arXiv:2602.12505v1 [math.RA] 13 Feb 2026

余代数测度、循环理论与矩阵代数的同调

Abhishek Banerjee * Surjeet Kour †

摘要

本文研究余代数测度以及它们在代数的霍赫希尔德同调与循环同调之间诱导的映射。我们证明，这些诱导映射与霍赫希尔德同调和循环同调中出现的各种结构相容，例如 λ-分解、乘积结构，以及霍赫希尔德同调作为循环同调上的模所具有的模结构。随后，我们将余代数测量所诱导的代数同调理论之间的映射，与其在矩阵代数同调之间诱导的映射联系起来。具体而言，考察以下情形：(a) 矩阵代数的循环同调与李代数同调的本原部分；(b) 矩阵代数的霍赫希尔德同调与莱布尼茨同调的本原部分；以及 (c) 带对合代数的二面体同调与辛矩阵或斜对称矩阵的李代数同调的本原部分。

2020年数学主题分类：16T15, 16E40

关键词：余代数测度、李代数同调、莱布尼茨同调、二面体同调

1 引言

余代数测量的经典概念（见 Sweedler [21]）是代数之间的一种广义映射。更确切地说，设 K 是一个域，A、A' 是含单位元的K-代数。那么，从A 到A' 的余代数测量（C,Φ）由一个K-余代数C 和一个K-线性映射 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$构成，并满足

$$\Phi(x)(ab) = \sum \Phi(x_{(1)})(a)\Phi(x_{(2)})(b) \qquad \Phi(x)(1_A) = \epsilon_C(x)1_{A'} \qquad \forall\, a,b \in A, x \in C \tag{1.1}$$

在 (1.1) 中，C 上的余乘法 Δ_C 写作 $\Delta_C(\mathrm{x}) = \sum \mathrm{x}_{(1)} \otimes \mathrm{x}^{(2)}$，其中每个 $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$；$\epsilon_C : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{K}$ 表示 C 上的余单位。若 $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$ 是一个类群元，即 $\Delta_C(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \otimes \mathrm{x}$ 且 $\epsilon_C(\mathrm{x}) = 1$，那么 $\Phi(\mathrm{x}) : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}'$ 就还原为从 A 到 A′的通常意义上的 K-代数同态。对于 K-代数 A、A′，还存在一个泛测量余代数 $\mathcal{M}(\mathrm{A}, \mathrm{A}')$，通常称为 Sweedler Hom。广义 Hom 对象 $\mathcal{M}(\mathrm{A}, \mathrm{A}')$使 K-代数相对于 K-余代数获得富化。Sweedler Hom 还与代数的有限对偶概念密切相关，后者给出了代数与余代数之间的伴随（见 Porst 和 Street [20]）。因此，余代数测度已在多种背景下得到研究，例如微分分次代数（见 Anel 和 Joyal [1]）、双代数（见 Grunenfelder 和 Mastnak [9], [10]）、交织结构（见 Brzezi´nski [6]），以及辫编幺半范畴中的幺半群（见 Hyland 、 L´opez Franco 和 Vasilakopoulou [11], Vasilakopoulou [22]）。另有一种类似的余模测量概念，其表现如同模之间的广义映射。关于余代数测度的更多内容，例如可参见 [4], [5], [12], [13]。

由于余代数测度被视为代数之间的广义态射，我们在此前的工作中证明了 [2], [3] 它们可用于构造多种（上）同调理论之间的映射。例如，若 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是通过余交换余代数C给出的测量，则存在诱导映射

$$HH_\bullet^\Phi(x) : HH_\bullet(A) \longrightarrow HH_\bullet(A') \qquad x \in C \tag{1.2}$$

*印度班加罗尔印度科学研究所数学系。电子邮件：abhishekbanerjee1313@gmail.com
†印度德里印度理工学院数学系。电子邮件：koursurjeet@gmail.com

它们之间的霍赫希尔德同调群映射。此外，若代数A、A'是交换的，则 (1.2) 中的映射会在洗牌乘积结构下，在霍赫希尔德同调环$HH_\bullet(A)$和$HH_\bullet(A')$之间诱导出一个测量。类似地，假设我们有李代数 $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ 和 $(\mathfrak{g}', [\ ,\ ]')$ 之间的余代数测量

$$\Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') \qquad \Psi(x)([\alpha,\beta]) = [\Psi(x_{(1)})(\alpha), \Psi(x_{(2)})(\beta)]' \qquad \alpha,\beta \in \mathfrak{g}, x \in C \tag{1.3}$$

且 C 余交换。随后，我们在 [2] 中证明，测度 $\Psi: C \longrightarrow Hom_K(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ 可在李代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 的切瓦莱–埃伦伯格同调之间诱导映射。在 [3], 中，我们展示了余代数测度如何在霍普夫代群胚的（上）同调理论之间诱导映射。

本文有多个目标。首先，我们将证明，先前在 [2], 中定义的、式（1.2）中霍赫希尔德同调之间的映射 $HH_\bullet^\Phi(x)$，可扩展为循环同调群之间的映射 $HC_\bullet^\Phi(x)$：$HC_\bullet(A) \longrightarrow HC_\bullet(A')$。随后，我们将证明，映射 $HH_\bullet^\Phi(x)$ 和 $HC_\bullet^\Phi(x)$ 与霍赫希尔德同调和循环同调中出现的各种结构相容，例如 λ-分解、乘积结构，以及霍赫希尔德同调作为循环同调上的模所具有的模结构。

我们的第二个目标是探讨由余代数测量诱导的代数同调理论之间的映射，与李代数或莱布尼茨代数同调理论之间诱导的映射之间的关系。具体而言，我们证明，由测度诱导的映射与将循环同调等同于矩阵李代数同调本原部分的同构相容。同样，我们证明，由测度诱导的映射与将霍赫希尔德同调等同于矩阵莱布尼茨代数同调本原部分的同构相容。本文的最后一个目标是研究带对合代数之间的余代数测度；在这种情况下，循环同调通常由二面体同调取代。因此，我们证明，由测度诱导的映射与将二面体同调等同于辛矩阵的李代数同调本原部分或斜对称矩阵的李代数同调本原部分的同构相容。

我们提到，研究由余代数测度诱导的（上）同调理论之间的映射，部分源于与代数几何的类比。在代数几何中，人们通过加入称为对应的广义映射来扩充簇的范畴（例如参见 [19]）。对应使我们能够在代数层面上刻画（上）同调理论之间范围广得多的一类态射。随后，人们利用这些态射来定义代数簇的“动机”。类似地，我们注意到，余代数测度通过加入广义态射使代数范畴线性化。由于代数可以看作一个“非交换空间”，我们由此开始思考，余代数测度如何刻画代数的同调理论之间的态射。

现在我们将更详细地介绍本文。我们从第 2 节开始，证明当C 余交换时，代数A、A'之间的余代数测量 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$会诱导循环模之间的映射。因此，本文的第一个主要结果如下。

定理1.1。（见 *2.1* 和 *2.2*）设 C 是一个余交换 K-余代数，且 $\Phi: C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 是代数之间的一个测量。对于每个 $x \in C$，我们都有诱导映射

$$HH_\bullet^\Phi(x) : HH_\bullet(A) \longrightarrow HH_\bullet(A') \qquad HC_\bullet^\Phi(x) : HC_\bullet(A) \longrightarrow HC_\bullet(A') \tag{1.4}$$

分别作用于霍赫希尔德同调和循环同调群。此外，*(1.4)* 中的映射 $HH_\bullet^\Phi(x)$ 和 $HC_\bullet^\Phi(x)$ 与代数 A 和 A'的 *Connes* 周期列中出现的算子是相容的。

随后，当所涉及的代数是交换代数时，我们证明定理1.1中的诱导映射 $HH_\bullet^\Phi(x)$ 和 $HC_\bullet^\Phi(x)$ 与连接霍赫希尔德复形、循环复形和 K¨ahler 微分模的算子相容。对于霍赫希尔德同调而言，这指的是反对称化算子和投影算子（见命题 2.5）

$$\varepsilon_\bullet : \Omega_A^\bullet \longrightarrow HH_\bullet(A) \qquad \pi_\bullet : HH_\bullet(A) \longrightarrow \Omega_A^\bullet \tag{1.5}$$

对于循环同调者 y，我们证明，对于每个$x \in C$，映射$HC_\bullet^\Phi(x)$关于该投影是相容的 s

$$HC_n(A) \xrightarrow{\bar{\pi}_n} \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} \oplus HDR_A^{n-2} \oplus HDR_A^{n-4} \oplus \ldots \qquad n \geq 0 \tag{1.6}$$

其中$HDR^{\bullet}_{A}$是 d　　德拉姆上同调由 K¨ahler 微分复形得到（见命题 2.6
）。我们将在第 3 节讨论循环同调上的乘积结构
。若A是交换的，我们知道（见 [14, § 3]）存在一个
乘积

$$__ * __ : HC_p(A) \otimes HC_q(A) \longrightarrow HC_{p+q+1}(A) \qquad p, q \geq 0 \tag{1.7}$$

若将次数平移，即令$HC'_{\bullet}(A) := HC_{\bullet-1}(A)$，我们知道，(1.7) 中的乘积使循环同调成为结合分次代数（$HC'_{\bullet}(A), *$）。此外，我们知道，Connes 算子$B : HC'_{\bullet}(A) = HC_{\bullet-1}(A) \longrightarrow HH_{\bullet}(A)$是分次代数的映射，从而使霍赫希尔德同调成为循环同调上的模。以下结果表明，余代数测量如何导出循环同调环之间的测量，以及霍赫希尔德同调层面上的余模测量。

定理 1.2。*(见 3.3 和 3.5)* 设C是余交换余代数，且$\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$是交换代数之间的测量。则有

(a) 映射$HC'^{\Phi}_{\bullet}(x) : HC'_{\bullet}(A) = HC_{\bullet-1}(A)\ HC^{\Phi}_{\bullet-1}(x) \longrightarrow HC_{\bullet-1}(A') = HC'_{\bullet}(A')$，$x \in C$确定了一个从$(HC'_{\bullet}(A), *)$到$(HC'_{\bullet}(A'), *)$的代数的余代数测量。

(b) 映射$HH^{\Phi}_{\bullet}(x) : HH_{\bullet}(A) \longrightarrow HH_{\bullet}(A')$，$x \in C$确定了一个余模测量：从$(HC'_{\bullet}(A), *)$-模$HH_{\bullet}(A)$到$(HC'_{\bullet}(A'), *)$-模$HH_{\bullet}(A')$，其中$C$被视为$C$-余模。

利用定理 1.2，我们构造了交换K-代数在余交换K-余代数的对称幺半范畴$coCoalg_K$上的一个富化$cALG_K$。对于交换K-代数A、A'，$cALG_K$中的 Hom 对象取为

$$\widetilde{cALG}_K(A, A') := \mathcal{M}_c((HC'_{\bullet}(A), *), (HC'_{\bullet}(A'), *)) \tag{1.8}$$

其中$\mathcal{M}_c(_,_)$表示泛余交换测量余代数。此外，我们证明存在一个$coCoalg_K$-富化的函子$cALG_K \longrightarrow cALG_K$，其中$cALG_K$是通过取$cALG_K(A,A') := \mathcal{M}_c(A,A')$而得到的交换$K$-代数的富化（见定理 3.7）。

对于交换K-代数A，我们现在回顾 Hochschild 同调与循环同调的λ-分解（例如参见 [17, § 4]）

$$HH_n(A) = HH^{(1)}_n(A) \oplus \ldots \oplus HH^{(n)}_n(A) \qquad HC_n(A) = HC^{(1)}_n(A) \oplus \ldots \oplus HC^{(n)}_n(A) \tag{1.9}$$

第 4 节的目标是证明，余代数测度诱导的映射与 (1.9) 中的直和分解相容。在这方面，我们的主要结果如下。

定理 1.3. *(见 4.4、4.6、4.7)* 设C是余交换K-余代数，且$\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$是交换代数之间的一个测量。那么，对每个$x \in C$和$i,n \geq 0$，我们都有诱导映射

$$HH^{\Phi,(i)}_{\bullet}(x) : HH^{(i)}_{\bullet}(A) \longrightarrow HH^{(i)}_{\bullet}(A') \qquad HC^{\Phi,(i)}_{\bullet}(x) : HC^{(i)}_{\bullet}(A) \longrightarrow HC^{(i)}_{\bullet}(A') \tag{1.10}$$

作用于*Hochschild*同调群和循环同调群的λ-分解中出现的直和项上。此外，这些映射与代数A和A'的*Connes*周期列中出现的算子相容。

在第 5 节中，我们开始探讨由余代数测量所诱导的 Hochschild 同调和循环同调上的映射，与其在矩阵代数的李代数同调或莱布尼茨同调上诱导的映射之间的关系。如前所述，我们已在 [2] 证明，按照 (1.3) 的定义，李代数之间的余代数测量$\Psi : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$会为每个$x \in \mathfrak{C}$诱导一个 Chevalley-Eilenberg 同调之间的映射$\mathrm{H}^{\Psi}_{\bullet}(x) : \mathrm{H}_{\bullet}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{H}_{\bullet}(\mathfrak{g}')$。利用 Loday [18, § 6 引入的莱布尼茨同调3], ，我们证明，对于莱布尼茨代数$\mathfrak{g}$和$\mathfrak{g}'$之间的余代数测量$\Psi : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$，存在类似的映射$\mathrm{HL}^{\Psi}_{\bullet}(x) : \mathrm{HL}_{\bullet}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{HL}_{\bullet}(\mathfrak{g}')$。如果$\mathfrak{g}$是李代数（分别为莱布尼茨代数），我们知道 Chevalley-Eilenberg 同调$\mathrm{H}_{\bullet}(\mathfrak{g})$（分别为莱布尼茨同调$\mathrm{HL}_{\bullet}(\mathfrak{g})$）带有一个由对角嵌入$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$诱导的余乘法$\Delta_{\mathfrak{g}} : \mathrm{H}_{\bullet}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{H}_{\bullet}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{H}_{\bullet}(\mathfrak{g})$（分别带有一个余乘法$\Delta_{\mathfrak{g}} : \mathrm{HL}_{\bullet}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{HL}_{\bullet}(\mathfrak{g}) \boxtimes \mathrm{HL}_{\bullet}(\mathfrak{g})$）。我们证明，这些余乘法与余代数测量相容

对于余代数测量 $\Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$，这些余乘法具有良好的相容性；也就是说，对于每个 $x \in C$，我们都有交换图（见命题 5.2 和命题 5.5）

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Delta_{\mathfrak{g}}} & H_\bullet(\mathfrak{g}) \otimes H_\bullet(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle H_\bullet^{\Psi}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_\bullet^{\Psi}(x_{(1)}) \otimes H_\bullet^{\Psi}(x_{(2)})} \\ H_\bullet(\mathfrak{g}') & \xrightarrow{\Delta_{\mathfrak{g}'}} & H_\bullet(\mathfrak{g}') \otimes H_\bullet(\mathfrak{g}') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} HL_\bullet(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Delta_{\mathfrak{g}}} & HL_\bullet(\mathfrak{g}) \boxtimes HL_\bullet(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle HL_\bullet^{\Psi}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HL_\bullet^{\Psi}(x_{(1)}) \boxtimes HL_\bullet^{\Psi}(x_{(2)})} \\ HL_\bullet(\mathfrak{g}') & \xrightarrow{\Delta_{\mathfrak{g}'}} & HL_\bullet(\mathfrak{g}') \boxtimes HL_\bullet(\mathfrak{g}') \end{array} \tag{1.11}$$

我们用 $gl(A)$ 表示系数取自 A 的矩阵李代数，它也可以视为莱布尼茨代数。我们知道（见 [17, §10.2] 和 [7, 定理〝三〞） $H_\bullet(gl(A))$ 和 $HL_\bullet(gl(A))$ 带有霍普夫代数结构，并且它们各自的本原部分与循环同调和霍赫希尔德同调之间存在同构

$$Prim(H_\bullet(gl(A))) \cong HC_{\bullet-1}(A) \qquad Prim(HL_\bullet(gl(A))) \cong HH_{\bullet-1}(A) \tag{1.12}$$

若 C 是余交换的，则代数之间的余代数测量 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 会诱导李代数之间的余代数测量 $gl(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(gl(A),gl(A'))$，莱布尼茨代数层面上也同样如此。第 5 节的主要结果是证明 (1.12) 中的同构与余代数测量所诱导的映射相容。

定理 1.4.（见 *5.4* 和 *5.7*）设 C 是一个余交换 K-余代数，且设 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是代数之间的测量。对于每个 $x \in C$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} Prim(H_\bullet(gl(A))) & \xrightarrow{\cong} & HC_{\bullet-1}(A) \\ {\scriptstyle H_\bullet^{gl(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HC_{\bullet-1}^{\Phi}(x)} \\ Prim(H_\bullet(gl(A'))) & \xrightarrow{\cong} & HC_{\bullet-1}(A') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Prim(HL_\bullet(gl(A))) & \xrightarrow{\cong} & HH_{\bullet-1}(A) \\ {\scriptstyle HL_\bullet^{gl(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HH_{\bullet-1}^{\Phi}(x)} \\ Prim(HL_\bullet(gl(A'))) & \xrightarrow{\cong} & HH_{\bullet-1}(A') \end{array} \tag{1.13}$$

其中水平同构如(1.12)所示。

我们在第 6 节讨论李代数同调和莱布尼茨同调上的乘积结构。我们知道，$H_\bullet(gl(A))$ 和 $HL_\bullet(gl(A))$ 都带有由运算 $\oplus : gl(A) \times gl(A) \longrightarrow gl(A)$ 诱导的乘积结构，如 [17, §10.2.12] 中所述。接下来我们给出以下结果。

定理 1.5.（参见 *6.2* 和 *6.5*）设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是代数之间的一个测量。那么，映射

$$H_\bullet^{gl(\Phi)} : C \longrightarrow Hom_K(H_\bullet(gl(A)), H_\bullet(gl(A'))) \qquad x \mapsto H_\bullet^{gl(\Phi)}(x) : H_\bullet(gl(A)) \longrightarrow H_\bullet(gl(A')) \tag{1.14}$$

确定了从 $H_\bullet(gl(A))$ 到 $H_\bullet(gl(A'))$的代数测度。类似地，映射

$$HL_\bullet^{gl(\Phi)} : C \longrightarrow Hom_K(HL_\bullet(gl(A)), HL_\bullet(gl(A'))) \qquad x \mapsto HL_\bullet^{gl(\Phi)}(x) : HL_\bullet(gl(A)) \longrightarrow HL_\bullet(gl(A')) \tag{1.15}$$

确定了从 $HL_\bullet(gl(A))$到 $HL_\bullet(gl(A'))$的代数测度。

利用定理 1.5，我们构造了$ALG^c{}_K$和 $\widehat{\overline{ALG}}^c{}_K$在对称幺半范畴$K$-代数上的富化$coCoalg_K$，该范畴由余交换$K$-余代数组成。对于$K$-代数$A$、$A'$，相应的 Hom 对象取为

$$\overline{ALG}_K^c(A,A') := \mathcal{M}_c(H_\bullet(gl(A)), H_\bullet(gl(A'))) \qquad \widehat{ALG}_K^c(A,A') := \mathcal{M}_c(HL_\bullet(gl(A)), HL_\bullet(gl(A'))) \tag{1.16}$$

其中，$\mathcal{M}_c(-,-)$表示泛余交换测量余代数。因此，我们有 $coCoalg_K$-富化函子$ALG_K^c \longrightarrow ALG^c{}_K$和 $ALG_K^c \longrightarrow \widehat{ALG}^c{}_K$，其中$\overline{ALG}_K^c$是通过取 $ALG_K^c(A,A') := \mathcal{M}_c(A,A')$ 得到的K-代数的富化（参见定理 6.4 和定理 6.6）。

在本文最后一节，我们研究带对合代数。我们回顾一下（见 [17, § 10.5]），若一个 K-代数 R 配备了一个 K-线性自同态 r $\mapsto$ ˆr，且满足 ˆˆr = r 以及对 r, s ∈ R 有 ˆrˆs = ˆˆsr，则称其为带对合的。对于带 involution 的 K-代数 R，循环同调的通常对应概念是二面体同调群 $H\mathcal{D}_\bullet(R)$（见 [15], [16], [17, §10.5]）。因此，我们定义带对合代数 R、R′ 之间的余代数测量 $\Phi : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(R, R')$，并证明对于每个 x ∈ C，都存在二面体同调群之间的诱导映射 $H\mathcal{D}^{\Phi}_\bullet(x) : H\mathcal{D}_\bullet(R) \longrightarrow H\mathcal{D}_\bullet(R')$。

对于带对合的 K-代数 R，令 $sk(R)$ 表示 R 上的斜对称矩阵李代数，令 $sp(R)$ 表示 R 上的辛矩阵李代数（定义见第 7 节）。相应地，我们在命题 7.4 中证明，带对合代数之间的余交换测量 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(R,R')$ 会诱导映射

$$H_\bullet^{sk(\Phi)}(x) : H_\bullet(sk(R)) \longrightarrow H_\bullet(sk(R')) \qquad H_\bullet^{sp(\Phi)}(x) : H_\bullet(sp(R)) \longrightarrow H_\bullet(sp(R')) \tag{1.17}$$

对于每个 $x \in C$，这些映射作用于李代数同调之间。现在我们回顾一下（见 [17, § 10.5]），$H_\bullet(sk(R))$ 和 $H_\bullet(sp(R))$ 实际上是霍普夫代数，并且存在同构

$$Prim(H_\bullet(sk(R))) \xrightarrow{\cong} H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \qquad Prim(H_\bullet(sp(R))) \xrightarrow{\cong} H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \tag{1.18}$$

这些同构将它们的本原部分与二面体同调联系起来。我们的最终结果是证明，(1.18) 中的同构与带对合代数之间由余代数测度诱导的映射相容。

定理 1.6. （见 *7.5*）设 R、R' 为带对合的 K-代数。设 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(R,R')$ 是从 R 到 R' 的带对合代数之间的余交换测量。对于每个 $x \in C$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} Prim(H_\bullet(sk(R))) & \xrightarrow{\cong} & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \\ \downarrow{\scriptstyle H_\bullet^{sk(\Phi)}(x)} & & \downarrow{\scriptstyle H\mathcal{D}^{\Phi}_{\bullet-1}(x)} \\ Prim(H_\bullet(sk(R'))) & \xrightarrow{\cong} & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Prim(H_\bullet(sp(R))) & \xrightarrow{\cong} & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \\ \downarrow{\scriptstyle H_\bullet^{sp(\Phi)}(x)} & & \downarrow{\scriptstyle H\mathcal{D}^{\Phi}_{\bullet-1}(x)} \\ Prim(H_\bullet(sp(R'))) & \xrightarrow{\cong} & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R') \end{array} \tag{1.19}$$

其中，水平箭头上的同构由(1.18)给出。

2 循环同调上的测度与态射

设K 是一个特征为 0 的域。设A 是一个K-代数。对每个$p \geq 0$，我们令$C_p(A) := A^{\otimes p+1}$。为简便起见，我们常将元素$a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_p \in C_p(A)$ 简记为 $(a_0, a_1, ..., a_p)$。我们知道（例如参见 [17, § 1]），与A 相关联的单纯模$C_\bullet(A)$由以下项$C_p(A) = A^{\otimes p+1}$、$p \geq 0$ 以及面映射组成

$$d_i^p : C_p(A) \longrightarrow C_{p-1}(A) \qquad d_i^p(a_0, a_1, ..., a_p) := \begin{cases} (a_0, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_p) & 0 \leq i \leq p-1 \\ (a_p a_0, a_1, ..., a_{p-1}) & i = p \end{cases} \tag{2.1}$$

和退化映射

$$s_j^p : C_p(A) \longrightarrow C_{p+1}(A) \qquad s_j^p(a_0, ..., a_p) := (a_0, .., a_j, 1, a_{j+1}, ..., a_p) \tag{2.2}$$

其中 $0 \leq j \leq p$。A 的 Hochschild 同调群$HH_\bullet(A)$由与单纯模$C_\bullet(A)$相关联的标准链复形$C^{hoc}_\bullet(A)$的同调给出（参见 [17, § 1.6.1]）。再结合循环算子

$$t_p : C_p(A) \longrightarrow C_p(A) \qquad t_p(a_0, ..., a_p) = (-1)^p(a_p, a_0, ..., a_{p-1}) \tag{2.3}$$

有与A 相关联的循环模（见 [17, § 2.5.4]），我们仍将其记作$C_\bullet(A)$。根据上下文，只要不会产生歧义，我们就分别将面映射、退化映射和循环算子简记为$d_i : C_p(A) \longrightarrow C_{p-1}(A)$、$s_j : C_p(A) \longrightarrow C_{p+1}(A)$ 和$t : C_p(A) \longrightarrow C_p(A)$。我们知道，霍赫希尔德复形 $(C^{hoc}_\bullet(A), b)$ 上的微分由下式给出

by $b := \sum^{p}{}_{i=0}(-1)^p d_i : C_p(A) \longrightarrow C_{p-1}(A)$。$A$ 的循环同调群$HC_\bullet(A)$由全复形$Tot(C^{cy}_{\bullet\bullet}(A))$的同调给出，其中$C^{cy}_{\bullet\bullet}(A)$是与循环模$C_\bullet(A)$相关联的双复形（见 [17, § 2.5.5]）。

现在设 A、A′ 是 K-代数。设 C 是一个余交换 K-余代数，其余乘法为 $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$，余单位为$\epsilon_C : C \longrightarrow K$。设 $\Phi : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, A')$ 是从 A 到 A′ 的测量，如 (1.1) 中所述。对于 $x \in C$，我们通常使用 Sweedler记号将 C 上的余乘法写作 $\Delta_C(x) = x_{(1)} \otimes x^{(2)}$，并省略求和符号。对于 $x \in C$ 和 $a \in A$，我们通常将元素 $\Phi(x)(a) \in A'$ 简写为 $x(a) \in A'$。对于每个 $x \in C$，现在令

$$C^\Phi_n(x) : C_n(A) \longrightarrow C_n(A') \qquad (a_0, ..., a_n) \mapsto (x_{(1)}(a_0), ..., x_{(n+1)}(a_n)) \tag{2.4}$$

我们通常将 $C^\Phi_n(x)(a_0, ..., a_n)$ 简写为 $x(a_0, ..., a_n)$。我们从以下结果开始。

命题 2.1. 设 C 是一个余交换 K-余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是代数之间的一个测量。对于每个 $x \in C$，映射 $\{C^\Phi_n(x) : C_n(A) \longrightarrow C_n(A')\}_{n\geq 0}$ 共同确定一个循环模的态射 $C^\Phi_\bullet(x) : C_\bullet(A) \longrightarrow C_\bullet(A')$。特别地，我们得到诱导映射

$$HH^\Phi_\bullet(x) : HH_\bullet(A) \longrightarrow HH_\bullet(A') \qquad HC^\Phi_\bullet(x) : HC_\bullet(A) \longrightarrow HC_\bullet(A') \tag{2.5}$$

分别作用于霍赫希尔德同调和循环同调群。

证明。 设 $x \in C$。由 [2, 命题 2.2] 可知，映射$C^\Phi_n(x) : C_n(A) \longrightarrow C_n(A')$ 与循环模 $C_\bullet(A)$ 和 $C_\bullet(A')$ 上的面映射相容。对于 $p \geq 0, 0 \leq j \leq p$ 以及 $(a_0, ..., a_p) \in C_p(A)$，现在我们验证

$$\begin{aligned} C^\Phi_n(x)s_j(a_0, ..., a_p) &= (x_{(1)}(a_0), ..., x_{(j+1)}(a_j), x_{(j+2)}(1), x_{(j+3)}(a_{j+1}), ..., x_{(p+2)}(a_p)) \\ &= (x_{(1)}(a_0), ..., x_{(j+1)}(a_j), \epsilon_C(x_{(j+2)}) \cdot 1, x_{(j+3)}(a_{j+1}), ..., x_{(p+2)}(a_p)) \\ &= (x_{(1)}(a_0), ..., x_{(j+1)}(a_j), 1, x_{(j+2)}(a_{j+1}), ..., x_{(p+1)}(a_p)) \\ &= s_j C^\Phi_n(x)(a_0, ..., a_p) \end{aligned}$$

由于C 是余交换的，我们还可以看到

$$C^\Phi_n(x)t(a_0, ..., a_p) = (-1)^p(\ x_{(1)}(a_p), x_{(2)}(a_0), ..., x_{(p+1)}(a_{p-1})) = (-1)^p(x_{(p+1)}(a_p), x_{(1)}(a_0), ..., x_{(p)}(a_{p-1})) = tC^\Phi_n(x)(a_0, ..., a_p)$$

由此可知，映射$C^\Phi_\bullet(x)$ 对循环模$C_\bullet(A)$ 和$C_\bullet(A')$上的退化算子和循环算子也具有良好的性质。结论显而易见。

□

对于任意代数A，我们知道，其 Hochschild 同调群和循环同调群构成如下长正合列（例如参见 [17, § 2.2.1]）

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A) \xrightarrow{I} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots \tag{2.6}$$

其中$S : HC_\bullet(A) \longrightarrow HC_{\bullet-2}(A)$ 是 Connes 周期算子。我们的下一个结果表明，命题 2.1 中的态射对于 Connes 周期性具有良好的性质。

命题 2.2. 设 C 是一个余交换 K-余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是代数之间的一个测量。对于每个 $x \in C$，映射 $HH^\Phi_\bullet(x)$ 和 $HC^\Phi_\bullet(x)$ 构成如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \longrightarrow & HH_n(A) & \xrightarrow{I} & HC_n(A) & \xrightarrow{S} & HC_{n-2}(A) & \xrightarrow{B} & HH_{n-1}(A) & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle HH^\Phi_n(x)} & & \downarrow{\scriptstyle HC^\Phi_n(x)} & & \downarrow{\scriptstyle HC^\Phi_{n-2}(x)} & & \downarrow{\scriptstyle HH^\Phi_{n-1}(x)} & & \\ \ldots & \longrightarrow & HH_n(A') & \xrightarrow{I} & HC_n(A') & \xrightarrow{S} & HC_{n-2}(A') & \xrightarrow{B} & HH_{n-1}(A') & \longrightarrow & \ldots \end{array} \tag{2.7}$$

其中顶部　　而底行分别是代数 A 和 A' 的 *Connes* 周期列。

证明。 根据定义（见 [17, § 2.2.1]），(2.6) 中的周期性序列是与以下双复形短正合列相关联的同调群长正合列

$$0 \longrightarrow C^{cy}_{\bullet\bullet}(A)\{2\} \longrightarrow C^{cy}_{\bullet\bullet}(A) \longrightarrow C^{cy}_{\bullet\bullet}(A)[2,0] \longrightarrow 0 \tag{2.8}$$

这里，$C^{cy}_{\bullet\bullet}(A)\{2\}$ 表示双复形 $C^{cy}_{\bullet\bullet}(A)$ 的前两列，它与 Hochschild 复形拟同构。此外，$C^{cy}_{\bullet\bullet}(A)[2,0]$ 表示通过令 $(C^{cy}_{\bullet\bullet}(A)[2,0])^{pq} := C^{cy}\,p-2,q(A)$ 得到的移位双复形，而 $C^{cy}_{\bullet\bullet}(A) \longrightarrow C^{cy}_{\bullet\bullet}(A)[2,0]$ 是典范投影。由命题 2.1 可知，测量 $\Phi : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, A')$ 诱导出一个循环模的态射 $C^{\Phi}_{\bullet}(x) : C_{\bullet}(A) \longrightarrow C_{\bullet}(A')$。由于 (2.8) 中的序列关于循环模是函子性的，结论得证。□

我们知道，对称群 S_n 在 $C_{\bullet}(A)$ 上有左作用，定义如下：对于 $\sigma \in S_n$ 和 $(a_0, ..., a_n) \in C_n(A)$，

$$\sigma \cdot (a_0, a_1, ..., a_n) := (a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)}) \tag{2.9}$$

换言之，$C_n(A)$ 成为群环 $K[S_n]$上的一个左模。对于每个 n，现在令 $\varepsilon_n := \sum sgn(\sigma)\sigma \in K[S_n]$。$\sigma \in S_n$

我们的下一个目标是证明，由测量诱导的映射 $\{HH^{\Phi}_{\bullet}(x)\}_{x \in C}$ 与连接 A 的切瓦利-埃伦伯格复形（将 A 视为李代数，并令 $[a, b] := ab - ba$，其中a、$b \in A$）和 A 的霍赫希尔德复形（见 [17, § 1.3.4]）的反对称化映射相容。对于 K-代数 A，切瓦利-埃伦伯格复形为 $(E_{\bullet}(A), \delta)$，定义为 $E_n(A) := A \otimes \wedge^n A$, $n \geq 0$，并配以微分

$$\begin{aligned} \delta : E_n(A) = A \otimes \wedge^n A &\longrightarrow A \otimes \wedge^{n-1} A = E_{n-1}(A) \\ \delta(a_0 \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [a_0, a_i] \otimes a_1 \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge a_n \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{i+j-1} a_0 \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge \hat{a}_j \wedge ... \wedge a_n \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中，(2.10) 中的 $\hat{}a_i$ 表示从序列中移除a_i。我们将复形 $(E_{\bullet}(A), \delta)$ 的同调记为 $HE_{\bullet}(A)$。我们回顾一下（见 [17, § 1.3.5]），反对称化映射

$$\varepsilon_n : E_n(A) = A \otimes \wedge^n A \longrightarrow A \otimes A^{\otimes n} \qquad a_0 \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n \mapsto \varepsilon_n \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n) \tag{2.11}$$

诱导出一个从（$E_{\bullet}(A)$，δ）到（$C^{hoc}_{\bullet}(A)$，b）的链复形态射。这进而在相应的同调群上诱导出一个态射，我们仍将其记为 $\varepsilon_{\bullet} : HE_{\bullet}(A) \longrightarrow HH_{\bullet}(A</style)$。
由于C 是余交换的，我们注意到，测量 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$诱导出映射 s

$$E^{\Phi}_n(x) : E_n(A) \longrightarrow E_n(A') \qquad a_0 \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n \mapsto x(a_0 \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n) := x_{(1)}(a_0) \otimes x_{(2)}(a_1) \wedge ... \wedge x_{(n+1)}(a_n) \tag{2.12}$$

对每个$x \in C$。

命题 2.3。 设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是代数之间的测量。对于每个 $x \in C$ 和 $n \geq 1$，下列图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} E_n(A) & \xrightarrow{\delta} & E_{n-1}(A) \\ {\scriptstyle E^{\Phi}_n(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E^{\Phi}_{n-1}(x)} \\ E_n(A') & \xrightarrow{\delta} & E_{n-1}(A') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_n(A) & \xrightarrow{\varepsilon_n} & C_n(A) \\ {\scriptstyle E^{\Phi}_n(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C^{\Phi}_n(x)} \\ E_n(A') & \xrightarrow{\varepsilon_n} & C_n(A') \end{array} \tag{2.13}$$

特别地，测量 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 诱导映射 $HE_n^\Phi : HE_n(A) \longrightarrow HE_n(A'), n \geq 0$ 它们构成交换图

$$\begin{array}{ccc} HE_n(A) & \xrightarrow{\varepsilon_n} & HH_n(A) \\ {\scriptstyle HE_n^\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HH_n^\Phi(x)} \\ HE_n(A') & \xrightarrow{\varepsilon_n} & HH_n(A') \end{array} \tag{2.14}$$

对每个 $x \in C$。

证明。 由于C 是余交换的，我们注意到，对于$x \in C$以及a、$b \in A$，有

$$x[a, b] = x(ab) - x(ba) = x_{(1)}(a)x_{(2)}(b) - x_{(1)}(b)x_{(2)}(a) = x_{(1)}(a)x_{(2)}(b) - x_{(2)}(b)x_{(1)}(a) = [x_{(1)}(a), x_{(2)}](b) \tag{2.15}$$

对于$x \in C$ 和$a_0,a_1,...,a_n \in A$，我们现在看到

$$\begin{aligned}
&x \cdot \delta(a_0 \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_{(1)}[a_0, a_i] \otimes x_{(2)}(a_1) \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge x_{(n)}(a_n) + \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(-1)^{i+j-1} x_{(1)}(a_0) \otimes x_{(2)}[a_i, a_j] \wedge x_{(3)}(a_1) \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge \hat{a}_j \wedge ... \wedge x_{(n)}(a_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i [x_{(1)}(a_0), x_{(2)}(a_i)] \otimes x_{(3)}(a_1) \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge x_{(n+1)}(a_n) \\
&\quad + \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(-1)^{i+j-1} x_{(1)}(a_0) \otimes [x_{(2)}(a_i), x_{(3)}(a_j)] \wedge x_{(4)}(a_1) \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge \hat{a}_j \wedge ... \wedge x_{(n+1)}(a_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i [x_{(1)}(a_0), x_{(i+1)}(a_i)] \otimes x_{(2)}(a_1) \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge x_{(n+1)}(a_n) \\
&\quad + \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(-1)^{i+j-1} x_{(1)}(a_0) \otimes [x_{(i+1)}(a_i), x_{(j+1)}(a_j)] \wedge x_{(2)}(a_1) \wedge ... \wedge \hat{a}_i \wedge ... \wedge \hat{a}_j \wedge ... \wedge x_{(n+1)}(a_n) \\
&= \delta(x_{(1)}(a_0) \otimes x_{(2)}(a_1) \wedge ... \wedge x_{(n+1)}(a_n))
\end{aligned}$$

由此可知，(2.13) 中左侧的图表是交换的。此外，我们还有

$$\begin{aligned}
&C_n^\Phi(x)(\varepsilon_n(a_0 \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n)) = x(\varepsilon_n \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n)) = x\left(\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)(a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)})\right) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)(x_{(1)}(a_0), x_{(2)}(a_{\sigma^{-1}(1)}), ..., x_{(n+1)}(a_{\sigma^{-1}(n)})) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)(x_{(1)}(a_0), x_{\sigma^{-1}(1)+1}(a_{\sigma^{-1}(1)}), ..., x_{\sigma^{-1}(n)+1}(a_{\sigma^{-1}(n)})) = \varepsilon_n(E_n^\Phi(a_0 \otimes a_1 \wedge ... \wedge a_n)))
\end{aligned}$$

因此，(2.13) 中右侧的图表也交换。这就证明了该结论。 □

在本节余下部分，我们假设代数 A、A' 是交换的。现在我们将研究测度如何在德拉姆复形上诱导映射，并将其与在霍赫希尔德复形和循环复形上诱导的映射联系起来。对于交换K-代数 A，我们令 $\Omega_A^0 := A$。我们知道，K¨ahler 微分的A-模 Ω_A^1 由 da 这些 K-线性符号生成，其中 $a \in A$，并满足关系 $d(ab) = adb + bda$，其中 a、$b \in A$ （见 [17, § I.1.9]）。

现在设 C 为一个余交换余代数，并设 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的一个测度。对于任意 $x \in C$，我们令

$$\Omega_\Phi^1(x) : \Omega_A^1 \longrightarrow \Omega_{A'}^1, \qquad a_0 da_1 \mapsto x(a_0 da_1) := x_{(1)}(a_0)d(x_{(2)}(a_1)) \tag{2.16}$$

由于 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是一个测度，且C 是余交换的，我们注意到，对于$a_0, a_1 \in A$，有

$$\begin{aligned}
x(d(a_0a_1)) = d(x(a_0a_1)) = d(x_{(1)}(a_0)x_{(2)}(a_1)) \quad &= x_{(1)}(a_0)d(x_{(2)}(a_1)) + x_{(2)}(a_1)d(x_{(1)}(a_0)) \\
&= x_{(1)}(a_0)d(x_{(2)}(a_1)) + x_{(1)}(a_1)d(x_{(2)}(a_0)) \\
&= x(a_0da_1) + x(a_1da_0)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

由 (2.17) 可知，(2.16) 中的映射 $\Omega_\Phi^1(x)$ 是良定义的。由 (2.16) 以及 Φ 是测量这一事实，也显然可知，对于任意 $x \in C$、$a \in A$ 和 $m \in \Omega_A^1$，有 $x(am) = x^{(1)}(a)x^{(2)}(m)$。对于每个 $x \in C$，我们还定义 $\Omega_\Phi^0(x) := \Phi(x) : \Omega_A^0 = A \longrightarrow A' = \Omega_{A'}^0$。

引理 2.4。设 C 为余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的测量。对于 $x \in C$ 和 $p > 1$，我们有一个诱导映射

$$\Omega^p_\Phi(x) : \Omega^p_A = \wedge^p_A \Omega^1_A \longrightarrow \wedge^p_{A'} \Omega^1_{A'} = \Omega^p_{A'} \qquad a_0 da_1 ... da_p \mapsto x(a_0 da_1 ... da_p) := x_{(1)}(a_0) d(x_{(2)}(a_1)) ... d(x_{(p+1)} a_p) \tag{2.18}$$

证明。对于 $x \in C$，我们首先断言，$\Omega^1_\Phi(x) : \Omega^1_A \longrightarrow \Omega^1_{A'}$ 在 p 重张量积层面诱导出映射 $\otimes^p A\Omega^1_A \longrightarrow \otimes^p {}_{A'}\Omega^1_{A'}$，其定义为：对 $m_1 \otimes ... \otimes m_p A\Omega^1_A$，令 $x(m_1 \otimes ... \otimes m_p) := x^{(1)}(m_1) \otimes ... \otimes x^{(p)}(m_p)$。事实上，对于任意 $a \in A$ 和 $1 \leq j \leq p-1$，我们有

$$\begin{aligned}
&x(m_1 \otimes ... \otimes am_j \otimes m_{j+1} \otimes ... \otimes m_p) \\
&= x_{(1)}(m_1) \otimes ... \otimes x_{(j)}(am_j) \otimes x_{(j+1)}(m_{j+1}) \otimes ... \otimes x_{(p)}(m_p) \\
&= x_{(1)}(m_1) \otimes ... \otimes x_{(j)}(a) x_{(j+1)}(m_j) \otimes x_{(j+2)}(m_{j+1}) \otimes ... \otimes x_{(p+1)}(m_p) \\
&= x_{(1)}(m_1) \otimes ... \otimes x_{(j+1)}(m_j) \otimes x_{(j)}(a) x_{(j+2)}(m_{j+1}) \otimes ... \otimes x_{(p+1)}(m_p) \\
&= x_{(1)}(m_1) \otimes ... \otimes x_{(j)}(m_j) \otimes x_{(j+1)}(a) x_{(j+2)}(m_{j+1}) \otimes ... \otimes x_{(p+1)}(m_p) \qquad \text{(since } C \text{ is cocommutative)} \\
&= x_{(1)}(m_1) \otimes ... \otimes x_{(j)}(m_j) \otimes x_{(j+1)}(am_{j+1}) \otimes ... \otimes x_{(p)}(m_p) = x(m_1 \otimes ... \otimes m_j \otimes am_{j+1} \otimes ... \otimes m_p)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

同样，由于C 是余交换的，对于任意置换 $\sigma \in S_p$，我们注意到

$$x(m_1 \otimes ... \otimes m_p) - sgn(\sigma) x(m_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes m_{\sigma(p)}) = x_{(1)}(m_1) \otimes ... \otimes x_{(p)}(m_p) - sgn(\sigma)(x_{\sigma(1)}(m_{\sigma(1)}) \otimes ... \otimes x_{\sigma(p)}(m_{\sigma(p)})) \tag{2.20}$$

由于K 是特征为零的域，由 (2.20) 可知，在外积层面存在一个诱导映射。(2.18) 的结果现在由 (2.16) 中的定义显然可得。□

对于交换K-代数A，现在考虑零微分 $\Omega^\bullet_A \Omega^\bullet_A \xrightarrow{0} \Omega^{\bullet-1}_A$ 的复形 $(\Omega^\bullet_A, 0)$。我们知道（见[17, § 1.3]），这些映射

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p : \Omega^p_A \longrightarrow A \otimes A^{\otimes p} = C_p(A) \qquad a_0 da_1 ... da_p \mapsto \varepsilon_p \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_p) \\
\pi_p : C_p(A) = A \otimes A^{\otimes p} \longrightarrow \Omega^p_A \qquad a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_p \mapsto a_0 da_1 ... da_p
\end{aligned} \tag{2.21}$$

在 $(\Omega^\bullet_A, 0)$ 和 $(C^{hoc}_\bullet(A), b)$ 之间诱导复形态射。现在我们将证明，$\varepsilon_\bullet$ 和 $\pi_\bullet$ 在同调群上分别诱导的映射与测度相容。

命题 2.5. 设 C 是余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的一个测度。对于每个 $x \in C$，以下图表交换。

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^\bullet_A & \xrightarrow{\varepsilon_\bullet} & HH_\bullet(A) \\
{\scriptstyle \Omega^\bullet_\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HH^\Phi_\bullet(x)} \\
\Omega^\bullet_{A'} & \xrightarrow{\varepsilon_\bullet} & HH_\bullet(A')
\end{array} \qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
HH_\bullet(A) & \xrightarrow{\pi_\bullet} & \Omega^\bullet_A \\
{\scriptstyle HH^\Phi_\bullet(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega^\bullet_\Phi(x)} \\
HH_\bullet(A') & \xrightarrow{\pi_\bullet} & \Omega^\bullet_{A'}
\end{array} \tag{2.22}$$

证明。我们考虑 $x \in C$ 和 $a_0, a_1, ..., a_p \in A$。利用C 是余交换的这一事实，我们验证 t

$$\begin{aligned}
x(\varepsilon_p(a_0 da_1 ... da_p)) = x(\varepsilon_p \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_p)) &= x\left(\sum_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma)(a_0, a_{\sigma^{-1}(1)}, ..., a_{\sigma^{-1}(p)}) \right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma)(x_{(1)}(a_0), x_{(2)}(a_{\sigma^{-1}(1)}), ..., x_{(p+1)}(a_{\sigma^{-1}(p)})) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma)(x_{(1)}(a_0), x_{\sigma^{-1}(1)+1}(a_{\sigma^{-1}(1)}), ..., x_{\sigma^{-1}(p)+1}(a_{\sigma^{-1}(p)})) \\
&= \varepsilon_p(x_{(1)}(a_0) d(x_{(2)}(a_1)) ... d(x_{(p+1)}(a_p)))
\end{aligned}$$

这表明 (2.22) 中左侧图表交换。同样，为了证明 (2.22) 中右侧图表交换，我们验证

$$x(\pi_p(a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_p)) = x(a_0 da_1 ... da_p) = x^{(1)}(a_0) d(x^{(2)}(a_1)) ... d(x^{(p+1)}(a_p)) = \pi_p(x^{(1)}(a_0) \otimes x^{(2)}(a_1) \otimes ... \otimes x^{(p+1)}(a_p))$$

这证明了该结果。□

我们现在令 $HDR_A^\bullet$ den 记A的德拉姆上同调，它由复形 $(\Omega_A^\bullet, d)$ 得到，其微分由 b 给出 y

$$d : \Omega_A^p \longrightarrow \Omega_A^{p+1} \qquad a_0 da_1 ... da_p \mapsto da_0 da_1 ... da_p \tag{2.23}$$

设 C 为余交换余代数，且设 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 是交换代数之间的一个测量。根据定义 (2.18)，显然，对于每个 $x \in C$，映射 $\Omega_\Phi^\bullet(x)$在德拉姆上同调层面诱导出态射 $HDR_\Phi^\bullet(x) : HDR_A^\bullet \longrightarrow HDR_{A'}^\bullet$。

作为本节的结尾，我们来讨论循环同调与德拉姆上同调之间的关系。众所周知（见[17, § 2.1.7]），A 的循环同调群也可以计算为“混合复形” $n\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}(A) := (C_\bullet(A), b, B)$ 的总同调，其中 b 是与循环 $i_{=0}$模 $C_\bullet(A)$ 相关联的霍赫希尔德微分 $b := \sum(-1)^i d_i : C_n(A) \longrightarrow C_{n-1}(A)$，而 $B : C_n(A) \longrightarrow C_{n+1}(A)$ 是 Connes边界算子，定义如下

$$B := (-1)^{n+1}(1 - t_{n+1})t_{n+1}s_n(1 + t_n + ... + t_n^n) : C_n(A) \longrightarrow C_{n+1}(A) \tag{2.24}$$

进一步，我们知道（见 [17, § 2.3]），对于$n \geq 0$，映射 $\pi_n/n! : C_n(A) \longrightarrow \Omega_A^n$ 确定了一个双复形态射$\bar{\pi}_\bullet : (C_\bullet(A), b, B) \longrightarrow (\Omega_A^\bullet, 0, d)$，它诱导出一个映射

$$HC_n(A) \xrightarrow{\bar{\pi}_n} \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} \oplus HDR_A^{n-2} \oplus HDR_A^{n-4} \oplus \dots \tag{2.25}$$

对每个$n \geq 0$。

命题 2.6。 设 C 是一个余交换余代数，且设 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 是交换代数之间的一个测量。对于每个 $x \in C$，诱导映射满足下列交换图

$$\begin{array}{ccc} HC_n(A) & \xrightarrow{\bar{\pi}_n} & \Omega_A^n / d\Omega_A^{n-1} \oplus HDR_A^{n-2} \oplus HDR_A^{n-4} \oplus \dots \\ {\scriptstyle HC_n^\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_\Phi^n/d\Omega_\Phi^{n-1}(x) \oplus HDR_\Phi^{n-2}(x) \oplus HDR_\Phi^{n-4}(x) \oplus \dots} \\ HC_n(A') & \xrightarrow{\bar{\pi}_n} & \Omega_{A'}^n / d\Omega_{A'}^{n-1} \oplus HDR_{A'}^{n-2} \oplus HDR_{A'}^{n-4} \oplus \dots \end{array} \tag{2.26}$$

证明。取 $x \in C$。由 (2.24) 可知，Connes边界算子 B 是由与一个代数相关联的循环模的结构映射得到的。由命题 2.1 可知，测量 Φ 诱导出一个循环模态射 $C_\bullet^\Phi(x) : C_\bullet(A) \longrightarrow C_\bullet(A')$。因此，循环同调上的映射 $HC_n^\Phi(x) : HC_n(A) \longrightarrow HC_n(A')$ 也可以由从 $(C_\bullet(A), b, B)$ 到 $(C_\bullet(A'), b, B)$ 的混合复形态射得到，该态射由映射 $C_\bullet^\Phi(x) : C_\bullet(A) \longrightarrow C_\bullet(A')$ 诱导。由命题 2.5 的证明可知，我们有 $(\pi_n/n!) \circ C_n^\Phi(x) = \Omega_\Phi^n(x)(\pi_n/n!) : C_n(A) \longrightarrow \Omega_{A'}^n$。因此，我们得到如下混合复形交换图。

$$\begin{array}{ccc} (C_\bullet(A), b, B) & \xrightarrow{\pi_n/n!} & (\Omega_A^\bullet, 0, d) \\ {\scriptstyle C_\bullet^\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_\Phi^\bullet(x)} \\ (C_\bullet(A'), b, B) & \xrightarrow{\pi_n/n!} & (\Omega_{A'}^\bullet, 0, d) \end{array} \tag{2.27}$$

通过取同调，现在结论显而易见。 □

3 测度与循环同调中的乘积

设A 为一个K-代数。由于基域K 的特征为零，我们令 $\bar{A} := A/K$。对于$n \geq 0$，令 $\bar{C}_n(A) := A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$。 我们仍用$b : C_\bullet(A) \longrightarrow C_{\bullet-1}(A)$表示诱导的霍赫希尔德微分，并用$B : C_\bullet(A) \longrightarrow C_{\bullet+1}(A)$表示诱导的

Connes 算子。我们知道，A 的循环同调群$HC_\bullet(A)$也可以由归一化混合复形 $\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}(A) := (\bar{C}_\bullet(A), b, B)$:计算得到。

$$\begin{array}{ccccc} \bar{C}_2(A) = A \otimes \bar{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & \bar{C}_1(A) = A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & \bar{C}_0(A) = A \\ \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \\ \bar{C}_1(A) = A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & \bar{C}_0(A) = A & & \\ \downarrow{\scriptstyle b} & & & & \\ \bar{C}_0(A) = A & & & & \end{array} \tag{3.1}$$

类似地，Hochschild 同调群$HH_\bullet(A)$也可以通过归一化 Hochschild 复形（$C_\bullet(A), b$）计算，该复形正是（3.1）中的各列。

命题 3.1. 设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 是代数之间的一个测量。对于每个 $x \in C$，都有定义良好的映射

$$\bar{C}_n^\Phi(x) : \bar{C}_n(A) \longrightarrow \bar{C}_n(A') \qquad (a_0, a_1, ..., a_n) \mapsto x(a_0, a_1, ..., a_n) := (x_{(1)}(a_0), x_{(2)}(a_1), ..., x_{(n+1)}(a_n)) \tag{3.2}$$

这些映射在归一化 *Hochschild* 复形以及归一化混合复形上诱导出态射 $(C_\bullet(A), b) \longrightarrow (C_\bullet(A'), b)$ 和 $(C_\bullet(A), b, B) \longrightarrow (C_\bullet(A'), b, B)$。相应的霍赫希尔德同调和循环同调上的诱导映射分别是 $HH_\bullet^\Phi(x)$ 和 $HC_\bullet^\Phi(x)$。

证明。 对于任意$i \geq 1$，注意到

$$\begin{aligned} x(a_0, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n) &= (x_{(1)}(a_0), ..., x_{(i)}(a_{i-1}), x_{(i+1)}(1), x_{(i+2)}(a_{i+1}), ..., x_{(n+1)}(a_n)) \\ &= \epsilon_C(x_{(i+1)})(x_{(1)}(a_0), ..., x_{(i)}(a_{i-1}), 1, x_{(i+2)}(a_{i+1}), ..., x_{(n+1)}(a_n)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

由 (3.3) 可知，映射 $C_n^\Phi(x) : C_n(A) \longrightarrow C_n(A')$ 可下降为映射 $\bar{C}_n^\Phi(x) : \bar{C}_n(A) \longrightarrow \bar{C}_n(A')$。由命题 2.1 可知，映射 $C_\bullet^\Phi(x)$ 与算子 b 和 B 相容。现在，由于典范映射 $\bar{C}_\bullet(A) \longrightarrow C_\bullet(A)$ 和 $C_\bullet(A') \longrightarrow C_\bullet(A')$ 都是满同态，以下图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} \bar{C}_\bullet(A) & \xrightarrow{b} & \bar{C}_{\bullet-1}(A) \\ {\scriptstyle \bar{C}_\bullet^\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{C}_{\bullet-1}^\Phi(x)} \\ \bar{C}_\bullet(A') & \xrightarrow{b} & \bar{C}_{\bullet-1}(A') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bar{C}_\bullet(A) & \xrightarrow{B} & \bar{C}_{\bullet+1}(A) \\ {\scriptstyle \bar{C}_\bullet^\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{C}_{\bullet+1}^\Phi(x)} \\ \bar{C}_\bullet(A') & \xrightarrow{B} & \bar{C}_{\bullet+1}(A') \end{array} \tag{3.4}$$

因此，由测量 Φ诱导出复形之间的映射 $(C_\bullet(A), b) \longrightarrow (C_\bullet(A'), b)$ 和 $(C_\bullet(A), b, B) \longrightarrow (C_\bullet(A'), b, B)$。最后，由于典范映射 $C_\bullet(A) \longrightarrow C_\bullet(A)$ 和 $C_\bullet(A') \longrightarrow C_\bullet(A')$ 在同调层面诱导同构，因此，霍赫希尔德同调和循环同调上的诱导映射分别与 $HH_\bullet^\Phi(x)$ 和 $HC_\bullet^\Phi(x)$ 相同。□

注 3.2. 对于 $n \geq 0$，令 $\tilde{C}_n(A) := A^{\otimes n+1}/(1 - t)$，其中 t 是第 2 节所述的循环算子。于是，霍赫希尔德微分 b 可下降到商 $C_\bullet(A)$，A 的循环同调可通过复形 $(C_\bullet(A), b)$ 计算（见 [17, § 2.1.4]）。按照命题 3.1 证明中的类似推理，可以验证，测量$\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 对每个 $x \in C$ 都诱导出复形态射 $\tilde{C}_\bullet^\Phi(x) : \tilde{C}_\bullet(A) \longrightarrow \tilde{C}_\bullet(A')$。此外，对每个 $x \in C$，其在同调群上的诱导映射与 $HC_\bullet^\Phi(x)$ 相同。

现在假设 A 是交换的。对于 p、$q \geq 1$，若置换 $\sigma \in S_{p+q}$ 满足 $\{\sigma(1) <$，则称其为一个（p，q）洗牌。$\cdots < \sigma(p)\}$ 和 $\{\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)\}$。我们用 $S_{p,q}$ 表示所有 (p,q)-洗牌的集合。那么，我们知道（见 [17, § 4.2]），该运算

$$\begin{aligned} -- \times -- : C_p(A) \otimes C_q(A) &\longrightarrow C_{p+q}(A) \\ (a_0, a_1, ..., a_p) \otimes (b_0, b_1, ..., b_q) &\mapsto \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma)\sigma \cdot (a_0 b_0, a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q) \end{aligned} \tag{3.5}$$

诱导出一个乘积 $\times : HH_p(A) \otimes HH_q(A) \longrightarrow HH_{p+q}(A)$，使交换 K-代数 A 的霍赫希尔德同调成为一个分次环 $(HH_\bullet(A), \times)$。

在本节余下部分中，我们始终假设代数 A、A' 是交换的。在 [2, 命题 2.3], 中已证明，如果 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的测量，那么我们有一个诱导测量

$$\Phi^{\times} : C \longrightarrow Hom_K(HH_\bullet(A), HH_\bullet(A')) \qquad x \mapsto HH_\bullet^{\Phi}(x) := \{HH_n^{\Phi}(x) : HH_n(A) \longrightarrow HH_n(A')\}_{n \geq 0} \tag{3.6}$$

介于代数 $(HH_\bullet(A), \times)$ 和 $(HH_\bullet(A'), \times)$ 之间。换言之，对于每个 $x \in C$，我们可以写成

$$x \cdot ((a_0, a_1, ..., a_p) \times (b_0, b_1, ..., b_q)) = x_{(1)}(a_0, a_1, ..., a_p) \times x_{(2)}(b_0, b_1, ..., b_q) \tag{3.7}$$

对于（$a_0, a_1, ...,\ a_p$）$\in C_p$（A）和（$b_0, b_1, ...,\ b_q$）$\in C_q$（A）。现在我们将对循环同调上的乘积结构做类似的事情。为此，我们回顾（见 [14, 定理 3.3]或 [17, § 4.4]），全复形上的运算

$$\begin{aligned} -- * -- : Tot(\overline{\mathscr{B}C}_{\bullet\bullet}(A))_p \otimes Tot(\overline{\mathscr{B}C}_{\bullet\bullet}(A))_q &\longrightarrow Tot(\overline{\mathscr{B}C}_{\bullet\bullet}(A))_{p+q+1} \qquad \tilde{a} \otimes \tilde{b} \mapsto \tilde{a} * \tilde{b} \\ (\tilde{a}_p, \tilde{a}_{p-2}, ...) \otimes (\tilde{b}_q, \tilde{b}_{q-2}, ...) &\mapsto (B\tilde{a}_p \times \tilde{b}_q, B\tilde{a}_p \times \tilde{b}_{q-2}, ...) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$\bar{}\quad \bar{}\quad \overline{\sim}\ \tilde{}\ \tilde{}\quad \bar{}$对于 $\tilde{a} = (\tilde{a}_p,\ \tilde{a}_{\overline{p-2}},\ ...) \in \mathrm{Tot}(\mathscr{B}\mathrm{C}_{\bullet\bullet}(\mathrm{A}))_p = \mathrm{C}_p(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{C}_{p-2}(\mathrm{A}) \oplus ...$ 和 $\mathrm{b} = (\mathrm{b}_q,\ \mathrm{b}_{q-2},\ ...) \in \mathrm{Tot}(\mathscr{B}\mathrm{C}_{\bullet\bullet}(\mathrm{A}))_q = \mathrm{C}_q(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{C}_{q-2}(\mathrm{A}) \oplus ...$ 诱导出一种乘积结构

$$-- * -- : HC_p(A) \otimes HC_q(A) \longrightarrow HC_{p+q+1}(A) \tag{3.9}$$

通过次数平移，令 $HC'_\bullet(A) := HC_{\bullet-1}(A)$，我们知道（见 [14, § 3]），(3.9) 中的乘积使循环同调成为一个结合的分次 K-代数（$HC'_\bullet(A)$，$*$）。

定理 3.3. 设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的测量。那么，这些映射

$$HC'^{\Phi}_\bullet(x) : HC'_\bullet(A) = HC_{\bullet-1}(A) \xrightarrow{HC^{\Phi}_{\bullet-1}(x)} HC_{\bullet-1}(A') = HC'_\bullet(A') \qquad x \in C \tag{3.10}$$

确定一个代数测度

$$\Phi^* : C \longrightarrow Hom_K(HC'_\bullet(A), HC'_\bullet(A')) \qquad x \mapsto \Phi^*(x) := HC'^{\Phi}_\bullet(x) : HC'_\bullet(A) \longrightarrow HC'_\bullet(A') \tag{3.11}$$

从 $(HC'_\bullet(A), *)$ 到 $(HC'_\bullet(A'), *)$。

证明。设 $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$。由命题 3.1可知，算子 $\bar{\mathrm{C}}^{\Phi}_n(\mathrm{x}) : \bar{\mathrm{C}}_n(\mathrm{A}) \longrightarrow \bar{\mathrm{C}}_n(\mathrm{A}')$ 对归一化混合复形 $\mathscr{B}\mathrm{C}_{\bullet\bullet}(\mathrm{A})$ 和 $\mathscr{B}\mathrm{C}_{\bullet\bullet}(\mathrm{A}')$ 上的 Connes 边界算子 B 具有良好的相容性。现在考虑 $\tilde{\mathrm{a}} = (\tilde{\mathrm{a}}_p, \tilde{\mathrm{a}}_{p-2}, ...) \in \mathrm{Tot}(\mathscr{B}\mathrm{C}_{\bullet\bullet}(\mathrm{A}))_p = \mathrm{C}_p(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{C}_{p-2}(\mathrm{A}) \oplus ...$ 和 $\mathrm{b} = (\mathrm{b}_q, \mathrm{b}_{q-2}, ...) \in \mathrm{Tot}(\mathscr{B}\mathrm{C}_{\bullet\bullet}(\mathrm{A}))_q = \mathrm{C}_q(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{C}_{q-2}(\mathrm{A}) \oplus ...$，如 (3.8) 中所示。利用 (3.7) 以及 (3.8) 中乘积 $*$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned} x(\tilde{a} * \tilde{b}) = x((\tilde{a}_p, \tilde{a}_{p-2}, ...) * (\tilde{b}_q, \tilde{b}_{q-2}, ...)) &= x(B\tilde{a}_p \times \tilde{b}_q, B\tilde{a}_p \times \tilde{b}_{q-2}, ...) \\ &= (x(B\tilde{a}_p \times \tilde{b}_q), x(B\tilde{a}_p \times \tilde{b}_{q-2}), ...) \\ &= (x_{(1)}(B\tilde{a}_p) \times x_{(2)}(\tilde{b}_q), x_{(1)}(B\tilde{a}_p) \times x_{(2)}(\tilde{b}_{q-2}), ...) \\ &= (B(x_{(1)}(\tilde{a}_p)) \times x_{(2)}(\tilde{b}_q), B(x_{(1)}(\tilde{a}_p)) \times x_{(2)}(\tilde{b}_{q-2}), ...) \\ &= (x_{(1)}(\tilde{a}_p), x_{(1)}(\tilde{a}_{p-2}), ...) * (x_{(2)}(\tilde{b}_q), x_{(2)}(\tilde{b}_{q-2}), ...) \\ &= x_{(1)}(\tilde{a}) * x_{(2)}(\tilde{b}) \end{aligned}$$

结论显而易见。 □

注 3.4. 我们注意到，环（$HC'_\bullet(A),*$）是非单位元的，因为 $HC'_0(A) = 0$。因此，定理 3.3 中的测量也是非单位元代数之间的测量，也就是说，它只满足 (1.1) 中涉及C上的余乘法的条件。

我们知道（见 [17, § 4.4.4]），周期性序列 (2.6) 中出现的映射 $B : HC'_p(A) = HC^{p-1}(A) \longrightarrow HH^p(A)$ 确定了一个从（$HC'_\bullet(A),*$）到（$HH_\bullet(A),\times$）的分次代数映射。在链层面，该映射由算子 B 如下诱导而成

$$Tot(\overline{\mathscr{B}C}_{\bullet\bullet}(A))_{p-1} = \bar{C}_{p-1}(A) \oplus \bar{C}_{p-3}(A) \oplus ... \longrightarrow \bar{C}_p(A) \qquad (\tilde{a}_{p-1}, \tilde{a}_{p-3}, ...) \mapsto B\tilde{a}_{p-1} \tag{3.12}$$

结合霍赫希尔德同调环（$HH_\bullet(A),\times$）上的洗牌乘积，可知 $HH_\bullet(A)$ 成为（$HC'_\bullet(A),*$）上的一个模，其作用由下式确定

$$* : HC'_p(A) \otimes HH_q(A) \longrightarrow HH_{p+q}(A) \qquad (\tilde{a}_{p-1}, \tilde{a}_{p-3}, ...) \otimes \tilde{b}_q \mapsto B\tilde{a}_{p-1} \times \tilde{b}_q \tag{3.13}$$

若D是C-余模，且M、M'分别是A和A'上的模，我们回顾一下，关于（C, Φ）的余模测量（例如参见[5], [12]）由一个映射构成

$$\Psi : D \longrightarrow Hom_K(M, M') \qquad \Psi(d)(am) = d(am) = d_{(1)}(a)d_{(2)}(m) = \Phi(d_{(1)})(a)\Psi(d_{(2)})(m) \quad d \in D, a \in A, m \in M \tag{3.14}$$

其中D上的C-余模结构由$d \mapsto d_{(1)} \otimes d_{(2)} \in C \otimes D$给出，采用 Sweedler记号，省略求和符号。

命题 3.5。 设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的测量。那么，这些映射

$$\begin{aligned} \Phi^* : C &\longrightarrow Hom_K(HC'_\bullet(A), HC'_\bullet(A')) \qquad x \mapsto \Phi^*(x) := HC'^{\Phi}_\bullet(x) : HC'_\bullet(A) \longrightarrow HC'_\bullet(A') \\ \Phi^\times : C &\longrightarrow Hom_K(HH_\bullet(A), HH_\bullet(A')) \qquad x \mapsto \Phi^\times(x) = HH^{\Phi}_\bullet(x) : HH_\bullet(A) \longrightarrow HH_\bullet(A') \end{aligned} \tag{3.15}$$

确定一个关于(C, Φ^*)的余模测量，其定义在$(HC'_\bullet(A), *)$-模 $HH_\bullet(A)$ 到$(HC'_\bullet(A'), *)$-模 $HH_\bullet(A')$之间，其中 C 视为一个 C-余模。

证明。我们考虑 $x \in C$ 以及 $\bar{\bar{a}} = (\tilde{a}_{p-1}, \tilde{a}_{p-3}, ...) \in Tot(\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}(A))_{p-1} = C_{p-1}(A) \oplus C_{p-3}(A) \oplus ...$ 和 $b_q \in C_q(A)$。同样，根据命题 3.1，我们知道算子 $\bar{C}^{\Phi}_n(x) : \bar{C}_n(A) \longrightarrow \bar{C}_n(A')$ 与归一化混合复形上的 Connes 算子 B 相容。结合 $\Phi^\times : C \longrightarrow Hom_K(HH_\bullet(A), HH_\bullet(A'))$ 是关于洗牌乘积 $\times$ 的代数测度这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} \Phi^\times(x)((\tilde{a}_{p-1}, \tilde{a}_{p-3}, ...) * \tilde{b}_q) = x((\tilde{a}_{p-1}, \tilde{a}_{p-3}, ...) * \tilde{b}_q) &= x(B\tilde{a}_{p-1} \times \tilde{b}_q) \\ &= x_{(1)}(B\tilde{a}_{p-1}) \times x_{(2)}(\tilde{b}_q) \\ &= B(x_{(1)}(\tilde{a}_{p-1})) \times x_{(2)}(\tilde{b}_q) \\ &= x_{(1)}(\tilde{a}_{p-1}, \tilde{a}_{p-3}, ...) * x_{(2)}(\tilde{b}_q) \\ &= \Phi^*(x_{(1)})(\tilde{a}_{p-1}, \tilde{a}_{p-3}, ...) * \Phi^\times(x_{(2)})(\tilde{b}_q) \end{aligned}$$

这就证明了该结果。 □

给定 K-代数 R、R′ （不一定是交换的），我们知道（参见 Sweedler [21, 第七章]），存在一个余代数$\mathcal{M}(R, R')$ 和一个测量 $\Psi(R, R') : \mathcal{M}(R, R') \longrightarrow Hom_K(R, R')$，它在从 R 到 R′ 的余代数测度范畴中具有泛性质。换言之，给定任意余代数测量 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(R, R')$，存在唯一的余代数映射$\zeta : C \longrightarrow \mathcal{M}(R, R')$，使得 $\Phi = \Psi(R, R') \circ \zeta$。余代数 $\mathcal{M}(R, R')$ 称为从 R 到 R′ 的泛测量余代数。众所周知（例如参见 [1]），这使得 K-代数范畴可由 K-余代数富化。换言之，可以定义一个范畴 ALG_K，其对象为 K-代数，Hom 对象由 $ALG_K(R, R') := \mathcal{M}(R, R')$ 给出，其中 R、R′ 为 K-代数。

同样地，我们有一个测量 $\Psi^c(\mathrm{R},\mathrm{R}'):\ \mathcal{M}_c(\mathrm{R},\mathrm{R}')\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathrm{R},\mathrm{R}')$，它在从 R 到 R′ 的余交换余代数测度范畴中具有泛性质；也就是说，它适用于满足 C 为余交换的余代数测量 $\Phi:\mathrm{C}\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathrm{R},\mathrm{R}')$。注意，$\mathcal{M}_c(\mathrm{R},\mathrm{R}')$ 是泛测量余代数 $\mathcal{M}(\mathrm{R},\mathrm{R}')$ 的余交换部分（参见 [9, 命题 1.4]）。因此，我们也可以定义范畴 ALG^c_K，其对象为 K-代数，Hom 对象由 $\mathrm{ALG}^c_K(\mathrm{R},\mathrm{R}'):=\mathcal{M}_c(\mathrm{R},\mathrm{R}')$ 给出，其中 R、R′ 为 K-代数。

我们还考虑$cALG_K$的满子范畴ALG^c_K，其对象为交换K-代数，而其 Hom 对象定义为

$$cALG_K(A,A'):=\mathcal{M}_c(A,A') \tag{3.16}$$

对于交换K-代数A、A'。这为交换K-代数赋予了关于对称幺半范畴$coCoalg_K$的富化，其中K-余代数为余交换余代数。

很容易看出，上述构造可推广到不一定含单位的代数。给定一个交换K-代数$\widetilde{\ }A$，我们考虑如上所述的环（$HC'_\bullet(A),*$）。现在我们定义一个新的范畴$cALG_K$，其对象为交换K-代数，而其 Hom 对象定义为

$$c\widetilde{ALG}_K(A,A'):=\mathcal{M}_c((HC'_\bullet(A),*),(HC'_\bullet(A'),*)) \tag{3.17}$$

对于交换K-代数A、A'。这为交换K-代数赋予了另一种关于对称幺半范畴$coCoalg_K$的富化，其中K-余代数为余交换余代数。

命题 3.6。 设 A、A' 为交换 K-代数。则存在典范映射

$$\tau(A,A'):\mathcal{M}_c(A,A')\longrightarrow \mathcal{M}_c((HC'_\bullet(A),*),(HC'_\bullet(A'),*)) \tag{3.18}$$

到 K-余代数。

证明。 对于交换代数A、A'，我们考虑测量

$$\Psi^c(A,A'):\mathcal{M}_c(A,A')\longrightarrow Hom_K(A,A') \tag{3.19}$$

它在从A 到A'的余交换测量中具有泛性质。由于 $\mathcal{M}_c(A,A')$ 是余交换的，根据定理 3.3可知，存在一个诱导测量

$$\Psi^{c*}(A,A'):\mathcal{M}_c(A,A')\longrightarrow Hom_K(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A')) \tag{3.20}$$

存在于相应的循环同调代数之间。余代数映射 $\tau(A,A'):\ \mathcal{M}_c(A,A')\longrightarrow \mathcal{M}_c((HC'_\bullet(A),*),(HC'_\bullet(A'),*))$ 现可直接由 $\mathcal{M}_c((HC'_\bullet(A),*),(HC'_\bullet(A'),*))$ 的泛性质得到。□

$\widetilde{\ }$**定理 3.7**。 存在一个 $coCoalg_K$-富集函子 $cALG_K\longrightarrow cALG_K$，它在对象上为单位元，并且其在 Hom 对象上的映射由下式给出：

$$\tau(A,A'):\mathcal{M}_c(A,A')\longrightarrow \mathcal{M}_c((HC'_\bullet(A),*),(HC'_\bullet(A'),*)) \tag{3.21}$$

对于交换代数 A，A'。

$\widetilde{\ }$证明。 我们首先证明，(3.21) 中的态射与范畴 $cALG_K$ 和$cALG_K$中的复合相容。换言之，对于交换代数 A、A' 和A''，我们需要证明下图是交换的

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_c(A,A')\otimes\mathcal{M}_c(A',A'') & \xrightarrow{\ \circ\ } & \mathcal{M}_c(A,A'') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tau(A,A')\otimes\tau(A',A'')} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau(A,A'')} \\ \mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'))\otimes\mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A'),HC'_\bullet(A'')) & \xrightarrow{\ \circ\ } & \mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'')) \end{array} \tag{3.22}$$

根据定义，(3.22) 中的水平态射由范畴 $cALG_K$ 和$cALG_K$中的复合给出，而这两个范畴都以 $coCoalg_K$为丰。因而，这些都是余交换余代数的映射。由命题 3.6 可知，(3.22) 中出现的映射$\tau(A,A')$、 $\tau(A',A'')$ 和 $\tau(A,A'')$ 也是 $coCoalg_K$中的态射。

为了证明（3.22）交换，根据 $\mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A''))$ 的泛性质，只需证明下面两个复合相等

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_c(A,A')\otimes\mathcal{M}_c(A',A'') & & \mathcal{M}_c(A,A')\otimes\mathcal{M}_c(A',A'') \\
\downarrow{\scriptstyle \circ} & & \downarrow{\scriptstyle \tau(A,A')\otimes\tau(A',A'')} \\
\mathcal{M}_c(A,\ A'') & & \mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'))\otimes\mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A'),HC'_\bullet(A'')) \\
\downarrow{\scriptstyle \tau(A,A'')} & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\
\mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'')) & & \mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'')) \\
\downarrow{\scriptstyle \Psi^c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A''))} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi^c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A''))} \\
Hom_K(HC'_\bullet(A),\ HC'_\bullet(A'')) & & Hom_K(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A''))
\end{array} \tag{3.23}$$

这里， $\Psi^c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'')):\ \mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A''))\longrightarrow Hom_K(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A''))$ 是从 $(HC'_\bullet(A),*)$ 到 $(HC'_\bullet(A''),*)$ 的泛余交换测量。为方便起见，将（3.23）中的左侧垂直复合记为 ϕ_1，右侧垂直复合记为 ϕ_2。

现在我们考虑 $x\in\mathcal{M}_c(A,A')$ 和 $y\in\mathcal{M}_c(A',A'')$，以及它们的复合 $y\circ x\in\mathcal{M}_c(A,A'')$。由于 $\circ:\ \mathcal{M}_c(A,A')\otimes\mathcal{M}_c(A',A'')\longrightarrow\mathcal{M}_c(A,A'')$ 是一个余代数态射，我们注意到

$$(y\circ x)_{(1)}\otimes\ldots\otimes(y\circ x)_{(p)}=\Delta^p(y\circ x)=(y_{(1)}\circ x_{(1)})\otimes\ldots\otimes(y_{(p)}\circ x_{(p)}) \tag{3.24}$$

对于任意 $p\geq 0$，相应地，对于任意 $(a_0,\ldots,a_{p-1})\in C^{p-1}(A)$，我们有

$$\begin{aligned}\phi_1(x\otimes y)(a_0,\ldots,a_{p-1})=((y\circ x)_{(1)}(a_0),\ldots,(y\circ x)_{(p)}(a_{p-1}) &= ((y_{(1)}\circ x_{(1)})(a_0),\ldots,(y_{(p)}\circ x_{(p)})(a_{p-1})) \\ &= (y_{(1)}(x_{(1)}(a_0)),\ldots,y_{(p)}(x_{(p)}(a_{p-1})))\end{aligned} \tag{3.25}$$

为了描述 (3.23) ϕ_2 中的右侧垂直复合，我们注意到下图是交换的

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}_c(A,A')\otimes\mathcal{M}_c(A',A'') & \xrightarrow{\tau(A,A')\otimes\tau(A',A'')} & \mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'))\otimes\mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A'),HC'_\bullet(A'')) & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{M}_c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'')) \\
\downarrow{\scriptstyle \Psi^c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A'))\otimes\Psi^c(HC'_\bullet(A'),HC'_\bullet(A''))} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Psi^c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A''))} \\
Hom_K(HC'_\bullet(A),\ C'(A'))\otimes Hom_K(HC'_\bullet(A'),\ C'(A'')) & & \xrightarrow{\qquad\qquad\circ\qquad\qquad} & & Hom_K(HC'_\bullet(A),\ C'(A''))
\end{array}$$

由此可知

$$\phi_2(x\otimes y)(a_0,\ldots,a_{p-1})=y(x(a_0,\ldots,a_{p-1}))=(y_{(1)}(x_{(1)}(a_0)),\ldots,y_{(p)}(x_{(p)}(a_{p-1}))) \tag{3.26}$$

对于 $(a_0,\ldots,a_{p-1})\in C^{p-1}(A)$。由 (3.25) 和 (3.26)，可得 $\phi_1(x\otimes y)(a_0,\ldots,a_{p-1})=\phi_2(x\otimes y)(a_0,\ldots,a_{p-1})$，其中 $(a_0,\ldots,a_{p-1})\in\bar{C}^{p-1}(A)$。由于 $Tot(\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}(A))^{p-1}$ 可分解为 $Tot(\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}(A))^{p-1}=C^{p-1}(A)\oplus C^{p-3}(A)\oplus\ldots$，对每个直和项重复相同的推理可得，对于任意 $\tilde{a}=(\tilde{a}^{p-1},\tilde{a}^{p-3},\ldots)\in\overline{Tot}(\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}(A))^{p-1}$，都有 $\phi_1(x\otimes y)(\tilde{a})=\phi_2(x\otimes y)(\tilde{a})$。因此，图表 (3.22) 可交换。

要证明我们有一个 $coCoalg_K$-富集函子 $cALG_K\longrightarrow cALG_K$，还需检查（3.21）中 Hom 对象上的映射与单位映射相容。由于余代数 K 中有 $\Delta^p(1)=1\otimes\ldots\otimes 1$ ($(p+1)$-次)，由（2.4）中作用的定义可知，复合

$$K\longrightarrow\mathcal{M}_c(A,\ A)\xrightarrow{\tau(A,A)}\mathcal{M}_c(HC'(A),HC'(A))\xrightarrow{\Psi^c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A))}Hom_K(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A)) \tag{3.27}$$

与由标量乘法给出的显然映射 $K \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A))$ 完全相同。由于标量乘法本身也是一种测量，后一个映射必定经过泛余交换测量余代数 $\mathcal{M}_c(HC'(A), HC'(A))$ 分解。由测量 $\Psi^c(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A))$ 的泛性质： $\mathcal{M}_c(HC'(A),HC'(A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(HC'_\bullet(A),HC'_\bullet(A))$，结论得证。□

4 测量 霍赫希尔德同调与循环同调上的环及 λ-分解

对于交换代数 A，我们回顾一下，其 Hochschild 同调群具有 λ-分解（例如参见[17, § 4.5]）

$$HH_n(A) = HH_n^{(1)}(A) \oplus ... \oplus HH_n^{(n)}(A) \tag{4.1}$$

对于$n \geq 1$。此外，我们知道，(4.1) 中的直和项与 (3.5) 中所述的洗牌乘积相容。换言之，洗牌乘积限制为

$$__ \times __ : HH_p^{(i)}(A) \times HH_q^{(j)}(A) \longrightarrow HH_{p+q}^{(i+j)}(A) \tag{4.2}$$

与第 3 节一样，设 C 为余交换余代数，并设 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数 A、A'之间的测量。在 [2], 中，我们已证明映射 $\{C_n^\Phi(x) : C_n(A) \longrightarrow C_n(A')\}_{n\geq 0}$ 在霍赫希尔德同调上诱导态射 $HH_\bullet^\Phi(x) : HH_\bullet(A) \longrightarrow HH_\bullet(A')$。本节将证明，这些态射与 (4.1) 中的分解和 (4.2) 中的洗牌乘积相容。为此，我们首先需要一些关于交换霍普夫代数的中间结果。

设 $\mathcal{H}$ 是 K 上的交换霍普夫代数，配备余乘法 $\Delta_\mathcal{H} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 以及余单位 $\epsilon_\mathcal{H} : \mathcal{H} \longrightarrow K$。若 f、g 是 $\mathcal{H}$ 的 K-线性自同态，则它们的卷积 $f \odot g$ 由下式给出

$$f \odot g := \mu_\mathcal{H}(f \otimes g)\Delta_\mathcal{H} : \mathcal{H} \xrightarrow{\Delta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \xrightarrow{f\otimes g} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \xrightarrow{\mu_\mathcal{H}} \mathcal{H} \tag{4.3}$$

其中 $\mu_\mathcal{H}$ 表示 $\mathcal{H}$ 上的乘法。(4.3) 中的卷积使 $\mathcal{H}$ 的 K-线性自同态的集合 $End_K(\mathcal{H})$ 成为一个结合 K-代数（见 [17, § 4.5.2]）。(4.3) 中自同态的卷积积 $\odot$ 的单位由复合 $\iota_\mathcal{H}\epsilon_\mathcal{H} : \mathcal{H} \xrightarrow{\epsilon_\mathcal{H}} K \xrightarrow{\iota_\mathcal{H}} \mathcal{H}$ 给出，其中 $\iota_\mathcal{H}$ 是霍普夫代数 $\mathcal{H}$的单位映射。

引理 4.1. 设 $\mathcal{H}$、$\mathcal{H}'$ 为交换霍普夫代数。设 C 为余交换余代数，并设 $\Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathcal{H},\mathcal{H}')$是从 $\mathcal{H}$到 $\mathcal{H}'$在代数层面上的测量。假设有 $f, g \in End_K(\mathcal{H})$ 以及 $f', g' \in End_K(\mathcal{H}')$，使得对每个 $x \in C$，下列图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{f} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle\Psi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi(x)} \\ \mathcal{H}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{H}' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{g} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle\Psi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi(x)} \\ \mathcal{H}' & \xrightarrow{g'} & \mathcal{H}' \end{array} \tag{4.4}$$

那么，对于每个 $x \in C$，下面的图表也交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{f\odot g} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle\Psi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi(x)} \\ \mathcal{H}' & \xrightarrow{f'\odot g'} & \mathcal{H}' \end{array} \tag{4.5}$$

证明。 设$h \in \mathcal{H}$。我们用 Sweedler记号表示 $\Delta_{\mathcal{H}}(h) := h_{(1)} \otimes h^{(2)}$，并省略求和符号。对于$x \in C$，我们验证：

$$\begin{aligned}
&\Psi(x)((f \odot g)(h)) \\
&= \Psi(x)(f(h_{(1)})g(h_{(2)})) \\
&= \Psi(x_{(1)})(f(h_{(1)}))\Psi(x_{(2)})(g(h_{(2)})) && \text{(since } \Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \text{ is a measuring)} \\
&= f'(\Psi(x_{(1)})(h_{(1)}))g'(\Psi(x_{(2)})(h_{(2)})) && \text{(applying (4.4))} \\
&= f'(\Psi(x)(h)_{(1)})g'(\Psi(x)(h)_{(2)}) && \text{(since } \Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \text{ is a measuring)} \\
&= (f' \odot g')(\Psi(x)(h))
\end{aligned}$$

□

假设 $\mathcal{H}$ 也是一个分次Hopf代数，即 $\mathcal{H} = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{H}_n$。令 $\mathcal{H}_0 = K$，并令$f \in End_K(\mathcal{H})$ 为一个次数为 0 的 K-线性映射，满足$f(1) = 0$。那么，当 $k > n$ 时，$f^{\odot k}|_{\mathcal{H}_n} = 0$，并且我们注意到，下式是 $\mathcal{H}$ 上一个定义良好的 K-线性自同态（见 [17, § 4.5.2.1]）：

$$e^{(1)}(f) := \log(\iota_{\mathcal{H}}\epsilon_{\mathcal{H}} + f) = f - \frac{f^{\odot 2}}{2} + ... + (-1)^{i+1}\frac{f^{\odot i}}{i} + ... \tag{4.6}$$

次数为 0。因此，可以定义

$$e^{(i)}(f) := \frac{(e^{(1)}(f))^{\odot i}}{i!} \qquad e_n^{(i)}(f) := e^{(i)}(f)|_{\mathcal{H}_n} \tag{4.7}$$

由于f的次数为 0，我们注意到 $e_n^{(i)}(f)$ 成为 $\mathcal{H}_n$ 的一个自同态。
特别地，令 $\mathcal{H} := \mathbb{T}(A)$ 为 A 的分次余张量Hopf代数（见 [17, § 4.5.4]）。换句话说，$\mathcal{H}_0 = K$，且对于 $n \geq 1$，有 $\mathcal{H}_n := A^{\otimes n}$。$\mathcal{H} = \mathbb{T}(A)$ 上的余乘法 $\Delta_{\mathcal{H}}$ 由“切分乘积”确定

$$\Delta_{\mathcal{H}}(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{n}(a_1, ..., a_i) \otimes (a_{i+1}, ..., a_n) \qquad (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{H}_n = A^{\otimes n} \tag{4.8}$$

对于$n \geq 1$，通过令 $\tau \cdot (a_1, ..., a_n) = (a_{\tau^{-1}(1)}, ..., a_{\tau^{-1}(n)})$，可定义$S_n$在$A^{\otimes n}$上的左作用，其中 $\tau \in S_n$且 $(a_1, ..., a_n) \in A^{\otimes n}$。现在，$\mathcal{H} = \mathbb{T}(A)$上的乘法 $\mu_{\mathcal{H}}$ 由洗牌乘积确定

$$\mu_{\mathcal{H}}((a_1, ..., a_p) \otimes (b_1, ..., b_q)) := \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma)\sigma \cdot (a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q) \qquad (a_1, ..., a_p) \in A^{\otimes p},\ (b_1, ..., b_q) \in A^{\otimes q} \tag{4.9}$$

其中，$S_{p,q} \subseteq S_{p+q}$ 表示第 3 节中所述的 (p,q)-洗牌的集合。

引理 4.2. 设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的一个测量。设 $\mathcal{H} := \mathbb{T}(A)$ 和 $\mathcal{H}' := \mathbb{T}(A')$ 分别是相应的分次余张量代数。那么，存在一个诱导测量$\mathbb{T}(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$，由下式确定

$$\mathbb{T}(\Phi)(x)(a_1, ..., a_n) := (\Phi(x_{(1)})(a_1), ..., \Phi(x_{(n)})(a_n)) = (x_{(1)}(a_1), ..., x_{(n)}(a_n)) \qquad \mathbb{T}(\Phi)(x)(1) := \epsilon_C(x) \tag{4.10}$$

对于 $x \in C$ 和 $(a_1, ..., a_n) \in A^{\otimes n}$，$n \geq 1$。

证明。我们分别用 $\mu_{\mathcal{H}}$ 和 $\mu_{\mathcal{H}'}$ 表示分次余张量代数 $\mathbb{T}(A)$ 和 $\mathbb{T}(A')$ 上的乘法。由于C是余交换的，我们注意到

$$\Phi(x)(\tau \cdot (a_1, ..., a_n)) = \tau \cdot (x_{(1)}(a_1), ..., x_{(n)}(a_n)) \qquad x \in C, \tau \in S_n, (a_1, ..., a_n) \in A^{\otimes n} \tag{4.11}$$

我们考虑 $(a_1, ..., a_p) \in \mathcal{H}_p = A^{\otimes p}$ 和 $(b_1, ..., b_q) \in \mathcal{H}_q = A^{\otimes q}$。对于$x \in C$，现在有

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}(\Phi)(x)(\mu_{\mathcal{H}}((a_1, ..., a_p) \otimes (b_1, ..., b_q))) &= \mathbb{T}(\Phi)(x)\left(\textstyle\sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma)\sigma \cdot (a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q)\right) \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma)\sigma \cdot (x_{(1)}(a_1), ..., x_{(p)}(a_p), x_{(p+1)}(b_1), ..., x_{(p+q)}(b_q)) \\
&= \mu_{\mathcal{H}'}(\mathbb{T}(\Phi)(x_{(1)})(a_1, ..., a_p) \otimes \mathbb{T}(\Phi)(x_{(2)})(b_1, ..., b_q))
\end{aligned}$$

这就证明了该结果。 □

根据定义，余单位 $\epsilon_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \longrightarrow K$ 在 $\mathcal{H} = \mathbb{T}(A)$ 上由 $\mathcal{H}_0 = K$ 上的单位元以及 $\epsilon_{\mathcal{H}}|_{\mathcal{H}_n} = 0$对 $n > 0$ 的取值确定。$\mathcal{H}$ 上的单位由 $\iota_{\mathcal{H}}: K \, id \longrightarrow \mathcal{H}_0 = K$ 给出。于是 $f := Id - \iota_{\mathcal{H}}\epsilon_{\mathcal{H}} \in End_K(\mathcal{H})$ 满足 $f(1) = 0$，并且我们令

$$e^{(i)} := e^{(i)}(Id - \iota_{\mathcal{H}}\epsilon_{\mathcal{H}}) \qquad e_n^{(i)} := e^{(i)}(Id - \iota_{\mathcal{H}}\epsilon_{\mathcal{H}})|_{\mathcal{H}_n} \tag{4.12}$$

按照 (4.7) 的意义。我们知道（例如参见 [17, § 4.5.3]），当$i > n$ 时，$e_n^{(i)} = 0$；并且对于每个n，集合$\{e_n^{(i)}\}_{1\le i\le n}$ 是由互相正交幂等元组成的集合，其和为单位元。对于 $\mathcal{H}' = \mathbb{T}(A')$，同样可以考虑$f' := Id - \iota_{\mathcal{H}'}\epsilon_{\mathcal{H}'} \in End_K(\mathcal{H}')$，其中 $\iota_{\mathcal{H}'}$和 $\epsilon_{\mathcal{H}'}$分别是 $\mathcal{H}'$ 上的单位和余单位。因此，令 $e'^{(i)} := e'^{(i)}(Id - \iota_{\mathcal{H}'}\epsilon_{\mathcal{H}'})$ 和 $e_n'^{(i)} := e'^{(i)}(Id - \iota_{\mathcal{H}'}\epsilon_{\mathcal{H}'})|_{\mathcal{H}'_n}$。

引理 4.3. 设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的测量。设 $\mathcal{H} := \mathbb{T}(A)$ 和 $\mathcal{H}' := \mathbb{T}(A')$ 分别是相应的分次余张量代数。则下图交换

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} = A \otimes \mathcal{H}_n & \xrightarrow{A\otimes e_n^{(i)}} & A \otimes \mathcal{H}_n = A \otimes A^{\otimes n} = C_n(A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle C_n^{\Phi}(x)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle C_n^{\Phi}(x)} \\ C_n(A') = A' \otimes A'^{\otimes n} = A' \otimes \mathcal{H}'_n & \xrightarrow{A'\otimes e_n'^{(i)}} & A' \otimes \mathcal{H}'_n = A' \otimes A'^{\otimes n} = C_n(A') \end{array} \tag{4.13}$$

对每个 $i,n \ge 1$ 以及 $x \in C$。

证明。应用引理 4.2，我们看到，测量 $\Phi : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, A')$ 诱导出 $\mathbb{T}(\Phi) : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$，后者也是一个余代数测量。对于 $f = Id - \iota_{\mathcal{H}}\epsilon_{\mathcal{H}} \in \mathrm{End}_K(\mathcal{H})$ 和 $f' = Id - \iota_{\mathcal{H}'}\epsilon_{\mathcal{H}'} \in \mathrm{End}_K(\mathcal{H}')$，显然对每个 $x \in C$，都有 $f' \circ \mathbb{T}(\Phi)(x) = \mathbb{T}(\Phi)(x) \circ f$。由于 f, f' 以及映射 $\{\Phi(x)\}_{x\in C}$的次数均为 0，由引理 4.1 以及 (4.6) 和 (4.7) 中的定义可得，对每个 $x \in C$，都有 $e_n'^{(i)} \circ \mathbb{T}(\Phi)(x) = \mathbb{T}(\Phi)(x) \circ e$。

对于$x \in C$ 以及 $(a_0, a_1, ..., a_n) \in A \otimes A^{\otimes n}$，现在我们看到

$$\begin{aligned} ((A \otimes e_n'^{(i)}) \circ C_n^{\Phi}(x))(a_0, a_1, ..., a_n) &= \Phi(x_{(1)})(a_0) \otimes ((e_n'^{(i)} \circ \mathbb{T}(\Phi)(x_{(2)}))(a_1, ..., a_n)) \\ &= \Phi(x_{(1)})(a_0) \otimes (\mathbb{T}(\Phi)(x_{(2)}) \circ e_n^{(i)})(a_1, ..., a_n)) \\ &= (C_n^{\Phi}(x) \circ (A \otimes e_n^{(i)}))(a_0, a_1, ..., a_n) \end{aligned} \tag{4.14}$$

这就证明了该结论。 □

我们知道（见 [17, § 4.5.10]），由幂等元 $\{e_n^{(i)}\}_{1\le i\le n}$诱导的映射 $\{A \otimes e_n^{(i)}: C_n(A) \longrightarrow C_n(A)\}_{1\le i\le n}$给出直和分解 $C_n(A) = C_n^{(1)}(A) \oplus ... \oplus C_n^{(n)}(A)$，它进一步将霍赫希尔德复形 $(C_\bullet^{hoc}(A), b)$ 分解为子复形的直和 $C_\bullet^{hoc\,(i)}, (A)$。相应地，如 (4.1) 中所述，当 $n \ge 1$时，霍赫希尔德同调具有直和分解 $HH_n(A) = HH_n^{(1)}(A) \oplus ... \oplus HH_n^{(n)}(A)$。我们还设 $e_0^{(0)} := id$ 且 $HH_0^{(0)}(A) := HH_0(A)$。现在我们可以证明，霍赫希尔德同调的这一直和分解与余代数测度诱导的映射相容。

定理 4.4。设 C 是一个余交换 K-余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的测量。对于每个 $x \in C$ 和 $i,n \ge 0$，我们有如下映射

$$C_n^{\Phi,(i)}(x) : C_n^{(i)}(A) \longrightarrow C_n^{(i)}(A') \tag{4.15}$$

这些映射由限制映射 $C_n^{\Phi}(x) : C_n(A) \longrightarrow C_n(A')$诱导得到。特别地，我们有如下诱导映射

$$HH_\bullet^{\Phi,(i)}(x) : HH_\bullet^{(i)}(A) \longrightarrow HH_\bullet^{(i)}(A') \tag{4.16}$$

关于出现在 *Hochschild* 同调群的 λ-分解中的直和项。

证明。 根据定义，我们知道 $C_n^{(i)}(A) = Im(A \otimes e_n^{(i)}: C_n(A) \longrightarrow C_n(A))$。应用引理 4.3，对任意 $1 \le i、j、 \le n$ 以及 $x \in C$

$$\begin{array}{ccccc} C_n^{(i)}(A) & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{A\otimes e_n^{(i)}} & C_n(A) \\ & & {\scriptstyle C_n^{\Phi}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_n^{\Phi}(x)} \\ & & C_n(A') & \xrightarrow{A'\otimes e_n'^{(i)}} & C_n(A') \xrightarrow{A'\otimes e_n'^{(j)}} C_n(A') \end{array} \tag{4.17}$$

其中，(4.17) 中出现的映射 $C_n^{(i)}(A) \longrightarrow C_n(A)$ 是典范嵌入。由于 $\{e_n'^{(i)}\}_{1\le i\le n}$ 是一组和为单位元的互相正交幂等元，由 (4.17) 可立即看出，$C_n^{(i)}(A)$ 在映射 $C_n^{\Phi}(x) : C_n(A) \longrightarrow C_n(A')$ 下的像包含于直和项 $C_n^{(i)}(A')$ 中。(4.16) 中的映射现可由此直接得到。□

推论 4.5。 设 C 是余交换 K-余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的测量。对于 $x \in C$ 以及 $i、j \ge 1$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} HH_\bullet^{(i)}(A) \otimes HH_\bullet^{(j)}(A) & \xrightarrow{\times} & HH_\bullet^{(i+j)}(A) \\ {\scriptstyle HH_\bullet^{\Phi,(i)}(x_{(1)})\otimes HH_\bullet^{\Phi,(j)}(x_{(2)})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HH_\bullet^{\Phi,(i+j)}(x)} \\ HH_\bullet^{(i)}(A') \otimes HH_\bullet^{(j)}(A') & \xrightarrow{\times} & HH_\bullet^{(i+j)}(A') \end{array} \tag{4.18}$$

证明。 根据 [2, 命题 2.3], ，我们已经知道，余代数测量相对于霍赫希尔德同调代数上的洗牌乘积诱导出一个测量，即我们有

$$HH_{m+n}^{\Phi}(x)(\tilde{a} \times \tilde{b}) = HH_m^{\Phi}(x_{(1)})(\tilde{a}) \times HH_n^{\Phi}(x_{(2)})(\tilde{b}) \tag{4.19}$$

˜对于$m、n \ge 0$ 和 $\tilde{}a \in$ 霍赫希尔德同调$_m(A)、b \in$ 霍赫希尔德同调$_n(A)$。我们还知道（参见 [17, § 4.5.14]），霍赫希尔德同调上的洗牌乘积与 (4.2) 中所述的 λ-分解相容。由定理 4.4 可知，由测量诱导的映射 霍赫希尔德同调$_\bullet^{\Phi}(x)$: 霍赫希尔德同调$_\bullet(A) \longrightarrow$ 霍赫希尔德同调$_\bullet(A')$ 同样与 λ-分解相容。结论现已显而易见。 □

我们还知道，映射 $A \otimes e_n^{(i)}: C_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow A \otimes A^{\otimes n} = C_n(A)$ 会诱导映射 $A \otimes \bar{}e_n^{(i)}: \bar{}C_n(A) = A \otimes \bar{}A^{\otimes n} \longrightarrow A \otimes \bar{}A^{\otimes n} = \bar{}C_n(A)$，这些映射将归一化混合复形 $\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}(A) := (\bar{}C_\bullet(A), \overline{b}, B)$ 分解为子复形的直和$\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}^{(i)}(A), i \ge 0$ (参见 [17, § 4.6.7])。因此，A 的循环同调具有 λ-分解

$$HC_0(A) = HC_0^{(0)}(A) \qquad HC_n(A) = HC_n^{(1)}(A) \oplus ... \oplus HC_n^{(n)}(A) \qquad n \ge 1 \tag{4.20}$$

其中 $HC_\bullet^{(i)}(A)$ 是双复形 $\mathscr{B}C_{\bullet\bullet}^{(i)}(A)$ 的总同调。 ——

定理 4.6。 设 C 是余交换 K-余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的测量。对于每个 $x \in C$ 和 $i,n \ge 0$，映射 $C_n^{\Phi^{(i)}}(x) : C_n^{(i)}(A) \longrightarrow C_n^{(i)}(A')$ 诱导映射

$$HC_\bullet^{\Phi,(i)}(x) : HC_\bullet^{(i)}(A) \longrightarrow HC_\bullet^{(i)}(A') \tag{4.21}$$

作用于循环同调群的 λ-分解中出现的直和项上。

证明。设 $x \in C$。我们知道，映射 $A \otimes e_n^{(i)}: C_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow A \otimes A^{\otimes n} = C_n(A)$（分别地，$A' \otimes e_n'^{(i)}: C_n(A') = A' \otimes A'^{\otimes n} \longrightarrow A' \otimes A'^{\otimes n} = C_n(A')$）可下降为 $A \otimes \bar{}e_n^{(i)}: \bar{}C_n(A) = A \otimes \bar{}A^{\otimes n} \longrightarrow A \otimes \bar{}A^{\otimes n} = \bar{}C_n(A)$（分别地，$A' \otimes \bar{}e_n'^{(i)}: \bar{}C_n(A') = A' \otimes \bar{}A'^{\otimes n} \longrightarrow A' \otimes \bar{}A'^{\otimes n} = \bar{}C_n(A')$），而映射 $C_n^{\Phi}(x)$ 可下降为 $\bar{}C_n^{\Phi}(x)$。现在我们考虑下面的两个图表

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} & \xrightarrow{A\otimes e_n^{(i)}} & A \otimes A^{\otimes n} = C_n(A) \\ {\scriptstyle C_n^{\Phi}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_n^{\Phi}(x)} \\ C_n(A') = A' \otimes A'^{\otimes n} & \xrightarrow{A'\otimes e_n'^{(i)}} & = A' \otimes A'^{\otimes n} = C_n(A') \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \bar{C}_n(A) = A \otimes \bar{A}^{\otimes n} & \xrightarrow{A\otimes \bar{e}_n^{(i)}} & A \otimes \bar{A}^{\otimes n} = \bar{C}_n(A) \\ {\scriptstyle \bar{C}_n^{\Phi}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{C}_n^{\Phi}(x)} \\ \bar{C}_n(A') = A' \otimes \bar{A}'^{\otimes n} & \xrightarrow{A'\otimes \bar{e}_n'^{(i)}} & = A' \otimes \bar{A}'^{\otimes n} = \bar{C}_n(A') \end{array} \tag{4.22}$$

¯式 (4.22) 中左侧的方形由引理 4.3 可交换。由于映射$C_n(A) \longrightarrow C_n(A)$ 是满同态，因此式 (4.22) 中右侧的方形也可交换。由此可知，对于每个 $x \in$ C</style}，我们都有诱导映射

$$\overline{\mathscr{B}C}^{\Phi,(i)}_{\bullet\bullet}(x) : \overline{\mathscr{B}C}^{(i)}_{\bullet\bullet}(A) \longrightarrow \overline{\mathscr{B}C}^{(i)}_{\bullet\bullet}(A') \tag{4.23}$$

在计算循环同调的归一化混合复形的直和项上。由此可得结果。 □

我们知道（见 [17, § 4.6.9]），双复形 $\mathscr{B}C^{(i)}_{\bullet\bullet}(A)$ 和归一化霍赫希尔德复形 $\bar{C}^{hoc\,(i)}_{\bullet}(A)$ 构成短正合列 $0 \longrightarrow \bar{C}^{hoc\,(i)}_{\bullet}(A) \longrightarrow \mathscr{B}C^{(i)}_{\bullet\bullet}(A) \longrightarrow \mathscr{B}C^{(i-1)}_{\bullet\bullet}(A)[2] \longrightarrow 0$。因此，我们有如下结果。

推论 4.7。 设 C 是余交换 K-余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是交换代数之间的一个测量。对于每个 $x \in C$，映射 $HH^{\Phi\,(i)}_{\bullet}(x)$和 $HC^{\Phi\,(i)}_{\bullet}(x)$相对于 *Connes* 周期列构成如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & HH^{(i)}_n(A) & \xrightarrow{I} & HC^{(i)}_n(A) & \xrightarrow{S} & HC^{(i-1)}_{n-2}(A) & \xrightarrow{B} & HH^{(i)}_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle HH^{\Phi,(i)}_n(x)} & & \downarrow{\scriptstyle HC^{\Phi,(i)}_n(x)} & & \downarrow{\scriptstyle HC^{\Phi,(i-1)}_{n-2}(x)} & & \downarrow{\scriptstyle HH^{\Phi,(i)}_{n-1}(x)} \\
\ldots & \longrightarrow & HH^{(i)}_n(A') & \xrightarrow{I} & HC^{(i)}_n(A') & \xrightarrow{S} & HC^{(i-1)}_{n-2}(A') & \xrightarrow{B} & HH^{(i)}_{n-1}(A') \longrightarrow \ldots
\end{array} \tag{4.24}$$

5 李代数同调和莱布尼茨同调中的测度与映射

本节将测度所诱导的李代数同调和莱布尼茨同调上的映射，与循环同调和霍赫希尔德同调上的映射联系起来。对于 K-代数 A 和 r $\geq$ 1，令 M_r(A) 表示 (r $\times$r)-矩阵构成的代数。令 gl_r(A) 表示由 M_r(A) 上定义李括号 $[\alpha,\beta] := \alpha\beta - \beta\alpha$ （其中 α、$\beta \in M_r$(A) 为矩阵）所得到的李代数。考虑通过向矩阵添加 0 项得到的典范嵌入 $M_r(A) \hookrightarrow M_{r+1}$(A)，可得直极限代数 M(A)。类似地，记 gl(A) 为由 M(A) 上定义李括号 $[\alpha,\beta] := \alpha\beta - \beta\alpha$ （其中 α、$\beta \in$ M(A)）所得到的李代数

我们回顾一下（例如参见 [18]）：域 K 上的 Leibniz 代数 g 由一个K-向量空间 g 以及一个K-双线性映射[,] : g ×g $\longrightarrow$ g 组成，并满足以下关系

$$[x,[y,z]] - [[x,y],z] + [[x,z],y] = 0 \qquad \text{for all} \quad x,y,z \in \mathfrak{g} \tag{5.1}$$

特别地，任意李代数在采用相同的括号运算时也是一个 Leibniz 代数。在 [2, § 3] 中，我们已经讨论了李代数之间的测度。现在我们将此定义推广到 Leibniz 代数。

定义 5.1. 设 $(\mathfrak{g},[\quad])$ 和 $(\mathfrak{g}',[\ ,\ ]')$ 为李代数（分别为 *Leibniz* 代数）。从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}'$ 的李代数（分别为 *Leibniz* 代数）余代数测量(C,Ψ) 由一个余交换 K-余代数 C 和一个 K-线性映射 $\Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$ 组成，并满足

$$\Psi(x)([\alpha,\beta]) = [\Psi(x_{(1)})(\alpha), \Psi(x_{(2)})(\beta)]' \qquad \alpha,\beta \in \mathfrak{g}, x \in C \tag{5.2}$$

其中，C 上的余乘法 Δ_C 用 *Sweedler*记号表示为 $\Delta_C(x) = x_{(1)} \otimes x^{(2)}$，对每个 $x \in C$ 省略求和符号。

对于李代数 g，我们知道，经典的切瓦利-埃伦伯格复形$CE_\bullet$(g)定义为令$CE_n(\mathfrak{g}) := \wedge^n\mathfrak{g}$，其中$n \geq 0$，其微分定义为

$$d_{CE} : CE_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow CE_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad d_{CE}(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) := \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{i+j+1}[\alpha_i,\alpha_j] \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_j \wedge \ldots \wedge \alpha_n \tag{5.3}$$

其中，(5.3) 中的 $\hat{\alpha}_i$ 表示从序列中删去 α_i 。$\mathfrak{g}$ 的李代数同调记作$H_\bullet(\mathfrak{g})$，是切瓦利-埃伦伯格复形$CE_\bullet(\mathfrak{g})$的同调。

设 $\Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$ 是李代数之间的余代数测量。对于每个 $x \in C$，我们在 [2, 命题 3.3]中证明，这些映射

$$CE_n^\Psi(x) : CE_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow CE_n(\mathfrak{g}') \qquad \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \mapsto x(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) := x_{(1)}(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge x_{(n)}(\alpha_n) \tag{5.4}$$

确定了切瓦利-埃伦伯格复形之间的映射。由此得到李代数同调上的映射：对于每个 $x \in C$，$H_\bullet^\Psi(x) : H_\bullet(\mathfrak{g}) \longrightarrow H_\bullet(\mathfrak{g}')$。

对于任意李代数 g，都有对角映射 $\delta_\mathfrak{g} : g \longrightarrow g \oplus g$，由 $\alpha \mapsto (\alpha, \alpha)$ 给出。为了区分这两个分量，我们常写作 $\delta_\mathfrak{g}(\alpha) = (\alpha, \alpha) = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$。于是，$\delta_\mathfrak{g}$ 是李代数的映射；利用典范同构 $\wedge^n(g \oplus g) = \sum \wedge^p g \otimes \wedge^q g$，众所周知（例如参见 [17, § 10.1.5]），我们有余乘法 $p+q=n$

$$\Delta_\mathfrak{g} : H_\bullet(\mathfrak{g}) \longrightarrow H_\bullet(\mathfrak{g}) \otimes H_\bullet(\mathfrak{g}) \tag{5.5}$$

关于李代数同调。本节的第一个结果是，由余代数测量诱导的李代数同调上的映射与这一余乘法相容。

命题 5.2. 设 C 是余交换余代数，且 $\Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathfrak{g},\mathfrak{g}')$ 是从$\mathfrak{g}$ 到$\mathfrak{g}'$的李代数测量。那么对每个 $x \in C$，下图交换

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Delta_\mathfrak{g}} & H_\bullet(\mathfrak{g}) \otimes H_\bullet(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle H_\bullet^\Psi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_\bullet^\Psi(x_{(1)}) \otimes H_\bullet^\Psi(x_{(2)})} \\ H_\bullet(\mathfrak{g}') & \xrightarrow{\Delta_{\mathfrak{g}'}} & H_\bullet(\mathfrak{g}') \otimes H_\bullet(\mathfrak{g}') \end{array} \tag{5.6}$$

其中，我们通过省略求和符号，将余乘法 $\Delta_C(x) := x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ 记作。

证明。取 $x \in C$ 且 $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \in CE_n(\mathfrak{g})$。根据定义，有 $\wedge^n\delta_\mathfrak{g}(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) = ((\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}))$。考虑在 $\wedge^n\delta_\mathfrak{g}(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ 的展开中出现的一项 $(\alpha^{(i_1)}1, \ldots, \alpha^{(i_n)}n)$，其中 p 项位于第一分量，q 项位于第二分量。特别地，$p + q = n$。令 σ 为一个置换，它重新排列 $(\alpha^{(i_1)}1, \ldots, \alpha^{(i_n)}n)$，使前 p 项位于第一分量，其余 q 项位于第二分量。于是，根据典范映射 $\wedge^n(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}) \longrightarrow \wedge^p\mathfrak{g} \otimes \wedge^q\mathfrak{g}$ 的定义，这些映射共同确定同构$\wedge^n(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus \wedge^p\mathfrak{g} \otimes \wedge^q\mathfrak{g}$，展开 $\wedge^n\delta_\mathfrak{g}(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ 时出现的项 $(\alpha^{(i_1)}1, \ldots, \alpha^{(i_n)}n)$ 映射为 $\mathrm{sgn}(\sigma)(\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \wedge p+q=n \ldots \wedge \alpha_{\sigma^{-1}(p)}) \otimes (\alpha_{\sigma^{-1}(p+1)} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}) \in \wedge^p\mathfrak{g} \otimes \wedge^q\mathfrak{g}$。注意到

$$\begin{aligned} &sgn(\sigma)x_{(1)}(\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\sigma^{-1}(p)}) \otimes x_{(2)}(\alpha_{\sigma^{-1}(p+1)} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}) \\ &= sgn(\sigma)(x_{(1)}(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}) \wedge \ldots \wedge x_{(p)}(\alpha_{\sigma^{-1}(p)})) \otimes (x_{(p+1)}(\alpha_{\sigma^{-1}(p+1)}) \wedge \ldots \wedge x_{(n)}(\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)})) \end{aligned} \tag{5.7}$$

由于C 是余交换的，显然，(5.7) 中的项等于

$$sgn(\sigma)(x_{\sigma^{-1}(1)}(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}) \wedge \ldots \wedge x_{\sigma^{-1}(p)}(\alpha_{\sigma^{-1}(p)})) \otimes (x_{\sigma^{-1}(p+1)}(\alpha_{\sigma^{-1}(p+1)}) \wedge \ldots \wedge x_{\sigma^{-1}(p+q)}(\alpha_{\sigma^{-1}(p+q)})) \in \wedge^p\mathfrak{g}' \otimes \wedge^q\mathfrak{g}' \tag{5.8}$$

出现在 $\wedge^n\delta_{\mathfrak{g}'}(x(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)) = \wedge^n\delta_{\mathfrak{g}'}(x^{(1)}(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge x^{(n)}(\alpha_n))$ 的展开式中的项。逐项比较即可得出结果。□

现在令 $\mathfrak{g} := gl(A)$ 为矩阵在 A 上构成的李代数。我们用 $\Delta := \Delta_\mathfrak{g} : H_\bullet(gl(A)) \longrightarrow H_\bullet(gl(A)) \otimes H_\bullet(gl(A))$ 表示 $H_\bullet(\mathfrak{g}) = H_\bullet(gl(A))$ 上由对角映射诱导的余乘法，如 (5.5) 所示。此外，我们知道（见 [17, § 10.2]），$H_\bullet(gl(A))$ 是一个分次Hopf代数，并且存在一个同构

$$Prim(H_\bullet(gl(A))) := \{\alpha \in H_\bullet(\mathfrak{g}) = H_\bullet(gl(A)) \mid \Delta(\alpha) = 1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1\} \cong HC_{\bullet-1}(A) \tag{5.9}$$

它将霍普夫代数 $H_\bullet(gl(A))$ 的本原部分 $Prim(H_\bullet(gl(A)))$ 与 A 的循环同调（次数平移 1）联系起来。类似地，我们令 $\mathfrak{g}'$ 为李代数 $\mathfrak{g}' := gl(A')$，并令 $\Delta' := \Delta_{\mathfrak{g}'}$ 为 $H_\bullet(gl(A'))$ 上的余乘法。

现在设 C 是一个余交换余代数，并设 $\Phi : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, A')$ 是代数之间的一个测量。如 [2, §3]，中所述，我们可以验证，这会诱导出一个从 gl(A) 到 gl(A′) 的李代数测量（分别地，从每个 $\mathrm{gl}_r(A)$ 到 $\mathrm{gl}_r(A')$），记作 $\mathrm{gl}(\Phi) : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathrm{gl}(A), \mathrm{gl}(A'))$（分别地，$\mathrm{gl}_r(\Phi) : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathrm{gl}_r(A), \mathrm{gl}_r(A'))$）。相应地，我们有诱导映射

$$H_\bullet^{gl(\Phi)}(x) : H_\bullet(gl(A)) \longrightarrow H_\bullet(gl(A')) \qquad H_\bullet^{gl_r(\Phi)}(x) : H_\bullet(gl_r(A)) \longrightarrow H_\bullet(gl_r(A')) \qquad x \in C \tag{5.10}$$

由命题 5.2 可知，(5.10) 中的映射限制为霍普夫代数 $H_\bullet(gl(A))$ 和 $H_\bullet(gl(A'))$ 的本原部分之间的映射，我们仍将其记为 $H_\bullet^{gl(\Phi)}(x) : Prim(H_\bullet(gl(A))) \longrightarrow Prim(H_\bullet(gl(A')))$。我们的下一个目标是证明，(5.9) 中的同构与测量 Φ 所诱导的映射相容。由 [17, § 10.2.3], 可知

$$\theta_{n,r}^A : \wedge^{n+1} gl_r(A) \longrightarrow \tilde{C}_n(M_r(A)) \qquad \theta_{n,r}^A(\alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(\alpha_0, \alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}) \tag{5.11}$$

˜确定了从李代数$gl_r(A)$的切瓦利-埃伦伯格复形到复形$C_\bullet(M_r(A))$（记号见注 3.2）的一个态射，该复形用于计算$M_r(A)$的循环同调。我们现在有如下结果。

引理 5.3. 对每个 $x \in C$ 与 $r \geq 1$，下列图表交换

$$\begin{array}{ccc} CE_{n+1}(gl_r(A)) = \wedge^{n+1} gl_r(A) & \xrightarrow{\theta_{n,r}^A} & \tilde{C}_n(M_r(A)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle CE_{n+1}^{gl_r(\Phi)}(x)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{C}_n^{M_r(\Phi)}(x)} \\ CE_{n+1}(gl_r(A')) = \wedge^{n+1} gl_r(A') & \xrightarrow{\theta_{n,r}^{A'}} & \tilde{C}_n(M_r(A')) \end{array} \tag{5.12}$$

其中 $M_r(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(M_r(A), M_r(A'))$ 表示由 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$诱导的矩阵代数测量

. 证明. 我们考虑 $\alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \in \wedge^{n+1} gl_r(A)$ 与 $x \in C$。由于 C 是余交换的，我们观察到

$$\begin{aligned} (\tilde{C}_n^{M_r(\Phi)}(x) \circ \theta_{n,r}^A)(\alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) &= \tilde{C}_n^{M_r(\Phi)}(x)\left(\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(\alpha_0, \alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)})\right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(x_{(1)}(\alpha_0), x_{(2)}(\alpha_{\sigma(1)}), \ldots, x_{(n+1)}(\alpha_{\sigma(n)})) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(x_{(1)}(\alpha_0), x_{\sigma(1)+1}(\alpha_{\sigma(1)}), \ldots, x_{\sigma(n)+1}(\alpha_{\sigma(n)})) \\ &= (\theta_{n,r}^{A'} \circ CE_{n+1}^{gl_r(\Phi)}(x))(\alpha_0 \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \end{aligned} \tag{5.13}$$

这就证明了该结果。 □

根据 [17, § 1.2.1, § 2.2.10], , 我们知道，导出循环同调莫里田不变性的复形拟同构 $HC_\bullet(M_r(A)) \cong HC_\bullet(A)$ 是由广义迹映射诱导的

$$tr_{n,r}^A : \tilde{C}_n(M_r(A)) \longrightarrow \tilde{C}_n(A) \qquad (\alpha \otimes \beta \otimes \ldots \otimes \eta) \mapsto \sum \alpha_{i_0 i_1} \otimes \beta_{i_1 i_2} \otimes \ldots \otimes \eta_{i_n i_0} \tag{5.14}$$

其中，求和遍及由矩阵 $\alpha, \beta, \ldots, \eta$ 的元素构成的所有可能元组 $(i_0, \ldots, i_n)$。我们可以直接验证，式 (5.14) 中的映射与代数的测度 Φ: $C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 相容，即对于每个 $x \in C$，$\tilde{C}_n^\Phi(x) \circ tr_{n,r}^A = tr^{A'}{}_{n,r} \circ \tilde{C}^{M_r(\Phi)n}(x)$。现在我们可以证明式 (5.9) 中的同构与测度相容。

定理 5.4。 设 C 是一个余交换 K-余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 是代数之间的测量。对于每个 $x \in C$，下图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} Prim(H_\bullet(gl(A))) & \xrightarrow{\cong} & HC_{\bullet-1}(A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H_\bullet^{gl(\Phi)}(x)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle HC_{\bullet-1}^\Phi(x)} \\ Prim(H_\bullet(gl(A'))) & \xrightarrow{\cong} & HC_{\bullet-1}(A') \end{array} \tag{5.15}$$

其中，水平箭头中的同构如 （5.9）所给出。

证明。 由引理 5 .3 及上述讨论可知，对于 $x \in C$ 和 $r \geq 1$，我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc} CE_{n+1}(gl_r(A)) = \wedge^{n+1} gl_r(A) & \xrightarrow{\theta^A_{n,r}} & \tilde{C}_n(M_r(A)) & \xrightarrow{tr^A_{n,r}} & \tilde{C}_n(A) \\ \downarrow{\scriptstyle CE^{gl_r(\Phi)}_{n+1}(x)} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{C}^{M_r(\Phi)}_n(x)} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{C}^{\Phi}_n(x)} \\ CE_{n+1}(gl_r(A')) = \wedge^{n+1} gl_r(A') & \xrightarrow{\theta^{A'}_{n,r}} & \tilde{C}_n(M_r(A')) & \xrightarrow{tr^{A'}_{n,r}} & \tilde{C}_n(A') \end{array} \tag{5.16}$$

显然，当 r $\longrightarrow \infty$ 时，(5.16) 中的交换性传递到余极限。我们知道（见 [17, § 10.2.4]），映射 H•(gl(A)) $\longrightarrow$ HC•−1(A) 在限制到 (5.9) 中的同构时，是由映射 $\mathrm{tr}^A_{n,r} \circ \theta^A_{n,r}$ 在 r $\longrightarrow \infty$ 时的余极限得到的。此外，我们此前已经指出，映射 $H^{gl(\Phi)}_\bullet$ (x) : H•(gl(A)) $\longrightarrow$ H•(gl(A′)) 限制在 Hopf 代数 H•(gl(A)) 和 H•(gl(A′)) 的本原部分上。结论现已显然。□

在本节的其余部分，我们的目标是证明一个类似于定理 5.4 的结果，其中涉及霍赫希尔德同调和莱布尼茨同调。因此，在本节余下部分，设 (g, [ ]) 和 (g′, [,]′) 为 Leibniz 代数。-我们回顾一下，g 的 Leibniz 同调 $HL_\bullet(\mathfrak{g})$ 可通过复形$CL_\bullet(\mathfrak{g})$ 计算（见 Loday [18, § 6.3]），该复形通过令 $CL_n(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}^{\otimes n}$ 并配以如下微分来定义

$$d_{CL} : CL_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\otimes n} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\otimes n-1} = CL_{n-1}(\mathfrak{g}) \qquad d_{CL}(\alpha_1, ..., \alpha_n) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, [\alpha_i, \alpha_j], ..., \hat{\alpha}_j, ..., \alpha_n) \tag{5.17}$$

对于分次向量空间 M = $\oplus_{i \geq 0} M_i$、N = $\oplus_{i \geq 0} N_i$，其中 $M_0 = N_0 = K$，我们回顾一下（见 [18, § 6.7]），张量积 M ⊠ N = $\oplus_{i \geq 0}(M \boxtimes N)_i$，它在次数 n 上由形如 $X_{i_1} \otimes Y_{i_2} \otimes X_{i_3} \otimes Y_{i_4} \otimes ...$ 的 2^n 分量的直和给出，其中 X =M 且 Y =N，或者 X = N 且 Y =M，满足 $i_j \geq 1$ 且 $\sum j\, i\, j$ =n。与李代数同调一样，莱布尼茨代数的对角映射 g $\longrightarrow$ g ⊕ g 导出了莱布尼茨同调上的余乘法 $\Delta_\mathfrak{g}$: HL•(g) $\longrightarrow$ HL•(g) ⊠ HL•(g)（见 Loday [18, §6.9]）。我们首先需要以下关于莱布尼茨代数测度的一般结果。

命题 5.5。 设(g, [ ]) 和(g′, [,]′) 是莱布尼茨代数。设 C 是一个余交换余代数，并设 $\Psi : C \longrightarrow Hom_K(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ 是莱布尼茨代数之间的一个测量。对于每个 $x \in C$，这些映射

$$CL^\Psi_n(x) : CL_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow CL_n(\mathfrak{g}') \qquad (\alpha_1, ..., \alpha_n) \mapsto x(\alpha_1, ..., \alpha_n) := (x_{(1)}(\alpha_1), ..., x_{(n)}(\alpha_n)) \tag{5.18}$$

从 $CL_\bullet(\mathfrak{g})$ 到 $CL_\bullet(\mathfrak{g}')$诱导出一个复形态射。特别地，对于每个 $x \in C$，在莱布尼茨同调上存在一个诱导映射 $HL^\Psi_\bullet(x) : HL_\bullet$ (g) $\longrightarrow HL_\bullet(\mathfrak{g}')$。此外，对于每个 $x \in C$，下图交换

$$\begin{array}{ccc} HL_\bullet(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\Delta_\mathfrak{g}} & HL_\bullet(\mathfrak{g}) \boxtimes HL_\bullet(\mathfrak{g}) \\ \downarrow{\scriptstyle HL^\Psi_\bullet(x)} & & \downarrow{\scriptstyle HL^\Psi_\bullet(x_{(1)}) \boxtimes HL^\Psi_\bullet(x_{(2)})} \\ HL_\bullet(\mathfrak{g}') & \xrightarrow{\Delta_{\mathfrak{g}'}} & HL_\bullet(\mathfrak{g}') \boxtimes HL_\bullet(\mathfrak{g}') \end{array} \tag{5.19}$$

其中，我们用 $\Delta_C(x) := x_{(1)} \otimes x^{(2)}$ 表示余乘法，并省略求和符号。

证明。 我们考虑 $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathfrak{g}^{\otimes n}$。由于$C$是余交换的，我们看到，对于$x \in C$，有 e

$$\begin{aligned} x(d_{CL}(\alpha_1, ..., \alpha_n)) &= x\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j (\alpha_1, ..., [\alpha_i, \alpha_j], \alpha_{i+1}, ..., \hat{\alpha}_j, ..., \alpha_n) \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j (x_{(1)}(\alpha_1), ..., x_{(i)}([\alpha_i, \alpha_j]), x_{(i+1)}(\alpha_{i+1}), ..., \hat{\alpha}_j, ..., x_{(n-1)}(\alpha_n)) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j (x_{(1)}(\alpha_1), ..., [x_{(i)}(\alpha_i), x_{(i+1)}(\alpha_j)], x_{(i+2)}(\alpha_{i+1}), ..., \hat{\alpha}_j, ..., x_{(n)}(\alpha_n)) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j (x_{(1)}(\alpha_1), ..., [x_{(i)}(\alpha_i), x_{(j)}(\alpha_j)], x_{(i+1)}(\alpha_{i+1}), ..., \hat{\alpha}_j, ..., x_{(n)}(\alpha_n)) \\ &= d_{CL}(x_{(1)}(\alpha_1), ..., x_{(n)}(\alpha_n)) \end{aligned} \tag{5.20}$$

由此可知，每个$CL_\bullet^\Psi(x) : CL_\bullet(\mathfrak{g}) \longrightarrow CL_\bullet(\mathfrak{g}')$都是复形态射，并在同调群上诱导映射。(5.19) 的交换性可用类似于命题 5.2 的方式验证。□

现在令 $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(A)$，$\mathfrak{g}' := \mathfrak{gl}(A')$，以及 $\Psi := \mathfrak{gl}(\Phi) : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{gl}(A), \mathfrak{gl}(A'))$。显然，$\mathfrak{gl}(\Phi)$ 也是莱布尼茨代数的一个测量。我们知道，$\mathfrak{gl}(A)$ 的莱布尼茨同调 $HL_\bullet(\mathfrak{gl}(A))$ 构成一个霍普夫代数（见 [8, § III.2]）。由 (5.19) 的交换性可知，对于 $x \in C$，映射 $HL_\bullet^{\mathfrak{gl}(\Phi)}(x) : HL_\bullet(\mathfrak{gl}(A)) \longrightarrow HL_\bullet(\mathfrak{gl}(A'))$ 在这些霍普夫代数各自的本原部分上限制为 $HL_\bullet^{\mathfrak{gl}(\Phi)}(x) : \mathrm{Prim}(HL_\bullet(\mathfrak{gl}(A))) \longrightarrow \mathrm{Prim}(HL_\bullet(\mathfrak{gl}(A')))$。现在我们将证明这些同构（见 [7, 定´理`III.3]）

$$Prim(HL_\bullet(gl(A))) \cong HH_{\bullet-1}(A) \tag{5.21}$$

与测度相容。这需要几个步骤。首先，我们回顾（见 [17, § 10.2.10]），复形$CL_\bullet(gl_r(A))$ 有一个由满同态确定的商$CL_\bullet(gl(A))$

$$CL_n(gl_r(A)) := (gl_r(A))^{\otimes n} \longrightarrow \overline{CL}_n(gl_r(A)) = (gl_r(A))^{\otimes n}_{gl_r(K)} \tag{5.22}$$

其目标是余不变量 $(gl_r(A))^{\otimes n}{}_{gl_r(K)} \cong ((gl_r(K))^{\otimes n} \otimes A^{\otimes n})_{gl_r(K)}$，它由$gl_r(K)$ 对 $(gl_r(K))^{\otimes n}$ 的伴随作用与对$A^{\otimes n}$ 的平凡作用共同产生。因此，(5.22) 中的映射与测度相容，并且对每个$x \in C$，我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} CL_n(gl_r(A)) = (gl_r(A))^{\otimes n} & \longrightarrow & \overline{CL}_n(gl_r(A)) = (gl_r(A))^{\otimes n}_{gl_r(K)} \\ {\scriptstyle CL_n^{\Psi_r}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{CL}_n^{\Psi_r}(x)} \\ CL_n(gl_r(A')) = (gl_r(A'))^{\otimes n} & \longrightarrow & \overline{CL}_n(gl_r(A')) = (gl_r(A'))^{\otimes n}_{gl_r(K)} \end{array} \tag{5.23}$$

其中 $\Psi_r := \mathfrak{gl}_r(\Phi) : C \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{gl}_r(A),\mathfrak{gl}_r(A'))$ 是由 Φ 诱导的莱布尼茨代数测量。由于 (5.22) 中的映射是满同态，因此 (5.23) 中的映射 $\mathrm{CL}^{\Psi_r}{}_n(x)$ 确定了一个复形态射 $\mathrm{CL}_\bullet^{\Psi_r}(x) : \mathrm{CL}_\bullet(\mathfrak{gl}_r(A)) \longrightarrow \overline{\mathrm{CL}}(\mathfrak{gl}_r(\overline{A'}))$。我们还知道（见 [17, § 10.6.6]），(5.23) 中的水平箭头诱导复形的拟同构。因此，莱布尼茨同调 $HL_\bullet(\mathfrak{gl}(A))$ 可以通过取复形 $CL_\bullet(\mathfrak{gl}_r(A))$ 在 $r \longrightarrow \infty$ 时的余极限来计算。现在我们回顾（见 [17, § 10.6.7]）以下同构（当 $r \geq n$）

$$\Theta_n^A : \overline{CL}_n(gl_r(A)) = (gl_r(A))^{\otimes n}_{gl_r(K)} = ((gl_r(K))^{\otimes n} \otimes A^{\otimes n})_{gl_r(K)} \xrightarrow{\cong} K[S_n] \otimes A^{\otimes n} \tag{5.24}$$

由此得到一个复形 $L_\bullet(A)$，定义为令 $L_n(A) := K[S_{n+1}] \otimes A^{\otimes n+1}$，其微分由 (5.24) 中的同构确定。由此可得 $HL_\bullet(gl(A)) \cong H_{\bullet-1}(L_\bullet(A))$。由 (5.23) 及 (5.24) 中的同构，我们得到诱导映射$H_{n-1}^\Phi(x) : H_{n-1}(L_\bullet(A)) \longrightarrow H_{n-1}(L_\bullet(A'))$，它们适合交换图

$$\begin{array}{ccc} HL_n(gl(A)) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(L_\bullet(A)) \\ {\scriptstyle HL_n^\Psi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}^\Phi(x)} \\ HL_n(gl(A')) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(L_\bullet(A')) \end{array} \tag{5.25}$$

现在令 U_n 表示对称群 S_n中轮换 (1, 2, ..., n) 的共轭类。对于任意 $\sigma \in U_n$，令 $\omega(\sigma)$ 为 S_n 中唯一满足 $\sigma = \omega(\sigma)(1, 2, ..., n)\omega(\sigma)^{-1}$ 且 $\omega(\sigma)(1) = 1$ 的元素。与之前一样，我们知道 S_n 在 $A^{\otimes n}$ 上有一个左作用，定义为 $\tau \cdot (a_1, ..., a_n) := (a_{\tau^{-1}(1)}, ..., a_{\tau^{-1}(n)})$，其中 $\tau \in S_n$ 且 $(a_1, ..., a_n) \in A^{\otimes n}$。

现在我们回顾预单纯模 $V_\bullet(A)$（见 [7]），其定义为令 $V_n(A) := K[U_{n+1}] \otimes A^{\otimes n+1}$。与第 2 节一样，我们用 d_i 表示单纯模$C_\bullet(A)$ 的面映射。首先，我们回顾（见 Cuvier [8, Th´eor`eme III.1]），$K[U_{n+1}]$ 可以赋予预单纯模结构；并且，为简便起见，我们仍用 d_i 表示其面映射。于是，预单纯模 $V_\bullet(A)$ 的面映射（仍记作 d_i）由下式确定（见 [8,第三章]）

$$d_i : \ V_n(A) = K[U_{n+1}] \otimes A^{\otimes n+1} \longrightarrow K[U_n] \otimes A^{\otimes n} = V_{n-1}(A) \qquad (\sigma \otimes (a_0, ..., a_n)) \mapsto d_i\sigma \otimes (\omega(d_i\sigma) \cdot d_i(\omega(\sigma)^{-1} \cdot (a_0, ..., a_n))) \tag{5.26}$$

预单纯模 $V_\bullet(A)$ 的同调通常记作 $HZ_\bullet(A)$（见 [7]）。此外，我们知道，典范嵌入 $\iota_n^A\colon C_n(A) = A^{\otimes n+1} \longrightarrow V_n(A) = K[U_{n+1}]\otimes A^{\otimes n+1}$ 诱导出复形之间的拟同构，而 $\iota_\bullet^A\colon C_\bullet(A) \longrightarrow V_\bullet(A)$ 有一个回缩（见 [7,定理 III.4]）

$$\zeta_n^A : V_n(A) \longrightarrow C_n(A) \qquad \sigma\otimes(a_0,...,a_n) \mapsto sgn(\omega(\sigma))\omega(\sigma)^{-1}\cdot(a_0,...,a_n) \tag{5.27}$$

现在得到如下结果。

命题 5.6。 设 C 是余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是代数之间的一个测度。对每个 $x \in C$，映射

$$V_n^\Phi(x) : V_n(A) \longrightarrow V_n(A') \qquad \sigma\otimes(a_0,...,a_n) \mapsto \sigma\otimes x(a_0,...,a_n) = \sigma\otimes(x_{(1)}(a_0),...,x_{(n+1)}(a_n)) \tag{5.28}$$

诱导出预单纯模的一个态射。此外，以下图表可交换

$$\begin{array}{ccc} C_n(A) & \xrightarrow{\iota_n^A} & V_n(A) \\ {\scriptstyle C_n^\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle V_n^\Phi(x)} \\ C_n(A') & \xrightarrow{\iota_n^{A'}} & V_n(A') \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} V_n(A) & \xrightarrow{\zeta_n^A} & C_n(A) \\ {\scriptstyle V_n^\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_n^\Phi(x)} \\ V_n(A') & \xrightarrow{\zeta_n^{A'}} & C_n(A') \end{array} \tag{5.29}$$

证明。 由于C 是余交换的，我们注意到

$$x(\tau\cdot(a_0,...,a_n)) = \tau\cdot(x(a_0,...,a_n)) \tag{5.30}$$

对于任意 $x \in C$、$(a_0,...,a_n) \in C_n(A)$ 以及任意置换 $\tau \in S_{n+1}$，都成立。我们已经知道，这些测度与单纯模$C_\bullet(A)$ 和 $C_\bullet(A')$ 的面映射相容。根据 (5.26) 和 (5.27) 中的定义，结论显然成立。

□

T以下结果现在表明，(5.21) 中的同构与测度相容 gs.

定理 5.7。 设 C 是余交换 K-余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$ 是代数之间的一个测量。对每个 $x \in C$，下图交换

$$\begin{array}{ccc} Prim(HL_\bullet(gl(A))) & \xrightarrow{\cong} & HH_{\bullet-1}(A) \\ {\scriptstyle HL_\bullet^{gl(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HH_{\bullet-1}^\Phi(x)} \\ Prim(HL_\bullet(gl(A'))) & \xrightarrow{\cong} & HH_{\bullet-1}(A') \end{array} \tag{5.31}$$

其中水平同构由(5.21)给出。

证明。 我们之前已经注意到，存在复形的拟同构$C_\bullet(A) \longrightarrow V_\bullet(A)$ 和$C_\bullet(A') \longrightarrow V_\bullet(A')$。由 (5.25) 和命题 5.6，现在对每个 $x \in C$，都有交换图

$$\begin{array}{ccc} HH_n(A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V_\bullet(A)) = HZ_n(A) \\ {\scriptstyle HH_n^\Phi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle HZ_n^\Phi(x)} \\ HH_n(A') & \xrightarrow{\cong} & H_n(V_\bullet(A')) = HZ_n(A') \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} HL_{n+1}(gl(A)) & \xrightarrow{\cong} & H_n(L_\bullet(A)) \\ {\scriptstyle HL_{n+1}^\Psi(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_n^\Phi(x)} \\ HL_{n+1}(gl(A')) & \xrightarrow{\cong} & H_n(L_\bullet(A')) \end{array} \tag{5.32}$$

典范嵌入 $V_n(A) = K[U_{n+1}]\otimes A^{\otimes n+1} \hookrightarrow K[S_{n+1}]\otimes A^{\otimes n+1} = L_n(A)$ 显然与测量 Φ 所诱导的映射相容。由 [8, § III.2], 可知，将 $V_\bullet(A)$ 限制到子复形 $V_\bullet(A) = K[U_{\bullet+1}]\otimes A^{\otimes\bullet+1} \subseteq K[S_{\bullet+1}]\otimes A^{\otimes\bullet+1} = L_\bullet(A)$ 所诱导的 $V_\bullet(A)$ 上的映射，与 $V_\bullet(A)$ 上的微分一致。由于这一限制确定了 (5.21) 中的同构 $HH_{\bullet-1}(A) \cong Prim(HL_\bullet(gl(A)))$，因此图表 (5.31) 交换。□

6 测度　　李同调与莱布尼茨同调上的乘积结构

我们继续讨论余交换代数 C 以及测量 $\Phi: C \longrightarrow Hom_K(A,A')$，它作用于代数 A 和 A' 之间。如第 5 节所述，这诱导出李代数之间的测量 $gl(\Phi): C \longrightarrow Hom_K(gl(A),gl(A'))$，同时也诱导出莱布尼茨代数之间的测量。

对于李代数 gl(A)，我们考虑其切瓦利-埃伦伯格复形 $CE_\bullet(\mathrm{gl}(A))$，其中 $CE_n(\mathrm{gl}(A)) := \wedge^n \mathrm{gl}(A)$。对于每个 $r \geq 1$，李代数 $\mathrm{gl}_r(K)$ 嵌入为 $\mathrm{gl}_r(A)$ 的李子代数，因此在 $\mathrm{gl}_r(A)$ 上具有伴随作用（见 [17, § 10.2.9]）。我们将 $CE_n(\mathrm{gl}_r(A)) := (\wedge^n \mathrm{gl}_r(A))_{gl_r}(K)$ 记为该伴随作用的余不变量空间。我们知道（见 [17, § 10.2.9]），$CE_\bullet(\mathrm{gl}_r(A))$ 上的微分下降到 $CE_\bullet(\mathrm{gl}_r(A))$，并且这些满同态

$$CE_n(gl_r(A)) \longrightarrow \overline{CE}_n(gl_r(A)) \qquad n \geq 1 \tag{6.1}$$

确定了复形的拟同构。我们将$CE_\bullet(gl(A))$ 记为复形$CE_\bullet(\overline{gl_r(A)})$ 在$r \longrightarrow \infty$ 时的余极限。

引理 6.1. 测量 $\Phi: C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 对每个 $x \in C$ 都诱导出复形的态射$\overline{CE}_\bullet^{gl(\Phi)}(x): CE_\bullet(gl(A)) \longrightarrow CE_\bullet(gl(A'))$。此外，这些态射构成如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} CE_\bullet(gl(A)) & \longrightarrow & \overline{CE}_\bullet(gl(A)) \\ {\scriptstyle CE_\bullet^{gl(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{CE}_\bullet^{gl(\Phi)}(x)} \\ CE_\bullet(gl(A')) & \longrightarrow & \overline{CE}_\bullet(gl(A')) \end{array} \tag{6.2}$$

对每个 $x \in C$，其中 (6.2) 中的水平箭头由(6.1)确定。

证明。 对每个 $r \geq 1$，测量 Φ 诱导出一个李代数之间的测量 $gl_r(\Phi): C \longrightarrow Hom_K(gl_r(A),gl_r(A'))$。我们知道$CE_n(gl_r(A))$也可以描述为余不变量空间（详情见 [17, § 10.2.10] ）

$$\overline{CE}_n(gl_r(A)) := (\wedge^n gl_r(A))_{gl_r(K)} = ((gl_r(K)^{\otimes n})_{gl_r(K)} \otimes A^{\otimes n})_{S_n} \tag{6.3}$$

这里，(6.3) 右侧出现的对称群 S_n 的作用是通过置换变量并乘以符号实现的，而 (6.3) 中出现的 $A^{\otimes n}$ 部分上的 gl_r (K) 作用是平凡的。现在显然，映射 $CE^{gl_r}(\Phi)\mathrm{n}(x): CE_n(\mathrm{gl}_r(A)) \longrightarrow CE_n(\mathrm{gl}_r(A'))$ 可降为 $CE^{gl_r}(\Phi)\ \mathrm{n}\ (x): CE_n(\mathrm{gl}_r(A)) \longrightarrow CE_n(\mathrm{gl}_r(A'))$。我们已知每个 $CE^{gl_r}(\Phi)_\bullet\ (x): CE_\bullet(\mathrm{gl}_r(A)) \longrightarrow CE_\bullet(\mathrm{gl}_r(A'))$ 都是复形态射。由于 (6.1) 中的映射 CE_n $(\mathrm{gl}_r(A)) \longrightarrow CE_n(\mathrm{gl}_r(A))$ 是满同态，因此映射 $CE^{gl_r}(\Phi)\ \mathrm{n}\ (x)$ 与 $CE_\bullet(\mathrm{gl}_r(A))$ 和$CE_\bullet(\mathrm{gl}_r(A'))$ 上的微分相容。令 $r \longrightarrow \infty$ 取余极限，可得图表 (6.2) 交换。□

复形$CE_\bullet(\overline{gl(A)}) = (\wedge^\bullet gl(A))_{gl(K)}$ 还带有代数结构（见 [17, § 10.2.13]），其乘积由以下映射确定

$$\begin{array}{c} (\wedge^p gl(A))_{gl(K)} \otimes (\wedge^q gl(A))_{gl(K)} \longrightarrow (\wedge^{p+q}(gl(A) \oplus gl(A)))_{gl(K)} \xrightarrow{\wedge^{p+q}(-\oplus-)_{gl(K)}} (\wedge^{p+q} gl(A))_{gl(K)} \\ (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p) \otimes (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q) \mapsto ((\alpha_1 \oplus 0) \wedge \ldots \wedge (\alpha_p \oplus 0) \wedge (0 \oplus \beta_1) \wedge \ldots \wedge (0 \oplus \beta_q)) = (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q) \end{array} \tag{6.4}$$

对于 p、q ≥ 0。式（6.4）中的第一个映射由典范态射 $(\wedge^p \mathrm{gl}(A)) \otimes (\wedge^q \mathrm{gl}(A)) \longrightarrow (\wedge^{p+q}(\mathrm{gl}(A) \oplus \mathrm{gl}(A)))$ 诱导，而第二个映射则由 [17, § 10.2.12] 中所述的运算 $\oplus: \mathrm{gl}(A) \times \mathrm{gl}(A) \longrightarrow \mathrm{gl}(A)$ 诱导。在同调层面，式（6.4）中的乘积使 $H_\bullet(\mathrm{gl}(A)) = H_\bullet(CE_\bullet(\mathrm{gl}(A))) = H_\bullet(CE_\bullet(\mathrm{gl}(A)))$ 成为一个代数。现在我们准备证明，测量 $\Phi: C \longrightarrow \overline{\mathrm{Hom}}_K(A, A')$ 在代数 $H_\bullet(\mathrm{gl}(A))$ 与 $H_\bullet(\mathrm{gl}(A'))$ 之间诱导出一个测量。

命题 6.2. 设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi: C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 是代数之间的测量。那么，以下

$$H_\bullet^{gl(\Phi)}: C \longrightarrow Hom_K(H_\bullet(gl(A)), H_\bullet(gl(A'))) \qquad x \mapsto H_\bullet^{gl(\Phi)}(x): H_\bullet(gl(A)) \longrightarrow H_\bullet(gl(A')) \tag{6.5}$$

确定了从 $H_\bullet(gl(A))$ 到 $H_\bullet(gl(A'))$的代数测度。

证明。 设$x \in C$。由 (6.1) 中的拟同构以及图表 (6.2) 的交换性可知，映射$H_\bullet^{gl(\Phi)}(x) : H_\bullet(gl(A)) \longrightarrow H_\bullet(gl(A'))$ 也可以由映射 $CE_\bullet^{gl(\Phi)}(x)$ 诱导。我们考虑 $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p \in CE_p(gl(A))$ 和$\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q \in CE_q(gl(A))$。由我们已有的事实，结论显而易见:

$$\begin{aligned} \overline{CE}_{p+q}^{gl(\Phi)}(x)((\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p)(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q)) &= \overline{CE}_{p+q}^{gl(\Phi)}(x)(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q) \\ &= x_{(1)}(\alpha_1) \wedge ... \wedge x_{(p)}(\alpha_p) \wedge x_{(p+1)}(\beta_1) \wedge ... \wedge x_{(p+q)}(\beta_q) \\ &= \overline{CE}_p^{gl(\Phi)}(x_{(1)})(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_p)\overline{CE}_q^{gl(\Phi)}(x_{(2)})(\beta_1 \wedge ... \wedge \beta_q) \end{aligned} \tag{6.6}$$

□

我们的下一个目标是证明，命题 6.2 中的测量使我们能够在对称幺半范畴$coCoalg_K$ （余交换余代数范畴）上定义一种新的代数富化。为此，我们定义一个新的范畴$ALG^c{}_K$，其对象为K-代数，而其 Hom 对象定义如下:

$$\overline{ALG}_K^c(A, A') := \mathcal{M}_c(H_\bullet(gl(A)), H_\bullet(gl(A'))) \tag{6.7}$$

对于K-代数A、A'。在 (6.7) 中， $\mathcal{M}(H_\bullet(gl(A)),H_\bullet(gl(A')))$ 表示从$H_\bullet(gl(A))$ 到$H_\bullet(gl(A'))$ 的泛余交换测量余代数（符号说明见第 3 节）。

命题 6.3。 设 A、A' 为 K-代数。那么，存在典范态射

$$\bar{\tau}(A, A') : \mathcal{M}_c(A, A') \longrightarrow \mathcal{M}_c(H_\bullet(gl(A)), H_\bullet(gl(A'))) \tag{6.8}$$

这些态射属于余交换 K-余代数范畴。

证明。 对于K-代数A、A'，考虑测量 $\Psi^c(A,A') : \mathcal{M}_c(A,A') \longrightarrow Hom_K(A,A')$，它在从$A$ 到A'的余交换测量中具有泛性质。由于 $\mathcal{M}_c(A,A')$ 是余交换的，由命题 6.2 可知，我们得到一个诱导测量

$$H_\bullet^{gl(\Psi^c(A,A'))} : \mathcal{M}_c(A, A') \longrightarrow Hom_K(H_\bullet(gl(A)), H_\bullet(gl(A'))) \tag{6.9}$$

相应李代数同调环之间。余代数态射 $\tau(A, A') : \mathcal{M}_c(A, A') \longrightarrow \mathcal{M}_c(H_\bullet(gl(A)), H_\bullet(gl(A')))$ 现在可直接由 $\mathcal{M}_c(H_\bullet(gl(A)),H_\bullet(gl(A')))$ 的泛性质推出。□

定理 6.4。 存在一个 $coCoalg_K$-富集函子 $ALG_K^c \longrightarrow ALG^c{}_K$，它在对象上为单位元，且其在 Hom 对象上的映射由下式给出

$$\bar{\tau}(A, A') : \mathcal{M}_c(A, A') \longrightarrow \mathcal{M}_c(H_\bullet(gl(A)), H_\bullet(gl(A'))) \tag{6.10}$$

对于 K-代数 A、A'。

证明。 此结果的证明与定理 3.7 的证明类似。 □

现在我们来讨论莱布尼茨同调。如第 5 节所述，由典范满同态诱导的复形$CL_\bullet(gl(A)) \longrightarrow CL_\bullet(gl(A))$构成拟同构 $CL_n(gl(A)) = (gl(A))^{\otimes n} \longrightarrow (gl(A))^{\otimes n}{}_{gl(K)} = CL_n(gl(A))$到余不变量空间。给定测量 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A,A')$，由 (5.23) 可知，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} CL_\bullet(gl(A)) & \longrightarrow & \overline{CL}_\bullet(gl(A)) \\ {\scriptstyle CL_\bullet^{gl(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{CL}_\bullet^{gl(\Phi)}(x)} \\ CL_\bullet(gl(A')) & \longrightarrow & \overline{CL}_\bullet(gl(A')) \end{array} \tag{6.11}$$

对于每个$x \in C$。我们回顾一下（见 [8, §III.2]），莱布尼茨同调$HL_\bullet(gl(A)) = H_\bullet(CL_\bullet(gl(A))) = H_\bullet(CL_\bullet(\overline{gl(A)}))$成为一个具有乘积结构的代数，该乘积结构由下式诱导

$$\begin{array}{c}(gl(A))^{\otimes p}_{gl(K)} \otimes (gl(A))^{\otimes q}_{gl(K)} \longrightarrow (gl(A) \oplus gl(A))^{p+q}_{gl(K)} \xrightarrow{\otimes^{p+q}(__\oplus__)_{gl(K)}} (gl(A))^{p+q}_{gl(K)} \\ (\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_p) \otimes (\beta_1 \otimes ... \otimes \beta_q) \mapsto ((\alpha_1 \oplus 0) \otimes ... \otimes (\alpha_p \oplus 0) \otimes (0 \oplus \beta_1) \otimes ... \otimes (0 \oplus \beta_q)) = (\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_p \otimes \beta_1 \otimes ... \otimes \beta_q)\end{array} \tag{6.12}$$

对于 $p, q \geq 0$。与 (6.4) 中一样，(6.12) 中的第一个映射由典范态射 $(gl(A))^{\otimes p} \otimes (gl(A))^{\otimes q} \longrightarrow (gl(A) \oplus gl(A))^{\otimes p+q}$ 诱导，而第二个映射由 [17, § 10.2.12] 中所述的运算 $\oplus : gl(A) \times gl(A) \longrightarrow gl(A)$ 诱导。现在我们将证明，测量 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 诱导了代数 $HL_\bullet(gl(A))$ 与 $HL_\bullet(gl(A'))$ 之间的测量。

命题 6.5。 设 C 是一个余交换余代数，且 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 是代数之间的测量。那么，以下

$$HL_\bullet^{gl(\Phi)} : C \longrightarrow Hom_K(HL_\bullet(gl(A)), HL_\bullet(gl(A'))) \qquad x \mapsto HL_\bullet^{gl(\Phi)}(x) : HL_\bullet(gl(A)) \longrightarrow HL_\bullet(gl(A')) \tag{6.13}$$

确定了一个从 $HL_\bullet(gl(A))$到 $HL_\bullet(gl(A'))$ 的余交换代数测量。

证明。考虑拟同构 $CL_\bullet(gl(A)) \longrightarrow CL_\bullet(gl(A))$ 和 $CL_\bullet(gl(\overline{A'})) \longrightarrow CL_\bullet(gl(A'))$，以及图表 (6.11) 的交换性，我们看到映射 $HL_\bullet^{gl(\Phi)}(x) : HL_\bullet(gl(A)) \longrightarrow HL_\bullet(gl(A'))$ 也由映射 $CL_\bullet^{gl(\Phi)}(x)$ 诱导，其中 $x \in C$。令 $\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_p \in CL_p(gl(A))$ 和 $\beta_1 \otimes ... \otimes \beta_q \in CL_q(gl(A))$。由如下事实，结论显而易见：对任意 $x \in C$，有

$$\begin{array}{ll}\overline{CL}^{gl(\Phi)}_{p+q}(x)((\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_p)(\beta_1 \otimes ... \otimes \beta_q)) & = \overline{CL}^{gl(\Phi)}_{p+q}(x)(\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_p \otimes \beta_1 \otimes ... \otimes \beta_q) \\ & = x_{(1)}(\alpha_1) \otimes ... \otimes x_{(p)}(\alpha_p) \otimes x_{(p+1)}(\beta_1) \otimes ... \otimes x_{(p+q)}(\beta_q) \\ & = \overline{CL}^{gl(\Phi)}_{p}(x_{(1)})(\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_p)\overline{CL}^{gl(\Phi)}_{q}(x_{(2)})(\beta_1 \otimes ... \otimes \beta_q)\end{array} \tag{6.14}$$

□

本节最后一步是利用命题 6.5 中的测量，定义余交换余代数上的代数富化。类似于 (6.7)，我们定义一个新的范畴 $\widehat{\text{代数}}^c{}_K$，其对象为 K-代数，其 Hom 对象定义如下

$$\widehat{ALG}^c_K(A, A') := \mathcal{M}_c(HL_\bullet(gl(A)), HL_\bullet(gl(A'))) \tag{6.15}$$

对于K-代数A、A'。这里，$\mathcal{M}_c(H_\bullet(gl(A)),H_\bullet(gl(A')))$ 是从$HL_\bullet(gl(A))$到$HL_\bullet(gl(A'))$的泛余交换测量余代数。

定理 6.6。 设 A、A' 是 K-代数。那么，存在典范映射

$$\widehat{\tau}(A, A') : \mathcal{M}_c(A, A') \longrightarrow \mathcal{M}_c(HL_\bullet(gl(A)), HL_\bullet(gl(A'))) \tag{6.16}$$

这些映射是余交换 K-余代数之间的映射。此外，还存在一个 $coCoalg_K$-富集函子 $ALG^c_K \longrightarrow \widehat{ALG}^c{}_K$，它在对象上是单位元，其在 Hom 对象上的映射由下式给出

$$\widehat{\tau}(A, A') : \mathcal{M}_c(A, A') \longrightarrow \mathcal{M}_c(HL_\bullet(gl(A)), HL_\bullet(gl(A'))) \tag{6.17}$$

对于代数 A、A'。

证明。 这一结果的证明与命题 6.3 和定理 6.4 的证明类似。 □

7 带对合代数、二面体同调和测度

我们继续令 K 为特征为零的域。带对合的 K-代数 R是指（见 [17, § 10.5]）配备了一个 K-线性自同态的含单位结合 K-代数，该自同态将 $r \mapsto \hat{r}$，满足 $\hat{\hat{r}} = r$ 以及 $\hat{r}\hat{s} = \widehat{sr}$，其中 r、$s \in R$。元素 $\hat{r}$ 称为 r的共轭元。我们总是假设 $\hat{1} = 1$。对于带对合代数，循环同调通常由二面体同调取代（见 [15], [16], [17, § 10.5]）。本节研究测度如何在带对合代数的二面体同调上诱导映射。此外，我们还研究测度所诱导的映射与下述同构之间的相容性：这些同构将二面体同调分别与辛矩阵和斜对称矩阵的李代数同调的本原部分对应起来。我们从以下定义开始。

定义 7.1。 设 R、R' 为带对合的 K-代数。从 R 到 R' 的带对合代数的余交换测量由一个线性映射 $\Phi: C \longrightarrow Hom_K(R, R')$ 组成，满足

(a) C 是一个共代数。$ommutative$ K-余代数，且 $\Phi: C \longrightarrow Hom_K(R, R')$ 是从 R 到 R'的代数测量 .

（b）测量 Φ 与共轭相容，即有 $\Phi(x)(\hat{r}) = \widehat{\Phi(x)(r)}$，其中 $x \in C$ 且 $r \in R$。

对于$n \geq 0$，我们回顾二面体群 D_{n+1} 由以下符号生成

$$D_{n+1} = \{u_n, v_n, \mid u_n^{n+1} = v_n^2 = 1 \text{ and } v_n u_n v_n^{-1} = u_n^{-1}\} \tag{7.1}$$

与前几节一样，我们令$C_n(R) := R^{\otimes n+1}$ 对$n \geq 0$成立。于是，二面体群D_{n+1} 在$C_n(R)$上的作用如下（见 [17, §10.5.4]）

$$u_n(r_0, r_1, , ..., r_n) = (-1)^n(r_n, r_0, ..., r_{n-1}) \qquad v_n(r_0, r_1, ..., r_n) = (-1)^{n(n+1)/2}(\hat{r}_0, \hat{r}_n, \hat{r}_{n-1}, ..., \hat{r}_1) \tag{7.2}$$

我们将R的余不变元模记为 $\mathcal{D}_n(R) := C_n(R)^{D_{n+1}}$，它对应于二面体群$D_{n+1}$ 在$C_n(R)$上的作用（7.2）。由[17, § 5.2.8], 可知，霍赫希尔德微分b 可下降到余不变元层面，得到$b: \mathcal{D}_\bullet(R) \longrightarrow \mathcal{D}_{\bullet-1}(R)$。带对合代数$R$ 的二面体同调群$H\mathcal{D}_\bullet(R)$定义为复形$(\mathcal{D}_\bullet(R), b)$的同调。

命题 7.2。 设R、R' 为带对合的K-代数。设 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(R,R')$ 是从R到R'的带对合代数之间的余交换测量。对每个$x \in C$，我们有映射

$$\mathcal{D}_n^\Phi(x) : \mathcal{D}_n(R) \longrightarrow \mathcal{D}_n(R') \qquad (r_0, r_1, , ..., r_n) \mapsto x(r_0, r_1, ..., r_n) = (x_{(1)}(r_0), x_{(2)}(r_1), ..., x_{(n+1)}(r_n)) \tag{7.3}$$

它们诱导一个复形态射 $\mathcal{D}_\bullet(x): \mathcal{D}_\bullet(R) \longrightarrow \mathcal{D}_\bullet(R')$。因此，每个 $x \in C$ 都在二面体同调上诱导一个态射 $H\mathcal{D}_\bullet^\Phi(x): H\mathcal{D}_\bullet(R) \longrightarrow H\mathcal{D}_\bullet(R')$。

证明。我们首先需要证明，如式 (2.4) 所示，态射 $C_n^\Phi(x) : C_n(R) \longrightarrow C_n(R')$ 在余不变模的层次上可下降为 $\mathcal{D}_n^\Phi(x): \mathcal{D}_n(R) = C_n(R)_{D_{n+1}} \longrightarrow C_n(R')_{D_{n+1}} = \mathcal{D}_n(R')$。设 $(r_0, r_1, ..., r_n) \in C_n(R)$。由于 C 是余交换的，根据定义 7.1 中的性质，对于 $u_n, v_n \in D_{n+1}$，有

$$\begin{aligned}
x(u_n(r_0, r_1, , ..., r_n)) &= (-1)^n x(r_n, r_0, ..., r_{n-1}) \\
&= (-1)^n (x_{(1)}(r_n), x_{(2)}(r_0), ..., x_{(n+1)}(r_{n-1})) \\
&= (-1)^n (x_{(n+1)}(r_n), x_{(1)}(r_0), ..., x_{(n)}(r_{n-1})) \\
&= u_n(x_{(1)}(r_0), ..., x_{(n)}(r_{n-1}), x_{(n+1)}(r_n)) = u_n(x(r_0, r_1, ...r_n)) \\
x(v_n(r_0, r_1, , ..., r_n)) &= (-1)^{n(n+1)/2} x(\hat{r}_0, \hat{r}_n, \hat{r}_{n-1}, ..., \hat{r}_1) \\
&= (-1)^{n(n+1)/2} (x_{(1)}(\hat{r}_0), x_{(2)}(\hat{r}_n), x_{(3)}(\hat{r}_{n-1}), ..., x_{(n+1)}(\hat{r}_1)) \\
&= (-1)^{n(n+1)/2} (x_{(1)}(\hat{r}_0), x_{(n+1)}(\hat{r}_n), x_{(n)}(\hat{r}_{n-1}), ..., x_{(2)}(\hat{r}_1)) \\
&= (-1)^{n(n+1)/2} (\widehat{x_{(1)}(r_0)}, \widehat{x_{(n+1)}(r_n)}, \widehat{x_{(n)}(r_{n-1})}, ..., \widehat{x_{(2)}(r_1)}) \\
&= v_n(x_{(1)}(r_0), x_{(2)}(r_1), ..., x_{(n)}(r_{n-1}), x_{(n+1)}(r_n)) = v_n(x(r_0, r_1, ...r_n))
\end{aligned} \tag{7.4}$$

剩下需要证明的是，映射 $\mathcal{D}^{\Phi}_{\bullet}(x)$ 关于 $\mathcal{D}_{\bullet}(R)$ 和 $\mathcal{D}_{\bullet}(R')$ 上的微分具有良好的性质。为此我们考察图表

$$\begin{array}{ccc} C_n(R) & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(R) \\ {\scriptstyle C^{\Phi}_n(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C^{\Phi}_{n-1}(x)} \\ C_n(R') & \xrightarrow{b} & C_{n-1}(R') \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n(R) & \xrightarrow{\bar{b}} & \mathcal{D}_{n-1}(R) \\ {\scriptstyle \mathcal{D}^{\Phi}_n(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}^{\Phi}_{n-1}(x)} \\ \mathcal{D}_n(R') & \xrightarrow{\bar{b}} & \mathcal{D}_{n-1}(R') \end{array} \tag{7.5}$$

由命题 2.1 可知，(7.5) 中左侧的图表是交换的。此外，我们知道，$C_{\bullet}(R)$ 和 $C_{\bullet}(R')$ 上的 Hochschild 微分分别下降到余不变量 $\mathcal{D}_{\bullet}(R)$ 和 $\mathcal{D}_{\bullet}(R')$ 上。由于典范映射$C_{\bullet}(R) \longrightarrow \mathcal{D}_{\bullet}(R)$ 和 $C_{\bullet}(R') \longrightarrow \mathcal{D}_{\bullet}(R')$ 是满同态，因此可知 (7.5) 中右侧的图表也是交换的。由此得证。□

设 $r \geq 1$。若 R是一个对合 K-代数，则在 $gl_r(R)$ 上有一个运算 $\alpha \mapsto {}^t\alpha$，定义为令 ${}^t\alpha_{ij} := \hat{\alpha}_{ji}$。于是，斜对称矩阵构成的李代数 $sk_r(R)$ 为

$$sk_r(R) := \{\alpha \in gl_r(R) \mid {}^t\alpha = -\alpha\} \tag{7.6}$$

设 $r \geq 1$，令 J_r 表示由 $J_r := j^{\oplus r}$ 定义的 $2r \times 2r$ 矩阵，其中 $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$（见 [17, § 10.5.3]）。用它来定义 $gl_{2r}(R)$ 上的运算 $\alpha \mapsto {}^T\alpha$，定义为令 ${}^T\alpha := -J_r{}^t\alpha J_r$。于是，辛矩阵构成的李代数 $sp_{2r}(R)$ 为

$$sp_{2r}(R) := \{\alpha \in gl_{2r}(R) \mid {}^T\alpha = -\alpha\} \tag{7.7}$$

现在令 $\Phi : C \longrightarrow Hom_K(R,R')$ 为从带对合代数 R 到 R' 的余交换测度。我们置 $\Psi_r := gl_r(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(gl_r(R), gl_r(R'))$，并置 $\Psi := gl(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(gl(R),gl(R'))$。

引理 7.3。 对于每个 $x \in C$，我们有

$${}^t\Psi(x)(\alpha) = \Psi(x)({}^t\alpha) \qquad {}^T\Psi(x)(\beta) = \Psi(x)({}^T\beta) \tag{7.8}$$

对 $\alpha \in gl_r(R)$ 以及 $\beta \in gl_{2r}(R)$。进一步地，$\Psi_{\bullet} := gl_{\bullet}(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(gl_{\bullet}(R),gl_{\bullet}(R'))$ 限制为李代数的测度

$$sk_r(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(sk_r(R), sk_r(R')) \qquad sp_{2r}(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(sp_{2r}(R), sp_{2r}(R')) \tag{7.9}$$

李代数的。

证明。 根据定义 7.1，立即可得 ${}^t\Psi(x)(\alpha) = \Psi(x)({}^t\alpha)$。对于 $x \in C$，我们还注意到

$$\Psi(x)({}^T\beta) = -\Psi(x)(J_r{}^t\beta J_r) = -\Psi(x_{(1)})(J_r)\Psi(x_{(2)})({}^t\beta)\Psi(x_{(3)})(J_r) = -\epsilon_C(x_{(1)})\epsilon_C(x_{(3)})J_r\Psi(x_{(2)})({}^t\beta)J_r = -J_r\Psi(x)({}^t\beta)J_r = {}^T\Psi(x)(\beta)$$

这证明了 (7.8)。由 (7.8) 以及 (7.6)、(7.7) 中的定义可知，映射 $\Psi_{\bullet}(x) : gl_{\bullet}(R) \longrightarrow gl_{\bullet}(R')$ 限制在相应的斜对称矩阵李子代数上，也限制在相应的辛矩阵李子代数上。结论显而易见。

□

我们将 sk(R)（分别将 sp(R)）记为包含映射 $sk_r(R) \hookrightarrow sk_{r+1}(R)$（分别为包含映射 $sp_{2r}(R) \hookrightarrow sp_{2r+2}(R)$）在 $r \longrightarrow \infty$ 时的余极限。对 (7.9) 中 $r \longrightarrow \infty$ in 取余极限，可得 $sk(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(sk(R), sk(R'))$ 和 $sp(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(sp(R), sp(R'))$。由 [16], [17, § 10.5], 可知，李代数同调 $H_{\bullet}(sk(R))$ 和 $H_{\bullet}(sp(R))$ 实际上是霍普夫代数。现在我们有以下结果。

命题 7.4。 设 R、R' 是带对合的 K-代数。设 $\Phi\colon\ C \longrightarrow Hom_K(R,\ R')$ 是从 R 到 R' 的带对合代数的余交换测量。对每个 $x \in C$，我们有映射

$$H_\bullet^{sk(\Phi)}(x) : H_\bullet(sk(R)) \longrightarrow H_\bullet(sk(R')) \qquad H_\bullet^{sp(\Phi)}(x) : H_\bullet(sp(R)) \longrightarrow H_\bullet(sp(R')) \tag{7.10}$$

李代数同调之间。此外，*(7.10)* 中的映射限制为

$$H_\bullet^{sk(\Phi)}(x)\colon\ P\ rim(H_\bullet(sk(R))) \longrightarrow Prim(H_\bullet(sk(R'))) \qquad H_\bullet^{sp(\Phi)}(x) : Prim(H_\bullet(sp(R))) \longrightarrow Prim(H_\bullet(sp(R'))) \tag{7.11}$$

在李代数同调各自的本原部分上。

证明。 (7.10) 中的映射直接来自以下事实：$sk(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(sk(R),sk(R'))$ 和 $sp(\Phi) : C \longrightarrow Hom_K(sp(R),sp(R'))$ 是李代数的测度。由于 $H_\bullet(sk(R))$ 和 $H_\bullet(sp(R))$ 是霍普夫代数，最后的结论由命题 5.2 的一般结果显然可得。

□

现在我们回顾（见 [17, § 10.5.5]），存在同构

$$Prim(H_\bullet(sk(R))) \xrightarrow{\cong} H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \qquad Prim(H_\bullet(sp(R))) \xrightarrow{\cong} H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \tag{7.12}$$

我们的最后一个结果将证明，(7.12) 中的同构与由测度诱导的映射相容，如命题 7.2 和命题 7.4 所述。

定理 7.5。 设 R、R' 是带对合的 K-代数。设 $\Phi\colon\ C \longrightarrow Hom_K(R,\ R')$ 是从 R 到 R' 的带对合代数的余交换测量。对于每个 $x \in C$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} Prim(H_\bullet(sk(R))) & \xrightarrow{\cong} & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \\ {\scriptstyle H_\bullet^{sk(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H\mathcal{D}^{\Phi}_{\bullet-1}(x)} \\ Prim(H_\bullet(sk(R'))) & \xrightarrow{\cong} & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Prim(H_\bullet(sp(R))) & \xrightarrow{\cong} & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \\ {\scriptstyle H_\bullet^{sp(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H\mathcal{D}^{\Phi}_{\bullet-1}(x)} \\ Prim(H_\bullet(sp(R'))) & \xrightarrow{\cong} & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R') \end{array} \tag{7.13}$$

其中，水平箭头中的同构如 (7.12) 所给出。

证明。 沿用注 3.2 的记号，我们回顾 $\tilde{C}_n(R) = R^{\otimes n+1}/(1-t)$。根据 (7.2) 中二面体群 D_{n+1} 在 $C_n(R) = R^{\otimes n+1}$ 上的作用表达式，可知我们有典范满同态 $\tilde{C}_n(R) \twoheadrightarrow \mathcal{D}_n(R) = C_n(R)^{D_{n+1}}$。结合定理 5.4 证明中的交换图 (5.16)，我们现在得到交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} CE_{n+1}(sk_r(R)) = \wedge^{n+1} sk_r(R) & \longrightarrow & CE_{n+1}(gl_r(R)) = \wedge^{n+1} gl_r(R) & \xrightarrow{\theta^A_{n,r}} & \tilde{C}_n(M_r(R)) & \xrightarrow{tr^A_{n,r}} & \tilde{C}_n(R) & \longrightarrow & \mathcal{D}_n(R) \\ {\scriptstyle CE_{n+1}^{sk_r(\Phi)}(x)}\downarrow & & {\scriptstyle CE_{n+1}^{gl_r(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{C}_n^{M_r(\Phi)}(x)} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{C}_n^{\Phi}(x)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{D}_n^{\Phi}(x)} \\ CE_{n+1}(sk_r(R')) = \wedge^{n+1} sk_r(R') & \longrightarrow & CE_{n+1}(gl_r(R')) = \wedge^{n+1} gl_r(R') & \xrightarrow{\theta^{A'}_{n,r}} & \tilde{C}_n(M_r(R')) & \xrightarrow{tr^{A'}_{n,r}} & \tilde{C}_n(R') & \longrightarrow & \mathcal{D}_n(R') \end{array} \tag{7.14}$$

显然，式 (7.14) 中的交换性传递到余极限中，得到 $r \longrightarrow \infty$。因此，在同调层面上，我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(sk(R)) & \longrightarrow & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R) \\ {\scriptstyle H_\bullet^{sk(\Phi)}(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H\mathcal{D}^{\Phi}_{\bullet-1}(x)} \\ H_\bullet(sk(R')) & \longrightarrow & H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R') \end{array} \tag{7.15}$$

我们知道（见 [17, § 10.5.5]），(7.12) 中的同构 $Prim(H_\bullet(sk(R))) \xrightarrow{\cong} H\mathcal{D}_{\bullet-1}(R)$ 是将 (7.15) 中上方的水平映射限制到 $H_\bullet(sk(R))$ 的本原部分得到的。现在很容易看出，(7.13) 左侧的图表是交换的。(7.13) 右侧图表的情形可用类似方法证明。□

参考文献

[1] M. Anel 和 A. Joyal, 《（余）代数的 Sweedler 理论与 bar-cobar 构造》, arXiv 1309.6952（2013年）。[2] A. Banerjee 和 S. Kour, 《算子代数上的代数量度与同调理论》, 《代数与几何拓扑》22（2022年）, 第 3 期, 1113–1158 页。[3] , 《Hopf 代双代数的度量与循环（上）同调理论中的态射》, 《数学进展》442（2024年）, 论文编号 109581, 共 48 页。[4] M. Batchelor, 《差分算子、度量余代数与量子群类对象》, 《数学进展》105（1994年）, 第 2 期, 190–218 页。[5] , 《度量余模：其应用》, 《几何与物理杂志》36（2000年）, 251–269 页。[6] T. Brzezi´nski, 《关于与余代数伽罗瓦扩张相关的模》, 《代数杂志》215（1999年）, 第 1 期, 290–317 页。[7] C. Cuvier, 《莱布尼茨同调与 Hochschild 同调》, 《巴黎科学院报告》S´er. I Math. 313（1991年）, 第 9 期, 569–572 页。[8] , 《莱布尼茨代数：定义、性质》, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.（第 4 辑）27（1994年）, 第 1 期, 1–45 页。[9] L. Grunenfelder 和 M. Mastnak, 《关于双度量》, 《纯粹与应用代数杂志》204（2006年）, 第 2 期, 258–269 页。[10] , 《关于双度量 II》, 《纯粹与应用代数杂志》209（2007年）, 第 3 期, 823–832 页。[11] M. Hyland、I. L´opez Franco 和 C. Vasilakopoulou, 《Hopf 度量余幺半群与富化》, 《伦敦数学会会刊》（第 3 辑）115（2017年）, 第 5 期, 1118–1148 页。[12] , 《度量余模与富化》, arXiv 1703.10137（2017年）。[13] A. Lauve 和 M. Mastnak, 《双代数覆盖与结构传递》, 《张量范畴与 Hopf 代数》, 《当代数学》第 728 卷, 美国数学会, [普罗维登斯], 罗得岛州, 2019年, 第 137–153 页。[14] J.-L. Loday 和 D. Quillen, 《循环同调与矩阵的李代数同调》, 《赫尔维蒂数学评论》59（1984年）, 第 4 期, 569–591 页。[15] J.-L. Loday, 《二面体同调与四元数同调》, 《数学进展》66（1987年）, 119–148 页。[16] J.-L. Loday 和 C. Procesi, 《辛代数与正交代数的同调》, 《数学进展》69（1988年）, 93–108 页。[17] J.-L. Loday, 《循环同调》, 《数学科学基础丛书》第 301 卷, 施普林格出版社, 柏林, 1992年。附录 E 由 Mar´ia O. Ronco 撰写。[18] J.-L Loday, 《李代数的非交换版本：莱布尼茨代数》, 《数学教学》（第 2 辑）39（1993年）, 第 3–4 期, 269–293 页。[19] C. Mazza、V. Voevodsky 和 C. Weibel, 《动机上同调讲义》, 克雷数学专著, 第 2 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州; 克雷数学研究所, 剑桥, 马萨诸塞州, 2006年。[20] H.-E. Porst 和 R. Street, 《Sweedler 对偶的推广》, 《应用范畴结构》24（2016年）, 第 5 期, 619–647 页。[21] M. E. Sweedler, 《霍普夫代数》, 《数学讲义丛书》, W. A. Benjamin 出版公司, 纽约, 1969年。[22] C. Vasilakopoulou, 《代数与模范畴的富化》, arXiv 1205.6450（2012年）。