arXiv:2602.12412v1 [math.QA] 12 Feb 2026

陈–西蒙斯因子化代数与结纽多项式

KEVIN COSTELLO、JOHN FRANCIS 和 OWEN GWILLIAM

ABSTRACT. 本文通过因子化同调上的迹映射来刻画链环的 Reshetikhin–Turaev 不变量。特别地，为了恢复与陈–西蒙斯理论相关联的纽结不变量，我们通过对半单李代数 $\mathfrak{g}$ 上具有不变配对 λ 的陈–西蒙斯理论进行 BV 量子化，构造了一个滤过的$\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}^\lambda$，并证明 Drinfeld–Jimbo 量子群 $U_\hbar\mathfrak{g}$ 的有限维表示 V 定义了一个完美$\mathcal{A}^\lambda$ 模 V。对于 $\mathbb{R}^3$ 中任意带框架链环 K，我们进而证明存在如下等式

$$\int_{K\subset\mathbb{R}^3} \mathrm{tr}(V) = Z_V(K\subset\mathbb{R}^3)$$

因子化同调对 V 的迹与由 V 确定的 Reshetikhin–Turaev 链环不变量相等。

1. 引言 2
1.1. 指引性词典与我们的核心结果 3
1.2. 进一步明确问题 5
1.3. 高阶代数的出现 6
1.4. 为什么陈–西蒙斯理论中存在局部可观测量？ 8
1.5. 与范畴的联系 9
1.6. 主要识别 10
1.7. 威尔逊环与一个 $\mathcal{E}_3$-代数的模 11
1.8. 一个 $\mathcal{E}_3$-代数的模与纽结不变量 13
1.9. 回到纽结多项式 15
1.10. 逐节概述 18

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 57R56。次要分类号 57K16、18M15、17B37。*Key words and phrases.* 陈–西蒙斯理论、Reshetikhin–Turaev 不变量、链环不变量、琼斯多项式、拓扑量子场论。J.F. 获得美国国家科学基金会项目 0902974、1207758 和 1812057 的资助。J.F. 和 O.G. 驻留于加利福尼亚州伯克利的数学科学研究所期间完成了本研究的部分工作，时间为 2020年 春季学期，该项目由美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-1440140。在本文撰写的最后阶段，美国国家科学基金会通过 DMS 项目 2042052 资助了 O.G。

1.11. 致谢 18 2. 链环与因子化同调 18 3. 滤过科祖尔对偶回顾 24 3.1. 回顾 24 3.2. $\mathfrak{g}$ 25的 Koszul 对偶 3.3. 推广至量子化 26 4. 陈–西蒙斯理论及其因子化代数 27 4.1. 经典陈–西蒙斯理论 28 4.2. 经典可观测量的因子化代数 30 4.3. 变形复形 33 4.4. 量子可观测量的因子化代数 35 4.5. 量子化产生非平凡形变 36 5. 带电一维自由费米子插曲 40 5.1. 一维自由费米子 41 5.2. 带电费米子 47 6. 陈–西蒙斯理论的一维费米子缺陷 52 6.1. 缺陷的经典理论 53 6.2. 量子化费米子，同时保持规范场为经典场 53 6.3. 含缺陷理论的变形复形 54 6.4. 量子化的存在性 60 附录 A. 通过构形空间方法进行显式量子化 62 A.1. 纯陈–西蒙斯理论的 BV 量子化 62 A.2. 全量子缺陷理论的图示法 68 参考文献 72

1. Introduction

在那篇开创性的论文中， [Wit89], Witten 证明，纽结的琼斯多项式可以在 Chern–Simons 量子场论中实现为纽结上 Wilson 算子的期望值。更准确地说，Witten 指出，若 $K \subset S^3$是一个纽结，那么琼斯多项式由以下泛函积分表达式编码:

$$J(K, e^{2\pi i/k}) = \int_{A \in \mathrm{Conn}(M)/\mathrm{Gauge}} e^{ikS_{CS}(A)} \mathrm{Tr}_V(\mathrm{Hol}_K(A)).$$

这里，琼斯多项式 $J(K,\ q)$ 依赖于参数 q，我们将其设为$q = e^{2\pi i/k}$，以便与陈–西蒙斯理论中出现的层级对应。这个假定的积分是在一个商空间上进行的，即定义在 S^3 上的带联络的$SU(2)$-丛的无限维空间模去规范变换后的空间。被积函数包含联络 A的陈–西蒙斯泛函 $S_{CS}(A)$；整数 k 是层级； V 是 SU(2) 的基本表示；最后一项则是对 K上沿纽结 A 的全纯取迹。从物理学角度来说，最后一项就是威尔逊环算子，而整个积分计算的是威尔逊环算子的期望值。

这个泛函积分表达式只是启发式的，因为泛函测度并未得到良好定义。不过，Witten 并未试图定义这个泛函积分，而是通过分析陈–西蒙斯理论的形式性质推导出了琼斯多项式。

大约在同一时期，Reshetikhin 和 Turaev [RT90] 提出了一种从量子群出发构造纽结不变量的一般方法。Reshetikhin 和 Turaev 的不变量比琼斯多项式更一般；只要有一个带有限维表示的紧李群 G V，就可以定义这些不变量。

Witten 的方法也能导出依赖于相同数据的纽结不变量：群 G 是陈–西蒙斯理论的规范群，而纽结上的 Wilson 算子使用表示 V中全纯的迹。（琼斯多项式是一个特例。）

长期以来，人们一直认为 Witten 和 Reshetikhin–Turaev 的纽结不变量是相同的。然而，要验证这一看法一直很困难，因为 Witten 的构造依赖于关于无穷维泛函积分的非严格论证。

本文在微扰理论中证明了这一不变量等价关系的一个版本。我们工作的创新机制是因子化同调理论，它刻画了微扰拓扑场论中可观测量的行为。为了阐明我们的核心结果，我们先概述指导本研究的对应关系。

备注 1. 在 [Wit89], 物理学和数学领域持续不断的研究已经深入探讨了 Chern–Simons 理论，因此相关文献浩如烟海。我们不打算全面梳理这些文献，而是聚焦于我们熟悉且与本文相关的研究。[1] 若要了解一篇相对近期、气势恢宏且从数学视角综述 Chern–Simons 理论的文章，请参见 [Fre09]。

1.1. 指导性对应关系与我们的核心结果。 在深入探讨细节之前，我们想先说明本研究的基本对应关系。最粗略的版本是

$$\text{拓扑场论的路径积分} \longleftrightarrow \text{因子化同调}$$

[1]尽管我们努力查阅相关文献，但无疑仍遗漏了重要的先前研究；欢迎就此提出反馈。

因此，我们应该能够将 3 维流形上的陈–西蒙斯理论构造转化为某个 $\mathcal{E}_3$-代数（即陈–西蒙斯理论的局部可观测量）的因子化同调计算。（在本文引言后文中，我们将大幅细化这种对应关系。）然而，琼斯多项式涉及对这套对应关系的进一步拓展，分为两个步骤。

首先，给定 3 维流形 M 上的联络 ∇ 和纽结 $K \subset M$，沿 K 的 ∇ 的整体性的迹本身就是纽结上的场论的路径积分（即一个时间周期性的力学系统），它取决于 ∇。从物理学角度看，我们有一个与一维缺陷拓扑场论耦合的拓扑场论，它对应于分层流形 $K \subset M$ 上的一个因子化代数。按照我们的对应关系，这意味着

$$\begin{array}{l}\text{path integral for the TFT}\\ \text{coupled to 1d TFT}\end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{factorization homology on}\\ \text{a stratified manifold } K \subset M\end{array}$$

其中，这个因子化同调涉及 Chern–Simons 理论在 $M \setminus K$ 上的 $\mathcal{E}_3$-代数，以及沿 K 的一个 $\mathcal{E}_1$- 代数。

其次，我们可以用具有有限维希尔伯特空间的量子力学来描述一维量子场论，这样配分函数便有了另一种描述，即某个算子的迹。这也有一个因子化版本：一个 $\mathcal{E}_3$-代数（对应 Chern–Simons 理论）作用于一个 $\mathcal{E}_1$-代数（对应一维理论），后者再作用于一个向量空间（即希尔伯特空间）。本文的关键结果是，由于希尔伯特空间是有限维的，存在一个自然同构

$$\begin{array}{l}\text{factorization homology on}\\ \text{a stratified manifold } K \subset M\end{array} \quad \xrightarrow{\cong} \quad \text{factorization homology on } M$$

这基本上是因为因子化同调具有莫里塔不变性。

琼斯多项式是这个耦合拓扑场论中某个特定算子的期望值，因此它由一个与 Chern–Simons 理论耦合的一维拓扑场论的路径积分计算得出。根据我们的对应关系，这意味着它属于我们的同构的像：

$$\begin{array}{l}\text{Jones polynomial}\\ \text{for a knot } K \subset M\end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{an element } J_K \text{ in factorization}\\ \text{homology on } M\end{array}$$

因此，我们的目标是刻画该算子及其在因子化同调中的像。

为使论证建立在坚实的基础上，我们用因子化同调来定义带框架链环的不变量 $K \subset M$

$$\int_{K \subset M} \mathrm{tr}(V)$$

它由一个 $\mathcal{E}_3$-代数 A 和一个完美的 A-模 V给出。我们利用 Chern–Simons 理论的微扰量子化，构造这样一对输入 $(A,\ V)$。于是，我们的主定理如下。

定理 1.1. 对于半单李代数 $\mathfrak{g}$上的每个不变配对，陈–西蒙斯理论的 *BV* 量子化给出一个滤过的 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}^\lambda$。选择 *Drinfeld–Jimbo* 量子群 $\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g}$ 的一个有限维表示 V，即可定义一个完美的 $\mathcal{A}^\lambda$ 模。根据这些数据，对于任意带框架链环 $K \subset \mathbb{R}^3$，有如下等式

$$\int_{K \subset \mathbb{R}^3} \mathrm{tr}(V) = Z_V(K \subset \mathbb{R}^3)$$

该等式将链环的因子化同调迹与 *Reshetikhin–Turaev* 不变量联系起来。

在本引言的其余部分，我们将阐释这一结果的组成部分，以及因子化同调不变量 $\int_{K\subset M}\mathrm{tr}(V)$ 如何被视为对 Witten 不变量的形式化。

1.2. **进一步明确问题**。为了阐明我们的工作成果，回顾这一方向已有的研究会很有帮助。

Witten 引入陈–西蒙斯理论后不久，许多物理学家和数学家便开始研究其微扰量子化（例如参见[GMM89，Gua93，AS92，AS94，Kon94，BN95b]）。这里的重整化难题并不严重，因此得以开展重要的结构性研究。此外，对威尔逊环可观测量的细致处理，为瓦西里耶夫不变量带来了全新的视角，也揭示了它与几何拓扑诸多方面之间令人惊讶的联系（例如参见 [BN95a，AF97，BT94，Vol07]）。

我们将在第4节回顾这项工作，并说明它如何融入 Batalin– Vilkovisky（BV）形式体系，正如 [Cos11]所阐述的那样。与当前讨论相关的一个重要方面是，可以通过障碍理论对经典场论进行微扰量子化。也就是说，在量子层级构造场论的问题转化成了一个上同调问题：我们需要计算障碍群与变形群，它们分别是某个上链复形的 H^1 和 H^0 ，并确定障碍余循环。

对于 $\mathbb{R}^3$ 上的陈–西蒙斯理论，出现的障碍群与变形群分别为 $\mathrm{H}^4(\mathfrak{g})$ 和 $\mathrm{H}^3(\mathfrak{g})$。对于任意单李代数 $\mathfrak{g}$，$\mathrm{H}^4(\mathfrak{g})$ 都消失，因此不存在任何障碍。由于 $\mathrm{H}^3(\mathfrak{g})$ 是一维的，在 $\hbar$ 的每个阶上，都只有一个参数控制变形。这个参数可以通过令层级依赖于 $\hbar$ 来实现

$$\lambda = \lambda^{\mathrm{cl}} + \hbar\lambda_1 + \hbar^2\lambda_2 + \cdots,$$

其中，λ^{cl} 是定义在 $\mathfrak{g}$上的非退化不变对称双线性形式，而微扰选择是不变对称双线性形式。由于我们假设 $\mathfrak{g}$是简单的，$\mathfrak{g}$ 上的对称不变双线性形式空间是一维的。这里要注意与 Witten 的工作有一项重要区别：Witten 要求层级为整数（更准确地说，属于 $\mathrm{H}^4(\mathrm{B}G,\ \mathbb{Z})$），而微扰框架没有这类条件。

因此，我们得到如下结果。该结果隐含于 Axelrod– Singer 和 Kontsevich 的工作中，并在以下文献中得到了完整阐述：[Cosa，Cos11]。

定理 1.2 (第 14.2.1 节定理 5, [Cos11])。定义在 $\mathbb{R}^3$ 上、李代数为 $\mathfrak{g}$ 且配对为 λ^{cl} 的 *Chern–Simons* 理论的经典 *BV* 理论存在 *BV* 量子化。所有 *BV* 量子化（对 $\hbar$的所有幂次进行量子化）按等价关系取商后构成一个挠子，其对应群为 $\hbar\mathbb{C}[\![\hbar]\!]\otimes\mathrm{H}^3(\mathfrak{g})$。

一旦建立起 [Cos11]的形式体系，这一结果的证明就相当直接：无需对费曼图进行显式分析。

量子群方法还具有“微扰”这一面。Reshetikhin 和 Turaev 只需要一个刚性编织幺半范畴[2] ，便能构造带框架缠结的函子性不变量 [RT90], ；形式参数 $\hbar$下的量子群也能提供这类范畴，量子群亦称量子包络代数：取 $U_\hbar\mathfrak{g}$ 的有限秩拓扑自由表示即可。[3] 不过，这并非对 $U\mathfrak{g}$ 的唯一一种“量子化”。

Drinfeld 对 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$，即有限维表示的对称幺半带状[4]范畴 $\mathfrak{g}$的变形进行了分类，这一成果发表于他颇具影响力的著作 [Dri89b、Dri89a、Dri90]中。（关于此类范畴的变形的一般讨论，见 [EGNO15]第 7.22 节。关于 Drinfeld 结果的精彩阐述，见 [CP95] 和 [ES02]的第 16 章。）

定理 1.3 (Drinfeld)。对称幺半带状范畴 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$允许作为带状范畴的非平凡形变。模去$\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ 带状等价后，形变集合是一个以 $\hbar\mathbb{C}[\![\hbar]\!]\otimes\mathrm{H}^3(\mathfrak{g})$为底的挠子。

因此，我们得以提出本文要探讨的一个核心问题：

这两个变形空间之间是否存在自然同构?

更具体地说，我们如何通过每一种 BV 量子化的 Chern–Simons 理论选择，确定 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ 作为刚性编织幺半范畴的一种变形?
答案是，这样的自然同构确实存在；我们将通过一套一般性理论所衍生的方法来实现它，这套理论阐述了量子场论与高阶代数及范畴之间的关系。（我们方法的一大优点是，它并非专为 Chern–Simons 理论量身定制，也适用于包括非拓扑理论在内的其他理论。关于密切相关的工作，见 [Cosb、Cos14、CWY] 。）

1.3. **高阶代数的出现**。 我们的方法并非通过直接计算或对费曼图方法进行复杂分析来推进。相反，它利用了量子场论丰富的形式性质，这与 Witten 将琼斯多项式和 Chern–Simons 理论联系起来的做法颇为相似；不过在这里，这些性质是通过因子化代数加以形式化的。这一概念是本项工作中的创新要素，为微扰量子场论与高阶代数搭建了一座桥梁。

在 [CG17中，CG], 说明了如何将微扰量子场论编码为定义在 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ 上的该理论的可观测量因子化代数。因子化代数编码了可观测量所具有的结构，例如算子乘积，以及（在良好的情形下）关联函数。这样的因子化代数会为时空流形 U 的每个开集

[2]回顾一下，刚性编织幺半范畴是指其中每个对象都有对偶的编织幺半范畴。Reshetikhin 和 Turaev 通过在编织幺半范畴中选取一个可对偶对象，构造出一个纽结不变量；编织幺半范畴中的可对偶对象构成这样一个刚性范畴。[3]Reshetikhin 和 Turaev 后来的工作 [RT91] 则需要强得多的输入——即一个模张量范畴——才能得到定向三维流形的函子性不变量。这些三维流形不变量无法通过本文的微扰处理来研究。[4]带结构是恒等函子上的自然自同构，对应于采用带框架的缠结。

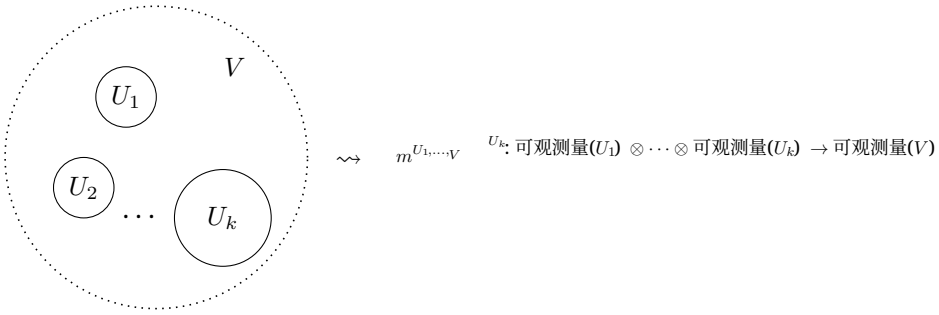


FIGURE 1. 因子化乘积映射。

（例如，对于陈–西蒙斯理论，时空是一个定向三维流形），一个上链复形 Obs(U)，由该量子场论在 U 上的可观测量或算子构成，也就是说，是人们在场论中能够对 U 进行的测量。（这是一个上链复形，因为我们采用的是 BV 形式体系，其本质是同调性的。）

因子化代数的基本结构由因子化乘积映射给出。如果 $U_1, \dots, U_k$ 是彼此不相交且都包含于开集 V 中的开集，则有一个映射

$$m_V^{U_1,\dots,U_k} : \mathrm{Obs}(U_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Obs}(U_k) \to \mathrm{Obs}(V) \tag{1}$$

如图 1所示。这些映射必须满足一些简单的公理，详见 [CG17]。对于拓扑场论，例如陈–西蒙斯理论，这个因子化代数是局部常值的：如果 $D \subset D'$ 是一对开球，那么将可观测量从较小开集扩展到较大开集的映射

$$\mathrm{Obs}(D) \to \mathrm{Obs}(D')$$

是拟同构。这一性质体现了几何无关紧要，只有拓扑才重要这一事实。

Lurie 的一个结果 [Lura]指出，定义在 $\mathbb{R}^3$上的局部常值因子化代数等同于 $\mathcal{E}_3$-代数，也就是说，是小三圆盘歌剧上的代数。（参见 [Lura], 的第5章第 4 节，尤其是定理 5.4.5.9。）例如，形成可观测量乘积的方式有如同 2-球面那么多，因为给定 3 维球中一对不相交球的空间与 S^2同伦等价。

因此，结合这些已有结果，我们得到如下结论。（参见第 4.5 节，尤其是命题 4.6。）

命题。 固定李代数 $\mathfrak{g}$ 的陈–西蒙斯理论的一种量子化 λ 。那么，这个量子理论中可观测量之间的算子乘积由 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$上的一个 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}^\lambda$ 描述。

更精细的分析表明，可观测量构成一个滤过的 $\mathcal{E}_3$-代数，其底层是滤过交换代数 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$，而该代数的滤过方式由 $F^i\mathbb{C}[\![\hbar]\!] = \hbar^{2i}\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ 给出。（由于本引言仅概述我们的论证，这里不详述滤过。）

这一结果使我们能够运用 $\mathcal{E}_3$-代数及其拓扑因子化同调的强大理论来分析陈–西蒙斯理论中的可观测量。20 世纪 60 至 70 年代，拓扑学家引入了 $\mathcal{E}_n$-代数，用以描述 n 重环空间上的结构：参见 [BV68, BV73, May72]。Segal、McDuff、Salvatore、Lurie、Ayala–Francis [Seg73, McD75, Sal01, Lura, AF15] 发展了因子化同调的拓扑形式。早期关于我们称为拓扑因子化同调的研究，着重探讨其在映射空间研究中的应用 [Lura]。较新的研究则表明，拓扑因子化同调是研究拓扑量子场论的重要工具 [Lur09, AF15, Sch, BZBJ18a, BZBJ18b]。

正如我们很快将看到的，这一理论将使我们能够把 Chern–Simons 理论的 $\mathcal{E}_3$可观测量代数与量子群联系起来。

我们可以问，命题中的滤过 $\mathcal{E}_3$代数是什么。这个 $\mathcal{E}_3$代数所依托的上链复形，是 3 维球上 Chern–Simons 理论的可观测量空间。在任意场论中，经典可观测量被定义为运动方程某种导出版本上的函数空间。由于我们研究的是微扰理论，因此考察给定（平凡）解附近运动方程解的导出空间。对于 Chern–Simons 理论，运动方程的解是平坦丛，因此我们发现，球上的经典可观测量是球上平坦丛的形式导出叠上的函数。由于球上的所有平坦丛都是平凡的，这个形式导出叠就是规范群G的分类栈中一点的形式邻域。这个形式邻域可以视为李代数 $\mathfrak{g}$的分类空间 $B\mathfrak{g}$ 上的函数，也就是 $\mathfrak{g}$不变函数；在同调意义下，这些函数可以用带平凡模系数的谢瓦莱-艾伦伯格上链复形 $C^*(\mathfrak{g})$ 来建模。因此，我们概述了如下内容。更详尽的讨论请参见第4.2节，尤其是引理4.3。

引理。 *Chern–Simons* 理论的经典可观测量由滤过交换代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 描述，它是李代数 $\mathfrak{g}$ 的切瓦利–艾伦伯格上链。

滤过的定义是令 $F^i C^*(\mathfrak{g}) = \mathrm{Sym}^{\geq i}(\mathfrak{g}^\vee[-1])$。

描述量子可观测量的滤过 $\mathcal{E}_3$-代数是 $C^*(\mathfrak{g})$ 的滤过形变。它将由滤过上链复形 $C^*(\mathfrak{g})[\![\hbar]\!]$ 上的一个 $\mathcal{E}_3$ 结构给出；模去 $\hbar$ 后，它恰好就是 $C^*(\mathfrak{g})$ 上的交换代数结构。

1.4. 为什么 Chern–Simons 理论中存在局部可观测量？ 我们在此讨论一个会令物理学家感到困惑的问题。在物理学对 Chern–Simons 理论的处理方式中，人们通常会说不存在局部可观测量，因此物理学家会问，为什么我们会发现一个有趣的 $\mathcal{E}_3$-代数。

我们在此找到的可观测量——它们构成一个与$\mathfrak{g}^*$上的外代数同构的副本——用物理学术语来说，可以描述为由常数规范变换的鬼场构成。

在物理学中，标准做法（采用紧规范群）不会为常数规范变换引入鬼场。从数学的角度来看，这种选择是合理的，因为对紧李群作用取不变量的函子是正合函子，因此无需将其

替换为导出函子。相比之下，对李代数作用取不变量的函子并非正合函子，因此存在一个导出函子，即切瓦利–艾伦伯格上链。在对规范变换的无限维李代数作用取不变量的导出函子的过程中，会引入鬼场。我们无需为常数规范变换引入鬼场，因为这些变换源于紧李群的作用。

不过，我们对陈–西蒙斯理论的处理完全是微扰性的，因此只能看到李代数。事实上，我们只需要李代数的复形式：实形式的选择会影响路径积分的积分路径，但在微扰理论中，这条路径并不重要。因此，在像我们这样的微扰处理中，必须为常数规范变换引入鬼场。

1.5. 与范畴建立联系。 到目前为止，我们的讨论表明，分析陈–西蒙斯理论中算子乘积结构的问题（乍看之下，这涉及大量费曼图的计算）可以转化为一个代数问题：理解 $C^*(\mathfrak{g})$ 作为滤过 $\mathcal{E}_3$-代数的变形。

事实证明，这类 $\mathcal{E}_3$ 变形与量子群之间有着密切的联系。

这是 [Lura]的一个结果：对于任意 $\mathcal{E}_n$-代数 $\mathcal{A}$，其 ∞左模的 -范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$——通过将 $\mathcal{A}$ 遗忘为其底层的 $\mathcal{E}_1$ （或同伦结合）代数并取其左模而得到——继承了来自 $\mathcal{E}_{n-1}$的自然 -幺半结构 $\mathcal{A}$。（只需结合 [Lura]中的定理 4.8.5.5 和推论 5.1.2.6 即可。）由于 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}^\lambda$ Chern–Simons 量子可观测量会将 $\mathcal{E}_\infty$ （或交换）代数 $C^*(\mathfrak{g})$ 变形，因此左模的编织幺半范畴将变形滤过的 $C^*(\mathfrak{g})$-模的对称幺半范畴。

这个范畴 $\mathrm{Mod}_{C^*(\mathfrak{g})}$ 的左模与一个对我们而言更为显然重要的范畴密切相关： $\mathfrak{g}$ 的表示。事实上，每一个表示 M （属于$\mathfrak{g}$）决定了 $C^*(\mathfrak{g})$-模 $C^*(\mathfrak{g}, M)$。在 [Cosb], 中，正是针对这类情形发展了 Koszul 对偶的滤过版本，并证明存在对称幺半 ∞-范畴的等价

$$\mathrm{Perf}_{C^*(\mathfrak{g})} \simeq \mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})^{\mathrm{dg}} \tag{2}$$

由 Koszul 对偶的滤过版本给出（参见推论 3.4）。简言之，若 M 是有限型的，则 $C^*(\mathfrak{g}, M)$ 是完美的。注意，左侧使用的是 $C^*(\mathfrak{g})$ 上的张量积，而右侧使用的是基域上的张量积。（更多阐述见第 3 节。）

因此，$C^*(\mathfrak{g})$ 作为 $\mathcal{E}_3$-代数的非平凡形变决定了 $\mathrm{Perf}_{C^*(\mathfrak{g}))}$ 作为 $\mathcal{E}_2$-幺半 ∞-范畴的非平凡形变，从而决定了 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})^{\mathrm{dg}}$ 的非平凡$\mathcal{E}_2$-幺半形变。

通常的范畴 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})^{\mathrm{dg}}$ 中的一个满子范畴；从构造中可以明显看出，这个子范畴在张量积及其编织幺半群形变下保持不变。因此，我们也得到了底层范畴的非平凡编织幺半群形变。

总而言之，得益于过去几十年发展起来的高阶抽象理论，我们可以将微扰量子场论的框架直接衔接到高阶范畴的框架。这一衔接从结构层面解释了为什么 Chern–Simons 理论的微扰量子化会产生表示范畴的编织幺半群变形。（我们强调，这一衔接同样适用于由作用泛函产生的一般的拓扑场论。）

1.6. **主要识别**。 根据 Drinfeld [Dri89a、Dri89b]，另一种代数结构也能产生有限维 $\mathfrak{g}$- 模范畴的编织幺半形变。如果 $U_\hbar(\mathfrak{g})$ 是定义在 $\mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ 上的拟三角拟霍普夫代数，并且它量子化了 $U(\mathfrak{g})$，那么这些 $U_\hbar(\mathfrak{g})$-模构成的范畴就是 $\mathfrak{g}$-模范畴的编织幺半（事实上是带状）变形。若按 Drinfeld 的意义对这个拟三角拟霍普夫代数进行扭曲，编织幺半范畴则保持不变。

综合目前的讨论，我们得到本文的第一个主要结果。

定理 1.4。 设 $\mathfrak{g}$ 是一个半单李代数。以下空间之间存在典范双射：

> *(1)* 按照 [*Cos*11] 的意义，对 *Chern–Simons* 理论进行的微扰量子化。*(2)* 具有固定半经典行为、量子化 $C^*(\mathfrak{g})$ 的滤过 $\mathcal{E}_3$-代数。（也就是说，我们固定 $C^*(\mathfrak{g})$ 上的移位泊松括号，它编码了量子化的 $\mathcal{E}_3$-代数模 $\hbar$ 非交换这一事实。）*(3)* 有限维 $\mathfrak{g}$-模的对称幺半范畴的编织幺半形变，其中编织具有固定的半经典行为。*(4)* 具有固定半经典行为、量子化 $U(\mathfrak{g})$ 的拟三角拟霍普夫代数，按 *Drinfeld* 扭曲取等价类。（半经典行为由 $\mathfrak{g}$ 上的拟三角拟李双代数结构描述；这些数据也确定了量子化 $C^*(\mathfrak{g})$ 的 $\mathcal{E}_3$-代数的半经典行为。）

所有这些空间都非典范地同构于 $\hbar\mathrm{H}^3(\mathfrak{g})[\![\hbar]\!]$。

（3）与（4）之间的关系归功于 Drinfeld。注意，对于（4），必须选择一个结合子，以确定诸变形与 $\hbar\mathrm{H}^3(\mathfrak{g})[\![\hbar]\!]$的同构。类似地，对于（1），必须就如何进行正则化作出选择（例如，使用 Axelrod–Singer–Kontsevich 的构形空间方法，或采用 [Cos11]）意义下的重整化方案，以确定与 $\hbar\mathrm{H}^3(\mathfrak{g})[\![\hbar]\!]$的同构。

上文的讨论已经说明，（1）导致（2）：陈–西蒙斯理论的微扰量子化给出一个量子化 $C^*(\mathfrak{g})$ 的滤过 $\mathcal{E}_3$-代数，而其完美左模范畴是一个量子化 $\mathfrak{g}$-模范畴的编织单体范畴。变形理论的计算表明，所有这些映射都是等价；要点在于，在 $\hbar$的每一阶，每个量子化问题的障碍-变形复形都由 $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g})[3]$ 控制。

从 (2) 到 (3) 的联络已在第 1.5 节中说明：它结合了 Lurie 关于 $\mathcal{E}_3$-代数的左模的结果与推论 3.4 中的滤过科祖尔对偶。

注 2。 请注意，Drinfeld 结合子将半经典数据提升到量子层级，因此一旦选定结合子，(3) 与 (4) 之间便存在规范等价。

1.7. **Wilson环与 $\mathcal{E}_3$-代数的模**。 到目前为止，我们的讨论说明了如何从 Chern–Simons量子场论构造一个 $\mathcal{E}_3$-代数，以及该 $\mathcal{E}_3$-代数的完美左模所组成的带状范畴如何恢复量子群的表示范畴。

Reshetikhin–Turaev 的工作更进一步：它取量子群的一个表示——等价地说，取对偶 $\mathcal{E}_3$-代数的一个完美模——并生成一个纽结不变量。与此同时，Witten 的构造取 Chern–Simons 理论中的一条 Wilson线，并生成一个纽结不变量。因此，我们自然预期， $\mathcal{E}_3$-代数的完美左模与 Wilson线之间存在直接联系。

通过考察与量子场论中缺陷相关联的“可构造”因子化代数，可以得到这样的联系。下面让我们概述其构造方法，重点关注物理学视角。下一小节将给出精确的数学表述。

假设我们正在研究流形 M 上的经典场论，并选取一个子流形 $N \subset M$。我们可以通过引入只存在于 N 上、但其拉格朗日量也依赖于原理论在 M 上的场的额外场，在 N 上引入一个 缺陷 。换言之，我们在 N 上有一种与 M 上的环境理论耦合的场论。带有缺陷的这一理论的可观测量将构成一个可构造因子化代数：在 N 之外，可观测量与原来的无缺陷理论的因子化代数一致；而在与 N 相交的 M 开集上，可观测量则会增加由存在于 N 上的场构造的额外可观测量。

为了说明威尔逊线与 $\mathcal{E}_3$ 模的关系，我们必须为陈–西蒙斯理论引入能够产生威尔逊线可观测量的缺陷，然后研究这些缺陷所对应的可构造因子化代数。

一个广为人知的观点是，威尔逊线可观测量可以实现为一种缺陷：一个位于该线上的量子力学系统与环境规范理论耦合。但任意量子力学系统都行不通。要使量子力学系统产生威尔逊环，该系统在圆上的配分函数作为规范场 A 的函数，必须是 A 在某个选定表示中的全纯的迹。

Witten [Wit89] 为紧李群的任意表示提出了一种实现这一点的方法：考虑一个在该群的余伴随轨道上运动的粒子G ，并通过 G 在轨道上的作用耦合规范场。该理论可以用几何量子化处理，因此 Borel–Weil–Bott定理使我们能够实现任意所需的表示。（关于这一思想的清晰阐释，可见 [Bea13]。）[5]

[5]也可以用以下方法构造这个量子力学系统： [GG14，GLL17], 这样便会得到一个一维 BV 理论，进而得到纽结上的因子化代数。若有人能这样做，那将很有意思。

在第5 节中，我们将研究一个较简单的费米子系统，它将产生一类特殊的Wilson线。我们将选择一个表示 V of G，并在线上引入 K： $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$，一对费米子

$$\psi \in \Omega^0(\mathbb{R}, V) \quad \text{and} \quad \overline{\psi} \in \Omega^0(\mathbb{R}, V^*)$$

其作用泛函为

$$S_{coup} = \int_K \langle \overline{\psi}, (\mathrm{d} + K^* A)\psi \rangle_V$$

其中 A 是陈–西蒙斯理论的规范场。[6]

这个自由费米子系统的算子代数是 $\mathsf{Cl}(V \oplus V^*)$，它是由求值配对利用 $V \oplus V^*$ 确定的克利福德代数。注意，我们保留了自然的 $\mathbb{Z}/2$分次。

在背景规范场 A 存在时，这个费米子系统在 S^1上的配分函数，是 A 在自旋表示 $\mathbb{S}_V = \Lambda^* V$中的全纯的迹。因此，这个缺陷实现了该表示中的威尔逊环。

现在我们讨论一种重要的细化：允许 1 维流形带有边界。此时我们的缺陷不再只是线或圆，而是半直线和线段。

在耦合到环境规范理论之前，注意这个费米子系统具有一个自然的边界条件，即在边界上令 $\psi = 0$。在此边界条件下，费米子系统的可观测量在半直线 $\mathbb{R}_{\geq 0}$上给出一个可构造因子化代数。在区间（a, b）上，因子化代数的取值是克利福德代数 $\mathsf{Cl}(V \oplus V^*)$。但在包含边界的区间 $[0, \epsilon)$ 上，这个因子化代数的取值为 $\Lambda^* V$，因为我们的边界条件意味着只允许关于ψ 场的可观测量。半直线上局部常值因子化代数的结构映射编码了一个结合代数（此处为 $\mathsf{Cl}(V \oplus V^*)$）及其一个模（此处为 $\Lambda^* V$）。

现在，假设我们将半直线上的这个费米子系统与环境规范理论耦合起来。如果我们只对费米子进行量子化，而让环境规范理论保持为经典理论——我们将其称为半量子化耦合系统——那么便得到一个可构造因子化代数：在任何与缺陷不相交的球上，它由 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 给出；在

$$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Cl}(V \oplus V^\vee)) \cong \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}_V))$$

在任何与半直线相交但不含其边界的开球上，它由

$$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathbb{S}_V)$$

在任何包含半直线端点的球上，它由此给出。（这些结论是命题 5.1 的内容。）

同样对规范理论进行量子化后，可观测量再次构成一个可构造因子化代数。在这种情况下，在远离半直线的体内，可观测量与 $\mathcal{A}^\lambda$ 一致。在半直线的边界附近，我们有一个

[6]因此，本文接下来都采用 $\mathbb{Z}/2$-分次上链复形，也就是超上链复形。这一额外分次在我们的构造中相当惰性，因此无需担心任何超结构方面的微妙之处。

$C^*(\mathfrak{g}, \mathbb{S}_V)$ 的变形，变为一个 $\mathcal{A}^\lambda$-模；而在一个与半直线相交但不与其端点相交的球内，我们有这个模在 $\mathcal{A}^\lambda$ 上的自同态代数。（这些结论的内容见命题 6.1。）

因此，这个完全量子化耦合系统的配分函数确定了威尔逊环可观测量的一种量子化。通过这种方式，我们将威尔逊环算子的期望值与源自量子群的纽结不变量对应起来。事实上，这种由费米子实现的对应关系展示了 Chern–Simons 理论的量子化与 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ 的带状变形之间的典范双射。

备注3。我们采用这种方法构造 Wilson线可观测量，还有另一个原因。另一种方法是直接写下一个量子可观测量，使其对应的经典可观测量为全纯的迹。也就是说，全纯的迹是经典 BV 可观测量上链复形中的一个上循环，然后选取一个量子可观测量上链复形中的上循环，使其模 $\hbar$ 约化后为全纯的迹。事实上，可以将 [AF97] 解释为提供了这样一个上循环。然而，这种方法有一个缺点：任意经典上循环 J^{cl} 都存在许多这样的提升，因为一个提升 J 可以改为 $J + \hbar J'$，其中 J' 是另一个量子上循环。我们采用耦合理论的方法避开了这个缺点，因为我们将在第6.3 节证明，只要 $\mathfrak{g}$ 是半单的，任意量子化都是唯一的。换句话说，耦合系统的量子化确定了一个典范提升。

备注 4. 这里我们指出该系统的一个巧妙特点。耦合系统的费曼图可以与 Bar-Natan、Bott–Taubes、Thurston、Altsch¨uler–Freidel 以及许多其他人发展出的构形空间积分理论相对应 [BN95a，BT94，Thu、AF97]。因此，我们的结果提供了一个框架，使这类计算能够有条理地组织起来，并与量子群建立联系。

1.8. **一个 $\mathcal{E}_3$-代数的模与纽结不变量。** 我们刚刚描述了可构造因子化代数如何与缺陷这一物理概念相联系：也就是说，场论存在于一个子流形上，并与存在于环境流形上的场论耦合。这种关系还可以进一步拓展：对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑场论，其因子化代数为 $\mathcal{A}$（即一个 $\mathcal{E}_n$-代数），我们确定了一类由带边界的一维流形支撑的可构造因子化代数范畴，它刻画了物理学家所阐述的拓扑线缺陷范畴（参见 [Kap10、FS16、FS17、Kap06] ，作为起点）。此外，我们的形式体系系统地解释了微扰拓扑场论如何导出函子性纽结不变量：它直接将这些因子化代数（编码算子代数）与函子性场论（尤其是 Reshetikhin–Turaev 缠结不变量）联系起来。

下面概述我们对线缺陷的公理化定义，以及它们如何产生缠结不变量。

有一种强大的框架，公理化地刻画了拓扑线缺陷应具备的性质，称为缠结假设 [BD95，Lur09]。粗略地说，其内容如下。假设我们想为一个粒子在 n维空间中运动构造一个 Atiyah–Segal 风格的场论。因此，这里有一个边界范畴，其对象是嵌入在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的零维流形（扮演类空超曲面的角色），

而态射则是嵌入在 $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,1]$ 中的一维流形（扮演时空薄层的角色）。我们称之为缠结范畴。它具有由不交并给出的自然幺半结构，但与通常的 Atiyah–Segal 框架不同，它并非对称幺半结构，而是 $\mathcal{E}_{n-1}$-幺半结构，恰恰因为我们关注的是 $\mathbb{R}^{n-1}$中点的构型。缠结场论于是是一个取值于某个其他 $\mathcal{E}_{n-1}$-幺半范畴（$\mathcal{C}$, $\otimes$）的 $\mathcal{E}_{n-1}$-幺半函子。

缠结范畴生动地捕捉了线缺陷的视觉概念，而函子则编码了某种沿这些 1 维流形存在的量子力学系统。

对于熟悉 Atiyah–Segal 公理的读者来说，缠结场论完全由它赋予一个点（或具有相关几何结构的点，例如带定向的点）的内容决定，这大概不足为奇。如果目标是 $(\mathcal{C}, \otimes)$，那么缠结场论会将一个可对偶对象赋予该点，该对象属于 $\mathcal{C}$。反过来，$\mathcal{C}$ 中的每个可对偶对象都会确定一个缠结场论。这种以 $\mathcal{C}$为值的缠结场论刻画称为缠结假设；对于这类一维缺陷，该假设已在 [AFb]中得到证明。

在 $n = 3$ 且 $(\mathcal{C}, \otimes)$ 为编织单体范畴的情形下，这一构造显然就是 Reshetikhin 和 Turaev 所发展的构造 [RT90], ，因此我们将可对偶对象 V 所对应的缠结拓扑场论记为 Z_V。

现在让我们将这一想法与我们的情形联系起来。回想一下， $\mathbb{R}^3$ 上的微扰拓扑场论确定一个 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}$，而左 $\mathcal{A}$-模 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}$构成一个 $\mathcal{E}_2$-幺半范畴。因此，根据缠结假设，我们可以看出，取值于 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}}$ 的缠结场论由可对偶模给出，它们也称为完美 模。简言之，$\mathbf{Perf}_{\mathcal{A}}$ 恰好刻画了三维微扰场论的函子性拓扑线缺陷；对于每个$V \in \mathbf{Perf}_{\mathcal{A}}$，函子 Z_V 确定一类函子性缠结不变量。

本文的一个启发性想法是，每个这样的缠结拓扑场论 Z_V 都可以通过因子化同调显式构造。基本想法很简单。对于这样的 V，其自同态 $\mathbf{End}_{\mathcal{A}}(V)$ 是一个 $\mathcal{E}_1$-模范畴中的代数 $\mathcal{A}$，因此它在任何装饰有嵌入的带框架一维流形的带框架三维流形上确定一个因子化代数 $\mathcal{A}_V$ 。在缠结 $T \subset [0,1] \times \mathbb{R}^{n-1}$的补集中，$\mathcal{A}_V$ 将 $\mathcal{A}$ 赋给每个开球；对于与缠结相交的开球， $\mathcal{A}_V$ 则赋予 $\mathbf{End}_{\mathcal{A}}(V)$。这一赋值（以及自然的结构映射）确定一个因子化代数。对于带边界的连通一维流形，它将 V赋给任何仅包含正向定向边界的球，并将对偶 $V^\vee$ 赋给任何仅包含负向定向边界的球。关于这一想法的详细阐述，使用适用于以范畴为系数的 β 因子化同调，见 [AFa]。

我们的第二个主要结果如下，它连接了函子场论与因子化同调。

定理 1.5. 设 $\mathcal{A}$ 为一个 $\mathcal{E}_3$-代数， V 为一个完美左 $\mathcal{A}$-模。与 V 相关联的缠结拓扑场论的 *Reshetikhin–Turaev* 链环不变量可以用因子化同调计算。

这一结果使我们能够专注于由 Chern–Simons 理论构造出的 $\mathcal{E}_3$-代数。该定理指出，对于 $\mathfrak{g}$的一个有限维表示 V，$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$的每个滤过 $\mathcal{E}_3$-代数变形 $\mathcal{A}^\lambda$ 都确定一个 Reshetikhin–Turaev 缠结拓扑场论 $\mathcal{A}^\lambda_V$。类似地，对于 $\mathfrak{g}$的一个有限维表示 V，$\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$的每个辫带变形 λ' 都确定一个这样的缠结拓扑场论。因此，为了识别这类变形，我们可以识别缠结拓扑场论，也就是说，寻找能给出相同缠结不变量的 λ 和 λ'。更具体地说，我们比较链环不变量。通过这种方式，我们可以将通常的量子链环不变量与微扰不变量对应起来。

特别是，这一结果意味着，我们应当设法以某种自然的方式，为陈–西蒙斯理论的每一种量子化构造一个这样的可构造因子化代数。值得庆幸的是，正如第1.7节已经讨论过的，这个问题可以通过物理学的方法来解决——利用场论构造线缺陷——并借助 [CG17 的机制，CG],

我们强调，我们的第二个主定理给出了一种机制，可以明确匹配 BV 量子化与量子群变形之间的参数。得益于本文的第一个主定理，我们知道可以在变形问题之间构造一个明确的双射；而第二个定理则说明了具体做法：选取一个缠结和一个表示 V，然后按 $\hbar$ 的阶逐阶计算缠结不变量。第一和第二个定理彼此独立，但结合起来，它们揭示了陈–西蒙斯理论如何导出函子性的缠结不变量，而因子化同调正是实现这一点的途径。

注记 5. 以下几点物理学上的说明或许有助于阐明我们的论断。首先，请注意，我们允许线缺陷终止，也就是说，可以在一点将其剪断。允许存在端点，就必须指定一个零维缺陷，以连接沿线存在的物理学与环境空间中的物理学。因此，我们必须指定一个双模，它分别属于环境空间的 $\mathcal{E}_3$-代数和沿线存在的 $\mathcal{E}_1$-代数。其次，这个双模的可对偶性源于我们希望能够自由地扭转和弯曲这条线缺陷。这种在不改变缺陷动力学的情况下对其进行操作的自由，是由标准的范畴论论证所编码的；这些论证保证了对偶的存在。最后，我们注意到，在我们的设定中，“序”缺陷与“无序”缺陷之间并无明确区别。在陈–西蒙斯理论的这个例子中，很容易将我们的构造解释为威尔逊型算子。但在明确的费米子构造中，我们将看到，即便在经典层次，线缺陷也会充当电荷源，并通过沿线引入一个奇点来改变运动方程。

1.9. **回到纽结多项式**。现在我们回到论文开篇的问题：根据目前为止的讨论，如何严谨地表述微扰 Chern–Simons 理论，从而编码例如 Jones 多项式?

设 $\mathfrak{g}$ 是一个半单李代数。$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 的情形导出 Jones 多项式本身，而通过巧妙地组织李代数的级数 $\mathfrak{sl}_n$，则可得到 HOMFLYPT（或 Jones–Conway）多项式。

我们的第一步依据定理 1.4。每个量子化陈–西蒙斯理论决定一个量子群。因此，在这些量子化中出现了 Drinfeld–Jimbo

量子群 $\mathrm{U}_q\mathfrak{g}$ ，当以适当方式将 q 取为 $\exp(\hbar)$ 时。我们将这一特殊情形记为 $\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g}$。在对 $\hbar$ 所在的形式圆盘作非线性重参数化的意义下，每个量子群都等价于 $\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g}$。

每种量子化都会产生一个带状范畴，它等价于 $\mathrm{Rep}(\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g})$，即 Drinfeld–Jimbo 量子群的有限秩、拓扑自由表示。因此，量子化陈–西蒙斯理论的线算子，尤其是威尔逊环，都由这类表示标记。

我们的第二步依据定理 1.5。每个表示 $V \in \mathrm{Rep}(\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g})$ 都确定带框链环不变量。该定理指出，这些不变量可以通过两种不同的方式计算：

- 使用函子 Z_V，将 $\mathbb{R}^3$ 中的带框架缠结范畴映射到 $\mathrm{Rep}(\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g})$，采用 Reshetikhin–Turaev 风格 [RT90、KRT97], ；或者
- 使用因子化同调，具体内容见第 2 节。

正如我们在第 5 和 6 节所示，这些因子化同调计算与威尔逊算子的物理计算一致，前提是 V可以明确地实现为一种缺陷理论。

从这个意义上说，我们已经证明，量子场论方法与量子群方法相互对应。定理 1.5 确保 Witten 对路径积分的处理（通过将嵌入链环的三维空间切分成若干部分）在两种数学形式化方法之间保持一致。定理 1.4则说明如何对应这些方法的具体实例（$\mathcal{E}_3$对 C 的变形$^*(\mathfrak{g})$，以及 $\mathrm{U}\mathfrak{g}$的量子群变形），它们都源于陈–西蒙斯理论这一情形。

注 6. 因子化计算所需的 $\mathcal{E}_3$-代数可通过取编织单体范畴$\mathrm{Rep}(\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g})$的单位元**1** 的（导出内部）端同态得到。其底层 $\mathcal{E}_1$-代数就是李代数上链$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}[\![\hbar]\!])$，因为$\mathrm{Rep}(\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g})$的底层范畴不过是$\mathrm{U}(\mathfrak{g}[\![\hbar]\!])$上的有限秩且拓扑自由的模，但由编织单体积产生了一个非平凡的 $\mathcal{E}_3$-代数结构。（$\mathrm{U}(\mathfrak{g}[\![\hbar]\!])$与$\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g}$之间存在代数同构，但它们作为拟三角拟霍普夫代数并不同构。）借助 $\mathcal{E}_3$-代数的这一纯代数表述，可以用因子化同调来计算通常的函子性的带框缠结不变量

既然我们已经恢复了带框架的缠结的标准函子性不变量，便可以援引从函子性情形中提取纽结多项式的经典结果。这些并不完全直截了当：将$\mathrm{U}_q\mathfrak{sl}_2$ 不变量与琼斯多项式联系起来存在一些微妙之处。设 $K(L) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$表示 $\mathbb{R}^3$中带框架链环 L 的Kauffman括号。琼斯多项式$J([L]) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ 是底定向链环 $[L]$ 的一个不变量，由下式给出

$$J([L]) = (-t^{3/2})^{w(L)},$$

其中 $w(L)$ 是 L 的缠绕数。（这是考夫曼处理琼斯多项式的方法，而非原始构造。）此外，这个带框架链环 L 还有一个不变量，它源自 $\mathrm{U}_q\mathfrak{sl}_2$ 的基本表示，我们将其记作 $F(L)$。它是实数集 $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$ 的一个元素。若将 t 与 q 等同起来，那么 $F(L)$ 与

Kauffman括号 $K(L)$ 相符，差别至多是一个由链环的缠绕数及其分支数决定的符号。（有关清晰而全面的讨论，可参见 [Tin17]，其中引用了 [Oht02]。）

乍看之下，Chern–Simons 理论的微扰量子化似乎令人惊讶：它只在平凡平坦联络的形式邻域中取路径积分，却能产生琼斯多项式这样丰富的不变量。另一方面，我们刚刚了解到，定向链环的琼斯多项式 V_L 是环 $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$的一个元素，也就是变量 $\sqrt{q}$的劳伦多项式。解析延拓因此能够通过函数在点 $q = 1$处的泰勒展开确定该函数。因此，代入 $q = e^{\hbar}$后，可得到 $\hbar$中的一个形式幂级数。每个系数都可视为一个瓦西里耶夫不变量 [KRT97，KT98], 而孔采维奇积分理论则保证了它可以通过微扰计算得到。

注 7。通过量子群阐述 Chern–Simons 理论的著作往往强调必须在单位根处进行研究，而这与我们在此所做的相去甚远。这里，我们研究带有形式参数 $\hbar$的量子群，并声称它编码了 Chern–Simons 理论的一部分：微扰部分。这些说法并不矛盾，事实上彼此相容。若要得到 Atiyah 和 Segal 意义上的三维拓扑场论，并将其扩展到一维流形，就需要从一个 模张量范畴 [BK01，BDSPV]开始。这类范畴是带状范畴中非常特殊的一种，具有强得多的有限性性质。它们通过一种相当复杂的方法从量子群构造而来，是单位根处 U 的有限维表示范畴的子商范畴$_q\mathfrak{g}$ 。（此外，如何构造单位根处的量子群，也必须慎重考虑！）

另一方面，纽结不变量源自 Drinfeld–Jimbo 群 U$_q\mathfrak{g}$，其中 q 是有理参数。这个 q 是纽结多项式中的变量。取单位根作为特化值，可以计算出这些多项式，进而得到一个数；作为纽结不变量，它所包含的信息较少。

这些情形之间的联系在于，每个闭定向 3 维流形都可以通过对 S^3 沿一个带框架链环进行手术来表示。同一个流形有许多不同的表示。因此，在 S^3 中的带框架链环上存在等价关系，其等价类标记了闭定向三维流形的定向同胚类型 [Kir78，FR79]。因此，若要利用函子性带框架链环不变量构造闭定向三维流形的不变量，这些不变量就必须在每个等价类上保持不变。粗略地说，源自量子群的模张量范畴正是通过实现这些关系而得到的。

微扰理论允许我们通过微扰地研究线缺陷来构造纽结不变量。这些缺陷给出纽结多项式的 $\hbar$ 展开，从而根据 q 确定这些多项式。然而，要获得一个 3 维流形的路径积分不变量，必须对整个联络空间积分，而不能只考虑平凡联络附近的区域；这要求层级为整数，也就是说， q 必须成为单位根。

1.10. **各节内容概述**。 我们首先阐述实现引言中所概述论证所需的语言，然后转向场论本身的构造。因此，第2节介绍可构造因子化代数所需的形式体系，并阐明它与 Reshetikhin–Turaev 缠结拓扑场论之间的关系。本节最后回顾我们将要变形的例子，即来自 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ 的缠结拓扑场论。第4 节回顾陈–西蒙斯理论（无缺陷）的微扰量子化，并考察其因子化代数。第5 节构造一维场论——带电费米子；它的因子化代数将导出我们明确展示的缠结拓扑场论。第6 节最终通过对与费米子耦合的陈–西蒙斯理论进行量子化，构造所需的可构造因子化代数。附录中，我们回顾陈–西蒙斯理论的费曼图方法相关结果。每节开头都有概述，因此，关于各节具体完成内容的更多信息可参见相应概述。

1.11. **致谢**。本项目历经十余年才得以成形，因此获得了许多人士和机构的支持与鼓励。

J.F. 感谢 David Ayala 和 Hiro Lee Tanaka 与其合作完成 [AFT17a]和 [AFb], ，本工作正是以此为基础。O.G. 在 2017 年秋季于豪斯多夫数学研究所举办的系列讲座，以及 2018 年秋季于东北大学举办的系列讲座中，得到了听众对这项工作的反馈。他感谢 Sachin Gautam 、 David Jordan 、 Pavel Safronov 、 Valerio Toledano-Laredo 、 Peter Teichner 和 Brian Williams，在这些想法逐步形成的过程中与他们进行的启发性讨论，以及他们提出的深刻问题。马克斯·普朗克数学研究所为 O.G. 于 2017–18 年主要开展本项目工作期间提供了出色的工作环境和经费支持。J.F. 和 O.G. 于 2020 年春季参加 MSRI 的“高阶范畴与范畴化”项目期间，以及 2022 年夏季在墨西哥库埃纳瓦卡的墨西哥国立自治大学期间，得以重新投入这一项目。

2. Links and factorization homology

我们回顾一下 $d \subset n$-流形的带框架版本这一概念，该概念见 [AFT17b],中的例 5.2.12，并在 §4.3 中研究过，参见 [AFT17a]。适当嵌入子流形的框架由以下部分组成：对$K^d \subset M^n$ 的框架 M （即一个丛同构 $T_M \cong \epsilon_M^n$，将切丛映到平凡的秩 n 丛），以及以下等价结构之一：

(1) 对 K 的一个框架，以及一个带框架嵌入 $K \times \mathbb{R}^{n-d} \hookrightarrow M$，它延拓了 K 的给定嵌入；(2) 对 K 的一个框架，以及与 M的框架相容的法丛 Norm $_{K\subset M}$ 的一个框架；(3) 由嵌入 $K \subset M$ 和 M的框架定义的高斯映射 $K \to \mathrm{Gr}_d(\mathbb{R}^n)$ 的一个零伦。

通过带框架链环 $K \subset M$，我们将按照上述含义表示一个带框架的（$1 \subset n$）-流形，其中 $d = 1$。

注记 8。 请注意，适当嵌入也包括诸如 $\mathbb{R}\times\{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 这样的子流形，但不包括诸如 (0,1) $\times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$这样的子流形。

我们构造 ∞-范畴，其对象为带框架的 n-流形（见 [AF15]），随后还构造带框架链环（见 [AFT17b]和[AFT17a]）。

定义 2.1。The ∞-范畴 $\mathrm{Mfld}_n^{\mathrm{fr}}$ 是以下极限

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mfld}_n^{\mathrm{fr}} & \longrightarrow & \mathrm{Spaces}_{/\mathrm{V}_n(\mathbb{R}^\infty)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Mfld}_n & \longrightarrow & \mathrm{Spaces}_{/\mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)} \end{array} .$$

特别地，$\mathbf{Mfld}_n^{\mathrm{fr}}$ 的对象是一个 n-流形及其切丛的平凡化，这等价于将切分类映射 $M \to \mathbf{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$提升到无限维斯蒂费尔流形 $\mathbf{V}_n(\mathbb{R}^\infty)$。带框架嵌入 $M \hookrightarrow N$ 由一个嵌入以及 TM的两个平凡化之间的同伦组成，分别来自 M 的框架和从 N拉回的框架。

在本节余下部分，我们固定如下内容：

- A 是对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{V}$ 中的一个 $\mathcal{E}_n$-代数，且满足 $n > 1$。
- V 是一个完美的 A-模，即一个 A-模，并且存在一个A-线性完美配对，其中 $V^\vee = \mathrm{Hom}_A(V,\ A)$ 是 V 的 A-线性对偶。
$$V \otimes_A V^\vee \longrightarrow A$$
- M 是一个带框架的 n-流形，$K \subset M$ 是一个带框架链环。

我们利用因子化同调引入如下基本不变量

$$\int A : \mathrm{Mfld}_n^{\mathrm{fr}} \longrightarrow \mathcal{V}$$

其系数取自 A。

定义 2.2. 设 A、V和 $K \subset M$ 如上所述。K上 V 的迹

$$\int_{K \subset M} \mathrm{tr}(V) \in \int_M A$$

是该元素的像

$$\mathrm{tr}(V) \in \mathrm{HH}_*(A)^{\otimes \pi_0 K} \simeq \int_{K \times \mathbb{R}^{n-1}} A$$

在该映射下

$$\int_{M \amalg \mathbb{R}^n} A \longrightarrow \int_M A$$

该映射由将因子化同调 $\int_{_} A$ 应用于带框架嵌入$K \times \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow M$给出。

本节的主定理将此迹不变量的一个特殊情形与 Reshetihkin–Turaev 不变量联系起来。我们的证明运用了 β 形式的因子化同调的一些方面；这一理论正在与 David Ayala 合作开展 [AFa]。该理论将因子化同调推广到 $\mathcal{E}_n$-代数上的刚性 $\mathcal{E}_{n-1}$-幺∞-范畴，其方式与代数的霍赫希尔德同调可以推广到范畴的方式相同

推广到范畴。特别地，对于一个 $\mathcal{V}$-线性 $\mathcal{E}_{n-1}$-幺单oidal ∞-范畴 $\mathcal{C}$，存在一个函子

$$\int \mathcal{C} : \mathrm{Mfld}_n^{\mathrm{fr}} \longrightarrow \mathcal{V}$$

将带框架的 n-流形 M 赋予 β 因子化同调 $\int_M \mathcal{C}$，它是 $\mathcal{V}$中的一个对象。我们论证中用到的 β 因子化同调相关事实汇总于定理 2.2中。

现在我们转向本节的主定理。

定理 2.1. 给定半单李代数 $\mathfrak{g}$ 上的一个不变配对，存在一个滤过的 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathrm{C}^*_\hbar(\mathfrak{g})$，它是李代数上链 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 的变形。*Drinfeld–Jimbo* 量子群 $\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g}$ 的有限维表示 V 定义了 $\mathrm{C}^*_\hbar(\mathfrak{g})$ 的一个完美模，并且由此得到的因子化同调链环不变量等于 *Reshetikhin–Turaev* 不变量

$$\int_{K\subset\mathbb{R}^3} \mathrm{tr}(V) = Z_V(K\subset\mathbb{R}^3)$$

在识别 $\mathrm{H}^0_\hbar(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\![\hbar]\!]$ 下。

证明。令 A为 $\mathcal{E}_3$中的一个 $\mathcal{V}$-代数。1 维缠结假设 [AFb]给出了一个本质唯一的函子

$$Z_V : \mathrm{Bord}_1^{\mathrm{fr}}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathrm{Perf}_A$$

给定 $\mathcal{V}$ 中一个完美 A-模的选择。由该函子的本质唯一性可知，在同伦范畴层级上，它与 Reshetikhin–Turaev 函子一致。

根据对函子 Z_V 的描述，它是以 $\mathcal{E}_2$-幺半 ∞范畴在 [AFa], 中的刚性对象的 β 因子化同调来定义的，其在带框架链环 $Z_V(K\subset\mathbb{R}^3)$ 上的取值由以下复合给出

$$\mathrm{obj}(\mathrm{Perf}_A) \longrightarrow \int_{K\times\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{Perf}_A \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Perf}_A \xrightarrow{\sim} A$$

在元素 $V \in \mathrm{obj}(\mathrm{Perf}_A)$ 上取值。我们有以下交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{obj}(\mathrm{Perf}_A) & \longrightarrow & \displaystyle\int_{K\times\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{Perf}_A & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Perf}_A & = & A \\
 & \searrow & \uparrow & & \uparrow\simeq & & \uparrow \\
 & & \displaystyle\int_{K\times\mathbb{R}^{n-1}} A & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} A & = & A
\end{array}$$

中间方块的交换性体现了富化的 α 因子化同调与 β 因子化同调之间的相容性：对于只有一个对象（即 A）的范畴，β 因子化同调等价于 α 因子化同调。左侧三角形的交换性由迹的定义可知。□

在证明中，我们使用了以下关于 $\mathcal{E}_n$-代数的因子化同调与刚性 $\mathcal{E}_{n-1}$-幺∞-范畴的 β 因子化同调之间关系的断言，该断言出自 [AFa]。

定理 2.2。 *[β 因子化同调 [AFa]]对于 A 一个 $\mathcal{E}_n$-代数于 $\mathcal{V}$，存在函子之间的自然变换*

$$\int A \longrightarrow \int \mathrm{Perf}_A$$

在 $\mathrm{Mfld}_n^{\mathrm{fr}}$ 上，即带框架的 n-流形及其带框架嵌入所构成的 ∞-范畴。对于 $M = S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$，存在自然等价

$$\int_{S^1\times\mathbb{R}^{n-1}} A \simeq \int_{S^1\times\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{Perf}_A \simeq \mathrm{HH}_*(\mathrm{Perf}_A)$$

它介于 $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ 的因子化同调（系数为 A）、$S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ 的 β 因子化同调（系数为 Perf_A），以及 ∞-范畴 Perf_A 的 $\mathcal{V}$-充实*Hochschild*同调之间。对于每个 $V \in \mathrm{Perf}_A$，下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{obj}(\mathrm{Perf}_A) & \longrightarrow & \displaystyle\int_{S^1\times\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{Perf}_A \\ \uparrow{\scriptstyle \{V\}} & & \uparrow \\ * & \xrightarrow{\text{unit}} & \displaystyle\int_{S^1} \mathrm{End}_A(V) \end{array}$$

其中，$\mathrm{obj}(\mathrm{Perf}_A) \to \int_{S^1\times\mathbb{R}^{n-1}} \mathrm{Perf}_A$ 是 β 因子化同调中的典范单位映射。

我们对链环不变量 $\int_{K\subset M} \mathrm{tr}(V)$ 的分析将用到针对这一对 $K \subset M$ 的分层形式因子化同调。这种形式的因子化同调的系数系统由 $\mathcal{E}_{1\subset n}$-代数给出，下面我们将对其进行定义。

关于 ∞-范畴 $\mathbf{Mfld}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n}$的定义，见例 5.2。12 [AFT17b]。直观地说，这个 ∞-范畴以带框架链环 $K \subset M$为对象，其中 M 是一个带框架的n-流形，并以态射空间 $\mathbf{Emb}^{\mathrm{fr}}(K \subset M, L \subset N)$作为该极限

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Emb}^{\mathrm{fr}}(K\subset M, L\subset N) & \longrightarrow & \mathbf{Emb}^{\mathrm{fr}}(M,N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Emb}^{\mathrm{fr}}(K,L) & \longrightarrow & \mathbf{Emb}^{\mathrm{fr}}(K\times\mathbb{R}^{n-1},N) \end{array}$$

其中 $\mathbf{Emb}^{\mathrm{fr}}$ 由带紧开拓扑的标架开嵌入组成。

定义 2.3. 令 $\mathbf{Disk}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n}$ 表示 $\mathbf{Mfld}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n}$ 的全 ∞-子范畴，由 $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$的有限多个副本的不交并组成。一个 $\mathcal{E}_{1\subset n}$-代数，于 $\mathcal{V}$ 中，是一个对称幺半函子

$$\mathbf{Disk}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n} \longrightarrow \mathcal{V}$$

记作一对 $(A,\ R)$，其中 A 是底层的 $\mathcal{E}_n$-代数，而 R 是底层的 $\mathcal{E}_1$-代数。

因子化同调

$$\int_{K\subset M}(A,R)=\operatorname*{colim}_{\mathrm{Disk}_{1\subset n}/K\subset M}(A,R)$$

带框架链环 $K\subset M$ 的系数取自 $\mathcal{E}_{1\subset n}$-代数的理论在[AFT17a]中得到了详细发展。特别是，它满足一种 $\otimes$-切除性质，适用于与链环横截的切除区域。

注 9。 $\mathsf{Disk}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n}$ 是 $\mathsf{Mfld}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n}$ 的最小子范畴，具有这样的性质：$\mathsf{Mfld}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n}$ 中流形 M 的任意有限子集都有一个开邻域，且该邻域同胚于 $\mathsf{Disk}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n}$ 中的某个对象。

我们将实质性地运用以下关于 $\mathcal{E}_{1\subset n}$-代数的莫里塔理论形式。

定义 2.4。 设 (A,R) 和 (A,S) 是 $\mathcal{E}_{1\subset n}$-代数。一个 $(A;\ R,S)$-双模 V是 $\int_{S^{n-2}\times\mathbb{R}^2}A$-模中的一个 (R,S)-双模。

这类双模与具有以下结构的函子有关。

定义 2.5。 设 $(A,\ R)$ 和 $(A,\ S)$ 是 $\mathcal{E}_{1\subset n}$-代数。在 A 下的 $(n,\ 1)$-*Morita* 态射

$$(A,R)\to(A,S)$$

是一个函子

$$\mathrm{Perf}_R\longrightarrow\mathrm{Perf}_S$$

它关于 $\int_{S^{n-2}\times\mathbb{R}^2}A$ 的作用是线性的，即保持在 $\int_{S^{n-2}\times\mathbb{R}^2}A$-模中的富集。

下面的结果联系了前面的两个定义。

引理 2.3。 如果一个（$A;\ R,S$）-双模 V作为 S-模是完美的，那么相对张量积 $-\otimes_R V$定义了一个（n,1）-*Morita* 态射 $\mathrm{Perf}_R\to\mathrm{Perf}_S$。

证明。 一个（$A;\ R,S$）-双模 V定义了一个函子 $\mathsf{Mod}_R\to\mathsf{Mod}_S$，显然是$\int_{S^{n-2}\times\mathbb{R}^2}A$-线性的。如果 V作为 S-模是完美的，那么对于每个完美的 R-模W，相对张量积 $W\otimes_A V$将是完美的 S-模。□

这一概念与因子化同调有如下联系。

引理 2.4。 设(A,R)和(A,S)是 $\mathcal{E}_{1\subset n}$-代数，并设 V是一个$(A;\ R,S)$-双模，且作为 S-模是完美的。存在一个自然映射

$$\int_{K\subset M}(A,R)\to\int_{K\subset M}(A,S)$$

限制到**闭** *1* 维流形 K后，定义在$\mathrm{Mfld}^{\mathrm{fr}}_{1\subset n}$上的因子化同调理论之间的 .

证明。 由霍赫希尔德同调的线性性可知，对于一个 B-线性函子 $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，所得映射 $\mathrm{HH}_*(\mathcal{C})\to\mathrm{HH}_*(\mathcal{D})$ 是一个 B-模之间的映射。在 $B=\int_{S^{n-2}\times\mathbb{R}^2}A$ 的情形下应用这一点，我们得到所诱导的映射

$$\int_{S^1}R\simeq\mathrm{HH}_*(R)\to\mathrm{HH}_*(S)\simeq\int_{S^1}S$$

是一个 $\int_{S^{n-2}\times\mathbb{R}^2} A$-模之间的映射。

该结果可由以下复合得到，其中使用了 $\otimes$-切除性质，适用于 $(1 \subset n)$-流形的因子化同调，参见 [AFT17a]:

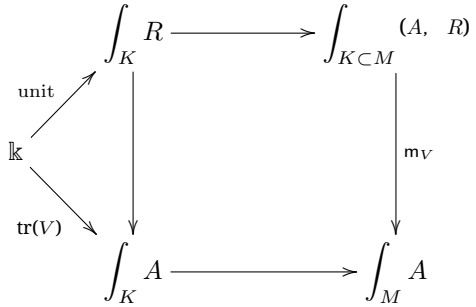
$$\begin{array}{c}
\displaystyle\int_{K\subset M}(A,R) \simeq \int_K R \underset{A}{\otimes} \int_{K\times\mathbb{R}^{n-1}\smallsetminus K\times\{0\}} \int_{M\smallsetminus K} A \\
\downarrow \\
\mathrm{HH}_*(\mathrm{Perf}_R)^{\otimes\pi_0 K} \underset{A}{\otimes} \int_{K\times\mathbb{R}^{n-1}\smallsetminus K\times\{0\}} \int_{M\smallsetminus K} A \\
\downarrow \\
\mathrm{HH}_*(\mathrm{Perf}_S)^{\otimes\pi_0 K} \underset{A}{\otimes} \int_{K\times\mathbb{R}^{n-1}\smallsetminus K\times\{0\}} \int_{M\smallsetminus K} A \\
\downarrow \\
\displaystyle\int_K S \underset{A}{\otimes} \int_{K\times\mathbb{R}^{n-1}\smallsetminus K\times\{0\}} \int_{M\smallsetminus K} A \simeq \int_{K\subset M}(A,S)\ .
\end{array}$$

这里的微分同胚

$$K\times\mathbb{R}^{n-1}\smallsetminus K\times\{0\} \cong \coprod_{\pi_0 K} S^{n-2}\times\mathbb{R}^2$$

使我们能够运用第一段中的结果，修改复合中每个张量积左侧的部分。□

定理 2.5。设 M 是一个带框架的 n-流形， $K \subset M$ 是其上的一个带框架链环。设(A, R)是一个 $\mathcal{E}_{1\subset n}$- 代数，且 V 是一个 $(A; R, A)$- 双模，它作为一个 A- 模是完美的。存在一个自然映射 m_V: $\int_{K\subset M}(A, R) \to \int_M A$，使得图表



在等价意义下交换。

证明。 将引理 2.4 应用于 $S = A$ 的情形，即得上方的交换方格。接下来需要证明左侧的交换三角形。根据定义，映射 $\int_K R \to \int_K A$ 对于 K的每个连通分支，都由霍赫希尔德同调作用于映射

$$\mathrm{Perf}_R \xrightarrow{-\otimes_R V} \mathrm{Perf}_A \ .$$

此函子将单位元 $R \in \mathbf{Perf}_R$ 映射到 V。应用霍赫希尔德同调后，它将 $\int_{S^1} R$ 的单位元映射为元素 $\mathbf{tr}(V) \in \int_{S^1} A$。□

3. Recollections on filtered Koszul duality

本节将在与本文相关的背景下阐明前述工作的意义。简言之，它结合上述内容与 [Cosb]关于滤过科祖尔对偶的结果，展示如何恢复 $\mathfrak{g}$的有限维表示所对应的缠结拓扑场论。本文其余部分将致力于对这里阐述的情形进行量子化。

3.1. 回顾。 回想一下， V 上的滤过是一个序列 e

$$V = F^0 V \leftarrow F^1 V \leftarrow \dots .$$

若 $\lim_{\leftarrow} F^i V$为零，则该序列是完备的。等价地，通过取余核 $V_i := V/F^i V$， V的滤过是一个函子 $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{C}}$，其极限等价于 V。

定义 3.1。 令 $\mathcal{V}$ 表示 ∞范畴，其对象为 $\mathbb{C}$上的完备滤过上链复形，即

$$\mathcal{V} := \mathrm{Fun}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}) \ .$$

这个范畴 $\mathcal{V}$ 是对称幺半的，其张量积由 Day 卷积给出：参见 [Cosb] 和 [GP18]。张量积在每个变量上分别对余极限分配。一个 滤过代数 是 $\mathcal{V}$ 中的代数。

现在我们转向本文的核心例子。

考虑配备递减滤过的交换代数 $A = \mathbf{C}^*\mathfrak{g}$

$$F^k A = \mathrm{Sym}^{\geq k}(\mathfrak{g}^\vee[-1]),$$

关于该滤过，它是完备的。如果我们在完备滤过上链复形的框架中工作，如 [Cosb]，第 7.2 节与第 8 节所发展的那样，则科祖尔对偶余代数为

$$A^! = \mathbb{C} \otimes^{\mathbb{L}}_A \mathbb{C}$$

滤过复形中的导出张量积。这里请注意滤过的作用，它也为 $A^!$ 配备了自然滤过。

这个余代数自然地拟同构于一个熟悉的余代数：完备对偶 $(\mathbf{U}\mathfrak{g})^\vee$。在 $\mathbf{U}\mathfrak{g}$ 上，我们有自然的递增滤过

$$F_k \mathbf{U}\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \leq k} \mathrm{Sym}^j(\mathfrak{g}),$$

并在完备线性对偶 $(\mathbf{U}\mathfrak{g})^\vee$ 上诱导出递减滤过

$$F^k(\mathbf{U}\mathfrak{g})^\vee = (\mathbf{U}\mathfrak{g}/F_k\mathbf{U}\mathfrak{g})^\vee.$$

若 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，那么 $(\mathrm{U}\mathfrak{g})^\vee$ 实际上是一个霍普夫代数，也就是与 $\mathfrak{g}$相关联的形式群上的函数。

引理 3.1 ([Cosb],引理 7.2.2)**.** 设 $\mathfrak{g}$ 为李代数。则

$$(\mathrm{C}^*\mathfrak{g})^! \simeq (\mathrm{U}\mathfrak{g})^\vee$$

作为完备滤过霍普夫代数。

可以将这条引理理解为：$\mathrm{C}^*\mathfrak{g}$ 的 Koszul 对偶代数 是 $\mathrm{U}\mathfrak{g}$，只要谨慎处理滤过与完备化。

3.2. **Koszul 对偶对于 $\mathfrak{g}$。** 我们现在考虑完备滤过上链复形的 dg 范畴中 A 上的左模，并且对偶地，考虑同一 dg 范畴中 $A^!$ 上的右余模。我们将它们分别记为 Mod_A 与 $\mathrm{RComod}_{A^!}$。

我们也关心某些子范畴。令 Perf_A 表示 $V \in \mathrm{Mod}_A$ 的全子范畴，由可对偶的模组成，即存在完美配对的那些模

$$V \otimes_A V^\vee \longrightarrow A$$

可对偶性的这一性质可以在伴随分次的层级上检验，这恢复了第 8.1 节中的定义，出处为 [Cosb]。令 $\mathrm{Fin}_{A^!}$ 表示 RComod 的全子范畴$_{A^!}$，由上同调具有总维数有限的余模组成（即其上同调有界，并且关于 $\mathbb{C}$在每一次数上有限维）。

第 8 节中的一项核心结果（ [Cosb]）如下。（这里我们固定了 A，但其中的证明适用于更广泛的一类完备滤过代数。）

命题 3.2。 函子 $\mathbb{C}\otimes^{\mathbb{L}}_A - : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{RComod}_{A^!}$ 是 *dg* 范畴之间的拟等价。此外，它将 Perf_A 限制为到 $\mathrm{Fin}_{A^!}$的拟等价。

正如我们上文所见，$(A^!)^\vee \simeq \mathrm{U}\mathfrak{g}$——只要对滤过作适当理解——我们就可以将这一结果推广到关于 U 上模的讨论中$\mathfrak{g}$，并对其作恰当理解。相关讨论见 [Cosb] 第 8.2 节。这里我们只关心 dg $\mathrm{U}\mathfrak{g}$-模，其上同调的总维数有限，因此称之为有限。

命题 3.3 ([Cosb], 引理 8.2.5)。 存在 *dg* 范畴之间的拟等价

$$\mathrm{Fin}_{A^!} \simeq \mathrm{Fin}^{\mathrm{op}}_{(A^!)^\vee}.$$

综合以上所有结果，我们得到如下结论。

推论 3.4。 存在一个拟等价

$$\mathrm{Perf}_{\mathrm{C}^*\mathfrak{g}} \simeq \mathrm{Fin}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{U}\mathfrak{g}}$$

的 *dg* 范畴。

事实上，由于 $\mathrm{C}^*\mathfrak{g}$ 是交换的，左边通过 $\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathrm{C}^*\mathfrak{g}}$构成一个对称幺半 dg 范畴。右边也具有对称幺半结构，但这是通过 $\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}}$实现的。追溯拟等价的构造过程可以看出，它是对称幺半dg 范畴之间的拟等价。

前文用 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})^{\mathrm{dg}}$ 表示 ∞-范畴，其中包含 $\mathfrak{g}$的有限型 dg 表示。dg 范畴 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{U}\mathfrak{g}}$ 呈现了这个 ∞-范畴，正如 $\mathrm{Perf}^{\mathrm{C}^*\mathfrak{g}}$呈现了 ∞C 上完美滤过模的$^*\mathfrak{g}$-范畴。因此，我们得到了引言中提到的等价关系（2）。

注记 10. 等价（3.4）对于同伦代数这一领域的专家而言显然是众所周知的。一个本质上等价的结果证明于 [CPT+17]（见第 3.6.2 节），其中混合分次结构编码了此处讨论的滤过。

3.3. **推广到量子化**。现在我们对形式变量 $\hbar$上的前述等价进行变形。根据 Drinfeld 定理，对于层级 λ的每种选择，都存在 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{U}\mathfrak{g}} = \mathrm{Rep}^{\mathrm{dg}}{}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ 的一个 $\mathcal{E}_2$-幺半变形。此变形确定了 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 的一个变形。下文中，我们使用术语模函子 指从导出 Artin 交换代数到空间的函子——特别是，我们不要求它是无穷小相干的，也不要求它具有切复形。

定义 3.2. 给定一个 $\mathcal{E}_2$-幺半 $\mathcal{V}$-线性 ∞-范畴 $\mathcal{C} \in \mathrm{Alg}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}})$，令 $\mathrm{tDef}(\mathcal{C})$ 表示模函子，其 R-点是 $\mathcal{C}$ 的 R-线性 $\mathcal{E}_2$-幺半变形空间，并且这些变形是以 $\mathcal{E}_1$-幺半变形的方式平凡化 的。也就是说，$\mathrm{tDef}(\mathcal{C})(R)$ 是如下纤维

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{tDef}(\mathcal{C})(R) & \longrightarrow & \mathrm{Alg}_{\mathcal{E}_2}(\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}))^{\sim} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{R \otimes \mathcal{C}\} & \longrightarrow & \mathrm{Alg}(\mathrm{Mod}_R(\mathrm{Mod}_{\mathcal{V}}))^{\sim} \end{array}$$

或者，等价地，$\mathrm{tDef}(\mathcal{C})(R)$ 是 $\mathcal{E}_2$-幺半范畴 $R \otimes \mathcal{C}$ 作为幺半 $\mathcal{V}$-线性 ∞-范畴的精化空间。

也就是说，我们只对编织进行变形：在记号 tDef 中，前缀 t 强调了对底层幺半结构变形的这种平凡化。

对于 $\mathcal{E}_2$-代数，也存在类似的模空间。

定义 3.3. 对于 $\mathcal{V}$ 中的一个 $\mathcal{E}_2$-代数 $A \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{V})$，令 $\mathrm{tDef}(A)$ 表示模函子，其 R-点是 A 的 R-线性 $\mathcal{E}_3$-代数变形空间，这些变形作为 $\mathcal{E}_2$-代数变形是平凡化的。也就是说，$\mathrm{tDef}(A)(R)$ 是纤维

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{tDef}(A)(R) & \longrightarrow & \mathrm{Alg}_{\mathcal{E}_3}(\mathrm{Mod}_R(\mathcal{V}))^{\sim} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{R \otimes A\} & \longrightarrow & \mathrm{Alg}_{\mathcal{E}_2}(\mathrm{Mod}_R(\mathcal{V}))^{\sim} \end{array}$$

或者，等价地，$\mathrm{tDef}(A)(R)$ 是 $\mathcal{E}_3$-代数 $R \otimes A$ 作为 $\mathcal{E}_2$-代数的精化空间。

引理 3.5。设 A 是 $\mathcal{V}$ 中的一个 $\mathcal{E}_2$-代数。模函子之间存在自然等价

$$\mathrm{tDef}(A) \simeq \mathrm{tDef}\big(\mathrm{Perf}_A(\mathcal{V})\big)$$

$\mathcal{E}_2$之间的 $\mathcal{E}_3$ 平凡化 A 变形与单幺平凡化的 $\mathcal{E}_2$变形之间的映射$\mathrm{Perf}_A(\mathcal{V})$。

证明。 我们建立一对映射

$$\mathrm{Perf} : \mathrm{tDef}(A) \leftrightarrows \mathrm{tDef}\big(\mathrm{Perf}_A(\mathcal{V})\big) : \mathrm{End}(1) ,$$

很容易看出它们互为逆映射。给定 $B \in \mathrm{Alg}^{\varepsilon_3}(\mathrm{Mod}_R(\mathcal{V}))$ 上的一个 $\mathcal{E}_2$-平凡化的 $\mathcal{E}_3$-变形 A （底域为 R），则 $\mathrm{Perf}_B(\mathcal{V})$ 是一个 R-线性 $\mathcal{E}_2$-幺半 ∞-范畴。由于 $\mathcal{E}_2$-代数等价 $B \simeq R \otimes A$ 是 $\mathrm{tDef}(A)(R)$ 中一个点的数据的一部分，因此 $\mathrm{Perf}_B(\mathcal{V})$ 与 $\mathrm{Perf}_{R\otimes A}(\mathcal{V}) \simeq R \otimes \mathrm{Perf}_A(\mathcal{V})$ 作为幺半 ∞-范畴等价。

给定 $\mathcal{D} \in \mathrm{tDef}(\mathrm{Perf}_A(\mathcal{V}))(R)$，幺半单位的自同态 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(1)$，即由 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{V}$ 上的富集所给出的 $\mathcal{V}$ 中的对象，根据德利涅猜想获得一个 $\mathcal{E}_3$-代数在 $R \otimes \mathcal{V}$ 中的结构：它具有一个 $\mathcal{E}_1$-代数结构（由自同态的复合给出），且该结构位于 $\mathcal{E}_2$-代数中；由 Lurie–Dunne 加法性，这赋予它一个 $\mathcal{E}_3$-代数结构。由幺半 R-线性 ∞-范畴 $\mathcal{D} \simeq \mathrm{Perf}_{R\otimes A}(\mathcal{V})$ 的等价，我们得到 $\mathrm{End}_{\mathcal{D}}(1) \simeq R \otimes A$ 作为 $\mathcal{V}$ 中的 R-线性 $\mathcal{E}_2$-代数的等价，因而得到 $\mathrm{tDef}(A)(R)$ 中的一个点。□

推论 3.6. 给定一个层级 λ的选择，考虑由 *Drinfeld–Jimbo* 量子群给出的 $\mathcal{E}_2$-幺半变形表示$^{\mathrm{dg}}_{\text{有限}}(\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g})$ 表示$^{\mathrm{dg}}_{\text{有限}}(\mathfrak{g})$ 。单位元$\mathrm{C}^*_\hbar(\mathfrak{g})$ 的导出自同态具有滤过 $\mathcal{E}_3$-代数的结构，并且存在一个自然等价

$$\mathrm{Perf}_{\mathrm{C}^*_\hbar(\mathfrak{g})}(\mathcal{V}) \simeq \mathrm{Rep}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{U}_\hbar\mathfrak{g})$$

$\mathcal{E}_2$-幺半 ∞-范畴的等价。

4. Chern–Simons theory and its factorization algebra

本节的主要结果如下。

命题 4.1. 选择一个层级 $\lambda \in \hbar\mathrm{H}^3(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ ，便确定了陈–西蒙斯理论的微扰量子化，进而产生$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 的非平凡形变$\mathcal{A}^\lambda$ ，使其成为一个滤过 $\mathcal{E}_3$-代数。

这个滤过 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}^\lambda$ 提供了带框架的三圆盘代数，它出现在我们构造 Reshetikhin–Turaev 不变量的过程中。

这个命题的证明分为三个步骤：

- 按照 [Cos11] 第 4.3 节 及附录中的做法，微扰量子化 Chern–Simons 理论；
- 利用 [CG17、CG] 第 4.2 节和4.4 节的工具构造因子化代数；并且
- 在第 4.5 节验证它是非平凡形变。

请注意，我们对第一步的讨论遵循 Costello 的方法 [Cosa，Cos11],该方法在 BV 形式体系中细致地处理这些构造，其本质属于变形理论。附录A.1回顾了费曼图方法及相关问题。此处内容纯属介绍性质，因为最早对陈–西蒙斯理论的微扰量子化进行系统数学处理的是 Axelrod–Singer [AS92，AS94]；同时期 Kontsevich 的工作概述见

于 [Kon94]。（许多人也发展了这一微扰展开，尤其是物理学家 [GMM89], ，其中 [Gua93] 是系统性的参考文献。在 [Iac，CM10]中还能找到其他关于 BV 形式体系下陈–西蒙斯理论的有益论述。）

在开始证明之前，我们先以与本文相关的形式介绍经典陈–西蒙斯理论，然后分析其可观测量因子化代数，并说明它为何等价于 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$。根据 [CG], 的主定理，由于我们构造出了一个非平凡的 BV 量子化，量子可观测量便自动存在。遗憾的是，它们难以直接理解，因为因子化结构涉及费曼图的全部复杂性。[7] 相反，在第 4.5 节中，我们通过一些较为间接的方法验证它是一种非平凡形变。

4.1. **经典陈–西蒙斯理论**。 我们介绍与本文目的相关的观点，第 4 节和 [Cos11] 第 5章 [Cosa] 可供参考。（关于更多内容的讨论，尤其是许多本文略去的方面，请参阅 [Fre95]。）这里我们稍作阐释，因为这一观点可能不太常见；我们将在第 4.1.3 节说明它与标准物理学术语的联系。

4.1.1. 任何经典场论都有运动方程，即支配所考虑物理系统的偏微分方程组。对于流形 M 上的 Chern–Simons 理论，若其主 G-丛为 $P \to M$，且 G 是有限维李群，则场是取值于 $\mathfrak{g}$的联络 ∇，定义在 P上，而运动方程是零曲率方程 $F_\nabla = 0$。为简单起见，假设 P 已平凡化，因此我们有一个优选联络 d，使得每个其他联络都可以写成 $\nabla = \mathrm{d} + [A, -]$，其中 $A \in \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$。于是零曲率方程就是 Maurer–Cartan 方程

$$\mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A] = 0.$$

这一几何情形对我们来说已经足够，因为我们将始终取 $M = \mathbb{R}^3$。

读者或许已经注意到，这个运动方程并不依赖于M 的维数为三。三维情形的特殊之处在于，Maurer–Cartan 方程具有变分形式：它是以下作用泛函的欧拉-拉格朗日方程

$$CS(A) = \frac{1}{2}\int_M \langle A, \mathrm{d}A\rangle_{\mathfrak{g}} + \frac{1}{6}\int_M \langle A, [A \wedge A]\rangle_{\mathfrak{g}},$$

其中 $\langle -,\ -\rangle_{\mathfrak{g}}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 上的非退化不变内积。（这种配对的存在性是对我们所考虑的李代数类型的一项约束。）

CS 的公式对于任意 1-形式 A 都没有意义，只要 M 不是紧致的。因此，它并不总是整个 $\mathfrak{g}$ 值 1-形式空间上的良定义函数。然而，从变分法和经典场论的角度来看，这个问题无关紧要。我们真正关心的是相对于紧支撑场对 CS 作的变分。换言之，场空间 $\Omega^1(M,\ \mathfrak{g})$ 存在一个由紧支撑场构成的叶状结构，即

$$\Omega^1_c(M, \mathfrak{g}) \subset T_A\Omega^1(M, \mathfrak{g}) \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g})$$

[7] 然而，*abelian*Chern–Simons 理论的情形是可以理解的——因为它是一个自由理论——并且在 [CG17] 的第 4.5 节中进行了分析。

在每个场 A 处。这个叶状结构的线性对偶丛有一个良定义的截面，我们可以将其记为 δCS ，因为它是一种场空间上的 1-形式；变分法告诉我们，我们需要求这个截面的零点轨迹。具体而言，

$$\delta CS(A) = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A],$$

联络 $\mathrm{d}+A$ 的曲率，因此零点轨迹切出平坦联络。

4.1.2. 到目前为止，我们忽略了这一规范理论的一个重要方面：我们希望在规范等价的意义下考虑联络，即在丛 P 于 M 上的自然自同构的意义下考虑。简言之，正确的场空间构成一个叠，即联络模规范变换。然后用运动方程挑出平坦联络模规范等价的轨迹。这里还应小心取正确的导出轨迹。

与其在一套尚未发展成熟的导出微分几何理论中表述该理论，我们将直接陈述所使用的对象；它可以解释为一个形式导出叠，即数学中一个定义良好的对象 [Lurb，TV08]。

定义 4.1. 设 M 为光滑流形， $\mathfrak{g}$ 为有限维李代数。令 $\mathfrak{g}^M$ 表示微分分次李代数 $\Omega^*(M, \mathfrak{g})$，其中括号满足

$$[\alpha \otimes x, \beta \otimes y] = \alpha \wedge \beta \otimes [x, y]_{\mathfrak{g}},$$

其中 $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)$ 和 $x, y \in \mathfrak{g}$，微分为 $\mathrm{d} \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$。从此处起，我们将只用 d 表示微分。这个微分分次李代数的 Maurer–Cartan 方程为

$$\mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A] = 0 \tag{3}$$

对于 $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$，给定一个解 A，算子 $\mathrm{d} + A$ 是平凡丛 $\mathfrak{g} \to M$ 上的平坦联络。

–

从导出几何的角度看，这个微分分次李代数 $\mathfrak{g}^M$ 描述了平凡丛 $\mathfrak{g}$ 上平坦联络的导出模空间中，平凡联络 d 的形式邻域。我们将这个形式模空间记作 $\mathrm{B}\mathfrak{g}^M$。

4.1.3. 我们来说明这一情形的标准物理学术语。因此，通常的场 是联络1-形式 $A \in \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$，其上赋予上同调（或鬼）次数零。注意，在物理学中，场空间是将 $\mathrm{B}\mathfrak{g}^M$ 的底层分次向量空间向下平移一个次数。

这些场正是我们最初采用的、物理上相关的（或“朴素的”）场。次数为 -1 的场称为鬼场，是 $\Omega^0(M) \otimes \mathfrak{g}$。它们描述规范对称的李代数。次数为 1 的场称为反场，是 $\Omega^2(M) \otimes \mathfrak{g}$；次数为 2 的场称为反鬼场，是 $\Omega^3(M) \otimes \mathfrak{g}$。相对于移位辛配对，它们分别是场和鬼场的共轭变量

$$\langle \alpha \otimes x, \beta \otimes y \rangle = \pm \int \alpha \wedge \beta \langle x, y \rangle_{\mathfrak{g}}.$$

作用泛函于是就是由我们最初采用的“朴素”作用量导出的标准 BV 作用量：我们姑且将其记为

$$CS(A) = \frac{1}{2}\langle A, d_{dR}A\rangle + \frac{1}{6}\langle A, [A \wedge A]\rangle,$$

其中 A 现在表示场中的任意元素。

注记 11。 物理学家的约定在以下意义上是自然的：BV 理论中的场总是由作用泛函选定的变分偏微分方程的一个解所对应的底层切复形。导出几何的一个非平凡结果是，移位切复形具有自然的李代数结构，它编码了该解的整个形式邻域，而不仅仅是切空间。

由于这种移位辛结构，经典可观测量的交换微分分次代数（下文将对此作更详细的讨论）应当具有移位泊松结构。该代数上的微分是一个哈密顿向量场 $\mathrm{d}^{\mathrm{cl}} = \{CS, -\}$，而平方为零的性质 $(\mathrm{d}^{\mathrm{cl}})^2 = 0$ 等价于经典主方程（CME），它断言 $\{CS, CS\}$ 是泊松中心的（即为常数）。因此，在 BV 形式体系中，经典主方程是一个条件，用以确保拟定的作用泛函定义了一个适定的经典 BV 理论。

注记 12. 该微分分次李代数对任意光滑流形 M都有意义，与维数无关。然而，在三维情形且当 $\mathfrak{g}$ 配备非退化不变内积时，可以发现形式模空间 $\mathrm{B}\mathfrak{g}^M$ 具有 1-移位泊松结构。这一结构是变分偏微分方程的一般特征。导出临界轨迹：函数的导出临界轨迹具有自然的移位泊松结构，而变分偏微分方程某一解的形式邻域恰好是作用泛函的导出临界轨迹中某一点的形式邻域。详尽讨论见 [CG]中关于经典场论的各章。

4.2. 经典可观测量的因子化代数。 经典陈–西蒙斯理论的可观测量易于描述和理解。我们首先不用场论语言描述全部内容，然后再解释其场论诠释。起初我们考虑 M 上的全局可观测量，然后转向局部到整体结构。

4.2.1. “经典可观测量”应当是形式模空间 $\mathrm{B}\mathfrak{g}^M$ 上的函数所构成的微分分次交换代数。在形式导出几何中，如果一个形式模空间对应于微分分次李代数 $\mathfrak{h}$，那么它的函数代数就对应于 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{h})$。因此，对于经典陈–西蒙斯理论，经典可观测量的代数是

$$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}^M) = \mathrm{C}^*(\Omega^*(M) \otimes \mathfrak{g}).$$

这里最好记住，德拉姆形式自带一种自然拓扑；尤其是在我们着手构造量子化时，因此在定义这个微分分次李代数的切瓦利–艾伦伯格上链时，需要考虑泛函分析方面的一些问题。

这些问题并不严重，并且在 [CG17], 中得到了系统处理。该文描述了一个性质良好的范畴 DVS，即可微向量空间。简要概述其中的方法如下。对于 $\mathcal{E}$ 光滑截面 $\mathcal{E}$ 的

向量丛 $E \to M$，适当的线性对偶 $\mathcal{E}^\vee$ 由 $E^\vee \otimes \mathrm{Dens} \to M$ 的紧支撑分布截面给出，其中 $E^\vee$ 表示向量丛的对偶，而 Dens $\to M$ 表示密度线丛。对于 $\mathcal{E} = C^\infty(M,\ E)$ 和$\mathcal{F} = C^\infty(M,\ F)$，适当的张量积 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$由向量丛 $E \boxtimes F \to M \times N$ 的光滑截面给出，其中 $E \boxtimes F = \pi_M^* E \otimes \pi_N^* F$。对于紧支撑截面或分布截面，我们也以类似方式将张量积定义为乘积空间 $M \times N$ 上相应向量丛的此类截面。

利用这些对偶和张量积的概念，我们按照通常的方式构造 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}^M)$。具体而言，其底层向量空间为

$$\mathrm{C}^\#(\mathfrak{g}^M) = \prod_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n((\Omega^*(M)^\vee \otimes \mathfrak{g}^\vee)[-1])$$

并赋予微分

$$\mathrm{d}_{dR} \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}^\vee} + \mathrm{d}_b$$

其中，德拉姆微分表示作用在紧支撑德拉姆流上的自然微分（紧支撑德拉姆流是德拉姆形式的分布对偶），而 d_b 表示由李括号按照李代数上同调的通常公式所确定的算子。

注意，$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}^M)$ 带有 Chevalley–Eilenbrg 上链的通常递减滤过：

$$F^k\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}^M) = \prod_{n\geq k} \mathrm{Sym}^n((\Omega^*(M)^\vee \otimes \mathfrak{g}^\vee)[-1]),$$

这显然与微分相容。

4.2.2. 为了阐明这些可观测量所包含的信息类型，我们来描述它们在流形 M 取某些简单选择时的情形。

- 对于 $M = \mathbb{R}^3$，Poincar´e 引理意味着

  $$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}^3}) \simeq \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}).$$

  换句话说，经典局域可观测量只是鬼场的函数，而零次上同调中朴素且具有物理意义的可观测量只是常函数。

- 对于 $M = S^1 \times \mathbb{R}^2$，K¨unneth 同构和 Poincar´e 引理意味着

  $$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}^{S^1\times\mathbb{R}^2}) \simeq \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}[\epsilon]) = \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \widehat{\mathrm{Sym}}(\mathfrak{g}^\vee)),$$

  其中 $\mathrm{H}^*(S^1) = \mathbb{C}[\epsilon]$，且 $|\epsilon| = 1$。换句话说，零次上同调中朴素且具有物理意义的可观测量是 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}}$，它们是李代数 $\mathfrak{g}$ 上的迹类函数。这一结果符合我们的预期：圆上的 $\mathfrak{g}$-局部系统的相关可观测量应当是单值化的函数，因为伴随商 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}$刻画了可能的单值化。

- 对于 $M = \Sigma_g \times \mathbb{R}$，其中 Σ_g 是亏格为 g的闭黎曼曲面，我们得到

  $$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}^{\Sigma_g\times\mathbb{R}}) \simeq \mathrm{C}^*(\mathfrak{g} \otimes \mathrm{H}^*(\Sigma_g)).$$

特别地，零次上同调有一个分量

$$\widehat{\mathrm{Sym}}(\mathfrak{g}^\vee \otimes H_1(\Sigma_g))^{\mathfrak{g}},$$

它编码了特征簇中平凡联络形式邻域上的朴素函数代数。[8]

一般而言，只要理解了 M 的上同调，就很容易理解流形 M 上的经典可观测量。

4.2.3. 这些具体例子凸显了我们构造的一个重要特征：它对于流形 M 的选择具有函子性。现在我们希望阐明，可观测量作为流形的函数所具有的结构。

值得指出的是，在 M 上有一个微分分次李代数层 $\Omega^* \otimes \mathfrak{g}$，我们将其视为形式模空间层。这个层将开集 $U \subset M$ 映射为 U 上平凡平坦 $\mathfrak{g}$-丛的变形。换言之，我们考虑的是 Maurer–Cartan 方程解的层；由于偏微分方程具有局部性，这些解构成一个层。

这个层是局部常值的，因为德拉姆复形是局部常值的（在拟同构意义下）。这一性质显然成立，因为局部系统的层显然是局部常值的。

既然我们有一个形式模空间的层，那么逐个开集取函数代数，便可望得到一个微分分次交换代数的余层。因此，它们也应满足一组较弱的公理，这组公理刻画了上链复形的因子化代数。现在我们来证明这一点。

定义 4.2。 切*hern– Simons* 理论的经典可观测量预因子化代数是以下预余层

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}} \colon \mathrm{Opens}(M) \to \mathrm{Ch}(\mathrm{DVS})$$

将开集 $U \subset M$ 映到微分分次交换代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}^U)$。事实上，所有结构映射都保持滤过，因此我们可以将目标范畴细化为 DVS 中的完备滤过上链复形。

这个构造性质良好： [CG17]的定理 6.6.1 立即可特化为如下结果。

引理 4.2。 预余层 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}$ 满足以下性质：

- 结构映射是交换微分分次代数之间的映射，因此$\mathrm{Obs}_{\mathrm{cl}}$ 是交换微分分次代数的预余层。
- 它满足标准拓扑下的余下降，因此$\mathrm{Obs}_{\mathrm{cl}}$ 是交换微分分次代数的余层。
- 因此它满足关于*Weiss*拓扑的余下降，从而$\mathrm{Obs}_{\mathrm{cl}}$ 是一个交换因子化代数。

[8]注意， $\mathfrak{g}^\vee \otimes H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})$ 是 $\mathfrak{g} \otimes \mathrm{H}^1(\Sigma_g, \mathbb{R})$ 的线性对偶；若忽略规范变换，它就是特征簇在平凡联络处的切空间。因此，该切空间上的 $\mathfrak{g}$-不变形式幂级数就是平凡联络附近的函数。

此外，由于作为来源的微分分次李代数层是局部常值的，该因子化代数 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}$ 是局部常值的。根据 [Lura], 的定理 5.4.5.9，它因此定义了一个 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{g}}$。于是我们得到如下结果。

引理 4.3。 *ThePoincar´e* 拟同构 P 确定了滤过的 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}_{\mathfrak{g}} \simeq \mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$之间的滤过拟同构，其中$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 是通过从滤过的 $\mathcal{E}_\infty$ 代数遗忘结构而得到的滤过 $\mathcal{E}_3$-代数。

4.3. **变形复形。** 在 [Cos11]中发展的形式体系允许人们给出一种障碍论证，证明 BV 量子化的存在，而无需计算任何费曼图。其关键要素之一是变形复形，它是经典 BV 理论的变形复形，详见 [Cos11]第 5 章第 4 节。我们着重介绍这一上同调工具，因为它在耦合理论中也将发挥相似作用；不过，我们将在下一节展示陈–西蒙斯理论的一种显式量子化。

简言之，经典 BV 理论的变形复形由场上的局部泛函所构成的上链复形组成，也就是拉格朗日密度。（注意，我们允许任意上同调次数的局部泛函。）BV 括号在局部泛函上定义了一个移位李括号。微分为 $\{S^{\mathrm{cl}}, -\}$，其中 S^{cl}是经典作用量。因此，变形复形是一个移位微分分次李代数。任何次数为零的元素 I 使得

$$0 = \{S^{\mathrm{cl}} + I, S^{\mathrm{cl}} + I\} = 2\{S^{\mathrm{cl}}, I\} + \{I, I\}$$

是一个移位毛雷尔–卡当元素，因此确定了一个新的经典 BV 理论，其作用泛函为 $S^{\mathrm{cl}} + I$。特别地，次数为 0 的上闭链确定了经典 BV 理论的一阶变形。次数为 -1 的上闭链编码了经典理论的局部对称性；而满足量子主方程的障碍最终会成为次数为 1 的上闭链。

在 [Cos11], 的第 5 章第 14 节中，说明了 Chern–Simons 理论在 $\mathbb{R}^3$ 上的变形复形有一个简单形式：

$$\mathrm{Def}_{CS} \simeq \mathrm{C}^{\geq 1}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g})[3].$$

换言之，变形复形由约化的 李代数上同调编码。对于 $\mathfrak{g}$半单的情形，我们由此可知：

- $\mathrm{H}^1(\mathrm{Def}_{CS}) \cong \mathrm{H}^4(\mathfrak{g}) = 0$，因此 BV 量子化不存在任何障碍，并且
- $\mathrm{H}^0(\mathrm{Def}_{CS}) \cong \mathrm{H}^3(\mathfrak{g})$，因此对于 $\hbar$ 中的每个幂，我们都可以像上文所述那样，通过改变配对来修改经典作用量。

此外，不同的层级选择会确定不同的量子化：不存在能将它们等同起来的局部对称性。

4.3.1. SO(3)-等变量子化。以下简要讨论并非本文核心结果所必需，但或许能阐明这一情形的某些方面。

自然会有人问，我们能否在量子化过程中保留经典理论的对称性。这里我们考察 SO(3) 下的旋转对称性能否提升。请注意，我们问的不只是可观测量的代数在旋转下是否同构，而是如何具体指定这种同构。

从高阶代数的视角来看，我们要问的是，量子可观测量能否提升为定向（但非标架化）3-圆盘上的算子代数，等价地说，能否提升为一个带标架的 $\mathcal{E}_3$-代数。对变形复形的一个细化使我们能够得出结论：它确实可以提升。按照引言中所述的流程，这一提升确定了线缺陷范畴上的带结构。

我们首先指出一个重要问题：按照 [CG17]中的术语，需要区分离散作用和平滑作用。[9] 在 $\mathbb{R}^3$ 上构造量子陈–西蒙斯理论并使其显式地关于作为离散群的 SO(3) 具有等变性，是直接的。只需使用由 $\mathbb{R}^3$上的欧几里得度量导出的规范固定，这就保证了（正则化的）BV 括号和 BV 拉普拉斯算子严格地关于 SO(3) 具有等变性，重整化群流亦然。

在经典理论中，存在 $\mathfrak{so}(3)$ 的无穷小作用，其经典诺特流为

$$J_\xi(A) = \int \langle A, \mathcal{L}_\xi A \rangle$$

其中，我们将 $\xi \in \mathfrak{so}(3)$ 中的一个元素与 $\mathbb{R}^3$ 上的一个向量场对应起来，因此它在微分形式上具有由李导数 $\mathcal{L}_\xi$ 给出的典范作用。该作用使 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}$ 成为一个平滑地 SO(3)-等变的因子化代数（通过与局部泛函 J_ξ取括号，可以得到所需的因子化代数导数）。不太明显的是，我们可以将这一平滑作用量子化。

相对于 $\mathfrak{so}(3)$进行等变处理，相当于在基环 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{so}(3))$ 上工作，将其视为滤过微分分次交换代数。等变经典可观测量是因子化代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{so}(3), \mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}})$，其取值为滤过的 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{so}(3))$-模。进行等变量子化，就是在基环 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{so}(3))$ 上求解量子主方程。[10] 按照上述讨论的方式，可以考察 $\mathfrak{so}(3)$-等变变形复形 $\mathrm{Def}_{CS}^{\mathfrak{so}(3)-eq}$。

引理 4.4。 $\mathfrak{so}(3)$-等变的 *Chern–Simons* 理论变形复形在 $\mathbb{R}^3$ 上满足

$$\mathrm{Def}_{CS}^{\mathfrak{so}(3)\text{-}eq} \simeq \mathrm{C}^{\geq 1}(\mathfrak{so}(3)) \otimes \mathrm{C}^{\geq 1}(\mathfrak{g})[3].$$

关键观察在于，拟同构 $\mathbb{C} \hookrightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^3)$（庞加莱′引理中的）是 $\mathfrak{so}(3)$-等变的。这一辨识意味着，第 5 章第 14 节中的论证 [Cos11], 可以直接沿用。

推论 4.5。 当 $\mathfrak{g}$ 是半单的时，不存在阻碍 $\mathfrak{so}(3)$-等变量子化的因素，其中$\mathrm{H}^*(\mathfrak{so}(3))$ $= \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[-3]$。

参见 [EG23] 关于所有拓扑 AKSZ 理论（包括陈–西蒙斯理论）中此类结果的论述，特别是命题 1.4，它推出了该引理及其推论。

---

[9]参见其中的第3.7节。这一区别是拓扑学中一个熟悉区别的体现：李群的分类空间 BG 与李群 G 及 $B(G^\delta)$ 其底层离散群 G^δ的分类空间之间有很大差异。这里使用的术语与我们构造中的泛函分析问题有关。[10]这一过程定义良好，并在《 [CG], 》第13章中得到了充分阐述，不过这里我们并未用到任何微妙之处。

4.4. **量子可观测量的因子化代数**。 我们已经描述了经典陈–西蒙斯理论的一族 BV 量子化，现在转而理解与之相关的因子化代数。应用 [CG], 中的定理 9.6.0.1，我们推出以下结果。

命题4.6。 每个层级 $\lambda \in \hbar \mathrm{H}^3(\mathfrak{g})[[\hbar]]$ 的选择都确定了 $\mathbb{R}^3$上的经典陈–西蒙斯理论的一种 *BV* 量子化，因此它确定了一个取值于 $\mathbb{C}((\hbar))$上的微分分次模的因子化代数 Obs^λ 。这个因子化代数模 $\hbar$ 约化后，得到一个与 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}$拟同构的因子化代数。

如引言中所述，量子化会产生一个带有滤过的$\mathcal{E}_3$代数。我们先在因子化代数的层级上确定相关的滤过。

考虑量子可观测量 $\mathrm{Obs}^\lambda(\mathbb{R}^3)$ 的底层分次向量空间：

$$\prod_{m,n\geq 0} \hbar^m \mathrm{Sym}^n((\Omega^*(M)^\vee \otimes \mathfrak{g}^\vee)[-1]).$$

这里表面上有三种分次：按上同调次数、按 $\hbar$ 的幂次以及按对称幂分次。微分（无论选择何种基本解算子或尺度）与这些分次的相互作用，是保持或增加 $\hbar$ 的幂次，但对称幂最多可能降低两次。这种降低完全是由 BV 拉普拉斯算子造成的。

定义 4.3. 为量子可观测量赋予如下滤过：

$$F^k\mathrm{Obs}^\lambda = \prod_{2m+n\geq k} \mathbb{C}\hbar^m \otimes \mathrm{Sym}^n((\Omega^*(M)^\vee \otimes \mathfrak{g}^\vee)[-1]),$$

该滤过在微分作用下保持不变。

该滤过与支撑条件及结构映射相容，因此可扩展到整个因子化代数。

这个滤过的一个显著特点是，其伴随分次因子化代数就是阿贝尔 Chern–Simons 理论的量子可观测量。更准确地说，它编码了李代数 $|\mathfrak{g}|$ 的 Chern–Simons 理论；这里指的是 $\mathfrak{g}$ 的底层向量空间，并赋予平凡括号。注意，伴随分次上的微分是 $\mathrm{d}_{dR} + \hbar\Delta$，这是因为该滤过消去了会提高对称幂次数的项（例如，由 $\mathfrak{g}$ 的李括号产生的微分项）。

总而言之，我们有以下结论。

引理 4.7. 量子可观测量 Obs^λ 构成一个取值于DVS中完备滤过微分分次 $\mathbb{C}[[\hbar]]$-模的局部常值因子化代数。因此，它们确定一个滤过的 $\mathcal{E}_3$-代数。

证明。 只需证明伴随分次——即阿贝尔陈–西蒙斯理论的量子可观测量——是局部常值的。不过，这里可以使用谱序列论证。对于小圆盘 i 嵌入较大圆盘 $D \hookrightarrow D'$，伴随分次的可观测量存在与 i 相关联的结构映射。现在考虑按 $\hbar$ 的幂给出的滤过。于是存在一个映射

由 i 的结构映射导出的谱序列之间的映射，并且它在第一页上是同构，因为阿贝尔陈–西蒙斯理论的经典可观测量是局部常值的。□

4.5. **量子化产生了非平凡形变**。接下来需要证明这一 $\mathcal{E}_3$ 形变是非平凡的。我们提出两种论证，分别展现了我们的方法的一些不同特点。不过，这两种论证都依赖于这样一个事实：Obs^λ 的伴随分次对应于阿贝尔陈–西蒙斯理论，而该理论是自由场论，因此可以进行深入分析。我们将直接借鉴 [CG17] 中对阿贝尔陈–西蒙斯理论所作的分析。

4.5.1. 沿环面的约化。一种方法是利用因子化代数的推前（这是维数约化的一种形式），将问题转移到更熟悉的结合代数领域。基本上，我们将证明，沿闭定向二维流形 Σ 对量子化陈–西蒙斯理论进行维数约化，会产生对约化后经典可观测量的一种非平凡变形量子化。为简便起见，我们在此聚焦于环面$T = S^1 \times S^1$ 。

回忆一下，对于映射 $\pi\colon\ X \to Y$， X 上的因子化代数 $\mathcal{F}$ 通过如下公式推前为因子化代数 $\pi_*\mathcal{F}$

$$\pi_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\pi^{-1}U).$$

因此，对于 $\mathbb{R}\times\Sigma$上的局部常值因子化代数 $\mathcal{F}$，沿投影 $\pi\colon\ \mathbb{R}\times\Sigma\to\mathbb{R}$ 的推前 $\pi_*\mathcal{F}$给出 $\mathbb{R}$上的一个局部常值因子化代数，它等价于某个 $\mathcal{E}_1$-代数。

如果 $\mathcal{F}$ 是交换的，则其推前也是交换的。如果 $\mathcal{F}$ 不是交换的，则其像不必是交换的。因此，下述结果将验证 $\mathcal{A}^\lambda$ 是 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 的一个非平凡 $\mathcal{E}_3$ 变形。

引理 4.8. 沿投影 $\pi\colon\ T\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的推前 $\pi_*\mathrm{Obs}^\lambda$ 给出一个局部常值因子化代数，其相伴的 $\mathcal{E}_1$-代数是 $\pi_*\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}$的非交换变形。

在上同调的层级上，这一关系已经清楚，正如我们的论证将表明的那样。设 α 与 β 是生成 $\mathrm{H}_1(T,\ \mathbb{R})$ 的循环。于是分次交换代数 $\mathrm{H}^*(\pi_*\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}})$ 即为李代数上同调

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}[\alpha,\beta]) \cong \mathrm{H}^*(\mathfrak{g}) \otimes \widehat{\mathrm{Sym}}(\mathfrak{g}^\vee \oplus \mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^\vee[1])^{\mathfrak{g}},$$

它具有一个非平凡的 0 次泊松括号。这个代数是更熟悉的泊松代数 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^\vee \oplus \mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}}$ 的分次扩张；后者是环面的特征层上平凡联络附近的函数完备代数。BV 量子化将产生这个泊松代数的变形量子化。

证明。 对于阿贝尔陈–西蒙斯理论以及任意闭黎曼曲面，这个引理就是 [CG17] 中的命题 4.5.2。现在考虑 $\mathfrak{g}$ 非阿贝尔情形。由于这里采用的滤过（定义4.3）， $\pi_*\mathrm{Obs}^\lambda$ 编码了一个带滤过的 $\mathcal{E}_1$-代数，其伴随分次是具有李代数 $|\mathfrak{g}$的阿贝尔陈–西蒙斯理论的

这个阿贝尔陈–西蒙斯理论的经典可观测量。因此，对于非阿贝尔的 $\mathfrak{g}$， $\pi_*\mathrm{Obs}^\lambda$ 并不与 $\pi_*\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}$ 滤过等价。□

4.5.2. 计算 $\mathcal{P}_3$ 括号。 回顾一下， $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}$ 的上同调是一个移位泊松代数，其括号的次数为 2。因此，要证明 BV 量子化产生了 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 的非平凡 $\mathcal{E}_3$ 变形，另一种方法是直接确定 $\mathrm{H}^*\mathcal{A}^{\mathrm{q}}_\lambda$ 上的移位泊松括号，并验证其非平凡性。

引理 4.9。 在 $\hbar$ 的一阶近似下，由 $\mathcal{A}^{\mathrm{q}}_\lambda$ 上的 $\mathcal{E}_3$ 代数结构诱导的$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})[[\hbar]]$上的 -2-移位泊松括号，由线性可观测量上的配对 λ （模 $\hbar$）决定，并作为双导子延拓。

为了证明这一点，我们将采用一种计算方法，它是拓扑场论中物理学意义上的下降概念的一个版本。关于这一构造的物理语言描述，参见 [BBZB+] ；关于其严格处理，尤其是 [ES19], 第 2.4 节，参见其中关于如何将 $\mathcal{E}_n$ 代数（采用幺半群风格）编码到 Chern–Simons 理论等拓扑场论的可观测量中的讨论。简言之，下降提供了一种构造可观测量（或算子）的方法。下面概述它在我们情形中的运作方式。

我们用局部可观测量 一词指支撑在圆盘上的可观测量：因此，对于经典理论，局部可观测量就是某个圆盘 D上的 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(D)$。请注意，局部常值性保证了无论选择哪个圆盘，它们都拟同构。事实上，我们已经看到，经典局部可观测量与 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$拟同构。另一方面，给定一个子流形 $S \subset \mathbb{R}^3$ 以及 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$中的一个元素 α ，可以构造一个可观测量

$$\mathcal{O}_{S,\alpha} \in \mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)$$

对任意开集 $U \supset S$，如下所示。

第一步是将这样的 α 提升为微分分次李代数 $\Omega^*(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{g}$ 上的一个泛函 $\widetilde{\alpha}$ ，其取值于 $\Omega^*(\mathbb{R}^3)$。有两种做法，一种巧妙，另一种不然；我们将两种都介绍，先从效果不佳的做法开始。

考虑交换微分分次代数之间的映射 $\mathbb{C} \to R = \Omega^*(\mathbb{R}^3)$，它将数嵌入为 $\mathbb{R}^3$上的常值函数。微分分次李代数 $\Omega^*(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{g} = R \otimes \mathfrak{g}$ 是沿此映射进行基变换得到的李代数。这种关系带来了李代数上链的一个有趣性质。首先请注意，将 $R \otimes \mathfrak{g}$视为底环 R 上的微分分次李代数时，存在一个关于 R的李代数上链的微分分次交换 R-代数 $\mathrm{C}^*_R(R \otimes \mathfrak{g})$。另一方面，也存在微分分次交换 R-代数 $R \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$。二者十分相似，但并不相等。其底层分次代数之间存在一个同构

$$\mathrm{C}^\#_R(R \otimes \mathfrak{g}) \cong R^\# \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{C}^\#(\mathfrak{g}) \tag{4}$$

但微分并不相同。

我们希望构造一个映射

$$\widetilde{\ }\colon \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}) \to \mathrm{C}^*_R(R \otimes \mathfrak{g})$$

使 α 成为 $\widetilde{\alpha}$。一个显而易见的猜想是：直接利用同构（4），将 α 映射到 $1_R \otimes \alpha$ 。这个映射有一个严重的缺点：它不保持 $\mathrm{C}^*_R(R \otimes \mathfrak{g})$ 上的微分。不过，这个问题可以解决，而这正是下降的本质。

考虑 $\Omega^*(\mathbb{R}^3)$ 上由 ι_{∂_i}给出的自同态，即与向量场 ∂_i的收缩。嘉当公式告诉我们，$L_{\partial_i} = [\mathrm{d}\ \iota_{\partial_i}]$。[11] 考虑“数算子” $N = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}x_i\, \iota_{\partial_i}$，它之所以是一种数算子，是因为对任意 $N(\omega) = k\omega$形式 k，都有 ω。这个算子 N可扩张到 $\Omega^*(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{g}$ 上，其作用在李代数上为恒等映射，因此也可扩张为该李代数上的函数的一个算子。

定义 4.4。 对于 $\alpha \in C^*(\mathfrak{g})$，其总后裔为

$$\widetilde{\alpha} = e^N(\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} N^j(\alpha),$$

$C^*_{\mathrm{Lie},\ \Omega}(\Omega^*(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{g})$ 的一个元素。

直接计算表明，该映射 $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$ 是一个上链映射。

这一构造尚未产生可观测量： $\widetilde{\alpha}$ 以 $\Omega^*(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{g}$ 中的一个场 A作为输入，并返回一个微分形式 $\widetilde{\alpha}(A)$作为输出。相比之下，可观测量应返回一个数。为了得到一个可观测量，我们在微分形式上选取一个线性泛函，即一个 de Rham 流。具体而言，将闭子流形 $S \subset \mathbb{R}^3$ 视为一个 de Rham 流，它将一个微分形式 ω 发送到 $\int_S \omega$。

定义 4.5。 对于 $\alpha \in C^*(\mathfrak{g})$ 和 $S \subset \mathbb{R}^3$，令

$$\mathcal{O}_{S,\alpha} = \int_S \widetilde{\alpha},$$

对于任何包含 S 的开集 U，都是 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)$ 的一个元素。

我们称$\mathcal{O}_{S,\ \alpha}$ 一个可观测量 支撑于 S 且由 α下降而来。

注 13。 我们只详细说明了 $\alpha \in C^*(\mathfrak{g})$ 的情形，但更一般地，可以取 $\alpha \in \mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(D)$，得到一个元素 $\widetilde{\alpha} \in \Omega^*(\mathbb{R}^3,\ \mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(D))$，进而得到一个可观测量$\mathcal{O}_{S,\ \alpha}$。换言之，可以通过使用欧拉算子的公式，将支撑在某个圆盘中的可观测量沿一个有意义的子流形下降为一个可观测量。只要像 ι_{∂_i} 这样的运算已被显式提升到量子层级，这一过程对量子可观测量也同样适用。

现在让我们用这一构造来见证量子可观测量上的一个非平凡移位泊松括号。

该 $\mathcal{E}_3$ 算子在较大圆盘中的两个圆盘构型所产生的二元运算空间与 S^2 同伦。特别地，微分分次算子 $C_*(\mathcal{E}_3)$ 在次数 -2 上有一个非平凡的类，它对应于 S^2 的基本类。因此，泊松括号是通过沿着该 S^2 的一个代表元下降一个算子，并将其与 S^2 内的一个算子取乘积而得到的。

具体而言，我们按如下方式操作。固定两个小圆盘 $D \subset D'$ 和一个球面$S^2 \subset D' \setminus D$，使其绕着 D，但包含于 D' 中。固定一个与 D 不相交、但包含于 D' 中的开邻域$U \supset S^2$。给定两个可观测量 α，β，它们位于

[11]采用 [BBZB+]中的记号，我们有 $Q = \mathrm{d}$，即德拉姆微分， $P_\mu = \partial_\mu$，以及 $Q_\mu = \iota_{\partial_\mu}$。关于与 $\mathcal{E}_n$ 代数的系统比较，参见 [ES19] 中定理2.23的证明。

圆盘 D 中，我们可以将 α 下降到 S^2，然后使用因子化乘积，在圆盘 D'上得到一个可观测量：取复合

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Obs}(D)\otimes\mathrm{Obs}(D) & \to & \mathrm{Obs}(U)\otimes\mathrm{Obs}(D) & \to & \mathrm{Obs}(D') \\ \alpha\otimes\beta & \mapsto & \mathcal{O}_{S,\alpha}\otimes\beta & \mapsto & \mathcal{O}_{S,\alpha}\beta \end{array}.$$

在上同调层面，这个复合映射诱导出移位泊松括号：

$$\{[\alpha],[\beta]\}=[\mathcal{O}_{S,\alpha}\beta].$$

对于 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}$，它是平凡的（因为它确实是交换的），但我们将看到，对于 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}$，它并非平凡。

引理 *4.9* 的证明。 我们只针对阿贝尔陈–西蒙斯理论描述这一计算，因为非阿贝尔量子可观测量带有一个滤过，其 E_1 页是阿贝尔规范理论，其中以底层向量空间取代 $\mathfrak{g}$，并将其视为阿贝尔李代数。这些阿贝尔化的可观测量通过 [CG] 中的引理 10.3.3 得知一阶泊松括号。

让我们聚焦于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_a$ 这一情形，即一维李代数，它是阿贝尔的。设 x 表示一个生成元，因此 $\mathfrak{g}_a=\mathbb{C}x$，并考虑上循环 $\alpha=x^\vee$，它属于 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}_a)=\mathbb{C}[x^\vee]$。那么 $\widetilde{\alpha}$ 将任意场 $\omega\otimes x$ 映射为 ω。对于任意闭子流形 $S\subset\mathbb{R}^3$，我们有

$$\mathcal{O}_{S,\alpha}(\omega\otimes x)=\int_S\omega.$$

这个可观测量是场的线性泛函，并且是一个上循环，因为 S 没有边界。

我们注意到，α 也是量子微分的一个上循环，因为它是线性的，因此必定被 BV 拉普拉斯算子湮灭。

一个特别简单的情形是 $S=\{0\}$，即原点处的点。让我们计算 $\mathcal{O}_{\{0\},\,\alpha}$ 与自身的候选括号。为此，考虑圆盘

$$D=\{|v|<1/2\}\subset D'=\{|v|<1\},$$

球面

$$S=\{|v|=3/4\},$$

以及开邻域

$$U=\{5/8<|v|<7/8\}.$$

为了计算括号，我们希望确定 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(D')$ 中 $\mathcal{O}_{S,\,\alpha}\mathcal{O}_{\{0\},\,\alpha}$ 的上同调类。

注意，S 是闭圆盘$D=\{|v|\le 3/4\}$的边界，因此存在一个 3-流 $\mu=\int_D$，使得 $\mathrm{d}_{dR}\mu=\int_{S^0}$ 由此我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{\mathrm{q}}(\mathcal{O}_{\overline{D},\alpha}\mathcal{O}_{\{0\},\alpha})&=(\mathrm{d}_{dR}+\hbar\Delta)(\mathcal{O}_{\overline{D},\alpha}\mathcal{O}_{\{0\},\alpha})\\&=\mathcal{O}_{S,\alpha}\mathcal{O}_{\{0\},\alpha}+\hbar,\end{aligned}$$

其中并置的 $\mathcal{O}_{S,\alpha}\mathcal{O}_{\{0\},\alpha}$ 表示二次元（即经典乘积）。因此，$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(D')$ 中 $\mathcal{O}_{S,\alpha}\mathcal{O}_{\{0\},\,\alpha}$ 的上同调为 $\hbar$。特别地，它非零，因此我们得到一个非平凡括号。□

5. Interlude on the charged 1-dimensional free fermion

我们希望构造一种 Reshetikhin–Turaev 理论，使其 $\mathcal{E}_3$-代数为 $\mathcal{A}^\lambda$，而这正是我们刚刚利用陈–西蒙斯理论构造的。我们需要构造一个 $\mathcal{E}_1$-代数来标记缠结；也就是说，我们需要带框架的 $\mathcal{E}_{1\subset 3}$-代数的另一部分。作为第一步，本节将展示一种形式为 $\mathrm{End}_{\mathcal{A}^\lambda}(\mathcal{V})$ 的 $\mathcal{E}_1$-代数，其中 $\mathcal{V}$ 是某个完美模。我们的方法是构造一种一维场论，其因子化代数具有合适的形式。具体而言，我们研究一个生活在 $\mathfrak{g}$-表示中的费米子，也就是具有非平凡 $\mathfrak{g}$-荷的费米子。

本节的主要结果如下。它将引理 5.9、引理5.11和命题5.12 整合为一个单一陈述。

命题 5.1。 设 $\rho:\ \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$的有限维表示。取值于 V 的一维费米子具有一个 *BV* 量子化，其量子可观测量的因子化代数等价于由李代数上同调给出的超代数

$$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g},\mathrm{Cl}(V\oplus V^*))\cong \mathrm{C}^*(\mathfrak{g},\mathrm{End}(\mathbb{S}_\rho)),$$

其中， $\mathbb{S}_\rho$ 表示 $\mathrm{Sym}(\Pi V)$，作为 $\mathrm{Cl}(V\oplus V^*)$ 的旋量表示，而 $\mathfrak{g}$ 通过典范映射作用

$$\mathfrak{g}\to \mathfrak{so}(V\oplus V^*)\hookrightarrow \mathrm{Cl}(V\oplus V^*).$$

因此，它从其可观测量中产生了一个 $\mathcal{E}_{0\subset 1}$ 代数。

此外，圆上的整体截面具有一个由该 ρ带电费米子在圆上的配分函数给出的特殊元素，该配分函数明确编码了旋量丛上平坦 $\mathfrak{g}$联络的全纯。也就是说，配分函数是

$$\hbar^{-2\dim(V)}\mathrm{ch}_{\mathbb{S}_\rho}\in \mathrm{HH}^0(\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}))[\hbar^{\pm 1}],$$

它与旋量表示的特征标$\mathrm{ch}^{\mathbb{S}_\rho}$ 相差一个 $\hbar$ 的幂。

下面我们会详细介绍其中的各种要素（例如费米子和克利福德代数），但关键在于，我们有一个 1 维理论，其可观测量编码了一个完美 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$-模的自同态代数，即

$$\mathrm{End}_{\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})}(\mathrm{C}^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathbb{S}_\rho)),$$

这与上面的表达式等价。（我们说明一下，为方便起见，这里令 $\hbar=1$，但在下面的论述中会继续追踪它，因为它在 Reshetikhin–Turaev 理论中发挥着重要作用。）

5.0.1. 记号。 由于我们研究的是费米子，因此需要使用超向量空间、超上链复形等。若 V 是一个普通的有限维向量空间，令 ΠV 表示与之对应的纯奇向量空间。我们用 $\mathrm{Sym}(\Pi V)$ 表示由 ΠV生成的自由交换超代数。它看起来像外代数 ΛV，但我们将所有奇数次楔积都视为奇向量。（我们保留记号 ΛV，用于表示纯偶的结合超代数。）

给定配有双线性形式 B 的向量空间 W，我们用 $\mathrm{Cl}(W,\ B)$ 表示视为超代数的克利福德代数。也就是说，$\mathrm{Cl}(W,\ B)$ 是 $\mathrm{Sym}(\Pi W)$ 的一种变形，使得

$$ww'+w'w=B(w,w')$$

对于任意 w， $w' \in \Pi W$。我们用 Cl($V \oplus V^*$) 表示 $W = V \oplus V^*$ 配备求值配对 B 的情形。

在 Cl(W， B) 上存在一个自然滤过，它提升了 Sym(ΠW) 上的滤过。（注意，分次并未提升。）令 Rees(Cl(W， B)) 表示关于此滤过的 Rees代数，它是多项式 $\mathbb{C}[\hbar]$ 上的一个代数。令 $\mathrm{Cl}_\hbar(W$， $B)$ 表示通过求逆 $\hbar$ 得到的局部化，它是 Laurent 多项式 $\mathbb{C}[\hbar, \hbar^{-1}]$ 上的一个代数。

5.1. **一维自由费米子**。本节讨论一个与规范理论解耦的费米子。其作用是在最简单的相关情形下，发展用于证明命题5.1的方法。

5.1.1. 理论及其可观测量。设 V 是一个维数为 d 的有限维向量空间。设 L 是一个无边界的一维流形。现在我们引入所关注的费米子理论。

定义 5.1。与 V 相关联的自由费米子在 L 上具有场

$$\psi \in C^\infty(L) \otimes \Pi V \quad \text{and} \quad \overline{\psi} \in C^\infty(L) \otimes \Pi V^*$$

和作用泛函

$$S_{\mathrm{ff}}(\psi, \overline{\psi}) = \int_L (\overline{\psi}, \mathrm{d}\psi)$$

其中 (–， –) 表示 ΠV 与 ΠV^* 之间的求值配对。因此，运动方程为 $\mathrm{d}\psi = 0 = \mathrm{d}\overline{\psi}$。

这种描述是通常的描述，但我们将始终在巴塔利—维尔科维斯基形式体系中工作，从此处起，我们将反场（即取值于 $\Pi V \oplus \Pi V^*$ 的 L 上的 1-形式）纳入理论数据。

该理论是自由理论， [CG17] 中的方法可直接应用，从而得到以下结果。（这里所说的方法，是指 BV 量子化的移位海森堡构造，并结合相关论证；这些论证表明，一维自由标量场的因子化代数可恢复魏尔代数，特别是 [CG17]的第 4.3 节。）

引理 5.2。 对于 $L = \mathbb{R}$，经典可观测量的因子化代数与和超代数 $\mathrm{Sym}\,\Pi(V \oplus V^*)$相关联的因子化代数弱等价。量子可观测量的因子化代数 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}{}_{\mathrm{ff}}$ 与和超代数 $\mathrm{Cl}_\hbar(V \oplus V^*)$相关联的因子化代数弱等价。

证明。 这一论断可通过以下事实看出：Clifford代数的Rees代数是超李代数 $Heis(\Pi(V \oplus V^*)$ 的包络代数；该超李代数是通过求值配对对 $\Pi(V \oplus V^*)$ 作中心扩张得到的。随后，我们可以应用相关结果，从因子化代数构造中恢复这类包络代数。具体而言，量子可观测量 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}{}_{\mathrm{ff}}$ 等价于微分分次李代数层 $\Omega^*_{\mathbb{R}} \otimes \Pi(V \oplus V^*)$ 的扭曲包络因子化代数，其中扭曲由李代数上循环决定

$$(\omega \otimes w, \omega' \otimes w') \mapsto \int_{\mathbb{R}} \omega \wedge \omega'(w, w'),$$

其中 $w, w' \in \Pi(V \oplus V^*)$，括号表示求值配对。现在应用 [CG17] 中的命题 3.4.1。（关于这一视角的详细讨论，参见 [CG17] 的第 4.2 节和第 4.3 节。）□

这一同一性在 $L = S^1$时有重要后果。当 $\mathbb{R}$ 上的因子化代数是局部常值的，因而可识别为一个 E_1 代数时，圆上的因子化同调可识别为该代数的霍赫希尔德链。因此，存在一个自然但抽象的等价

$$\mathrm{H}^*\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}}(S^1) \cong \mathrm{HH}_*(\mathrm{Cl}_\hbar(V \oplus V^*)).$$

然而，由于我们的构造具有显式性，在为 S^1选择黎曼度量后，我们可以给出一个显式映射。

5.1.2. 圆上的全局可观测量。 本小节的目标是证明以下结论。

引理 5.3。 在 S^1 上选择黎曼度量 g，即可确定一个自然的拟同构

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}}(S^1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hoch}_*(\mathrm{Cl}_\hbar(V \oplus V^*)))$$

使得对于任意一条连接两个度量的路径，我们都有一个显式的上链同伦。

借助文献可以给出一个非常简短的证明，但我们将详细描述关键步骤，因为在构造主要结果时也会用到相同的技巧。

证明。 令 g 表示 S^1上的一个黎曼度量，并令 $\triangle$ 表示相应的拉普拉斯算子。根据谱理论，我们得到分解 $C^\infty(S^1) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$ 为调和场（即满足 $\triangle f = 0$的 f）与一个连续补空间；在该补空间上，$\triangle$ 是一个同构。令 $\triangle^{-1} : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$ 表示将 $\triangle|_{\mathcal{H}^\perp}$的逆延拓到所有光滑函数上的算子。于是，我们为德拉姆复形得到一个格林函数，其形式为

$$G = \mathrm{d}^*\triangle^{-1} : \Omega^1(S^1) \to \Omega^0(S^1).$$

注意，当我们改变底层度量时，该算子也会连续变化。

霍奇理论中的上链同伦等价在此发挥了关键作用：

$$\mathbb{C}[\epsilon] \underset{\iota}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} \Omega^*(S^1) \circlearrowright G$$

这里，$\mathbb{C}[\epsilon]$ 应理解为 S^1的德拉姆上同调，其中 ϵ 是度量体积形式。该等价使我们能够将对所有场上的构造转移为对小得多的 $(\Pi V \oplus \Pi V^*)[\epsilon]$上的构造。

例如，我们将这些工具应用于经典可观测量（即模$\hbar$运算），这类情况更简单。在这种情况下，

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{ff}}(S^1) = \mathrm{Sym}(\Omega^*(S^1) \otimes \Pi(V \oplus V^*)[1])$$

因此，微分保持对称幂不变，因为它只是外微分的对称化。霍奇理论中的上链同伦等价可扩展为一个上链同伦等价

$$\mathrm{Sym}(\Pi(V\oplus V^*)[\epsilon][1]) \underset{\iota^{\mathrm{cl}}}{\overset{\pi^{\mathrm{cl}}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{ff}}(S^1) \circlearrowright G^{\mathrm{cl}} \tag{5}$$

其中，我们在 π、ι 和 G 上添加上标 cl，以表示诱导映射。我们可以后接 Hochschild–Kostant–Rosenberg 映射，从而得到一个拟同构

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{ff}}(S^1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hoch}_*(\mathrm{Sym}(\Pi(V\oplus V^*)). \tag{6}$$

量子情形是对这一经典情形的变形。

确实，对 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}$ 进行量子化，就是将 BV 拉普拉斯算子加入微分中。（关于这些问题的详细讨论——包括对这一情形下维克引理的诠释——请参见 [Gwi12]的第 2 章。）在这一情形下，我们可以应用同调扰动引理来变形（5）：

$$(\mathrm{Sym}(\Pi(V\oplus V^*)[\epsilon][1])[[\hbar]], \mathrm{d}^{\mathrm{q}}) \underset{\iota^{\mathrm{q}}}{\overset{\pi^{\mathrm{q}}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}}(S^1) \circlearrowright G^{\mathrm{q}} \tag{7}$$

用更方便的术语重新表述这一变形收缩的两侧会很有帮助。

任意自由 BV 理论的可观测量，都可以看作由线性可观测量构造的移位海森堡李代数的链，正如引理5.2的证明中所讨论的那样。在我们的情形下，有

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}}(S^1) = \mathrm{C}^{\mathrm{Lie}}_*(\Omega^*(S^1)\otimes \Pi(V\oplus V^*)\ltimes \mathbb{C}\hbar[-1])[\hbar^{-1}],$$

其中，可观测量上的移位配对确定了一个李括号 $[\alpha,\beta]=\hbar\langle\alpha,\ \beta\rangle$.由于圆是形式的（就有理同伦论而言），我们得到微分分次李代数的一个等价

$$\Omega^*(S^1)\otimes \Pi(V\oplus V^*)\ltimes \mathbb{C}\hbar[-1] \simeq (\Pi V\oplus \Pi V^*)[\epsilon]\ltimes \mathbb{C}\hbar[-1].$$

因此，我们有一个自然的拟同构

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}}(S^1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{C}^{\mathrm{Lie}}_*((\Pi V\oplus \Pi V^*)[\epsilon]\ltimes \mathbb{C}\hbar[-1]). \tag{8}$$

右侧显然是（6）的一个变形。

现在，对于变形量子化，HKR 映射也有一个自然的变形。特别地，HKR 映射变形为一个拟同构

$$\mathrm{C}^{\mathrm{Lie}}_*((\Pi V\oplus \Pi V^*)[\epsilon]\ltimes \mathbb{C}\hbar[-1])[\hbar^{-1}] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hoch}_*(\mathrm{Cl}_\hbar(V\oplus V^*))).$$

与映射（7）复合，即得所述结论。 □

5.1.3. *BV* 框架中的 *Berezin* 积分。 式（7）右边的写法或许不够直观，但它恰好就是通常的 BV 复形，用来编码有限维费米子积分，下面我们将对此加以说明。稍后，这种明确的识别将有助于我们从费曼图的角度辨认特征公式。

取 ΠV 的一组基 $\{x_1, \dots, x_d\}$，并令 $\{x_i\}$ 表示 ΠV^* 的对偶基。记 $x_i\epsilon$ 为 ξ_i，记 $x_i\epsilon$ 为 $\overline{\xi}_i$。那么，其底层分次代数为

$$\mathrm{C}_*^{\mathrm{Lie}}((\Pi V \oplus \Pi V^*)[\epsilon] \ltimes \mathbb{C}\hbar[-1]) \cong \mathbb{C}[x_i, \overline{x}_i, \xi_i, \overline{\xi}_i, \hbar]$$

由于取 Chevalley 链时进行了移位，我们将 x_i 和 $\overline{x}_i$ 视为次数为 -1、具有奇宇称，而 ξ_i 和 $\overline{\xi}_i$ 的次数为 0、具有奇宇称。在这种表示下，微分来自移位海森堡李代数上的括号，在这些生成元上的形式为

$$\hbar\Delta = \hbar \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}\frac{\partial}{\partial \overline{\xi}_i}.$$

在这种形式下，这个复形显然就是有限维费米子积分的 BV 复形。其上同调集中在次数 0，并由“顶层费米子” $\xi_1 \cdots \xi_d \xi_1 \cdots \xi_d$ 张成。特别地，将 $\hbar$ 求逆（或将其设为 1）之后，我们发现存在一个自然的拟同构

$$\begin{array}{rccc} \int_{\mathrm{Ber}}: & \mathbb{C}[x_i, \overline{x}_i, \xi_i, \overline{\xi}_i, \hbar^{\pm 1}] & \to & \mathbb{C}[\hbar^{\pm 1}] \\ & \hbar^k \prod_i x_i^{m_i} \overline{x}_i^{\overline{m}_i} \prod_i \xi^{n_i} \overline{\xi}_i^{\overline{n}_i} & \mapsto & \begin{cases} \hbar^k, & \forall i,\, m_i = 0 = \overline{m}_i, n_i = 1 = \overline{n}_i \\ 0, & \text{else} \end{cases} \end{array}$$

也就是说，这个拟同构恰好就是贝列津积分。

因此，我们得到一个复合拟同构

$$\mathrm{Obs}_{\mathrm{ff}}^{\mathrm{q}}(S^1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{C}_*^{\mathrm{Lie}}((\Pi V \oplus \Pi V^*)[\epsilon] \ltimes \mathbb{C}\hbar[-1]) \xrightarrow{\int_{\mathrm{Ber}}} \mathbb{C}[\hbar^{\pm 1}]$$

它计算了圆上的自由费米子可观测量的期望值。现在我们转而从算子代数及其迹的角度来解释这个映射。

5.1.4. 克利福德代数的霍赫希尔德同调。 这个版本的 Berezin 积分与量子可观测量的霍赫希尔德同调描述十分契合。这种联系通过一些标准代数建立。

引理 5.4. 克利福德代数 $\mathrm{Cl}(V \oplus V^*)$ 同构于超矩阵代数 $\mathrm{End}(\mathrm{Sym}(\Pi V))$，因此它是 *Morita* 平凡的。

这个同构还有一个常见的名称。回顾一下，存在一个李代数的典范嵌入 $\mathfrak{so}(V \oplus V^*) \hookrightarrow \mathrm{Cl}(V \oplus V^*)$。（其像是分量 $\Lambda^2(V \oplus V^*)$。）因此，这个同构将 $\mathrm{Sym}(\Pi V)$ 识别为 $\mathfrak{so}(V \oplus V^*)$ 的一个表示：它就是旋量 表示 $\mathbb{S}_V$。

鉴于第 2节，我们看到，该引理意味着旋量表示 $\mathbb{S}_V$是 $\mathbb{Z}/2$-分次向量空间中的一个完美模，并且它在带边界的定向一维流形上确定了一个因子化代数：将 $\mathbb{S}_V$ 赋给正向定向点，将其对偶 $\mathbb{S}_V^*$ 赋给负向定向点，并将克利福德代数 $\mathrm{Cl}(V \oplus V^*)$赋给开区间。

注 14。 我们已经看到，可以利用 BV 形式体系在 $\mathbb{R}$ 上构造克利福德代数，将其视为一个因子化代数。也可以通过类似的方法实现旋量表示（即，将旋量作为自由费米子的边界条件进行处理），但由于本文不需要这样一个显式的因子化模型，因此我们不在此展开。

证明。 当 $V \cong \mathbb{C}$ 时，存在一个超代数同构 $\mathrm{Cl}(V \oplus V^*) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1})$，它可通过将 $\mathbb{C}^{1|1}$ 识别为 $\mathrm{Sym}(\Pi V)$ 来实现；后者是克利福德代数的自然福克模，亦即 $\mathfrak{so}(V \oplus V^*)$ 的旋量表示。稍后我们将明确写出这个同构。现在注意，一维情形决定了一般情形：若 $V \cong \mathbb{C}^d$，则

$$\mathrm{Cl}(V \oplus V^*) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^{1|1})^{\otimes d} \cong \mathrm{End}(\mathrm{Sym}(\Pi V)).$$

因此，我们给出了实现与 $\mathbb{C}$ 的 Morita 等价的模。

为求完整起见，我们详细说明一维情形。设 x 是 ΠV 的一个基元素，于是 $\mathrm{Sym}(\Pi V) = \mathbb{C}[x]$，因为 $x^2 = 0$。那么 $\mathrm{Cl}(V \oplus V^*)$ 的基为 $\{1, x, \overline{x}, x\overline{x}\}$；乘法满足 $x \cdot x = 0 = \overline{x} \cdot \overline{x}$ 和 $x \cdot \overline{x} + \overline{x} \cdot x = 1$。我们可以将 $\mathrm{Sym}(\Pi V)$ 看作商模 $\mathrm{Cl}(V \oplus V^*)/(x)$。令 p 表示克利福德代数在此模上的作用。因此，将其写成矩阵可得

$$p(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(x\overline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(\overline{x}x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此我们看到， p 是一个同构。 □

Morita 平凡代数的霍赫希尔德同调总是平凡的，因为实现该平凡化的双模明确地给出了两个霍赫希尔德链之间的拟同构。在 $\mathbb{Z}/2$分次模的设定下，这类标准结果同样成立。（参见 Bass [BR67] 和 Kassel [Kas86] 的精彩论述。）通过旋量表示 $\mathbb{S}_V$实现的莫里田平凡化 $\mathbb{S}_V$意味着，霍赫希尔德同调由对 $\mathbb{S}_V$取迹张成，而这与 Berezin 积分一致。顺便一提，我们用公式阐明这一断言。

推论5.5。 零次霍赫希尔德同调 $\mathrm{HH}_0(\mathrm{Cl}(V \oplus V^*))$ 是一维的，并由任意元素 $x_1 \cdots x_d \overline{x_1} \cdots \overline{x_d}$ 张成，其中 $\{x_i\}$ 是 ΠV 的一组基，而 $\{\overline{x_i}\}$ 是 ΠV^* 的一组基。

证明。 考虑 $V = \mathbb{C}$，一般情形由此得出。然后 $1 = [x, x]$，其中使用了记录符号的交换子。（更传统地，人们可能会用 $\{x, x\}$表示 $xx + xx$。）因此恒等式 $\overline{1}$ 在霍赫希尔德复形中是正合的。类似地，$\overline{x} = [xx, x]$ 与 $x = [x\overline{x}, x]$。然而， $x\overline{x}$ 不是交换子，因此它张成第零阶霍赫希尔德同调。□

根据引理 5.4中的同构，我们可以将矩阵上的超迹视为霍赫希尔德同调上的线性泛函。例如，在 $\dim(V) = 1$的情形下，注意矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

对应于元素

$$\alpha = a\bar{x}x + b\bar{x} + cx + dx\bar{x}.$$

因此，超迹为 $a-d$，而 α 沿 xx 的分量为 $d-a$，因为

$$a\bar{x}x = a(1 - x\bar{x}).$$

如果我们改用“顶层费米子”分量 xx ，就会与超迹完全一致。

换言之，计算 Cl($V \oplus V^*$) 中一个元素的泛迹，相当于取其“顶层费米子”的系数，就像 Berezin 积分一样。因此，在将 $\hbar$ 求逆后，这条引理与我们的主引理结合，便得到一个典范映射

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}}(S^1)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[\hbar, \hbar^{-1}].$$

通过我们刚才解释的与 BV 复形之间的关系，这个映射恰好就是自由费米子通常的费米子 Wick 展开。

5.1.5. 体-边界自由费米子。迄今为止，我们考察的都是无边界流形上的自由费米子，因此也没有边界条件。我们已经说明，其 BV 量子化如何编码克利福德代数及其霍赫希尔德同调。在带边界的一维流形上构造自由费米子并施加如下边界条件，是直接可行的

$$\psi|_{\partial L} = 0.$$

更一般地，对于每个边界点 $x \in \partial L$，固定一个拉格朗日子空间

$$W_x \subset \Pi(V \oplus V^*)$$

并将场空间取为

$$\{\Psi = (\psi, \overline{\psi}) \,:\, \Psi|_x \in W_x\}.$$

那么 [GRW22]展示了一种 BV 量子化，该量子化在 L 上产生了一个可构造的可观测量分解代数，使得

- 在内部 $L \setminus \partial L$上，可观测量与前面小节中的 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}} \simeq$ Cl($V \oplus V^*$) 一致，并且
- 在包含边界点 $x \in \partial L$的任意小开集 U_x 上，可观测量恢复为克利福德代数的福克模 Sym($\Pi(V \oplus V^*)/W_x$)，该模与旋量表示同构。

这一结果是 [GRW22]中的命题 5.1。该表述针对的是一个辛向量空间，但它原样 适用于奇辛向量空间。

简而言之，我们有如下结论。

引理 5.6。 对于有限维向量空间 V，取值于 $\Pi(V \oplus V^*)$ 的自由费米子的量子可观测量，在拉格朗日边界条件 $\{W_x\}$下构成一个 $\mathcal{E}_{0\subset 1}$ 代数，该代数等价于作用在旋量表示 $\mathbb{S}_V$上的克利福德代数 $\mathrm{Cl}(V \oplus V^*)$ 。

5.2. **带电费米子**。 设 $\mathfrak{g}$ 为有限维李代数，且$\rho\colon\ \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$是 $\mathfrak{g}$ 在有限维向量空间 V上的一个表示。（我们通常只讨论 V，并省略对 ρ的显式依赖。）存在 $\mathfrak{g}$ 在 V^*上的一个对偶作用。因此，我们得到 $\mathfrak{g}$ 在与 V相关联的自由费米子上的作用。进一步地，我们可以将 $\Omega^*(L)\otimes\mathfrak{g}$ 的元素视为作用于费米子场的“背景场”。

定义 5.2. 与有限维表示 $\rho\colon\ \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$ 相关联的、无边界一维流形 L 上的带电费米子 具有场

$$\psi\in\Omega^*(L)\otimes\Pi V,\ \overline{\psi}\in\Omega^*(L)\otimes\Pi V^*,\quad \text{and}\quad A\in\Omega^*(L)\otimes\mathfrak{g}[1]$$

以及作用泛函

$$S_{\mathrm{cf}}(\psi,\overline{\psi},A)=\int_L(\overline{\psi},(\mathrm{d}+\rho(A))\psi)$$

其中 $(-,-)$ 表示 ΠV 与 ΠV^* 之间的求值配对。因此运动方程为

$$(\mathrm{d}+\rho(A))\psi=0=(\mathrm{d}+\rho^*(A))\overline{\psi}.$$

也就是说，一个解是联络 $\mathrm{d}+\rho(A)$ 的水平截面，以及对偶联络的水平截面。

注意

$$S_{\mathrm{cf}}(\psi,\overline{\psi},A)=S_{\mathrm{ff}}(\psi,\overline{\psi})+I_0(\psi,\overline{\psi},A),$$

其中我们称

$$I_0(\psi,\overline{\psi},A)=\int_L(\overline{\psi},\rho(A)\psi),$$

该相互作用项。

5.2.1.带电自由费米子的量子化。现在我们将对费米子场进行量子化，同时将联络 1-形式场保持为经典场。该带电理论是一维的，因此可以直接构造 BV 量子化，因为无需担心发散之类的解析问题。其底层自由理论就是前面讨论过的自由费米子理论。我们在流形 L 上选取一个黎曼度量，它决定了作用于费米子场的规范固定算子 d^* 。当$L=\mathbb{R}$时，传播子由 Heaviside阶跃函数给出：

$$P^f(t,t')=\Theta(t-t')=\begin{cases}1, & t>t'\\ -1, & t<t'\end{cases}.$$

当 $L=S^1=[0,1]/(0\sim 1)$ 时，传播子为

$$P^f(t,t')=\begin{cases}t-t'+\frac{1}{2}, & t<t'\\ t-t'-\frac{1}{2}, & t>t'\end{cases}.$$

这些数据决定了任意费曼图中各边所赋予的权重。

顶点由相互作用项 I_0 确定。它总体上是三次函数，但关于费米子场只有二次，而费米子场正是我们要量子化的场。因此，由这种相互作用产生的连通图只有树（其第一贝蒂数 b_1 为零）和轮图（其第一贝蒂数 b_1 为一）。（轮图指只有一个环——即轮图本身——但可以有边从该环上伸出的图。）

注 15。对树求和对应于沿着由传播子给出的链同伦等价传递 L_∞ 结构（本质上是通过霍奇理论）。

引理 5.7. 带电费米子在一圈量子化，其量子化相互作用为$I^{\mathrm{q}} = I_{\mathrm{tree}} + \hbar I_{\mathrm{wheel}}$ 其中

$$I_{\mathrm{tree}}(\psi, \overline{\psi}, A) = \sum_{\{\gamma\,:\, b_0=1, b_1=0\}} w_\gamma(P^f, I_0),$$

它关于费米子是二次的，而关于 A场的多项式次数任意，并且

$$I_{\mathrm{wheel}}(\psi, \overline{\psi}, A) = \sum_{\{\gamma\,:\, b_0=b_1=1\}} w_\gamma(P^f, I_0),$$

它仅是 A场的函数。

证明。 如前所述，正则化不存在问题，因此 I_{wheel} 的表达式是良定义的。由于它仅是 A的函数，因此必被 Δ湮灭；后者仅在费米子场的函数上才非平凡。同样，$\{I_{\mathrm{wheel}}, -\} = 0$ 作为括号，也只与费米子场的函数配对。由于 I_0 是费米子的二次函数，元素 ΔI_0 也仅是 A 场的函数，因为费米子项都已收缩掉。（这一观察也适用于 I_0经树级重整化群流得到的尺度 L 版本。）因此，正则化后的作用量满足量子主方程，因为表达式

$$QI_0 + \{I_0, I_0\} + \hbar\{I_0, I_{\mathrm{wheel}}\} + \hbar\Delta I_0 + \hbar\Delta I_{\mathrm{wheel}} = \hbar\Delta I_0,$$

它只是关于 A 场的函数，因此只取决于背景场。特别地，$\{\Delta I_0, -\} = 0$，因此 $Q + \{I_0, -\} + \hbar\{I_{\mathrm{wheel}}, -\} + \hbar\Delta$确定了一个微分。□

引理 5.7 中的这些表达式在 $L = S^1$ 并将其限制到调和场，即 ψ 以及 $\overline{\psi}$ 为常数且 A为如下形式的场 $X\mathrm{d}t$，其中 $X \in \mathfrak{g}$ 时，会变得更有意义。换句话说，它们成为有限维向量空间 $\mathfrak{g}$、 V和 V^*上的函数。

引理 5.8。 设 $\psi = v \in V$、 $\overline{\psi} = \overline{v} \in V^*$和 $A = X\mathrm{d}t$ 是 S^1上的调和场。在这些场上取值时，量子化相互作用具有如下形式

$$I_{\mathrm{tree}}(v, \overline{v}, X\mathrm{d}t) = I_0(\psi, \overline{\psi}, X\mathrm{d}t) = \langle \overline{v}, \rho(X)v\rangle \int_{S^1} \mathrm{d}t$$

and

$$I_{\mathrm{wheel}}(X\mathrm{d}t) = -\log\det\left(e^{-\rho(X)/2}\mathrm{Td}(\rho(X))\right),$$

其中$\mathrm{Td}(t) = t/(1 - e^{-t})$。这里det 表示 V上某个自同态的行列式。

在命题 5.12 中，我们将说明这一单圈项如何对应于 $\mathfrak{g}$的某个表示的特征标。

证明。树项是直接的。对于任意常费米子场 $\psi = b$，常 1-形式 $X\mathrm{d}t$ 的作用给出另一个常费米子场 $\rho(X)v$。但传播子在常场上为零，因此对于任何具有内部边的树，其

在调和场上的值为零。因此唯一的贡献来自三价顶点本身，由 I_0 给出。

剩下的工作是计算圆上的单圈项，这很直接。（这里的计算是 [GG14],中计算的费子类比，因此有兴趣的读者可参阅该文，了解更详尽的论述。）首先注意，具有 k 条腿的轮图，其李论因子为

$$\frac{1}{k}\mathrm{tr}(\rho(X)^k),$$

其中 $X \in \mathfrak{g}$。其次，解析因子为

$$-\frac{2}{(2\pi)^k}\zeta(k),$$

其中 ζ 表示黎曼ζ函数。（参见 [GG14]中的引理 8.4。额外的负号是费米子场构成的环所带来的通常负号。）因此，对所有轮图求和可得

$$I_{\mathrm{wheel}}(X\mathrm{d}t) = -\sum_{k\geq 1}\frac{2(2k-1)!}{(2\pi)^k}\zeta(2k)\mathrm{tr}(\rho(X)^{2k}) = -\log\det\left(e^{-\rho(X)/2}\mathrm{Td}(\rho(X))\right),$$

其中 $\mathrm{Td}(t) = t/(1-e^{-t})$。（关于这些幂级数运算的讨论，参见 [GG14]中定理 8.6 的证明及其相关讨论。）□

5.2.2. 带电费米子的可观测量。 我们得到如下结果，它是自由费米子可观测量的带电类比。

引理 5.9。 对于 $L = \mathbb{R}$，经典可观测量的因子化代数与关联于超代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}\,\Pi(V\oplus V^*))$的因子化代数弱等价。量子可观测量的因子化代数 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}{}_{\mathrm{cf}}$ 与关联于超代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g},\mathrm{Cl}_\hbar(V\oplus V^*))$的因子化代数弱等价。

特别地，零次上同调是 $\mathfrak{g}$-不变子代数：

(1) 经典可观测量 $\mathrm{H}^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}})$ 对应于超代数 $(\mathrm{Sym}\,\Pi(V\oplus V^*))^{\mathfrak{g}}$；(2) 量子可观测量 $\mathrm{H}^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}})$ 对应于超代数 $\mathrm{Cl}_\hbar(V\oplus V^*)^{\mathfrak{g}}$。

证明。 这两个因子化代数都是局部常值的，因此确定 $\mathcal{E}_1$-代数。根据庞加莱引理，经典可观测量等价于 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}\,\Pi(V\oplus V^*))$。量子可观测量的断言则可理解为取海森堡李代数的包络因子化代数，但底环为 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$，如 [CG17] 的第 4.3 节所述。□

引理5.4有一个自然的推广。

定义 5.3。 对于 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ 的有限维表示，令 $\mathbb{S}_\rho$ 表示 $\mathrm{Cl}(V\oplus V^*)$ 的旋量表示 $\mathbb{S}_V = \mathrm{Sym}(\Pi V)$，其配备了由典范嵌入诱导的 $\mathfrak{g}$ 作用

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho\times\rho^*} \mathfrak{so}(V\oplus V^*) \hookrightarrow \mathrm{Cl}(V\oplus V^*)$$

李代数的。我们称 $\mathbb{S}_\rho$ 为 ρ-带电旋量。

通过直接的代数验证可知，引理 5.4 中的论证同样适用，从而得到以下结论。

引理 5.10. 在 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$-模中，克利福德代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Cl}(V \oplus V^*))$ 同构于超矩阵代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{End}(\mathbb{S}_V))$，因此它是 *Morita* 平凡的。

因此，我们得到了对圆上的全局可观测量的一种有用描述。同样，Morita 平凡性提供了霍赫希尔德链的典范识别。

引理 5.11. 存在一个自然同构

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{cf}}(S^1)) \cong \mathrm{HH}_*(\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Cl}_\hbar(V \oplus V^*))) \cong \mathrm{HH}_*(\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}))[\hbar^{\pm 1}]$$

除去对 S^1 上黎曼度量的选择。由于 $\mathrm{HH}_0((\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}))\cong \widehat{\ \ }\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$，可观测量中的每个零次上循环都确定一个取值于 $\hbar$ 上 *Laurent* 多项式的类函数。

证明。 第一个同构是关于圆上的局部常值因子化代数的一般事实，并结合前一个引理即可得到。第二个同构可通过直接计算得到：微分分次代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g},\mathrm{Cl}_\hbar(V \oplus V^*))$ 出于与克利福德代数相同的原因，是 Morita 平凡的。（事实上，它只是在适当的 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$- 模范畴中的一个克利福德代数。）

不过，借助引理 5.8，我们可以给出更明确的描述。考虑平凡带电费米子，其中 $\rho = 0$。于是，全局可观测量是以下张量积

$$\mathrm{C}^*(\Omega^*(S^1) \otimes \mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}}(S^1).$$

（更准确地说，我们应当使用完备射影张量积，但在这个德拉姆情形中，此问题不会影响上同调。）量子化相互作用确定了带电费米子的量子化可观测量（使用 ρ）与平凡带电费米子的量子化可观测量之间的一个同构：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{cf}}(S^1) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{C}^*(\Omega^*(S^1) \otimes \mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{ff}}(S^1) \\ f & \mapsto & e^{I^{\mathrm{q}}/\hbar} f \end{array}$$

乍看之下，该指数项似乎可能会带来问题，因为它可能产生无穷多个 $\hbar^{-1}$ 的幂；但事实并非如此，因为我们处理的是费米子。由于反对称性，这个指数是一个多项式（我们将在下文的命题中明确计算）。另请注意，当 $\mathfrak{g}$ 是半单的时，$\Delta I_0 = 0$，因为在 $\mathfrak{g}$ 上不存在非零的不变线性函数。

我们先前证明，$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}{}_{\mathrm{ff}}(S^1)$ 存在一个自然的拟同构映射到 $\mathbb{C}[\hbar, \hbar^{-1}]$，因此我们可以将该映射与乘以指数化相互作用的映射复合，从而得到一个拟同构

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}_{\mathrm{cf}}(S^1) \to \mathrm{C}^*(\Omega^*(S^1) \otimes \mathfrak{g}).$$

这诱导出所需的上同调同构。 □

与自由费米子的情形类似，我们可以明确描述这个拟同构，并将得到与表示 V 的特征标之间一个优美的关系。

5.2.3. 作为配分函数的特征。我们汇总论证和构造，得到如下结果。

命题 5.12。 设 $\mathfrak{g}$是一个半单李代数，且 V 是一个有限维$\mathfrak{g}$-表示。在引理 *5.11* 给出的拟同构下， $1 \in \mathrm{H}^0\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}{}_{\mathrm{cf}}(S^1)$ 的像是类函数

$$\hbar^{-2\dim(V)}\mathrm{ch}_{\mathbb{S}_\rho}(X) \in \widehat{\mathrm{Sym}}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}[\hbar^{\pm 1}],$$

它除去 $\hbar$的某个幂因子后，等于 $\mathfrak{g}$的旋量表示 $\mathbb{S}_\rho$ 的特征标。

这个结果表明，带电费米子编码了克利福德代数 $\mathsf{Cl}(V \oplus V^*)$ 的福克模$\mathbb{S}_\rho$ 作为 $\mathfrak{g}$-表示时的特征标。这是旋量所给出的莫里田平凡化的纯代数推论。

然而，费曼图计算与之吻合，这一点颇为令人信服，下面我们将加以证明。我们将利用带电费米子与平凡带电费米子之间的对应关系，给出显式同构。（参见引理 5.11的证明。）

我们知道

$$\exp(I^{\mathrm{q}}/\hbar) = \exp(I_{\mathrm{tree}}/\hbar)\exp(I_{\mathrm{wheel}}),$$

但轮因子仅取决于 $X\mathrm{d}t$。因此，由于我们将对整个项取贝列津积分，我们需要确定树因子的“顶层费米子”分量。

根据引理 5.8,

$$\exp(I_{\mathrm{tree}}(v, \overline{v}, X\mathrm{d}t)/\hbar) = \exp\left(\frac{1}{\hbar}\langle \overline{v}, \rho(X)v\rangle\right),$$

其“顶层费米子”分量为 $\hbar^{-2\,\text{维数}V}\det(\rho(X))$。我们还知道

$$\exp(I_{\mathrm{wheel}}(X\mathrm{d}t)) = \frac{1}{\det\left(e^{-\rho(X)/2}\mathrm{Td}(\rho(X))\right)} = \frac{\det\left(e^{\rho(X)/2} - e^{-\rho(X)/2}\right)}{\det(\rho(X))}.$$

因此,

$$\exp(I^{\mathrm{q}}/\hbar) = \hbar^{-2\dim V}\det\left(e^{\rho(X)/2} - e^{-\rho(X)/2}\right),$$

因为 $\det\rho(X)$ 的因子相互抵消。

这里用到了半单性的假设：不存在非零的 $\mathfrak{g}$不变线性函数，因此

$$\det(e^{-\rho(X)/2}) = e^{-\mathrm{tr}\rho(X)/2}$$

是常值函数 1。因此，1 的像恰好是 $\hbar^{-2\,\text{维数}V}\det(1-e^{-\rho(X)})$。

为将此函数识别为特征标，我们使用 V 关于 ρ作用的权空间分解:

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_\rho} \mathbb{C}\lambda.$$

作为极大环面上的函数，我们看到 $\mathrm{Sym}(\Pi\rho)$ 的特征标为

$$\prod_{\lambda\in\Lambda_\rho}(1 - e^{\lambda}).$$

（注意，负号的出现是因为 ΠV 具有奇宇称。）然而，表示 $\mathbb{S}_\rho$并非$\mathrm{Sym}(\Pi\rho)$；它是$\mathrm{Sym}(\Pi\rho)$与一个

一维表示的张量积，由“真空向量”（即分量$\mathrm{Sym}^0(\Pi\rho)$）确定，环面在其上的作用为 $\prod_{\lambda\in\Lambda_\rho} e^{\lambda/2}$。

$\mathbb{S}_\rho$ 的特征标因此为

$$\prod_{\lambda\in\Lambda_\rho} e^{\lambda/2}\cdot\prod_{\lambda\in\Lambda_\rho}(1-e^{\lambda})=\prod_{\lambda\in\Lambda_\rho}(e^{\lambda/2}-e^{-\lambda}/2).$$

限制到极大环面上时，我们看到

$$\det(e^{\rho(X)/2}-e^{-\rho(X)/2})=\prod_{\lambda\in\Lambda_\rho}(e^{\lambda/2}-e^{-\lambda}/2).$$

特征标公式与配分函数完全一致，因此我们得到了所需结论。

5.2.4. 关于体-边界带电费米子的评注。 上文我们证明，带电自由费米子的可观测量等价于微分分次结合代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g},\ \mathrm{Cl}_\hbar(V\oplus V^*))$，因此继承了作为模的 ρ-带电旋量。换言之，我们可以将 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}{}_{\mathrm{cf}}$ 扩张为一个 $\mathcal{E}_{0\subset 1}$ 代数。

可以通过对满足边界条件的带电费米子进行 BV 量子化，直接构造这个 $\mathcal{E}_{0\subset 1}$ 代数，方法与第 5.1.5 节类似。与上文所述的费曼图方法相比，主要变化在于必须修改传播子以纳入边界条件，并且必须验证这样仍能得到因子化代数。在其论文中，Eugene Rabinovich [Rab21]为体-边界系统发展了 [Cos11] 和 [CG]，的结构定理的类比版本；特别是，BV 量子化会得到因子化代数。

6. A 1-dimensional fermionic defect for Chern–Simons theory

在本节中，我们最终通过构造一个带框架的 $\mathcal{E}_{1\subset 3}$-代数来建立 Reshetikhin–Turaev 理论。该代数的 $\mathcal{E}_3$-代数是量子化 Chern– Simons 理论的可观测量 $\mathcal{A}^\lambda$，其 $\mathcal{E}_1$-代数则是量子化的、带 $\mathfrak{g}$ 电荷的费米子的可观测量。用物理学语言来说，我们沿一维缺陷将三维规范理论与费米子理论耦合。借此，我们展示了微扰陈-西蒙斯理论如何复现量子群方法，前提是将 q 形式地在单位元附近展开。

本节首先介绍经典理论，接着考察一个更简单的中间情形，以此迈向我们的主要目标：我们将费米子量子化，但不对体规范理论进行量子化，并将其称为半经典理论。根据上一节的结果，我们看到，对于 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}=\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 以及完美模 $\mathcal{V}=\mathrm{C}^*(\mathfrak{g},\ \Pi V)$，我们复现了 Reshetikhin–Turaev 理论。因此，我们可以确保全量子理论将给出正确的 Reshetikhin–Turaev 理论的一种变形。

最后，我们解释如何构造全量子理论。我们的主要结果如下。

命题 6.1。 设 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数 $\mathfrak{g}$，$\rho:\ \mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ 为有限维表示，并令 $\mathbb{S}_\rho$ 表示 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{Sym}(\Pi V)$上的相应旋量表示。对于每个 *Chern–Simons* 理论的 *BV* 量子化 λ，代数 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g},\mathrm{End}(\mathbb{S}_\rho))$ 及其

模 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathbb{S}_\rho)$ 都存在一个可缩空间的变形，使其成为左 $\mathcal{A}^\lambda$-模中的一个 $\mathcal{E}_{0\subset 1}$-代数 $\mathcal{A}^\lambda_\rho$。它源自与 *Chern–Simons* 理论耦合的带电费米子的量子化。

此外，$\mathrm{C}^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathbb{S}_\rho)$ 的量子化确定了$(n,1)$-*Morita* 等价，介于$(\mathcal{A}^\lambda, \mathcal{A}^\lambda)$ 与$(\mathcal{A}^\lambda, \mathcal{A}^\lambda_\rho)$之间。因此，每种纽结 $L\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$的选取，都会通过从纽结补空间上带有 $\mathcal{A}^\lambda$ 的可构造因子化代数的因子化同调到 $\mathcal{A}^\lambda$ 的典范同构，以及沿纽结的费米子可观测量 $\mathcal{A}^\lambda_\rho$，在 $\mathcal{A}^\lambda$ 中确定一个特定元素。

该命题的第一部分即命题6.7 和推论 6.8，而第二部分则是第 2节的推论。回顾引理 2.3附近关于（n，1）-Morita 映射的定义及其性质。

6.1. **缺陷的经典理论**。设 M 是一个带定向的3 维流形（“体”），并有一个嵌入 $i : L \hookrightarrow M$，其中 $L \hookrightarrow M$ 是一个带定向的1 维流形（“缺陷”）。现在我们考虑费米子与规范场之间的最小耦合：

$$S_{\mathrm{coup}}(A, \psi, \overline{\psi}) = CS(A) + S_{\mathrm{ff}}(\psi, \overline{\psi}) + \int_L (\overline{\psi}, \rho(i^* A)\psi). \tag{9}$$

请注意，这个作用泛函将体中的 Chern–Simons 理论与沿缺陷分布的带电费米子结合起来。运动方程分为两部分。沿嵌入的 1 维流形，有

$$\mathrm{d}\psi + \rho(i^*A)\psi = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{d}\overline{\psi} + \overline{\rho}(i^*A)\overline{\psi} = 0,$$

这表明 ψ 和 ψ 关于由 $\overline{M}$诱导的联络是水平的。在 M自身上，我们得到一个修正后的 Maurer–Cartan 方程

$$\mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A] = j(\psi, \overline{\psi}),$$

其中 j 是由费米子产生的流，其定义满足以下要求：

$$\langle \tilde{A}, j(\psi, \overline{\psi})\rangle = (\overline{\psi}, \rho(i^*\tilde{A})\psi)$$

对每个规范场 A都成立。（我们添加波浪号只是为了强调，A 是任意的，并不一定是满足运动方程的联络形式。）请注意，流 j 支撑在 L 上，因此显然是一个分布（或 de Rham 意义上的流）。

6.2. **量子化费米子，同时保持规范场为经典场**。研究这种情形的主要原因是，它能让我们具体地看到，我们得到一个关于 C*(g) 的 Reshetikhin–Turaev 缠结理论，作为一个 $\mathcal{E}_3$-代数。换句话说，我们将看到，我们的方案在经典 Chern–Simons 理论的情形下如何运作。

我们已经通过对 1 维流形上的带电费米子进行量子化，完成了必要的工作。我们将这个耦合系统称为半经典理论，因为我们将费米子视为量子力学对象，而将规范场视为经典对象。我们用 $\mathrm{Obs}^{1/2}$表示其可观测量因子化代数。第4 节和第5节中的工作，尤其是引理5.9，证明了以下结论。

引理 6.2. 对于 $\mathbb{R}^3$中可能带边界的嵌入的 *1* 维流形 L，可观测量$\mathrm{Obs}^{1/2}$ 等价于通过放置而得到的可构造因子化代数

- $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 在体 $\mathbb{R}^3 \setminus L$上，
- $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g},\ \mathrm{Cl}_\hbar(V \oplus V^*))$ 在 $L \setminus \partial L$，并且
- $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathbb{S}_\rho)$ 在每个边界点 $x \in \partial L$ 上。

这一结果具体印证了引言第1.7 节所勾勒的缺陷观点。例如，根据命题 5.12，给定 $\mathbb{R}^3$中的一个纽结，本引理表明，克利福德代数（即旋量丛的自同态）中单位元的像恢复了旋量表示的特征标。

备注 16. 还需注意，1 维流形无需框架。这一特性等价于该构造显然是同痕不变的这一事实。

6.3. **带缺陷理论的变形复形**。 在第4.3节中，我们描述了陈–西蒙斯理论的变形复形，由此得以看出量子化不存在障碍，并确认在这类量子化中，层级的选择是唯一有意义的自由度。这一上同调分析使我们无需进行任何图示计算，就能看出所需的量子化确实存在，以及在构造过程中允许哪些自由度。我们将对耦合系统进行类似的分析。

6.3.1. 长直线与环。 设 M 为一个 3 维流形，且 $i : L \hookrightarrow M$ 是一个将无边界 1 维流形真嵌入到 M 中的映射。我们希望考虑如下形式的泛函

$$F = F_{\mathrm{bulk}}(A) + F_{\mathrm{defect}}(A, \psi, \overline{\psi}),$$

其中 F_{bulk} 是 3 维流形 M 上的局部泛函，且仅依赖于体场 A；而 F_{defect} 是 1 维流形 L 上的局部泛函，依赖于场 ψ 和 ψ，也依赖于 A，但仅通过其沿着 L的行为。也就是说，我们允许 F_{defect} 仅依赖于 i^*A 从 A 到 L的拉回。（这一限制并非必要：参见第6.3.2节的讨论。）由于我们还希望将 Chern– Simons 理论（及其量子化）保留为体理论，因此我们只关注缺陷泛函空间。于是，我们只需研究带电费米子在 L上的变形复形 $\mathbf{Def}$。

等价地，我们将问题表述如下。考虑沿一条适当嵌入的直线与带电费米子耦合的经典陈–西蒙斯理论的可观测量上的 $\mathcal{E}_{1\subset 3}$-代数结构的形式模空间 $\mathbf{Def}^{\mathrm{coupled}}$。存在一个遗忘映射

$$\mathrm{Def}_{\mathrm{coupled}} \to \mathrm{Def}_{CS}$$

映射到经典陈–西蒙斯理论的可观测量上的 $\mathcal{E}_3$ 代数结构的形式模空间（即 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$）。我们关心的是这个映射的纤维。

由于我们只关心局部发生的情况，令 L 为嵌入到 $M = \mathbb{R}^3$ 中的一份 $\mathbb{R}$，使得 L 的两端位于无穷远处。（等价地，可以想象一条直线穿过一个 3 维球。）

引理 6.3。 对于 $\mathfrak{g}$ 有限维李代数和 V 有限维表示，带电费米子变形复形的零阶上同调群为

$$H^0(\mathrm{Def}_{\mathrm{cf}}) = H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*)_\rho),$$

而一阶上同调群为

$$H^1(\mathrm{Def}_{\mathrm{cf}}) = H^2(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*)_\rho).$$

根据李代数上同调中的标准消失定理，这些描述对于半单李代数可以简化。

推论 6.4。对于 $\mathfrak{g}$半单，

$$\begin{aligned} H^1(\mathrm{Def}_{\mathrm{cf}}) &= H^2(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*)_\rho) \\ &\cong \mathrm{H}^2(\mathfrak{g}) \otimes \left(\mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*)_\rho\right)^{\mathfrak{g}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} H^0(\mathrm{Def}_{\mathrm{cf}}) &= H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*)_\rho) \\ &\cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}) \otimes \left(\mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*)_\rho\right)^{\mathfrak{g}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

根据怀特海德引理。

因此，缺陷泛函不存在有意义的变形：耦合理论唯一有意义的变形是改变层级，而这只影响体理论。耦合的变形可以通过场的自同构平凡化。

引理*6.3*的证明。这一论证与纯 Chern–Simons 理论的论证平行，后者在第4.3节讨论。带电费米子对应于一个定义在 L上的微分分次李代数层

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cf}} = \Omega^*_L \otimes (\mathfrak{g} \ltimes (\Pi(V \oplus V^*)[-1])),$$

它与局部常值层 $\mathfrak{g} \ltimes (\Pi(V \oplus V^*)[-1])$ 拟同构。因此，作为 D-模范畴中的微分分次李代数，我们有一个拟同构

$$C^\infty_L \otimes (\mathfrak{g} \ltimes (\Pi(V \oplus V^*)[-1])) \xhookrightarrow{\simeq} \mathcal{JL}_{\mathrm{cf}},$$

其中， $\mathcal{JL}_{\mathrm{cf}}$ 表示该层沿 L的射流。因此，完整的变形复形拟同构于

$$\Omega^*_L[1] \otimes \mathrm{C}^{\geq 1}(\mathfrak{g} \ltimes (\Pi(V \oplus V^*)[-1])),$$

约化的李代数上链。我们只关心缺陷泛函的变形，因此要求我们的泛函依赖于场 ψ 和 ψ。注意到

$$\mathrm{C}^{\geq 1}(\mathfrak{g} \ltimes (\Pi(V \oplus V^*)[-1])) = \bigoplus_{m+n>0} \mathrm{C}^m_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^n(\Pi(V \oplus V^*)))$$

因此，缺陷泛函涉及子复形

$$\bigoplus_{n>0} \mathrm{C}^*_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^n(\Pi(V \oplus V^*))) = \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi(V \oplus V^*))).$$

因此，缺陷泛函的变形复形拟同构于

$$\Omega^*_L[1] \otimes \mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi(V \oplus V^*)[-1]))$$

因此，其上同调为

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi(V \oplus V^*))[1]$$

对于 $L \cong \mathbb{R}$。 □

6.3.2. 关于法向方向。人们可能希望允许耦合项依赖于法向方向上的规范场。例如，我们可能希望加入如下形式的相互作用项：

$$\int_L (\overline{\psi}, i^*(\mathcal{L}_Z A)\psi)$$

其中， Z 是 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场，而 $\mathcal{L}_Z$ 表示李导数。换言之，我们希望写出沿着 L 的局部泛函，使其依赖于规范场沿 L法向方向的泰勒展开。

我们考察如下情形：将 L视为 z轴，并在 $\mathbb{R}^3$ 中使用坐标（x， y， z）。于是，考虑微分分次李代数 $\mathfrak{g}^M$（回顾定义 4.1）沿着 L的完备化：

$$\mathfrak{g}_L^{\wedge} = \Omega^*(L) \otimes \mathbb{C}[x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y] \otimes \mathfrak{g}$$

其微分为

$$(d_L + \partial_x \mathrm{d}x + \partial_y \mathrm{d}y) \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}.$$

注意，张量积中的中间项编码了二维形式圆盘上的德拉姆复形，因为我们是在法向方向上进行完备化。这个微分分次李代数同时包含沿 L 的规范场以及法向方向上的变化。

因此，我们可以修改引理6.3 的证明，将

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cf}} = \Omega_L^* \otimes (\mathfrak{g} \ltimes \Pi(V \oplus V^*)[-1])$$

with

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cf}}^{\wedge} = \Omega_L^* \otimes ((\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y]) \ltimes \Pi(V \oplus V^*)[-1]) .$$

随后，我们可以计算沿 L 的微分分次李代数层的局部李代数上链，其中将编码依赖于法向方向的耦合项。

不过请注意，存在一个典范嵌入

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cf}} \hookrightarrow \mathcal{L}_{\mathrm{cf}}^{\wedge}$$

微分分次李代数层之间的嵌入，将

$$\mathbb{C} \hookrightarrow (\mathbb{C}[x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y], \mathrm{d}_{dR}).$$

该嵌入是微分复形的拟同构。因此，局部李代数上链同样拟同构，所以上述工作已经足够。

6.3.3. 带边界的一维流形。 在第2.3节中（见 [Rab21], ），Rabinovich 针对带有边界条件的经典 BV 理论（例如带电自由费米子）建立了变形复形。这些结果是 [Cos11]中相应结果的直接类比。我们现在应用该形式体系，以得到引理6.3的类比。

现在我们关注带边界的一维流形到 $\mathbb{R}^3$ 中的真嵌入。由于我们只关心局部发生的情况，因此取 L 为半直线 $\mathbb{H}^1 = [0, \infty)$的一份拷贝，并将其线性嵌入，使其边界位于原点。（可以把它想象成一根棍子上穿着一个球。）我们关注缺陷泛函 F_{defect} 的变形，但要求费米子场满足边界条件。为简单起见，我们施加条件 $\psi|_{\partial L} = 0$。因此，我们研究带有此边界条件的、位于 $\mathbb{H}^1$ 上的带电费米子的变形复形 $\mathbf{Def}^{\partial}_{\text{cf}}$ 。

等价地，我们将问题表述如下。考虑形式模空间 $\mathbf{Def}^{\partial}_{\text{coupled}}$，它由 $\mathcal{E}_{0\subset 1\subset 3}$-代数结构构成，这些结构定义在与带有标准边界条件的带电费米子耦合的经典陈–西蒙斯理论的可观测量上。存在一个遗忘映射

$$\mathrm{Def}^{\partial}_{\text{coupled}} \to \mathrm{Def}_{CS}$$

到经典陈–西蒙斯理论的可观测量上的 $\mathcal{E}_3$ 代数结构的形式模空间（即 $\mathbf{C}^*(\mathfrak{g})$）。我们感兴趣的是该映射的纤维。

引理 6.5. 设 $\mathfrak{g}$ 为有限维李代数，且 (V, ρ) 为有限维表示。设

$$I = \mathrm{Sym}(\Pi V) \otimes \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V^*)$$

由 ΠV^* 在该代数中生成的理想

$$\mathrm{Sym}(\Pi V \oplus \Pi V^*),$$

配备从 ρ 继承的 $\mathfrak{g}$-作用。带电费米子的变形复形的零阶上同调群同构于

$$H^0(\mathrm{Def}^{\partial}_{\text{cf}}) = H^1(\mathfrak{g}, I_\rho),$$

且一阶上同调群为

$$H^1(\mathrm{Def}^{\partial}_{\text{cf}}) = H^2(\mathfrak{g}, I_\rho).$$

由此我们立即推出如下结论：它保证，在 $\mathbb{R}^3$ 上对陈–西蒙斯理论进行量子化，并使其与嵌入的半直线 $\mathbb{H}^1$ 上带有标准边界条件的带电费米子耦合时，不存在障碍。

推论 6.6。对于 $\mathfrak{g}$半单，

$$H^1(\mathrm{Def}^{\partial}_{\text{cf}}) \cong \mathrm{H}^2(\mathfrak{g}) \otimes I_\rho^{\mathfrak{g}} = 0$$

and

$$H^0(\mathrm{Def}^{\partial}_{\text{cf}}) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}) \otimes I_\rho^{\mathfrak{g}} = 0$$

根据怀特海德引理。

自由费米子是拓扑 BF 理论的一个特例，该理论由 Rabinovich 在第2.3节末尾进行了分析。为了得到这个引理，我们只需纳入来自环境规范理论的背景场。

因此，在着手证明之前，我们先回顾这些结果。

向量空间 V 上的自由费米子理论是拓扑 BF 理论的一个例子，其中李代数为

$$\mathfrak{g} = (\Pi V)[-1],$$

即，一个 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$-分次李代数，其元素全为奇次，并且集中在上同调次数 1。我们将详细展开这一断言，以便引用 Rabinovich 的计算结果。

实直线上的 BF 理论的场为

$$\Omega^*(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{g}[1] \oplus \Omega^*(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{g}^*[-1]$$

参见 [Rab21]的例 2.2.11。具体而言，这意味着场为

$$\Omega^*(\mathbb{R}) \otimes \Pi V \oplus \Omega^*(\mathbb{R}) \otimes \Pi V^* \cong \Omega^*(\mathbb{R}) \otimes (\Pi V \oplus \Pi V^*),$$

这些恰好就是自由费米子场。Rabinovich 将第一项中的场称为 A-场，将第二项中的场称为 B-场，因为作用泛函为

$$S_{BF}(A, B) = \int B \wedge \mathrm{d}A.$$

在我们的情形中， A 是 ψ 场，而 B 是ψ，因此我们得到了自由费米子作用量

$$\int \overline{\psi}\, \mathrm{d}\psi.$$

在例 2.2.23 中，Rabinovich 在半直线 $\mathbb{H}^1 = [0, \infty)$ 上引入了两个边界条件：

- A 边界条件，其中 $B|_0 = 0$ ，因此边界上只有 A-场值得关注，并且
- B 边界条件，其中 $A|_0 = 0$。

下述答案将彼此拟同构，而任意选择拉格朗日子空间$W \subset \Pi(V \oplus V^*)$都会给出等价的边界条件。

公式 (2.3.89) 告诉我们， A-边界条件的变形复形可由公式 (2.3.86) 建模，其中 $M = \mathbb{H}^1$ 和 $\partial M = 0$。特别地，我们发现 $\mathbf{Def}^{\partial,\, A \text{ ff}}$ 由以下二项上链复形建模

$$\mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*) \to \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V^*) \tag{10}$$

其中第二项位于上同调次数 0。该映射是一个将 ΠV 映为零的环映射（即，对由 ΠV生成的理想取商），因此它是满射。因此，该复形除 -1之外的所有次数上都有平凡的上同调。其次数 -1上同调为

$$I_A = \mathrm{Sym}(\Pi V) \otimes \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V^*), \tag{11}$$

由 ΠV^* 生成、但置于此次数的理想。注意， $I_A = I$，其中 I在引理的陈述中定义。

B-边界条件的变形复形 $\mathbf{Def}^{\partial,\, B \text{ ff}}$ 模式由以下上链复形建模

$$\mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*) \to \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V)$$

根据方程（2.3.90），第二项位于上同调次数 0。它的上同调同样在次数 -1 之外消失，其非平凡上同调群为

$$I_B = \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V) \otimes \mathrm{Sym}(\Pi V^*)$$

由 ΠV 生成的理想。

证明。 局部泛函的变形复形通常非常庞大（因为其中包含局部微分形式，包括拉格朗日顶形式），但其上同调可能相当小，陈–西蒙斯理论便是如此。对于拓扑 BF 理论，Rabinovich 在方程（2.3.89）和（2.3.91）中构造了从其“小模型”到局部泛函复形的显式拟同构。对于自由费米子，我们刚刚看到，A 条件和 B 条件导出同构的小模型，因此我们将采用 A 条件。回忆方程（10）：

$$\mathrm{Def}_{\mathrm{ff}}^{\partial,A} = (\cdots \to 0 \to \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V \oplus \Pi V^*) \to \mathrm{Sym}^{>0}(\Pi V^*) \to 0 \to \cdots)$$

集中在次数 -1 和 0。回忆其上同调为 I_A，定义见方程（11）。

令 $\mathfrak{g}$ 表示背景规范场取值所在的李代数（也就是说，它并非下文的 $\Pi V[-1]$ ）。对于 $\mathbb{H}^1$ 上的带电自由费米子，相应的变形复形 $\mathbf{Def}^{\partial,\,A\ \mathrm{cf}}$ 可由以下模型表示

$$\mathrm{C}^*(\mathfrak{g}, \mathrm{Def}_{\mathrm{ff}}^{\partial,A}).$$

我们将在证明引理中的断言后，为此论断给出论证。

我们可以将 $\mathbf{Def}^{\partial,\,A\ \mathrm{cf}}$ 视为一个双复形的全化，其中垂直方向来自 $\mathfrak{g}$ ，水平方向来自 $\mathbf{Def}^{\partial,\,A\ \mathrm{ff}}$ 。这个双复形仅在两个垂直列中非零，且位于第三象限。考虑这样一个谱序列：先取 $\mathbf{Def}^{\partial,\,A\ \mathrm{ff}}$ 的水平微分，再取李代数上同调的垂直微分。 E_2 页为

$$\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, I_A[1]) = \mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, I_\rho)[1].$$

谱序列显然在 E_2 页退化，因此

$$\mathrm{H}^k(\mathrm{Def}_{\mathrm{cf}}^{\partial,A}) = \mathrm{H}^{k+1}(\mathfrak{g}, I_\rho)$$

如前所述。

现在我们为变形复形的模型给出论证；我们的论证与引理6.3中的论证平行。带电费米子的场由以下对象建模：在 $\mathfrak{g}$上的取值于 $\mathbb{R}^3$ 的德拉姆复形，以及在 $\mathbb{H}^1$上的、满足 A 边界条件的自由费米子场。它们构成一个微分分次李代数，其中费米子是 $\Omega^*(\mathbb{R}^3)\otimes\mathfrak{g}$的模，作用方式是将形式限制到 $\mathbb{H}^1$并使用 $\mathfrak{g}$在 $\Pi V \oplus \Pi V^*$上的作用。Poincar´e 引理给出一个拟同构

$$\mathfrak{g} \to \Omega^*(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{g}$$

微分分次李代数，因此我们转而研究定义在 $\mathbb{H}^1$ 上的费米场论的 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$-族（即在所有计算中使用 $\mathrm{C}^*(\mathfrak{g})$ 作为基微分分次代数）。随后，我们对 Rabinovich 的方程（2.3.89）的拟同构进行基变换，从而得到变形复形的模型。□

6.4. **量子化的存在性**。 对变形复形的这一计算相当有用，因为它带来了以下引人注目的推论。

命题 6.7。 对于陈–西蒙斯理论的每一种 BV 量子化，以及半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示 V 的每一种选取，耦合系统的量子化空间都是可缩的。

这一论断并不能直接从我们上面的计算推出，因为我们无法直接援引 [Cos11] 或 [Rab21], 的结果，因为这些结果并未处理带缺陷的理论。尽管如此，我们会对这些论证加以修改，使其适用于我们的情形。[12]

证明。 经典理论的 BV 量子化基本上分为两个阶段：

- 利用费曼图构造微扰展开，并通过正则化和重整化去除发散；
- 求解量子主方程（QME）。

同样的两步过程也适用于我们的耦合理论。

在建立微扰展开时，我们直接结合体理论和缺陷理论中的要素。场空间是

$$\mathcal{E}_{\text{coupled}} = \mathcal{E}_{CS} \times \mathcal{E}_{\text{ferm}}$$

体场与费米子场（并施加其标准边界条件）的乘积。底层自由理论也是一个乘积：体中的阿贝尔陈–西蒙斯理论 $\mathbb{R}^3$ 以及沿适当嵌入的 1 维流形的自由费米子 L。自然的规范固定只需分别采用各个分量上已有的规范固定。因此，我们得到一个耦合系统的传播子，它是各分量传播子的乘积（范畴意义下）。由此，我们将重整化群（RG）流定义为两个自由理论的 RG 流的“乘积”。（关于半直线上的拓扑 BF 理论的详细讨论，参见 [Rab21]的第 4 章，其中一维费米子是一个特例。）

在第 A.2 节中，我们证明，重整化的构形空间方法适用于这一耦合理论，因此它会产生满足重整化群流的尺度依赖泛函族。[13] 关于这一重整化作用量，请参见定义A.5 。（用 [Cos11], 的术语来说，它提供了一个预理论。）构形空间方法表明，无需任何反项：这一耦合理论不存在紫外奇点，正如 Chern–Simons 理论也不存在任何

[12]我们的论证在文本顺序上有所倒置，因为它依赖于第A.2节。该节的内容很容易概括——重整化通过构形空间方法完成——但初次接触时，其构造相当冗长。因此，我们希望先讨论变形理论方面，再讨论解析方面，以此强调我们方法的结构。[13]如附录所示，这一论断与 Bott–Taubes 积分或雅可比图理论密切相关。我们只用这些工具进行重整化；并不通过分析反常面来求解量子主方程。

紫外奇点。因此，我们能够取 $t \to 0$ 重整化群流的极限，采用 [Cos11]的风格。[14][15]

处理完微扰展开后，我们转向量子主方程。请回想，不满足量子主方程这一事实本身可由一个局部泛函表示，这一想法在 BV 形式体系中由来已久。其精确表述见 [Cos11]第5章的推论 11.1.2。具体而言，给定一个由一族有效作用量泛函组成的有效场论，其拟定的尺度 $\{S[t]\}_{t>0}$量子微分 t

$$\mathrm{d}_t = \{S[t], -\}_t + \hbar\Delta_t$$

可能不满足平方为零的条件，但这些障碍项 $\{Ob[t]\}_{t>0}$，满足

$$\mathrm{d}_t^2 = \{Ob[t], -\}_t,$$

满足重整化群流。其 $t \to 0$ 极限 $Ob[t]$ 具有一个局部泛函的渐近展开，就像有效作用量泛函 $\{S[t]\}$ 本身一样。证明可直接根据有效场论的定义进行计算。

对于我们的耦合理论，这些定义和论证依然成立。我们的重整化群流恰好提供了所需的要素，使我们能够运用 [Cos11] 第5章引理 11.1.1 的论证（以及 [Rab21]中的对应结果，命题 4.6.3）。在给定尺度 t 处，不满足量子主方程所产生的障碍满足经典（即树级）重整化群流，并且与尺度 t处的经典作用泛函取括号后为零。在 $t \to 0$ 极限下，该障碍变为局部的。由于我们知道纯陈–西蒙斯理论满足量子主方程，该障碍必然涉及由耦合项标记的顶点，因此其支撑集必位于缺陷 L上。于是，它是 $\mathrm{Def}_{\mathrm{cf}}$中的一度上闭链；Def 是描述费米子理论与体理论之间耦合的变形复形。

现在，我们通过运用对变形复形的上同调分析来完成论证。我们知道一阶上同调群是平凡的，因此障碍可以平凡化。于是量子化存在。此外，我们知道耦合项的零阶上同调群消失，因此对障碍的任意一种平凡化都与其他任何一种上同调等价。由此，我们得到量子化空间的可缩性。□

通过障碍理论论证，我们现在知道，量子化这个耦合系统的方式在本质上是唯一的。由于根据 [CG], 的主定理，这种量子化还会导出一个可构造因子化代数，因此我们得到以下推论。

推论 6.8。 对于每个陈–西蒙斯理论的 BV 量子化 λ 以及每个半单李代数 $\mathfrak{g}$的有限维表示 V 的选择，都存在一个可缩空间，包含从带框架的 $\mathcal{E}_{0\subset 1\subset 3}$-代数 $\mathcal{A}_V^{\mathrm{cl}}$ 到带框架的$\mathcal{E}_{0\subset 1\subset 3}$-代数 $\mathcal{A}_V^{\lambda}$的变形。

[14]这一观察不仅适用于该理论，也适用于任何具有拓扑缺陷的 Chern–Simons 型或 BF 型拓扑场论。例如，我们可以用这些方法为陈–西蒙斯理论构造拓扑表面缺陷。[15]请注意，我们确实 *not* 断言了 [Cos11] 的定理 A 的一个版本，适用于 *any* 与缺陷理论耦合的理论；我们只断言 *this* 耦合理论确定了一个预理论。

定理 1.1可由本结果通过引言中的论证得出。

6.4.1. 关于 *Bott-Taubes* 型积分的评述。 从某种意义上说，这一结果也从结构上解释了 Altsch¨uler–Freidel[AF97] 和 Thurston [Thu]。Bott–Taubes [BT94] 发现，朴素地量子化纽结的经典威尔逊环可观测量所产生的费曼图表 K 并 不 具有同痕不变性，但对于最初的几个图，这种失效程度较轻，本质上只是通常的自链接问题。后续研究发现，只需乘上一个仅取决于框架选择的简单因子，就能修正所有图表（从而解决自链接问题）。在 BV 形式体系中，我们看到，经典威尔逊环可观测量（经典可观测量中的一个上循环）可以提升为量子上循环。障碍理论对此提供了一些见解：Bott–Taubes 积分本质上是在纽结上带有缺陷地构造一个理论；而我们已经看到，至少对于我们所选择的这类理论，其量子化本质上是唯一的。

读者或许会问，框架依赖是如何产生的。它在障碍理论中并未明确显现，但隐含在一般形式体系中，具体如下。我们知道，耦合理论的量子化会产生一个带框架的 $\mathcal{E}_{1\subset 3}$代数，而这类代数明确涉及对嵌入的 1 维流形选择框架。要使其与框架无关，还需对 3-圆盘代数和 1-圆盘代数之间的关系施加额外条件。[16]

Appendix A. Explicit quantizations via the configuration spacemethod

本附录旨在回顾如何构造本文讨论的微扰场论。第一节中，我们考察纯陈–西蒙斯理论（即不含费米子缺陷的情形）；下一节则说明如何纳入某一类缺陷。这些技术称为构形空间方法，因为其核心思想是通过点分裂正则化消解费曼图中出现的奇点，而要系统地组织这一过程，就需要巧妙地对构型空间进行紧化。

A.1. **纯陈–西蒙斯理论的 BV 量子化。** 本节回顾陈–西蒙斯理论的微扰量子化，遵循 Axelrod– Singer [AS92、AS94], Kontsevich [Kon94], 和 Bar-Natan [BN95b], 的做法，但将其表述在 Batalin–Vilkovisky 形式体系中。在转向我们关注的理论之前，我们先概述一般的微扰 BV 量子化过程。（Sawon [Saw06]对这一材料作了通俗易懂的介绍。）

A.1.1. 微扰量子化。 微扰量子化旨在近似一个假定的泛函积分

$$\int_{\phi\in\mathcal{F}} O(\phi)e^{-S(\phi)/\hbar}\mathcal{D}\phi,$$

[16]要使一个 $\mathcal{E}_3$-代数 $\mathcal{A}$ 和一个 $\mathcal{E}_1$-代数 $\mathcal{B}$ 构成一个带框架的 $\mathcal{E}_{1\subset 3}$-代数，我们需要一个 $\mathcal{E}_2$-代数映射 $\int_{S^1}\mathcal{A}\to \mathrm{HH}^*(\mathcal{B})$。为了消除嵌入的 1 维流形对框架的依赖，我们需要这个 $\mathcal{E}_2$-代数映射成为一个（同伦）$O(2)$-不动点。这需要额外的数据，而且并非总是可行。因此，*generic* 情形是应当存在框架依赖。

其中 $\mathcal{F}$ 是配备了测度 $e^{-S(\phi)/\hbar}\mathcal{D}\phi$的场空间，而 O 是场上的一个泛函（即一个可观测量），可对该测度积分。这个泛函积分通常并未得到良好定义，但计算这一假定近似值的过程确实确定了一个性质良好的数学构造。我们将把这一过程本身视为一个独立的概念来处理。

在介绍泛函分析的相关内容之前，先回顾一下模型情形并引入一些记号会很有帮助。

设 V是一个有限维向量空间；我们用 v 表示 V的一个元素。设S 是对偶空间 $V^\vee$上的一个形式幂级数。换言之，我们将 S 视为定义在 V 上的函数，并把 V 看作形式流形。我们对 S施加以下条件：原点是 S 的一个孤立临界点，并且 $S(0) = 0$。于是

$$S(v) = Q(v) + I(v),$$

其中 Q 是一个非退化二次函数，而“相互作用” I 是一个包含三次项和高阶项的幂级数。因此，我们来考虑以下感兴趣的形式表达式：

$$\int_{v\in V} e^{-S(v)/\hbar}\mathrm{d}v = \int_{v\in V} e^{-Q(v)/\hbar}e^{-I(v)/\hbar}\mathrm{d}v.$$

应将右侧的积分理解为计算 $e^{-I(v)/\hbar}$ 关于未归一化高斯测度 $e^{-Q(v)/\hbar}\mathrm{d}v$的期望值。

这个积分有一个组合表达式，这是因为高斯测度的矩很容易用“逆元” Q^{-1}的导数来描述。（由于 $Q \in \mathrm{Sym}^2(V^\vee)$ 非退化，它确定了一个同构 $V \cong V^\vee$，因而有一个逆元 $Q^{-1} \in \mathrm{Sym}^2(V)$。）因此，我们对 $e^{-I(v)/\hbar}$ 作幂级数展开，并计算每一项的矩。尽管完整的和先验是无穷且定义不明的，但它是 $\hbar$中的一个良定义形式幂级数，因为每个 $\hbar^k$ 只涉及有限多个矩。最终得到一个等式

$$\int_{v\in V} e^{-Q(v)/\hbar}e^{-I(v)/\hbar}\mathrm{d}v = \sum_{\gamma\in\mathrm{Graphs}} \frac{\hbar^{b_1(\gamma)}}{|\mathrm{Aut}(\gamma)|} w_\gamma(Q^{-1}, I),$$

其中，γ表示一个有限图，$b_1(\gamma)$表示其环数（或第一贝蒂数），$w_\gamma(Q^{-1}, I)$表示由该图、矩阵 Q^{-1}和相互作用项 I构造的 V 上的多项式函数。

详细内容见 [Cos11], 第 2 章，简而言之，我们有如下结论：

- γ 是一个稳定的图，意味着它有有限个顶点（每个顶点的度至少为三）、有限条边，以及有限条腿或尾（它们的一端位于某个顶点上，另一端是“自由端”）；
- 稳定图的一个自同构会置换顶点、边和腿的集合，但保留它们之间的关系（例如，如果它移动一条边，也会以相同的方式移动该边的边界顶点）；
- 对于一个有 k 条 γ 外腿的图，其权重 $w_\gamma(Q^{-1}, I)$ 是 $\mathrm{Sym}^k(V^\vee)$ 的一个元素，它通过将每条边标记为一个传播子 $Q^{-1} \in \mathrm{Sym}^2(V)$ 构造而成

并将每个 n 价顶点标记为相互作用 I 的次数 n 分量 $I_n \in \mathrm{Sym}^n(V^\vee)$，然后根据图的形状缩并这些张量。

我们使用以下记号

$$W(P,I) = \sum_{\gamma \in \mathrm{ConnGraphs}} \frac{\hbar^{b_1(\gamma)}}{|\mathrm{Aut}(\gamma)|} w_\gamma(P,I)$$

表示对相应的连通稳定图求和，而 $P \in \mathrm{Sym}^2(V)$ 表示任意元素。因此我们知道，对于 $P = Q^{-1}$，表达式 $\exp W(P, I)$ 可还原为 $\exp(-S/\hbar)$ 在 V 上的形式积分。

现在我们在陈–西蒙斯理论的背景下使用这一展开。

A.1.2. 陈–西蒙斯理论的组合学与李理论。 对于陈–西蒙斯理论，二次项为 $Q(A) = (1/2)\langle A, \mathrm{d}A\rangle$，而高阶项则是简单的三次表达式 $I(A) = (1/6)\langle A, [A,A]\rangle$。关于理解 Q^{-1} 的问题，我们留待下一小节讨论；这需要理解 d^{-1} 的含义，这是一个分析性质的问题。这里我们只关注出现的图。

第一个观察是，只有三价图是相关的，因为我们只有一个三次项。

其次，由于我们的场空间是张量积 $\Omega^*(\mathbb{R}^3) \otimes \mathfrak{g}$，我们图示法的所有原子成分，即顶点和边，也同样分解为张量积。因此，对于任意图 γ，我们有

$$w_\gamma(P,I) = w_\gamma^{an} w_\gamma^{\mathfrak{g}},$$

其中李理论权重与分析无关，而解析因子对任意李代数 $\mathfrak{g}$ 都相同。

李论因子及其关系施加了强而有用的关系，例如著名的 AS 和 IHX 关系（源于李括号的反对称性和雅可比关系）。这些规则使人们能够发现图的李理论权重之间的非平凡关系。

注记 17. 人们可以进一步抽象这一情形，并考虑用*权系*代替带有非退化配对的李代数，但我们并不需要那种层级的一般性。

A.1.3. 陈–西蒙斯理论的分析。 我们的场在 $\Omega^*(\mathbb{R}^3)$ 中的另一个张量因子，并且对于任意费曼图，解析因子应由知晓高斯测度的矩来确定

$$e^{-\int_M \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha} \mathcal{D}\alpha,$$

其中，α 表示 $\Omega^*(\mathbb{R}^3)$ 的一个元素。形式上应用矩公式表明，我们需要知道 d^{-1}，它将为图展开中的边提供标记。利用分布理论可以良好定义这个元素，但接着尝试计算某个图表的权重时，会发现需要将分布 d^{-1}（来自一条边）与三次顶点给出的分布进行缩并。这样的分布缩并通常没有良好定义。

一项关键创新是使用（部分）紧化构型空间，对图示展开积分中出现的这些发散进行正则化。物理学家可能会将其称为点分裂正则化。

理解 d^{-1} 本身，最容易看出其基本思想。请注意，在图表中，边应对应于 d^{-1}的积分核，因此也对应于 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$上的 de Rham 流 P Δ :$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$。这个流在对角线之外是光滑的，因此它确定了构型空间 $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^3)$上的光滑微分形式 P'；该空间就是对角线的补集。（这里指的是有序点的构型空间。）这个流的奇异行为局限于对角线上。

新颖之处就在于这一步。通过沿着 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$的对角线进行实爆破，可以将 $\overline{\mathrm{Conf}}_2(\mathbb{R}^3)$部分紧化为 $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^3)$；换言之，我们用对角线法丛的球面丛替代对角线。存在一个自然映射 $\iota : \mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^2$ ，它扩展了 $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^3)$的嵌入 ι 。一个不明显但至关重要的事实是， P' 可以扩展为 $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R}^3)$上的光滑微分形式 P。它的显式形式为

$$\overline{P} = C\,\pi^* \mathrm{d}vol_{S^2},$$

其中 C 是一个常数，而 $\pi : \overline{\mathrm{Conf}}_2(\mathbb{R}^3) \to S^2$ 是高斯映射（x， y） $\mapsto (x-y)/|x-y|$ 到紧化空间的延拓。因此，如果想理解 d^{-1}，就可以按以下方式将 P 用作积分核。给定 $\alpha \in \Omega^*(\mathbb{R}^3)$，将其视为定义在（$\mathbb{R}^3$）^{2} 上的微分形式，并且在 $\mathbb{R}^3$的第一个因子上取常数，然后将其拉回到 $\iota^*\alpha$，再与 P 取楔积，并沿 $\mathbb{R}^3$的第二个因子进行积分。也就是说，

$$\mathrm{d}^{-1}\alpha(x) = \int_{(\bar{\iota}\circ\pi_1)^{-1}(x)} \overline{P}(x,y) \wedge \alpha(y).$$

这里的积分全部针对光滑形式，因此无需担心发散。

类似的过程可以帮助我们理解任意图 γ的权重。存在一个 Fulton–MacPherson 型的 Conf 的部分紧化$^{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3)$ ，其中$V(\gamma)$ 表示顶点的数量。我们基本遵循 [KMV13]的论述。

定义 A.1. 对于子流形 $Y \hookrightarrow X$，爆破 Bl(X， Y) 表示将 Y 替换为其法丛的球面丛所得的结果。它与从 X 内移除 Y 的一个开管状邻域微分同胚。

在任意乘积 M^k 中，令 Δ_k 表示细对角线 {(x， ……， x) $\in M^k$}。存在一个自然的嵌入

$$\mathrm{Conf}_p(M) \hookrightarrow M^p \times \prod_{S\subset\{1,\dots,p\},|S|\geq 2} \mathrm{Bl}(M^S, \Delta_S)$$

因为任意由 p 个互异点组成的元组，都会为任意子集 S 确定一个由 S 个互异点组成的元组。

定义 A.2. 当 M 是紧致的时，令 Conf$_p$(M) 表示该映射像的闭包。[17]

[17] [KMV13] use the notation $C(p,M)$ for $\mathrm{Conf}_p(M)$ and $C[p,M]$ for $\overline{\mathrm{Conf}}_p(M)$.

根据构造，存在一个典范映射 $\mathsf{Conf}_p(M) \to \overline{M^p}$，因此可以通过映射到$M^p$ 再取第 k 个坐标，来讨论某个点 $x \in \mathsf{Conf}_p(M)$ 的底层第 k 个点 $\overline{\mathsf{ev}_k}(x)$。

当 $M = \mathbb{R}^3$ 时，将其视为 S^3 中去掉点 ∞ 后的补集。接着考虑映射

$$\mathrm{Conf}_p(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathrm{Conf}_{p+1}(S^3)$$

将 $\mathbb{R}^3$ 中的 p 个点（$x_1, \dots, x_p$）映到 S^3 中的 $p+1$ 个点（$x_1, \dots, x_p, \infty$）。这一特征揭示了如何对 $\mathsf{Conf}_p(\mathbb{R}^3)$ 进行（部分）紧化。

定义 A.3。令 $\mathsf{Conf}_p(\mathbb{R}^3)$ 表示图表的拉回

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{\mathrm{Conf}}_{p+1}(S^3) \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{p+1}} \\ \{\infty\} & \longrightarrow & S^3 \end{array}$$

也就是说，它是 $\mathsf{Conf}_{p+1}(S^3)$ 中最后一个点为 ∞ 的子空间。

这个部分紧化是一个带角流形。值得注意的是，$\mathsf{Conf}_p(\mathbb{R}^3)$ 的余维一面由一些点的子集构成，这些点同时聚集到一起或逃逸到无穷远处。这种动力学语言描述了如何构造一条从 $\mathsf{Conf}_p(\mathbb{R}^3)$ 中某点通往边界上某点的路径。因此可以看出，边界上的一个点由 p 元组的 $\mathbb{R}^3$ 中的点（其中一些点重复）以及如何在一阶近似下分开这些重复点的数据（即每个重复点的切向方向）组成。角的出现，是因为一组点发生碰撞后，又有更多点加入其中，如此反复；每次后续碰撞都会增加余维。

现在我们用这些空间来定义解析权重。对于每条边 $e \in \gamma$，都有一个自然映射

$$\pi_e : \overline{\mathrm{Conf}}_{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3) \to \overline{\mathrm{Conf}}_2(\mathbb{R}^3)$$

该映射通过取由边界处的顶点参数化的点来定义。还有一个自然映射

$$\Phi : \overline{\mathrm{Conf}}_{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3)^k$$

该映射通过取由图的外腿参数化的点来定义，其中 k 是此类腿的数量。对于 $\alpha \in \Omega_c^*((\mathbb{R}^3)^k)$，我们定义

$$w_\gamma^{an}(\alpha) = \int_{\overline{\mathrm{Conf}}_{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3)} \Phi^*\alpha \wedge \bigwedge_{e \in E(\gamma)} \pi_e^* \overline{P}.$$

这个积分显然是良定义的。

因此，Chern–Simons 理论的微扰量子化无需反项。泛函

$$I_{CS}^{\mathrm{ren}} = W(\overline{P}, I_{CS}) = \sum_\gamma \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\gamma)|} w_\gamma^{an} w_\gamma^{\mathfrak{g}} \tag{12}$$

编码了将理论的非零模积分掉之后的相互作用项。我们将其称为 Chern–Simons 理论的重整化作用泛函 。

备注18。Cos 框架 [Cos11] 适用于更一般的椭圆复形，并且依赖于参数子的存在。更具体地说，通常可以使用热核方法。正如 [Cosa], 第15.2节所示，这里给出的构造是当下限长度尺度趋于零时热核构造的极限。

A.1.4. 量子主方程。 在陈–西蒙斯理论这样的情形中，我们积分的对象并非仅仅是被视为形式流形的向量空间——正如我们在介绍图示展开时所讨论的那样——而是一个形式栈。因此，我们的图示展开必须与栈结构适当地相容。在 BRST/BV形式体系中，这种相容性由量子主方程 （或 QME）编码。第 5 章中有一篇与我们的目的十分契合的系统性讨论，见 [Cos11], 不过，我们在此回顾若干关键要点。

简言之，经典场论上的移位泊松结构确定了一个特定的、次数为一的上同调二阶微分算子，称为*BV* 拉普拉斯算子 Δ。

定理A.1 （命题 15.2.6, [Cosa]）。 重整化作用量（*12*）满足量子主方程：

$$(\mathrm{d}_{dR} + \{I_{CS}^{\mathrm{ren}}, -\} + \hbar\Delta)^2 = 0.$$

这一论证以优雅的方式将构形空间 $\mathsf{Conf}_n(\mathbb{R}^3)$ 的结构与量子主方程联系起来。我们将在缺陷理论中仿照这一论证，因此在此概述其思路。

第一步是考虑如下等价命题：

$$\mathrm{d}_{dR} I_{CS}^{\mathrm{ren}} + \frac{1}{2}\{I_{CS}^{\mathrm{ren}}, I_{CS}^{\mathrm{ren}}\} + \hbar\Delta I_{CS}^{\mathrm{ren}}$$

是一个常数，这正是我们采用的形式。

接下来的主要思路是展开第一项 $\mathrm{d}_{dR} I_{CS}^{\mathrm{ren}}$，并弄清它为何会与括号项和 BV 拉普拉斯算子项相消。当然，必须追踪李理论权重，但关键步骤是解析性的——本质上只涉及斯托克斯定理和图组合学——因此我们在此着重讨论这一点。

对于任意具有 k 条腿的图 γ，以及任意 $\alpha \in \Omega_c^*((\mathbb{R}^3)^k)$，根据定义有：

$$w_\gamma^{an}(\mathrm{d}_{dR}\alpha) = \int_{\overline{\mathrm{Conf}}_{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3)} (\mathrm{d}_{dR}\Phi^*\alpha) \wedge \bigwedge_{e\in E(\gamma)} \pi_e^*\overline{P}$$

利用 d_{dR} 是一个导子，我们将这个积分改写为两项之和：

$$\int_{\overline{\mathrm{Conf}}_{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3)} \mathrm{d}_{dR}\left(\Phi^*\alpha \wedge \bigwedge_{e\in E(\gamma)} \pi_e^*\overline{P}\right) - (\pm)\int_{\overline{\mathrm{Conf}}_{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3)} \Phi^*\alpha \wedge \left(\mathrm{d}_{dR} \bigwedge_{e\in E(\gamma)} \pi_e^*\overline{P}\right)$$

然后我们将这个和改写为：

$$(13)\quad \int_{\partial\overline{\mathrm{Conf}}_{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3)} \Phi^*\alpha \wedge \bigwedge_{e\in E(\gamma)} \pi_e^*\overline{P} - \sum_{e\in E(\gamma)} (\pm)\int_{\overline{\mathrm{Conf}}_{V(\gamma)}(\mathbb{R}^3)} \Phi^*\alpha \wedge \pi_e^*\overline{K} \wedge \bigwedge_{e'\neq e} \pi_{e'}^*\overline{P},$$

其中第一项由斯托克斯定理得出，第二项则利用了 $\mathrm{d}_{dR}P = K$。

现在，第二项，即对内部边求和，可以分为分离边（即移除后会使图分裂成互不连通部分的边）和非分离边。对于一条分离边 e，可以看出，$\{I_{CS}^{\mathrm{ren}}, I_{CS}^{\mathrm{ren}}\}$ 中有一项会抵消相应的求和项，因为括号是通过用 K连接两个相互作用项定义的。对于一条非分离边 e，可以看出，$\Delta I_{CS}^{\mathrm{ren}}$ 中有一项会抵消相应的求和项，因为 BV 拉普拉斯算子会用 K 连接同一个相互作用项的两条腿。

因此，只需证明第一项，也就是对 $\partial\mathrm{Conf}(V(\gamma))$ 的积分，等于零。不过，Kontsevich 已运用对称性论证证明了这一点，见 [Kon94]；另见引理 2.2 及其后续讨论。

A.1.5. 我们已经给出了陈–西蒙斯理论的一种 BV 量子化，但在引言中，我们曾指出，此类量子化有许多种，具体由一个依赖于 $\hbar$ 的层级的选择来参数化。因此，我们需要看看它们会在刚才描述的过程中何处出现。

值得庆幸的是，这一点很简单：我们的经典作用泛函涉及选择一个不变对称双线性形式 $\langle -,\ -\rangle_{\mathfrak{g}}$ 定义在 $\mathfrak{g}$ 上，而这一选择决定了传播子和三价顶点中与李代数理论相关的部分。我们也可以选择任意一列这样的配对 $(\langle -,\ -\rangle_{(n)})_{n>0}$ 并使用

$$\langle -,-\rangle_{\mathfrak{g}} + \hbar\langle -,-\rangle_{(1)} + \cdots + \hbar^n\langle -,-\rangle_{(n)} + \cdots$$

来替代 $\langle -,\ -\rangle_{\mathfrak{g}}$。我们关于 BV 量子化的所有论证都可以原样适用，因此我们看到，这样的层级 选择决定了经典陈–西蒙斯理论的一种 BV 量子化。[18]

从这一构造中并不明显的一点是，这些 BV 量子化是否在同构意义下彼此不同。我们可以设想，存在某种 $\hbar$依赖于参数的场空间自同构，能够将与两个不同层级相关联的量子化等同起来。这里可以借助 [Cos11], 中发展的一些形式化工具，即经典 BV 理论的变形复形。正如第4.3节所述，它使我们能够看出这些量子化彼此不同，并为定理1.2提供了依据。

A.2. **全量子缺陷理论的图示法**。现在我们转而对整个耦合系统进行微扰量子化（见作用量（9）），也就是说，我们考察与量子费米子耦合的量子陈–西蒙斯理论。与我们发展纯陈–西蒙斯理论时的做法类似，第一步是证明不需要反项。也就是说，我们证明费曼图不会出现发散。随后我们考察量子主方程，它并非严格成立，并由此识别出“框架异常”。

A.2.1. 双色三价图。 耦合理论包含两个相互作用项：Chern–Simons 相互作用，以及规范场与费米子之间的耦合。我们将这种耦合视为分别为 ψ 和 ψ提供一条向内和一条向外的定向腿。每种场也都会贡献一个传播子：规范场对应 P^A，我们可以将其画成波浪线；费米子场对应 P^f，我们可以将其画成一条定向边。注意，由于费米子传播子和耦合相互作用具有定向性，它们总是位于一条定向的

[18]我们不要求任何一个 $\langle -,\ -\rangle_{(n)}$ 是非退化的，只要求首项 $\langle -,\ -\rangle_{\mathfrak{g}}$。

路径或圈上。因此，任何图都可以分两步构造：首先指定纯费米子部分，它是不交并的定向直线和轮图；然后将费米子部分连接到一幅陈–西蒙斯图上。

注意，图的权重仍可分解为解析贡献和李理论贡献。现在，李理论权重 $w^{\mathfrak{g},\rho}$ 取决于李代数 $\mathfrak{g}$ 以及有限维表示 ρ 的选择：$\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$。

A.2.2. 构型空间。 为了说明分析方面不需要正则化，我们再次使用构形空间方法，并对其进行修改以考虑嵌入的 1 维流形。我们仍然紧密遵循 [KMV13]中的论述。

令 $\iota : L \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ 表示一个 1 维（可能带边界）流形的真嵌入。令 $(\ell; n)$ 表示 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中的一个元素，我们将其理解为表示我们想要讨论“ L上的 ℓ个点以及 $\mathbb{R}^3$中的 n 个点”。

定义 A.4。 令 $\mathrm{Conf}_{\ell;n}(\overline{\iota : L \to \mathbb{R}^3})$ 表示如下图表的拉回所给出的、 L 上的 ℓ 个点和 $\mathbb{R}^3$ 中的 n 个点的构形空间的部分紧化

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{\mathrm{Conf}}_{\ell+n}(\mathbb{R}^3) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}^\ell} \\ \overline{\mathrm{Conf}}_\ell(L) & \xrightarrow{\iota^\ell} & \overline{\mathrm{Conf}}_\ell(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

其中，pr^ℓ 表示投影到前 ℓ 个点，而 ι^ℓ 将 $(y_1, \ldots\ldots, y_\ell) \in \mathrm{Conf}_\ell(L)$ 映射为 $(\iota(y_1), \ldots\ldots, \iota(y_\ell)) \in \mathrm{Conf}_\ell(\mathbb{R}^3)$，并自然延拓到紧化空间。

$\mathrm{Conf}_{\ell;n}(\iota : L \to \mathbb{R}^3)$的边界由发生碰撞的点组成；这些点能以无穷小方式分离，从而在 L 上产生 ℓ个互不相交的点，并在体内产生 n个互不相交的点。

这一构造在真嵌入空间 $\mathrm{Emb}(L, \mathbb{R}^3)$上变化良好，因此自然确定了一个光滑纤维丛

$$\overline{\pi}_{\ell;n} : \overline{\mathrm{Conf}}_{\ell;n}(L, \mathbb{R}^3) \to \mathrm{Emb}(L, \mathbb{R}^3)$$

其在 ι 上的纤维为 $\overline{\mathrm{Conf}_{\ell;n}(\iota : L \to \mathbb{R}^3)}$。这一结论只是对 [KMV13] 中命题4.6的一个极小推广。[19]

A.2.3. 构形空间积分。令 γ 表示耦合理论中的一个三价图。我们需要引入大量记号：

- 令 $E^f(\gamma)$ 表示费米子边的集合，这些边由 P^f 标记。
- 令 $E^A(\gamma)$ 表示规范边的集合，这些边由 P^A 标记。
- 令 $V_t^A(\gamma)$ 表示具有三条 A 腿的三价顶点集合。
- 令 $V_t^f(\gamma)$ 表示具有一条 A 腿、因而也具有一条 ψ 和ψ 腿的三价顶点集合。

[19] [KMV13] 对这种空间使用记号 $C[\vec{i}+s;\ \mathcal{L}_m^n,\ \Gamma] \to \mathcal{L}_m^n$ 其中 $\mathcal{L}_m^n$ 表示由 m 个互不相交的 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的真嵌入空间，$\vec{i} = (i_1, \ldots\ldots, i_m)$ 表示我们希望在第i_j 条弦上取 j个点，而 s 表示我们希望在 s 中取 $\mathbb{R}^n$点。

- 令 $V_u^A(\gamma)$ 表示外部 A 腿（或单价 A-顶点）的集合。
- 令 $V_u^f(\gamma)$ 表示外部费米子腿的集合（或单价 ψ-或ψ-顶点）。

Set

$$\ell = |V_t^f(\gamma)| + |V_u^f(\gamma)| \quad \text{and} \quad n = |V_t^A(\gamma)| + |V_u^A(\gamma)|.$$

我们用 $\overline{\mathsf{Conf}}_\gamma(\iota : L \to \mathbb{R}^3)$ 表示 $\mathsf{Conf}^{\ell;n}_{\overline{(\iota :}\ L \to \mathbb{R}^3)}$。

对于这样的三价图 γ，我们得到映射

$$\phi_\gamma^A : \overline{\mathrm{Conf}}_\gamma(\iota : L \to \mathbb{R}^3) \to (S^2)^{|E^A(\gamma)|}$$

and

$$\phi_\gamma^f : \overline{\mathrm{Conf}}_\gamma(\iota : L \to \mathbb{R}^3) \to (S^0)^{|E^f(\gamma)|}.$$

于是有一个拉回形式

$$\Omega_\gamma = \phi_\gamma^{f*}\omega^f \wedge \phi_\gamma^{A*}\omega^A,$$

其中

$$\omega^f = \prod_{|E^f(\gamma)|} P^f$$

and

$$\omega^A = \bigwedge_{|E^A(\gamma)|} \mathrm{d}vol_{S^2}.$$

（请注意，费米子的传播子依赖于 1 维流形：参见第 5.2.1 节。）此外还有一个自然映射

$$\Phi_\gamma : \overline{\mathrm{Conf}}_\gamma(\iota) \to (S^3)^{|V_u^A|} \times L^{|V_u^f|}$$

通过记住外腿（即单价顶点）的点。（注意，一个点可以运行到 ∞ where $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$。）

最后，对于任意 $\alpha \in \Omega_c^*((\mathbb{R}^3)^{|V_u^A|} \times L^{|V_u^f|})$，我们定义

$$w_\gamma^{an}(\alpha) = \int_{\overline{\mathrm{Conf}}_\gamma(\iota)} \Phi_\gamma^* \alpha \wedge \Omega_\gamma.$$

该表达式定义了场的总空间上多项式次数为 $m + n + n$ 的局部泛函，我们也将其记为 w_γ^{an}。

定义 A.5。缺陷理论的重整化作用泛函为

$$I_{\mathrm{coup}}^{\mathrm{ren}} = \sum_\gamma \frac{\hbar^{b_1(\gamma)}}{|\mathrm{Aut}(\gamma)|} w_\gamma^{an} w_\gamma^{\mathfrak{g},\rho},$$

它表示对规范场和费米子场的非零模进行积分消去。

我们指出，这个表达式类似于通常的构形空间积分，只是我们允许出现外腿，因此得到的是定义在紧支撑场空间上的泛函。

A.2.4. 量子主方程。正如我们现在将要解释的，这个重整化作用量并不满足量子主方程。不过，根据我们对变形复形的计算，这个障碍是恰当的，正如它必然如此。因此，我们可以修正重整化作用量，从而得到一个量子主方程的解。

我们不会完整刻画这一障碍，也不会说明如何将其平凡化。相反，我们将描述该障碍中的第一个非平凡项，并解释为何它恰好就是通常的自链接问题，这一问题最早由 [BT94]. 发现。

备注 19. 我们预计——但此处不予验证——关于构型空间积分的文献（特别是 [BT94, Thu, AF97, CCRL02,KMV13]）能够使人构造出耦合系统的完整量子化。我们的情形与他们的工作在技术上的主要区别在于，我们允许更一般的图类（特别是包含外边的图）。我们必须重新审视通常的抵消论证，并验证

- 只有对反常面的积分才起作用，并且
- 可以通过一个简单的前因子将其抵消，该前因子考虑了嵌入的 1 维流形每个分支的自链接。

若能将我们的结构性结果与这些作者在构型空间积分方面丰富的计算见解结合起来，将会很有意义。

与第 A.1.4 节类似，我们发现，满足量子主方程（QME）的障碍取决于紧化构形空间边界面的积分。

引理 A.2. 重整化作用泛函未必满足量子主方程。其障碍为

$$\sum_{\gamma} \frac{\hbar^{b_1(\gamma)}}{|\mathrm{Aut}(\gamma)|} w_{\gamma}^{\mathfrak{g},\rho} \int_{\partial\overline{\mathrm{Conf}}_{\gamma}(\iota:L\to\mathbb{R}^3)} \Omega_{\gamma}$$

它由构形空间边界面上的积分给出。

证明。 我们希望计算该障碍

$$\mathrm{d}_{dR} I^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{coup}} + \frac{1}{2}\{I^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{coup}}, I^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{coup}}\} + \hbar\Delta I^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{coup}}.$$

我们的方法与纯陈–西蒙斯理论中的处理方式平行。正如推导公式（13）时所见，斯托克斯定理使我们可以将 $\mathrm{d}_{dR} I^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{coup}}$ 理解为两项之和：一项由在边界$\partial\mathrm{Conf}_\gamma(\iota : L \to \mathbb{R}^3)$ 上积分给出，另一项则通过将每个传播子替换为 BV 括号的积分核得到。

更具体地说，设 γ 是该缺陷理论的一张图。那么，对于任意

$$\alpha \in \Omega^*_c((\mathbb{R}^3)^{|V^A_u|} \times L^{|V^f_u|}),$$

斯托克斯定理给出

$$w^{an}_{\gamma}(\mathrm{d}_{dR}\alpha) = \int_{\partial\overline{\mathrm{Conf}}_{\gamma}(\iota)} \Phi^*\alpha \wedge \Omega_{\gamma} - \sum_{e\in E(\gamma)} (\pm) \int_{\overline{\mathrm{Conf}}_{\gamma}(\iota)} \Phi^*\alpha \wedge \pi_e^* K \wedge \bigwedge_{e'\neq e} \pi_{e'}^* P,$$

其中，对于边 $e \in E^A$，我们用 K^A 替换 P^A；对于边 $e \in E^f$，我们用 K^f 替换 P^f。

障碍中的另一个加项

$$\frac{1}{2}\{I^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{coup}}, I^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{coup}}\} + \hbar\Delta I^{\mathrm{ren}}_{\mathrm{coup}}. \tag{14}$$

会消去由对边求和得到的项。因此，只有对边界的积分会留下来，构成一个障碍。□

A.2.5. 自链接。事实上，由于存在一个编码 L 的自链接积分的图表，障碍项并不为零。考虑一个带有两条外腿的一环图表：一条流入的费米子腿和一条流出的费米子腿。将一条边标记为规范传播子，另一条边标记为费米子热核。对费米子应用 BV 拉普拉斯算子时，会出现这个图表；它源自重整化群流产生的二顶点树。[20]

为简洁明了起见，考虑一个纽结 $L : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$。在有限长度尺度 t 下，我们的积分是在纽结 L 中两个点的构型空间上进行的；被积函数由沿高斯映射拉回 S^2 的体积形式，并乘以定义在 S^1 上的热核 $K_{\mathrm{ff}}[t]$ 构成。$K_{\mathrm{ff}}[t]$ 的 $t \to \infty$ 极限是一个常函数，因为 $K_{\mathrm{ff}}[\infty]$ 是投影到拉普拉斯算子零模上的积分核。因此，被积函数变为沿高斯映射拉回 S^2 的体积形式，进而计算出自链接。

众所周知，选择一种纽结框架，就可以通过加上纽结的总挠率来“修正”这个积分。此时，这个和就是纽结与其沿框架方向的位移之间的链接数。

因此如果我们选择一种链接数为零的框架 τ，那么就可以在作用泛函中加入一个线性项

$$I_\tau(A) = \int_L \mathcal{L}_\tau(L^*A)$$

。（这一项只是对 L沿 A 的拉回进行积分，再将其沿 τ无穷小位移。）与这个最小耦合项取 BV 括号后，得到一个图表，其中一个顶点标记为最小耦合项$\int_L\langle\psi, \rho(i^*A)\psi\rangle$，另一个顶点标记为 I_τ。相应的积分就是总挠率，它会抵消自链接。

References

[AFa] David Ayala 和 John Francis, *Tangle factorization homology*。[AFb] , *The tangle hypothesis: dimension 1*。[AF97] Daniel Altschuler 和 Laurent Freidel, *Vassiliev knot invariants and Chern-Simons perturbation theory to all orders* **187** 1997 2, 261 287 , 《数学物理通讯》（）, 第 – 期。MR 1463829[AF15] David Ayala 和 John Francis, *Factorization homology of topological manifolds*, 《拓扑学》**8**（2015）, 第 4 期, 1045–1084。MR 3431668[AFT17a] David Ayala , John Francis 和 Hiro Lee Tanaka, *Factorization homology of stratified spaces* **23** 2017 1, 293 362 3595895 , 《Selecta Mathematica》（新版）（）, 第 – 期。MR

[20]还有另一个具有这些外腿的图表：一条边标记为规范热核，另一条边标记为费米子传播子。然而，由于规范热核是一个 3-形式，出于次数方面的原因，这个图表为零。

[AFT17b] , *Local structures on stratified spaces*, 《Advances in Mathematics》307（2017）, 903–1028。MR 3590534[AS92] Scott Axelrod 和 I. M. Singer, *Chern-Simons perturbation theory*, 《第二十届理论物理微分几何方法国际会议论文集》, 第1、2卷（纽约，1991）, World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 1992, 第3–45页。MR 1225107[AS94] , *Chern-Simons perturbation theory. II*, 《微分几何学杂志》39 1, 173 1994 213 1258919（）, 第 – 期。MR [BBZB+] Christopher Beem、David Ben-Zvi、Matthew Bullimore、Tudor Dimofte 和 Andrew Neitzke, *Secondary products in supersymmetric field theory* https:// , 可在此处获取。[BD arxiv.org/abs/1809.00009 95] John C. Baez 和 James Dolan, *Higher-dimensional algebra and topological quantum field theory* **36** 1995 11, 6073 6105 , 《数学物理学杂志》 1355899 （）, 第 – 期。MR [ ]

BDSPV Bruce Bartlett、Christopher L. Douglas、Christopher J. Schommer-Pries 和 Jamie Vicary, *Modular categories as representations of the 3-dimensional bordism 2-category* 1509 06811 , arXiv:。。[Bea13]

Chris Beasley, *Localization for Wilson loops in Chern-Simons theory*, 《高级理论数学物理》 **17** 2013 1, 1 240 3066489 （）, 第 – 期。MR BK Bojko Bakalov 和 [01] Alexander Kirillov, Jr., *Lectures on tensor categories and modular functors* 21, , 《大学讲座系列》, 第 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2001 1797619 。MR BN a Dror Bar-Natan, [95] *On the Vassiliev knot invariants*, 《拓扑学》34（1995）, 第2期, 423–472。MR 1318886[BN95b] , *Perturbative Chern-Simons theory*, 《结理论及其分支》4（1995）, 第4期, 503–547。MR 1361082[BR67] Hyman Bass 和 Amit Roy, *Lectures on topics in algebraic K-theory*, Amit Roy 笔记。塔塔基础研究所数学讲义, 第41号, 塔塔基础研究所, 孟买, 1967 0279159 。MR BT Raoul Bott 和 [94] Clifford Taubes, , 《数学物理学杂志》35（1994）, 第 10, 5247 5287, 1295465 期– arXiv:《拓扑学与物理学》。 [68] *Homotopy-everything H-spaces* MR BV J. M. Boardman 和 R. M. Vogt, , 《美国数学会通报》74（1968）, 1117–1122。MR 0236922[BV73] , *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, 《数学讲义》第347卷, 施普林格出版社, 柏林—纽约, 1973。MR 0420609[BZBJ18a] David Ben-Zvi、Adrien Brochier 和 David Jordan, *Integrating quantum groups over surfaces* **11** 2018 4, 873 916 , 《拓扑学杂志》（）, 3847209 第 – 期。MR [18] *Quantum character varieties and braided module categories*BZBJ b , , 《Selecta Mathematica》（新版） **24** 2018 5, 4711 4748 3874702 （）, 第 – 期。 [02] MR CCRL Alberto S. Cattaneo、Paolo Cotta-Ramusino 和 Riccardo Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimension* **2** 2002 949 , 《代数与几何拓扑学》 （）, – 1000。MR 1936977[CG] Kevin Costello 和 Owen Gwilliam, *Factorization algebras in quantum field theory.* , 可在 *Vol. 2* http://people.mpim-bonn.mpg.de/gwilliam/vol2may8.pdf获取。[CG17] , *Factorization algebras in quantum field theory. Vol. 1*, 《新数学专著》第31卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2017。MR 3586504[CM10] Alberto S. Cattaneo 和 Pavel Mn¨ev, *Remarks on Chern-Simons invariants*, 《数学物理通讯》 **293** 2010 3, 803 836 2566163 （）, 第 – 期。MR [ ] Cosa K. J. Costello, *Renormalisation and the Batalin-Vilkovisky formalism*, arXiv:0706.1533。[Cosb] Kevin Costello, *Supersymmetric gauge theory and the Yangian*, arXiv:1303.2632。[Cos11] , *Renormalization and effective field theory*, 《数学调查与专著》第170卷, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2011。MR 2778558[Cos14] , *Integrable lattice models from four-dimensional field theories*, 《纯粹数学专题讨论会论文集》88（2014）, 3–24, arXiv:1308.0370。[CP95] Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley, *A guide to quantum groups*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1995, arXiv:1994年原版的修订重印本。MR 1358358

[CPT+17] Damien Calaque、Tony Pantev、Bertrand To¨en、Michel Vaqui´e 和 Gabriele Vezzosi, *Shifted Poisson structures and deformation quantization* **10** 2017 2, , 《拓扑学杂志》（ ），第 期，–。 483 584 3653319
MR [CWY] Kevin Costello、Edward Witten 和 Masahito Yamazaki, *Gauge Theory and Integrability I* 1709 09993 , , arXiv：。。[Dri89a] V. G. Drinfel'd, *Almost cocommutative Hopf algebras* **1** 1989 2, , 《代数与分析》（ ），第 期，–。 30 46 1025154
MR [Dri89b] *Quasi-Hopf algebras*. 《代数与分析》1（1989），第 6 期，114–148。MR 1047964[Dri90] , *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* / **2** 1990 4, 149 181 1080203 Gal(Q Q), 《代数与分析》（ ），第 期，–。MR [EG23] Chris Elliott 和 Owen Gwilliam, *Framed e_n-algebras from quantum field theory*, 《数学物理评论》35（2023），第 07 期，2350011。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik, *Tensor categories*, 《数学调查与专著》，第 205 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015 年。MR 3242743[ES02] Pavel Etingof 和 Olivier Schiffmann, *Lectures on quantum groups*, 第 2 版，《数学物理讲义》，International Press，萨默维尔，马萨诸塞州，2002 年。MR 2284964[ES19] Chris Elliott 和 Pavel Safronov, *Topological theory of supersymmetric algebras of observables* **371** 2019 2, 727 786 , 《数学物理通讯》（ ），第 期，–。 4019918
MR [79] *On Kirby's calculus of links* **18** FR Roger Fenn 和 Colin Rourke, , 《拓扑学》（1979 1，1 15 528232 ），第 期，–。MR [Fre95] Daniel S. Freed, *Classical Chern-Simons theory. I*, 《高等数学》113 2，237 1995 303 1337109（ ），第 期，–。MR[Fre09] , *Remarks on Chern-Simons theory*, 《美国数学会通报》（新系列）46（2009），第 2 期，221–254。MR 2476413[FS16] J¨ *Symmetries and defects in three-dimensional* urgen Fuchs 和 Christoph *topological field theory* 2014, 93, Schweigert, , String-Math 会议录、《纯粹数学研讨会》，第 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016 年，第 21–40 页。MR 3524232[FS17] , *Low-dimensional topology low-dimensional field theory and representation* , 《表示论——当前趋势与展望》，*theory* EMS 会议报告系列，欧洲数学会，Z¨urich，2017 年，第 255–267 页。MR 3644796[GG14] Owen Gwilliam 和 Ryan Grady, *One-dimensional Chern-Simons theory and the A^ genus* **14** 2014 4, 2299 2377 3331615
（ ），第 期，–。MR[17] GLL Ryan E. Grady、Qin Li 和 Si Li, *Batalin-Vilkovisky quantization and the algebraic index* **317** 2017 575 639 , 3682678
《高等数学》（ ），–。MR [89] GMM E. Guadagnini、M. Martellini 和 M. Mintchev, *Perturbative aspects of the Chern-Simons field theory* **227** 1989 1, 111 117 , 《物理学快报 B》（ ），第 1011230
期，–。MR [18] *Enhancing the filtered derived category* GP Owen Gwilliam 和 Dmitri Pavlov, 《纯粹与应用代数杂志》 **222** 2018 11, 3621 3674 3806745 （ ），第 期，–。MR GRW Owen Gwilliam、[22] Eugene Rabinovich 和 Brian R. Williams, *Factorization algebras and abelian CS/WZW-type correspondences* **18** 2022 , 《纯粹与应用数学季刊》（ ），第 4 期，1485 1553 4504030 –。MR [Gua93] Enore Guadagnini, *The link invariants of the Chern-Simons field theory*, 《数学中的德格鲁伊特论著》，第 10 卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1993 年，arXiv：拓扑量子场论的新发展。MR 1243877[Gwi12] Owen Gwilliam, *Factorization Algebras and Free Field Theories*, ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2012 年，arXiv：博士学位论文——西北大学。MR 3034665[Iac] Vito Iacovino, *Master Equation and Perturbative Chern-Simons theory*, arXiv：0811.2181。[Kap06] Anton Kapustin, *Wilson-'t Hooft operators in four-dimensional gauge theories and S-duality* 3 **74** 2006 2, 025005, 14 2249977 , 《物理学评论 D》（ ）（ ），第 期。MR[Kap10] , *Topological field theory, higher categories, and their applications*, 《国际数学家大会会议录》第 III 卷，Hindustan Book Agency，新德里，2010 年，第 2021–2043 页。MR 2827874[Kas86] Christian Kassel, *A Künneth formula for the cyclic cohomology of /2-graded algebras* —— **275** 1986 4, 683 699 859338 Z, 《数学年刊》（ ），第 期，–。MR

[Kir78] Robion Kirby, *A calculus for framed links in S^3* **45** 1978 1, , 35 56 0467753
《数学发明》（），第 期，–。MR[KMV13] Robin Koytcheff、Brian A. Munson 和 Ismar Voli
´ *Configuration space integrals and* c, 《结理论及其分支》 *the cohomology of the space of homotopy string links*
22（2013），第 11 期，1350061，73。MR 3143578[Kon94] Maxim Kontsevich,
Feynman diagrams and low-dimensional topology, 《第一届欧洲数学大会》，第 II 卷（巴黎，1992），《数学进展》，第 120 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，1994 年，第 97–121 页。MR 1341841[KRT97] Christian Kassel、Marc Rosso 和 Vladimir Turaev, *Quantum groups and knot invariants* ` ´ ´, 《全景与综合》 [
Panoramas and Syntheses], 第 5 卷，法国数学会，巴黎，1997 年。MR 1470954´KT[Christian Kassel 和 Vladimir Turaev，98]，《杜克数学杂志》（），第 期，。MR *Chord diagram invariants of tangles and graphs* **92** 1998 3, 497 552 1620522 Lura[Jacob Lurie,]，
可见于。 *Higher Algebra* http://www.math.harvard.edu/~lurie/ Lurb[,]，可见于。 papers/higheralgebra.pdf *Spectral Algebraic Geometry* http://www.math.harvard.edu/ Lur[, 09]，《数学最新进展》，2008 年，International Press，萨默维尔，马萨诸塞州，2009 年，第 129–280 页。MR 2555928
~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf
*On the classification of topological field theories*May[J. P. May，72]，施普林格出版社，柏林—纽约，1972 年，arXiv：《数学讲义》，第 271 卷。MR 0420610 *The geometry of iterated loop spaces*McD[Dusa McDuff，75]，《拓扑学》14（ *Configuration spaces of positive and negative particles*），–。MR Oht Tomotada Ohtsuki,
1975 91 107 0358766，《结与一切》丛书，第 29 卷，World Scientific Publishing Co.,
[02]
Inc.，里弗埃奇，新泽西州，2002 年，关于结、3-流形及其集合的研究。MR 1881401 *Quantum invariants*Rab[Eugene S. Rabinovich，21]，博士学位论文，2021 年，版权——数据库版权归 ProQuest LLC 所有；ProQuest 不主张对其中各项基础作品拥有版权；最后更新日期——2024-02-25，第 185 页。
*Factorization algebras for bulk-boundary systems*RT[N. Yu. Reshetikhin 和 V. G. Turaev，90]，《数学物理通讯》（），第 期，–。MR *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups* **127** 1990 1, 1 26 RT N. Reshetikhin 和
1036112
V. G. Turaev, [91]
,
《数学发明》（），第 期，–。MR *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups* **103** 1991 3, 547 597 1091619 Sal[Paolo Salvatore,
01]，《同伦论中的上同调方法》（贝拉特拉，1998），《数学进展》，第 196 卷，Birkh
*Configuration spaces with summable labels*auser，巴塞尔，2001 年，第 375–395 页。MR 1851264¨Saw[Justin Sawon，06]，有限型不变量与格罗莫夫-威滕不变量的相互作用（BIRS 2003），《几何与拓扑专著》，第 8 卷，《几何与拓扑》出版物，考文垂，2006 年，第 145–166 页。MR 2402824
*Perturbative expansion of Chern-Simons theory*Sch[Claudia Scheimbauer,]
Factorization homology as a fully extended topological field the-, 可见于。
ory https://people.maths.ox.ac.uk/scheimbauer/ScheimbauerThesis. Seg[Graeme Segal，73]，
pdf
《数学发明》21（1973），213–221。MR 0331377 *Configuration-spaces and iterated loop-spaces*Thu[D. P. Thurston,] , arXiv：math/9901110。*Integral Expressions for the Vassiliev Knot Invariants*Tin[Peter Tingley，17] *A minus sign that used to annoy me but now I know why it is there*, 《纪念Vaughan F. R. Jones 60 岁生日的 2014 年毛伊岛和 2015 年秦皇岛会议录》，《澳大利亚国立大学数学应用中心会议录》，第 46 卷，澳大利亚国立大学，堪培拉，2017 年，第 415–427 页。MR 3635680
*(two constructions of the Jones polynomial)*TV[Bertrand To08] en 和 Gabriele Vezzosi, ,《美国数学会回忆录》（），第 x 期。MR 2394633
¨ *Homotopical algebraic geometry. II. Geomet-* Vol[Ismar Voli07] c, ´, *ric stacks and applications* **193** 2008 902, +224
《结理论及其分支》16（ *A survey of Bott-Taubes integration*），第 期，–。MR Wit Edward Witten,
2007 1, 1 42 2300426，《数学物理通讯》121（1989），第 3 期，351–399。MR
[89]
990772