Gruppen*, 收录于《集合论与拓扑学》（献给 Felix Hausdorff, 1868–1942年）; 251–264页。VEB Deutsch, Verlag Wissensch., 柏林, 1972年.[Hof75] —, *Analytic groups without analysis*, 《数学专题讨论会》16（INDAM, 罗马, 1974年, 拓扑群与李群会议）; 357–374页, 学术出版社, 伦敦, 1975年. [HoM98] Hofmann, K. H., 和 S. A. Morris, “紧群的结构”, Studies in Math. 25, 德格鲁伊特出版社, 柏林、纽约, 1998年. [HoM03] —, *Projective limits of finite-dimensional Lie groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 87:3 (2003), 647–676.[HoM04a] —, *Lie theory and the structure of pro-Lie groups and pro-Lie algebras*, Top. Proc. 28 (2004), 541–567. [HoM04b] —, *The structure of abelian pro-Lie groups*, 《数学杂志》 248 (2004), 867–891.[HoM05] —, *Sophus Lie's third fundamental theorem and the adjoint functor theorem* **8** 2005 115 123 , J. Group Theory ( ), – .[HoM07] —, “连通pro-Lie群的李理论”, EMS Tracts in Mathematics 2, 欧洲数学会, 苏黎世, 2007年. [HMP04] Hofmann, K. H., S. A. Morris, 和 D. Poguntke, *The exponential function of locally connected compact abelian groups* **16 1** , Forum Math. : (2004), 1–16.

[HN77] Hogbe-Nlend, H., 《有界性结构与泛函分析》, 北荷兰出版社, 阿姆斯特丹, 1977年。[Hop42] Hopf, H., *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe*, Comment. Math. Helv. 14 (1942), 257–309。[vHo52a] van Hove, L., *Topologie des espaces fonctionnels analytiques et des groups infinis des transformations*, Bull. de la Classe de Sc., 比利时皇家科学院, 5 辑 38 (1952年), 333–351。[vHo52b] —, *L'ensemble des fonctions analytiques sur un compact en tant qu'algèbre topologique* 1952, 1953 8 17 , 《比利时数学会通报》( ), –。[HM74] Hunt, D. C., 与 S. A. Morris, *Free subgroups of free topological groups*, 第377–387页, 载于: M. F. Newman（编）, 《第二届群论国际会议论文集。澳大利亚国立大学, 1973年8月13–24日》, 《数学讲义》372, 施普林格出版社, 柏林, 1974年。[Hu71] Huˇsek, M., *Products of quotients and of k′-spaces*, 《卡罗来纳大学数学评论》12:1 (1971), 61–68。[Hu94] Husemoller, D., 《纤维丛》, 《数学研究生教材》, 施普林格出版社, 纽约, 1994年。[Il03] Illman, S., *The very-strong C^∞-topology on C^∞ M N and K-equivariant maps* **40** 2003 409 428 (,) , 《大阪数学杂志》( ), –。[IKT13] Inci, H., T. Kappeler, 与 P. Topalov, 《论微分同胚复合的正则性》, Mem. Amer. Math. Soc. 226 (2013), 第1062号, vi+60 页。[Ing19] Ingrisch, S., 《不动点与隐函数的混合可微性》, 硕士论文, 帕德博恩大学, 2019年（导师: H. Gl¨ockner）。[Ir72] Irwin, M. C., *On the smoothness of the composition map*, 《数学季刊》(1972年), 113–133。[Ir80] —, *A new proof of the pseudo-stable manifold theorem*, 《伦敦数学会杂志》, 第 II辑 21, (1980), 557–566。[Is90] Ismagilov, R. S., *Representations of certain infinite dimensional groups*, 载于: A. I. Vershik 与 D. P. Zhelobenko（编）, 《李群表示及相关主题》, Gordan and Breach科学出版社, 纽约, 1990年。[Is96] —, 《无限维群的表示》, 《数学专著译丛》152, 美国数学会, 1996年。[Ja10] Janssens, B., 《变换与不确定性。关于量子概率论、量子统计与自然丛的若干思考》, 博士论文, 2010 ´ 1011 3035 ; arXiv:math.DG: [17] 。JLM Jaramillo, J. A., S. Lajara, 与 O. Madiedo, *Inversion of nonsmooth maps between Banach spaces* 2017, 1712 00565 , 预印本, arXiv: . 。[Jr81] Jarchow, H., 《局部凸空间》, B. G. Teubner, 斯图加特, 1981年。[Jo82] Joris, H., *Une C^∞-application non-immersive qui possede la propriete universelle des immersions* **39 3** 1982 269 , 《数学档案》（巴塞尔）: ( ), – [85] 277 Ka

Kac, V. G., *Constructing groups associated to infinite-dimensional Lie algebras* , 载于: V. G. Kac（编）, 《无限维群及其应用》, MSRI出版物 4, 施普林格出版社, 柏林, 海德堡, 纽约, 1985年。[Ka90] —, 《无限维李代数》, 剑桥大学出版社, 1990年。

[KP83] Kac, V. G., 与 D. H. Peterson, *Regular functions on certain infinite-dimensional groups*，载于：M. Artin 与 J. Tate（编），《算术与几何，第2卷》，Birkhäuser，波士顿，1983年。[KP84] —, *Unitary structure in representations of infinite dimensional groups and a convexity theorem* **76** 1984 1 14，Invent. Math. ( )，–。[KP87] —, *On geometric invariant theory for infinite-dimensional groups*，第109–142页，载于：Cohen A. M. 等（编）《代数群》（乌得勒支 1986年），Lecture Notes in Math. 1271，施普林格出版社，柏林，1987年。[KR87] Kac, V. G.，与 A. K. Raina，《孟买讲座：无限维李代数的最高权表示》，数学物理高级丛书 2，World Scientific，新加坡，1987年。[Ka52] Kadison, R. V., *Infinite unitary groups*，《美国数学会汇刊》72 (1952年)，386–399。[Ka54] —, *Infinite general linear groups*，《美国数学会汇刊》76 (1954年)，66–91。[Ka55] —, *The general linear group of infinite factors*，《杜克数学杂志》22 (1955年)，110–122。[KK63] Kakutani, S.，与 V. Klee, *The finite topology of a linear space*，《数学档案》14 (1963年)，55–58。[Kal86] Kallmann, R. R., *Uniqueness results for homeomorphism groups*，《美国数学会汇刊》**295 1** 1986 389 396 : ( )，– KR [01] Kamran, N.，与 T. Robart, *A manifold structure for analytic Lie pseudogroups of infinite type* **11** 2001 57 80，J. Lie Theory ( )，–。[KR04] —, *An infinite-dimensional manifold structure for analytic Lie pseudogroups of infinite type* **34** 2004 1761，《国际数学研究通知》( )，– 1783。[KA64] Kantorivich, L. V.，与 G. P. Akilov，《赋范空间中的泛函分析》，培格蒙出版社，牛津，1964年。[Kp52] Kaplan, S., *Cartesian products of reals*，《美国数学杂志》74 (1952年)，936– 954。[Ka78] Karoubi, M.，“K-理论”，数学基础丛书 226，施普林格出版社，柏林，1978年。[Ka81] Kaup, W., *Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension I II* **257** 1981 , ，《数学年刊》( )，463–486；262 (1983年)，57–75。[Ka83] —, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces* **183** 1983 503 529，《数学杂志》( )，–。[KR07] Kechris, A.S.，与 C. Rosendal, *Turbulence amalgamation and generic automorphisms of homogeneous structures* **94 2** 2007 302 350 : ( )，– KKM Kedra, J.，D. Kotchick，与 S. Morita，*Crossed flux homomorphisms and vanishing theorems for flux groups* **16** 2006 [06] ，Geom. Funct. Anal. ( )，1246–1273。[Kr74] Keller, H. H.，《局部凸空间中的微分学》，施普林格出版社，柏林，海德堡，纽约，1974年。[Ke73] Keesling, J., *Topological groups whose underlying spaces are separable Fréchet manifolds* **44 1** 1973 181 189，《太平洋数学杂志》: ( )，–。[Kel75] Kelley, J. L.，《一般拓扑学》，《数学研究生教材》27，施普林格出版社，纽约，第2版1975年。

[KM63] Kervaire, M. A., 与 J. W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) 77 (1963年), 504–537。[KW09] Khesin, B., 与 R. Wendt, 《无限维群的几何》, 施普林格出版社, 柏林, 2009年。[KMM24] Khesin, B., G. Misiolek, 与 K. Modin, *Information geometry of diffeomorphism groups* 2411 03265 1 [, 预印本, arXiv: .] v math.DG[83] Kh Kholina, G. G., *groupuscles* **33 6** 1983 823 832 , 《数学札记》( ), – 。[Ki87] Kirillov, A. *Kähler structure on the k-orbits of the group of diffeomorphisms of a circle* **21** 1987 122 125 , 《泛函分析及其应用》( ), – 。[Ki05] —, *The orbit method beyond Lie groups. Infinite-dimensional groups*, 《现代数学综述》, 292–304; 伦敦数学会讲义丛书 321, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2005年。[KY87] Kirillov, A. A., 与 D. V. Yuriev, *Kähler geometry of the infinite-dimensional homogeneous space* $M = \quad + \mathbb{S}^1 / \quad \mathbb{S}^1$ 微分同胚群( ) Rot( ), 《泛函分析及其应用》21 (1987年), 284–294。[Kir01] Kirwan, P., *Complexification of multilinear mappings and polynomials*, Math. Nachr. 231 (2001年), 39–68。[Kl53] Klee, V. L., *Convex bodies and periodic heomeomorphisms in Hilbert space* **74** 1953 10 43 , 《美国数学会汇刊》( ), – 。[Kl1872] Klein, F., "Vergleichende Betrachtungen ¨uber neuere geometrische Forschungen, "("近期几何研究的比较性评述"), 《数学年刊》 **43** 1893 63 100 ( ), – Kl Klotz, M., [11] *The automorphism group of a Banach principal bundle with* **1***-structure* **154** 2011 161 182 , 《几何奉献》( ), – 。[Kl12] —, *An integrability criterion for Banach–Lie triple systems*, J. Lie Theory 22:1 (2012年), 205–244。[Kn30] Kneser, H., *Die kanonische Parametergruppe*, 《德国数学家协会年报》 **39** 1930 72 78 ( ), – KYM Kobayashi, O., A. Yoshioka, [85] Y. Maeda, 与 H. Omori, *The theory of infinite-dimensional Lie groups and its applications* , 《Acta Appl. Math.》3:1 (1985年), 71–106。[Ko95] Kobayashi, S., 《微分几何中的变换群》, 1972年版重印本, 《数学经典》, 施普林格出版社, 柏林, 1995年。[Ko69] Koecher, M., *Gruppen und Lie-Algebren von rationalen Funktionen*, 《数学杂志》109 (1969年), 349–392。[K¨o69] K¨othe, G., 《拓扑向量空间 I》, Grundlehren der Math. Wissenschaften 159, 施普林格出版社, 柏林等, 1969年。[Kop70] Kopell, N., *Commuting diffeomorphisms*, 《Proc. Symp. Pure Math.》14, 美国数学会, 1970年, 165–184。[KS77] Kolomytsev, V. I., 与 Y. S. Samoilenko, *Irreducible representations of inductive limits of groups* **29 4** 1977 526 531 , 《乌克兰数学杂志》: ( ), – ; 英译, 402–405。[Ko64] Komatsu, H., *Semigroups of operators in locally convex spaces*, 《日本数学会杂志》16:3 (1964年), 230–262。[Ko68] Komura, T., *Semigroups of operators in locally convex spaces*, J. Funct. Anal. 2 (1968年), 258–296。

[Kos70] Kostant, B., *Quantization and unitary representations*, 载于: “现代分析与应用讲座 III”, Springer 数学讲义 170 (1970年), 87–208。[KP02a] Krantz, S. G., 与 H. R. Parks, 《隐函数定理》, Birkh¨auser-Verlag, 巴塞尔, 2002年。[KP02b] —, 《实解析函数入门》, Birkh¨auser, 巴塞尔, 22002。[Kri80] Kriegl, A., “Eine Theorie glatter Mannigfaltigkeiten und Vek- torb¨undel”, 博士论文, 维也纳大学, 1980年。[KM97] Kriegl, A., 与 P. W. Michor, “整体分析的便利框架”, 数学综述与专著 53, 美国数学会, 普罗维登斯, 1997年。[KM97b] —, *Regular infinite-dimensional Lie groups*, J. Lie Theory 7 (1997年), 61–99。[KMR16] Kriegl, A., P. W. Michor, 与 A. Rainer, *The exponential law for spaces of test functions and diffeomorphism groups* **27 1** 2016 , 《数学探究》: ( ), 225–265。[Kr76] Krikorian, N., *Invariance of domain in Banach spaces*, Oric. 美国数学会 60 (1976年), 367–368。[Ku65] Kuiper, N. H., *The homotopy type of the unitary group of Hilbert spaces*, Topology 3 (1965年), 19–30。[Kum02] Kumar, S., “Kac-Moody 群、其旗簇与表示理论”, Progress in Math. 204, Birkh¨auser, 波士顿, 2002年。[Ku18] Kupers, A., “流形的微分同胚群讲义”, 讲义, 2019年2月22日版本 https://people.math.harvard.edu/kupers/teaching/272x/book.pdf.[Kur59] Kuranishi, M., *On the local theory of continuous infinite pseudo groups I* **15** 1959 225 , 《名古屋数学杂志》( ), ┤ 98] 260 LMP Lalonde, F., D. McDuff, 与 L. Polterovich, *On the flux conjectures*, 载于: “几何、拓扑与动力系统”（蒙特利尔, PQ, 1995年）; 69–85, CRM 会议论文集讲义 15, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 1998年。[La75] Lang, S., “$SL_2(\mathbb{R})$”, Addison-Wesley, 雷丁, Mass. 1975年。[La93] Lang, S., 《代数》, Addison Wesley 出版公司, 伦敦, 1993年。[La99] —, 《微分几何基础》, 数学研究生教材 191, 施普林格出版社, 柏林, 1999年。[Lar99] Laredo, V. T., *Integration of unitary representations of infinite dimensional Lie groups* **161 2** 1999 478 508 , J. Funct. Anal. : ( ), –。[Las57] Lashof, R. K., *Lie algebras of locally compact groups*, 《太平洋数学杂志》7 (1957年), 1145–1162。[Lars99] Larsson, T. A., *Lowest-energy representations of non-centrally extended diffeomorphism algebras* **201** 1999 461 470 , 《Commun. Math. Phys.》( ), –。[Lau55] Laugwitz, D., *Über unendliche kontinuierliche Gruppen.* I. *Grundlagen der Theorie; Untergruppen* **130** 1955 337 350 , 《数学年刊》( ), –。[Lau56] —, *Über unendliche kontinuierliche Gruppen.* II. *Strukturtheorie lokal Banachscher Gruppen* 1956, , 巴伐利亚科学院数学与自然科学部学报 (1957年), 261–286。[Lau73] —, *Ist Differentialrechnung ohne Grenzwertbegriff möglich?*, 数学物理学期报告 20 (1973年), 182–201。[LaTi66] Lazard, M., 与 J. Tits, *Domaines d'injectivité de l'application exponentielle* **4** 1966 315 322 , Topology ( ), –。

[Lea61] Leach, E. B., *A note on inverse function theorems*, Proc. Am. Math. Soc. 12 (1961), 694–697. [Lec80] Lecomte, P., *Sur l'algèbre de Lie des sections d'un fibré en algèbre de Lie* **30** 1980 35 50 , Ann. Inst. Fourier ( ), – . [Lec81a] —, *Sur l'algèbre de Lie des sections d'un fibré en algèbre de Lie*, Ann. Inst. Fourier 30 (1980), 35–50. [Lec81b] —, *On the infinitesimal automorphisms of a vector bundle*, 纯粹与应用数学杂志, IX. S´er. 60 (1981), 229–239. [Lec85] —, *Sur la suite exacte canonique associée à un fibré principal*, 法国数学会通报 13 (1985), 259–271. [Lem95] Lempert, L., *The Virasoro group as a complex manifold*, 数学研究快报 2 (1995), 479–495. [Lem97] —, *The problem of complexifying a Lie group*, 载于: P. D. Cordaro 等编, 《多维复分析与偏微分方程》, 《当代数学》205, 美国数学会, 普罗维登斯, 1997年, 第169–176页。 [Les66] Leslie, J. A., *On a theorem of E. Cartan*, 纯粹与应用数学年刊 (4) 74 (1966), 173–177.[Les67] —, *On a differential structure for the group of diffeomorphisms*, Topol- ogy 6 (1967), 263–271. [Les68] —, *Some Frobenius theorems in global analysis*, J. Diff. Geom. 2 (1968), 279–297.[Les82] —, *On the group of real analytic diffeomorphisms of a compact real analytic manifold* **274** 1982 651 669 ,《美国数学会汇刊》 ( ), – .[Les83] —, *A Lie group structure for the group of analytic diffeomorphisms*,《意大利数学联合会通报》 A (6) 2:1 (1983), 29–37.[Les90] —, *A path functor for Kac-Moody Lie algebras*, 载于: 《李理论、微分方程与表示论（蒙特利尔, PQ, 1989）》, 第265–270页; 蒙特利尔大学, QC, 1990年。[Les92] —, *Some integrable subalgebras of infinite-dimensional Lie groups*,《美国数学会汇刊》333 (1992), 423–443.[Les93] —, *On the integrability of some infinite dimensional Lie algebras*, 预印本, 霍华德大学, 1993年[Les03] —, *On a diffeological group realization of certain generalized symmetrizable Kac-Moody Lie algebras* **13** 2003 427 442 , J. Lie Theory ( ), – . [Lew39] Lewis, D., *Formal power series transformations*,《杜克数学杂志》5 (1939), 794–805.[Lic74] Lichnerowicz, A., *Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire* **24** 1974 219 266 , Ann. Inst. Fourier ( ), – . [Lie80] Lie, S., *Theorie der Transformationsgruppen I*,《数学年刊》16:4 (1880), 441–528.[Lie95] —, *Unendliche kontinuierliche Gruppen*, Abhandlungen, S¨achsische Gesellschaft der Wissenschaften 21 (1895), 43–150. [LE93] Lie, S., 和 F. Engel, 《变换群理论 III》, Teubner, 莱比锡, 1893年; [Lod98] Loday, J.-L., 《循环同调》, 数学基础丛书 301, 施普林格出版社, 柏林, 1998年。[Lo69] Loos, O., 《对称空间 I: 一般理论》, Benjamin, 纽约, 1969年。

[Lo75] —, 《约当对》, 数学讲义 460, 施普林格出版社, 柏林, 1975年。[Lk92] Losik, M. V., *Fréchet manifolds as diffeologic spaces*, Russ. Math. 36 (1992), 31–37. [LV94] Luminet, D., 和 A. Valette, *Faithful uniformly continuous representations of Lie groups* 2 **49** 1994 100 108 , J. London Math. Soc. ( ) ( ), – . [Ma01] Ma, T. W., *Inverse mapping theorem on coordinate spaces*, Bull. London Math. Soc. 33 (2001), 473–482. [ML63] MacLane, S., 《同调》, 数学基础丛书 114, 施普林格出版社, 柏林, 1963年。[ML71] —, 《工作数学家的范畴》, 施普林格出版社, 纽约, 1971年。[ML78] —, *Origins of the cohomology of groups*, Enseign. math. 24:2 (1978), 1–29. [MOK85] Maeda, Y., H. Omori, O. Kobayashi, 和 A. Yoshioka, *On regular Fréchet Lie groups. VIII. Primordial operators and Fourier integral operators* **8 1** 1985 1 47 , 《东京数学杂志》: ( ), – . [MS75] Magnin, L., 和 J. Simon, *Lie algebras associated with topological nilpotent groups* **8** 1975 171 180 , Rep. Math. Phys. ( ), – . [Mai02] Maier, P., *Central extensions of topological current algebras*, 载于: A. Strasburger 等编, 《有限维与无限维李群上的几何与分析》, 巴拿赫中心出版物 55, 华沙, 2002 年, 第 61–76 页。[MN03] Maier, P., 和 K.-H. Neeb, *Central extensions of current groups*, 《数学年刊》326:2 (2003), 367–415. [Ms62] Maissen, B., *Lie-Gruppen mit Banachräumen als Parameterräume*, 《数学学报》108 (1962), 229–270. [Ms63] —, *Über Topologien im Endomorphismenraum eines topologischen Vektorraums* **151** 1963 283 285 , 《数学年刊》( ), – . [MP98] Malikov, F., 和 R. G. Penner, *The Lie algebra of homeomorphisms of the circle* **140 2** 1998 282 322 , Adv. Math. : ( ), – . [MO92] Margalef-Roig, J., 和 E. Outerelo Dominguez, 《微分拓扑》, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1992年。[MR95] Marion, J., 和 T. Robart, *Regular Fréchet Lie groups of invertibe elements in some inverse limits of unital involutive Banach algebras*, Georgian Math. J. 2 (1995), 425–444. [Ma18] Marquis, T., 《域上Kac-Moody群导论》, EMS数学教材, 欧洲数学会（EMS）, Z ¨ 2018 ürich, MNe Marquis, T., 和 K.-H. Neeb, *Half Lie groups*, Transf. Groups 23 (2018), 801–840[[18] Mar67] Marsden, J. E., *Hamiltonian one parameter groups: A mathematical exposition of infinite dimensional Hamiltonian systems with applications in classical and quantum mechanics* **28** , Arch. Rational Mech. Anal. (1968), 362–396. [MA70] Marsden, J., 和 R. Abraham, *Hamiltonian mechanics on Lie groups and Hydrodynamics* 237 243 , 载于: S. S. Chern 和 S. Smale 编, 《整体分析》, 《Proc. Symp. Pure Math.》16, 美国数学会, 普罗维登斯, 1970年, 第–页。

[Mat74] Mather, J. N., *Commutators of diffeomorphisms*, Comment. Math. Helv. 49 (1974), 512–528. [Mat75] —, *Commutators of diffeomorphisms. II*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 33–40. [MaTh35] Mayer, W., and T. Y. Thomas, *Foundations of the theory of Lie groups*, Ann. of Math. 36:3 (1935), 770–822. [Mau88] Maurer, L., *Über allgemeinere Invarianten-Systeme*, M¨unchner Berichte 43 (1888), 103–150. [Maz33] Mazur, S., *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Stud. Math. 4 (1933), 70–84. [MDS98] McDuff, D., and D. Salamon, “辛拓扑导论”, 牛津数学专著, 克拉伦登出版社, 牛津, 1998年. [MD05] McDuff, D., *Enlarging the Hamiltonian group*, 辛拓扑会议, J. Symplectic Geom. 3 (2005年), 481–530. [MV97] Meise, R., and D. Vogt, “泛函分析导论”, 克拉伦登出版社, 牛津, 1997. [Mi92] Mical, J., *Coordinates of the second kind on groups of currents*, Bulletin of the Polish Acad. Sciences, Mathematics 40:1 (1992年), 31–39[Mi94] —, *Applications exponentielles pour les groupes de courants et la décomposition de Birkhoff pour les groupes des noeuds*, Dissertationes Math. CCCXXXII, Polska Akad. Nauk. Inst. Matmatycny, 华沙, 1994[MicE52] Michael, E. A., “局部乘法凸拓扑代数”, Mem. Amer. Math. Soc. 11, 美国数学会, 1952年. [MicE59] —, *Convex structures and continuous selections*, 《加拿大数学杂志》 11 (1959), 556–575. [Mic68] Michael, E., *Bi-quotient maps and Cartesian products of quotient maps*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 18 (1968年), 287–302. [MicA38] Michal, A. D., *Differential calculus in linear topological spaces*, Proc. Nac. Acad. Sci. USA 24 (1938), 340–342.[MicA40] —, *Differential of functions with arguments and values in topological abelian groups* **26** 1940 356 359 , Proc. Nat. Acad. Sci. USA ( ), –.[MicA45] —, *The total differential equation for the exponential function in non-commutative normed linear rings* **31** 1945 , Proc. Nat. Acad. Sci. USA ( ), 315–317.[MicA48] —, *Differentiable infinite continuous groups in abstract spaces*, Revista Ci., Lima 50 (1948), 131–140. [MiE37] Michal, A. D., and V. Elconin, *Differential properties of abstract trans-formation groups with abstract parameters* **59** 1937 , 《美国数学杂志》 ( ), 129–143.[Mr80] Michor, P. W., “可微映射流形”, Shiva Publish- ing, Orpington, Kent (U.K.), 1980.[Mi84] —, *A convenient setting for differential geometry and global analysis I, II* ´ **25** 1984 63 109, 113 178 , Cah. Topologie Geom. Differ. ( ), –.[Mi87] —, *The cohomology of the diffeomorphism group of a manifold is a Gelfand-Fuks cohomology* 14 , in “第 th 届抽象分析冬季学校会议录，Srni，1986年”, Suppl. Rend. del Circ. Mat. Palermo II 14 (1987), 235–246.[Mi91] —, “纤维丛规范理论”, Bibliopolis, ed. di fil. sci., Napoli, 1991.

[Mi20] —, *Manifolds of mappings for continuum mechanics*, pp. 3–75 in: R. Segev et al. (eds.), “几何连续介质力学”, Birkh¨auser, Cham, 2020.[MM13] Michor, P. W., and D. Mumford, $\mathbb{R}^n$ *1, zoo of diffeomorphism groups on* **44 4** 2013 529 ,《全球 54
分析与几何年刊》 : ( ), –[99]

MT Michor, P. W., and J. Teichmann, *Description of infinite dimensional abelian regular Lie groups* **9** 1999 487 489 , J. Lie Theory ( ), – .

[Mick87] Mickelsson, J., *Kac-Moody groups topology of the Dirac determinant* , , *bundle* **110** 1987 173
and fermionization,《Commun. Math. Phys.》 ( ), – 183.[Mick89] —, “流代数与群”, Plenum Press, 纽约, 1989. [Mil82] Milnor, J., *On infinite-dimensional Lie groups*, Preprint, Institute for Advanced Study, 普林斯顿, 1982. [Mil84] —, *Remarks on infinite-dimensional Lie groups*, pp. 1007–1057 in: B. DeWitt and R. Stora (eds), “Relativit´e, groupes et topologie II (Les Houches, 1983年), North Holland, 阿姆斯特丹, 1984年. [Mim95] Mimura, M., *Homotopy theory of Lie groups*, in: I. M. James (ed), “代数拓扑手册”, North Holland, 阿姆斯特丹, 1995. [Mit61] Mityagin, B. S., *Approximative dimension and bases in nuclear spaces*, Russ. Math. Surv. 16 (1961), 59–128.[Mit70] —, *The homotopy structure of the linear group of a Banach space*, Us- pekhi Mat. Nauk 25:5 (1970年), 63–106.[ML18] Moodie, I C, and M W Long, *An exact power series representation of the Baker–Campbell–Hausdorff formula* 1807 07884 1 , arXiv:math-ph: .

v 20 Jul 2018[MR91] Moerdijk, I., and G. E. Reyes, “光滑无穷小分析模型”, 施普林格出版社, 柏林, 1991年. [MZ55] Montgomery, D., and L. Zippin, “拓扑变换群”, Interscience, 纽约, 1955年. [Mo64] Moore, C. C., *Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups. I II* **113** 1964 40 , ,《美国数学会汇刊》

( ), – 63; 63—86. [Mo76] —, *Group extensions and cohomology of locally compact groups. III*, *IV*,《美国数学会汇刊》 221:1 (1976年), 1–33; 35–58. [Mr56] Morita, K., *On decompositon spaces of locally compact spaces*, Proc. Japan Acad. 32 (1956), 544–548. [Mo61] Moser, J., *A rapid technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations* **47** 1961 1824 1831 , Proc. Nat. Acad.

Sci. USA ( ), – . [MS03] Mostkowitz, M., and R. Sacksteder, *The exponential map and differential equations on real Lie groups* **13** 2003 291 , J. Lie Theory ( ), – 306
[77] *Holomorphic germs on infinite-dimensional spaces* Mu

Mujica, J., , pp. 313–321 in: M. C. Matos (ed), “无穷维全纯及其应用”, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1977. [Mu79] —, *Spaces of germs of holomorphic functions*, Studies in Analysis, Adv. in Math. Suppl. Stud. 4 (1979), 1–41.[Mu83] —, *Spaces of continuous functions with values in an inductive limit*, pp. 359–367 in: G. I. Zapata (ed), “泛函分析、全纯性与逼近理论”, Lect. Notes Pure Appl. Math. 83, 马塞尔·德克尔, 纽约, 1983.

[Mu84] —, *A completeness criterion for inductive limits of Banach spaces*, 第319–329页, 载于: 《泛函分析、全纯性与逼近论, II》（里约热内卢, 1981年）, North Holland, 阿姆斯特丹, 1984年。[MW09] M
¨
Equivalences of smooth and continuous prin- uller, C., 与 C. *cipal bundles with infinite-dimensional structure group* **9** Wockel, , 《Adv. Geom.》（2009年）, 605–626。[Mu08] M¨uller, O., *A metric approach to Fréchet geometry*, 《J. Geom. Phys.》58（2008年）, 1477–1500。[MST99] Mu
˜
Complexifications of noz, G. *real Banach spaces polynomials and multilinear maps* A.、Y. Sarantopoulos 与 A. Tonge, , Stud. Math. 134:1（1999年）, 1–33。[Mu88] Murray, M. K., *Another construction of the central extension of the loop group* **116** 1988 73 80 , 《Commun. Math. Phys.》（）, –。[My54] Myers, S. B., *Algebras of differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 5（1954年）, 917–922。[Na69] Nachbin, L., 《全纯映射空间上的拓扑》, 数学成果 47, 施普林格出版社, 柏林, 1969年。[Nag36] Nagumo, M., *Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen* **13** 1936 61 80 , 《Jap. J. Math.》（）, –。[Nar25] Nariman, S., *Continuous cohomology of diffeomorphism groups*, 预印本 [Nat94] Natarajan, L., *Unitary highest weight-modules of inductive limit Lie algebras and groups* **167** 1994 9 28 , 《代数杂志》（）, –。[NRW91] Natarajan, L. 、 E. Rodriguez-Carrington 与 J. A. Wolf, *Differentiable structure for direct limit groups* **23** 1991 99 109 , 《Letters Math. Phys.》（）, –。[NRW93] —, *Locally convex Lie groups*, Nova J. Algebra Geom. 2:1（1993年）, 59–87。[NRW94] —, *New classes of infinite dimensional Lie groups*, 《Proc. Symp. Pure Math.》56:2（1994年）, 377–392。[NRW01] —, *The Bott-Borel Weil Theorem for direct limit groups*, 《美国数学会汇刊》353（2001年）, 4583–4622。[Nat35] Nathan, D. S., *One-parameter groups of transformations in abstract vector spaces* **1 4** 1935 518 526 , 《杜克数学杂志》:（）, –。[Ne98] Neeb, K.-H., *Holomorphic highest weight representations of infinite dimensional complex classical groups* **497** 1998 , 《J. Reine Angew. Math.》（）, 171–222[Ne00] Neeb, K.-H., 《李理论中的全纯性与凸性》, 数学阐释 28, de Gruyter Verlag, 柏林, 2000年。[Ne01a] —, *Infinite-dimensional groups and their representations*, 第131–178页, 载于: A. Huckleberry 与 T. Wurzbacher（编）, 《无限维 K¨ahler 流形》, DMV-Seminar 31, Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2001年。[Ne01b] —, *Borel-Weil theory for loop groups*, 第179–229页, 载于: A. Huckleberry 与 T. Wurzbacher（编）, 《无限维 K¨ahler 流形》, DMV-Seminar 31, Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2001年。[Ne01c] —, *Locally finite Lie algebras with unitary highest weight representations* **104 3** 2001 343 358 , 《manuscripta mathematica》: （）, –。[Ne02a] —, *Central extensions of infinite-dimensional Lie groups*, Ann. Inst. Fourier 52:5（2002年）, 1365–1442。[Ne02b] —, *Universal central extensions of Lie groups*, 《Acta Appl. Math.》73（2002年）, 175–219。

[Ne02c] —, *Classical Hilbert–Lie groups, their extensions and their homotopy groups* **87** 151 ，第–页，载于：A. Strasburger 等（编），《有限维与无限维李群上的几何与分析学》，巴拿赫中心出版物 55，华沙，2002年。[Ne02d] —, *A Cartan–Hadamard Theorem for Banach–Finsler manifolds*, Geometriae Dedicata 95（2002年），115–156。[Ne03] —, *Locally convex root graded Lie algebras*, Travaux math. 14（2003年），25–120。[Ne04a] —, *Abelian extensions of infinite-dimensional Lie groups*, Travaux math. 15（2004年），69–194。[Ne04b] —, *Infinite-dimensional Lie groups and their representations*, 第213–328页，载于：J. P. Anker 与 B. Ørsted（编），《李理论：李代数与表示》，Progress in Math. 228，Birkh¨auser Verlag，2004年。[Ne04c] —, *Current groups for non-compact manifolds and their central extensions* 109 183 ，第–页，载于：T. Wurzbacher（编），《无限维群与流形》，IRMA 数学讲义与理论物理学 5，de Gruyter Verlag，柏林，2004年。[Ne05] —, *Exact sequences for Lie group cohomology with non-abelian coefficients* ，准备中。[Ne06a] —, *Towards a Lie theory of locally convex groups*, Jpn. J. Math. 1（2006年），291–468。[Ne06b] —, *Lie algebra extensions and higher order cocycles*, J. Geom. Symmetry Phys. 5（2006年），48–74。[Ne06c] —, *On the period group of a continuous inverse algebra*, 准备中。[Ne06d] —, *Non-abelian extensions of topological Lie algebras*, Comm. Algebra 34（2006年），991–1041。[Ne07] —, 无限维李群的非阿贝尔扩张，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 57（2007年），209–271。[Ne08] —, *Lie group extensions associated to projective modules of continuousinverse algebras*, 载于《Srni 几何与物理冬季学校会议录，2008年》，Archivum Mathematicum (Brno) 44（2008年），339–363。[Ne10] —, *On differentiable vectors for representations of infinite dimensional Lie groups* **259** 2010 2814 2855 ，J. Funct. Anal.（），–。[Ne11] —, *On analytic vectors for unitary representations of infinite dimensional Lie groups* **61 5** 2011 1441 ，Ann. Inst. Fourier (Grenoble)：（），– 1476。[Ne14] —, *Unitary representations of Unitary Groups*, 载于《李理论研讨会》，编：G. Mason、I. Penkov、J. Wolf，Developments in Math. 37，施普林格，2014年，197–243[Ne17] —, *Bounded and Semi-bounded Representations of Infinite Dimensional Lie Groups*, 载于《表示论——当前趋势与展望》，编：P. Littelmann 等，欧洲数学学会，EMS Ser. Congr. Rep.，欧洲数学学会，Z¨urich，2017年，第541–563页，arXiv:math.RT:1510.08695。[NØ06] Neeb K.-H. 与 B. Ørsted, *A topological Maslov index for 3-graded Lie groups* **233** 2006 426 477 ，Journal of Funct. Anal.（），–。[NP00] Neeb K.-H. 与 D. Pickrell, *Supplements on the papers entitled “On a Theorem of S. Banach” and “The separable representations of U H ”* （），J. Lie Theory 10（2000年），107–109

[NS13] Neeb, K.-H. 和 H. Salmasian, *Differentiable vectors and unitary representations of Frechet–Lie supergroups* **275 1** 2013 419 451 ，《数学杂志》： （），–。

[NSZ14] Neeb, K.-H.、H. Salmasian 和 C. Zellner, *On an invariance property of the space of smooth vectors* **55 3** 2015 501 515 ，Kyoto J. Math.： （），–。

[NSZ17] —, *Smoothing operators and C^*-algebras for infinite dimensionalLie groups*, 《国际数学杂志》28:5（2017），DOI 10.1142/S0129167X1750042。[NS01] Neeb, K.-H. 和 N. Stumme, *On the classification of locally finite split simple Lie algebras* **533** 2001 25 53 ，《J. Reine Angew. Math.》 （），–。[NTS15] Neeb, K.-H.、T. Thiemann 和 H. Sahlmann, *Weak Poisson structureson infinite dimensional manifolds and hamiltonian actions*，载于《李群理论及其在物理学中的应用》，V. Dobrev 编，施普林格数学与统计丛书，施普林格，2015；105–136。[NV03] Neeb, K.-H. 和 C. Vizman, *Flux homomorphisms and principal bundles over infinite-dimensional manifolds* **139** 2003 ，《数学月刊》 （），309–333。[NeW08a] Neeb, K.-H. 和 F. Wagemann, *The second cohomology of current algebras of general Lie algebras* **60 4** 2008 892 922 ，Canadian J. Math.： （），–。[NeW08b] —, *Lie group structures on groups of smooth and holomorphic maps*, 《几何奉献》134（2008），17–60。[NeWo09] Neeb, K.-H. 和 C. Wockel, *Central extensions of groups of sections*, 《全球分析与几何年刊》36:4（2009），381–418。[Neh93] Neher, E., *Generators and relations for 3-graded Lie algebras*，《代数杂志》155（1993），1–35。[Neh96] —, *Lie algebras graded by 3-graded root systems and Jordan pairs covered by grids* **118** 1996 439 491 ，《美国数学杂志》 （），–。[NR17] Nenning, D. N. 和 A. Rainer, *The Heine group for spaces of test functions* 2017, 1711 01196 ，预印本，arXiv:。。[Ner83] Neretin, Yu. A., *Boson representation of the diffeomorphisms of the circle* **28** 1983 411 414 ，《苏联数学文献》 （），–。[Ner87a] —, *On spinor representations of* $\mathrm{O}(\infty,\mathbb{C})$, 《苏联数学文献》34:1（1983），71–74。[Ner87b] —, *A complex semigroup containing the group of diffeomorphisms of the circle* **21** 1987 82 83 ，《泛函分析及其应用》 （），–。[Ner90] —, *Holomorphic extensions of representations of the group of diffeomorphisms of the circle* **67** 1990 75 97 ，《苏联数学文集》 （），–。[Ner93] —, *Categories of bistochastic measures and representations of some infinite dimensional groups* **75** 1993 197 ，《俄罗斯科学院数学文集》 （），–219。[Ner96] —, 《对称范畴与无限维群》，伦敦数学会专著新系列第16卷，克拉伦登出版社，牛津，1996年。[NO97] Neretin, Yu. A. 和 G. I. Ol'shanskiĭ, *Boundary values of holomorphic functions singular unitary representations of $O\ p\ q$ and their limits as $q \to \infty$* **87** 1997 3983 4035 ，（，），《数学科学杂志》（纽约） （），–。[Ne87] Nessonov, N. I., *A complete classification of the representations of一般线性群(∞) containing the identity representation of the unitary subgroup*, 《苏联数学文集》58:1（1987），127–147。[vN29] von Neumann, J., *Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen* **30 1** 1929 3 42 ，《数学杂志》： （），–。

[vN50] von Neumann, J., *Functional Operators II: The Geometry of Orthogonal Spaces* **22**, , 《数学年刊研究》, 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1950年。[New51] Newburgh, J. D., *The variation of spectra*, 《杜克数学杂志》18（1951年），165–176。[NW56] Newns, W. F. 和 A. G. Walker, *Tangent planes to a differentiable manifold* **31** 1956 400 406 , 《伦敦数学会杂志》（），–。[Nij74] Nijenhuis, A., *Strong derivatives and inverse mappings*, 《美国数学月刊》81（1974年），969–980。[Lec79] Lecomte, P., *Sur l'algèbre de Lie des automorphismes infinitesimaux du fibre tangent* ´ **288** 1979 661 663 , 《巴黎科学院院报》A辑（），–。[Nik15] Nikitin, N., *Exponential laws for weighted function spaces and regularity of weighted mapping groups* 2015, 1512 07211 , 预印本，arXiv:。[Nik21] —, 《无限维李群的正则性与指数律》，博士论文，帕德博恩大学，2021年。[Nb70] Noble, N., *The continuity of functions on cartesian products*, 《美国数学会会刊》149（1970年），187–198。[OMS81] Okamoto, K.、H. Matsushima 和 T. Sakurai, *On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group I* **11 1** 1981 181 193 , 《广岛数学杂志》:（），–。[OS82a] Okamoto, K. 和 T. Sakurai, *On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group II*, 《广岛数学杂志》12（1982年），385–397。[OS82b] —, *An analogue of Peter-Weyl Theorem for the infinite dimensional unitary group* **12** 1982 529 541 , 《广岛数学杂志》（），–。[Ol84] Ol'shanski ˘ı, G. I., , 《泛函分析及其应用》18:1（1984年），28–42。[Ol86] —, *Unitary representation of the group $SO_\circ\infty\infty$ as limits of unitary representations of the groups $SO_\circ n\infty$ as $n\to\infty$* （，）（，），《泛函分析及其应用》20:4（1986年），46–57。[Ol88] —, *Method of holomorphic extension in the theory of unitary representations of infinite dimensional classical groups* **22 4**, 《泛函分析及其应用》:（1988年），273–285。[Ol90] —, *Unitary representations of infinite dimensional pairs $G\ K$ and the formalism of R. Howe* （，），第–页，载于: A. Vershik 和 D. Zhelobenko（编），《李群表示及相关主题》，戈登与布里奇出版社，纽约，1990年。[Ol91a] —, *Representations of infinite dimensional classical groups limits of envelopping algebras and Yangians* , , , 第-页，载于: 《表示论专题》，《苏联数学进展》第2卷，美国数学会，普罗维登斯，1991年。[Ol91b] —, *On semigroups related to infinite dimensional groups*, 第67–101页，载于: 《表示论专题》，《苏联数学进展》第2卷，美国数学会，普罗维登斯，1991年。[Ol91c] —, *Caractères generalisés de $U(\infty)$ et fonctions intérieurs*, 《巴黎科学院院报》313（1991年），9–12。[OV96] Ol'shanski ˘ı, G. I. 和 A. Vershik, *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite hermitian matrices* 1 66 《美国数学会译丛》（2）175（1996年），137–175。

[Olv93] Olver, P. J., 《李群在微分方程中的应用》。Graduate Texts in Math. 107，施普林格出版社，纽约，21993。[Omo70] Omori, H.,
On the group of diffeomorphisms on a compact manifold，载于《整体分析》（纯数学专题讨论会论文集，第XV卷，伯克利，加利福尼亚州，1968年），美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1970年，167–183。[Omo72a] Omori, H.,
Local structures of groups of diffeomorphisms，《日本数学会杂志》24（1972年），60–88。[Omo72b] —，*On smooth extension theorems*，《日本数学会杂志》24（1972年），405–432。[Omo73] —，*Groups of diffeomorphisms and their subgroups*，《美国数学会汇刊》179（1973年），85–122。[Omo74] —，《无限维李变换群》，数学讲义427，施普林格出版社，柏林—纽约，1974年。[Omo78] —,
On Banach-Lie groups acting on finite-dimensional manifolds，东北数学杂志30（1978年），223–250。[Omo80] —，*A method of classifying expansive singularities*，微分几何杂志15（1980年），493–512。[Omo81] —,
A remark on non-enlargible Lie algebras，《日本数学会杂志》33:4（1981年），707–710。[Omo97] —，《无限维李群》，数学专著译丛158，美国数学会，普罗维登斯，1997年。[OdH71] Omori, H. 和 P. de la Harpe，*Opération de groupes de Lie banachiques sur les variétés différentielles de dimension finie*，《巴黎科学院院报》S´er. A-B 273（1971年），A395–A397。[OdH72] —，*About interactions between Banach-Lie groups and finite dimensional manifolds* **12** 1972 543 570，J. Math. Kyoto Univ.（），–。[OMY80] Omori, H.、Y. Maeda 和 A. Yoshioka，*On regular Fréchet–Lie groups. I. Some differential geometrical expressions of Fourier integral operators on a Riemannian manifold* **3 2** 1980 353 390，《东京数学杂志》：（），–。[OM81a] —，*On regular Fréchet–Lie groups. II. Composition rules of Fourier-integral operators on a Riemannian manifold* **4 2**，《东京数学杂志》：（1981年），221–253。[OM81b] Omori, H.、Y. Maeda、A. Yoshioka 和 O. Kobayashi，*On regular Fréchet–Lie groups. III. A second cohomology class related to the Lie algebra of pseudodifferential operators of order one* **4 2**，《东京数学杂志》：（1981年），255–277。[OMY82] —,
On regular Fréchet-Lie groups. IV. Definition and fundamental theorems **5** 1982 365 398，《东京数学杂志》（），–。[OMY83a] —,
On regular Fréchet–Lie groups. V. Several basic properties，《东京数学杂志》6:1（1983年），39–64。[OMY83b] —，*On regular Fréchet–Lie groups. VI. Infinite-dimensional Lie groups which appear in general relativity* **6 2** 1983 217 246，《东京数学杂志》：（），–。[Oer80] Ørsted, B.，*A model for an interacting quantum field*，J. Funct. Anal. 36（1980年），53–71。[Ono06] Ono, K.,
Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture，Geom. Funct. Anal. 16（2006年），981–1020。[Ot95] Ottesen, J. T.，《量子物理中的无限维群与代数》，物理学讲义，新系列27，施普林格出版社，柏林，1995年。

[OR98] Ovsienko, V. 和 C. Roger, *Generalizations of Virasoro group and Virasoro algebra through extensions by modules of tensor densities on S^1*, 《数学探究》新系列9:2（1998年），277–288。[Pa57] Palais, R. S., 《变换群李理论的整体表述》，美国数学会回忆录22，美国数学会，1957年。[Pa61] —, *Equivalence of nearby differentiable actions of a compact Lie group*, 《美国数学会通报》67（1961年），362–364。[Pa65] —, *On the homotopy type of certain groups of operators*, Topology 3（1965年），271–279。[Pa66] —, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology 5（1966年），1–16。[Pa68] —, 《全局非线性分析基础》，Benjamin，纽约，1968年。[Pali68] Palis, J., *On Morse-Smale dynamical systems*, Topology 8（1968年），385–404。[Pali74] —, *Vector fields generate few diffeomorphisms*, 《美国数学会通报》80:3（1974年），503–505。[Pat83] Paterson, A. L. T., *Harmonic analysis on unitary groups*, J. Funct. Anal. 53（1983年），203–223。[PS09] Patyi, I. 和 S. B. Simon, *On real analytic Banach manifolds*, 《伦敦数学会杂志》（第二辑）80:2（2009年），375–387。[PCB87] P´erez Carreras, P. 和 J. Bonet, 《桶化局部凸空间》，North-Holland，阿姆斯特丹，1987年。[Pe92] Pestov, V. G., *Nonstandard hulls of Banach-Lie groups and algebras*, Nova J. Algebra Geom. 1（1992年），371–381。[Pe93a] —, *Free Banach–Lie algebras couniversal Banach-Lie groups and more*, **157 1** 1993 137 144, 《太平洋数学杂志》：（），–。[Pe93b] —, *Enlargible Banach–Lie algebras and free topological groups*, Bull. Aust. Math. Soc. 48（1993年），13–22。[Pe95a] —, *Correction to "Free Banach–Lie couniversal Banach-Lie groups and more"* **171 2** 1995 585 588, 《太平洋数学杂志》：（），–。[Pe95b] —, *Regular Lie groups and a theorem of Lie-Palais*, J. Lie Theory 5:2（1995年），173–178。[PU21] Pestov, V. G. 和 V. V. Uspenskij, *On epimorphisms in some categories of infinite-dimensional Lie groups* **31 3** 2021 871 884, J. Lie Theory :（），–。[Ptr59] Peetre, J., *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels*, Math. Scand. 7（1959年），211–218。[Ph91] Phillips, N. C., *K-theory for Fréchet algebras*, Int. J. Math. 2（1991年），77–129。[Pi88] Pickrell, D., *The separable representations of $U(\mathcal{H})$*, Proc. Amer. Math. Soc. 102（1988年），416–420。[Pi89] —, *On the Mickelsson-Faddeev Extension and Unitary Representations*, Comm. Math. Phys. 123（1989年），617–625。[Pi90] —, *On $U(\infty)$-invariant measures*, 未发表的预印本，1990年。[Pi96] —, *On YM_2 measures and area-preserving diffeomorphisms*, J. Geom. Physics 19（1996年），315–367。[Pic00a] Pickrell, D., 《与Kac-Moody李代数相关的西群不变测度》，美国数学会回忆录146/693，2000年。[Pic00b] —, *On the action of the group of diffeomorphisms of a surface on sections of the determinant line bundle* **193 1** 2000, 《太平洋数学杂志》：（），177–199。

[Pi72] Pietsch, A.,《核局部凸空间》，施普林格出版社，纽约，1972年。[Pis76] Pisanelli, D., *An extension of the exponential of a matrix and a counter example to the inversion theorem in a space $H(K)$*,《数学报告》(6) (3) 9:3 (1976), 465–475。[Pis77] —, *An example of an infinite Lie group*, Proc. Amer. Math. Soc. 62 (1977), 156–160。[Pis79] —, *The second Lie theorem in the group $Gh(n,\mathbb{C})$*, 载于：J. A. Barroso（编），《全纯性进展》，North Holland 出版社，1979年。[Pl94] Plymen, R.J.,《希尔伯特空间中的旋量》，剑桥数学丛书，**114**，1994 剑桥大学出版社，剑桥。PS [75] Plymen, R.J., and R.F. Streater, *A model of the universal covering group of 2 $\mathcal{H}$* **7** 1975 283 SO ( ),《伦敦数学会会报》( ), –[01] 288 Pol Polterovich, L.,《辛微分同胚群的几何》，数学讲义，苏黎世联邦理工学院，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2001年。[Po39] Pontrjagin, L.,《拓扑群》，普林斯顿数学丛书 2，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1939年。[PBN03] Popovych, R.O., V.M. Boyko, M.O. Nesterenko, and M.W. Lutfullin, *Realizations of real low-dimensional Lie algebras*, J. Phys. A 36:26 (2003), 7337–7360。[Pop99] Poppenberg, M., *An inverse function theorem for Fréchet spaces satisfying a smoothing property and* **206** 1999 123 145 (DN). Math. Nachr. ( ), – 。[Pr80] Pressley, A., *Decompositions of the space of loops on a Lie group*,《拓扑学》19 (1980), 65–79。[PS86] Pressley, A., and G. Segal,《环群》，牛津大学出版社，牛津，1986年。[PzS21] Prinz, D., and A. Schmeding, *Lie theory for asymptotic symmetries in general relativity: the NU group* 2109 11476 , 预印本，arXiv: . 。[PSS25] Prinz, D., A. Schmeding, and P.K. Schwartz, *Group contractions via infinite-dimensional Lie theory* 2512 , 预印本，arXiv: . 18530 [52] Pu Pursell, M. E.,《与光滑流形相关的代数结构》，学位论文，普渡大学，1952年。[PuSh54] Pursell, M. E., and M. E. Shanks, *The Lie algebra of a smooth manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 468–472。[PW52] Putnam, C. R., and A. Wintner, *The orthogonal group in Hilbert space*,《美国数学杂志》 **74** 1952 52 7 8 ( ), – 。Rae Raeburn, I., *The [relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space* **25** 1977 366 390 , J. Funct. Anal. ( ), – 。[Rai59] Raĭkov, D. A., *A criterion of completeness of locally convex spaces*,《数学进展》14:85 (1959), 223–229。[RS81] Ratiu, T., and R. Schmid, *The differentiable structure of three remarkable diffeomorphism groups* **177** 1981 81 100 ,《数学杂志》( ), – 。[RO03] Ratiu, T., and A. Odzijewicz, *Banach Lie–Poisson spaces and reduction*, Comm. Math. Phys. 243:1 (2003), 1–54。[RO04] —, *Extensions of Banach Lie–Poisson spaces*, J. Funct. Anal. 217:1 (2004), 103–125。[RS75] Reed, S., and B. Simon,《现代数学物理方法 I：泛函分析》，学术出版社，纽约，1973年。

[Re95] Remmert, R., 《复变函数论 II》, Springer 教科书, 施普林格出版社, 柏林, 1995年。[Ri50] Ritt, J. F., *Differential groups and formal Lie theory for an infinite number of parameters* **52** 1950 708 726 , Ann. of Math. ( ), – 。[Rs53] Riss, J., *Éléments de calcul différentiel et théorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts* **89** 1953 45 105 ,《数学学报》( ), – 。[Rob96] Robart, T., *Groupes de Lie de dimension infinie. Second et troisième théorèmes de Lie. I. Groupes de première espèce* ,《巴黎科学院院报》I 辑《数学》322:11 (1996), 1071–1074。[Rb97] —, *Sur l'intégrabilité des sous-algèbres de Lie en dimension infinie*,《加拿大数学杂志》49 (1997), 820–839。[Rob02] —, *Around the exponential mapping*, 第 11–30 页, 载于《几何与表示论中的无限维李群》, A. Banyaga、J. A. Leslie 和 T. Robart 编, World Scientific, River Edge, NJ, 2002; 11–30。[Rob04] —, *On Milnor's regularity and the path-functor for the class of infinite dimensional Lie algebras of CBH type*,《代数、群与几何》21 (2004), 367–386。[RK97] Robart, T., and N. Kamran, *Sur la théorie locale des pseudogroupes de transformations continus infinis. I* **308 4** 1997 593 613 ,《数学年刊》: ( ), – 。[RS18] Roberts, D. M. and A. Schmeding, *Extending Whitney's extension theorem: nonlinear function spaces*, 即将在《傅里叶研究所年刊》发表（参见 arXiv:1801.04126）。[Ro68] Robbin, J. W., *On the existence theorem for differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 1005–1006。[Ry63] Roby, N., *Lois polynômes et lois formelles en théorie de modules*,《高等师范学校科学年刊》3辑80 (1963), 213–348。[Rod89] Rodriguez-Carrington, E., *Lie groups associated to Kac–Moody Lie al-gebras: an analytic approach*, 载于《无限维李代数与群》（卢米尼-马赛, 1988）, 数理物理高级丛书 7, World Scientific 出版社, Teaneck, NJ, 1989; 57–69。[RD81] Roelcke, W., and S. Dierolf, 《拓扑群及其商群上的一致结构》, McGraw-Hill, 纽约, 1981年。[RLL00] Rørdam, M., F. Larsen, and N. J. Laustsen, 《K理论导论》, 伦敦数学会学生教材 49, 剑桥大学出版社, 2000年。[Ro95] Roger, G., *Extensions centrales d'algèbres et de groupes de Lie de dimension infinie algèbres de Virasoro et généralisations* , ,《数学物理报告》35 (1995), 225–266。[Ros94] Rosenberg, J., 《代数 K 理论及其应用》, 数学研究生教材 147, 施普林格出版社, 1994年。[Ro09] Rosendal, C., *Automatic continuity of group homomorphisms*,《符号逻辑通报》15:2 (2009), 184–214。[Ro13] —, *Global and local boundedness of Polish groups*,《印第安纳大学数学杂志》62:5 (2013), 1621–1678[Ro18] —, 《拓扑群的粗几何》, http://homepages.math.uic.edu/rosendal/PapersWebsite/Coarse-Geometry-Book17.pdf [Ro19] —, *Continuity of universally measurable homomorphisms*, Forum Math. Pi 7 (2019), e5, 20页。

[Ru87] W. Rudin, 《实分析与复分析》，麦格劳-希尔，纽约，1987年。[Ru91] —, 《泛函分析》，麦格劳-希尔，纽约，1991年。[Sa53] H. Samelson, *A connection between the Whitehead product and the Pontryagin product* **75** 1953 744 752 ，《美国数学杂志》（），–。[SN81] S. A. Saxon 和 P. P. Narayanaswami, *Metrizable* (LF)*-spaces,* （db）*-spaces, and the separable quotient problem*, Bull. Aust. Math. Soc. 23（1981年），65–80。[ShW99] H. H. Schaefer 和 M. P. Wolff, 《拓扑向量空间》，施普林格出版社，柏林，1999年。[Sr29] J. Schauder, *Invarianz des Gebiets in Funktionalräumen*, Studia Math. 1（1929年），123–139。[Scr97] E. Schechter, 《分析及其基础手册》，学术出版社，圣迭戈，1997年。[Sf84] W. H. Schikhof, 《超度量微积分—— p-adic 分析导论》，剑桥大学出版社，剑桥，1984年。[Sme15] A. Schmeding, 《非紧致轨形的微分同胚群》，Diss. Math. 507（2015年），179页。[Sme23] —, 《无限维微分几何导论》，剑桥大学出版社，剑桥，2023年。[Sch87] R. Schmid, 《无限维哈密顿系统》，物理科学专著与教科书，讲义 3，Bibliopolis，那不勒斯，1987年。[Sch02] —, *The Lie group of Fourier integral operators on open manifolds*, 载于《几何与表示理论中的无限维李群》，A. Banyaga、J. A. Leslie 和 T. Robart 编，World Scientific, River Edge，新泽西州，2002年；44–64。[Sch04] —, *Infinite dimensional Lie groups with applications to mathematical physics* **1** 2004 54 120 ，J. Geom. Symm. Phys.（），–。[SAR84] R. Schmid、M. Adams 和 T. Ratiu, *The group of Fourier integraloperators as symmetry group*, 载于《第十三届群论方法在物理学中的国际研讨会》（马里兰州科利奇帕克，1984年），World Sci. Publishing, 新加坡，1984年，246–249。[Sch75] H. Schubert, 《拓扑学》，Teubner出版社，斯图加特，1975年。[Sc60] J. R. Schue, *Hilbert space methods in the theory of Lie algebras*, 《美国数学会汇刊》95（1960年），69–80。[Sc61] —, *Cartan decompositions for L^*-algebras*, 《美国数学会汇刊》98（1961年），334–349。[SJ13] Sch ¨ utt, J., , *Symmetry groups of principal bundles over non-compact bases* 2013, 1310 8538 预印本，arXiv: 。[17] SV Schulz-Baldes, H., 和 C. Villegas-Blas, *Signatures for J-hermitians and J-unitaries on Krein spaces with real structures* **290 11** ，《数学新报》：- **12** 2017 1840 1858 （），– ScF a F. Schur, [90] *Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen* **35** 1890 161 197 ，《数学年刊》（），–。[ScF90b] —, *Beweis für die Darstellbarkeit der infinitesimalen Transformationen aller transitiven endlichen Gruppen durch Quotienten bestandig convergenter Potenzreihen* **42** 1890 1 7 ，莱比锡报告（），–。[Schw57] L. Schwartz, 《分布理论》，第一卷。Hermann，巴黎，1957年。

[SeS55] J. Sebasti˜ao e Silva, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, Rend. Mat. Appl. (5) **14** (1955), 388–410。[See64] R. Seeley, *Extension of C^∞ functions defined in a half space*, Proc. Am. Math. Soc. 15（1964年），625–626。[SeG68] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Publ. Math. I.H.E.S. Paris 34（1968年），105–112。[SeG70] —, *Cohomology of topological groups*, Sympos. Math. Roma, 4, Teoria Numeri Dic. 1968, e Algebra, Marzo 1969, 1970年，377–387。[SeG75] —, *Classifying space of a topological group in the Gelfand-Fuks sense*, Funkt. Anal. Prilozhen 9:2（1975年），131–133。[SeG81] —, *Unitary representations of some infinite-dimensional groups*, Comm. Math. Phys. 80（1981年），301–342。[SeI78] I. E. Segal, *The complex-wave representation of the free boson field*, 第321–343页，载于《泛函分析专题》，Adv. in Math. Suppl. Stud. 3（1978年），学术出版社，纽约[Sei72] U. Seip, 《紧生成向量空间与分析》，《数学讲义》273，施普林格，柏林，1972年。¨Sr[J.-P. Serre, 《李代数与李群》，《数学讲义》1500，施普林格出版社，柏林，1992年。92] Sh[A. Shapiro, 49]，《数学年刊》50:3（1949年），581–586。*Group extensions of compact Lie groups*Sh[I. A. Shereshevskij, 77]，Moscow Univ. Math. Bull.（5）*Quantization based on infinite-dimensional Hermitian symmetric spaces*, **32** (1977), 28–36 Si[I. M. Singer, 52]，《数学年刊》56:2（1952年），242–247。*Uniformly continuous representations of Lie groups*SiSt[I. M. Singer 和 S. Sternberg, 65]。I. *The infinite groups of Lie and Cartan*, J. d'Anal. Math. 15（1965年），1–114。*The transitive groups*Sz[Slez88] ak, B.，，第–页，载于：J. Musielak（编）《函数空间》（波兹南，1986年）。Teubner-Verlag，莱比锡，1988年。*On the inverse function theorem and implicit function theorem in Banach spaces*, 186–190 Sl´P. Slodowy, [，第–页，载于：V. Kac（编），《应用中的无限维群》，数学科学研究所出版物4，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1985年。85] Sl —, *An adjoint quotient for certain groups attached to Kac–Moody algebras*, [，86]，307–333 Canad. Math. Soc. Conf. Proceedings，5（1986年），361–371。*Beyond Kac-Moody algebras*Son *and inside*E. D. Sontag, 《数学控制理论：确定性有限维系统》，应用数学丛书6，施普林格出版社，纽约，2 1998年。[So98] J.-M. Souriau, [，第73–119页，载于：P. Dazord 和 N. Desolneux-Moulis（编）《叶状结构与几何量子化，法国数学会里昂会议论文集，1983年，罗讷南部几何研讨会II》，Hermann，巴黎，1984年。84] So *Groupes différentiels de physique mathématique*—, ´，法国数学会，Astérisque，特刊（1985年），341–399。´Sp´E. H. Spanier, 《代数拓扑》，Mc Graw Hill 高等数学丛书，加州大学，伯克利，1966年。[Sp85] S. V. Spichak, *Un algorithme générateur de structures quantiques*, arXiv:math.RT:。V Sep

[Ste51] Steenrod, N. E.,《纤维丛的拓扑》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1951年。[Ste67] —，*A convenient category of topological spaces*，《密歇根数学杂志》14 (1967)，133–152。[Stn70] Stein, E. M.，*Singular integrals and differentiability properties of functions* 1970，普林斯顿大学出版社，普林斯顿。[St61] Sternberg, S.，*Infinite Lie groups and the formal aspects of dynamical systems* **10** 1961 451 474，《数学与力学杂志》( )，–。[Str06] Stroppel, M.，《局部紧群》，EMS 数学教科书，欧洲数学会 (EMS)，苏黎世，2006年。[St99] Stumme, N.,《局部有限分裂李代数的结构》，博士论文，达姆施塔特工业大学，1999年。[Sus73] Sussmann, H. J.，*Orbits of families of vector fields and integrability of distributions* **180** 1973 171 188，《美国数学会汇刊》( )，–。[Su88] Suto, K.，*Groups associated with unitary forms of Kac–Moody algebras*，《日本数学会杂志》40:1 (1988)，85–104。[Su97] —，*Borel–Weil-type Theorem for the flag manifold of a generalized Kac-Moody algebra* **193** 1997 529 551，《代数杂志》( )，–。[Swa62] Swan, R. G.，*Vector bundles and projective modules*，《美国数学会汇刊》105 (1962)，264–277。[Swa77] —，*Topological examples of projective modules*，《美国数学会汇刊》230 (1977)，201–234。[Sw65] Swierczkowski, S.，*Embedding theorems for local analytic groups*，《数学学报》114 (1965)，207–235。[Sw67] —，*Cohomology of local groups extensions*，《美国数学会汇刊》128 (1967)，291–320。[Sw71] —，*The path-functor on Banach Lie algebras*，荷兰皇家艺术与科学院，《数学探究》A **74**=《数学探究》33 (1971)，235–239。[Swi71b] —，*On the cohomology of local groups*，《澳大利亚数学会杂志》12 (1971)，249–255。[Swi71c] —，*Cohomology of group germs and Lie algebras*，《太平洋数学杂志》39 (1971)，471–482。[Ta68] Tagnoli, A.，*La varietà analitiche reali come spazi omogenei*，《意大利数学联合会通报》(4) 1 (1968)，422–426。[Ta14] Tao, T.，《希尔伯特第五问题及相关主题》，《数学研究生教材》153，美国数学会，2014年。[Ta15] —，《李型有限单群中的扩张》，《数学研究生教材》164，美国数学会，2015年。[TSH98] Tatsuuma, N.、H. Shimomura 和 T. Hirai，*On group topologies and unitary representations of inductive limits of topological groups and the case of the group of diffeomorphisms* **38** 1998 ，《京都大学数学杂志》( )，551–578。[Te99] Teichmann, J.，《从泛函分析的角度看无限维李理论》，博士论文，维也纳，1999年。[Te01a] —，*Regularity of infinite-dimensional Lie groups by metric space methods* **24** 2001 39 58，《东京数学杂志》( )，–。[Te01b] —，*A Frobenius theorem on convenient manifolds*，《数学月刊》134:2 (2001)，159–167。

[Te02] —, *Inheritance properties for Lipschitz-metrizable Frölicher groups*, 载于《几何与表示理论中的无限维李群》, A. Banyaga、J. A. Leslie 和 T. Robart 编, World Scientific, 2002 1 10 ; – Th Thomas, E. G. F., [95] *Vector fields as derivations on nuclear manifolds*, Math. Nachr. 176 (1995), 277–286。[Th96] —, *Calculus on locally convex spaces*, 预印本 W-9604, 格罗宁根大学, 1996年。[Th74] Thurston, W. P., *Foliations and groups of diffeomorphisms*, 《美国数学会通报》80 (1974), 304–307。[Tn79] Tidten, M., *Fortsetzungen von C^∞-Funktionen welche auf einer* , , Manuscr. *abgeschlossenen Menge in $\mathbb{R}^n$ definiert sind* **27** 1979 Math. ( ), 291–312。[Ti83] Tits, J., 《李群与李代数》, 施普林格出版社, 柏林、纽约、海德堡, 1983年。[Tr67] Treves, F., 《拓扑向量空间、分布与核》, 学术出版社, 纽约, 1967年。[TL99] Toledano Laredo, V., *Integrating unitary representations of infinite-dimensional Lie groups* **161** 1999 478 508 , J. Funct. Anal. ( ), –。[tD91] tom Dieck, T., 《拓扑学》, 德格鲁伊特出版社, 柏林、纽约, 1991年。[tD00] —, 《拓扑学》, 第2版, 德格鲁伊特出版社, 柏林、纽约, 2000年。[Tr72] Tromba, A. J., *Some theorems on Fredholm maps*, Proc. Amer. Math. Soc. (1972), 578–585。[Tsu81] Tsujishita, T., 《向量场李代数的连续上同调》, 美国数学会回忆录253, 1981年。[Tu85] Turovskii, Yu. V., *Spectral properties of certain Lie subalgebras and the spectral radius of subsets of a Banach algebra* （俄文）, 载于《算子谱理论及其应用》, 《Elm》, 巴库, 6 (1985), 144–181[Tu70] Turpin, P., *Une remarque sur les algèbres á inverse continu*, 《巴黎科学院院报》270 (1970), 1686–1689。[Tu95] Tuynman, G. M. *An elementary proof of Lie's Third Theorem*, 未发表的笔记, 1995年。[TW87] Tuynman, G. M. 和 W. A. J. J. Wiegerinck, *Central extensions and physics* **4 2** 1987 207 258 , J. Geom. Physics : ( ), –。[Up85] Upmeier, H., 《对称巴拿赫流形与 Jordan C^*-代数》, North-Holland 数学研究104, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1985年。[Va84] Varadarajan, V. S., 《李群、李代数及其表示》, 《数学研究生教材》102, 施普林格出版社, 1984年。[Va85] —, 《量子理论的几何》, 施普林格出版社, 纽约, 21985年。[Ver82] Verdier, J.-L., *Les representations des algebres de Lie affines: applications a quelques problemes de physique* **596** 1982 , Bourbaki 研讨会 ( ), 365–377。[VK82] Verˇsik, A. M. 和 S. V. Kerov, *Characters and factor representations of the infinite unitary group* **26** 1982 570 574 , Soviet Math. Dokl. ( ), –。[Ves68] Vesentini, E., *On the subharmonicity of the spectral radius*, 《意大利数学联合会通报》1 (1968), 427–429。[Vi02] Vizman, C., *Geodesics on extensions of the Lie algebra of vector fields on the circle* 165 172 , 第–页, 载于: A. Strasburger 等（编）, 《几何

与有限维和无限维李群上的分析》，巴拿赫中心出版物55，华沙。[Vo87] Vogt, D., *On the functors* $\mathrm{Ext}^1(E,F)$ *for Fréchet spaces*, Studia Math. 85 (1987), 163–197。[Vo76] Voiculescu, D., *Représentations factorielles de type* II_1 *de* $U(\infty)$, 纯粹与应用数学杂志55 (1976), 1–20。[Voi92] Voigt, J., *On the convex compactness property for the strong operator topology* **12**, 259 269 ，《数学札记》–。[Wa54a] Waelbroeck, L., *Les algèbres à inverse continu*, 《巴黎科学院院报》238 (1954年), 640–641。[Wa54b] —, *Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives*, 《纯粹与应用数学杂志》33 (1954年), 147–186。[Wa54c] —, *Structure des algèbres à inverse continu*, 《巴黎科学院院报》238 (1954年), 762–764。[Wa71] —, 《拓扑向量空间与代数》，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1971。[Wa75] —, *The holomorphic functional calculus and non-Banach algebras*, 载于：J. H. Williamson（编），《分析中的代数》，第187–251页，学术出版社，伦敦、纽约，1975。[Wa82] —, *The holomorphic functional calculus as an operational calculus*, 载于：《谱理论》，巴纳赫中心出版物8，华沙，1982，第512–552页。[Wa99] Wagemann, F.，《关于全纯向量场的Gelfand-Fuks上同调》，博士论文，克劳德·贝尔纳—里昂第一大学，1999年。[Wa12] Walter, B., *Weighted diffeomorphism groups of Banach spaces and weighted mapping groups* **484**, 2012 ，数学论文集。[WHO18] Walther, H. O., *Fréchet differentiability in Fréchet spaces and dif-ferential equations with unbounded variable delay*, 预印本，2018, arXiv:1801.09213。[Wa72] Warner, G.，《半单李群上的调和分析 I》，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1972年。[We95] Weibel, C. A.，《同调代数导论》，《剑桥高等数学研究丛书》38，剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[Wei69] Weinstein, A., *Symplectic structures on Banach manifolds*, 《美国数学会通报》75 (1969), 1040–1041。[Wei89] —, *Cohomology of symplectomorphism groups and critical values of hamiltonians* **201** 1989 75 82 ，《数学杂志》（），–。[Wsg52] Weissinger, J., *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens*, Math. Nachr. 8 (1952年), 193–212。[Wz12] Weizs¨acker, H. von, ?, 预印本，arXiv: 。[We76] Wells, J. C., *In which spaces is every curve Lebesgue–Pettis integrable* 2012, 1207 6034 *Invariant manifolds of nonlinear operators*, 《太平洋数学杂志》62 (1976), 285–293。[We03] Wengenroth, J.，《泛函分析中的导出函子》，数学讲义1810，施普林格出版社，柏林，2003年。[Wer95] Werner, D.，《泛函分析》，施普林格出版社，柏林、海德堡，1995年。

[Whi78] Whitehead, G. W., 《同伦论基础》, 《数学研究生教材》61, 施普林格出版社, 纽约—柏林, 1978年。[Wh34] Whitney, H., *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets* **36** 1934 63 89 , 《美国数学会会刊》

(), –。[Wh36] —, *Differentiable manifolds*, 《数学年刊》37 (1936), 645–680。[Wi88] Wi.es-law, W., 《拓扑域》, 马塞尔·德克尔, 纽约和巴塞尔, 1988年。[Wie49] Wielandt, H., *mechanik* **121** 1949 21 , 《数学年刊》

(), 。[Wo03] Wockel, Chr., 《规范群的中心扩张》, 学位论文（Dipl.）, 达姆施塔特工业大学, 2003年9月。[Wo06] —,
Smooth extensions and spaces of smooth and holomorphic mappings, J. Geom. Symmetry Phys. 5 (2006), 118–126。[Wo07a] —,
Lie group structures on symmetry groups of principal bundles, J. Funct. Anal. 251 (2007), 254–288。[Wo07b] —,
The Samelson product and rational homotopy for gauge groups, 汉堡大学数学研讨班报告 77 (2007), 219–228。[Wo09] —, *A generalization of Steenrod's approximation theorem*, 布尔诺数学文献45:2 (2009), 95–104。[Wol05] Wolf, J. A.,
Principal series representations of direct limit groups, Com- pos. Math. 141:6 (2005), 1504–1530。[Woj98] Wojty
´ *Quasinilpotent Banach–Lie algebras are Baker–* nski, W., , J. *Campbell–Hausdorff* **153** 1998 405 413
Funct. Anal.(), –。[Woj06] —, *Effective integration of Lie algebras*, J. Lie Theory 16 (2006), 601–620。[Wue03] W¨ustner, M.,
Supplements on the theory of exponential Lie groups, 《代数杂志》265:1 (2003), 148–170。[Wue05] —, *The classification of all simple Lie groups with surjective exponential map* **15 1** 2005 269 278 ,
J. Lie Theory : (), –。[Wur01] Wurzbacher, T., *Fermionic second quantization and the geometry of the restricted Grassmannian* 287 375 , 载于: A.
Huckleberry 和 T. Wurzbacher（编）, 《无限维凯勒流形》, DMV-Seminar 31, Birkhäuser Verlag, 2001, 第 –页。[Yag01] Yagasaki, T., *Homotopy types of diffeomorphism groups of noncompact 2-manifolds* , arXiv:math.GT: 0109183
[10] Yag Yagasaki, T.,
Groups of volume-preserving diffeomorphisms of noncompact manifolds and mass flow toward ends , 《美国数学会汇刊》
362:11 (2010), 5745–5770。[Ya85] Yamasaki, Y., 《无限维空间上的测度》, 纯数学丛书5, World Scientific, 新加坡, 1985年。[Ym98] Yamasaki, A.,
Inductive limits of general linear groups, J. Math. Kyoto Univ. 38 (1998), 769–779。[Yo36] Yosida, K., *On the groups embedded in the metrical complete ring*, 《日本数学杂志》13 (1936), 7–26。[Yo63] Yosida, K., *Holomorphic semi-groups in a locally convex linear topological space* **15** 1963 51 57 , 大阪数学杂志(), –。

[Ze60] ˙Zelazko, W., *On the locally bounded and m-convex topological algebras*, Studia Math. 19 (1960), 333–356。[Ze85] —,
A non-m-convex algebra on which operate all entire functions, 波兰数学年刊46 (1985), 389–394。