arXiv:2602.12462v1 [math.GT] 12 Feb 2026

^格罗滕迪克-Teichm¨üller 群 GT 作用于亏格 g映射类群，其中标记点数为0 或1

PIERRE LO CHAK、HIROAKI NAKAMURA 和 LEILA SC HNEPS

Abstract. 本文旨在证明，对于任意 $g > 0$，格罗滕迪克-Teichm¨üller 群 $\widehat{GT}$ 作用于$\widehat{\Gamma}_{g,0}$ 以及 $\widehat{\Gamma}_{g,1}$，即带有 0 个或 1 个标记点的（完整）profinite 亏格 g 映射类群。

Contents

1. 主定理 1 2. 亏格零的一些背景材料 2 3. 纯映射类群的表现$\Gamma_{g,1}$ 5 4. 德恩扭转 d 与亏格 2 的情形 7 5. 关系（C）与亏格 3 的情形 10 6. 关系（C′）与一般情形 $g \geq 4$ $n > 1$ 14^7. $\Gamma_{g,0}$ 的情形 15^8. 关于 $\Gamma_{g,n}$, 19一般情形的展望 附录 A. (5.2) 的直接推导 19 参考文献 24

1. 主定理

考虑下图所示的拓扑曲面 $\Sigma_{g,\ m}^{n}$ 其亏格为 g ，有 n个标记点和 m个边界分支:

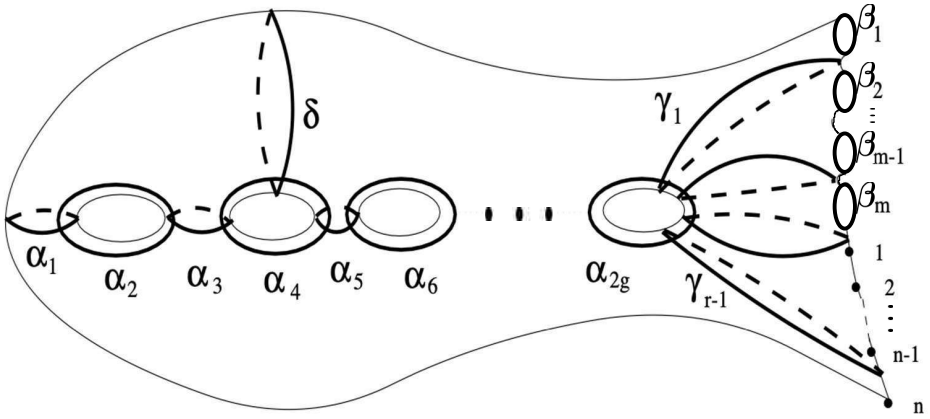


Figure 1. 曲面 $\Sigma_{g,\ m}^{n}$ $(r = m + n)$上的简单闭曲线，其德恩扭转生成纯映射类群

为简便起见，我们将曲面上的简单环路（简单闭曲线）简称为环路。原则上，我们用希腊字母表示环路，用罗马字母表示沿这些环路的德恩扭转。设 $m = 0$。Wajnryb[W] 和 Gervais [G] 给出了纯映射类群 $\Gamma_{g,n}$ 的一个有限表示，它由德恩扭转 a_i沿 α_i（其中 $i = 1, \ldots, 2g$）、 d沿 δ，以及 g_i沿 γ_i（其中 $i = 1, \ldots, n-1$）生成。本文

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 14E20，次要分类 20F34。

Key words and phrases. 映射类群，格罗滕迪克-泰希米勒群。

主要将注意力限于 $n=1$ 的情形，此时环路 $\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1}$ 不存在；下文定理 3.1 将给出这一情形下的完整有限表示。

我们将 $\Gamma_{g,1}$ 的有限完备化记为 $\widehat{\Gamma}_{g,1}$；它在拓扑意义上由与离散版本相同的生成元和关系所表示。众所周知，格罗滕迪克-泰ich米勒群 GT 作用于亏格 0 纯映射类群 $\Gamma_{0,n}$ （其中 $n\geq 4$），且该作用遵循格罗滕迪克在 [Gr] 中提出的“乐高”规则。乐高规则并非亏格 0 所独有； [HLS] 中明确阐述了该规则适用于各种类型的曲面 (g,n)。然而， [HLS] 和 [NS] 已证明，为使 GT 的元素能够作为自同构作用于 $\Gamma_{g,n}$ ，并遵循乐高规则，必须在 GT 的三个定义条件之外加入一个新条件（首次由 [LNS] 引入）。不过，目前尚不清楚这一附加条件是否确实定义了 GT 的真子群，也尚不清楚完整群 $\widehat{GT}$ 是否能以某种未必遵循乐高规则的方式成为 $\Gamma_{g,n}$ 的自同构。除这些证明某个（可能是完整的） GT 子群可与遵循乐高规则的 $\Gamma_{g,n}$ 自同构群相对应的研究外，尚不清楚 GT 是否以及如何能够与 $\Gamma_{g,n}$ 的自同构群相对应；仅有的例外是 $\Gamma_{1,1}$ 和 $\Gamma_{1,2}$ 这两个特例。它们与零亏格群 $\Gamma_{0,[4]}$ （完整的零亏格映射类群）及 $\Gamma_{0,5}$ 极为相似，因此可以证明 GT 确实作用于这些群，尽管未必遵循乐高规则（对于 $\Gamma_{1,2}$，由于缺少这一附加关系）。

本文的主要结果指出，事实上， GT 给出了由有限群化映射类群 $\Gamma_{g,0}$ 和 $\Gamma_{g,1}$（对所有 $g\geq 1$）构成的塔的自同构群。根据 Wajnryb [W], 给出的有限表示，群 $\Gamma_{g,1}$ 和 $\Gamma_{g,0}$ 具有相同的生成元 $d,a_1,\dots,a_{2g}$，即沿图 1 中所示对应简单闭曲线 $\delta,\alpha_1,\dots,\alpha_{2g}$ 的德恩扭转；而 $\Gamma_{g,0}$ 的表现与 $\Gamma_{g,1}$ 的表现相同，只多出一个关系。我们在定理 3.1 中回顾 $\Gamma_{g,1}$ 的表现，并在定理 7.2 中回顾 $\Gamma_{g,0}$ 的额外定义关系。

定理 1.1。 设 $F=(\lambda,f)\in GT$。以下由 F 给出的作用定义在生成元 d、a_1、……、a_{2g} 上，并作用于 $\Gamma_{g,0}$ 或 $\Gamma_{g,1}$ 中的任意一个，且可延拓为该群的一个自同构：

$$\begin{cases} F(a_1)=a_1^{\lambda} \\ F(d)=d^{\lambda} \\ F(a_i)=f(a_i^2,y_i)a_i^{\lambda}f(y_i,a_i^2) \quad for\ 2\leq i\leq 2g, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，对于 $2\leq i\leq 2g$，有 $y_i=a_{i-1}\cdots a_1^2\cdots a_{i-1}$。

下一节中，我们回顾一些背景材料，主要是由生成元 d、a_1、……、a_{2g} 及标记为（A）、（B）、（C）和（C′）的 Wajnryb 关系给出的映射类群 $\Gamma_{g,1}$ 的表现，见定理 3.1；同时还将介绍 Drinfeld（[D]）给出的作用于这些群的 GT 自同构。在第 3 节和第 4 节中，我们证明 $\Gamma_{2,1}$ 情形下的主定理；这只需证明定理 1.1 中提出的 $F\in\widehat{GT}$ 作用尊重关系（A）和（B）。在第 5 节中，我们通过证明所声称的 GT 作用尊重关系（C），从而解决 $\Gamma_{3,1}$ 的情形，并为一般情形 $g\geq 4$ 做好准备；一般情形将在第 6 节中通过验证关系（C′）同样得到尊重而最终解决。最后，第 7 节包含了群 $\Gamma_{g,0}$ 情形下主定理的证明，方法是证明 GT 作用尊重从 1 个标记点过渡到 0 个标记点所需的另一个关系（D）。第 8 节展望了未来工作的若干方向。作者指出，下面的大部分计算和证明都源自我们未发表的讨论；这些讨论最终促成了 1997 年的短篇论文 [LNS] 。

2. </style'>亏格 z 中的一些背景材料 ero

这里回顾一些关于 GT 对 n 股上的完整有限 Artin 辫群 B_n 的作用的已知事实。首先介绍 Drinfeld 给出的原始结果（见 [D]）。

定理 2.1. 设 $F=(\lambda,f)\in GT$。那么，对于所有 $n\geq 3$， F 都通过以下公式诱导出有限 *Artin* 辫群 B_n 的一个自同构

$$F(\sigma_1)=\sigma_1^{\lambda},\qquad F(\sigma_i)=f(\sigma_i^2,\eta_i)\sigma_i^{\lambda}f(\eta_i,\sigma_i^2)\ \ for\ \ 2\leq i\leq n-1. \tag{2.1}$$

此作用还满足

$$F(\eta_i)=\eta_i^{\lambda},\quad F(\omega_i)=\omega_i^{\lambda}\ \ for\ i=2,\dots,n$$

其中 $\eta_i = \sigma_{i-1}\cdots\sigma_1\cdot\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}$和 $\omega_i = (\sigma_1\cdots\sigma_{i-1})^i$。

定义 2.2. 由 n 个点组成的括号化包含 k 对括号，并满足 $1 \le k \le n-2$，其中没有一对括号包含所有点；若一对括号包含另一对中的一个括号，则它必须同时包含该对括号中的两个括号（见下方示例）。极大括号化包含 $n-2$ 对括号。对一个括号化进行*A*-移动，即将一组括号配置（X_1, X_2） X_3 替换为配置 X_1,（X_2, X_3），反之亦然；其中 X_i 表示一个点或一组连续的点，这些点包含在一个括号内（该括号本身也可能包含其他更小的括号）。

示例 2.2.1. 以下是 $x_1,\dots,x_6$ 的两种括号化示例：$((x_1,x_2),(x_3,x_4)),(x_5,x_6)$ 和 $(x_1,x_2),(x_3,x_4),(x_5,x_6)$。6 个点的极大括号化包含 $n-2=4$ 对括号，因此例如可以取

$$(((x_1,x_2),(x_3,x_4)),x_5),x_6 \quad \text{or} \quad ((x_1,x_2),(x_3,x_4)),(x_5,x_6).$$

这两个极大括号化相差一次 A-移动。极大括号化：

$$(((x_1,x_2),(x_3,x_4)),x_5),x_6 \quad \text{and} \quad (((x_1,x_2),x_3),x_4),(x_5,x_6)$$

相差两次彼此可交换的 A-移动。

定理 2.3. 设 $n \ge 3$。设 $F \in GT$，并令 F 表示由自同构 F 在 (2.1) 中所述的作用诱导的 B_n 的外自同构。那么

(i) 对于 n 个点的每种极大括号化 $\mathcal{B}$，都存在 F 到 B_n的一个自同构 $F_{\mathcal{B}}$ 的提升，具有如下性质：若 i、$\cdots$、j 表示一对括号所包围的连续点集（不论该对括号内是否还有更小的括号集），那么记 $T_{i,\cdots,j}$ 为辫子束 i，…，j，$F_{\mathcal{B}}$ 的全扭转，则其作用于 $T_{i,\dots,j}$ 的方式为 $F(T_{i,\dots,j}) = T^{\lambda}_{i,\dots,j}$。

(ii) 设 $X_1 = (x_i, \dots, x_j)$ 和 $X_2 = (x_{j+1}, \dots, x_k)$ 是 B_n 中两个连续的连续辫股包。令 σ_{X_1,X_2} 表示包 X_1 向右越过包 X_2 的平交叉（因此，全扭转 $T_{i,\dots,k}$ 由 $T_{i,\dots,j} = \sigma^2_{X_1,X_2} T_{i,\dots,j} T_{j+1,\dots,k}$ 给出）。若 $\mathcal{B}$ 是一种包含配置 (X_1, X_2) 的括号化，则相应的 B_n 自同构作用为

$$F_{\mathcal{B}}(\sigma_{X_1,X_2}) = \sigma^{\lambda}_{X_1,X_2}. \tag{2.2}$$

(iii) 若两个括号化 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 相差一次 *A*-移动，即该移动将一对括号从包含连续点集 $i, \dots, j$ 变为包含连续点集 $i', \dots, j'$，则相应的自同构 $F_{\mathcal{B}}$ 和 $F_{\mathcal{B}'}$ 满足

$$F_{\mathcal{B}'} = \operatorname{inn} f(T_{i,\dots,j}, T_{i',\dots,j'}) \circ F_{\mathcal{B}}. \tag{2.3}$$

例 2.3.1. $\mathcal{B}_0$ 由包含点 $1,\dots,i$ 的括号对组成，称为 $2 \le i \le n-1$的标准括号化 。

引理 2.4. 式(2.1) 中给出的 $F \in GT$ 在有限 *Artin* 辫群 B_n 上的 *Drinfeld* 作用，是与标准括号化 $\mathcal{B}_0$相关联的自同构 $F_{\mathcal{B}_0}$ 。

证明. 根据定理 2.3 (i)， $F_{\mathcal{B}_0}$ 通过 λ 作用于 σ_1 和 ω_i，其中 $2 \le i \le n$。为确定$F_{\mathcal{B}_0}$ 对 B_n的其他生成元 σ_i 的作用，我们注意到，对每个 $i > 1$，通过删去包围点 $1, \dots, i$ 的那一对括号，并将其替换为包围点 i 和 $i+1$ 的那一对括号，从而对 $\mathcal{B}_0$ 进行的修改都是一次 A-移动。令 $\mathcal{B}_i$ 表示对$i = 2, \dots, n-1$进行此 A-移动后得到的括号化，定理 2.3 (iii) 告诉我们， $F_{\mathcal{B}_0} = \operatorname{inn} f(T_{1,\dots,i}, \sigma_i^2) \circ \mathcal{B}_0$。一对连续辫股上的全扭转 $T_{i,i+1}$为 σ_i^2，而$T_{1,\dots,i}$ 上的全扭转等于 ω_i。在辫群 $\widehat{B}_n$中， ω_i 和 η_i彼此之间以及相互之间都可交换，并满足恒等式 $w_{i-1}\eta_i = \omega_i$。此外，w_{i-1}与 σ_i可交换。因此 $f(\omega_i, \sigma_i^2) = f(w_{i-1}\eta_i, \sigma_i^2) = f(\eta_i, \sigma_i^2)$（因为 w_{i-1}与 η_i和 σ_i^2 均可交换，且 f 是一个（有限）交换子）。所以 $F_{\mathcal{B}_0}$ 的作用恰好就是式 (2.1) 中给出的作用。□

最后，我们得到以下命题，它是一个更一般原理的特例；我们将在下文第 5、6 节中用到这一原理。

定理 2.5。设 $n = 8$，设 $X_1 = (x_1, x_2)$、 $X_2 = (x_3, x_4)$、 $X_3 = (x_5, x_6)$ 和 $X_4 = (x_7, x_8)$，并固定一种极大括号化

$$\mathcal{B} = ((X_1, X_2), X_3), X_4 = (((x_1, x_2), (x_3, x_4)), (x_5, x_6)), (x_7, x_8).$$

Set

$$\begin{cases}\tau_1 = \sigma_{X_1,X_2} = \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 \\ \tau_2 = \sigma_{X_2,X_3} = \sigma_4\sigma_3\sigma_5\sigma_4 \\ \tau_3 = \sigma_{X_3,X_4} = \sigma_6\sigma_5\sigma_7\sigma_6. \end{cases} \tag{2.4}$$

Then

(i) 子群 $\langle\tau_1,\tau_2,\tau_3\rangle \subset B_8$ 与 B_4 同构，且 $F_{\mathcal{B}}$ 在该子群上的作用是 ***Drinfeld***作用(2.1)，其中 σ_i 替换为 τ_i。

(ii) $F_{\mathcal{B}}$ 与标准 ***Drinfeld***自同构 $F = F_{\mathcal{B}_0}$ 的关系由

$$F_{\mathcal{B}} = \mathrm{inn}\left(f(\eta_3,\sigma_3^2)f(\eta_5,\sigma_5^2)f(\eta_7,\sigma_7^2)\right)\circ F.$$

证明。(i) 包 X_1 与 X_2 出现在 $\mathcal{B}$中，且 $\tau_1 = \sigma_{X_1,X_2}$，因此由 (2.2) 我们有 $F_{\mathcal{B}}(\tau_1) = \tau_1^\lambda$。对于$i = 2,3$，令 $Y_i = \tau_i\cdots\tau_1^2\cdots\tau_i$。

考虑极大括号化

$$\begin{cases}\mathcal{B} = (((x_1,x_2),(x_3,x_4)),(x_5,x_6)),(x_7,x_8) \\ \mathcal{B}' = ((x_1,x_2),((x_3,x_4),(x_5,x_6))),(x_7,x_8) \\ \mathcal{B}'' = ((x_1,x_2),(x_3,x_4)),((x_5,x_6),(x_7,x_8)). \end{cases} \tag{2.5}$$

第二个与第一个的差别仅在于一次 A-移动，该移动将包含 1,2, 3, 4 的那对括号变为包含 3, 4,5, 6 的那对括号；第三个与第一个的差别仅在于一次 A-移动，该移动将包含 1, 2, 3, 4, 5, 6 的那对括号变为包含 5, 6, 7,8 的那对括号。因此，由定理 2.3，我们有

$$\begin{cases}F_{\mathcal{B}'} = \mathrm{inn}\, f(T_{1234},T_{3456})\circ F_{\mathcal{B}} \\ F_{\mathcal{B}''} = \mathrm{inn}\, f(T_{123456},T_{5678})\circ F_{\mathcal{B}}. \end{cases} \tag{2.6}$$

由定理 2.3 (ii)，我们有

$$\begin{cases}T_{1234} = \sigma_{X_1,X_2}^2\sigma_1^2\sigma_3^2 = \tau_1^2\sigma_1^2\sigma_3^2 \\ T_{3456} = \sigma_{X_2,X_3}^2\sigma_3^2\sigma_5^2 = \tau_2^2\sigma_3^2\sigma_5^2 \\ T_{5678} = \sigma_{X_3,X_4}^2\sigma_5^2\sigma_7^2 = \tau_3^2\sigma_5^2\sigma_6^2. \end{cases} \tag{2.7}$$

由于 X_3 和 X_4 出现在 $\mathcal{B}'$ 和 $\sigma_{X_3,\ X_4} = \tau_2$ 中，因此由 (2.2) 可得 $F_{\mathcal{B}'}(\tau_2) = \tau_2^\lambda$。由于 σ_1^2、σ_3^2 和 σ_5^2 与 T_{1234}、T_{3456} 和 $Y_2 = \tau_1^2$ 交换，我们得到*

$$f(T_{1234},T_{3456}) = f(\tau_1^2\sigma_1^2\sigma_3^2,\tau_2^2\sigma_3^2\sigma_5^2) = f(\tau_1^2,\tau_2^2) = f(Y_2,\tau_2^2).$$

Thus

$$F_{\mathcal{B}}(\tau_2) = f(\tau_2^2,Y_2)\tau_2^\lambda f(Y_2,\tau_2^2).$$

只需利用 (2.7) 和 (2.6) 的第二行计算 $F_{\mathcal{B}}(\tau_3)$。为此，我们将全扭转 T_{123456} 明确写出：

$$T_{123456} = \sigma_{X_1,X_2}^2\sigma_{X_2,X_3}\sigma_{X_1,X_2}^2\sigma_{X_2,X_3}\sigma_1^2\sigma_3^2\sigma_5^2$$

（通过编辫最容易验证）。由于 σ_1^2、σ_3^2 和 σ_5^2 与 T_{123456} 和 T_{5678} 交换，我们有

$$f(T_{123456},T_{5678}) = f\big(\sigma_{X_1,X_2}^2\sigma_{X_2,X_3}\sigma_{X_1,X_2}^2\sigma_{X_2,X_3},\sigma_{X_3,X_4}^2\big).$$

由于 $\sigma_{X_1,\ X_2}^2$ 与两个参数都交换，因此可以在左参数中消去该项的左乘，得到 $f(\sigma_{X_2,\ X_3}\sigma_{X_1,\ X_2}^2\sigma_{X_2,\ X_3}, \sigma_{X_3,\ X_4}^2)$。利用 $\tau_2 = \sigma_{X_2,\ X_3}$ 和 $\tau_3 = \sigma_{X_3,\ X_4}$，我们便可写成

$$f(T_{123456},T_{5678}) = f(\tau_2\tau_1^2\tau_2,\tau_3^2) = f(Y_3,\tau_3^2). \tag{2.8}$$

由于 $\sigma_{X_3,\ X_4} = \tau_3$ 且这些包 $(X_3,\ X_4)$ 属于 $\mathcal{B}''$ 的一部分，因此我们有 $F_{\mathcal{B}''}(\tau_3) = \tau_3^\lambda$。因此，(2.6) 的第二行与 (2.8) 告诉我们

$$F_{\mathcal{B}}(\tau_3) = f(\tau_3^2,Y_3)\tau_3^\lambda f(Y_3,\tau_3^2).$$

证明至此结束。

(ii) 由定理 2.3 可直接得出。注意，极大括号化 $\mathcal{B}$ 是通过三次两两可交换的 A-移动从标准极大括号化 $\mathcal{B}_0$ 得到的：将围住

*第 5 节中的俳句引理 (ii) 详细阐述了这一标准交换关系结果。

1，2，3 的一对括号改为围住 3，4 的一对括号，将围住 1，2，3，4，5 的一对括号改为围住 5，6 的一对括号，并将围住 1，2，3，4，5，6，7 的一对括号改为围住 7，8：

$$((((((x_1,x_2),x_3),x_4),x_5),x_6),x_7),x_8 \mapsto (((((x_1,x_2),(x_3,x_4)),x_5),x_6),x_7),x_8$$
$$\mapsto ((((x_1,x_2),(x_3,x_4)),(x_5,x_6)),x_7),x_8 \mapsto (((x_1,x_2),(x_3,x_4)),(x_5,x_6)),(x_7,x_8).$$

□

3. 纯映射类群的表现$\Gamma_{g,\,1}$

3.1. Wajnryb 对$\Gamma_{g,\,1}$的表示。 在本背景部分中，我们回顾 $\Gamma_{g,\,1}$ 的 Wajnryb-Gervais 表示，它由上文图 1 所示的生成元给出，适用于情形 $n=1$，因此不包含沿曲线 γ_i 的任何德恩扭转 g_i。

定理 3.1 (Wajnryb [W])。 设 $g>1$。以下是映射类群 $\Gamma_{g,\,1}$ 的一个有限表示。生成元为沿图 *1* 所示相应简单闭曲线的德恩扭转 $a_1, a_2, \ldots, a_{2g}$ 以及 d；另见图 *2*，其中 $d_2=d$。定义

$$\begin{cases} y_k = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_2 a_1^2 a_2 \cdots a_{k-1}a_k \ \textit{for}\ k=2,\ldots,2g+1 \\ t_k = a_{2k}a_{2k-1}a_{2k+1}a_{2k} \ \textit{for}\ k=1,\ldots,g-1 \\ d_3 = (t_1^{-1}t_2^{-1}d_2t_2t_1)(t_2^{-1}d_2t_2)d_2a_1^{-1}a_3^{-1}a_5^{-1} \\ d_2' = y_5 d_2 y_5^{-1} \\ d_3' = y_7 d_3 y_7^{-1}. \end{cases} \tag{3.1}$$

T则上述生成元之间的以下关系给出了 $\Gamma_{g,1}$ 的一个表现：
(A) $a_ia_{i+1}a_i = a_{i+1}a_ia_{i+1}$ 对于 $i=1,\ldots,2g-1$,a_i 与 a_j 交换，且 $|i-j|\geq 2$,$d_2a_4d = a_4d_2a_4$,d_2 与 a_j 交换；**(B)** $d_2d_2' = (a_1a_2a_3)^4$；**(C)**（仅对 $g\geq 3$有必要） $d_3a_6d_3 = a_6d_3a_6$；**(C′)**（仅对 $g\geq 4$有必要） d_2' 与 $(t_2t_1t_3t_2)d_2(t_2t_1t_3t_2)^{-1}$交换。

证明。 这个表现可以很容易地从 Wajnryb 在 [W] 中给出的 Wajnryb 表示推导出来。事实上，Wajnryb 所写的原始关系（C）在这里被拆分为两个更简单的独立关系。这是可行的，因为 Wajnryb 只使用他的（C）来证明另外两个关系，即其证明中的（18）和（30），而我们选择在这里使用这两个关系来代替原来更复杂的形式。他的（30）就是我们的（C），而他使用其（C）证明的（18）中的关系就是我们的（C′）。更确切地说，在 Wajnryb 的记号中，他将此表述为 e 与 d_{34}的交换；这里，e 是我们的 d'，而 d_{34} 是 $(t_2t_1t_3t_2)d(t_2t_1t_3t_2)^{-1}$。□

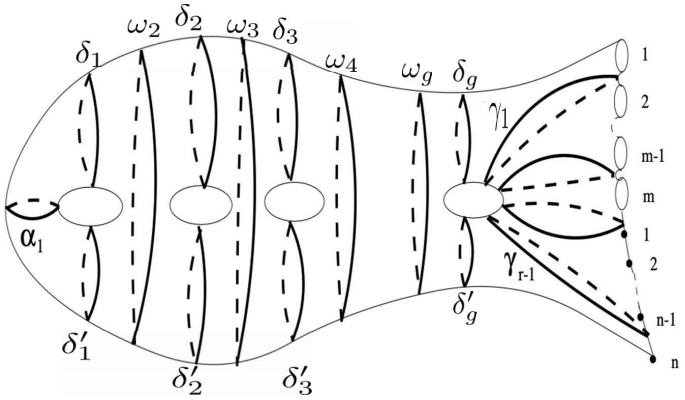


FIGURE 2. 环路 δ_k、δ_k' 和 ω_k（其中 $\alpha_1=\delta_1=\delta_1'$）

关于记号约定的注记。 Wajnryb [W]在映射类群中使用沿（简单）环路 γ 的右扭转，该群从右侧作用在曲面上：若我们有扭转 g, g'，它们沿环路 γ, γ'

分别地，则沿环路 $(\gamma')g$ 的扭转由 $g^{-1}g'g$给出。在以下讨论中，我们将此约定（以遵循大多数其他文献）改为相反的约定，其中沿环路的左扭转从左侧作用在曲面上，并且扭转 g 作用在环路 γ' 上给出环路 $g(\gamma')$，其相应的扭转为 $gg'g^{-1}$。特别地，这改变了扭转的乘法（或复合）次序：若 $(g_1,\dots,g_n)$ 是沿一列环路 $(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ 的右扭转，则这些扭转按 $g_1,\dots,g_n$ 的次序作用的复合，在 Wajnryb 约定（右作用）中会写成 $g_1\cdots g_n$，但同一作用在我们的约定中（右扭转 g_i^{-1} 以相同次序从左侧作用）写成 $g_n^{-1}\cdots g_1^{-1}=(g_1\cdots g_n)^{-1}$。从右作用改为左作用以及复合记号的相应改变，其效果是确保 Wajnryb 恒等式在两种记号下保持不变。

我们来用图示解释定理 3.1 中的一些关系。首先注意到，(A) 中的关系直接源于沿不相交环路的扭转彼此可交换，而对于任意一对交于单点的环路，沿其进行的扭转满足辫群关系 $aba=bab$ $a,\ b$ $\alpha,\ \beta$。

接下来我们注意到，元素 $w_k=(a_1\dots a_{k-1})^k$ 是 B_k 中心的像，它与包含辫环路 α_1、.....、α_{k-1} 的 $\Gamma_{g,\,1}$ 最小子曲面边界上的扭转相连。若 k 为奇数，则 w_k^2 是图 2 中环路 $\omega_{(k+1)/2}$ 上的扭转；若 k 为偶数，则 w_k 是沿 $\delta_{k/2}$ 和 $\delta'_{k/2}$ 切割所得曲面边界上的扭转，即 $w_k=d_{k/2}d'_{k/2}$。这解释了关系 (B)。

关系（C），辫群关系 $d_3a_6d_3=a_6d_3a_6$ 显然成立，但要将这一关系纳入表现中，就意味着 d_3 必须表示为生成集 d（$=d_2$） $a_1,\dots,a_{2g}$ 中的元素，如（3.1）所示。为此，我们先介绍图 3，其中展示了一些定义、环路和恒等式，它们将在后文中发挥作用。

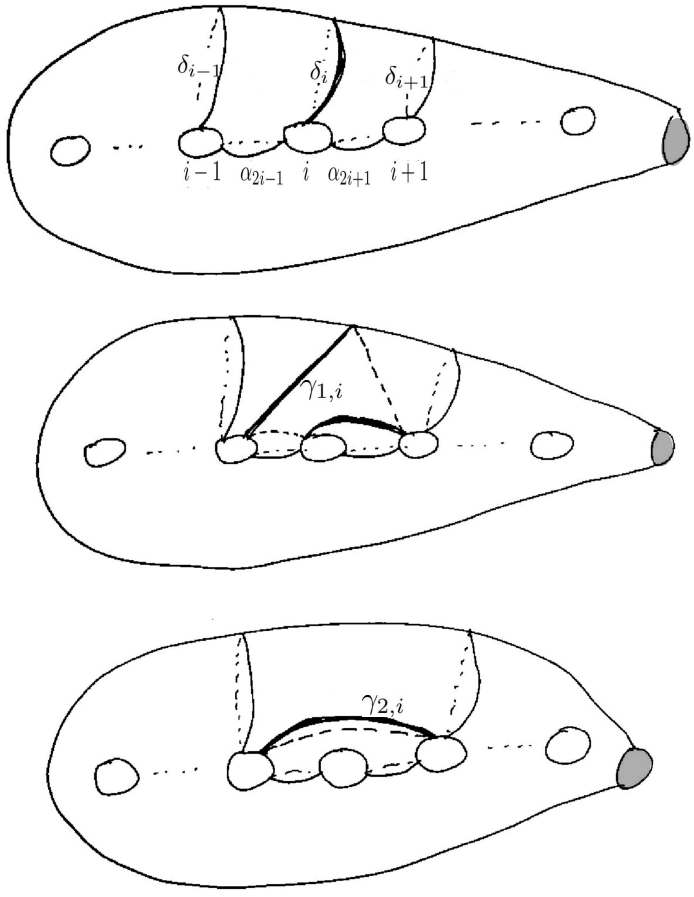


FIGURE 3. 中间图中的粗体环路$\gamma_{1,i}$ 由 t_i^{-1} (δ_i) 给出；其德恩扭转为$t_i^{-1}d_it_i$。最下方图中的粗体环路$\gamma_{2,i}$ 由 $(t_it'_{i-1})^{-1}$ (δ_i) 给出；其德恩扭转为 $t'^{-1}_{i-1}t_i^{-1}d_it_it'_{i-1}$。

定义 3.2。我们为第 i 个亏格孔关联三条环路（见图 3）。第一条是图 3 上方示意图中描绘的环路 δ_i。第二条是图 3 中间示意图中的环路$\gamma_{1,\,i}$，定义为

3，由 $\gamma_{1,\,i}=t_i^{-1}$ (δ_i) 定义，其中 $t_i=a_{2i}a_{2i-1}a_{2i+1}a_{2i}$。最后，底部环路$\gamma_{2,\,i}$ 由$\gamma_{2,\,i}=t_{i-1}'^{-1}\cdot t_i^{-1}$ (δ_i) 给出，其中我们定义 $t_{i-1}'=a_{2i-2}d_{i-1}a_{2i-1}a_{2i-2}$。图 3 中所示的三条环路构成一个灯笼，因此与之关联的三个德恩扭转 $t_{i-1}'^{-1}t_i^{-1}d_it_it_{i-1}'$、 $t_i^{-1}d_it_i$ 和 d_i 的乘积等于边界扭转的乘积，即 $d_{i-1}a_{2i-1}a_{2i+1}d_{i+1}$。

注3.2.1。我们简要说明为何 t_i^{-1} (δ_i)恰好是环路$\gamma_{1,\,i}$。只需说明 $i=2$的情形。微分同胚 $t_1a_1a_3=(a_2a_1a_3)^2$ 和 $t_2a_3a_5=(a_4a_3a_5)^2$ 同时作用于由 α_1、 α_3、 α_5 和 δ_3 围出的子曲面 S_2 以及由前三个相同的环路和 δ_3'围出的镜像子曲面S_2'；实际上，在 t_1的情形下，我们有$(t_1a_1a_3)^2=w_4=d_2d_2'$。然而，限制在子曲面 S_2上时，微分同胚 $t_1a_1a_3$ 和 $t_2a_3a_5$ 的作用类似于沿环路 δ_2 和γ_2进行半扭转。用辫子来表示，辫股1、……6对应于绕水平轴旋转时，位于$(g,\,1)$曲面中前三个亏格孔左右两侧的分歧点；半扭转 $t_1a_1a_3$ 和 $t_2a_3a_5$ 使相应的四条辫股发生一次半扭转编辫（通常记作 $a_1a_2a_1a_3a_2a_1$ 和 $a_3a_4a_3a_5a_4a_3$，但它们分别等于$(a_2a_1a_3)^2$ 和$(a_4a_3a_5)^2$）。

现在让我们回到 Wajnryb 给出的关系，用生成元 $d=d_2$，a_1，……，a_{2g}来表示 d_3：

$$d_3=(t_1^{-1}t_2^{-1}d_2t_2t_1)(t_2^{-1}d_2t_2)d_2a_1^{-1}a_3^{-1}a_5^{-1}.$$

结合带有 $i=2$ 的定义 3.2，这个复杂公式的含义便一目了然。在$i=2$的情形下，图 3 展示了三个环路 δ_2 $\gamma_{1,\,2}=t_2^{-1}(\delta_2)$ 和 $\gamma_{2,\,2}=t_1'^{-1}t_2^{-1}(\delta_2)$。但事实上，尽管一般而言$t_i'\neq t_i$，结果却是 $t_1'=t_1$，因为 $\delta_1=\alpha_1$。因此 $\gamma_{2,\,2}=t_1^{-1}t_2^{-1}(\delta_2)$。这三个环路对应的德恩扭转分别为 $t_1^{-1}t_2^{-1}d_2t_2t_1$、 $t_2d_2t_2^{-1}$和 d_2，它们的乘积是一个灯笼乘积，因此等于四个边界分支的乘积：

$$t_1^{-1}t_2^{-1}d_2t_2t_1\cdot t_2d_2t_2^{-1}\cdot d_2=a_1a_3a_5d_3.$$

这解释了 (3.1) 中给出的 d_3 的定义公式。

同一幅图有助于理解关系 (C′)。这里，辫子 $t_2t_1t_3t_2$ 最好理解为平辫：第 1、2、3、4 股在第 5、6、7、8 股上方交叉并向右延伸。这个微分同胚仅在亏格 ≥ 4时存在，并保持曲面的上半部不变。更准确地说，它作用于 δ_2，将其映为与 δ_2'不相交的曲线$\gamma_{2,\,3}$（见图 3），因此相应的两个扭转可交换，这正是 (C′) 的陈述。

4. 德恩扭转 d与亏格 2 的情形

$\widehat{}$ $\widehat{}$本节开始研究元素 $F=(\lambda,\ f)\in GT$在$\Gamma_{g,\,1}$上的作用。按照定理 1.1 的设想，我们将证明所提出的 F 作用满足 (A) 中的所有关系以及关系 (B)，这足以证明 $F\in GT$ 给出了映射类群 $\widehat{}\Gamma_{2,\,1}$的一个自同构。

首先，我们需要一些关于从辫群到$\Gamma_{g,\,1}$的同态的技术结果，这些结果将在第一个小节中给出。注意，Wajnryb 对$\Gamma_{g,\,1}$ 的表示也是有限完备化 $\Gamma_{g,\,1}$的一个拓扑呈示。由于所有关于 GT 的内容都处于有限生成群的语境中，从这里开始我们只考虑映射类群的有限完备化。

$\widehat{}$4.1. 从 Artin 辫群到$\Gamma_{g,\,1}$。

第一条引理仅涉及 profi-$\widehat{}$nite Artin辫群 B_{2k} 及其一个特定商群。

引理 4.1. 设 $k\geq 1$。对 $2\leq i\leq 2k$，令 $\eta_i=\sigma_{i-1}\cdots\sigma_1^2\cdots\sigma_{i-1}$与 $\omega_i=(\sigma_1\cdots\sigma_{i-1})^i$属于 $\widehat{B}_{2k}$。则对 $F\in\widehat{GT}$，由 (2.1) 给出的 $\widehat{B}_{2k}$ 的自同构可传递到商群 $\widehat{B}_{2k}':=\widehat{B}_{2k}/\langle\omega_{2k-1}^{-1}\eta_{2k}\rangle$，并且在该商群中我们有

$$F(\sigma_{2k-1})=\sigma_{2k-1}^{\lambda}.$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$证明。我们将使用标准恒等式 $\omega_i=\eta_2\cdots\eta_i$，它们在 B_{2k}和 B_{2k}'中均成立。(2.1) 中给出的 $\widehat{B}_{2k}$的标准自同构 F满足：对 $1\leq i\leq 2k$，有 $F(\eta_i)=\eta_i^{\lambda}$以及 $F(\omega_i)=\omega_i^{\lambda}$。由于所有$\eta_i$ 与 ω_i 在 $\widehat{B}_{2k}$中两两交换，子群 $\langle\omega_{2k-1}^{-1}\eta_{2k}\rangle\subset\widehat{B}_{2k}$ 被 F保持，因此 F 在 $\widehat{B}_{2k}$ 上的作用可传递到商群 $\widehat{B}_{2k}'$。剩下只需证明，在 $\widehat{B}_{2k}'$中有 $F(\sigma_{2k-1})=\sigma_{2k-1}^{\lambda}$。

$\widehat{}$考虑由 η_{2k-1} 和 σ_{2k-1}生成的B_{2k}'。我们也可以将这两个生成元$x=\eta_{2k-1}$ 和 $y=\eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}^{-1}$ 作为同一个子群的生成元。下面证明 x^2 和 y^2 都位于子群 $\langle x,y\rangle$ 的中心。我们先证明 $x^2=\eta_{2k-1}^2$ 与 σ_{2k-1}可交换。事实上，

$\widehat{\ }$ $\overset{\frown}{w}_{2k}$ 位于 B_{2k} 的中心，因此其像也位于 B'_{2k}的中心，所以它与 B'_{2k}中的 $\sigma_{2k-1}\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$可交换，而在 B'_{2k} 中我们有

$$w_{2k} = w_{2k-1}\eta_{2k} = w_{2k-1}^2 = (\eta_2 \cdots \eta_{2k-1})^2 = \eta_2^2\eta_3^2 \cdots \eta_{2k-1}^2,$$

其中最后一个等式成立，是因为 η_i 两两交换。现在，元素 η_2，η_3，……，η_{2k-2}都与 σ_{2k-1}交换，而 η_{2k-1}^2 也必须与 σ_{2k-1}交换。因此， $x^2 = \eta_{2k-1}^2$ 与 x和 y都交换，所以它属于 $\langle x,\ y\rangle$的中心。为了证明 y^2 也属于 $\langle x,\ y\rangle$的中心，我们写作

$$y^2 = \eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}^{-1}\eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}^{-1} = \eta_{2k-1}^{-1}\eta_{2k}^{-1}.$$

由于所有 η_i 两两交换，这表明 y^2 与 $x = \eta_{2k-1}$交换；又由于 y^2 与 y交换，我们发现 y^2 也属于 $\langle x,\ y\rangle$的中心。

这表明每个元素 $g \in \langle x,\ y\rangle$ 都可以写成

$$g = y^{e_1}(xy)^{\alpha}x^{e_2} \cdot c$$

对于某个 $c \in \langle x^2,\ y^2\rangle$，其中 $e_1,\ e_2 \in \{0, 1\}$。若 g 属于 $\langle x,\ y\rangle$的导出子群，则 g 中 x和 y 的指数总和必须等于 0，因此必有

$$\begin{cases} g = y(xy)^{\alpha}x \cdot c = (yx)^{\alpha+1} \cdot c & \text{if } \alpha \equiv 1 \ mod\ 2 \\ g = (xy)^{\alpha} \cdot c & \text{if } \alpha \equiv 0 \ mod\ 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

换言之，g 要么具有 $g = (xy)^{\beta} \cdot c$ 的形式，要么具有 $g = (xy)^{\beta} \cdot c$ 的形式，其中 $\beta \equiv 0$ 模 2。

$\widehat{\ }$现在，在（2.1）中给出的 F 在 B_{2k} 上的标准作用下，有

$$F(\sigma_{2k-1}) = f(\sigma_{2k-1}^2, \eta_{2k-1})\sigma_{2k-1}^{\lambda}f(\eta_{2k-1}, \sigma_{2k-1}^2).$$

因此，要证明 $F(\sigma_{2k-1}) = \sigma_{2k-1}^{\lambda}$ 属于商群 $\widehat{B}'_{2k}$，只需证明 $f(\eta_{2k-1},\ \sigma_{2k-1}^2)$ 与 σ_{2k-1}可交换。元素 $f(\eta_{2k-1},\ \sigma_{2k-1}^2)$ 属于 $\langle x,\ y\rangle$的导出子群，因此由（4.1），有以下一种情况

$$f(\eta_{2k-1}, \sigma_{2k-1}^2) = \begin{cases} (\eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}^{-1}\eta_{2k-1})^{\beta} \cdot c \\ \sigma_{2k-1}^{-\beta} \cdot c, \end{cases}$$

模 2。在第二种情况下，显然 $f(\eta_{2k-1},\ \sigma_{2k-1})^2)$ 与 σ_{2k-1} 交换。在第一种情况下，我们需要证明 $\eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}^{-1}\eta_{2k-1}$ 与 σ_{2k-1} 交换。上文已知，在 B'_{2k} 中，η_{2k-1}^2 与 σ_{2k-1} 交换。再结合恒等式 $\eta_{2k} = \sigma_{2k-1}\eta_{2k-1}\sigma_{2k-1}$ 以及 η_i 的两两交换关系，我们得到

$$\begin{aligned} (\eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}\eta_{2k-1})\sigma_{2k-1}(\eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}^{-1}\eta_{2k-1}) &= \eta_{2k-1}^{-1}\eta_{2k}\eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}^{-1}\eta_{2k-1} \\ &= \eta_{2k}\eta_{2k-1}^{-2}\sigma_{2k-1}^{-1}\eta_{2k-1} = \eta_{2k}\sigma_{2k-1}^{-1}\eta_{2k-1}^{-1} \\ &= \eta_{2k}\sigma_{2k-1}^{-1}\eta_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1}^{-1}\sigma_{2k-1} = \eta_{2k}\eta_{2k}^{-1}\sigma_{2k-1} \\ &= \sigma_{2k-1}. \end{aligned}$$

这就完成了证明：在商群 $\widehat{B}'_{2k}$ 中，$f(\eta_{2k-1},\ \sigma_{2k-1}^2)$ 与 σ_{2k-1} 交换，因此在该商群中，$F(\sigma_{2k-1}) = \sigma_{2k-1}^{\lambda}$。□

注释 4.1.1。令 $\widehat{B}'_{2k}$ 表示商群 $\widehat{B}_{2k}/\langle w_{2k-1}^{-1}\eta_{2k}\rangle$。注意，这个 $\widehat{B}_{2k}$ 的商群与通过子群 $\langle w_{2k-1}\eta_{2k}\rangle$ 取商这一更为熟悉的做法并不相同。事实上，我们有恒等式$w_{2k} = w_{2k-1}\eta_{2k} = (\sigma_1 \cdots \sigma_{2k-1})^{2k}$，它生成了 $\widehat{B}_{2k}$ 的中心，因此通过 $\langle w_{2k-1}\eta_{2k}\rangle$ 取商实际上就是将 $\widehat{B}_{2k}$ 除以其中心；而通过 $\langle w_{2k-1}^{-1}\eta_{2k}\rangle$ 取商则反映了德恩扭转 d_k 在拓扑曲面上的特定位置。

定理 3.1 中 (A) 的前两族关系表明，对于所有 $2 \le k \le 2g$，都存在一个同态

$$\begin{aligned} \iota : \widehat{B}_k &\to \widehat{\Gamma}_{g,1} \\ \sigma_i &\mapsto a_i. \end{aligned} \tag{4.2}$$

对于 $2 \le k \le g$，令 δ_k 表示图 2 中从第 k 个亏格孔出发的上方竖直环路；特别地，扭转 $d_2 = d$ 和 d_3 是 Wajnryb 表示中出现的扭转。在下一个引理中，我们展示一族同态 ι_k，它们与标准的 ι 不同之处在于，最后一个辫群生成元被映射到扭转 d_k。

引理 4 .2. 固定 $g \geq 2$。对于每个满足 $3 \leq k \leq g+1$ 的 k，都存在一个有限生成群的同态

$$\iota_k : \widehat{B}_{2k} \to \widehat{\Gamma}_{g,1} \tag{4.3}$$

映射 $\sigma_i \mapsto a_i$ 对 $i = 1, \ldots, 2k-2$ 和 $\sigma_{2k-1} \mapsto d_{k-1}$。元素 $\omega_{2k-1}^{-1}\eta_{2k}$ 属于 ι_k 的核；换言之，同态 ι_k 可分解为一个同态 $\iota_k' : B_{2k}' \to \Gamma_{g,\,1}$。

证明。$\Gamma_{g,\,1}$ 中 $\iota_k(\omega_{2k-1})$ 与 $\iota(\eta_{2k})$ 相等，是以下标准关系的结果，该关系在 $\Gamma_{g,\,1}$ 中成立（在离散群 $\Gamma_{g,\,1}$ 中也已成立）：

$$d_{k-1}d_{k-1}' = w_{2k-2} \quad \text{with} \quad d_{k-1}' = y_{2k-1}d_{k-1}y_{2k-1}^{-1}$$

对于 $2 \leq k \leq g+1$。因此，元素 $d_{k-1}^{-1}w_{2k-2}$ 和 $y_{2k-1}d_{k-1}y_{2k-1}^{-1}$ 在 $\widehat{\Gamma}_{g,1}$ 中相等。我们有 $d = \iota_k(\sigma_{2k-1})$，并且由于 σ_{2k-1} 未出现在 $\omega_{2k-1} = (\sigma_1 \cdots \sigma_{2k-2})^{2k-1}$ 中，也未出现在 $\eta_{2k-1} = \sigma_{2k-2} \cdots \sigma_1 \cdot \sigma_1 \cdots \sigma_{2k-2}$ 中，元素 $w_{2k-1} \in \Gamma_{g,1}$ 等于 $\omega_{2k-1} \in B_{2k}$ 在 ι_k 下的像；类似地，y_{2k-1} 是 $\eta_{2k-1} \in \widehat{B}_{2k}$ 在 $\widehat{\Gamma}_{g,1}$ 中的像。因此，在 $\widehat{\Gamma}_{g,1}$ 中相等的两个元素 $d_{k-1}^{-1}w_{2k-2}$ 和 $y_{2k-1}d_{k-1}y_{2k-1}^{-1}$，分别是 $\sigma_{2k-1}^{-1}\omega_{2k-2}$ 和 $\eta_{2k-1}\sigma_{2k-1}\eta_{2k-1}^{-1}$ 在 $\widehat{B}_{2k}$ 中的元素经 ι_k 作用后的像。因此，元素 $\omega_{2k-2}\eta_{2k-1}$ 和 $\sigma_{2k-1}\eta_{2k-1}\sigma_{2k-1}$ 在 ι_k 下于 $\Gamma_{g,1}$ 中的像也相等。注意到，$\sigma_{2k-1}\eta_{2k-1}\sigma_{2k-1} = \eta_{2k}$ 和 $\omega_{2k-2}\eta_{2k-1} = \omega_{2k-1}$ 在 B_{2k} 中，由此可知 ω_{2k-1} 和 η_{2k} 在 ι_k 作用下变为相等，从而证明了引理。□

4.2. 作用 F 于 $\Gamma_{2,\,1}$。 前一小节的结果现在将使我们能够证明：(1.1) 中所提出的 F 的作用遵守 (A) 中的所有关系以及关系 (B)。我们首先基于标准同态 (4.2)，给出 (A) 中前两族关系的一个简单证明。

命题 4.3. 作用 $F = (\lambda, f) \in GT$ 于 (1.1) 中给出的德恩扭转，遵守辫群关系 $a_ia_{i+1}a_i = a_{i+1}a_ia_{i+1}$，对于 $i = 1, \ldots, 2g-1$ 以及 $a_ia_j = a_ja_i$ 对于 $|i-j| \geq 2$。此外，F 在元素 $y_k = a_{k-1} \cdots a_1 \cdot a_1 \cdots a_{k-1}$ 与 $\omega_k = (\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1})^k$ 上的作用由 $F(y_k) = y_k^{\lambda}$ 与 $F(w_k) = w_k^{\lambda}$ 给出，对于 $k = 2, \ldots, 2g+1$。

证明。通过比较 (2.1) 与 (1.1)，我们看到 (4.2) 中的同态 ι 在元素 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2g}$ 上满足 $\iota \circ F = F \circ \iota$。由于 F 的作用遵循 σ_i 与 $F \circ \iota$ 之间的辫群关系，在 $\Gamma_{g,1}$ 中也遵循相同的关系。这就证明了定理 3.1 中 (A) 类关系的前两个族。至于对 y_k 和 w_k 的作用，由于 $y_k = \iota(\eta_k)$ 和 $w_k = \iota(\omega_k)$，这直接源于以下事实：众所周知，F 对 $\widehat{B}_k$ 的作用满足 $F(\eta_k) = \eta_k^{\lambda}$ 和 $F(\omega_k) = \omega_k^{\lambda}$。□

现在我们转而讨论 (A) 中其余的关系以及关系 (B)。令 $d = d_2$。以下结果 a re 直接推论前一小节的推论。

推论 4.4。 设 $k = 3$，设 $g \geq 2$，并设 $\iota_3 : B_6 \to \Gamma_{2,\,1}$ 为 *(4.3)* 中的同态。那么，同态 $F \circ \iota_3$ 和 $\iota_3 \circ F$ 在 B_6 的生成元 $\sigma_1, \ldots, \sigma_5$ 上相同，因此二者相等。特别地，*(1.1)* 中提出的 F 在生成元上的作用满足关系 $a_4da_4 = da_4d$。

证明。由于对于 $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$，有 $\iota_3(\sigma_i) = a_i$，而 (1.1) 中给出的 $F(a_i)$ 是 ι_3 作用于 (2.1) 中给出的 $F(\sigma_i)$ 所得的像，我们看到 $\iota_3 \circ F$ 和 $F \circ \iota_3$ 在 $\sigma_i, i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 上一致。对于 σ_5，有 $\iota_3(\sigma_5) = d_2 = d$。根据引理 4.1，$F$ 的作用可下降到商群 $\widehat{B}_6'$ 上，并且在此商群中有 $F(\sigma_5) = \sigma_5^{\lambda}$。由于根据引理 4.2，$\iota_3$ 经由 ι_3' 分解，我们得到 $\iota_3\big(F(\sigma_5)\big) = \iota_3'\big(F(\sigma_5)\big) = \iota_k'(\sigma_5^{\lambda}) = d^{\lambda}$。

为证明关系 $a_4da_4 = da_4d$ 在 F 对生成元的作用下保持成立，我们注意到由于 ι_3 是群同态，且 $F(\sigma_4)F(\sigma_5)F(\sigma_4) = F(\sigma_5)F(\sigma_4)F(\sigma_5)$ 在 B_6 中成立；又由于我们在 σ_i 上有 $\iota_3 \circ F = F \circ \iota_3$，该关系在 ι_3 下的像为 $F(a_4)F(d)F(a_4) = F(d)F(a_4)F(d)$。□

推论 4.5. *(i)* 所提出的 F 作用保持定理 *3.1* 的关系 *(B)*，即 $dd' = w_4$，其中 $d' = y_5dy_5^{-1}$。

(ii) 所提出的 F 作用保持 d 与 $a_j,\ j \neq 4$ 之间的交换关系。

证明。对于 (i)，我们将关系 (B) 写作 $dy_5dy_5^{-1} = w_4$，或等价地写作 $\iota_3(\sigma_5\eta_5\sigma_5\eta_5^{-1}) = \iota_3(w_4)$，也可以写作 $\iota_3(\sigma_5\eta_5\sigma_5) = \iota_3(w_4\eta_5)$。由于 $\sigma_5\eta_5\sigma_5 = \eta_6$ 且 $w_4\eta_5 = w_5$，这等价于 $\iota_3(\eta_6) = \iota_3(w_5)$，因此我们必须证明

$$F\big(\iota_3(\eta_6)\big) = F\big(\iota_3(w_5)\big).$$

根据前一推论，我们有 $\iota_3 \circ F = F \circ \iota_3$，因此所需的等式可写为

$$\iota_3\big(F(\eta_6)\big) = \iota_3\big(F(w_5)\big).$$

由于 $F(\eta_6)=\eta_6^{\lambda}$以及 $F(w_5)=w_5^{\lambda}$在 $\widehat{B}_n$，这个等式成立，从而证明 F 满足关系 (B)。

对于 (ii)，我们使用命题 4.3 的结果，该结果表明 $F(y_k)=y_k^{\lambda}$。由于根据 (1.1)， $F(d)=d^{\lambda}$，且 $F(a_k)=f(a_k^2,\ y_k)a_k f(y_k,\ a_k^2)$，因此，对于 $k\neq 4$， $F(d)$ 与 $F(a_k)$ 的交换关系可由 d 与 a_k 及 y_k 的交换关系推出。□

鉴于上述结果，以及根据定理 3.1，$\Gamma_{2,1}$ 的表现只需关系（A）和（B）这一事实，我们现在得到了亏格 $g=2$下所需的结果。

推论 4.6. $F\in GT$ 在(1.1) 中提出的作用可扩展为 $\Gamma_{2,1}$的一个自同构。

5. 关系（C）与亏格为 3 的情形

从现在起直到本文结束，我们令 $g\geq 3$。考虑在定理 3.1中定义的元素 t_1、 t_2 和 t_3 。这些元素恰好是通过同态 $\iota: B_8\to\Gamma_{g,1}$ 映射 $\sigma_i\mapsto a_i$得到的、(2.7)中定义的元素 τ_1,τ_2 和 $\tau_3\in B_8$ 的像。

令 $\mathcal{B}$、 $\mathcal{B}'$ 和 $\mathcal{B}''$ 为(2.5)中给出的极大括号化。定理 2.5证明了

$$F_{\mathcal{B}}=\mathrm{inn}\big(f(y_3,a_3^2)f(y_5,a_5^2)f(y_7,a_7^2)\big)\circ F \tag{5.1}$$

其中，根据引理 4.1， $F\in GT$ 是 $\iota(B_{2g})\subset\Gamma_{g,1}$ 的一个自同构，其在 a_i 上的作用由(2.1)给出（其中将 σ_i 替换为 a_i），因此，(5.1)中 B_8 的自同构也是 $\iota(B_8)\subset\Gamma_{g,1}$的一个自同构，其作用方式如定理 2.3所述。特别地，与(2.1)比较可知，对于 $i=1,3,5,7$，有 $F_{\mathcal{B}}(\sigma_i)=\sigma_i^{\lambda}$。此外，根据定理 2.5，我们知道 $F_{\mathcal{B}}$ 在 τ_1、 τ_2 和 τ_3 上的作用与(2.1)类似，即

$$\begin{cases} F_{\mathcal{B}}(t_1)=t_1^{\lambda};\\ F_{\mathcal{B}}(t_2)=f(t_2^2,t_1^2)\,t_2^{\lambda}\,f(t_1^2,t_2^2);\\ F_{\mathcal{B}}(t_3)=f(t_3^2,t_2t_1^2t_2)\,t_3^{\lambda}\,f(t_2t_1^2t_2,t_3^2). \end{cases} \tag{5.2}$$

直接应用 GT 的关系（II），可将 $F_{\mathcal{B}}(t_2)$ 写成如下形式

$$F_{\mathcal{B}}(t_2)=t_1^{-2m}t_2f(t_1^2,t_2^{-1}t_1^2t_2)t_1^{-2m}c^m \tag{5.3}$$

其中， $c=(t_1t_2)^3=(t_1^2)\cdot(t_2^2)\cdot(t_2^{-1}t_1^2t_2)$ 是子群 $\langle t_1,\ t_2\rangle\subset\widehat{\Gamma}_{g,\ 1}$ 的中心。

为了证明关系（C），我们只需研究 $F_{\mathcal{B}}$ 在 B_8 的子群 B_6 上的作用，也就是说，只需考虑 t_1 和 t_2。现在我们来证明 F 的作用满足关系（C），该关系由 $d_3a_6d_3=a_6d_3a_6$ 给出，其中 d_3 在定理 3.1 中定义，它是沿图 2 所示曲线 δ_3 的德恩扭转。为了验证这一关系，我们首先需要计算 F 在元素 d_3 上的值。

5.1. 三个有用的引理。

引理 5.1 (俳句引理). *(i)* 设 $\{a,b\}$ 和 $\{A,B\}$ 是赋范群 G 中的两对元素，且 a和 b都与 A和 B对易。那么 $f(a,b)f(A,B)=f(aA,bB)$。

(ii) 设 a、 b、 g是赋范群 G 中的元素，且 g与 a和 b对易，并设 $f\equiv a^rb^s$属于 G^{ab}。那么 $f(a,gb)=f(a,b)g^s$。

(iii) 设 a、 b、 g、 $f\in G$与 *(ii)* 中的情形相同，但除了 g仍与 a对易外，现在假设 $gb=bg^{-1}$。那么 $f(a,gb)=f(a,b)g^e$，其中若 s 为偶数，则 $e=0$ ；若 s 为奇数，则 $e=-1$。

证明。(i) 当 f 是 G 的有限商中的一个词时，很容易证明；随后我们可以从有限词取极限得到 pro-词。(ii) 由 (i) 与 $a=1$ 和 $b=g$ 直接推出。对于 G 的有限商中的所有词 f，我们再次证明 (iii)，但这次采用归纳法。基础情形是包含 1 次或 2 次 b 或 b^{-1} 的词。若 $f(a,b)$ 是仅包含一个 b 或 b^{-1} 的词，则 $f(a,gb)=f(a,b)g^{-1}$；若 f 包含两次 b 或 b^{-1}，则 $f(a,gb)=f(a,b)$，因为将两个 b 之间的 g 传递过去会使它们抵消。我们通过归纳法完成证明。设 w 是一个含有 m 次 b 或 b^{-1} 的词，使得 $w(a,gb)=w(a,b)g^e$；再设 w' 是一个仅含有一次 b 或 b^{-1} 的词；令 $f=ww'$。那么 $f(a,gb)=w(a,gb)w'(a,b)=w(a,b)g^ew'(a,b)g^{-1}$。若 $e=0$，则结论得证。若 $e=-1$，则 $f(a,gb)=w(a,b)g^{-1}w'(a,b)g^{-1}$，并且中间的 g^{-1} 从 w' 中那个单独的 b 左侧移至右侧时会变为 g，因此得到 $f(a,gb)=f(a,b)$。□

引理 5.2。 *(i)* 对于 $i=2,\ 3、4,\ y_i$与 d和 d'可交换；对于 $i=5、\ldots、\ g+1,\ y_i^2$与d 和 d'可交换。

(ii) 对于 $i=5,\ldots,g+1$，我们有

$$d'=y_idy_i^{-1}=y_i^{-1}dy_i. \tag{5.4}$$

证明。(i) 三个元素 y_2, y_3 和 y_4 显然与 d 和 d' 交换，因为它们是由扭转 a_1、a_2 和 a_3 构成的乘积，而这些扭转所对应的环路均与 δ 和 δ' 不相交。令 $i > 4$。我们使用恒等式 $w_{i-1}y_i = w_i$，以及元素 w_i^2 是沿环路 ω_i 的德恩扭转这一事实（见图 2）；这些环路均与 d 和 d' 不相交。w_i 和 y_j 彼此交换（回想一下 $w_i = y_2 \cdots y_i$），因此我们有 $w_i^2 = (w_{i-1}y_i)^2 = w_{i-1}^2 y_i^2$。因此，由于 w_{i-1}^2 和 w_i^2 都与 d 和 d' 交换，y_i^2 也必然如此。

(ii) 对于 $i = 5$，根据定义，我们有 $d' = y_5 d y_5^{-1}$。令 $i > 5$，并记 $y_i = (a_{i-1} \cdots a_5) y_5 (a_5 \cdots a_{i-1})$. Then

$$y_i d y_i^{-1} = (a_{i-1} \cdots a_5) y_5 (a_5 \cdots a_{i-1}) d (a_{i-1} \cdots a_5)^{-1} y_5^{-1} (a_5 \cdots a_{i-1})^{-1}.$$

由于 d 与所有满足 $i \neq 4$ 的 a_i 都可交换，因此这等于

$$(a_{i-1} \cdots a_5) y_5 \, d \, y_5^{-1} (a_5 \cdots a_{i-1})^{-1} = (a_{i-1} \cdots a_5) \, d' \, (a_5 \cdots a_{i-1})^{-1},$$

但由于 d' 也与所有满足 $j \neq 4$ 的 a_j 都可交换，我们得到 $d' = y_i d y_i^{-1}$。最后，由于根据 (i)，y_i^2 与 d' 可交换，我们可以用 y_i^{-2} 对这个等式进行共轭，从而得到 d' 也等于 $y_i^{-1} d y_i$，证明完毕。□

引理 5.3. $F_{\mathcal{B}}(d) = d^\lambda$ 和 $F_{\mathcal{B}}(d') = d'^\lambda$。

证明。根据 (1.1)，我们知道 $F(d) = d^\lambda$；根据命题 4.3，我们知道对于 $i = 2, \ldots, g+1$，$F(y_i) = y_i^\lambda$。根据定义，$d' = y_5 d y_5^{-1}$，因此我们也有

$$F(d') = F(y_5)F(d)F(y_5^{-1}) = y_5^\lambda F(d) y_5^{-1} = y_5 d^\lambda y_5^{-1} = d'^\lambda.$$

Thus

$$\begin{cases} F_{\mathcal{B}}(d) = f(a_7^2, y_7) f(a_5^2, y_5) f(a_3^2, y_3) \, d^\lambda \, f(y_3, a_3^2) f(y_5, a_5^2) f(y_7, a_7^2) \\ F_{\mathcal{B}}(d') = f(a_7^2, y_7) f(a_5^2, y_5) f(a_3^2, y_3) \, d'^\lambda \, f(y_3, a_3^2) f(y_5, a_5^2) f(y_7, a_7^2). \end{cases}$$

由于底层环路彼此不相交，扭转 d 和 d' 与 a_3、a_5 和 a_7 交换；如引理 5.2 (i) 所述，它们也与 y_3 交换，因此内项 $f(y_3, a_3^2)$ 消失，于是我们有

$$\begin{cases} F_{\mathcal{B}}(d) = f(a_7^2, y_7) f(a_5^2, y_5) \, d^\lambda \, f(y_5, a_5^2) f(y_7, a_7^2) \\ F_{\mathcal{B}}(d') = f(a_7^2, y_7) f(a_5^2, y_5) \, d'^\lambda \, f(y_5, a_5^2) f(y_7, a_7^2). \end{cases}$$

将 (5.4) 的第一个等式改写为

$$d'^{-1} y_i = y_i d^{-1} \quad \text{and} \quad d' y_i = y_i d, \tag{5.5}$$

并利用 y_i^2 与 d的交换关系，我们发现对于 $i > 4$，y_i 与 $d^{-1}d'$反交换，即

$$y_i d^{-1} d' = d'^{-1} y_i d' = d'^{-1} y_i^2 d y_i^{-1} = d'^{-1} d y_i = d d'^{-1} y_i, \tag{5.6}$$

或者等价地，$d^{-1} d' y_i = y_i d d'^{-1}$。根据俳句引理的 (iii)，由 (5.6) 可得，对于 $i = 5,7$，我们有

$$f(a_i^2, y_i \cdot d^{-1} d' y_i) = f(a_i^2, y_i \cdot d^{-1} d') = f(a_i^2, y_i), \tag{5.7}$$

因为 f 属于 F_2的导出子群。因此我们看到，对于 $i = 5,7$，我们有

$$\begin{aligned} f(a_i^2, y_i) \, d \, f(y_i, a_i^2) &= d \, f(a_i^2, d^{-1} y_i d) f(y_i, a_i^2) \\ &= d f(a_i^2, d^{-1} d' y_i) f(y_i, a_i^2) \text{ by (5.5)} \\ &= d f(a_i^2, y_i) f(y_i, a_i^2) \text{ by (5.7)} \\ &= d. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} f(a_i^2, y_i) \, d' \, f(y_i, a_i^2) &= d' \, f(a_i^2, d'^{-1} y_i d') f(y_i, a_i^2) \\ &= d' f(a_i^2, y_i d^{-1} d') f(y_i, a_i^2) \text{ by (5.5)} \\ &= d' f(a_i^2, y_i) f(y_i, a_i^2) \text{ by (5.7)} \\ &= d'. \end{aligned}$$

因此，特别是 $f(a_5^2, y_5)$ 和 $f(a_7^2, y_7)$ 都与 d和 d'对易，从而证明了引理 ma. □

5.2. 灯笼关系与关系（II）。通常，元素 $(\lambda,\ f)$ 上的"完整"关系（II）写作

$$f(x,y)x^m f(z,x)z^m f(y,z)y^m = 1$$

其中 $xyz = 1$ 和 $m = (\lambda-1)/2$。这可以推广到元素 xyz 与 x、y 和 z对易的情形，此时关系变为

$$f(x,y)x^m f(z,x)z^m f(y,z)y^m = (xyz)^m, \tag{5.8}$$

这一点通过取阿贝尔化并回想 f 是一个（赋范）交换子即可轻易看出（另见 [NS]）。令 S 为一个带有四个边界分支的亏格 0 拓扑曲面，χ、υ 和ζ分别表示 S上环绕边界分支 (1，2)、(1，3) 和 (2，3) 的三个标准环路。令 x、y 和 z 分别表示沿 χ、υ 和 ζ 的德恩扭转，并以b_1、.....、b_4表示沿四个边界分支的德恩扭转，则 S 上的德恩扭转"灯笼关系"为 $xyz = b_1b_2b_3b_4$，而 F 对F 的（赋范）映射类群的标准作用，给出了关系（II）的如下形式

$$f(x,y)x^m f(z,x)z^m f(y,z)y^m = (b_1b_2b_3b_4)^m. \tag{5.9}$$

注意到，若 $(\lambda,\ f)$ 属于 GT，则 $(-\lambda,\ f)$ 也属于其中，因此，对 $m=(\lambda-1)/2$ 成立的关系 (5.9) 对 $(-\lambda-1)/2 = -m-1$ 也成立，从而得到

$$f(x,y)x^{-m-1}f(z,x)z^{-m-1}f(y,z)y^{-m-1} = (b_1b_2b_3b_4)^{-m-1}, \tag{5.10}$$

对其求逆（并对各项作循环置换）即可得到恒等式

$$f(x,z)x^{m+1}f(y,x)y^{m+1}f(z,y)z^{m+1} = (b_1b_2b_3b_4)^{m+1}. \tag{5.11}$$

现在，我们将其应用于如下情形：如图 1 所示，从类型为 $(g,\ 1)$ 的曲面中，沿环路 a_1、a_3、a_5 和 d_3 切出类型为 (0，4) 的子曲面 S。考虑德恩扭转

$$g_1 = t_2^{-1}dt_2 \quad \text{and} \quad g_2 = t_1^{-1}t_2^{-1}dt_2t_1, \tag{5.12}$$

沿上方图 3 所示的环路进行。与 d_2 一起，这三个微分同胚是沿亏格 0 子曲面 S 上的三个标准环路 δ_2、$\gamma_{1,\ 2}$ 和 $\gamma_{1,\ 3}$ 的扭转；该子曲面由四个边界分支 α_1、α_3、α_5 和 δ_3 切出（见图 3）。因此，它们满足灯笼关系

$$g_2g_1d = a_1a_3a_5d_3, \tag{5.13}$$

这就是看似复杂的定义关系 $d_3 = g_2g_1da_1^{-1}a_3^{-1}a_5^{-1}$ 的由来，因为 d_3 先验地不属于 $\Gamma_{g,\ 1}$ 的生成集。由于这是一个灯笼关系，我们可以将 (5.8) 应用于 $x=d$、$y=g_2$、$z=g_1$，得到

$$f(d,g_2)d^m f(g_1,d)g_1^m f(g_2,g_1)g_2^m = (g_2g_1d)^m, \tag{5.14}$$

我们还可以在 (5.11) 中取 $x=g_2$、$y=g_1$、$z=d$、$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4 = a_1,\ a_3,\ a_5,\ d_3$，并利用 (5.13) 来写出

$$f(g_2,d)g_2^{m+1}f(g_1,g_2)g_1^{m+1}f(d,g_1)d^{m+1} = (g_2g_1d)^{m+1}. \tag{5.15}$$

我们将在下一个小节中使用最后这两个等式来计算 $F(d_3)$。

5.3. () 的计算 $F(d_3)$。为了计算 $F(d_3)$，我们将计算 F 在元素 g_1、g_2 上的取值。我们先计算 $F_{\mathcal{B}}$ 在这些元素上的取值。利用 $F_{\mathcal{B}}(d) = d^\lambda$、$F_{\mathcal{B}}(t_1) = t_1^\lambda$（由 (5.2) 和 (5.12)），以及引理 5.3，我们得到

$$\begin{cases} F_{\mathcal{B}}(g_1) = t_1^{2m} f(t_2^{-1}t_1^2t_2, t_1^2)\, g_1^\lambda\, f(t_1^2, t_2^{-1}t_1^2t_2)t_1^{-2m} \\ F_{\mathcal{B}}(g_2) = f(t_2^2, t_1^2)\, g_2^\lambda\, f(t_1^2, t_2^2) \\ F_{\mathcal{B}}(d) = d^\lambda. \end{cases} \tag{5.16}$$

现在，a_1^2 和 a_3^2 与 t_1^2、$t_2^{-1}t_1^2t_2$、t_2^2 和 d都可交换，因此我们可以在（5.16）的所有 f 中用 $a_1^2a_3^2t_1^2$ 替换 t_1^2；此外，用 t_2 共轭会交换 a_1^2 和 a_3^2，这意味着乘积 $a_1^2a_3^2$ 与g_1可交换，因此我们也可以用 $a_1^2a_3^2$ 共轭（5.16）的第一行，而不改变其值。对于第二行，我们进一步注意到，在将 f 的自变量中的 t_1^2 改为 $a_1^2a_3^2t_1^2$ 后，也可以将 f 的自变量中的 t_2^2改为 $a_3^2a_5^2t_2^2$，因为 a_3^2 和 a_5^2 都与 $a_1^2a_3^2t_1^2$可交换。（注意，$a_1^2a_3^2t_1^2$ 其实就是全扭转 T_{1234}，而 $a_3^2a_5^2t_2^2$ 就是全扭转 T_{3456}。）完成所有这些操作后，我们将（5.16）改写为

$$\begin{cases} F_{\mathcal{B}}(g_1) = a_1^2a_3^2t_1^{2m} f(t_2^{-1}a_1^2a_3^2t_1^2t_2, a_1^2a_3^2t_1^2)\, g_1^\lambda\, f(t_1^2, t_2^{-1}a_1^2a_3^2t_1^2t_2)t_1^{-2m}a_1^{-2}a_3^{-2} \\ F_{\mathcal{B}}(g_2) = f(a_3^2a_5^2t_2^2, a_1^2a_3^2t_1^2)\, g_2^\lambda\, f(a_1^2a_3^2t_1^2, a_3^2a_5^2t_2^2). \end{cases} \tag{5.17}$$

接下来，设

$$g_1' = t_2^{-1}d't_2, \quad g_2' = t_1^{-1}t_2^{-1}d't_2t_1.$$

于是 $g_1g_1' = t_2^{-1}dd't_2$ 和 $g_2g_2' = t_1^{-1}t_2^{-1}dd't_2t_1$，因此由于 $dd' = (a_1a_2a_3)^4$ 在 $\widehat{\Gamma}_{g,1}$ 根据关系 (B)，这些辫子属于 B_6，直接编辫即可轻松验证以下恒等式：

$$\begin{cases} a_1^2a_3^2t_1^2 = a_1^2a_3^2(a_2a_1a_3a_2)^2 = (a_1a_2a_3)^4 = w_4 = dd' \\ t_2^{-1}a_1^2a_3^2t_1^2t_2 = g_1g_1' \\ a_3^2a_5^2t_2^2 = g_2g_2'. \end{cases} \tag{5.18}$$

利用这些结果，我们将 (5.17) 转化为

$$\begin{cases} F_{\mathcal{B}}(g_1) = (dd')^m f(g_1g_1', dd')\, g_1^{\lambda}\, f(dd', g_1g_1')(dd')^{-m} \\ F_{\mathcal{B}}(g_2) = f(g_2g_2', dd')\, g_2^{\lambda}\, f(dd', g_2g_2'). \end{cases} \tag{5.19}$$

应用俳句引理可以简化这些表达式。由于 $\{d, g_1\}$ 与 $\{d', g_1'\}$ 对易，且 $\{d, g_2\}$ 与 $\{d', g_2'\}$ 对易，我们使用俳句引理的 (i)，得到

$$F_{\mathcal{B}}(g_1) = (dd')^m f(g_1, d) f(g_1', d') g_1^{\lambda} f(d', g_1') f(d, g_1)(dd')^{-m} = d^m f(g_1, d) g_1^{\lambda} f(d, g_1) d^{-m}$$

and

$$F_{\mathcal{B}}(g_2) = f(g_2, d) f(g_2', d') g_2^{\lambda} f(d', g_2') f(d, g_2) = f(g_2, d) g_2^{\lambda} f(d, g_2).$$

据此，我们可以如下计算 $F_{\mathcal{B}}(g_2)F_{\mathcal{B}}(g_1)F_{\mathcal{B}}(d)$：

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}}(g_2)F_{\mathcal{B}}(g_1)F_{\mathcal{B}}(d) &= f(g_2, d) g_2^{\lambda} f(d, g_2) d^m f(g_1, d) g_1^{\lambda} f(d, g_1) d^{-m} d^{\lambda} \\ &= f(g_2, d) g_2^{\lambda} g_2^{-m} f(g_1, g_2)(g_2g_1d)^m g_1^{-m} g_1^{\lambda} f(d, g_1) d^{m+1} \quad \text{by (5.14)} \\ &= f(g_2, d) g_2^{m+1} f(g_1, g_2) g_1^{m+1} f(d, g_1) d^{m+1} (g_2g_1d)^m \\ &= (g_2g_1d)^{m+1}(g_2g_1d)^m \qquad \text{by (5.15)} \\ &= (g_2g_1d)^{\lambda}. \end{aligned}$$

由于 $g_2g_1d = a_1a_3a_5d_3$，这表明 $F_{\mathcal{B}}$ 保持了 $\Gamma_{g,1}$ 中的灯笼关系。特别地：

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}}(d_3) &= F_{\mathcal{B}}(g_2)F_{\mathcal{B}}(g_1)F_{\mathcal{B}}(d)F_{\mathcal{B}}(a_1^{-1})F_{\mathcal{B}}(a_3^{-1})F_{\mathcal{B}}(a_5^{-1}) \\ &= (g_2g_1d)^{\lambda} a_1^{-\lambda} a_3^{-\lambda} a_5^{-\lambda} \\ &= d_3^{\lambda}. \end{aligned}$$

最后，我们回顾 (5.1) 可知

$$F_{\mathcal{B}} = \mathrm{inn}\Big(f(y_3, a_3^2) f(y_5, a_5^2) f(y_7, a_7^2)\Big) \circ F.$$

由于 d_3 与 y_3，y_5，y_7，a_3，a_5 以及 a_7可交换，我们得到 $F(d_3) = d_3^{\lambda}$。

5.4. 关系（C）的证明。现在我们可以完成证明，说明 F 遵循关系（C）。回想一下，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$同态 ι_4：$B_8 \to \Gamma_{g,1}$ 对 $i = 1, \ldots, 6$ 和 $\sigma_7 \mapsto d_3$映射为 $\sigma_i \mapsto a_i$。根据引理4.1和4.2，映射 ι_4 可经由 $\widehat{B}_8$ 对其子群 $\langle w_7^{-1}\eta_8\rangle$取商所得的商群 $\widehat{B}_8 \to \widehat{B}_8'$ 进行分解；记$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$同态$B_8' \to \Gamma_{g,1}$ 为 ι_4'，则在 $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$上有 $\iota_4' \circ F = F \circ \iota_4'$。由于同样的引理表明，$F$ 在 $\widehat{B}_8$ 上的作用可下降为 F 在 $\widehat{B}_8'$ 上的作用，并满足 $F(\sigma_7) = \sigma_7^{\lambda}$ 于 $\widehat{B}_8'$；又由于我们刚在上一小节中看到 $F(d_3) = d_3^{\lambda}$，因此我们发现 $\iota_4' \circ F$在整个 $\widehat{B}_8'$上与 $F \circ \iota_4'$ 一致。于是 $F\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$是 B_8' 在$\Gamma_{g,1}$ 中像的一个自同构，因此 F 遵循关系

$$\iota_4'(\sigma_6)\iota_4'(\sigma_7)\iota_4'(\sigma_6) = \iota_4'(\sigma_7)\iota_4'(\sigma_6)\iota_4'(\sigma_7)$$

$\widehat{\ }$在 $\Gamma_{g,1}$ 中，这正是关系 $a_6d_3a_6 = d_3a_6d_3$。

这证明 F 满足关系（C）。由于我们还得到了前几节证明的关系（A）和（B），且关系（C'）只涉及 $g \geq 4$ 的情形，因此我们已经证明

C $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**推论 5.4.** 在(1.1) 中提出的 $F \in GT$ 作用可扩展为 Γ_3 的一个自同构，

6. **关系 (C′) 与一般情形** $g \geq 4$

本节中，我们恢复使用记号 d，而不使用 d_2，因为这里不会用到其他 d_i。回想一下，$d' = y_5 d y_5^{-1}$，且关系 (C′) 表明 d' 与 $(t_2t_1t_3t_2)d(t_2t_1t_3t_2)^{-1}$ 交换。实际上，我们将使用以下自同构

$$F_{\mathcal{B}} = \mathrm{inn}\big(f(y_3, a_3^2) f(y_5, a_5^2) f(y_7, a_7^2)\big) \circ F$$

在上一节引入的 $\widehat{B}_8$，它满足 $F_{\mathcal{B}}(a_i) = a_i^{\lambda}$，其中 $i = 1, 3, 5, 7$；并证明 $F_{\mathcal{B}}$ 保持关系 (C′)，这自动意味着 F 也有相同结论，因为二者相差一个内自同构。

回顾极大括号化

$$\mathcal{B}'' = ((x_1, x_2), (x_3, x_4)), ((x_5, x_6), (x_7, x_8))$$

（见 (2.5)）。如前所述，$\mathcal{B}''$ 与 $\mathcal{B}$ 相差一次 A-移动，该移动改变了括号所包围的内容 g 1, .. . ,6 到 括住 5、6、7、8 的括号，因此我们有

$$F_{\mathcal{B}''} = \mathrm{inn}\, f(T_{123456}, T_{5678}) \circ F_{\mathcal{B}}. \tag{6.1}$$

在 B_8 中，我们有

$$T_{123456} = \omega_6 \quad \text{and} \quad T_{5678} = \sigma_5^2 \sigma_7^2 \tau_3^2.$$

因此，在同态 ι 下：$\widehat{B}_8 \to \widehat{\Gamma}_{g,\,1}$, $T_{123456} = \omega_6 \mapsto w_6$ 以及 $T_{5678} = \sigma_5^2\sigma_7^2\tau_3^2 \mapsto a_5^2 a_7^2 t_3^2$。注意到 a_5 和 a_7 都与 t_3^2可交换，我们得到

$$f(T_{123456}, T_{5678}) = f(\omega_6, \sigma_5^2\sigma_7^2\tau_3^2) \mapsto f(w_6, a_5^2 a_7^2 t_3^2) = f(w_6, t_3^2).$$

因此，(6.1) 在 $\Gamma_{g,\,1}$ 中转化为

$$F_{\mathcal{B}''} = \mathrm{inn}\, f(w_6, t_3^2) \circ F_{\mathcal{B}}. \tag{6.2}$$

但根据定理 2.3，我们有

$$\begin{cases} F_{\mathcal{B}''}(T_{1234}) = T_{1234}^{\lambda} \\ F_{\mathcal{B}''}(T_{5678}) = T_{5678}^{\lambda} \\ F_{\mathcal{B}''}(T_{12345678}) = T_{12345678}^{\lambda}, \end{cases}$$

我们看到

$$F_{\mathcal{B}''}(t_2t_1t_3t_2) = (t_2t_1t_3t_2)^{\lambda}.$$

因此，由 (6.2) 可得

$$F_{\mathcal{B}}(t_2t_1t_3t_2) = f(t_3^2, w_6)(t_2t_1t_3t_2)^{\lambda} f(w_6, t_3^2). \tag{6.3}$$

我们利用这一点计算 $F_{\mathcal{B}}\big((t_2t_1t_3t_2)^{-1} d (t_2t_1t_3t_2)\big)$，并证明它与 $F_{\mathcal{B}}(d') = {d'}^{\lambda}$ 交换。由 (6.3)，$F_{\mathcal{B}}\big((t_2t_1t_3t_2)^{-1} d (t_2t_1t_3t_2)\big)$ 等于

$$f(t_3^2, w_6)(t_2t_1t_3t_2)^{\lambda} f(w_6, t_3^2)\, d^{\lambda}\, f(t_3^2, w_6)(t_2t_1t_3t_2)^{\lambda} f(w_6, t_3^2). \tag{6.4}$$

现在，d 和 d' 都与 $t_3 = a_6a_5a_7a_6$ 交换，因为对所有 $j \neq 4$，它们都与 a_j 交换。此外，d 和 d' 也与 w_6 交换。为此，我们写作 $w_6 = y_6y_5y_4y_3y_2$。由引理 5.2 可得

$$\begin{cases} w_6\, d\, w_6^{-1} = y_6y_5\, d\, y_5^{-1}y_6^{-1} = y_6\, d'\, y_6^{-1} = d \\ w_6\, d'\, w_6^{-1} = y_6y_5\, d'\, y_5^{-1}y_6^{-1} = y_6\, d\, y_6^{-1} = d'. \end{cases}$$

这表明 d 和 d' 都与 $f(t_3^2, w_6)$ 交换。该项与 d 的交换关系将 (6.4) 化简为

$$F_{\mathcal{B}}\big((t_2t_1t_3t_2)^{-1} d (t_2t_1t_3t_2)\big) = f(t_3^2, w_6)(t_2t_1t_3t_2)^{-1} d (t_2t_1t_3t_2) f(w_6, t_3^2). \tag{6.5}$$

为了证明 F 满足关系 (C′)，我们必须证明 $F(d') = {d'}^{\lambda}$ 与 (6.5) 右端交换。但实际上，d' 与 (6.5) 右端本来就交换；事实上，我们刚刚看到，它与外项 $f(w_6, t_3^2)$ 交换；它也与内项 $(t_2t_1t_3t_2)d(t_2t_1t_3t_2)^{-1}$ 交换，因为这正是关系 (C′) 所说的。这就证明了 F 满足关系 (C′)，从而完成了主定理 1.1 的证明。□

7. Γg,0 的情形$\Gamma_{g,0}$

回想一下，我们有一个自然的正合列

$$1 \to \hat{\pi}_{g,0} \to \widehat{\Gamma}_{g,1} \to \widehat{\Gamma}_{g,0} \to 1$$

其中 $\hat{\pi}_{g,0}$ 是亏格为 g 的闭曲面基本群的有限完备化。本节的目标是证明以下定理

The群 **定理 7.1**。 定理 *1.1* 中的 GT-作用在$\Gamma_{g,1}$上诱导出$\Gamma_{g,0}$的自同构 .

为证明这一点，我们必须说明 GT 在 $\Gamma_{g,1}$ 上的作用可下降到群 $\Gamma_{g,0}$ 上。根据 Wajnryb [W]，该群由 $\Gamma_{g,1}$ 再施加一个额外关系取商得到，具体表述见以下定理。

定理 7.2 (Wajnryb [W])。 要给出 $\Gamma_{g,0}$ 的表现，只需在定理 *3.1* 中 $\Gamma_{g,1}$ 的表现中添加一条关系 ***(D)***，如下所示。令

$$t_i = a_{2i}a_{2i-1}a_{2i+1}a_{2i} \text{ for } i = 1, \dots, g-1$$
$$v_1 = d' \text{ and } v_i = (t_{i-1}t_i)v_{i-1}(t_{i-1}t_i)^{-1} \text{ for } i = 2, \dots, g-1$$
$$u_i = a_{2i}a_{2i+1}a_{2i+2}v_i(a_{2i+2}a_{2i+1}a_{2i}a_{2i-1})^{-1} \text{ for } i = 1, \dots, g-1,$$

其中 $d' = d_2'$ 定义于定理 *3.1* 的 (3.1) 中。令

$$d_g = (u_1 \cdots u_{g-1})^{-1} \cdot a_1 \cdot (u_1 \cdots u_{g-1})$$

and

$$y_g = a_{2g}a_{2g-1} \cdots a_2 a_1^2 a_2 \cdots a_{2g-1}a_{2g}.$$

最后，令 $d_g' = y_{2g+1}d_g y_{2g+1}^{-1}$。于是

(D) $\quad d_g' = d_g.$

关系 (D) 可通过图 2 中右侧仅有一个孔的情形来理解：此时曲面属于类型 (g,1)，而我们将该孔封闭，从而得到类型为 (g,0) 的曲面。显然，在这种情况下，两个环路 δ_g 和 δ_g' 被视为相同；Wajnryb 定理告诉我们，在 $\Gamma_{g,0}$ 的表现中不需要其他关系。

如 [LNS第 4], 节所述，要证明该定理，只需证明下列结论。

命题 7.3（命题 4.1，出自 [LNS]）。 设 $F \in GT$，并且对于 $i = 2$，.....，g，令 d_i 表示沿图 *2* 所示环路 δ_i 的 ***Dehn***扭转。则自同构 F （$\Gamma_{g,1}$ 的，在 (1.1) 中给出）满足$F(d_i) = d_i^{\lambda}$。

在 [LNS], 中，由于篇幅原因，该命题的证明被省略。下面我们给出完整证明，但首先说明为何该结果足以证明定理 7.1。

利用命题 *7.3* 对定理 *7.1* 的证明。 上述Wajnryb定理7.2表明，为了由$\Gamma_{g,1}$的表现得到 $\Gamma_{g,0}$ 的表现，唯一必须添加的关系是关系 $d_g = d_{g^\circ}'$。由于 $d_g' = y_{2g+1}^{-1}d_g y_{2g+1}$，该关系等价于交换关系 $d_g y_{2g+1} = y_{2g+1}d_g$ （在$\widehat{\Gamma}_{g,0}$中）。但由于命题 7.3，有 $F(d_g) = d_g^{\lambda}$，且由命题 4.3，有 $F(y_{2g+1}) = y_{2g+1})^{\lambda}$，因此像$F(d_g)$与 $F(y_{2g+1})$确实交换，从而完成定理 7.1 的证明。□

本节其余部分将用于证明命题 7.3。 $F(d_2) = d_2^{\lambda}$ 来自 (1.1)，而我们已在 §5.2 中证明了 $F(d_3) = d_3^{\lambda}$。我们将采用相同的方法，通过归纳法证明 $F(d_i) = d_i^{\lambda}$。方法如下：给定 $i \geq 3$，我们沿着环路 δ_{i-1}、α_{2i-1}、α_{2i+1} 和 δ_{i+1} 切出一个亏格 0、具有四个边界分支的子曲面 S_i。环路 δ_i 位于该子曲面上，将边界分支 δ_{i-1} 和 α_{2i-1} 与边界分支 α_{2i+1} 和 δ_{i+1} 分隔开。我们在图 3 中看到，（逆）辫子 $t_i = a_{2i}a_{2i-1}a_{2i+1}a_{2i}$ 作用于图 3 上方示意图中绘出的环路 δ_i，将其变形为中间示意图中的环路 $\gamma_{1,i}$；随后，辫子 $t_{i-1}' = a_{2i-2}d_{i-1}a_{2i-1}a_{2i-2}$又将该环路变形为最下方示意图中的环路 $\gamma_{2,i}$。相应的扭转可以写成

$$g_{1,i} := t_i^{-1}d_i t_i, \qquad g_{2,i} := (t_2 \cdots t_i t_1 \cdots t_{i-1})^{-1}d_2(t_2 \cdots t_i t_1 \cdots t_{i-1}).$$

事实上，上述 $g_{2,i}$ 的表达式见于 Wajnryb 的论文 [W，第 166 页第 -2]行，其中我们的环路 $\gamma_{2,i}$ 对应于 [W] 中记作 $\delta_{i,i+1}$ 的环路。稍后我们将使用一个归纳恒等式 $g_{2,i+1} = t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}g_{2,i}t_{i+1}t_i$，它可由该表达式直接推出（参见 [W，第 165 页（10）]）。

由于三个环路 $\gamma_{2,\,i}$、 $\gamma_{1,\,i}$ 和 δ_i 在由环路 δ_{i-1}、 α_{2i-1}、α_{2i+1} 和 δ_{i+1}切出的子曲面中构成一个灯笼，我们有灯笼关系

$$g_{2,i}g_{1,i}d_i = d_{i-1}a_{2i-1}a_{2i+1}d_{i+1}, \tag{7.1}$$

并且，由于我们知道 F 在所有 a_i 上以及在 d_2 上（还有 d_3）的作用，我们可以作出归纳假设： $F(d_i) = d_i^\lambda$，并利用这一等式计算 $F(d_{i+1})$。

定义

$$\begin{cases} g'_{1,i} := t_i^{-1} d'_i t_i \\ g'_{2,i} := (t_2 \cdots t_i t_1 \cdots t_{i-1})^{-1} d'_2 (t_2 \cdots t_i t_1 \cdots t_{i-1}). \end{cases}$$

于是我们得到以下结果。

引理 7.4。令 $F = (\lambda, f) \in \widehat{GT}$，并考虑定理 *1.1* 中给出的 $F_{\mathcal{B}} = \mathrm{inn}(\prod_{j=1}^{g-1} f(y_{2j+1}, a_{2j+1}^2)) \circ F$ 在 $\widehat{\Gamma}_{g,1}$ 上的作用。记 $m := \frac{\lambda-1}{2}$。那么，对于 $3 \leqq i \leq g-1$，有

(i) $F_{\mathcal{B}}(g_{1,i}) = (d_i d'_i)^m f(g_{1,i} g'_{1,i}, d_i d'_i) g_{1,i}^{\lambda} f(d_i d'_i, g_{1,i} g'_{1,i}) (d_i d'_i)^{-m}$; *(ii)* $F_{\mathcal{B}}(g_{2,i}) = f(g_{2,i} g'_{2,i}, d_i d'_i) g_{2,i}^{\lambda} f(d_i d'_i, g_{2,i} g'_{2,i})$.

注意到，引理 7.4 右侧可以写成

$$F_{\mathcal{B}}(g_{1,i}) = (d_i)^m f(g_{1,i}, d_i) g_{1,i}^{\lambda} f(d_i, g_{1,i}) (d_i)^{-m}; \qquad F_{\mathcal{B}}(g_{2,i}) = f(g_{2,i}, d_i) g_{2,i}^{\lambda} f(d_i, g_{2,i}) \tag{7.2}$$

利用俳句引理的 (iii) 得到。

这个引理与归纳假设 $F_{\mathcal{B}}(d_k) = d_k^\lambda$ for $k \leq i$ 一起，将在此处计算 $F(d_{i+1})$ 时发挥与小节 5.3 中的 (5.16) 完全相同的作用，即从 d_2 推导出 d_3。在给出证明之前，我们先说明如何利用它完成命题 7.3 的证明。

利用引理 *7.4* 证明命题 *7.3*。公式 (7.2) 允许我们计算 $F_{\mathcal{B}}$ 对灯笼关系 (7.1) 左侧 $\Delta := g_{2,\,i} g_{1,\,i} d_i$ 的作用，得到

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}}(\Delta) = F_{\mathcal{B}}(g_{2,i}g_{1,i}d_i) &= f(g_{2,i}, d_i) g_{2,i}^{\lambda} f(d_i, g_{2,i}) d_i^m f(g_{1,i}, d_i) g_{1,i}^{\lambda} f(d_i, g_{1,i}) d_i^{-m} d_i^{\lambda} \\ &= f(g_{2,i}, d_i) g_{2,i}^{\lambda} \cdot g_{2,i}^{-m} f(g_{1,i}, g_{2,i}) g_{1,i}^{-m} \Delta^m \cdot g_{1,i}^{\lambda} f(d_i, g_{1,i}) d_i^{-m} d_i^{\lambda} \\ &= f(g_{2,i}, d_i) g_{2,i}^{\frac{\lambda+1}{2}} f(g_{1,i}, g_{2,i}) g_{1,i}^{\frac{\lambda+1}{2}} f(d_i, g_{1,i}) d_i^{\frac{\lambda+1}{2}} \Delta^m \\ &= \Delta^{\frac{\lambda+1}{2}} \Delta^m = \Delta^{\lambda}, \end{aligned}$$

第二个等号用到了关系（II）（形式为 [NS] 引理 1.5 (1.5.2)）。由归纳假设，(7.1) 右侧的作用为 $d_{i-1}^{\lambda} a_{2i-1}^{\lambda} a_{2i+1}^{\lambda} F_{\mathcal{B}}(d_{i+1})$；因此我们得到$F_{\mathcal{B}}(d_{i+1}) = d_{i+1}^{\lambda}$。至此，命题 7.3 的证明完成。□

为了完成定理 7.1 的证明，还需证明引理 7.4。回想一下，由原始辫子 $a_1, a_2, \ldots$ 导出的元素 $t_1 = a_2 a_1 a_3 a_2$, $t_2 = a_4 a_3 a_5 a_4, \ldots$ 表现得如同带状辫，在底层股线上两两进行平交叉。特别地，它们满足辫群关系 $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$, $t_i t_j = t_j t_i$ ($|i-j| > 1$)。

Set

$$\begin{aligned} Y_k &:= t_{k-1} \cdots t_1 \, t_1 \cdots t_{k-1}; \\ W_k &:= (t_1 t_2 \cdots t_{k-1})^k = Y_2 Y_3 \cdots Y_k \end{aligned}$$

对于 $k \geq 2$。

命题 7.5 节。沿用上述记号，引理 *7.4* 的内部因子可写成如下形式 *s.*

(1) $d_i d'_i = w_{2i} = W_i a_1^2 a_3^2 \cdots a_{2i-1}^2$。

(2) $g_{1,\,i} g'_{1,\,i} = t_i^{-1} w_{2i} t_i$。**(3)** $g_{2,\,i} g'_{2,\,i} = t_i^2 a_{2i-1}^2 a_{2i+1}^2$。

证明这个命题时，下面的引理会很有用。

引理 7.6. (i) 若 $i \neq j$，则 W_j 与 t_i 交换。

(ii) 若 $i \neq j$，则 d_j、 w_{2j} 与 $g_{1,i}$ 以及 $g_{2,i}$均交换。(iii) $(t_i W_i)^2 = W_{i+1} W_{i-1}$。(iv) $t_i y_{2i} y_{2i-1} t_i = y_{2i+2} y_{2i+1} = Y_{i+1} a_{2i+1}^2$。

证明。(i) 由定义，$W_j=(t_1\cdots t_{j-1})^j$，且该元素与由 $t_1,t_2,\ldots$ 生成的带状辫群中所有 $j\neq i$ 的 t_i 交换。对于 (ii)，回顾 d_i、$g_{1,i}$ 与 $g_{2,i}$ 是沿图 3 中环路δ_i、$\gamma_{1,i}$ 与$\gamma_{2,i}$ 的扭转，这些环路位于子曲面 S_i 上，该子曲面为亏格 0，并沿环路 δ_{i-1}、α_{2i-1}、α_{2i+1} 与 δ_{i+1} 具有四个边界分支。该断言由 S_i 与 S_j 在 $i\neq j$ 时的位置以及事实 $w_{2j}=d_jd_j'$ 显然成立。对于 (iii)，我们有

$$(t_iW_i)^2=t_iY_iY_{i-1}\cdots Y_2t_iW_i=(t_iY_it_i)Y_{i-1}\cdots Y_2(Y_iW_{i-1})=Y_{i+1}Y_iY_{i-1}\cdots Y_2W_{i-1}=W_{i+1}W_{i-1},$$

这就推出了所要证明的断言。最后，(iv) 的第一个等式可由下列计算得出，其中只用到了辫群交换关系和通常的辫群关系（由带下划线的部分标出）。

$$\begin{aligned}
t_iy_{2i}y_{2i-1}t_i&=a_{2i}a_{2i+1}\underline{a_{2i-1}a_{2i}\cdot a_{2i-1}}y_{2i-1}a_{2i-1}\cdot y_{2i-1}\cdot a_{2i}a_{2i+1}a_{2i-1}a_{2i}\\
&=\underline{a_{2i}a_{2i+1}a_{2i}}a_{2i-1}a_{2i}\,y_{2i-1}a_{2i-1}\cdot a_{2i}a_{2i+1}y_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i}\\
&=a_{2i+1}a_{2i}a_{2i+1}a_{2i-1}a_{2i}\,y_{2i-1}a_{2i-1}\cdot a_{2i}a_{2i+1}y_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i}\\
&=a_{2i+1}a_{2i}a_{2i-1}y_{2i-1}\Big(a_{2i+1}\underline{a_{2i}a_{2i-1}\cdot a_{2i}}a_{2i+1}\Big)y_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i}\\
&=a_{2i+1}a_{2i}a_{2i-1}y_{2i-1}\Big(a_{2i+1}a_{2i-1}a_{2i}a_{2i-1}a_{2i+1}\Big)y_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i}\\
&=a_{2i+1}a_{2i}a_{2i-1}y_{2i-1}\Big(a_{2i-1}\underline{a_{2i+1}a_{2i}a_{2i+1}}a_{2i-1}\Big)y_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i}\\
&=a_{2i+1}a_{2i}a_{2i-1}y_{2i-1}\Big(a_{2i-1}a_{2i}a_{2i+1}a_{2i}a_{2i-1}\Big)y_{2i-1}a_{2i-1}a_{2i}\\
&=y_{2i+2}y_{2i+1}.
\end{aligned}$$

(iv) 的第二个等式，我们对 i 使用归纳法。当 $i=1$ 时，很容易看出 $y_4y_3=t_1^2a_3^2=Y_2^2a_3^2$。假设所需等式对 $i=k$ 成立。于是，由于 $t_k(a_{2k\pm1})t_k^{-1}=a_{2k\mp1}$，可得 $t_ky_{2k}y_{2k-1}t_k=t_kY_ka_{2k-1}^2t_k=t_kY_kt_ka_{2k+1}^2=Y_{k+1}a_{2k+1}^2$。引理的证明至此完成。□

命题 7.5 的证明。(1) 只需通过对 i 使用归纳法证明第二个等式 $w_{2i}=W_ia_1^2\cdots a_{2i-1}^2$。当 $i=2$ 时，$w_4=t_1^2a_1^2a_3^2=W_2a_1^2a_3^2$ 成立。假设该结论对 $i\leq k$ 成立。由引理 7.6 (iv) 可得 $y_{2k+2}y_{2k_+1}=t_ky_{2k}y_{2k-1}t_k=Y_{k+1}a_{2k+1}^2$。于是

$$\begin{aligned}
w_{2k+2}&=y_{2k+2}y_{2k+1}\cdot w_{2k}\\
&=Y_{k+1}a_{2k+1}^2\cdot W_ka_1^2\cdots a_{2k-1}^2\\
&=Y_{k+1}W_ka_1^2\cdots a_{2k+1}^2=W_{k+1}a_1^2\cdots a_{2k+1}^2
\end{aligned}$$

(2) 由 $g_{1,\ i}g_{1,\ i}'=t_i^{-1}\ (d_id_i')t_i$ 和 $d_id_i'=w_{2i}$ 得出。(3) 对于 $i=2$，我们有 $g_{2,\ 2}g_{2,\ 2}'=w_4=t_1^2a_1^2a_3^2$。假设该结论对 $i=k$ 成立，则，

$$\begin{aligned}
g_{2,k+1}g_{2,k+1}'&=t_k^{-1}t_{k+1}^{-1}(g_{2,k}g_{2,k}')t_{k+1}t_k\\
&=t_k^{-1}t_{k+1}^{-1}(t_k^2a_{2k-1}^2a_{2k+1}^2)t_{k+1}t_k\\
&=t_k^{-1}t_{k+1}^{-1}t_k^2a_{2k-1}^2t_{k+1}a_{2k+3}^2t_k\\
&=t_k^{-1}t_{k+1}^{-1}t_k^2a_{2k-1}^2t_{k+1}t_ka_{2k+3}^2\\
&=t_k^{-1}t_{k+1}^{-1}t_k^2t_{k+1}t_ka_{2k+1}^2a_{2k+3}^2=t_{k+1}^2a_{2k+1}^2a_{2k+3}^2,
\end{aligned}$$

因此，$i=k+1$ 的情形也随之成立。□

根据命题 7.5，可得引理 7.4 中的公式等价于

$$\begin{cases}F_{\mathcal{B}}(g_{1,i})&=(W_i)^mf(t_i^{-1}W_it_i,W_i)g_{1,i}^{\lambda}f(W_i,t_i^{-1}W_it_i)W_i^{-m};\\F_{\mathcal{B}}(g_{2,i})&=f(t_i^2,W_i)g_{2,i}^{\lambda}f(W_i,t_i^2).\end{cases}$$

引理 7.4 的证明。下文为简便起见，使用记号 $[x]*y:=y^{-1}xy$。断言 (i) 由对 $i\geq2$ 的计算得出：

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{B}}(g_{1,i})&=F_{\mathcal{B}}(t_i^{-1}d_it_i)\\
&=[d_i^{\lambda}]*f(t_i^2,W_i)t_i^{\lambda}f(W_i,t_i^2)\\
&=[d_i^{\lambda}]*t_if(t_i^2,t_i^{-1}W_it_i)t_i^{\lambda-1}f(W_i,t_i^2)\\
&=[d_i^{\lambda}]*t_i(t_iW_i)^2f(W_i,t_i^{-1}W_it_i)W_i^{-m}\\
&=[t_i^{-1}d_i^{\lambda}t_i]*f(W_i,t_i^{-1}W_it_i)W_i^{-m},
\end{aligned}$$

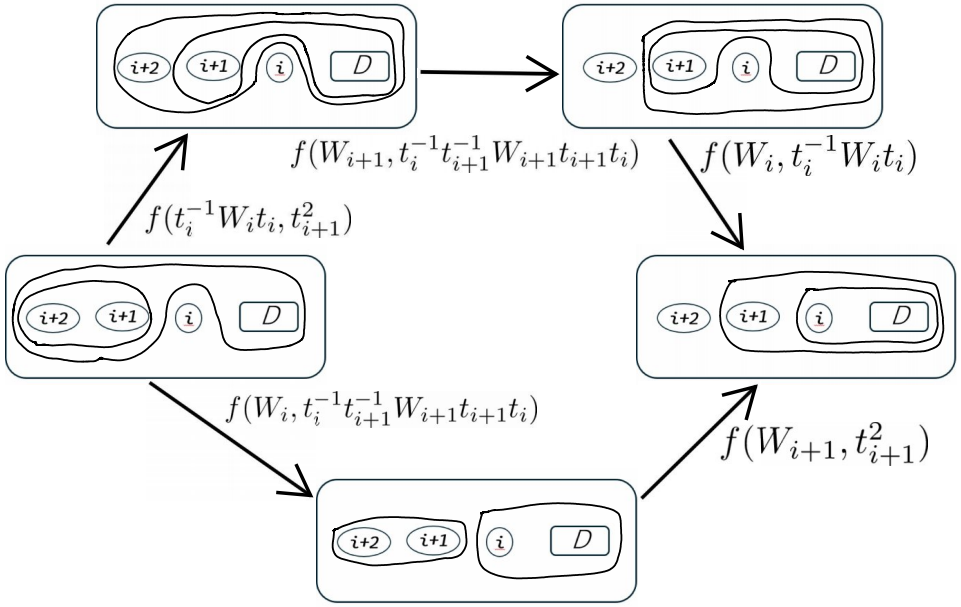


FIGURE 4. 带状辫层面的 A-移动

其中，最后一个等式用到了 d_i，t_i 与 $(t_iW_i)^2 = W_{i-1}W_{i+1}$ 交换（引理 7.6）这一事实。我们对 i 使用归纳法证明 (ii)。对于 $i = 2$，这已在 (5.16) 中证明。假设 $F_{\mathcal{B}}(g_{2,\,k})$ $(k \le i)$ 具有断言所述的形式。那么，

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{B}}(g_{2,i+1}) =& F_{\mathcal{B}}(t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}g_{2,i}t_{i+1}t_i) = \big[F_{\mathcal{B}}(g_{2,i})\big] * F_{\mathcal{B}}(t_{i+1})F_{\mathcal{B}}(t_i) \\
=& [g_{2,i}^{\lambda}] * f(W_i, t_i^2) \cdot f(t_{i+1}^2, W_{i+1})t_{i+1}^{\lambda} f(W_{i+1}, t_{i+1}^2) \cdot f(t_i^2, W_i)t_i^{\lambda} f(W_i, t_i^2) \\
=& [\underline{g_{2,i}^{\lambda}}] * \Big(\underbrace{f(W_i, t_i^2)} \cdot \underline{t_{i+1}(t_{i+1}^{-1}W_{i+1}^{-m}t_{i+1})} f(W_{i+1}, t_{i+1}^{-1}W_{i+1}t_{i+1})W_{i+1}^{-m}(t_{i+1}W_{i+1})^{2m} \\
& \cdot t_i(t_iW_i)^{2m}(t_i^{-1}W_i^{-m}t_i)f(W_i, t_i^{-1}W_it_i)W_i^{-m} \Big)
\end{aligned}$$

由于下划线部分应当消失，因为 W_{i+1} 与 $g_{2\text{相交换}i}$，W_i 并且根据引理 7.6，t_i^2 同时由于波浪线部分随后可以改写为

$$t_{i+1}f(W_i, t_{i+1}^{-1}t_i^2t_{i+1}) = t_{i+1}f(W_i, t_it_{i+1}^2t_i^{-1}) = t_{i+1}t_if(t_i^{-1}W_it_i, t_{i+1}^2)t_i^{-1},$$

上述计算继续为

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{B}}(g_{2,i+1}) =& [g_{2,i}^{\lambda}] * \Big(t_{i+1}t_if(t_i^{-1}W_it_i, t_{i+1}^2)t_i^{-1}f(W_{i+1}, t_{i+1}^{-1}W_{i+1}t_{i+1})W_{i+1}^{-m}(W_iW_{i+2})^m \\
& \cdot t_i(W_{i-1}W_{i+1})^m(t_i^{-1}W_i^{-m}t_i)f(W_i, t_i^{-1}W_it_i)W_i^{-m} \Big) \\
=& [g_{2,i}^{\lambda}] * \Big(t_{i+1}t_if(t_i^{-1}W_it_i, t_{i+1}^2)f(W_{i+1}, t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}W_{i+1}t_{i+1}t_i)W_{i+1}^{-m}t_i^{-1}(W_iW_{i+2})^m t_i \\
& \cdot (W_{i-1}W_{i+1})^m(W_i^{-m})(t_i^{-1}W_i^{-m}t_i)f(t_iW_it_i^{-1}, W_i)W_i^{-m} \Big) \\
=& [g_{2,i+1}^{\lambda}] * \Big(f(t_i^{-1}W_it_i, t_{i+1}^2)f(W_{i+1}, t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}W_{i+1}t_{i+1}t_i)f(t_iW_it_i^{-1}, W_i)W_i^{-m} \Big) \\
=& [g_{2,i+1}^{\lambda}] * \Big(f(W_i, t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}W_{i+1}t_{i+1}t_i)f(W_{i+1}, t_{i+1}^2)W_i^{-m} \Big) \\
=& [g_{2,i+1}^{\lambda}] * f(W_{i+1}, t_{i+1}^2) = f(t_{i+1}^2, W_i)g_{2,i+1}^{\lambda} f(W_{i+1}, t_{i+1}^2).
\end{aligned}$$

请注意，上述倒数第二行用到了沿图 4 中图示的关系式（III），而最后一行则用到了 $g_{2,\,i+1} = t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}g_{2,\,i}t_{i+1}t_i$ 与 W_i 和 $t_i^{-1}t_{i+1}^{-1}W_{i+1}t_{i+1}t_i$ 的可交换性（依据命题 7.5 (1) 和引理 7.6 (ii)）。断言 (ii) 的证明至此完成。□

8. 关于 $\Gamma_{g,n}$, $n>1$ 一般情形的展望

设 $\Sigma_{g,n}$ 表示一个亏格为 g 且有 n 个边界分支的定向曲面，并考虑其有限群化映射类群 $\widehat{\Gamma}_{g,n}$。对于 $F=(\lambda,f)\in\widehat{GT}$，已知在我们对 $\Gamma_{g,1}$ 的标准作用中，对于 $i=1,\ldots\ldots,g$，有 $F(d_i)=d_i^{\lambda}$（定理 1.1 和命题 7.3），于是我们可以沿这些环路以多种方式切割，从而得到 $\Sigma_{g,1}$ 的子曲面 $\Sigma_{g',n'}$，其亏格较小 g'，且边界分支多于一个。如果 $F\in GT$ 在 $\Gamma_{g,1}$ 上的作用限制在 $\Gamma_{g',n'}$ 的像上，并且我们暂且假设从 $\Gamma_{g',n'}$ 到其在 $\Gamma_{g,1}$ 中的像的映射是单射，那么（忽略穿孔与边界分支对曲面映射类群作用效果造成的细微差异），这将表明 F 在 $\Gamma_{g',n'}$ 上地作用，从而将我们的主要结果推广到所有 (g,n) 的情形。

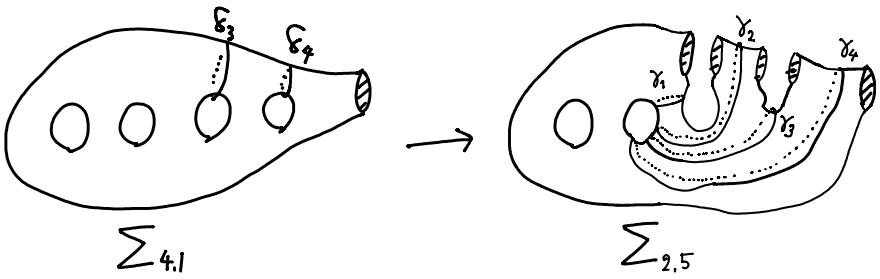


FIGURE 5. 曲面 $\Sigma_{2,5}$ 截自 $\Sigma_{g,n}=\Sigma_{4,1}$

图 5 展示了这种沿环路切割以产生更多边界分支的一个典型例子，其中环路 δ_3 与 δ_4 在 $\Sigma_{4,1}$ 上已被切开，从而得到子曲面 $\Sigma_{2,5}$。映射类群 $\Gamma_{2,5}$ 由沿图 1 所示环路的 Gervais 扭曲生成，而 GT 对沿图 5 所示环路 γ_2、γ_3、γ_4 的扭转的作用，原则上应等同于对被视为位于 $\Gamma_{4,1}$ 上的相同环路的相同扭转的作用。若能证明 $F(\gamma_i)$（对于 $i=2$、3、4）可在 $\Gamma_{2,5}$ 中对每一个如定理 1.1 那样作用于 $\Gamma_{4,1}$ 的 $F=(\lambda,f)\in GT$ 表出，则我们得到一个 GT作用，其作用于 $\Gamma_{2,5}\to\Gamma_{4,1}$ 的像上。在撰写本文时，我们尚不知道这对 GT是否成立。然而，我们确实知道，它对 GT 的一个特殊子群 $\mathbb{\Gamma}$ 成立；该子群在 [HLS], [LNS], [NS], 中引入，其中解释了格罗滕迪克的“乐高游戏”，并证明 $\mathbb{\Gamma}$作用是一种“乐高作用”，即它遵守这一游戏的规则（[Gr]）。乐高游戏的一个重要特征是，$\mathbb{\Gamma}$在 $\Gamma_{g,n}$ 上对所有 (g,n) 的作用都尊重由沿简单闭曲线切割所诱导的射影有限映射类群之间的所有同态，如上文例子 $\Gamma_{2,5}\to\Gamma_{4,1}$。$\mathbb{\Gamma}$ 的“乐高作用”能否延拓为整个群 GT 如定理 1.1 那样作用于 $\Gamma_{g,1}$ 的乐高作用，是本文作者未来的一项研究课题。

附录A. （5.2）的直接推导

在上文中，我们使用了 GT 在（5.2）中的以下作用，这是更一般的“A-移动公式”（定理 2.3）的推论：

$$\begin{cases} F_{\mathcal{B}}(t_1)=t_1^{\lambda},\\ F_{\mathcal{B}}(t_2)=f(t_2^2,t_1^2)\,t_2^{\lambda}\,f(t_1^2,t_2^2),\\ F_{\mathcal{B}}(t_3)=f(t_3^2,t_2t_1^2t_2)\,t_3^{\lambda}\,f(t_2t_1^2t_2,t_3^2), \end{cases} \tag{A.1}$$

其中 $t_i=a_{2i}a_{2i+1}a_{2i-1}a_{2i}(i=1,\ 2、3)$。

在本附录中，我们将展示如何直接从 Drinfeld 的 GT-作用于基本辫 $a_1,\ a_2,$ .....推导出这些公式。固定 $n\geq 4$ 和 $F=(\lambda,\ f)\in GT$对有限 profinite 辫群的作用

$$\widehat{B}_n=\left\langle a_1,\ldots,a_{n-1}\;\middle|\;\begin{array}{c} a_ia_j=a_ja_i\quad(|i-j|>1),\\ a_ia_{i+1}a_i=a_{i+1}a_ia_{i+1}\quad(i=1,\ldots,n-2)\end{array}\right\rangle.$$

下文记作

$$F_{\mathcal{B}} := \left(\mathrm{inn} \prod_{i=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} f(y_{2i+1}, a_{2i+1}^2) \right) \circ F \quad \in \mathrm{Aut}(\widehat{B}_n).$$

我们先证明最简单的情形:

命题 A.1. 沿用上述记号， $F_{\mathcal{B}}$ 对 $t_1 = a_2 a_1 a_3 a_2$ 的作用为

$$F_{\mathcal{B}}(t_1) = t_1^{\lambda}. \tag{A.2}$$

证明。 我们以 [NS 的形式三次使用六边形关系，见引理 1.5]:

$$f(x,y)x^m f(z,x)z^m f(y,z)y^m = \omega^m \tag{A.3}$$

其中假设 x, y, z 均与 $\omega := xyz$ 可交换。

现在根据定义， $F_{\mathcal{B}}$ 对 a_1, a_2, a_3 的作用为

$$F_{\mathcal{B}}(a_1) = a_1^{\lambda}, \quad F_{\mathcal{B}}(a_3) = a_3^{\lambda} \tag{A.4}$$

$$F_{\mathcal{B}}(a_2) = f(w_3, a_3^2) f(a_2^2, a_1^2) a_2^{\lambda} f(a_1^2, a_2^2) f(a_3^2, w_3) \tag{A.5}$$

但我们用两种不同的表达式表示 $F_{\mathcal{B}}(a_2)$:

$$F_{\mathcal{B}}(a_2) = f(w_3, a_3^2) \underline{f(a_2^2, a_1^2) a_2^{\lambda-1} f(a_2 a_1^2 a_2^{-1}, a_2^2)} f(a_2 a_3^2 a_2^{-1}, w_3) \cdot a_2 \tag{A.6}$$

$$= f(w_3, a_3^2) \underline{a_1^{1-\lambda} f(a_2 a_1^2 a_2^{-1}, a_1^2) a_2 a_1^{1-\lambda} a_2^{-1} w_3^m} f(a_2 a_3^2 a_2^{-1}, w_3) \cdot a_2 \tag{A.7}$$

其中（A.3）应用于带下划线的部分。

我们计算 $F_{\mathcal{B}}(t_1) = F_{\mathcal{B}}(a_2) F_{\mathcal{B}}(a_1) F_{\mathcal{B}}(a_3) F_{\mathcal{B}}(a_2)$，并结合图 6 中的图示；图中（带 puncture 的平面上的）裤子分解之间的箭头标记为 $f(G,\ L)$，其中 $G,\ L$ 分别表示新增环和消失环的扭转。

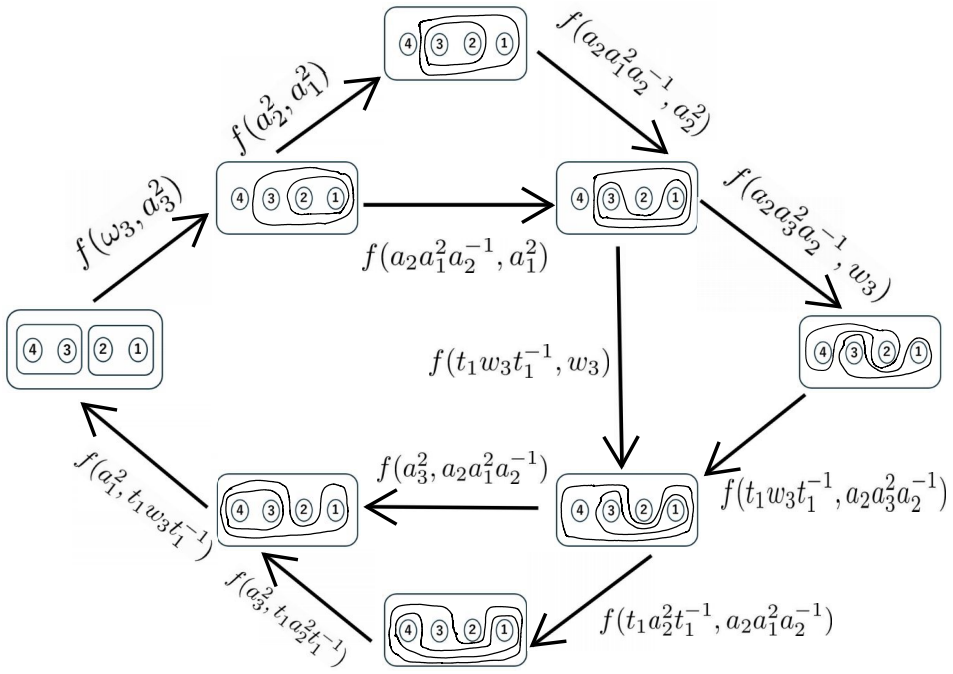


FIGURE 6. 针对 $F_{\mathcal{B}}(t_1)$的 A-移动

我们将（A.7）应用于第一个因子，将（A.6）应用于最后一个因子。于是得到:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{B}}(t_1) &= F_{\mathcal{B}}(a_2) F_{\mathcal{B}}(a_1) F_{\mathcal{B}}(a_3) F_{\mathcal{B}}(a_2) \\ &= a_1^{1-\lambda} f(w_3, a_3^2) w_3^m f(a_2 a_1^2 a_2^{-1}, a_1^2) a_2 a_1^{1-\lambda} a_2^{-1} f(a_2 a_3^2 a_2^{-1}, w_3) \underline{a_2 a_1^{1-\lambda} a_2^{-1} \cdot a_2 \cdot (a_1^{\lambda} \cdot a_3^{\lambda})} \\ &\quad \cdot f(w_3, a_3^2) f(a_2^2, a_1^2) a_2^{\lambda-1} f(a_2 a_1^2 a_2^{-1}, a_2^2) f(a_2 a_3^2 a_2^{-1}, w_3) \cdot a_2 \end{aligned} \tag{A.8}$$

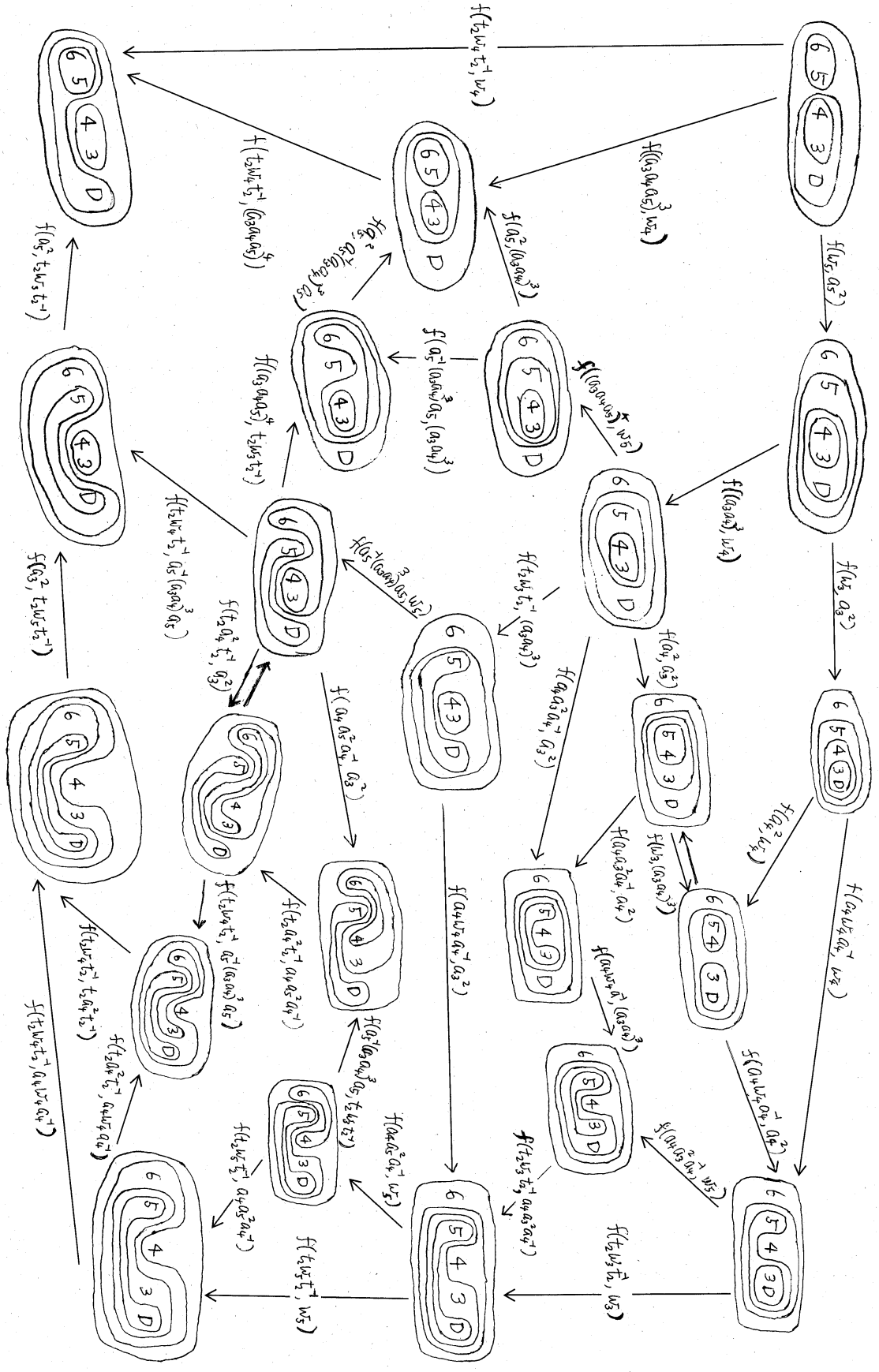


FIGURE 7. $F_{\mathcal{B}}(t_i)$ 的 A-移动（$i \geq 2$）

将上文带下划线的部分替换为 $a_2a_3^{\lambda-1}a_2^{-1}\cdot(a_2a_1a_3)$ 后，继续得到

$$\begin{aligned}&=a_1^{1-\lambda}f(w_3,a_3^2)w_3^m f(a_2a_1^2a_2^{-1},a_1^2)a_2a_1^{1-\lambda}a_2^{-1}\underline{f(a_2a_3^2a_2^{-1},w_3)\cdot a_2a_3^{\lambda-1}a_2^{-1}f(t_1w_3t_1^{-1},a_2a_3^2a_2^{-1})}\\&\quad\cdot\underline{f(t_1a_2^2t_1^{-1},a_2a_1^2a_2^{-1})t_1a_2^{\lambda-1}t_1^{-1}f(t_1a_1^2t_1^{-1},t_1a_2^2t_1^{-1})}\cdot f(t_1a_3^2t_1^{-1},t_1w_3t_1^{-1})\cdot t_1\end{aligned}$$

注意到通过 t_1 进行共轭会交换 a_1 和 a_3，并令 $\Omega:=(a_2a_3^2a_2^{-1})w_3(t_1w_3t_1^{-1})$，我们进一步将上式化为

$$\begin{aligned}&=a_1^{1-\lambda}f(w_3,a_3^2)w_3^m f(a_2a_1^2a_2^{-1},a_1^2)\cdot(a_2a_1^{1-\lambda}a_2^{-1})\cdot\underline{w_3^{-m}f(t_1w_3t_1^{-1},w_3)(t_1w_3^{-m}t_1^{-1})\Omega^m}\\&\quad\cdot\underline{(t_1w_3^mt_1^{-1})(a_2a_1^{1-\lambda}a_2^{-1})f(a_3^2,a_2a_1^2a_2^{-1})a_3^{1-\lambda}}\cdot f(a_1^2,t_1w_3t_1^{-1})\cdot t_1\\&=a_1^{1-\lambda}\cdot f(w_3,a_3^2)\cdot f(a_2a_1^2a_2^{-1},a_1^2)\cdot f(t_1w_3t_1^{-1},w_3)\cdot(a_2a_1^{-2}a_2^{-1}\Omega)^m\cdot f(a_3^2,a_2a_1^2a_2^{-1})\\&\quad\cdot f(a_1^2,t_1w_3t_1^{-1})\cdot a_3^{1-\lambda}\cdot t_1,\end{aligned}$$

其中，我们在上文带下划线和波浪线的部分应用了 (A.3)，并使用了 $a_2a_1^{-2}a_2^{-1}\Omega=w_4$。于是，得到所要求的量 (A.8)：

$$\begin{aligned}F_{\mathcal{B}}(t_1)=&a_1^{1-\lambda}f(w_3,a_3^2)f(a_2a_1^2a_2^{-1},a_1^2)f(t_1w_3t_1^{-1},w_3)f(a_3^2,a_2a_1^2a_2^{-1})\\&\cdot f(a_1^2,t_1w_3t_1^{-1})\cdot a_3^{1-\lambda}w_4^{\lambda}\cdot t_1\end{aligned}\tag{A.9}$$

$$=a_1^{1-\lambda}a_3^{1-\lambda}w_4^m\cdot t_1\tag{A.10}$$

在 (A.10) 之后，只需推导

$$a_1^{1-\lambda}a_3^{1-\lambda}\cdot t_1=w_4^{-m}\cdot t_1^{\lambda}.$$

事实上，我们有 $a_1^2a_3^2t_1^2=w_4$。利用 w_4 与 a_1a_3 可交换这一事实，我们得到

$$t_1^{\lambda}=t_1^{\lambda-1}\cdot t_1=t_1\cdot(t_1^2)^m=t_1\cdot w_4^m(a_1a_3)^{1-\lambda}$$

由此完成了我们主张的证明。 □

接下来，我们将证明

命题 A.2. 设 $F=(\lambda,f)\in GT$ 和 $F_{\mathcal{B}}$ 如上所述。则 $F_{\mathcal{B}}$ 作用于 $t_2=a_4a_3a_5a_4$ *by*

$$F_{\mathcal{B}}(t_2)=f(t_2^2,t_1^2)t_2^{\lambda}f(t_1^2,t_2^2).\tag{A.11}$$

证明。现在根据定义，$F_{\mathcal{B}}$ 通过以下方式作用于 a_1,a_2,a_3

$$F_{\mathcal{B}}(a_i)=a_i^{\lambda}\quad(i=1,3,5),\tag{A.12}$$

$$F_{\mathcal{B}}(a_2)=f(w_3,a_3^2)f(a_2^2,a_1^2)a_2^{\lambda}f(a_1^2,a_2^2)f(a_3^2,w_3)\tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}F_{\mathcal{B}}(a_4)&=f(w_5,\ a_5^2)f(w_3,\ a_3^2)f(a_4^2,\ w_4)a_4^{\lambda}f(w_4,\ a_4^2)f(a_3^2,\ w_3)f(a_5^2,\ w_5)\\&=f(w_5,a_5^2)f(w_3,a_3^2)f(a_4^2,w_4)a_4^{\lambda-1}f(a_4w_4a_4^{-1},a_4^2)\\&\quad\cdot f(a_4a_3^2a_4^{-1},a_4w_3a_4^{-1})f(a_4a_5^2a_4^{-1},a_4w_5a_4^{-1})\cdot a_4.\end{aligned}\tag{A.14}$$

我们计算 $F_{\mathcal{B}}(t_2)=F_{\mathcal{B}}(a_4)F_{\mathcal{B}}(a_3)F_{\mathcal{B}}(a_5)F_{\mathcal{B}}(a_4)$，并参见图 7 中的示意图，其中“$D$”表示一个带两个穿孔的圆盘，穿孔从左至右编号为 2、1；带 puncture 的平面上的裤子分解之间的箭头标记为 $f(G、\ L)$，其中 G、L 分别表示对新增环和消失环的扭转。

$$F_{\mathcal{B}}(t_2)=F_{\mathcal{B}}(a_4)F_{\mathcal{B}}(a_3)F_{\mathcal{B}}(a_5)F_{\mathcal{B}}(a_4)\tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}&=f(w_5,a_5^2)f(w_3,a_3^2)f(a_4^2,w_4)a_4^{\lambda-1}f(a_4w_4a_4^{-1},a_4^2)f(a_4a_3^2a_4^{-1},w_3)\\&\quad\cdot f(a_4a_5^2a_4^{-1},w_5)\cdot a_4(a_3a_5)^{\lambda-1}a_4^{-1}\cdot a_4a_3a_5\cdot F_{\mathcal{B}}(a_4)\\&=f(w_5,a_5^2)\underline{f(w_3,a_3^2)f(a_4^2,w_4)}a_4^{\lambda-1}\underline{f(a_4w_4a_4^{-1},a_4^2)f(a_4a_3^2a_4^{-1},w_3)}\\&\quad\cdot f(a_4a_5^2a_4^{-1},w_5)\cdot a_4a_3^{\lambda-1}a_4^{-1}\cdot a_4a_5^{\lambda-1}a_4^{-1}\\&\quad\cdot f(t_2w_5t_2^{-1},a_4a_5^2a_4^{-1})f(t_2w_3t_2^{-1},a_4a_3^2a_4^{-1})f(t_2a_4^2t_2^{-1},a_4w_4a_4^{-1})t_2a_4^{\lambda-1}t_2^{-1}\\&\quad\cdot f(t_2w_4t_2^{-1},t_2a_4^2t_2^{-1})f(t_2a_3^2t_2^{-1},t_2w_3t_2^{-1})f(t_2a_5^2t_2^{-1},t_2w_5t_2^{-1})\cdot t_2.\end{aligned}$$

将上述带下划线和波浪线的部分替换为:

$$f(w_3,a_3^2)f(a_4^2,w_4)=f((a_3a_4)^3,w_4)f(a_4^2,a_3^2)f(w_3,(a_3a_4)^3), \tag{A.16}$$
$$f(a_4w_4a_4^{-1},\ a_4^2)f(a_4a_3^2a_4^{-1},\ a_4w_3a_4^{-1})=f((a_3a_4)^3,\ w_3)f(a_4a_3^2a_4^{-1},\ a_4^2)f(a_4w_4a_4^{-1},\ (a_3a_4)^3),$$

消去其中的 $f(w_3,\ (a_3a_4)^3)^{\pm1}$，再利用 $a_4^{\lambda-1}$ 的交换性，并注意到 $f(a_4a_5^2a_4^{-1},\ w_5)$ 和 $f(t_2w_4t_2^{-1},\ t_2a_4^2t_2^{-1})$ 的交换性，计算式 (A.15) 接下来得到:

$$\begin{aligned}
=&f(w_5,a_5^2)f((a_3a_4)^3,w_4)\underline{\underline{f(a_4^2,a_3^2)a_4^{\lambda-1}f(a_4a_3^2a_4^{-1},a_4^2)}}f(a_4w_4a_4^{-1},(a_3a_4)^3) \\
&\cdot \underline{\underline{a_4a_3^{\lambda-1}a_4^{-1}}}f(t_2w_3t_2^{-1},a_4a_3^2a_4^{-1})f(a_4a_5^2a_4^{-1},w_5)a_4a_5^{\lambda-1}a_4^{-1} \\
&\cdot \underline{f(t_2w_5t_2^{-1},a_4a_5^2a_4^{-1})f(t_2a_4^2t_2^{-1},a_4w_4a_4^{-1})}t_2a_4^{\lambda-1}t_2^{-1}\underline{f(t_2w_4t_2^{-1},t_2a_4^2t_2^{-1})f(a_3^2,t_2w_5t_2^{-1})} \\
&\cdot f(a_5^2,t_2w_3t_2^{-1})\cdot t_2
\end{aligned} \tag{A.17}$$

此外，将六边形关系 (A.3) 应用于双线因子，并分别将带下划线和带波浪线的部分替换为 5-循环关系

$$\begin{aligned}
&f(a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5,t_2w_3t_2^{-1})f(t_2a_4^2t_2^{-1},a_4a_5^2a_4^{-1})f(t_2w_5t_2^{-1},a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5), \\
&f(a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5,t_2w_3t_2^{-1})f(a_3^2,t_2a_4^2t_2^{-1})f(t_2w_4t_2^{-1},a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5)
\end{aligned}$$

（显然可以约去）上式中，我们继续推导（A.15），得到:

$$\begin{aligned}
=&f(w_5,a_5^2)f((a_3a_4)^3,w_4)a_3^{1-\lambda}(a_3a_4)^{3m}\underline{f(a_4a_3^2a_4^{-1},a_3^2)f(a_4w_4a_4^{-1},(a_3a_4)^3)f(t_2w_3t_2^{-1},a_4a_3^2a_4^{-1})} \\
&\cdot f(a_4a_5^2a_4,w_5)(a_4a_5^{\lambda-1}a_4^{-1})f(a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5,t_2w_3t_2^{-1}) \\
&\cdot \underline{f(t_2a_4^2t_2^{-1},a_4a_5^2a_4^{-1})(t_2a_4^{\lambda-1}t_2^{-1})f(a_3^2,t_2a_4^2t_2^{-1})}\cdot \underline{\underline{f(t_2w_4t_2^{-1},a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5)f(a_5^2,t_2w_3t_2^{-1})}}\cdot t_2
\end{aligned}$$

对上式中带单下划线和双下划线的部分分别应用关系式（III），得到

$$\begin{aligned}
&f(t_2w_3t_2^{-1},(a_3a_4)^3)f(a_4w_4a_4^{-1},a_3^2), \\
&f((a_3a_4a_5)^4,t_2w_3t_2^{-1})f(a_5^2,a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5)f(t_2w_4t_2^{-1},(a_3a_4a_5)^4)
\end{aligned}$$

并对波浪线标记的部分应用关系（II）。此外，注意到 $a_4a_5^2a_4^{-1}$ 与 $a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5,\ t_2w_3t_2^{-1}$ 可交换，我们可以继续推导:

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{B}}(t_2)=&f(w_5,a_5^2)f((a_3a_4)^3,w_4)a_3^{1-\lambda}(a_3a_4)^{3m}f(t_2w_3t_2^{-1},(a_3a_4)^3)\underline{f(a_4w_4a_4^{-1},a_3^2)} \\
&\cdot \underline{f(a_4a_5^2a_4^{-1},w_5)f(a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5,t_2w_3t_2^{-1})}(a_5^{-1}a_4^{\lambda-1}a_5) \\
&\cdot f(t_2a_4^2t_2^{-1},a_4a_5^2a_4^{-1})(t_2a_4^{\lambda-1}t_2^{-1})f(a_3^2,t_2a_4^2t_2^{-1}) \\
&\cdot f((a_3a_4a_5)^4,t_2w_3t_2^{-1})f(a_5^2,a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5)f(t_2w_4t_2^{-1},(a_3a_4a_5)^4)\cdot t_2 \\
=&f(w_5,a_5^2)f((a_3a_4)^3,w_4)a_3^{1-\lambda}(a_3a_4)^{3m}f(t_2w_3t_2^{-1},(a_3a_4)^3) \\
&\cdot f(a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5,w_5)\underline{f(a_5^{-1}a_4^2a_5,a_3^2)(a_5^{-1}a_4^{\lambda-1}a_5)f(t_2a_4^2t_2^{-1},a_4a_5^2a_4^{-1})}(t_2a_4^{\lambda-1}t_2^{-1}) \\
&\cdot f(a_3^2,t_2a_4^2t_2^{-1})f((a_3a_4a_5)^4,t_2w_3t_2^{-1})f(a_5^2,a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5)f(t_2w_4t_2^{-1},(a_3a_4a_5)^4)\cdot t_2 \\
=&f(w_5,a_5^2)f((a_3a_4)^3,w_4)a_3^{1-\lambda}(a_3a_4)^{3m}\underline{f(t_2w_3t_2^{-1},(a_3a_4)^3)} \\
&\cdot \underline{f(a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5,w_5)}a_3^{1-\lambda}\underline{\underline{f(t_2a_4^2t_2^{-1},a_3^2)(t_2a_4^{1-\lambda}t_2^{-1})}}a_5^{-1}(a_3a_4)^{-3m}a_5\underline{\underline{(t_2a_4^{\lambda-1}t_2^{-1})}} \\
&\cdot \underline{\underline{f(a_3^2,t_2a_4^2t_2^{-1})}}\underline{f((a_3a_4a_5)^4,t_2w_3t_2^{-1})}f(a_5^2,a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5)f(t_2w_4t_2^{-1},(a_3a_4a_5)^4)\cdot t_2
\end{aligned}$$

约去上式中的双线因子后，我们便可对波浪线标记部分应用关系式（III）。于是得到

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{B}}(t_2)=&f(w_5,a_5^2)f((a_3a_4)^3,w_4)a_3^{1-\lambda}(a_3a_4)^{3m}\cdot f((a_3a_4a_5)^4,w_5)\cdot a_3^{1-\lambda} \\
&\cdot \underline{f(a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5,(a_3a_4)^3)(a_5^{-1}(a_3a_4)^{3m}a_5)f(a_5^2,a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5)}f(t_2w_4t_2^{-1},(a_3a_4a_5)^4)\cdot t_2 \\
=&f(w_5,a_5^2)f((a_3a_4)^3,w_4)f((a_3a_4a_5)^4,w_5)a_3^{2-2\lambda}(a_3a_4)^{3m}\cdot \\
&\cdot (a_3a_4)^{-3m}\cdot f(a_5^2,(a_3a_4)^3)a_5^{1-\lambda}\Omega^m f(t_2w_4t_2^{-1},(a_3a_4a_5)^4)\cdot t_2
\end{aligned}$$

其中 $\Omega = a_5^{-1}(a_3a_4)^3a_5 \cdot (a_3a_4)^3 \cdot a_3^2 = a_3^2 \cdot (a_3a_4a_5)^4 = a_3^2 \cdot (a_3^2a_5^2t_2^2)$。由此可得

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{B}}(t_2) =& a_3^{2-2\lambda} f(w_5, a_5^2) f((a_3a_4)^3, w_4) f((a_3a_4a_5)^4, w_5) f(a_5^2, (a_3a_4)^3) \\
& \cdot a_5^{1-\lambda} a_3^{\lambda-1} (a_3a_4a_5)^{4m} f(t_2w_4t_2^{-1}, (a_3a_4a_5)^4) \cdot t_2 \\
=& a_3^{2-2\lambda} f((a_3a_4a_5)^4, w_4) a_5^{1-\lambda} a_3^{\lambda-1} (a_3^{\lambda-1}a_5^{\lambda-1}t_2^{\lambda-1}) f(t_2w_4t_2^{-1}, (a_3a_4a_5)^4) \cdot t_2 \\
=& f((a_3a_4a_5)^4, w_4) \cdot t_2^{\lambda-1} \cdot f(t_2w_4t_2^{-1}, (a_3a_4a_5)^4) \cdot t_2 \\
=& f(t_2^2, t_1^2) \cdot t_2^{\lambda-1} \cdot f(t_2t_1^2t_2^{-1}, t_2^2) \cdot t_2 = f(t_2^2, t_1^2) \cdot t_2^{\lambda} \cdot f(t_1^2, t_2^2),
\end{aligned}$$

其中，最后一行的等式由

$$f((a_3a_4a_5)^4, w_4) = f(t_2^2, t_1^2), \quad f(t_2w_4t_2^{-1}, (a_3a_4a_5)^4) = f(t_2t_1^2t_2^{-1}, t_2^2) \tag{A.18}$$

这些式子可由已知恒等式 $(a_3a_4a_5)^4 = a_3^2a_5^2t_2^2$ 和 $w_4 = a_1^2a_3^2t_1^2$ 轻易推导得出。因此，我们得到了关于 $F_{\mathcal{B}}(t_2)$ 的所需断言。□

命题 A.3. 令 $i \geq 2$ 并写作 $W_i := (t_1 \cdots t_{i-1})^i$。那么，我们有

$$F_{\mathcal{B}}(t_i) = f(t_i^2, W_i)\, t_i^{\lambda}\, f(W_i, t_i^2).$$

证明。我们计算 $F_{\mathcal{B}}(t_i) = F_{\mathcal{B}}(a_{2i})F_{\mathcal{B}}(a_{2i-1})F_{\mathcal{B}}(a_{2i+1})F_{\mathcal{B}}(a_{2i})$，并结合图 7 中的图示。此处，$D$ 之外的穿孔编号向左移 $+(2i-4)$，使得 D 由一个圆盘填充，穿孔从左至右编号，且给定与括号化 $(\ldots((2i-2,\ 2i-3)\ \cdots((43)(21))\ldots)$ 对应的裤子分解。由于沿不相交环路的德恩扭转彼此可交换，计算过程与 $F_{\mathcal{B}}(t_2)$ 的情形相同（命题 A.2）。□

参考文献

[D] 弗拉基米尔·德林费尔德，论拟三角拟霍普夫代数及一个与 Gal(— $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ *Leningrad Math.*) 密切相关的群，*J.* **2** 1991 829 860
（），-。[G] S. 热尔韦，带穿孔曲面的映射类群的有限表示， *Topology*，**40** 第4期（2001），703-725。[Gr] 亚历山大·格罗滕迪克，*Esquisse d'un Programme*, *Geometric Galois Actions*，伦敦数学学会讲义系列，**242**，剑桥大学出版社，1997。[HLS] ¨ *J. reine angew. Math. (Crelle)* 艾伦·哈彻、P. 洛 **521** 2000 1 24
夏克、L. 施内普斯，论映射类群的 Teichmüller 塔， （），-。[LNS] ¨ *Note aux CR Acad.* P. 洛夏克、H. 中村、*Sci.* **325** ´ 1997 11 16
L. 施内普斯，论格罗滕迪克－Teichmüller 群的一个新版本，I 辑， （），-。[NS] H. 中村、L. 施内普斯，论格罗滕迪克－Teichmüller 群的一个子群，该子群作用于仿射 Teichmüller 模群塔， *Invent. Math.* **141** （2000），503-560。[W] B. 瓦伊恩雷布，可定向曲面映射类群的一个简单表现， *Israel J. Math.*，**45** （1983），154-174。

Institut de Mathématiques de Jussieu, Sorbonne Université, Paris , France
Email address: Pierre.Lochak@imj-prg.fr

Department of Mathematics, University of Osaka, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan
Email address: nakamura@math.sci.osaka-u.ac.jp

Institut de Mathématiques de Jussieu, Sorbonne Université, Paris , France
Email address: Leila.Schneps@imj-prg.fr