arXiv:2602.12366v1 [math.QA] 12 Feb 2026

QUAN任意阶单位根下的 $SL_q(2)$ 的量子子群

´G. A. GARCIA 和 J. VALLEJOS

摘要。我们完成了对任意阶单位根下 SL_q(2)的量子子群的分类，即量子函数代数$\mathcal{O}_q$(SL_2(
$\mathbb{C}$))的霍普夫代数商，其中 q 为单位根。

1. 引言

本文研究任意阶单位根下 SL_q(2)的量子子群，这些子群对应于 $\mathcal{O}_q$($SL_2(\mathbb{C})$)的霍普夫代数商。对这类量子子群进行分类的问题最初由 E. M¨uller 提出；他描述了当 q 为奇数阶单位根时， $SL_q(n)$的有限维量子子群。后来， [AG09] 将其推广到 G_q 为连通、单连通的单复代数群且 q 为 ℓ次本原单位根的情形，其中 ℓ 为奇数，并且当 G 为 G_2型时 $3 \nmid \ell$ 。 $q = -1$ 的情形已在 [BN11], 中得到研究，重点是有限维量子子群；而参数为偶数阶单位根的情形见于 [Cha+16]，其中他们研究了 SL_q(2)的有限子群何时作用于整体维数为 2 的 Artin–Schelter 正则代数 R 。其他量子群的量子子群也已有研究，例如可参见 [GG18]及其中的参考文献。

利用这些结果，并推广 [M¨ul00]，中发展出的技巧，我们将分类扩展到 SL_q(2) 在偶数阶单位根处的所有量子子群。我们的目标是全面列出这些子群，并通过生成元和关系明确呈现。

我们的分类有一个特点：子群的结构会因具体参数而显著不同。因此，我们在研究中区分两个主要情形：

- 情形 $q = -1$。
- q 是偶数阶 $\ell = 2m, m \neq 1$ 的单位根的情形。

为了找出 SL_q(2) 的量子子群，我们利用 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 属于霍普夫代数正合列 $\mathcal{O}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 这一事实，其中 $\Gamma = \overline{SL_2(\mathbb{C})}$ 或 $PSL_2(\mathbb{C})$。许多作者研究过这一问题，相关结果取决于 q 的阶，并见定理 2.6.8。

在第 3.1、3.2 和 3.3 节中，我们回顾 [AG09] 和 [M¨ul00] 在 q 的阶为奇数时所得的结果。在第 3.4 节中，我们计算了 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$的所有量子子群，其主要结果如下述定理所示。

定理 3.4.1。 设 A是 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$的一个霍普夫代数商。那么以下两种情况之一成立：

(i) A 同构于商 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\mathcal{J})$，其中 $\mathcal{J} = \ker \sigma^t$，且 $\sigma\colon \Gamma \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ 是代数群的一个单态射；或 (ii) A 同构于某个二面体群 D_{2m}上的函数代数。

最后，在第 3.5、3.6 和 3.7 节中，我们构造并确定了当 q 的阶为 $\ell = 2m$ 且满足 $m \neq 1$ 时，$\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的所有商。这些商与偶子群数据构成双射，其定义如下。

2010 年数学主题分类：16T05、16T20、20G42。关键词： 量子群、霍普夫代数、二元多面体群、量子函数代数。

定义 3.5.1。 设 q 是一个阶为 $\ell \neq 2$ 的单位根。偶子群数据是一个集合 $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$，满足：

- $I_+, I_- \in \{\emptyset, \{1\}\}$。
- N 是 $(\mathbb{Z}_\ell)^s$ 的子群，其中 $s = 1 - |I_+ \cup I_-|$。
- Γ 是一个代数群。
- $\sigma\colon \Gamma \to L$ 是单射群态射，其中 $L \subseteq PSL_2(\mathbb{C})$ 由集合 I_+ 和 I_-确定。
- $\delta\colon N \to \Gamma$ 是一个群态射。

我们引入量子子群同构与子群数据等价的概念。这里 q 是任意阶的单位根。

定义 1.0.1. 设 $\rho_1\colon \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow A_1$ 与 $\rho_2\colon \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow A_2$ 为 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$的两个商。我们称 A_1 与 A_2 作为量子子群同构，如果存在霍普夫代数同构$\varphi\colon A_1 \to A_2$ 使得 $\varphi \circ \rho_1 = \rho_2$。

定义 1.0.2. *[AG09，定义 2.19]* 设 $\mathcal{D}_1 = (I_+^1, I_-^1, N_1, \Gamma_1, \sigma_1, \delta_1)$ 与 $\mathcal{D}_2 = (I_+^2, I_-^2, N_2, \Gamma_2, \sigma_2, \delta_2)$ 为两个子群数据。我们称 $\mathcal{D}_1$ 与 $\mathcal{D}_2$ 等价，并记作 $\mathcal{D}_1 \cong \mathcal{D}_2$，如果

- $I_+^1 = I_+^2$ 和 $I_-^1 = I_-^2$，
- 存在一个代数群同构 $\sigma\colon \Gamma_2 \to \Gamma_1$ 使得 $\sigma_1\sigma = \sigma_2$，
- $N_1 = N_2$ 和 $\delta_2 = \sigma^t\delta_1$。

本节的主要结果如下。

定理 3.5.3。 设 q 是一个偶数阶单位根 $\ell = 2m$，$m \neq 1$。存在一个双射，联系以下对象：

(i) Hopf 代数商 $\rho\colon \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \to A$ 在同构意义下。(ii) 在等价意义下的偶子群数据。

我们谨向 J. Bichon、W. Ferrer、C. Negron 和 S. Lentner 致谢，感谢他们提出宝贵意见并作出贡献。

2. 预备知识

本节将给出一些定义和基本结果，供后文使用。我们在复数域 $\mathbb{C}$上讨论。

2.1. 霍普夫代数。 关于霍普夫代数理论，参见 [Mon93; Rad12]。余乘法记为 Δ，余单位记为 ε，对合记为 S。按照惯例，我们对余乘法使用 Sweedler 记号，即 $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$。我们用 $G(H)$ 表示类群元的集合，用 $H^+ := \ker(\varepsilon)$表示增广理想。

按照 [A_D95]，一列霍普夫代数映射

$$B \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H$$

若 ι 是单射，π 是满射，$\pi \circ \iota = \varepsilon$，$\ker(\pi) = AB^+$ 且 $B = {}^{co\pi}A = \{x \in A : (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta(x) = 1 \otimes x\}$，则称该序列为正合。若 B 的像在 A中是中心的（分别为正规），则称该序列是中心的（分别为正规的）。

注记 2.1.1. 设 $B \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H$ 是一个 *Hopf* 代数正合列。如果 $H = \mathbb{C}$ 是平凡霍普夫代数，那么 $A \cong B$。

一般而言，要确定一个序列何时正合并不那么直接；尤其是在无限维霍普夫代数的情形下，要令 $B = {}^{co\pi}A$ 相等更是如此。在这方面，以下结果颇有帮助。

命题 2.1.2。 设 $B \hookrightarrow A$ 是霍普夫代数的一个单射态射。

(i) *[AG03，（3.12）]* 若 B 是交换的，则 A 作为 B-模是忠实平坦的。(ii) *[Mon93，命题 3.4。3]* 假设 A 作为 B-模是忠实平坦的，$AB^+ = B^+A$并令 $H = A/AB^+$ 满足 $\pi : A \twoheadrightarrow A/AB^+$。则 $B = A^{\mathrm{co}\,\pi} = {}^{余\pi}A$，且 B 是 A的正规 *Hopf* 子代数。

现在我们介绍一些关于 [M¨ul00] and[AG09] 中 Hopf 代数正合列的结果，这些结果将在后文中发挥作用。这些结果针对中心扩张给出，但实际上对正规扩张也成立。证明只需作相应的修改，故留给读者。

命题 2.1.3. *[M¨ul00, (3.4)]* 给定 *Hopf* 代数的正规正合列 $B \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H$，若 A 和 $\mathcal{J} = B \cap J$ 是 J 的 *Hopf* 理想，则商 *Hopf* 代数 A/J 包含于一个 *Hopf* 代数正合列中

$$B/\mathcal{J} \hookrightarrow A/J \twoheadrightarrow H/\pi(J)$$

命题 2.1.4. *[AG09, (2.10)]* 设 A 和 C 为 *Hopf* 代数，B 是 A 的正规 *Hopf* 子代数，且 A 关于 B 是左忠实平坦或右忠实平坦的；再设 $r:\ B \to C$ 是一个满射 *Hopf* 代数映射。那么 $H = A/AB^+$ 是一个 *Hopf* 代数，并且 A 属于正合列 $B \overset{\iota}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H$。若令 $\mathcal{J} =$核 $r \subseteq B$，则 $(\mathcal{J}) = A\mathcal{J}$ 是 A 的一个 *Hopf* 理想，而 $A/(\mathcal{J})$ 是由下图给出的推出。

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\ \iota\ } & A \\ \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ C & \xrightarrow{\ \bar{\iota}\ } & A/(\mathcal{J}) \end{array}$$

此外，C 可视为 $A/$（$\mathcal{J}$）的一个正规 *Hopf* 子代数，而 $A/$（$\mathcal{J}$）属于如下正合列

$$C \overset{\bar{\iota}}{\hookrightarrow} A/(\mathcal{J}) \overset{\bar{\pi}}{\twoheadrightarrow} H$$

2.2. SL_2（$\mathbb{C}$）、$\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{C}$）、U（$\mathfrak{sl}_2$）**和** $\mathcal{O}$（SL_2（$\mathbb{C}$））。本文中，我们将研究群 SL_2（$\mathbb{C}$）、PSL_2（$\mathbb{C}$）以及李代数 $\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{C}$）。下面简要回顾其定义，以确立记号。

群 SL_2（$\mathbb{C}$）是一个代数群，定义为 GL_2（$\mathbb{C}$）中行列式为 **1** 的矩阵所构成的子群。其李代数 $\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{C}$）由迹为零且元素属于 $\mathbb{C}$ 的 2×2 矩阵组成，其括号由交换子 $[X, Y]$: $= XY - YX$给出。等价地，它可表示为由元素 h、e、f张成的 $\mathbb{C}$-向量空间，并满足以下括号关系:

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f.$$

两个表示之间的同构由标准表示给出，在如下识别下

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

泛包络代数 U（$\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{C}$））是由 e、h、f生成、模去以下关系后的含幺结合 $\mathbb{C}$-代数:

$$he - eh = 2e, \quad hf - fh = -2f, \quad ef - fe = h.$$

坐标代数 $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))$ 定义为由元素 X_{11}、X_{12}、X_{21}、X_{22} 生成并满足关系 $X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 1$ 的交换代数。也就是说，

$$\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} \mid X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 1].$$

2.3. 关于 $PSL_2(\mathbb{C})$ 和多面体群。 回顾一下， $PSL_2(\mathbb{C})$ 是由 $SL_2(\mathbb{C})$ 对有限子群 $\{\pm I\}$ 取商所定义的代数群。其李代数也是 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$。此外，作为代数群，它同构于 $SO_3(\mathbb{C}) = \{A \in SL_3(\mathbb{C}) | \, A^t A = Id\}$。

下面的引理给出了 $PSL_2(\mathbb{C})$ 的坐标代数。尽管这是一个众所周知的结果，参见 [BG02，习题 (I.7.M)]，但为完整起见，我们仍将其列于此处。

引理 2.3.1。 $PSL_2(\mathbb{C})$ 的坐标代数是 $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))$ 的子代数，由对所有 i、j、k、$l \in \{1,2\}$ 的元素 $X_{ij}X_{kl}$ 生成。

证明。 代数群的正合列

$$\{\pm I\} \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} PSL_2(\mathbb{C})$$

诱导出霍普夫代数的正合列

$$\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) \xrightarrow{\iota^*} \mathcal{O}(\{\pm Id\}).$$

Then

$$\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) = \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}) = \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))^{\mathrm{co}\,\iota^*} = \{\alpha \in \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) \,|\, (\iota^* \otimes id)\Delta(\alpha) = 1 \otimes \alpha\}.$$

特别地，对于 $a \in \{\pm I\}$， $b \in SL_2(\mathbb{C})$ 和 $\alpha \in \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))$，我们有

$$(\iota^* \otimes id)\Delta(\alpha)(a \otimes b) = \Delta(\alpha)(\iota(a) \otimes b) = \alpha(\iota(a)b)$$

并且 $(1 \otimes \alpha)\ (a \otimes b) = 1\ (a)\ \alpha\ (b) = \alpha\ (b)$。

因此， $\mathcal{O}\ (PSL_2\ (\mathbb{C})) = \{\alpha \in \mathcal{O}\ (SL_2\ (\mathbb{C}))\ |\ \alpha\ (\iota\ (a)\ b) = \alpha\ (b)$ $\forall a \in \{\pm Id\}$， $b \in SL_2\ (\mathbb{C})\}$. 取$a = -Id$并考虑$\alpha = \sum \alpha_l\ X_{i_1 j_1} X_{i_2 j_2} \ldots X_{i_k j_k} \in \mathcal{O}$ $(SL_2\ (\mathbb{C}))$。那么，对于 $b \in SL_2\ (\mathbb{C})$，我们有 $\alpha\ (b) = \sum \alpha_l\ b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \ldots b_{i_k j_k}$ 且l

$$\alpha(-b) = \sum_l \alpha_l\ (-b_{i_1 j_1})(-b_{i_2 j_2}) \ldots (-b_{i_k j_k}) = \sum_l \alpha_l\ (-1)^k\ b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \ldots b_{i_k j_k}$$

由于 $a = -Id$，那么 $\alpha\ (b) = \alpha\ (-b)$ 意味着 $(-1)^k = 1$，所以 k 是偶数。

总之， $\mathcal{O}\ (PSL_2\ (\mathbb{C})) = \mathbb{C}[X_{ij}X_{kl} \mid i,j,k,l \in \{1,2\}]$，这正是我们要证明的。

□

在第2.4、2.5和2.6节中，我们将为 q 为未定元的情形定义量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$、$\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_n)$和$\mathcal{O}_q(SL_n(\mathbb{C}))$；在第3节中，这些未定元将被单位根取代。我们将采用 [Lus90], [Tak92] 和 [M¨ul00]的定义。

2.4. 量子包络代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$，其中 q 为未定元。 设 $K = \mathbb{Q}(q)$，其中 q为未定元。设$U_q(\mathfrak{sl}_n)_K$ 为由生成元 k_i、 $k_i^{-1}(1 \le i \le n)$、e_j、 $f_j\ (1 \le j < n)$及以下关系定义的 K-代数

$$\begin{aligned}
k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1, \quad & k_i k_j = k_j k_i, \\
k_i e_j k_i^{-1} = q^{2\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}} e_j, \quad & k_i f_j k_i^{-1} = q^{-2\delta_{ij} + \delta_{i+1,j} + \delta_{i,j+1}} f_j, \\
e_j f_l - f_l e_j = \delta_{j,l} & \frac{k_j - k_j^{-1}}{q^{-1} - q}, \\
e_j e_l = e_l e_j, \quad & f_j f_l = f_l f_j \quad \text{if } |j-l| > 1, \\
e_j^2 e_l - (q + q^{-1}) e_j e_l e_j + e_l e_j^2 = 0, & \\
f_j^2 f_l - (q + q^{-1}) f_j f_l f_j + f_l f_j^2 = 0 \quad & \text{if } |j-l| = 1.
\end{aligned}$$

其中 $1 \le i$， $k \le n$， $1 \le j$， $l < n$。在 $U_q(\mathfrak{sl}_n)_K$ 上存在霍普夫代数结构，其中

$$\Delta(k_i)=k_i\otimes k_i,\qquad \Delta(e_j)=1\otimes e_j+e_j\otimes k_j,\qquad \Delta(f_j)=k_j^{-1}\otimes f_j+f_j\otimes 1,$$
$$\varepsilon(k_i)=1,\quad \varepsilon(e_j)=\varepsilon(f_j)=0,$$
$$S(k_i)=k_i^{-1},\quad S(e_j)=-e_jk_j^{-1},\quad S(f_j)=-k_jf_j.$$

霍普夫代数 $U_q(\mathfrak{sl}_n)_K$ 具有如下 Lusztig 形式 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$，参见 [Tak92, (3.2)]。

定义 2.4.1. 设 $R=\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$。我们将 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)_R$ 定义为 $U_q(\mathfrak{sl}_n)_K$的由 k_i、$\begin{bmatrix} k_i;0 \\ t \end{bmatrix}$、$e_j^{(N)}$、$f_j^{(N)}(1\le i\le n、\ 1\le j<n、\ 0\le N、\ t)$生成的 R-子代数，其中

$$\begin{bmatrix} k_i;0 \\ t \end{bmatrix}=\prod_{s=1}^{t}\frac{q^{-s+1}k_i-q^{s-1}k_i^{-1}}{q^s-q^{-s}}$$

$$e_j^{(N)}=\frac{e_j^N}{[N]!},\quad f_j^{(N)}=\frac{f_j^N}{[N]!},\quad \textit{with}\quad [N]!=\prod_{s=1}^{N}\frac{q^s-q^{-s}}{q-q^{-1}}.$$

$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)_R$ 是 $U_q(\mathfrak{sl}_n)_K$ 的霍普夫代数整形式，且

$$\Delta\begin{bmatrix} k_i;0 \\ t \end{bmatrix}=\sum_{\nu=0}^{t}k_i^{\nu-t}\begin{bmatrix} k_i;0 \\ \nu \end{bmatrix}\otimes k_i^{\nu}\begin{bmatrix} k_i;0 \\ t-\nu \end{bmatrix},$$

$$\Delta(e_j^{(N)})=\sum_{\nu=0}^{N}q^{\nu(N-\nu)}e_j^{(N-\nu)}k_j^{\nu}\otimes e_j^{(\nu)},$$

$$\Delta(f_j^{(N)})=\sum_{\nu=0}^{N}q^{-\nu(N-\nu)}f_j^{(\nu)}\otimes k_i^{-\nu}f_j^{(N-\nu)}.$$

2.5. **量子群 $\mathcal{O}_q(SL_n(\mathbb{C}))$，其中 q 为不定元。**

定义 2.5.1. 设 $K=\mathbb{Q}(q)$。$n\times n$ 矩阵上函数代数的标准量子化 $\mathcal{O}_q(M_n)_K$ 是由元素 x_{ij}（$1\le i、\ j\le n$）生成的 K-代数，并满足 q-矩阵关系

$$x_{is}x_{js}=q\,x_{js}x_{is},\qquad x_{si}x_{sj}=q\,x_{sj}x_{si}\qquad \textit{if } i<j,$$
$$x_{it}x_{js}=x_{js}x_{it},\qquad x_{is}x_{jt}-x_{jt}x_{is}=(q-q^{-1})x_{it}x_{js},\qquad \textit{if } i<j,s<t.$$

定义 *2.5.2*。 *[BG02]* 设 $K=\mathbb{Q}(q)$。我们将 $\mathcal{O}_q(SL_n)_K$ 定义为由商 $\mathcal{O}_q(SL_n)_K:=\mathcal{O}_q(M_n)_K/(det_q-1)$ 给出的 K-代数，其中 (det_q-1) 是$\mathcal{O}_q(M_n)_K$ 中由元素 $det_q-1=\sum_{\pi\in S_n}(-q)^{l(\pi)}x_{1\pi(1)}x_{2\pi(2)}\dots x_{n\pi(n)}-1$ 生成的双边理想。

霍普夫代数结构由下式给出

$$\Delta(x_{ij})=\sum_{s=1}^{n}x_{is}\otimes x_{sj},$$

$$\mathcal{S}(x_{ij})=(-q)^{(i-j)}A_{ji}$$

$$\varepsilon(x_{ij})=\delta_{ij}$$

其中，A_{ji} 表示 $\mathcal{O}_q(M_n)_K$ 的 j、i阶量子子式。更多详情请参见 *[PW91]*。

例 2.5.3。 量子特殊线性群 $\mathcal{O}_q(SL_2)_K$ 是由元素 a、b、c、d 生成的幺正结合 K代数，满足以下关系

$$ab = q\,ba, \qquad bc = cb, \qquad ac = qca, \qquad ad - da = (q - q^{-1})bc,$$
$$bd = q\,db, \qquad cd = qdc, \qquad ad - qbc = 1.$$

余代数结构和对合由下式给出

$$\triangle(a) = a \otimes a + b \otimes c, \qquad \varepsilon(a) = 1, \qquad \mathcal{S}(a) = d,$$
$$\triangle(b) = a \otimes b + b \otimes d, \qquad \varepsilon(b) = 0, \qquad \mathcal{S}(b) = -qb$$
$$\triangle(c) = c \otimes a + d \otimes c, \qquad \varepsilon(c) = 0, \qquad \mathcal{S}(c) = -q^{-1}c,$$
$$\triangle(d) = c \otimes b + d \otimes d, \qquad \varepsilon(d) = 1, \qquad \mathcal{S}(d) = a$$

注 2.5.4。 （单位根处的特化）。 在 *[BG02, (III.7.1.)],* 中，*Brown* 和 *Good- earl* 研究了代数 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ 和 $\mathcal{O}_q(G)$ 在具有李代数 $\mathfrak{g}$的连通单连通复半单群 G 上的单位根特化。具体如下：

设 $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 和 $\epsilon \neq \pm 1$ 是复数域中的本原 ℓ^{th} 单位根。设 $\chi_\ell(q) \in R$为分圆多项式，因此 $R/\chi_\ell(q)R \cong \mathbb{Q}(\epsilon)$，且 $\chi_\ell(q)\mathcal{O}_q(G)$ 是 $\mathcal{O}_q(G)$ 的一个 *Hopf* 理想。代数 $\mathcal{O}_q(G)/\chi_\ell(q)\mathcal{O}_q(G)$ 记为 $\mathcal{O}_\epsilon(G)^{\mathbb{Q}(\epsilon)}$，称为在单位根 ϵ处， G 在 $\mathbb{Q}(\epsilon)$ 上的量子化坐标代数。同样，我们可以构造 $\mathbb{Q}(\epsilon)$-霍普夫代数 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})/\chi_\ell(q)\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$，并且 *(2.6.2)* 中的霍普夫配对诱导出 $\mathcal{O}_\epsilon(G)^{\mathbb{Q}(\epsilon)}$ 与 $\mathcal{U}_\epsilon(\mathfrak{g})$ 之间的霍普夫配对。若 $\Bbbk$ 是一个包含 $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ 的任意域，我们便可得到 $\mathcal{O}_\epsilon(G)$ 的一个$\Bbbk$-形式，即 $\mathcal{O}_\epsilon(G)_\Bbbk := \mathcal{O}_\epsilon(G) \otimes_{\mathbb{Q}(\epsilon)} \Bbbk$。当 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 时，我们简记为 $\mathcal{O}_\epsilon(G)$。

记号 2.5.5. 从现在起，我们设 q 为一个 $\ell - th$ 单位根，满足 $q^2 \neq 1$，以及 $\Bbbk = \mathbb{C}$。令 $m = ord(q^2)$，因此若 ℓ 为奇数，则 $\ell = m$ ； 若 ℓ 为偶数，则 $\ell = 2m$。

2.6. **小量子群**。

In this section we consider the Takeuchi's [Take92] 中定义的代数$u_{2,q}(\mathfrak{sl}_n)$与$u_q(\mathfrak{sl}_n)$，他分别将它们记为 $U_q(\mathfrak{sl}_n)^{[\ell]}$ 与 $U_q(\mathfrak{sl}_n)^{[[\ell]]}$。我们将遵循 [M¨ul00] 与 [Cha+16]中给出的记号。然后，我们刻画 Frobenius–Lusztig核$u_{2,q}(\mathfrak{sl}_n)^\circ$ 与 $u_q(\mathfrak{sl}_n)^\circ$的对偶。

首先，我们从定义任意 ℓ的代数$u_{2,q}(\mathfrak{sl}_n)$开始。

定义 2.6.1. 我们将$u_{2,q}(\mathfrak{sl}_n)$ 定义为由 k_i、 k_i^{-1}、e_i 与 f_i $(1 \leq i < n)$生成的 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$ 的*Hopf*子代数。这里， k_i 是阶为 2ℓ 的元素，e_j、 f_j 是阶为 ℓ的元素。该霍普夫代数的维数为 $2^{n-1}\ell^{n^2-1}$。

当 q 的阶为奇数时，我们使用记号 $u_q(\mathfrak{sl}_n)$，其定义如下。

定义 2.6.2. 我们定义

$$u_q(\mathfrak{sl}_n) := u_{2,q}(\mathfrak{sl}_n)/(k_i^\ell - 1),$$

它是一个维数为 ℓ^{n^2-1}的霍普夫代数。

现在，我们定义 $\mathcal{O}_q(GL_n)$ 的两个商：一个适用于 q 的阶任意的情形，另一个适用于 ord(q) 为奇数的情形。结果表明，这两个商都同定义 2.6.1 和 2.6.2 中定义的代数的对偶同构。

定义 2.6.3. 设 q 是阶为任意 ℓ 的单位根，且 $m = ord(q^2)$。我们将$\mathcal{O}_q(SL_n(\mathbb{C}))$ 定义为 $\overline{\mathcal{O}_q(M_n(\mathbb{C}))}$ 关于理想$(det_q - 1, x_{ii}^{2m} - 1, x_{ij}^m (i \neq j))$的商。其维数为 $2^{n-1}m^{n^2-1}$。

定义 2.6.4. 设 q 为具有奇数阶 $\ell > 2$的单位根。我们将 $\mathcal{O}_q(SL_n(\mathbb{C}))$ 定义为 $\mathcal{O}_q(M_n(\mathbb{C}))$ 关于理想$(det_q - 1, x_{ii}^\ell - 1, x_{ij}^\ell (i \neq j))$的商。维数为 ℓ^{n^2-1}。

从现在起，我们将讨论 $n = 2$ 的情形。我们先给出$\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$的定义。

定义 2.6.5. *[BN11, (5.2)]* 代数 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ 由 a, b, c, d 生成，其关系为

$$ab = -ba, \qquad bc = cb, \qquad ac = -ca, \qquad ad = da,$$
$$bd = -db, \qquad cd = -dc, \qquad det_{-1} = ad + bc = 1.$$

$\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ 是一个霍普夫代数，其余乘法、余单位和对合定义见例 *2.5.3*。

霍普夫代数 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 根据 q的阶数，具有中心的或正规的交换霍普夫子代数，正如下一个引理所示。

引理 2.6.6。 *(i)* 假设 q 是一个奇数阶为 $\ell > 2$的单位根。考虑由元素 a^ℓ、b^ℓ、c^ℓ 和 d^ℓ生成的子代数 L，它是 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的子代数。那么， L 是 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$的中心霍普夫子代数，且作为霍普夫代数同构于 $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))$。

(ii) 对于 $q = -1$、 $B = \mathbb{C}\langle a^2, b^2, c^2, d^2, ab, ac, bc, bd, cd\rangle$，它是 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ 的交换正规霍普夫子代数，且作为霍普夫代数同构于 $\mathcal{O}(PSL_2)$ 。

(iii) 假设 q 是单位根，且 $q^2 \neq 1$ 与 $2m = \ell = ord(q)$ 为偶数。考虑由单项式 $x^m y^m$ 生成的 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的子代数 N ，其中x， $y \in \{a, b, c, d\}$。则 N是 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的交换正规霍普夫子代数，作为霍普夫代数同构于 $\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C}))$ 。

证明。 (i) q 的阶为奇数的情形已在 [BG02的命题III.3.1]中研究过。该同构由 $X_{11} \to a^\ell$， $X_{12} \to b^\ell$， $X_{21} \to c^\ell$ 与 $X_{22} \to d^\ell$给出。

(ii) 该同构由下式给出

$$\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B}$$
$$\begin{pmatrix} X_{11}^2 & X_{11}X_{12} & X_{12}^2 \\ X_{11}X_{21} & X_{12}X_{21} & X_{12}X_{22} \\ X_{21}^2 & X_{21}X_{22} & X_{22}^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 & ab & -b^2 \\ ac & -bc & -bd \\ -c^2 & -cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

其中左侧矩阵的每一项映到右侧矩阵中的同一项。

(iii) q 的阶为偶数但 $q^2 \neq 1$ 的情形由 [Cha+16的引理6.15]得出。

□

注 2.6.7。 每个子代数 L、 B、 N 都定义了一个 *Hopf* 理想 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))L^+$、 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))B^+$ 和 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))N^+$ ，分别与定义 *2.6.3* 和 *2.6.4* 中给出的理想一致。

思考 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$是否适合纳入 Hopf 代数正合列，是一件有趣的事。

$$\mathcal{O}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))},$$

用 $\Gamma = SL_2(\mathbb{C})$ 或 $PSL_2(\mathbb{C})$ 表示。许多作者对此进行了研究，相关结果取决于 q 的阶，并在以下定理中给出。

定理 2.6.8。 *(i) [M¨ul00]* 如果 q 的阶为奇数， $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \cong \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ$ 和$\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 构成正合列

$$\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ.$$

Here

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))} &= \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))L^+) \\ &= \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(a^\ell - 1, b^\ell, c^\ell, d^\ell - 1) \\ &= \widehat{\mathcal{O}}_q(SL_2(\mathbb{C})). \end{aligned}$$

*(*见定义 *2.6.4)*

(ii) [BN11] 当 $q = -1$, $\overline{\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))} \cong \mathbb{C}\mathbb{Z}_2$ 与 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ 适合正合列

$$\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathbb{C}\mathbb{Z}_2.$$

*(iii) [Cha+16]*如果 $ord(q) = 2m > 2$ 为偶数，则 $\overline{\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))} \cong \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ$，且正合列为

$$\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ.$$

Here

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))} &= \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))N^+) \\ &= \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(a^{2m}-1, b^m, c^m, d^{2m}-1) \\ &= \bar{\mathcal{O}}_q(SL_2(\mathbb{C})).\end{aligned}$$

（见定义 *2.6.3*）

3. O_q(SL₂(复数域)) 的量子子群 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$

我们希望计算参数 q 取不同值时 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的量子子群。也就是说，求 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的霍普夫代数商。若 $\rho : \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow A$ 是一个霍普夫代数满态射，我们首先构造以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} B & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & H \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \overline{H} \end{array}$$

其中各行都是正合列。我们将采用与 M¨uller 在[M¨ul00] 中类似的策略来求这些商。关于更一般的方法，参见 [AG09]。

命题 3.0.1。 考虑一个霍普夫代数的交换图，其各行都是正合列

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & H \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \| \\ \mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A' & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H \end{array}$$

假设维数 H 有限。那么 ρ 是一个同构。

证明。 由于 $\mathcal{O}(\Gamma)$ 是交换的，根据命题 2.1.2 A' 在 $\mathcal{O}(\Gamma)$ 上忠实平坦。由于 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 是诺特的（[BG02, (I.1.18.)]），所以 A' 也是诺特的；根据 [AG09, (1.15)] 的证明， ρ 是一个同构。 □

3.1. (()) 的量子子群 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$，ord($q$) $= \ell$ 为奇数。

回顾一下，若 ord(q) $= \ell > 2$为奇数，则 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 属于正合列

$$\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ.$$

M¨uller 在 [M¨ul00] 中找到了满足这些条件的 q对应的 $\mathcal{O}_q(SL_n(\mathbb{C}))$ 的所有商。本节首先介绍 $n = 2$ 情形下的主要结果。

定义 3.1.1. 设 q 是一个奇数阶 ℓ单位根。奇子群数据是一个集合$\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$，满足：

- $I_+, I_- \in \{\emptyset, \{1\}\}$。
- N 是$(\mathbb{Z}_\ell)^s$的一个子群，其中 $s = 1 - |I_+ \cup I_-|$。
- Γ 是一个群。
- σ: $\Gamma \to L$ 是一个单射群态射，其中 L 是由集合 I_+ 和 I_-确定的 $SL_2(\mathbb{C})$ 的一个子群。
- δ: $N \to \Gamma$ 是一个群态射。

注记3.1.2. 在量子子群的构造中，我们将对 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$取商，并采用如下记号： I_+, $I_- \in \{\emptyset, \{1\}\}$ 其中选择 $I_+ = \{\emptyset\}$ 对应于对由 c生成的理想取商， $I_- = \{\emptyset\}$ 对应于取由 b 生成的理想，而若 $I_\pm = \{1\}$ ，则我们不取商。这些集合定义了 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的一个代数李子代数 $\mathfrak{l}$ ，并带有 $SL_2(\mathbb{C})$的连通李子群 L ，使得 $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathfrak{l}_-$且 $\mathfrak{l}_+ = \mathbb{C}e$ ，或 $\mathfrak{l}_+ = 0$ 且 $\mathfrak{l}_- = \mathbb{C}f$ ，或 $\mathfrak{l}_- = 0$。

下面的结果刻画了奇数阶单位根 q 下 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的所有子群。我们将采用 [AG 09]，中给出的记号，以及定义 1.0.1 和定义 1.0.2 中分别给出的量子子群同构与子群数据等价的定义。

定理 3.1.3。 *[M¨ul00]* 令 q 为奇数阶单位根。以下两者之间存在一个双射：

(i) Hopf 代数商 ρ： $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow A$ 按同构分类；*(ii)* 按等价分类的奇子群数据。

证明这一刻画的步骤如下：首先构造这些商，然后证明先前的构造是完备的，也就是说， $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的每个子群都能以这种方式构造。该映射为双射的证明可由 [AG09, 定理 2.20] 得出。

3.2. **量子子群的构造**。 对于第一部分，我们有以下定理。

定理 3.2.1。 *[AG09，定理 2。17]* 对于每个奇子群数据 $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$，都存在一个霍普夫代数 $A_\mathcal{D}$ ，它是 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的一个商，并且属于以下正合列

$$1 \to \mathcal{O}(\Gamma) \xrightarrow{\tilde{\iota}} A_\mathcal{D} \xrightarrow{\hat{\pi}} H \to 1,$$

此外， $A_\mathcal{D}$ 是由 $\mathcal{O}_q(L)/(\mathcal{J})$ 对 J_δ 取商得到的，其中 $\mathcal{J} =$ 核 σ^t ，而 J_δ 是由某些群样元生成的双边理想；下列霍普夫代数正合列图是交换的：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(L) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & \mathcal{O}_q(L)/(\mathcal{J}) & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A_\mathcal{D} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H
\end{array}$$

该构造分三步完成，第一步如下：取 $I_+, I_- \in \{\emptyset, \{1\}\}$。然后可以构造一个霍普夫子代数 $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$ 和一个 $SL_2(\mathbb{C})$ 的代数子群 L ，使得 $Lie(L) = \mathfrak{l}$。我们有一个霍普夫代数的满同态 w_L： $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \to \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ$ ，以及如下霍普夫代数正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(L) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ
\end{array}$$

完成该构造后，我们得到四种可能的图，如下所示 .

情形 I: 设 $I_+ = \{\emptyset\}$ 和 $I_- = \{\emptyset\}$。我们对由 $\{b\}$和 $\{c\}$ 生成的理想取商，使得 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}h$ ，图示如下

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))/(X_{12}, X_{21}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b,c) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathbb{CZ}_\ell
\end{array}$$

此处 $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))/(X_{12}, X_{21})$ 对应于由对角矩阵构成的环面上的函数代数。

情形 II: 设 $I_+ = \{1\}$ 和 $I_- = \{\emptyset\}$。我们对 (c) 取商，使得 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h$，得到

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))/(X_{21}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(c) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{b}^+)^\circ
\end{array}$$

此处 $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))/(X_{21})$ 对应于上三角矩阵的 Borel 子群上的函数代数。

情形 III: 设 $I_+ = \{\emptyset\}$ 和 $I_- = \{1\}$。我们对 (b) 取商，因此 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f$，得到

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))/(X_{12}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{b}^-)^\circ
\end{array}$$

这里， $\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))/(X_{12})$ 对应于下三角矩阵的 Borel 子群上的函数代数。

情形 IV: 设 $I_+ = \{1\}$ 和 $I_- = \{1\}$。我们不取商，因此 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f$，并且有

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\| & & \| & & \| \\
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ
\end{array}$$

对于第二步，设 $\sigma : \Gamma \to SL_2(\mathbb{C})$ 是子群 Γ 到 $SL_2(\mathbb{C})$ 的包含映射，使得 $\sigma(\Gamma) \subseteq L$ ，且 $\sigma^t : \mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}(\Gamma)$。于是，根据命题 2.1.4，$\mathcal{O}_q(L)$ 的商构成一个正合列，并且有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(L) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & \mathcal{O}_q(L)/(\mathcal{J}) & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ
\end{array}$$

其中 $\mathcal{J} =$ 核 σ^t 且 $\mathcal{O}(\Gamma) \cong \mathcal{O}(L)/\mathcal{J}$。

例 3.2.2. 设 L为情形 *II* 中出现的上三角矩阵的 *Borel* 子群。设 G_a 为 $\mathbb{C}$ 上的加法群，并考虑包含映射 $\sigma:\ G_a \to SL_2(\mathbb{C})$，其定义如下：

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对所有 $X \in G_a$ 均成立。因此我们有 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^\ell - 1, d^\ell - 1, b^\ell, c\rangle$ 与 ***Taft***代数 T_{q^2} 同构，且下图是交换的：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \twoheadrightarrow & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))/(X_{21}) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(c) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^\ell - 1, d^\ell - 1, b^\ell, c\rangle \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow & & \| \\
\mathcal{O}(G_a) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^\ell - 1, d^\ell - 1, c^\ell\rangle & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^\ell - 1, d^\ell - 1, b^\ell, c\rangle
\end{array}$$

对于第三步，我们需要考虑子群 $N \subseteq (\mathbb{Z}_\ell)^s$。当 $s = 0$ 时，也就是情形 II、III 和 IV，唯一的子群是 $N = \{0\}$。

在情形 I 中，$s = 1$，而 $\mathbb{Z}_\ell$ 的子群为 $N = \mathbb{Z}_t$，其中 t 是 ℓ 的某个因子。当我们取关于 (b, c) 的商时，元素 $\bar{a} \in \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b, c)$ 是群样元。因此，$N = \mathbb{Z}_t = (p)\widehat{\ }$，其中 $\ell = pt$。现在，$\delta:\ \mathbb{Z}_t \to \Gamma$ 将 p 映射为 Γ 的某个特征。我们可以用 $J_\delta = (\bar{a}^p - \delta(p))$ 对 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b, c)$ 取商，从而得到另一个量子子群。为了更好地理解它，让我们用一个例子来说明。

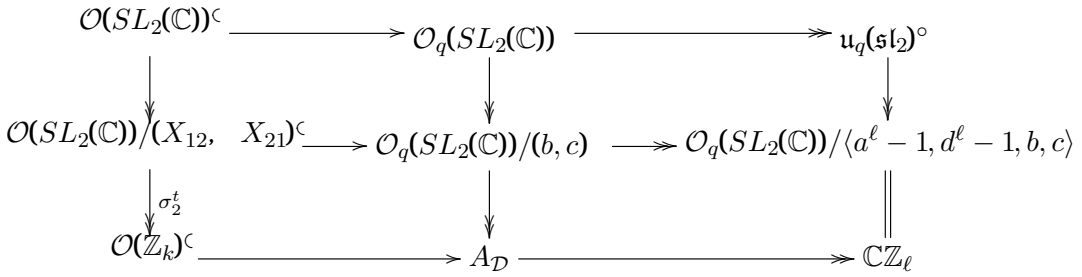
例 3.2.3. 令 G_m 为 $\mathbb{C}^\times$ 上的乘法群，且 $G_k = \{g \in \mathbb{C} \mid g^k = 1\} = \langle\omega\rangle \subset G_m$。考虑由 $y \mapsto \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}$ 给出的单态射 $\sigma_1:\ G_m \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C})$，以及由 $\omega \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$ 给出的单态射 $\sigma_2:\ G_k \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C})$。令 $\chi_i(g) := \omega^i$，并记 $\chi = \chi_1$。我们有 $\mathcal{O}(G_k) = \mathbb{C}\langle\chi\rangle \cong \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_k}$。此外，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) \overset{\sigma_1^t}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}(G_m) = \mathbb{C}[X, X^{-1}] \\
&\qquad X_{11} \to X \\
&\qquad X_{22} \to X^{-1} \\
&\qquad X_{12} \to 0 \\
&\qquad X_{21} \to 0
\end{aligned}
\qquad \textit{and} \qquad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) \overset{\sigma_2^t}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}(G_k) \cong \mathbb{C}\langle\chi | \chi^k = \varepsilon\rangle \cong \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_k} \\
&\qquad X_{11} \to \chi \\
&\qquad X_{22} \to \chi^{-1} \\
&\qquad X_{12} \to 0 \\
&\qquad X_{21} \to 0
\end{aligned}$$

我们有以下交换图，在每种情况下求出 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的不同商。

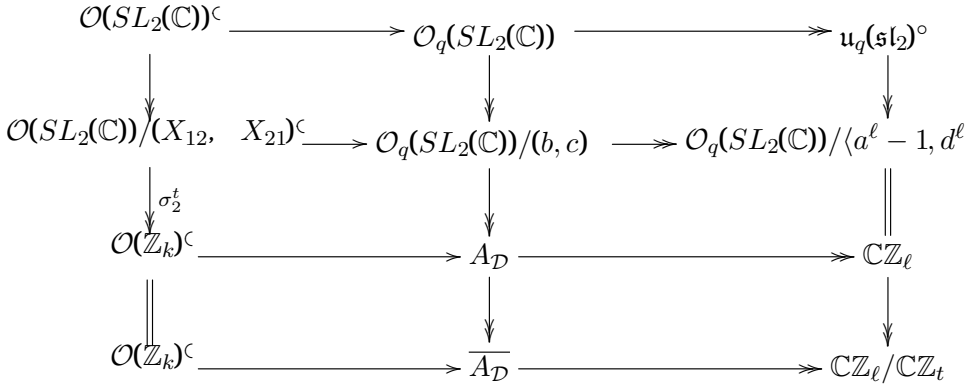
$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \twoheadrightarrow & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C}))/(X_{12},\ X_{21}) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b, c) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^\ell - 1, d^\ell - 1, b, c\rangle \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma_1^t} & & \downarrow & & \| \\
\mathcal{O}(G_m) & \hookrightarrow & A_{\mathcal{D}} & \twoheadrightarrow & \mathbb{C}\mathbb{Z}_\ell
\end{array}$$

其中 $A_{\mathcal{D}} = \mathbb{C}\langle a、\ b、\ c、\ d、\ X \mid b = c = 0、\ ad = 1、\ a^{\ell} = X\rangle$。



其中 $A_{\mathcal{D}} = \mathbb{C}\langle a, b, c, d, \chi \mid b = c = 0, ad = 1, a^{\ell} = \chi, \chi^{k} = 1\rangle$。

现在考虑 $\delta:\ \mathbb{Z}_t \to\ \widehat{\mathbb{Z}_k} \cong \langle\chi\rangle$ 使得 $\delta(p)\ = \chi^{r}$。我们还要再进行一步。



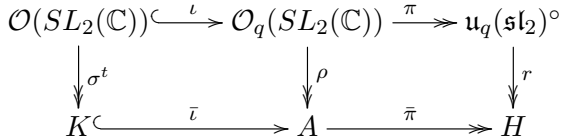
其中 $\overline{A_{\mathcal{D}}} = \mathbb{C}\langle a,\ \ b,\ \ c,\ \ d,\ \ ,\ \ \chi \mid b = c = 0,\ \ ad = 1,\ \ a^{\ell} = \chi,\ \ \chi^{k} = 1,\ \ \chi^{r} = a^{p}$ 满足 $\ell = pt,\ \ rt \equiv 1$模 $k\rangle$。最后这个关系归因于

$$\chi^{r} = a^{p} \longrightarrow \chi^{rt} = a^{pt} = a^{\ell} = \chi \longrightarrow rt \equiv 1 \mod k.$$

3.3. 量子子群的确定。本节证明这种构造是完备的：霍普夫代数 $\rho:\ \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \to A$ 的每个商都由某些奇子群数据确定。我们将遵循 [AG09，第 3] 节。

给定 $\rho:\ \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \to A$ 这一满同态，我们知道 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 构成一个正合列。根据命题 2.1.3，A 也构成一个正合列 $K \hookrightarrow A \twoheadrightarrow H$。

由于 K 是交换的，存在一个群 Γ 和一个单射 $\sigma:\ \Gamma \to SL_2(\mathbb{C})$，使得 $K \cong \mathcal{O}(\Gamma)$。此外，根据 [AG09，（1.12）]，存在一个满同态 $r:\ \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^{\circ} \to H$，且$H^{\circ}$ 由三元组（Σ，I_+，I_-）确定，其中 $\mathbb{C}\Sigma \subseteq H^{\circ} \subseteq \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$。我们有以下交换图



我们想要证明，对于某个奇数据子群（I_+，I_-，N，Γ，σ，δ），$A = A_{\mathcal{D}}$。考虑子代数 $\mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})$，其中 $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathfrak{l}_-$ 如注记3.1.2所述。由于 $\Sigma \subseteq T$，根据 [AG09，引理3.1]，我们有 $H^{\circ} \subseteq \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})$，因此 $w:\ \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^{\circ} \to H$ 是一个满同态，并且我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(L) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & A & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & H
\end{array}$$

此外，根据 [AG09，引理3.2]，$\sigma(\Gamma) \subseteq L$，且 A 是$A_{q,\,\mathfrak{l},\,\sigma}$ 在推出下得到的一个商。因此，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(L) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & A_{q,\mathfrak{l},\sigma} & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathfrak{u}_q(\mathfrak{l})^\circ \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H
\end{array}$$

在 $H^\circ = \mathfrak{u}_q(\mathfrak{sl}_2)$ $H^\circ = \mathfrak{u}_q(\mathfrak{b}^+)$ $H^\circ = \mathfrak{u}_q(\mathfrak{b}^-)$ 或 $H^\circ = \mathfrak{u}_q(\mathfrak{h})$ 的情况下，映射 w 是同构。若 $H^\circ \subset \mathfrak{u}_q(\mathfrak{h})$，令 $\mathbb{C}N \cong$ 核 w，其中 N 是 $\mathbb{Z}_\ell$ 的子群，因此对于某个 t，有 $N = (p) = \mathbb{Z}_t\widehat{\ }$。根据 [AG09，引理 3.3]，，存在 $\delta\colon N \to \Gamma$，使得 $A \cong A_{q,\,\mathfrak{l},\,\sigma}/J_\delta$。

3.4. 的量子子群 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$。回忆一下，$\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ 位于正合列中

$$\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathbb{C}\mathbb{Z}_2.$$

在此情形下，$\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ 的商由 $PSL_2(\mathbb{C})$ 的子群确定，正如以下结果所示。

定理 3.4.1。设 A 是 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ 的霍普夫代数商。那么或者 r

(i) A 同构于商 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\mathcal{J})$，其中 $\mathcal{J} =$核σ^t，且 $\sigma\colon \Gamma \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ 是代数群的单态射；或者 *(ii)* A 同构于某个二面体群上的函数代数 D_{2m}。

证明。这两种商的可能性与 $\mathbb{C}\mathbb{Z}_2$ 的可能子群有关。令 $\rho\colon \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C})) \to A$ 为一个霍普夫代数商。由命题 2.1.3，A 包含于霍普夫代数正合列 $B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow H$中，且下图是交换的

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}\mathbb{Z}_2 \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\
B & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H
\end{array}$$

其中 H 是 $\mathbb{C}\mathbb{Z}_2$ 和 $B \cong \mathcal{O}(\Gamma)$ 的商，其中 Γ 是 $PSL_2(\mathbb{C})$ 的某个代数子群。将 $\sigma\colon \Gamma \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ 记为代数群的单态射。那么 $\sigma^t\colon \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\Gamma)$ 是霍普夫代数的满态射。

若 $H = \mathbb{C}\mathbb{Z}_2$，根据命题 2.1.4，$\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\ker\sigma^t)$ 包含在一个霍普夫代数的正合序列中

$$\mathcal{O}(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\ker\sigma^t) \twoheadrightarrow \mathbb{C}\mathbb{Z}_2/\pi(\ker\sigma^t) \cong \mathbb{C}\mathbb{Z}_2$$

且下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}\mathbb{Z}_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\ker\sigma^t) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{C}\mathbb{Z}_2
\end{array}$$

我们要证明 $A \cong \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\ker\sigma^t)$。由于 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\ker\sigma^t)$ 是一个推出，因此存在 $\psi\colon \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\ker\sigma^t) \to A$ 一个霍普夫代数满态射，并且有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\ker\sigma^t) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{C}\mathbb{Z}_2 \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & A & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathbb{C}\mathbb{Z}_2
\end{array}$$

因此，由命题 3.0.1，ψ 是一个同构。

若 $H = \mathbb{C}$，则霍普夫代数满态射 $r\colon \mathbb{C}\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ 由余单位 $\varepsilon\colon \mathbb{C}\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ 给出，且下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}\mathbb{Z}_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & A & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathbb{C}
\end{array}$$

因此，由注记 2.1.1 可知 $A \cong \mathcal{O}(\Gamma)$。下面证明，对于某个二面体群 D_{2m}，有 $\Gamma \cong D_{2m}$。

由于 $A \cong \mathcal{O}(\Gamma)$，所以 A 是交换的。若将 $\bar{a}, b, \bar{c}, d$ 记为 A 中的元素，我们有 $\bar{a}\bar{c} = \bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{d} = \bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{d} = \bar{c}\bar{d} = 1$，且 $\bar{a}b = b\bar{a}$ 和 $\bar{a}b = -b\bar{a}$，因此 $\bar{a}b = 0$。同理，$\bar{a}\bar{c} = bd = \bar{c}d = 0$。为了确定 Γ，我们分析谱函子 $\mathsf{Alg}(A, \mathbb{C})$ 的像。对于任意 $\alpha\colon A \to \mathbb{C}$ 代数态射，我们有

$$\begin{gathered}
\alpha(\bar{a}\bar{c}) = \alpha(\bar{a})\alpha(\bar{c}) = 0 \\
\alpha(\bar{a}\bar{b}) = \alpha(\bar{a})\alpha(\bar{b}) = 0 \\
\alpha(\bar{a}\bar{d}) = \alpha(\bar{a})\alpha(\bar{d}) \\
\alpha(\bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}) = \alpha(\bar{a}\bar{d}) + \alpha(\bar{b}\bar{c}) = 1
\end{gathered}$$

因此，若 $\alpha(\bar{a}) \neq 0$ 则 $\alpha(\bar{b}) = \alpha(\bar{c}) = 0$ 且 $\alpha(\bar{d}) = \alpha(\bar{a})^{-1}$。若 $\alpha(\bar{a}) = 0$ 则 $\alpha(\bar{d}) = 0$ 且 $\alpha(\bar{c}) = \alpha(\bar{b})^{-1}$。这些条件唯一确定两个代数映射$\alpha, \beta \in \mathsf{Alg}(A, \mathbb{C})$

$$\begin{array}{ll}
\alpha : \bar{a} \to B & \beta : \bar{a} \to 0 \\
\quad \bar{b} \to 0 & \quad \bar{b} \to C \\
\quad \bar{c} \to 0 & \quad \bar{c} \to C^{-1} \\
\quad \bar{d} \to B^{-1} & \quad \bar{d} \to 0
\end{array}$$

对于某个 $B, C \in \mathbb{C}^\times$。

令 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 为由这些映射生成的群。根据上述计算，可得 $\langle \alpha, \beta \rangle \simeq \mathsf{Alg}(A, \mathbb{C}) = \Gamma$。此外，由于 β是一个对合，因此 Γ 是半直积 $\mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}_2$ 的一个商，并且

$$\mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}_2 \twoheadrightarrow \Gamma \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C});$$

这里我们考虑 β 通过共轭作用 $\beta \cdot \alpha = \beta\alpha\beta^{-1}$在 α 上的作用。由于 $PSL_2(\mathbb{C})$ 的子群中，只有（有限）二面体群是$\mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}_2$的商，因此可知，对于某个 $m \in \mathbb{N}$，有 $\Gamma \cong D_{2m}$。

□

注 3.4.2. 显然，*(i)* 中的商是量子子群。此外，给定一个由一个阶为 m 的元素和一个阶为 2的元素生成的二面体群 D_{2m}，我们只需令 B 为阶为 m 的生成元，令 C 为阶为 2 的生成元，即可定义态射 α,β。这意味着，对于任意二面体群 D_{2m}，我们都有 *Hopf* 代数商 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(D_{2m}) = \mathbb{C}^{D_{2m}}$。

为了给出上文（i）中那些商的显式定义，我们必须计算核 σ^t。我们将在下面的例子中说明如何进行这一计算。

例 3.4.3. 考虑 Γ 为 $SL_2(\mathbb{C})$ 的一个子群，并令 $p:\ \Gamma \twoheadrightarrow \tilde{\Gamma}$、$\pi:\ SL_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ 为相应的满态射。于是我们有

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\tilde{\Gamma}) & \xleftarrow[i^t]{} & \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) \\ {\scriptstyle p^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} \\ \mathcal{O}(\Gamma) & \xleftarrow[\sigma^t]{} & \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \end{array}$$

设 $\Gamma = \mathbb{Z}_n = \langle g\rangle$、$\Gamma = \mathbb{Z}_{2n} = \langle h\rangle$，且 ω 为阶 $2n$的单位根。考虑由 $h \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$ 给出的单态射 $\iota:\ \mathbb{Z}_{2n} \hookrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ 以及如下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{2n} & \xhookrightarrow{\iota} & SL_2(\mathbb{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle P_{\mathbb{Z}}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{Z}_n & \xhookrightarrow{\sigma} & PSL_2(\mathbb{C}) \end{array}$$

其中 $P_{\mathbb{Z}} = \pi \circ \iota$ 与 $g = P_{\mathbb{Z}}(h)$；因此，$Ker(P_{\mathbb{Z}}) = \langle h^n\rangle$. 对偶化后我们得到

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2n}} & \xleftarrow[\iota^t]{} & \mathcal{O}(SL_2(\mathbb{C})) \\ {\scriptstyle P_{\mathbb{Z}}^t}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi^t} \\ \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} & \xleftarrow[\sigma^t]{} & \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \end{array}$$

给出相应量子子群的交换图为

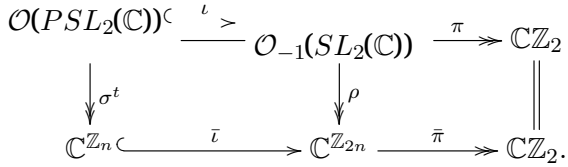
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}\mathbb{Z}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \| \\ \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\ker\sigma^t) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{C}\mathbb{Z}_2 \end{array}$$

我们要计算 σ^t的核。设 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} = \langle\alpha\rangle$，其中 $\alpha(g) = \omega^2$，且 $C^{\mathbb{Z}_{2n}} = \langle\chi\rangle$，其中$\chi(h) = \omega$。于是 $\sigma^t(X_{11}^2)(g) = X_{11}^2(\sigma(g)) = \omega^2 = \alpha(g)$，这意味着 $\sigma^t(X_{11}^2) = \alpha$。用同样的论证可得，$\sigma^t(X_{22}^2) = \alpha^{-1}$，$\sigma^t(X_{12}\cdot) = \sigma^t(X_{21}\cdot) = \sigma^t(\cdot X_{12}) = \sigma^t(\cdot X_{21}) = 0$，且$\sigma^t(X_{11}X_{22}) = \varepsilon$。

注意，$\sigma^t(X_{11}^{2n})(g) = \alpha(g)^n = \omega^{2n} = 1$，以及 $\sigma^t(X_{22}^{2n})(g) = \alpha^{-1}(g)^n = \omega^{-2n} = 1$。因此，核$\sigma^t = \langle X_{11}^{2n} - 1,\ X_{22}^{2n} - 1,\ X_{11}X_{22} - 1,\ X_{ij}X_{kl}$，其中 $i \neq j$或 $k \neq l\rangle$。

然而，由于 $ad + bc = 1$ 我们有 $b(ad + bc) = b$，因此 $\rho(b) = \rho(bad) + \rho(bbc) = 0$。用同样的方法计算，$\rho(c) = 0$。这意味着 $b, c \in$(核 σ^t)。

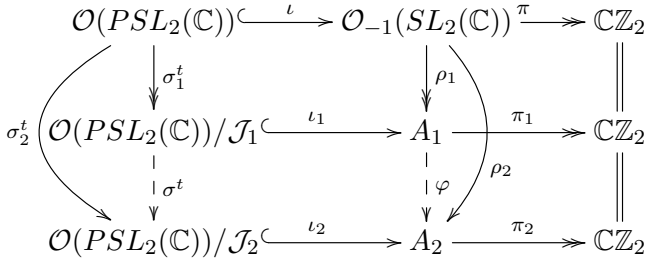
于是，$\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/$(核 σ^t) $= \mathbb{C}\langle a | a^{2n} = 1\rangle \cong \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2n}} \cong \mathbb{C}\mathbb{Z}_{2n}$，上面的交换图可写为



最后，我们研究两个类型 (i) 的商何时同构。回顾量子子群同构的定义 1.0.1。

命题 3.4.4. 设 $\sigma_i: \ \Gamma_i \to PSL_2(\mathbb{C})$ 是代数群的单态射，其中 i =1,2. 那么 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ /(核 σ_1^t) 与 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$/(核 σ_2^t) 作为量子子群同构，当且仅当存在 $\rho: \ \Gamma_2 \to \Gamma_1$ 代数群同构，使得$\sigma_1 \circ \rho = \sigma_2$。

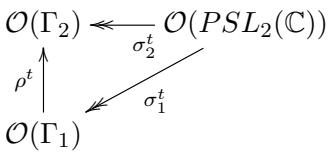
证明。 记 $A_1 = \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\mathcal{J}_1)$ 和 $A_2 = \mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))/(\mathcal{J}_2)$，其中 $\mathcal{J}_1 =$ 核σ_1^t和 $\mathcal{J}_2 =$ 核σ_2^t。 设 $\varphi: A_1 \to A_2$ 是一个同构，因此 $\varphi \circ \rho_1 = \rho_2$。 我们有如下交换图



我们有 $\mathcal{J}_1 \subseteq$ 核$\sigma_2^t = \mathcal{J}_2$ ，因为 $0 = \varphi\iota_1\sigma_1^t(\mathcal{J}_1) = \varphi\rho_1\iota(\mathcal{J}_1) = \rho_2\iota(\mathcal{J}_1) = \iota_2\sigma_2^t(\mathcal{J}_1)$。利用$\varphi^{-1}$，我们可以看到 $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_1$ ，因此 $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$。

由于 $\mathcal{J}_1 =$核 $\sigma_1^t = \{p \in \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})): \ p|_{\sigma_1(\Gamma_1)} = 0\}$，以及 $\mathcal{J}_2 =$核 $\sigma_2^t = \{p \in \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})): \ p|_{\sigma_2(\Gamma_2)} = 0\}$， $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$ 意味着 $\sigma_1(\Gamma_1) = \sigma_2(\Gamma_2)$，因此我们可以定义 $\rho: \Gamma_2 \to \Gamma_1$ 使得 $\rho(\Gamma_2) = \sigma_1^{-1}(\sigma_2(\Gamma_2)) = \sigma_1^{-1}(\sigma_1(\Gamma_1)) = \Gamma_1$。于是 $\sigma_1\rho(\Gamma_2) = \sigma_2(\Gamma_2)$，并且 $\sigma_1 \circ \rho = \sigma_2$。

另一方面，假设存在同构 $\rho: \Gamma_2 \to \Gamma_1$ ，使得 $\sigma_1 \circ \rho =\sigma_2$。那么下图是交换的。



也就是说， $\sigma_2^t = \rho^t \circ \sigma_1^t$。那么 $\mathcal{J}_1 =$ker $\sigma_1^t \subseteq$ker $\sigma_2^t = \mathcal{J}_2$。利用 ρ^{-1}，我们可以看出$\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_1$ ，因此 $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$。

现在，定义 $\varphi: \mathcal{O}_{-1}(SL_2)/(\mathcal{J}_1) \to \mathcal{O}_{-1}(SL_2)/(\mathcal{J}_2)$，使得 $\varphi \circ \rho_1 = \rho_2$。对于$\bar{x} \in \mathcal{O}_{-1}(SL_2)/(\mathcal{J}_1)$，取 $\bar{x} = \rho_1(x)$，其中 $x \in \mathcal{O}_{-1}(SL_2)$，定义 $\varphi(\bar{x}) = \rho_2(x)$。那么 φ 定义良好，因为若 $x - y \in (\mathcal{J}_1) = (\mathcal{J}_2)$，则 $\rho_2(x - y) = 0$，也就是说， $\rho_2(x) = \rho_2(y)$。最后，根据定义，$\varphi \circ \rho_1 = \rho_2$。

□

注记 3.4.5. 在 *[BN11* 中，定理 *5.19], Bichon* 和 *Natale* 找出了 $\mathcal{O}_{-1}(SL_2(\mathbb{C}))$ 的所有非交换有限维 *Hopf* 代数商；这些商尤其是半单且余半单的。这里我们通过纳入无限维情形来扩展这一结果。

3.5. **量子子群 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$，ord($q$) 为偶数。** 正如我们在定理 2.6.8 中所见，若 ord(q) $= \ell = 2m$ ($m \neq 1$)，则 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 属于正合列

$$\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ.$$

对于有限维量子子群，这种情况已在 [BN11] 和 [Cha+16] 中研究过。这里我们给出所有量子子群，并展示一个例子，说明如何通过生成元与关系显式确定量子子群。

定义 3.5.1。设 q 是偶数阶 $\ell \neq 2$的单位根。偶子群数据是一个集合 $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$，满足：

- I_+、$I_- \in \{\emptyset, \{1\}\}$。
- N 是$(\mathbb{Z}_\ell)^s$的子群，其中 $s = 1 - |I_+ \cup I_-|$。
- Γ 是一个代数群。
- σ： $\Gamma \to L$ 是一个单射群态射，其中 $L \subseteq PSL_2(\mathbb{C})$ 由集合 I_+ 和 I_-确定。
- δ： $N \to \Gamma$ 是一个群态射。

注 3.5.2。与奇数情形一样，I_+、$I_- \in \{\emptyset, \{1\}\}$ 其中，选择 $I_+ = \{\emptyset\}$ 对应于对由 c生成的理想取商，$I_- = \{\emptyset\}$ 对应于取由 b 生成的理想；而如果 $I_\pm = \{1\}$，则不取商。这些集合定义了一个代数¯李子代数 $\mathfrak{l}$，它属于 $\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{C}$），具有 L 这一 SL_2（$\mathbb{C}$）的连通李子群，以及 L 这一 PSL_2（$\mathbb{C}$）的子群，并满足 $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathfrak{l}_-$ 且 $\mathfrak{l}_+ = \mathbb{C}e$，或 $\mathfrak{l}_+ = 0$ 且 $\mathfrak{l}_- = \mathbb{C}f$，或 $\mathfrak{l}_- = 0$。

我们有如下结果，它刻画了当 q为偶数阶 $\ell \neq 2$单位根时，$\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$的所有子群。$\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$的两个商之间的同构概念，以及两个子群数据之间的等价关系，分别见定义 1.0.1 和定义 1.0.2。

定理 3.5.3. 设 q 是偶阶 $\ell = 2m, m \neq 1$ 的单位根。存在如下两者之间的双射

(i) ***Hopf*** 代数商 ρ： $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \to A$ 在同构意义下。*(ii)* 偶子群数据在等价意义下。

我们在第 3.6 节和第 3.7 节中证明该定理。首先，我们在引理 3.6.1 中证明，子群数据 $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ 给出 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的一个商；然后在引理 3.7.1 中证明，每个商都由某个偶子群数据确定。它是双射这一结论的证明，可经必要修改后由 [AG09 的定理 2.20] 得出。

3.6. 量子子群的构造。

引理 3.6.1. 对每个偶子群数据 $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$，存在一个霍普夫代数 $A_\mathcal{D}$，它是 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的商，并且可嵌入正合列

$$1 \to \mathcal{O}(\Gamma) \xrightarrow{\bar{\iota}} A_\mathcal{D} \xrightarrow{\bar{\pi}} H \to 1,$$

此外，$A_\mathcal{D}$ 由 $\mathcal{O}_q$（L）/（$\mathcal{J}$）对 J_δ取商得到，其中 $\mathcal{J} =$核σ^t，而 J_δ是由若干群样元生成的双边理想，并且下列霍普夫代数正合列图是交换的：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(\bar{L}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & \mathcal{O}_q(L)/(\mathcal{J}) & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A_\mathcal{D} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H
\end{array}$$

与奇数情形相同，该构造分三步完成，第一步如下：对理想（b）、（c）或（b、c）取商，这对应于对 I_+、I_-的选择。然后，我们可以构造霍普夫子代数$\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)$以及代数子群 $L \subseteq SL_2(\mathbb{C})$和 $L \subseteq PSL_2(\mathbb{C})$，使得 $Lie(L) = \mathfrak{l}$。我们有一个霍普夫代数的满同态$u_L : \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \to \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ$，以及下列霍普夫代数正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow u_L & & \downarrow v_L & & \downarrow w_L \\
\mathcal{O}(\bar{L}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ
\end{array}$$

经过这一构造，我们得到四个可能的图，如下所示。

情形 I：对由 b 和 c 生成的理想取商，使得 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}h$ 和 $\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{h})$ 是由 k 生成的 $\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)$ 的子代数。此情形下的图为

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow u_L & & \downarrow v_L & & \downarrow w_L \\
\mathcal{O}(\bar{T}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b,c) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{h})^\circ \simeq \mathbb{C}\mathbb{Z}_\ell
\end{array}$$

这里 $\mathcal{O}(\bar{T}) \simeq \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C}))/(X_{12}^2,\ X_{21}^2,\ X_{11}X_{12},\ X_{11}X_{21},\ X_{12}X_{21},\ X_{12}X_{22},\ X_{21}X_{22})$。情形 II：对理想 $\{c\}$ 取商，使得 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h$ 和 $\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{b}^+)$ 是由 k 和 e 生成的 $\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)$ 的子代数。此情形下的图为

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow u_L & & \downarrow v_L & & \downarrow w_L \\
\mathcal{O}(\bar{B}^+) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(c) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{b}^+)^\circ
\end{array}$$

这里 $\mathcal{O}(\bar{B}^+) \simeq \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C}))/(X_{11}X_{21},\ X_{12}X_{21},\ X_{21}^2,\ X_{21}X_{22})$。
情形 III：对理想 $\{b\}$ 取商，因此 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f$ 和 $\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{b}^-)$ 是由 k 和 f生成的 $\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)$ 的子代数。本情形中的图为

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow u_L & & \downarrow v_L & & \downarrow w_L \\
\mathcal{O}(\bar{B}^-) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{b}^-)^\circ
\end{array}$$

Here $\mathcal{O}(\bar{B}^-) \simeq \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C}))/(X_{12}^2, X_{11}X_{12}, X_{12}X_{21}, X_{12}, X_{22})$.
情形 IV：我们不取商，因此 $\mathfrak{l} = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f$，并且我们有 $\mathfrak{h}$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\| & & \| & & \| \\
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ
\end{array}$$

对于第二步，设 $\sigma\colon \Gamma \to PSL_2(\mathbb{C})$ 是子群 Γ 在 $PSL_2(\mathbb{C})$ 中的包含映射，使得 $\sigma(\Gamma) \subseteq \bar{L}$ 且 $\sigma^t\colon \mathcal{O}(\bar{L}) \to \mathcal{O}(\Gamma)$。那么，根据命题 2.1.4，$\mathcal{O}_q(L)$ 的商构成一个正合列，并且有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \twoheadrightarrow^{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(\bar{L}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \twoheadrightarrow^{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & \mathcal{O}_q(L)/(\mathcal{J}) & \twoheadrightarrow^{\widehat{\pi}} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ
\end{array}$$

其中 $\mathcal{J}=$核 σ^t 且 $\mathcal{O}(\Gamma)\cong\mathcal{O}(\bar{L})/\mathcal{J}$。

例 3.6.2。 回顾例 *3.4.3* 中给出的包含映射 $\sigma:\ \mathbb{Z}_n\to PSL_2(\mathbb{C})$ 。通过相同的计算可得 核$\sigma^t=($ $X_{11}^{2n}-1, X_{22}^{2n}-1, X_{11}X_{22}-1, X_{ij}X_{kl}$ 其中 $i\neq j$ 或 $k\neq l$)。

由于 $ad-qbc=1$，我们有 $b(ad-qbc)=b$ 以及 $s(b)=s(bad)-s(qbbc)=0$。同理， $s(c)=0$。这意味着 $b,c\in$(核 σ^t)。

于是， $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/$(核 $\sigma^t)=\mathbb{C}\langle a|a^{2mn}=1\rangle\cong\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2mn}}\cong\mathbb{C}\mathbb{Z}_{2mn}$ ， 我们得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \twoheadrightarrow^{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_T} & & \downarrow{\scriptstyle v_T} & & \downarrow{\scriptstyle w_T} \\
\mathcal{O}(\bar{T}) & \xhookrightarrow{\iota_T} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b,c) & \twoheadrightarrow^{\pi_T} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^{2m-1},b,c,d^{2m-1}\rangle\cong\mathbb{C}\mathbb{Z}_{2m} \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2mn}} & \twoheadrightarrow^{\widehat{\pi}} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^{2m-1},b,c,d^{2m-1}\rangle\cong\mathbb{C}\mathbb{Z}_{2m}
\end{array}$$

最后，在情形 I 中，我们对由 b 和 c 生成的理想取商，并且还要再进行一步。设 N 是 $\mathbb{Z}_\ell$的一个循环子群，假设 $N=(p)=\mathbb{Z}_t$ ，其中 $pt=\ell$，并且$\widehat{\ }$定义 $\delta:\ N\to\Gamma\simeq(\chi)$，使得 $\delta(p)=\chi^s$。可以对 $\mathcal{O}_q(L)/(\mathcal{J})$ 模去$J_\delta=(\bar{a}^p-\delta(p))$，从而得到另一个量子子群。我们得到交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \twoheadrightarrow^{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(\bar{L}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \twoheadrightarrow^{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & \mathcal{O}_q(L)/(\mathcal{J}) & \twoheadrightarrow^{\widehat{\pi}} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A_{\mathcal{D}} & \twoheadrightarrow^{\bar{\pi}} & H
\end{array}$$

其中 $A_{\mathcal{D}}$ 是 $\mathcal{O}_q(L)/(\mathcal{J})$ 对 J_δ取商所得。下面通过以下示例来看这一步。

例 3.6.3. 继续例 *3.6.2*，假设 $m=n$ ，并取 $N=(2)$ 和$\delta(2)=\alpha$ ，其中 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n}=\langle\alpha\rangle$。然后取商 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2mn}}/\langle a^2=\alpha\rangle\cong\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2n}}$ ，并得到如下图表。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_T} & & \downarrow{\scriptstyle v_T} & & \downarrow{\scriptstyle w_T} \\
\mathcal{O}(T) & \xhookrightarrow{\iota_T} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/(b,c) & \xrightarrow{\pi_T} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^{2m-1}, b, c, d^{2m-1}\rangle \cong \mathbb{C}\mathbb{Z}_{2m} \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\
\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2mn}} & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^{2m-1}, b, c, d^{2m-1}\rangle \cong \mathbb{C}\mathbb{Z}_{2m} \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n} & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2n}} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))/\langle a^2, b, c, d^2\rangle \cong \mathbb{C}\mathbb{Z}_2
\end{array}$$

特别是，$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{2n}} = \mathbb{C}\langle a, b, c, d, \alpha \mid b = c = 0, ad = 1, a^2 = \alpha\rangle$。

3.7. 量子子群的确定。 定理 3.5.3 证明的最后一步是证明这一构造涵盖了所有情形。我们将在下面的引理中证明这一点。

引理 3.7.1。 霍普夫代数 $\rho: \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \to A$ 的每个商都由某个偶子群数据 $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$确定。

证明。给定 $\rho: \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) \to A$，考虑 $K = \rho(\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C}))$。那么 K 是交换的，并且在 A 上正规，因此根据命题 2.1.2，下面的序列是正合的

$$K \hookrightarrow A \twoheadrightarrow H \simeq A/AK^+$$

由于 K 是交换的霍普夫代数，因此存在一个群 Γ 和一个单射 $\sigma: \Gamma \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$，使得 $K \cong \mathcal{O}(\Gamma)$。于是我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H
\end{array}$$

由于 $\rho(\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C}))) = K$ 且 $\rho(\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))) = A$，因此

$$AK^+ = \rho(\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})))(\rho(\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C}))))^+ = \rho(\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))(\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})))^+) = \rho(\text{核 } \pi).$$

也就是说，核$(\bar{\pi})$ = ρ(核π)。因此核 $\pi \subseteq$ 核 $\bar{\pi}\rho$，且存在一个满同态 $r: \mathfrak{u}_{2,\,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \to H$，使下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^t} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H
\end{array}$$

现在我们要证明，存在某个子群 $L \subseteq SL_2(\mathbb{C})$，使得下图是交换的。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\
\mathcal{O}(\bar{L}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H
\end{array} \qquad (1)$$

（σ^t 作用于 $\mathcal{O}(\Gamma)$，ρ 作用于 A，r 作用于 H）

由于 H 是$\mathfrak{u}_{2\text{的商}}$，$_q(\mathfrak{sl}_2)^\circ$，$H^\circ$ 是$\mathfrak{u}_{2\text{的子代数}}$，$_q(\mathfrak{sl}_2)$。因此 H° 由以下对象之一生成：

(i) k, e, f。在此情形下，$H^\circ = \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)$ 和 $L = SL_2(\mathbb{C})$。(ii) k, e。在此情形下，$H^\circ = \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{b}^+)$ 和 $L = B^+$。(iii) k, f。在此情形下，$H^\circ = \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{b}^-)$ 和 $L = B^-$。(iv) k。在此情形下，$H^\circ = \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{h})$ 和 $L = T$。(v) 对某个 s，k^s。在此情形下，$\Sigma = (k^s) \subseteq T$ 且 $\mathbb{C}\Sigma = H^\circ \subseteq \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{h})$。令 $w : \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{h})^\circ \to H = (\mathbb{C}\Sigma)^\circ \cong \mathbb{C}\Sigma$ 且 $\mathbb{C}N \cong$ 核 w，其中 N 是 $\mathbb{Z}_\ell$ 的一个子群。则对于某个 t，$N = (p) \cong \mathbb{Z}_t$，且 $\bar{a}^p \in G(A_{L,\sigma})$。

在所有这些情形中，根据我们之前所作的构造可知，$\mathcal{O}_q(L)$ 属于一个正合列 $\mathcal{O}(L) \hookrightarrow \mathcal{O}_q(L) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}_{2,\ q}(\mathfrak{l})^\circ$，且图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\ \downarrow{\scriptstyle u_L} & & \downarrow{\scriptstyle v_L} & & \downarrow{\scriptstyle w_L} \\ \mathcal{O}(\bar{L}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \end{array}$$

是交换的。

为证明图 (1) 是交换的，我们首先证明核 $v_L \subseteq$ 核 ρ，因此存在 $v: \mathcal{O}_q(L) \to A$，然后定义 $u = v \circ i_L$。

回顾一下，核 v_L 在情形 (i) 中是 $\{0\}$，在情形 (ii) 中是 (c)，在情形 (iii) 中是 (b)，在情形 (iv) 和 (v) 中是 (b, c)。我们只证明 $\rho(c) = 0$。用同样的论证可以证明 $\rho(b) = 0$。由于 $\bar{\pi}\rho = r\pi$，我们有 $\bar{\pi}\rho(c) = 0$。假设 $\rho(c) \neq 0$。那么 $0 \neq \rho(c) \in$核 $\bar{\pi} = \rho($核 $\pi)$，并且 $c \in$核 $\pi +$核 ρ。我们可以写成

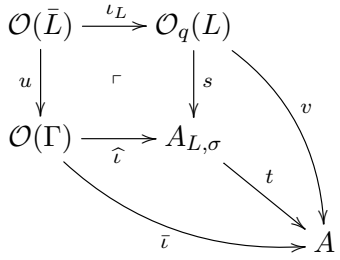
$$c = \sum_\alpha \lambda_\alpha (a^{2m} - 1)^{\alpha_1} (b^m)^{\alpha_2} (c^m)^{\alpha_3} (d^{2m} - 1)^{\alpha_4} + \ker \rho \quad \text{for some } \lambda_\alpha = \lambda_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}.$$

根据 [BG02, (I.7.16.)] $S = \{a^l b^m c^s | l, m, s \geq 0\} \cup \{b^m c^s d^t | m, s \geq 0 \text{ 和 } t > 0\}$ 是 $\mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C}))$ 的 PBW 基，因此比较次数可知，对于所有 α，都有 $\lambda_\alpha = 0$。也就是说，$c \in \mathrm{Ker}\,\rho$，这正是我们要证明的。

现在令 $A_{L,\sigma}$ 为 $\mathcal{O}_q(L)$ 的商，它是命题 2.1.4 中给出的推出：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(\bar{L}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \| \\ \mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & A_{L,\sigma} & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \end{array}$$

其中 $\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ/(\widehat{\pi}(\bar{a}^p) - 1) \simeq H$。由 (1) 的交换性，$v\iota_L = \bar{\iota}u$，因此存在唯一的态射 $t: A_{L,\ \sigma} \to A$，使图表交换。



因此 $t\widehat{\iota} = \bar{\iota}$。此外，对于任意 $x \in A_{L,\ \sigma}$ $w\widehat{\pi}(x) = w\widehat{\pi}s(y) = w\pi_L(y) = \bar{\pi}v(y) = \bar{\pi}ts(y) = \bar{\pi}t(x)$，存在某个 $y \in \mathcal{O}_q(L)$。因此，我们得到以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(PSL_2(\mathbb{C})) & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{O}_q(SL_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{sl}_2)^\circ \\
\downarrow u_L & & \downarrow v_L & & \downarrow w_L \\
\mathcal{O}(\bar{L}) & \xhookrightarrow{\iota_L} & \mathcal{O}_q(L) & \xrightarrow{\pi_L} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\
\downarrow u & & \downarrow s & & \| \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\widehat{\iota}} & A_{L,\sigma} & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ \\
\| & & \downarrow t & & \downarrow w \\
\mathcal{O}(\Gamma) & \xhookrightarrow{\bar{\iota}} & A & \xrightarrow{\bar{\pi}} & H
\end{array}$$

注意，当 $H^\circ = \mathfrak{u}_{2,\ q}(\mathfrak{sl}_2)\, H^\circ = \mathfrak{u}_{2,\ q}(\mathfrak{b}^+) H^\circ = \mathfrak{u}_{2,\ q}(\mathfrak{b}^-)$ 或 $H^\circ = \mathfrak{u}_{2,\ q}(\mathfrak{h})$ 时，$w = id$。因此，由命题 3.0.1 可知，$A \simeq A_{L,\ \sigma}$。

在 $H^\circ \subseteq \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{h})$ 和 $\mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{h})^\circ \simeq \mathbb{C}\mathbb{Z}_\ell$，$A$ 是 $A_{L,\sigma}$ 的商，而 $A_{L,\sigma}$ 是 $\mathbb{C}[\bar{a}, \bar{a}^{-1}]$ 的商。证明的最后一步是证明存在一个群$\widehat{}$映射 $\delta\colon\ N \to \Gamma$，使得 $N = (p)$ 是 $\mathbb{Z}_\ell$ 的子群，且$A \simeq A_{L,\sigma}/J_\delta$，其中$J_\delta = (\bar{a}^p - \delta(p))$。

设 $\mathbb{C}N \cong \ker w$，其中 N 是 $\mathbb{Z}_\ell$ 的子群。则对于某个 t，有 $N = (p) \cong \mathbb{Z}_t$，且 $\bar{a}^p \in G(A_{L,\sigma})$ $\bar{a}^p \neq 1$。此外，$\bar{\pi} t(\bar{a}^p) = w\widehat{\pi}(\bar{a}^p) = 1$，因此 $t(\bar{a}^p) \in \mathrm{Ker}(\bar{\pi}) = K^+ A$。而且，由于$t(\bar{a}^p)$ 是群类元素，我们有 $t(\bar{a}^p) \in K$。

$\widehat{}$由于 $t(\bar{a}^p) \in G(\mathcal{O}(\Gamma)) \simeq \Gamma = (\chi)$，因此 $t(\bar{a}^p) = \chi^s$ 对某个 s 成立。我们定义 $\delta\colon\ N \to \Gamma$ 为$\delta(p) = \chi^s$，并考虑 $A_{L,\ \sigma}$的理想

$$J_\delta = (\bar{a}^p - \delta(p)).$$

由于 $J_\delta \subseteq \mathrm{Ker}\, t$，存在唯一的满同态 $\eta\colon\ A_{L,\ \sigma}/J_\delta \twoheadrightarrow A$。此外，根据命题 2.1.3，我们知道$A_{L,\ \sigma}/J_\delta$ 构成一个正合列

$$\mathcal{O}(\Gamma)/\mathcal{J} \hookrightarrow A_{L,\sigma}/J_\delta \twoheadrightarrow \mathfrak{u}_{2,q}(\mathfrak{l})^\circ/\widehat{\pi}(J_\delta)$$

其中 $\mathcal{J} = J_\delta \cap \mathcal{O}(\Gamma)$。由于 $\widehat{\pi}(\chi) = 1$，$\widehat{\pi}(J_\delta)$ 是 $\mathfrak{u}_{2,\ q}(\mathfrak{l})^\circ$ 的理想，由 $(\widehat{\pi}(\bar{a}^p) - 1)$ 给出，并且 $\mathfrak{u}_{2,\ q}(\mathfrak{l})^\circ/\widehat{\pi}(J_\delta) \simeq H$。为完成证明，我们来证明 $\mathcal{J} = 0$。于是，根据命题 3.0.1，$A \simeq A_{L,\ \sigma}/J_\delta$。

显然，$J_\delta = (\bar{a}^p - \delta(p)) = (\bar{a}^p \delta(p)^{-1} - 1)$。设 $x \in \mathcal{J} = J_\delta \cap \mathcal{O}(\Gamma)$，并假设$x \neq 0$。那么，

$$x = \sum_\alpha \lambda_\alpha \bar{a}^{\alpha_1} (\bar{a}^p \delta(p)^{-1} - 1)^{\alpha_2},$$

对于某个 $\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha_1,\ \alpha_2}$，其中至少有一个 $\alpha_2 \neq 0$。由于 $\widehat{\pi}(\bar{a}^p) \neq 1$且

$$\varepsilon(x) = \widehat{\pi}\widehat{\iota}(x) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \widehat{\pi}(\bar{a}^{\alpha_1})(\widehat{\pi}(\bar{a}^p) - 1)^{\alpha_2}$$

比较次数可知，所有 $\alpha_2 = 0$，这就产生了矛盾。因此 $x = 0$，即$\mathcal{J} = J_\delta \cap \mathcal{O}(\Gamma) = 0$。

□

参考文献

[AD95] N. Andruskiewitsch 和 J. Devoto。《霍普夫代数的扩张》。载于：*AlgebraiAnaliz* 7.1（1995），第 22–61 页。ISSN：0234-0852。

[AG03] Sergey Arkhipov 和 Dennis Gaitsgory.《小量子群的模范畴的另一种实现》。载于：*Advances in Mathematics* 173.1 (2003)，第 114–143 页。ISSN：0001-8708。

[AG09] Nicol´as Andruskiewitsch 和 Gast´on Andr´es Garc´ıa.《单位根处单量子群的量子子群》。载于：《组合数学》145.2 (2009)，第 476–500 页。ISSN：0010-437X。[BG02] Ken A. Brown 和 Ken R. Goodearl.《代数量子群讲义》。数学高级课程。巴塞罗那 CRM。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2002，第 x+348 页。ISBN：3-7643-6714-8。[BN11] Julien Bichon 和 Sonia Natale.《二元多面体群的霍普夫代数变形》。载于：《变换群》16.2 (2011)，第 339–374 页。ISSN：1083-4362。[Cha+16] Kenneth Chan 等.《量子二元多面体群及其在量子平面上的作用》。载于：《纯粹与应用数学杂志》719 (2016)，第 211–252 页。ISSN：0075-4102。[GG18] Gast´on A. Garc´ıa 和 Javier A. Guti´errez.《单位根处单扭量子群的量子子群》。载于：《美国数学会汇刊》370.5 (2018)，第 3609–3637 页。ISSN：0002-9947。[Lus90] George Lusztig.《由量子化的万有包络代数产生的有限维霍普夫代数》。载于：《美国数学会杂志》3.1 (1990)，第 257–296 页。[Mon93] Susan Montgomery.《霍普夫代数及其在环上的作用》。第 82 卷。CBMS 数学区域会议系列。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1993，第 xiv+238 页。ISBN：0-8218-0738-2。DOI：10.1090/ cbms/082。[M¨ul00] Eric M¨uller.《量子一般线性群的有限子群》。载于：《伦敦数学会会刊》(3) 81.1 (2000)，第 190–210 页。ISSN：0024-6115。[PW91] Brian Parshall 和 Jian Pan Wang.《量子线性群》。第 89 卷。439。1991，第 vi+157 页。[Rad12] David E. Radford.《霍普夫代数》。第 49 卷。结与万物系列。世界科技出版公司，新泽西州哈肯萨克，2012，第 xxii+559 页。[Tak92] Mitsuhiro Takeuchi.《关于 GL$_q(n)$ 的若干主题》。载于：《代数杂志》147.2 (1992)，第 379–410 页。ISSN：0021-8693。

广东以色列理工学院，241号，大学路，汕头，光东省，中国。
电子邮件地址: gaston.garcia@gtiit.edu.cn

G. A. G. 现地址：CMALP，数学系部，精确科学学院，拉普拉塔国立大学。CIC-CONICET。（1900）阿根廷拉普拉塔。
电子邮件地址：ggarcia@mate.unlp.edu.ar

J.V.：数学系学，南方国立大学。INMABB-CONICET，BAHÍA布兰卡，阿根廷。
电子邮件地址：josefina.vallejos@uns.edu.ar