arXiv:2602.12516v1 [math.RA] 13 Feb 2026

Jacobi代数与 Jacobi Novikov-Poisson 代数

CHENGYANG LU 和 YANYONG HONG（通讯作者）

摘要。本文引入 Jacobi-Novikov-Poisson 代数的概念，并证明其仿射化可得 Jacobi代数。我们指出，每个含幺微分 Novikov-Poisson代数也是 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。此外，任意 Jacobi-Novikov-Poisson 代数都可以通过对其底层 Novikov代数取交换子括号，或利用导子，得到一个 Jacobi代数。我们给出了低维 Jacobi-Novikov-Poisson 代数的分类，包括 $\mathbb{C}$ 上维数为 2 和 3 的情形（同构意义下），并证明两个此类代数的张量积仍是 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。我们还介绍了由已有 Jacobi-Novikov-Poisson 代数构造新代数的若干方法。本文引入 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数的概念，并从二次结构和积分的角度建立了若干等价刻画。我们给出了 $\mathbb{C}$ 上维数为 2 和 3 的二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数的分类。最后，我们利用有限维二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数和有限维二次右 Jacobi-Novikov-Poisson代数，明确构造了 Frobenius Jacobi代数。

1. 引言

Poisson代数源于Poisson几何的基础框架 [7,20, 29], ，作为其代数对应物，并在辛几何、量子化理论、可积系统以及量子群等领域中发挥重要作用。回顾，**Poisson代数**是一个三元组$(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$，其中$(A, \cdot)$是交换结合代数，$(A, [\cdot,\cdot])$是李代数，且它们满足

$$[a, b\cdot c] = [a, b]\cdot c + b\cdot[a, c] \quad \text{for all } a, b, c \in A. \tag{1}$$

Poisson代数$(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$称为**含幺的**，如果$(A, \cdot)$是含幺交换结合代数。

Jacobi代数是Jacobi流形 [18, 21], 的抽象代数对应物，它们是辛流形或更一般的泊松流形的推广。回顾，**Jacobi代数**是一个三元组$(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$，其中$(A, \cdot)$是含幺交换结合代数，$(A, [\cdot,\cdot])$是李代数，且它们满足

$$[a, b\cdot c] = [a, b]\cdot c + b\cdot[a, c] + b\cdot c\cdot[1_A, a] \quad \text{for all } a, b, c \in A. \tag{2}$$

注意到，含幺 Poisson代数自然构成 Jacobi代数。Jacobi代数已得到广泛研究（例如，参见 [1, 12, 13, 25, 26, 22]）。特别是，Agore 和 Militaru 在 [1] 中给出了低维 Jacobi代数的同构分类，研究了 Jacobi代数的扩张结构问题，并引入了

2010 数学主题分类。16W10,17A30,17A45, 17B63, 53D17。关键词和短语。Jacobi代数、Novikov代数、Jacobi-Novikov-Poisson 代数、Frobenius Jacobi代数。

Frobenius Jacobi 代数的概念，它是结合代数背景下 Frobenius 代数的类似物。他们通过积分建立了 Frobenius Jacobi代数的刻画定理，证明此类代数等价于配备对称不变非退化双线性型的 Jacobi代数 [1]。后来，Liu 和 Bai 在[22] 中发展了相对Poisson代数的双代数理论，并给出了由相对Poisson双代数构造 Frobenius Jacobi代数的方法。

Novikov 代数最初出现在形式变分演算中对哈密顿算子 [9, 10] 和流体力学型 Poisson 括号 [6]的研究中。它们也对应于一类 Lie共形代数 [31]。此外，Novikov 代数还是前Lie代数，与数学和物理中的许多领域密切相关，包括仿射流形以及 Lie群上的仿射结构 [19], 顶点代数 [4, 5], 和结合代数的变形理论 [11]。Novikov 代数在无限维Lie代数的仿射化构造中发挥着关键作用。

定理1.1。 [6] 设 $\mathbf{k}$ 是特征为0的域，A 是其上的向量空间，并带有一个二元运算 $\circ$。在 A 上定义二元运算 $[\cdot,\cdot]: A[t,t^{-1}] := A \otimes \mathbf{k}[t,t^{-1}]$，定义为

$$[at^m, bt^n] = m(a\circ b)t^{m+n-1} - n(b\circ a)t^{m+n-1} \quad \textit{for all } a,b\in A, m,n\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

其中$^m := a \otimes t^m$。那么，$(A[t, t^{-1}], [\cdot,\cdot])$ 是李代数，当且仅当$(A, \circ)$ 是*Novikov*代数。

注意，这种李代数构造可以利用Novikov运算子与右Novikov运算子之间的 Koszul 对偶，通过右Novikov代数加以推广 [8, 16], ；也就是说，Novikov代数与右Novikov代数的张量积上存在自然的李代数结构。

设A是一个向量空间，带有两个二元运算 $\cdot$ 和 $\circ$。在$A[t、 t^{-1}]$ 上定义一个新的二元运算 $\cdot$如下:

$$(at^m)\cdot(bt^n) = (a\cdot b)t^{m+n} \quad \text{for all } a,b\in A, m,n\in\mathbb{Z}. \tag{4}$$

根据 [24], $(A[t, t^{-1}], \cdot, [\cdot,\cdot])$是一个Poisson代数，其中 $[\cdot,\cdot]$ 由式（3）定义，当且仅当（A, $\cdot$, $\circ$）是文献中引入的微分Novikov-Poisson代数 [3]。由此自然引出一个问题：通过上述过程，什么样的代数结构赋予A 后，能够得到Jacobi代数？这个问题构成了本文的第一个研究动机。

我们引入 Jacobi Novikov-Poisson 代数的概念（见定义 2.3），并证明：$A[t,t^{-1}],\cdot,[\cdot,\cdot])$ 是一个 Jacobi代数，其中 $[\cdot,\cdot]$ 和 $\cdot$由方程（3）和（4）定义，当且仅当（$A, \cdot, \circ$) 是一个 Jacobi Novikov-Poisson 代数。此外，我们证明，Jacobi Novikov-Poisson 代数与右Jacobi Novikov-Poisson代数的张量积自然具有 Jacobi代数结构。事实上，可以将 Novikov乘积的交换子作为李括号，从而由 Jacobi Novikov-Poisson 代数自然得到 Jacobi代数；也可以通过其导子导出 Jacobi代数（见定理 2.6）。注意，含幺微分 Novikov-Poisson 代数是 Jacobi Novikov-Poisson 代数。因此，配备导子的含幺交换结合代数提供了丰富且重要的例子来源。我们还对复数域上维数为 2 和 3 的 Jacobi Novikov-Poisson 代数进行了同构分类。在此基础上，利用文献中关于素特征域上有限维单Novikov代数的分类，我们进一步对所有 Novikov 代数结构为单的三维 Jacobi Novikov-Poisson 代数进行分类，直至

同构。对于特征 $\mathbf{k} = 3$，在一般情形下，若特征 $\mathbf{k} = p > 2$，完整分类似乎相当困难。因此，我们给出了一个 Novikov 代数结构为单的 Jacobi Novikov-Poisson 代数的具体例子（见例 2.13）。此外，我们证明 Jacobi Novikov-Poisson 代数在张量积下封闭，并给出若干由已知代数构造新代数的方法。

二次Novikov代数由 [14], 引入，是一种带有非退化对称不变双线性形式的Novikov代数。文献 [14] 证明，二次Novikov代数与二次右Novikov代数的张量积具有自然的二次李代数结构。这一发现自然引出了以下问题：能否类似地由带有适当双线性形式的 Jacobi Novikov-Poisson 代数及其右对应代数构造 Frobenius Jacobi代数? 这是本研究的第二个主要动机。

为了解决这一问题，我们引入 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数的概念，并从二次结构和积分的角度给出 Frobenius Jacobi Novikov-Poisson 代数的若干等价刻画。我们还给出了由含单位交换微分Frobenius代数构造这类代数的方法。我们也对 $\mathbb{C}$ 上的 2 维和 3 维二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数进行了同构分类。最后，我们证明，有限维二次 Jacobi Novikov-Poisson 代数与有限维二次右 Jacobi-Novikov-Poisson 代数的张量积具有自然的 Frobenius Jacobi代数结构，并通过一个具体例子说明这一结果。

本文组织如下。第2节介绍 Jacobi-Novikov-Poisson 代数的定义，并阐明它们与Jacobi代数之间的联系。我们还给出这些代数的一些分类和构造。第3节介绍 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数的概念，并从二次结构和积分的角度给出 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数的若干等价刻画。最后，我们对 $\mathbb{C}$ 上维数为 2 和 3 的二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数按同构分类，并利用有限维二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数及其右对应代数构造 Frobenius Jacobi代数。

记号。本文中，除非另有说明，令 $\mathbf{k}$ 为任意域。令 $\mathbf{k}^\times$ 表示$\mathbf{k}$的所有非零元素组成的集合。所有向量空间和代数均定义在 $\mathbf{k}$上。所有关于 $\mathbf{k}$ 的张量记为 $\otimes$。记 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分别为复数、整数和非负整数的集合。设 A是一个带有二元运算的向量空间 $*$ 和 一个 $\in A$。定义线性映射 $L_{A,*}(a)$、$R_{A,*}(a) \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A)$ 如下：

$$L_{A,*}(a)(b) = a * b, \quad R_{A,*}(a)(b) = b * a \quad \text{for all } b \in A.$$

若 $(A, \cdot)$ 是含幺交换结合代数，我们总是假设 1_A 是 $(A, \cdot)$ 的单位元。

2. Jacobi Novikov-Poisson代数的基本结果及其与Jacobi代数的关系

本节将介绍 Jacobi Novikov-Poisson代数的定义，展示 Jacobi Novikov-Poisson代数与 Jacobi代数之间的关系，并给出关于 Jacobi Novikov-Poisson代数的一些基本结果，包括若干分类与构造。

2.1. **Jacobi Novikov-Poisson代数与 Jacobi代数之间的关系**。回顾一下，**Novikov代数**是一个二元组 $(A,\circ)$，其中 A 是一个向量空间，其上定义了一个二元运算 $\circ$满足

$$(a\circ b)\circ c-a\circ(b\circ c) = (b\circ a)\circ c-b\circ(a\circ c), \tag{5}$$

$$(a\circ b)\circ c = (a\circ c)\circ b \quad \text{for all } a,b,c\in A. \tag{6}$$

设B 为一个向量空间，并具有二元运算 $\diamond$。若 $(B,\circ)$ 是一个Novikov代数，且对所有的a、$b\in B$，都有$a\circ b:=b\diamond a$，则称 $(B,\diamond)$ 为一个**右Novikov代数**。

下面回顾微分Novikov-Poisson代数的定义。

定义 2.1。 [3] 一个**微分Novikov-Poisson代数**是一个三元组 $(A,\cdot,\circ)$，其中 $(A,\cdot)$ 是一个交换结合代数，$(A,\circ)$ 是一个Novikov代数，并且它们满足

$$(a\cdot b)\circ c = a\cdot(b\circ c), \tag{7}$$

$$a\circ(b\cdot c) = (a\circ b)\cdot c+b\cdot(a\circ c) \quad \text{for all } a,b,c\in A. \tag{8}$$

若一个微分Novikov-Poisson代数 $(A,\cdot,\circ)$ 满足 $(A,\cdot)$ 为含幺的，则称其为**含幺的**。

注 2.2。 注意，微分Novikov-Poisson代数是 [30] 中定义的Novikov-Poisson代数。回顾一下，一个**含幺交换微分代数** $(A,\cdot,P)$ 是一个含幺交换结合代数 $(A,\cdot)$，并配备了一个导子P。设 $(A,\cdot,P)$ 是一个含幺交换微分代数。类似于 [30, 引理 2.1]，，容易验证 $(A,\cdot,\circ)$ 是一个含幺微分Novikov-Poisson代数，其中

$$a\circ b:=a\cdot P(b) \quad \text{for all } a,b\in A. \tag{9}$$

接下来，我们引入 Jacobi Novikov-Poisson 代数的定义。

定义 2.3. Jacobi-Novikov-Poisson 代数是一个三元组 $(A,\cdot,\circ)$，其中 $(A,\cdot)$ 是含幺交换结合代数，$(A,\circ)$ 是 Novikov代数，并且它们满足

$$(a\cdot b)\circ c = a\cdot(b\circ c), \tag{10}$$

$$c\circ(a\cdot b) = (c\circ a)\cdot b+a\cdot(c\circ b)-a\cdot b\cdot(c\circ 1_A) \quad \text{for all } a,b,c\in A. \tag{11}$$

设B 是一个带有二元运算 $\diamond$ 的向量空间。若 $(B,\cdot,\circ)$ 是 Jacobi Novikov-Poisson代数，且对所有a、$b\in B$，都有$a\circ b:=b\diamond a$，则称 $(B,\cdot,\diamond)$ 为**右Jacobi Novikov-Poisson代数**。

注2.4. 容易看出，一个含幺微分Novikov-Poisson代数是 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，当且仅当对所有$a\in A$，都有$a\circ 1_A=0$。

设 $(A,\cdot,\circ)$ 是一个含幺微分ffNovikov-Poisson 代数。设 $b=c=1_A$ 在式 (8) 中。则对所有 $a\in A$，都有 $a\circ 1_A=0$。因此，含幺微分ffNovikov-Poisson 代数是 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。

设（A，$\cdot$）是一个含幺交换结合代数，并带有一个导子 P。根据注2.2，（A，$\cdot$，$\circ$）是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，其中 $\circ$由式（9）给出。

回顾 [23, 14]，$(A,\cdot,P,Q)$ 称为**含幺可容许交换微分代数**，如果 $(A,\cdot,P)$ 是含幺交换微分代数，且$Q:A\to A$ 是满足下述条件的线性映射

$$Q(a\cdot b)=Q(a)\cdot b-a\cdot P(b) \quad \text{for all } a,b\in A. \tag{12}$$

命题 2.5。设$(A, \cdot, P, Q)$是含幺可容许交换微分代数，且$q \in \mathbf{k}$。则$(A, \cdot, \circ_q)$是一个*Jacobi-Novikov-Poisson*代数，其中二元运算$\circ_q$定义为

$$a \circ_q b := a \cdot (P + qQ)(b) \quad \text{for all } a, b \in A.$$

证明。根据[15, 命题 2.8], $(A, \circ_q)$是一个Novikov代数。此外，对于所有$a, b, c \in A$，有

$$\begin{aligned}
& c \circ_q (a \cdot b) - (c \circ_q a) \cdot b - a \cdot (c \circ_q b) + a \cdot b \cdot (c \circ_q 1_A) \\
= \; & c \cdot (P + qQ)(a \cdot b) - c \cdot (P + qQ)(a) \cdot b - a \cdot c \cdot (P + qQ)(b) + a \cdot b \cdot c \cdot (P + qQ)(1_A) \\
= \; & c \cdot \Big(P(a) \cdot b + a \cdot P(b) + qQ(a) \cdot b + qa \cdot P(b)\Big) - c \cdot (P(a) + qQ(a)) \cdot b \\
& - a \cdot c \cdot (P(b) + qQ(b)) + a \cdot b \cdot c \cdot qQ(1_A) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

容易看出 等式 (10) 成立。因此，$(A, \cdot, \circ_q)$是一个Jacobi-Novikov-Poisson代数. □

接下来，我们给出从Jacobi Novikov-Poisson代数构造Jacobi代数的两种直接构造方法。

定理 2.6。(a) 设$(A, \cdot, \circ)$为一个*Jacobi-Novikov-Poisson*代数。则$(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$是一个*Jacobi*代数，其中二元运算$[\cdot,\cdot]$定义为

$$[a, b] := a \circ b - b \circ a \quad \text{for all } a, b \in A. \tag{13}$$

(b) 设$(A, \cdot, \circ)$为一个*Jacobi-Novikov-Poisson*代数，且有导子P，即P是$(A, \cdot)$和$(A, \circ)$的导子。则$(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$是一个*Jacobi*代数，其中二元运算$[\cdot,\cdot]$定义为

$$[a, b] := P(a) \circ b - P(b) \circ a \quad \text{for all } a, b \in A.$$

证明。 (a) 显然，$(A, [\cdot,\cdot])$是一个李代数。此外，对于所有a、b、$c \in A$，我们有

$$\begin{aligned}
& [c, a] \cdot b + a \cdot [c, b] + a \cdot b \cdot [1_A, c] - [c, a \cdot b] \\
= \; & (c \circ a - a \circ c) \cdot b + a \cdot (c \circ b - b \circ c) + a \cdot b \cdot (1_A \circ c - c \circ 1_A) - c \circ (a \cdot b) + (a \cdot b) \circ c \\
= \; & (c \circ a) \cdot b + a \cdot (c \circ b) - a \cdot b \cdot (c \circ 1_A) - a \cdot (b \circ c) - (a \circ c) \cdot b + a \cdot b \cdot (1_A \circ c) \\
& - c \circ (a \cdot b) + (a \cdot b) \circ c \\
= \; & c \circ (a \cdot b) - (a \cdot b) \circ c - b \cdot (a \circ c) + (a \cdot b) \circ c - c \circ (a \cdot b) + (a \cdot b) \circ c \\
= \; & c \circ (a \cdot b) - (a \cdot b) \circ c - (b \cdot a) \circ c + (a \cdot b) \circ c - c \circ (a \cdot b) + (a \cdot b) \circ c \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

因此，$(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$是一个Jacobi代数。

(b) 容易验证，$(A, [\cdot,\cdot])$是一个李代数。注意，对于所有a、b、$c \in A$，我们有

$$\begin{aligned}
& [c, a] \cdot b + a \cdot [c, b] + a \cdot b \cdot [1_A, c] - [c, a \cdot b] \\
= \; & (P(c) \circ a - P(a) \circ c) \cdot b + a \cdot (P(c) \circ b - P(b) \circ c) + a \cdot b \cdot (P(1_A) \circ c - P(c) \circ 1_A) \\
& - P(c) \circ (a \cdot b) + (P(a) \cdot b + a \cdot P(b)) \circ c
\end{aligned}$$

$$= (P(c)\circ a)\cdot b + a\cdot(P(c)\circ b) - a\cdot b\cdot(P(c)\circ 1_A) - P(c)\circ(a\cdot b)$$
$$= 0.$$

因此，$(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是一个 Jacobi代数。

□

注2.7。 注意，如果 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，那么 $(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 也是 [2], 中定义的转置泊松代数，其中 $[\cdot,\cdot]$ 由方程 (13) 定义。

Jacobi-Novikov-Poisson 代数在 Jacobi代数的仿射化构造中具有重要作用。

定理2.8。设 A 是一个具有两个二元运算 $\cdot$和 $\circ$的向量空间 $1_A \in A$，且 k 是特征为*0*的域，其单位元为 *1*。在 $A[t, t^{-1}] := A \otimes k[t, t^{-1}]$ 上分别由方程 *(4)* 和 *(3)* 定义两个二元运算 $\cdot$ 和 $[\cdot,\cdot]$。那么，$(A[t, t^{-1}], \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是一个单位元为 $1_A 1$ 的 *Jacobi*代数，当且仅当 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。

证明。显然，$(A[t, t^{-1}], \cdot)$ 是含幺交换结合代数，且其单位元为 $1_A 1$，当且仅当 $(A, \cdot)$ 是含幺交换结合代数。根据 [6], ，$(A[t, t^{-1}], [\cdot,\cdot])$ 是李代数，当且仅当 $(A, \circ)$ 是 Novikov代数。设 a、b、c $\in A$，且 m、n、l $\in \mathbb{Z}$。则有

$$\begin{aligned}
0 &= [ct^l, (a\cdot b)t^{m+n}] - [ct^l, at^m]\cdot bt^n - at^m\cdot[ct^l, bt^n] - (a\cdot b)t^{m+n}\cdot[1_A 1, ct^l] \\
&= l(c\circ(a\cdot b))t^{m+n+l-1} - (m+n)((a\cdot b)\circ c)t^{m+n+l-1} - (l(c\circ a)t^{m+l-1} - m(a\circ c)t^{m+l-1})\cdot bt^n \\
&\quad -at^m\cdot(l(c\circ b)t^{n+l-1} - n(b\circ c)t^{n+l-1}) - (a\cdot b)t^{m+n}\cdot(-l(c\circ 1_A)t^{l-1}) \\
&= \Big(l(c\circ(a\cdot b) - (c\circ a)\cdot b - (c\circ b)\cdot a + (c\circ 1_A)\cdot a\cdot b) + m(-(a\cdot b)\circ c + (a\circ c)\cdot b) \\
&\quad +n(-(a\cdot b)\circ c + (b\circ c)\cdot a)\Big)t^{m+n+l-1}.
\end{aligned}$$

然后，通过比较系数*l*、*m* 和*n*，我们得到方程（2）成立，当且仅当方程（10）和（11）成立。证明完毕。

□

令（$\mathbf{k}[t, t^{-1}], \cdot$) 为劳朗多项式代数，并令$P = \frac{d}{dt}$。根据注2.4，（$\mathbf{k}[t, t^{-1}]$, $\cdot, \diamond$) 是右Jacobi Novikov-Poisson代数，其中 $\diamond$ 定义为

$$t^m \diamond t^n = \frac{d}{dt}(t^m)\cdot t^n = mt^{m+n-1} \quad \text{for all } m, n \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

根据这一观察和定理2.8，我们可以从 Jacobi Novikov-Poisson代数和右Jacobi Novikov-Poisson代数构造 Jacobi代数。

定理 2.9。 设 $(A, \cdot_1, \circ)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数，且$(B, \cdot_2, \diamond)$ 是一个右*Jacobi Novikov-Poisson*代数。在 $A \otimes B$ 上定义两个二元运算 $\cdot$ 和 $[\cdot,\cdot]$，其中

$$(a_1\otimes a_2)\cdot(b_1\otimes b_2) = a_1\cdot_1 b_1\otimes a_2\cdot_2 b_2\ , \tag{15}$$

$$[a_1\otimes a_2, b_1\otimes b_2] = a_1\circ b_1\otimes a_2\diamond b_2 - b_1\circ a_1\otimes b_2\diamond a_2 \text{ 对所有 } a_1, b_1\in A, a_2, b_2\in B。 \tag{16}$$

那么，$(A \otimes B, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是一个以 $1_A\otimes 1_B$ 为单位元的 *Jacobi*代数。

证明。 显然，$(A \otimes B, \cdot)$ 是一个以 $1_A \otimes 1_B$ 为单位元的含幺交换结合代数。根据 [14, 定理 2。9], $(A \otimes B, [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。此外，对于所有 $a_1,b_1,c_1 \in A$和 $a_2,b_2,c_2 \in B$，有

$$\begin{aligned}
& [c_1 \otimes c_2, (a_1 \otimes a_2)\cdot(b_1 \otimes b_2)] - [c_1 \otimes c_2, a_1 \otimes a_2]\cdot(b_1 \otimes b_2) - (a_1 \otimes a_2)\cdot[c_1 \otimes c_2, b_1 \otimes b_2] \\
& -(a_1 \otimes a_2)\cdot(b_1 \otimes b_2)\cdot[1_A \otimes 1_B, c_1 \otimes c_2] \\
= \; & [c_1 \otimes c_2, a_1 \cdot_1 b_1 \otimes a_2 \cdot_2 b_2] - (c_1 \circ a_1 \otimes c_2 \diamond a_2 - a_1 \circ c_1 \otimes a_2 \diamond c_2)\cdot(b_1 \otimes b_2) \\
& -(a_1 \otimes a_2)\cdot(c_1 \circ b_1 \otimes c_2 \diamond b_2 - b_1 \circ c_1 \otimes b_2 \diamond c_2) \\
& -(a_1 \cdot_1 b_1 \otimes a_2 \cdot_2 b_2)\cdot(1_A \circ c_1 \otimes 1_B \diamond c_2 - c_1 \circ 1_A \otimes c_2 \diamond 1_B) \\
= \; & c_1 \circ (a_1 \cdot_1 b_1) \otimes c_2 \diamond (a_2 \cdot_2 b_2) - (a_1 \cdot_1 b_1) \circ c_1 \otimes (a_2 \cdot_2 b_2) \diamond c_2 \\
& -(c_1 \circ a_1) \cdot_1 b_1 \otimes (c_2 \diamond a_2) \cdot_2 b_2 + (a_1 \circ c_1) \cdot_1 b_1 \otimes (a_2 \diamond c_2) \cdot_2 b_2 \\
& -a_1 \cdot_1 (c_1 \circ b_1) \otimes a_2 \cdot_2 (c_2 \diamond b_2) + a_1 \cdot_1 (b_1 \circ c_1) \otimes a_2 \cdot_2 (b_2 \diamond c_2) \\
& -a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 (1_A \circ c_1) \otimes a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 (1_B \diamond c_2) + a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 (c_1 \circ 1_A) \otimes a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 (c_2 \diamond 1_B) \\
= \; & \Big(c_1 \circ (a_1 \cdot_1 b_1) - (c_1 \circ a_1) \cdot_1 b_1 - a_1 \cdot_1 (c_1 \circ b_1) + a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 (c_1 \circ 1_A)\Big) \otimes c_2 \diamond (a_2 \cdot_2 b_2) \\
& +(a_1 \cdot_1 b_1) \circ c_1 \otimes \Big(-(a_2 \cdot_2 b_2) \diamond c_2 + (a_2 \diamond c_2) \cdot_2 b_2 + a_2 \cdot_2 (b_2 \diamond c_2) - a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 (1_B \diamond c_2)\Big) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

因此，等式（2）成立。因此，$(A \otimes B, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是一个 Jacobi代数。 □

2.2. **低维 Jacobi Novikov-Poisson代数的分类**。设 $(A_1, \cdot_1, \circ_1)$ 和 $(A_2, \cdot_2, \circ_2)$ 是两个 Jacobi Novikov-Poisson代数。若双射线性映射 $\varphi : A_1 \to A_2$是从 $(A_1, \cdot_1, \circ_1)$ 到 $(A_2, \cdot_2, \circ_2)$ 的一个**同构**，则 φ 是含幺交换结合代数和 Novikov代数的同态。注意，若 φ 是从 $(A_1, \cdot_1)$ 到 $(A_2, \cdot_2)$ 的含幺交换结合代数同态，则 $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$。

根据 Jacobi Novikov-Poisson 代数同构的定义，我们可以设$\{e_1 = 1_A、e_2,.....e_n\}$是 (A, ·) 的一组基。对每个 i, j $\in \{1,.....n\}$，设 $e_i \cdot e_j = \sum^n k=1 c_i^k j e_k$，且 $e_i \circ e\, j = \sum^n k=1 d_i^k j e_k$。那么，(A, ·) 和 (A, ∘) 分别由特征矩阵确定。

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n c_{11}^k e_k & \cdots & \sum_{k=1}^n c_{1n}^k e_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n c_{n1}^k e_k & \cdots & \sum_{k=1}^n c_{nn}^k e_k \end{pmatrix}, \; \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n d_{11}^k e_k & \cdots & \sum_{k=1}^n d_{1n}^k e_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n d_{n1}^k e_k & \cdots & \sum_{k=1}^n d_{nn}^k e_k \end{pmatrix}.$$

显然，Jacobi Novikov-Poisson 代数 $(A, \cdot, \circ)$ 由 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$决定。

接下来，我们将给出 $\mathbb{C}$上维数为 2 和 3 的 Jacobi-Novikov-Poisson 代数在同构意义下的分类。

命题 2.10. 设$(A, \cdot, \circ)$是定义在 $\mathbb{C}$ 上的二维 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。那么$(A, \cdot, \circ)$同构于以下情形之一：

Type	(A, ·)的特征矩阵	(A, ∘)的特征矩阵
(J1)	$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1 e_1 & k_2 e_2 \\ k_1 e_2 \end{pmatrix}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$

续表。

Type	·的特征矩阵$(A,)$	∘的特征矩阵$(A,)$
(J2)	$\begin{pmatrix} e_2 & \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2 & k_1e_2 \\ k_1e_2 & \end{pmatrix}$, $k_1,k_2\in\mathbb{C}$
(J3)	$\begin{pmatrix} e_2 & \\ e_2 & _2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+k_2e_2 & (k_1+k_2)e_2 \\ (k_1+k_2)\ e_2 & \end{pmatrix}$, $k_1,k_2\in\mathbb{C}$

证明. 根据 $\mathbb{C}$ 中的分类结果，定义在 [28], 上的二维含幺交换结合代数 $(A,\ \cdot)$ 是以下情形之一：

$$\text{(A1)}: e_1\cdot e_1=e_1,\ e_1\cdot e_2=e_2\cdot e_1=e_2,\ e_2\cdot e_2=0;$$

$$\text{(A2)}: e_1\cdot e_1=e_1,\ e_1\cdot e_2=e_2\cdot e_1=e_2,\ e_2\cdot e_2=e_2.$$

设（A，$\circ_1$）是一个 Novikov代数，其乘法为

$$e_1\circ_1 e_1=l_1e_1+l_2e_2,\ e_1\circ_1 e_2=l_3e_1+l_4e_2,\ e_2\circ_1 e_1=l_5e_1+l_6e_2,\ e_2\circ_1 e_2=l_7e_1+l_8e_2.$$

情形 1： 假设（A，$\cdot$，$\circ_1$）是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，其中 $\cdot$ 由类型（A1）给出。由方程（5）、（6）、（10）和（11）可得 $l_1=l_6, l_3=l_5=l_7=l_8=0$。因此得到

$$e_1\circ_1 e_1=l_1e_1+l_2e_2,\ e_1\circ_1 e_2=l_4e_2,\ e_2\circ_1 e_1=l_1e_2,\ e_2\circ_1 e_2=0.$$

设 φ 是（A，$\cdot$）的一个自同构。于是有 $\varphi(e_1)=e_1$，且 $\varphi(e_2)=ae_2$，其中$a\in\mathbf{k}$非零。因此，φ 在A 上诱导出 Novikov 代数结构 $\circ_2$，其定义为$a\circ_2 b$ {v35>（a） $\circ_1\varphi^{-1}$（b）)，对任意a、$b\in A$均成立。注意，

$$e_1\circ_2 e_1=l_1e_1+l_2ae_2,\ e_1\circ_2 e_2=l_4e_2,\ e_2\circ_2 e_1=l_1e_2,\ e_2\circ_2 e_2=0.$$

若$l_2=0$，则（A，$\cdot$，$\circ_1$）同构于类型（J1）。若$l_2\neq 0$，则通过取$a=l_2^{-1}$，（A，$\cdot$，$\circ_1$）同构于类型（J2）。

情形 2： 设（A，$\cdot$，$\circ_1$）是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，且 $\cdot$ 由类型（A2）给出。由方程（5）、（6）、（10）和（11）可得 $l_1+l_2=l_4=l_6=l_8, l_3=l_5=l_7=0$。因此我们得到

$$e_1\circ_1 e_1=l_1e_1+l_2e_2,\ e_1\circ_1 e_2=e_2\circ_1 e_1=e_2\circ_1 e_2=(l_1+l_2)e_2.$$

设 φ 是（A，$\cdot$）的一个自同构。则有 $\varphi=\mathrm{id}$ 或 $\varphi(e_1)=e_1$ 且 $\varphi(e_2)=e_1-e_2$。也就是说，（A，$\cdot$）的自同构群同构于 $\mathbb{Z}_2$。因此，我们得到类型（J3）。□

命题 2.11。设（A，$\cdot$，$\circ$）是 $\mathbb{C}$ 上的一个3 维 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。则（A，$\cdot$，$\circ$）同构于以下情形之一：

Type	特征矩阵 $(A,\cdot)$	特征矩阵 $(A,\circ)$
(J1)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1 & k_2e_2+k_3e_3 & (2k_2-k_1)e_3 \\ k_1e_2 & k_2e_3 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J2)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_3 & k_2e_2+k_3e_3 & (2k_2-k_1)e_3 \\ k_1e_2 & k_2e_3 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$

续表。

Type	特征$(A,\cdot)$的矩阵	$(A,\circ)$的特征矩阵
(J3)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2+e_3 & k_2e_2+k_3e_3 & (2k_2-k_1)e_3 \\ k_1e_2+e_3 & k_2e_3 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J4)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2 & k_2e_2+k_3e_3 & (2k_2-k_1)e_3 \\ k_1e_2+e_3 & k_2e_3 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J5)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_2 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+k_2e_2+e_3 & (k_1+k_2)e_2 & k_3e_3 \\ (k_1+k_2)e_2 & (k_1+k_2)e_2 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J6)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_2 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+k_2e_2 & (k_1+k_2)\ e_2 & k_3e_3 \\ (k_1+k_2)\ e_2 & (k_1+k_2)\ e_2 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J7)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_2 & 0 \\ e_3 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3 & (k_1+k_2)e_2 & (k_1+k_3)e_3 \\ (k_1+k_2)e_2 & (k_1+k_2)e_2 & 0 \\ (k_1+k_3)e_3 & 0 & (k_1+k_3)\ e_3 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J8)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2 & e_3 & k_2e_2+k_3e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J9)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2 & e_2+e_3 & k_2e_2+k_3e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J10)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_3 & k_2e_2+k_3e_3 & e_2 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J11)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_3 & k_2e_2+k_3e_3 & e_2+e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J12)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2 & e_2 & k_2e_2+k_3e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J13)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2 & 0 & k_2e_2+k_3e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J14)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_3 & k_2e_2+k_3e_3 & e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J15)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_3 & k_2e_2+k_3e_3 & 0 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$

续。

Type	特征$(A,\cdot)$的矩阵	$(A,\circ)$的特征矩阵
(J16)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2+e_3 & e_2+e_3 & k_2e_2+k_3e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J17)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2+e_3 & e_3 & k_2e_2+k_3e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J18)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2+e_3 & e_2 & k_2e_2+k_3e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J19)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1+e_2+e_3 & 0 & k_2e_2+k_3e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J20)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1 & k_2e_2+k_3e_3 & e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J21)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1 & k_2e_2+k_3e_3 & e_2 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J22)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1 & k_2e_2+k_3e_3 & 0 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$
(J23)	$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k_1e_1 & k_2e_2+k_3e_3 & e_2+e_3 \\ k_1e_2 & 0 & 0 \\ k_1e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{C}$

证明。 基于 $\mathbb{C}$ 中维数为 3 的含幺交换结合代数的分类结果 [28], , 通过类似于命题 2.10中的方法，我们可以通过直接计算得到 $\mathbb{C}$上的三维 Jacobi Novikov-Poisson 代数的分类。 □

最后，我们考虑那些 Novikov 代数结构为单且特征为 $\mathbf{k}=p>2$的有限维 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。设 $(A,\cdot,\circ)$ 是这样一个维数为 ≥ 2的 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。根据 [32], $(A,\cdot,\circ)$ 有一组基 $\{y_{-1}、y_0,\ldots\ldots,y_{p^n-2}\}$，其中存在某个正整数 n 使得

$$y_i\circ y_j=\binom{i+j+1}{j}y_{i+j}+\delta_{i,-1}\delta_{j,-1}ay_{p^n-2}+\delta_{i,-1}\delta_{j,0}by_{p^n-2}$$

对于每个$i、j=-1、0、\ldots、p^n-2$，其中$a、b\in\mathbf{k}$。

命题 2.12。 设 3 维 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数 $\mathbf{k}$ 定义在域$\mathrm{char}\,\mathbf{k}=3$上，其中$(A,\circ)$ 是单代数，则它同构于下列 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数$(A=\mathbf{k}y_{-1}\oplus\mathbf{k}y_0\oplus\mathbf{k}y_1,\cdot,\circ)$，其定义如下：

$$y_{-1}\cdot y_{-1}=k_1y_{-1}+k_2y_0+k_3y_1,\ y_{-1}\cdot y_0=y_0\cdot y_{-1}=k_1y_0-k_2y_1,$$
$$y_{-1}\cdot y_1=y_1\cdot y_{-1}=k_1y_1,\ y_0\cdot y_0=-k_1y_1,\ y_0\cdot y_1=y_1\cdot y_0=y_1\cdot y_1=0,$$
$$y_i\circ y_j=\binom{i+j+1}{j}y_{i+j}+\delta_{i,-1}\delta_{j,-1}ay_1+\delta_{i,-1}\delta_{j,0}by_1\quad \textit{for all } i,j\in\{-1,0,1\},$$

其中 $1_A=k_1^{-1}y_{-1}-k_1^{-2}k_2y_0-(k_1^{-2}k_3+k_1^{-3}k_2^2)y_1$，且 $k_1\in\mathbf{k}^\times$、$k_2,k_3\in\mathbf{k}$。

证明。经过冗长但直接的计算即可得出。 □

类似于 [30], 特征为 $\mathbf{k}=p>2$且 $\dim A=p^n$的一般情形，我们可以给出一个具有单诺维科夫代数结构的 Jacobi Novikov-Poisson代数的例子。

例 2.13。设 $\operatorname{char}\mathbf{k}=p>2$. 则 $(A=\bigoplus_{i=-1}^{p^n-2}\mathbf{k}y_i,\cdot,\circ)$ 是一个具有单 Novikov 代数结构的 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，其中

$$y_i\cdot y_j=y_j\cdot y_i=\binom{i+j+2}{j+1}y_{i+j+1}\quad \text{for all } i,j\in\{-1,0,\dots,p^n-2\},$$
$$y_i\circ y_j=\binom{i+j+1}{j}y_{i+j}+\delta_{i,-1}\delta_{j,-1}ay_{p^n-2}+\delta_{i,-1}\delta_{j,0}by_{p^n-2}\quad \text{for all } i,j\in\{-1,0,\dots,p^n-2\}.$$

2.3. **由已知 Jacobi-Novikov-Poisson 代数构造 Jacobi Novikov-Poisson代数**。首先，我们证明两个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数的张量积上自然地具有 Jacobi-Novikov-Poisson 代数结构。

命题 2.14。设 $(A_1,\cdot_1,\circ_1)$ 和 $(A_2,\cdot_2,\circ_2)$ 为 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。在 $A_1\otimes A_2$ 上定义两个二元运算 $\cdot$ 和 $\circ$，使得

$$(a_1\otimes a_2)\cdot(b_1\otimes b_2)=a_1\cdot_1b_1\otimes a_2\cdot_2b_2,(a_1\otimes a_2)\circ(b_1\otimes b_2)=a_1\circ_1b_1\otimes a_2\cdot_2b_2+a_1\cdot_1b_1\otimes a_2\circ_2b_2$$

对于所有 $a_1,b_1\in A_1,a_2,b_2\in A_2$。

那么$(A_1\otimes A_2,\cdot,\circ)$ 是一个以$1_{A_1}\otimes 1_{A_2}$为单位元的 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。证明。显然，$(A_1\otimes A_2,\cdot)$ 是一个以 $1_{A_1}\otimes 1_{A_2}$ 为单位元的含幺交换结合代数。设 $a_1,b_1,c_1\in A_1$ 且 $a_2,b_2,c_2\in A_2$。则有

$$\begin{aligned}
&((a_1\otimes a_2)\circ(b_1\otimes b_2))\circ(c_1\otimes c_2)-(a_1\otimes a_2)\circ((b_1\otimes b_2)\circ(c_1\otimes c_2))\\
&-\Big(((b_1\otimes b_2)\circ(a_1\otimes a_2))\circ(c_1\otimes c_2)-(b_1\otimes b_2)\circ((a_1\otimes a_2)\circ(c_1\otimes c_2))\Big)\\
=\ &(a_1\circ_1b_1\otimes a_2\cdot_2b_2+a_1\cdot_1b_1\otimes a_2\circ_2b_2)\circ(c_1\otimes c_2)\\
&-(a_1\otimes a_2)\circ(b_1\circ_1c_1\otimes b_2\cdot_2c_2+b_1\cdot_1c_1\otimes b_2\circ_2c_2)\\
&-\Big((b_1\circ_1a_1\otimes b_2\cdot_2a_2+b_1\cdot_1a_1\otimes b_2\circ_2a_2)\circ(c_1\otimes c_2)\\
&-(b_1\otimes b_2)\circ(a_1\circ_1c_1\otimes a_2\cdot_2c_2+a_1\cdot_1c_1\otimes a_2\circ_2c_2)\Big)\\
=\ &(a_1\circ_1b_1)\circ_1c_1\otimes a_2\cdot_2b_2\cdot_2c_2+(a_1\circ_1b_1)\cdot_1c_1\otimes(a_2\cdot_2b_2)\circ_2c_2\\
&+(a_1\cdot_1b_1)\circ_1c_1\otimes(a_2\circ_2b_2)\cdot_2c_2+a_1\cdot_1b_1\cdot_1c_1\otimes(a_2\circ_2b_2)\circ_2c_2\\
&-a_1\circ_1(b_1\circ_1c_1)\otimes a_2\cdot_2b_2\cdot_2c_2-a_1\cdot_1(b_1\circ_1c_1)\otimes a_2\circ_2(b_2\cdot_2c_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-a_1\circ_1(b_1\cdot_1 c_1)\otimes a_2\cdot_2(b_2\circ_2 c_2)-a_1\cdot_1 b_1\cdot_1 c_1\otimes a_2\circ_2(b_2\circ_2 c_2)\\
&-(b_1\circ_1 a_1)\circ_2 c_1\otimes a_2\cdot_2 b_2\cdot_2 c_2-(b_1\circ_1 a_1)\cdot_1 c_1\otimes(b_2\cdot_2 a_2)\circ_2 c_2\\
&-(b_1\cdot_1 a_1)\circ_1 c_1\otimes(b_2\circ_2 a_2)\cdot_2 c_2-a_1\cdot_1 b_1\cdot_1 c_1\otimes(b_2\circ_2 a_2)\circ_2 c_2\\
&+b_1\circ_1(a_1\circ_1 c_1)\otimes a_2\cdot_2 b_2\cdot_2 c_2+b_1\cdot_1(a_1\circ_1 c_1)\otimes b_2\circ_2(a_2\cdot_2 c_2)\\
&+b_1\circ_1(a_1\cdot_1 c_1)\otimes b_2\cdot_2(a_2\circ_2 c_2)+a_1\cdot_1 b_1\cdot_1 c_1\otimes b_2\circ_2(a_2\circ_2 c_2)\\
=\;&\Big((a_1\circ_1 b_1)\cdot_1 c_1-a_1\circ_1(b_1\cdot_1 c_1)-(b_1\circ_1 a_1)\cdot_1 c_1+b_1\circ_1(a_1\cdot_1 c_1)\Big)\otimes(a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2\\
&+(a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1\otimes\Big((a_2\circ_2 b_2)\cdot_2 c_2-a_2\circ_2(b_2\cdot_2 c_2)-(b_2\circ_2 a_2)\cdot_2 c_2+b_2\circ_2(a_2\cdot_2 c_2)\Big)\\
=\;&\Big(-b_1\cdot_1(a_1\circ_1 c_1)+b_1\cdot_1 c_1\cdot_1(a_1\circ_1 1_{A_1})+a_1\cdot_1(b_1\circ_1 c_1)-a_1\cdot_1 c_1\cdot_1(b_1\circ_1 1_{A_1})\Big)\\
&\otimes(a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2+(a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1\otimes\Big(-b_2\cdot_2(a_2\circ_2 c_2)+b_2\cdot_2 c_2\cdot_2(a_2\circ_2 1_{A_2})\\
&+a_2\cdot_2(b_2\circ_2 c_2)-a_2\cdot_2 c_2\cdot_2(b_2\circ_2 1_{A_2})\Big)\\
=\;&0.
\end{aligned}
$$

类似地，可以直接验证方程（6）、（10）和（11）成立。因此，$(A_1\otimes A_2,\cdot,\circ)$ 是一个以 $1_{A_1}\otimes 1_{A_2}$ 为单位元的 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。□

接下来，我们将介绍如何从已知的 Jacobi-Novikov-Poisson 代数直接构造若干 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。

命题 2.15. 设$(A,\cdot,\circ)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。对于任意固定元素$\xi\in A$，我们在 A 上定义另一个二元运算 $\times$，如下：

$$a\times b:=a\circ b+\xi\cdot a\cdot b\quad \textit{for all } a,b\in A.$$

那么，$(A,\cdot,\times)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。

证明。 设a、b、$c\in A$。于是有

$$
\begin{aligned}
&(a\times b)\times c-a\times(b\times c)-\Big((b\times a)\times c-b\times(a\times c)\Big)\\
=\;&(a\circ b+\xi\cdot a\cdot b)\times c-a\times(b\circ c+\xi\cdot b\cdot c)-\Big((b\circ a+\xi\cdot b\cdot a)\times c-b\times(a\circ c+\xi\cdot a\cdot c)\Big)\\
=\;&(a\circ b+\xi\cdot a\cdot b)\circ c+\xi\cdot(a\circ b+\xi\cdot a\cdot b)\cdot c-a\circ(b\circ c+\xi\cdot b\cdot c)\\
&-\xi\cdot a\cdot(b\circ c+\xi\cdot b\cdot c)-\Big((b\circ a+\xi\cdot b\cdot a)\circ c+\xi\cdot(b\circ a+\xi\cdot b\cdot a)\cdot c\\
&-b\circ(a\circ c+\xi\cdot a\cdot c)-\xi\cdot b\cdot(a\circ c+\xi\cdot a\cdot c)\Big)\\
=\;&(a\circ b)\circ c-a\circ(b\circ c)+(\xi\cdot a\cdot b)\circ c+(\xi\cdot c)\cdot(a\circ b)-a\circ(b\cdot(\xi\cdot c))-\xi\cdot a\cdot(b\circ c)\\
&-\Big((b\circ a)\circ c-b\circ(a\circ c)+(\xi\cdot b\cdot a)\circ c+(\xi\cdot c)\cdot(b\circ a)-b\circ(a\cdot(\xi\cdot c))-\xi\cdot b\cdot(a\circ c)\Big)\\
=\;&(b\circ a)\circ c-b\circ(a\circ c)+(\xi\cdot b\cdot a)\circ c-b\cdot(a\circ(\xi\cdot c))+b\cdot(\xi\cdot c)\cdot(a\circ 1_A)-\xi\cdot b\cdot(a\circ c)\\
&-\Big((b\circ a)\circ c-b\circ(a\circ c)+(\xi\cdot b\cdot a)\circ c-a\cdot(b\circ(\xi\cdot c))\\
&+a\cdot(\xi\cdot c)\cdot(b\circ 1_A)-\xi\cdot b\cdot(a\circ c)\Big)\\
=\;&0.
\end{aligned}
$$

同理，直接验证可知，方程（6）、（10）和（11）成立。因此，（A，$\cdot$，$\times$）是一个Jacobi-Novikov-Poisson 代数。□

推论2.16. 设 $(A,\cdot)$ 是一个含幺交换结合代数，并带有导子 P。对任意固定元素 $\xi\in A$，我们在 A 上定义另一个二元运算 $\times$：

$$a\times b:=a\cdot P(b)+\xi\cdot a\cdot b\quad \textit{for all } a,b\in A.$$

那么 $(A,\cdot,\times)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。

证明. 这可直接由注 2.4 和命题 2.15 得出。 □

例2.17. 设 $(\mathbf{k}[x],\cdot)$ 是 $\mathbf{k}$ 上以x为变量的单变量多项式代数，且 $P=\mathrm{d}\,\mathrm{d}x$。在 A 上定义二元运算 $\circ$：

$$x^m\circ x^n:=x^m\cdot P(x^n)=nx^{m+n-1}\quad \text{for all } m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

由注 2.4，$(\mathbf{k}[x],\cdot,\circ)$ 是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。此外，$(\mathbf{k}[x],\cdot,\circ)$ 是一个含幺微分的Novikov-Poisson 代数。现在在 $\times$ $\mathbf{k}[x]$ 上定义一个新的二元运算：

$$x^m\times x^n:=x^m\circ x^n+x\cdot x^m\cdot x^n=nx^{m+n-1}+x^{m+n+1}\quad \text{for all } m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

注意 $x\times 1=x^2\neq 0$。由推论 2.16，$(\mathbf{k}[x],\cdot,\times)$ 是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，但不是含幺微分的Novikov-Poisson 代数。

命题2.18. 设$(A,\cdot,\circ)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数，且 u 是 A 的一个固定元素。那么$(A,\cdot,\circ_u)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数，其中二元运算 $\circ_u$ 定义为

$$a\circ_u b:=a\circ(u\cdot b)\quad \textit{for all } a,b\in A. \tag{17}$$

证明. 设a、b、c $\in A$。我们得到

$$\begin{aligned}
&(a\circ_u b)\circ_u c-a\circ_u(b\circ_u c)-(b\circ_u a)\circ_u c+b\circ_u(a\circ_u c)\\
=\;&(a\circ(u\cdot b))\circ(u\cdot c)-a\circ(u\cdot(b\circ(u\cdot c)))-(b\circ(u\cdot a))\circ(u\cdot c)+b\circ(u\cdot(a\circ(u\cdot c)))\\
=\;&(a\circ(u\cdot b))\circ(u\cdot c)-a\circ((u\cdot b)\circ(u\cdot c))-(b\circ(u\cdot a))\circ(u\cdot c)+b\circ((u\cdot a)\circ(u\cdot c))\\
=\;&((u\cdot b)\circ a)\circ(u\cdot c)-(u\cdot b)\circ(a\circ(u\cdot c))-((u\cdot a)\circ b)\circ(u\cdot c)+(u\cdot a)\circ(b\circ(u\cdot c))\\
=\;&(u\cdot(b\circ a))\circ(u\cdot c)-u\cdot(b\circ(a\circ(u\cdot c)))-(u\cdot(a\circ b))\circ(u\cdot c)+u\cdot(a\circ(b\circ(u\cdot c)))\\
=\;&u\cdot\Big((b\circ a)\circ(u\cdot c)-b\circ(a\circ(u\cdot c))-(a\circ b)\circ(u\cdot c)+a\circ(b\circ(u\cdot c))\Big)\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
&c\circ_u(a\cdot b)-(c\circ_u a)\cdot b-a\cdot(c\circ_u b)+a\cdot b\cdot(c\circ_u 1_A)\\
=\;&c\circ((u\cdot a)\cdot b)-(c\circ(u\cdot a))\cdot b-a\cdot(c\circ(u\cdot b))+a\cdot b\cdot(c\circ u)\\
=\;&(c\circ(u\cdot a))\cdot b+(u\cdot a)\cdot(c\circ b)-(u\cdot a)\cdot b\cdot(c\circ 1_A)-(c\circ(u\cdot a))\cdot b\\
&-a\cdot(c\circ(u\cdot b))+a\cdot b\cdot(c\circ u)\\
=\;&((a\cdot c)\circ b)\cdot u+b\cdot((a\cdot c)\circ u)-b\cdot u\cdot((a\cdot c)\circ 1_A)-(a\cdot c)\circ(b\cdot u)\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

容易看出，方程(6)和(10)成立。因此，$(A, \cdot, \circ_u)$是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。□

注2.19. 实际上，式（17）由 $\cdot$ and $\circ$的Kantor 积（见 [17]）给出。若u是$(A, \cdot)$中的一个可逆元，则$(A, \cdot, \circ_u)$称为$(A, \cdot, \circ)$的u-共形变形。此外，设$(B, \cdot, \diamond)$是一个右Jacobi Novikov-Poisson代数，且v是$(B, \cdot)$中的一个可逆元。那么根据命题2.18以及Jacobi Novikov-Poisson代数与右Jacobi Novikov-Poisson代数之间的关系，$(B, \cdot, \diamond_v)$是一个右Jacobi Novikov-Poisson代数，其中二元运算 $\diamond_v$ 由下式给出

$$a \diamond_v b := (v \cdot a) \diamond b \quad \text{for all } a, b \in B.$$

我们称$B, \cdot, \diamond_v)$为**v-共形变形**（$B, \cdot, \diamond$）。

接下来，我们给出一个例子，说明Jacobi Novikov-Poisson代数的u-共形变形可以是一个微分Novikov-Poisson代数。

例2.20. 设（$A = \mathbf{k}e_1 \oplus \mathbf{k}e_2 \oplus \mathbf{k}e_3, \cdot, \circ$）是一个三维Jacobi-Novikov-Poisson代数，其非零乘积如下:

$$e_1 \cdot e_1 = e_1,\ e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2,\ e_1 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = e_3,\ e_2 \cdot e_2 = e_2,$$
$$e_1 \circ e_1 = e_3, e_1 \circ e_3 = -e_3.$$

注意，（$A, \cdot, \circ$）不是含幺微分Novikov-Poisson代数。容易看出，$(A, \cdot)$ 的任意可逆元都具有$u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ 的形式，其中 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{k}$，且 $\alpha \neq 0, \alpha + \beta \neq 0$。因此，$(A, \cdot, \circ)$ 的任意u-保形变形都具有$(A, \cdot, \circ_u)$的形式，其对应于 $\circ_u$ 的非零乘积如下:

$$e_1 \circ_u e_1 = (\alpha - \gamma)e_3, \quad e_1 \circ_u e_3 = -\alpha e_3,$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{k}$ 且 $\alpha \neq 0$。特别地，对于任意 $\alpha, \alpha + \beta \in \mathbf{k}^\times$，对应于$u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \alpha e_3$, 的 $(A, \cdot, \circ)$ 的u-保形变形是一个含幺微分Novikov-Poisson代数。

回顾一下，[1]Jacobi代数的**u-共形变形**（$A, \cdot, [\cdot, \cdot]$）是一个三元组（$A, \cdot, [\cdot, \cdot]_u$），其中$u$是（$A, \cdot$）中的一个可逆元，二元运算 $[\cdot, \cdot]_u$ 定义如下:

$$[a, b]_u := u^{-1} \cdot [u \cdot a, u \cdot b] \quad \text{for all } a, b \in A.$$

下面的命题说明，Jacobi-Novikov-Poisson 代数的保形变形和右Jacobi Novikov-Poisson代数的保形变形可以诱导相应Jacobi代数的保形变形。

命题 2.21. 设 $(A, \cdot_1, \circ_u)$ 是 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数 $(A, \cdot_1, \circ)$ 的 u-共形变形，$(B, \cdot_2, \diamond_v)$ 是右*Jacobi Novikov-Poisson*代数 $(B, \cdot_2, \diamond)$ 的 v-共形变形。根据式（*15*）在 $A \otimes B$ 上定义两个二元运算 $\cdot$ 和 $[\cdot, \cdot]_L$，并

$$[a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2]_L = a_1 \circ_u b_1 \otimes a_2 \diamond_v b_2 - b_1 \circ_u a_1 \otimes b_2 \diamond_v a_2,$$

对所有 $a_1, b_1 \in A$ 且 $a_2, b_2 \in B$。则 $(A \otimes B, \cdot, [\cdot, \cdot]_L)$ 是 $(u \otimes v)$-保形变形，其变形对象为$(A \otimes B, \cdot, [\cdot, \cdot])$，其中 $[\cdot, \cdot]$ 由式 *(16)* 定义。

证明。 显然，$u \otimes v$ 是可逆元，属于 $(A \otimes B, \cdot)$。设 $a_1, b_1 \in A$ 且 $a_2, b_2 \in B$。我们得到

$$\begin{aligned}
& [a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2]_L - [a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2]_{u \otimes v} \\
= \; & \Big(a_1 \circ (u \cdot_1 b_1) \otimes (v \cdot_2 a_2) \diamond b_2 - b_1 \circ (u \cdot_1 a_1) \otimes (v \cdot_2 b_2) \diamond a_2\Big) \\
& -(u^{-1} \otimes v^{-1}) \cdot [(u \otimes v) \cdot (a_1 \otimes a_2), (u \otimes v) \cdot (b_1 \otimes b_2)] \\
= \; & \Big(a_1 \circ (u \cdot_1 b_1) \otimes (v \cdot_2 a_2) \diamond b_2 - b_1 \circ (u \cdot_1 a_1) \otimes (v \cdot_2 b_2) \diamond a_2\Big) \\
& -(u^{-1} \otimes v^{-1}) \cdot [u \cdot_1 a_1 \otimes v \cdot_2 a_2, u \cdot_1 b_1 \otimes v \cdot_2 b_2] \\
= \; & \Big(a_1 \circ (u \cdot_1 b_1) \otimes (v \cdot_2 a_2) \diamond b_2 - b_1 \circ (u \cdot_1 a_1) \otimes (v \cdot_2 b_2) \diamond a_2\Big) \\
& -(u^{-1} \otimes v^{-1}) \cdot \Big((u \cdot_1 a_1) \circ (u \cdot_1 b_1) \otimes (v \cdot_2 a_2) \diamond (v \cdot_2 b_2) \\
& -(u \cdot_1 b_1) \circ (u \cdot_1 a_1) \otimes (v \cdot_2 b_2) \diamond (v \cdot_2 a_2)\Big) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

因此，$(A \otimes B, \cdot, [\cdot,\cdot]_L)$ 是 $(u \otimes v)$-保形变形，它由 $(A \otimes B, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 得到。 □

3. Frobenius Jacobi Novikov-Poisson 代数与 Frobenius Jacobi 代数

本节将介绍 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数的定义，给出 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数的一些等价刻画，并给出复数域 $\mathbb{C}$ 上维数为 2 和 3 的 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数在同构意义下的分类。作为应用，我们证明，有限维 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数与有限维 Frobenius 右 Jacobi Novikov-Poisson 代数的张量积上存在自然的 Frobenius Jacobi 代数结构。

3.1. 模、积分与 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数。回顾一下，含幺交换结合代数 (A, ·) 的模是一个二元组 (V, σ)，其中 V 是向量空间，$\sigma : A \to \mathrm{End_k}(V)$ 是满足以下条件的线性映射：$\sigma(a \cdot b)v = \sigma(a)(\sigma(b)v)$，且 $\sigma(1_A)v = v$，其中任意 $a, b \in A$ 和 $v \in V$ 均成立。回顾一下，Novikov代数 (A, ∘) 的双模是一个三元组 (V, l_A, r_A)，其中 V 是向量空间，$l_A, r_A : A \to \mathrm{End_k}(V)$ 是两个线性映射，满足

$$\begin{aligned}
l_A(a)l_A(b)v - l_A(a \circ b)v &= l_A(b)l_A(a)v - l_A(b \circ a)v, \\
l_A(a)r_A(b)v - r_A(b)l_A(a)v &= r_A(a \circ b)v - r_A(b)r_A(a)v, \\
l_A(a \circ b)v &= r_A(b)l_A(a)v, \\
r_A(a)r_A(b)v &= r_A(b)r_A(a)v \quad \text{for all } a, b \in A, v \in V.
\end{aligned}$$

定义 3.1。 Jacobi-Novikov-Poisson 代数（$A, \cdot, \circ$）的**模** 是一个四元组（V, l_A, r_A, σ），其中（V, l_A, r_A）是（$A, \circ$）的双模，（V, σ）是幺交换结合代数（$A, \cdot$）的模，并且它们满足

$r_A(b)(\sigma(a)v) = \sigma(a)(r_A(b)v) = \sigma(a \circ b)v$, (18) $l_A(a \cdot b)v = \sigma(a)(l_A(b)v)$, (19) $l_A(a)(\sigma(b)v) - \sigma(b)(l_A(a)v) = \sigma(a \circ b)v - \sigma(a \circ 1_A)(\sigma(b)v)$, (20) $r_A(a \cdot b)v - \sigma(b)(r_A(a)v) = \sigma(a)(r_A(b)v) - \sigma(a \cdot b)(r_A(1_A)v)$ 对所有 $a, b \in A, v \in V$ 成立。(21)

注意，$(A, L_{A,\circ}, R_{A,\circ}, L_{A,\cdot})$ 是 $(A, \cdot, \circ)$ 的一个模，称为 $(A, \cdot, \circ)$ 的**伴随模**。

设 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，V 是一个向量空间。对于线性映射 $\varphi : A \to \mathrm{End}_k(V)$，定义线性映射 $\varphi^* : A \to \mathrm{End}_k(V^*)$ 如下：

$$\langle \varphi^*(a)f, v\rangle = -\langle f, \varphi(a)v\rangle \quad \text{for all } a \in A, f \in V^*, v \in V,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 V 与 V^* 之间的通常配对。

命题 3.2。设 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数，且 (V, l_A, r_A, σ) 是 $(A, \cdot, \circ)$ 的一个模。那么 $(V^*, l_A^* + r_A^*, -r_A^*, -\sigma^*)$ 是 $(A, \cdot, \circ)$ 的一个模。

证明。已知 $(V^*, -\sigma^*)$ 是 $(A, \cdot)$ 的一个模。由 [14, 命题 3.3], $(V^*, l_A^* + r_A^*, -r_A^*)$ 是 $(A, \circ)$ 的一个双模。设 $a, b \in A$，$f \in V^*$ 且 $v \in V$。我们得到

$$\begin{aligned}
&((l_A^* + r_A^*)(a \cdot b)f)(v) - \Big((-\sigma^*)(a)((l_A^* + r_A^*)(b)f)\Big)(v)\\
=\ & -f((l_A + r_A)(a \cdot b)v) - ((l_A^* + r_A^*)(b)f)(\sigma(a)v)\\
=\ & -f\Big(\sigma(a)(l_A(b)v) + \sigma(b)(r_A(a)v) + \sigma(a)(r_A(b)v) - \sigma(a \cdot b)(r_A(1_A)v)\\
& \quad -l_A(b)(\sigma(a)v) - r_A(b)(\sigma(a)v)\Big)\\
=\ & -f\Big(\sigma(b \circ 1_A)(\sigma(a)v) - \sigma(b \circ a)v + \sigma(b)(r_A(a)v) - \sigma(a \cdot b)(r_A(1_A)v)\Big)\\
=\ & -f\Big(\sigma((a \cdot b) \circ 1_A)v - \sigma(a \cdot b)(r_A(1_A)v)\Big)\\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

因此，方程（19）成立。类似地，可以直接验证方程（18）、（20）和（21）成立。证明完毕。□

设 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。则伴随模 $(A, L_{A,\circ}, R_{A,\circ}, L_{A,\cdot})$ 给出 $(A, \cdot, \circ)$ 的一个模 $(A^*, L_{A,\circ}^* + R_{A,\circ}^*, -R_{A,\circ}^*, -L_{A,\cdot}^*)$。基于此，我们引入 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数的定义。

定义 3.3. 有限维 Jacobi-Novikov-Poisson 代数 $(A, \cdot, \circ)$ 称为 Frobenius 代数，如果 $(A, L_{A,\circ}, R_{A,\circ}, L_{A,\cdot})$ 与 $(A^*, L_{A,\circ}^* + R_{A,\circ}^*, -R_{A,\circ}^*, -L_{A,\cdot}^*)$ 作为 $(A, \circ, \cdot)$ 的模同构。

Ne接下来，我们引入 Jacobi-Novikov-Poisson 代数上的积分的定义 a.

定义 3.4. Jacobi-Novikov-Poisson 代数 $(A, \cdot, \circ)$ 上的**积分**是一个元素 $v \in A^*$，满足

$$v((a \circ b) \cdot c) = -v(b \cdot (a \circ c + c \circ a)) \quad \text{for all } a, b, c \in A. \tag{22}$$

我们用 $\int_A$ 表示 $(A, \cdot, \circ)$ 上积分构成的向量空间。若积分 v 满足：对于所有 $b \in A$，若 $v(a \cdot b) = 0$，则 $a = 0$，则称其为**非退化**的。

注 3.5. 取 $b = c = 1_A$ 代入等式 (22)，可得 $2v(a \circ 1_A) = -v(1_A \circ a)$，对所有 $a \in A$。

对于向量空间 A 上的双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot, \cdot) : A \times A \to k$，若对所有 $a, b \in A$ 都有 $\mathcal{B}(a, b) = \mathcal{B}(b, a)$，则称 $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ 为对称形式。此外，若 $A^\perp = 0$，即 $A^\perp = \{a \in A \mid \mathcal{B}(a, b) = 0 \text{ 对所有 } b \in A\}$，则称对称双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ 为非退化形式。

定义 3.6。 设 $(A,\cdot,\circ)$ 是一个 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。若双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 定义在 $(A,\cdot,\circ)$ 上并满足以下条件，则称其为**不变的**：

$$\mathcal{B}(a\cdot b,c) = \mathcal{B}(a,b\cdot c), \tag{23}$$

$$\mathcal{B}(a\circ b,c) = -\mathcal{B}(b,a\circ c+c\circ a) \text{ for all } a,b,c\in A. \tag{24}$$

一个**二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数**是一个四元组（A，$\cdot$，$\circ$，$\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$），其中（A，$\cdot$，$\circ$）是一个 Jacobi Novikov-Poisson代数，且 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 是一个非退化对称不变双线性形式。

设B是一个配备二元运算 $\diamond$的向量空间。如果（B，$\cdot$，$\circ$，$\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$）是一个二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，且对于所有a、$b\in=b\diamond a$，都有 $a\circ b$，那么（B，$\cdot$，$\diamond$，$\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$）称为一个**二次右 Jacobi-Novikov-Poisson 代数**。

回顾 [23]，单**位交换微**分**Frobenius 代数** $(A,\cdot,P,\mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是一个带有非退化对称双线性形式$\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 的单分代数（A，$\cdot$，P），且满足等式（23）。接下来，我们将给出从含幺交换微分 Frobenius 代数构造二次 Jacobi Novikov-Poisson 代数的方法。分。

命题 3.7。 设 $(A,\cdot,P,\mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是定义在$\mathbf{k}$ 上的含幺交换微分 *Frobenius* 代数，且$\operatorname{char}\mathbf{k}\neq 2$。设$\hat{}P$是相对于 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 的伴随算子，满足

$$\mathcal{B}(P(a),b)=\mathcal{B}(a,\hat{P}(b)) \quad \textit{for all } a,b\in A.$$

对所有 $a,b\in A$，定义 $\circ_q b := a\cdot(P+q\hat{}P)b$，其中 $q\in\mathbf{k}$。那么，$(A,\cdot,\circ_q,\mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是二次 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数，当且仅当 $q=-\frac{1}{2}$或$\hat{}P$ 是$(A,\cdot)$的导子。

$\hat{}$ 证明。由 [23, 命题 3.3], (A, ·, P, P) 是一个含幺可容许交换微分代数。因此，根据命题 2.5，$(A,\cdot,\circ_q)$ 是 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。由 [15,命题 2.33], $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 在 $(A,\circ_q)$ 上满足方程 (24)，当且仅当 $q=-\frac{1}{2}$ 或 $\hat{}$P 是 $(A,\cdot)$ 的导子。因此结论成立。□

例 3.8。 设$\mathbf{k}$ 是一个特征为$\mathbf{k}=0$的域，并且（$A=\mathbf{k}e_1\oplus\mathbf{k}e_2\oplus\mathbf{k}e_3\oplus\mathbf{k}e_4,\cdot,P,\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$) 是一个四维含单位交换微分Frobenius代数，其非零乘积为

$$e_1\cdot e_1=e_1,\ e_1\cdot e_2=e_2\cdot e_1=e_2,\ e_1\cdot e_3=e_3\cdot e_1=e_3,$$
$$e_1\cdot e_4=e_4\cdot e_1=e_4,\ e_2\cdot e_2=e_3,\ e_2\cdot e_3=e_3\cdot e_2=e_4,$$

导子P由下式给出

$$P(e_1)=0,\ P(e_2)=\tfrac{1}{3}e_2+\tfrac{1}{2}e_3+e_4,\ P(e_3)=\tfrac{2}{3}e_3+e_4,\ P(e_4)=e_4,$$

对称双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 由下式给出

$$\mathcal{B}(e_1,e_4)=\mathcal{B}(e_4,e_1)=\mathcal{B}(e_2,e_3)=\mathcal{B}(e_3,e_2)=1,$$

当 $\mathcal{B}(e_i,e_j)=0$ 对所有其他的数对 (i,j) 均成立。经计算，$\hat{}P$ 可表示为

$$\hat{P}(e_1)=e_1+e_2+e_3,\ \hat{P}(e_2)=\tfrac{2}{3}e_2+\tfrac{1}{2}e_3,\ \hat{P}(e_3)=\tfrac{1}{3}e_3,\ \hat{P}(e_4)=0.$$

由命题 3.7 可知，$(A, \cdot, \circ_{-\frac{1}{2}}, \mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是一个二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，其中 $\circ_{-\frac{1}{2}}$ 的非零乘积如下：

$$e_1 \circ_{-\frac{1}{2}} e_1 = -\tfrac{1}{2}e_1 - \tfrac{1}{2}e_2 - \tfrac{1}{2}e_3,\ e_1 \circ_{-\frac{1}{2}} e_2 = \tfrac{1}{4}e_3 + e_4,\ e_1 \circ_{-\frac{1}{2}} e_3 = \tfrac{1}{2}e_3 + e_4,$$
$$e_1 \circ_{-\frac{1}{2}} e_4 = e_4,\ e_2 \circ_{-\frac{1}{2}} e_1 = -\tfrac{1}{2}e_2 - \tfrac{1}{2}e_3 - \tfrac{1}{2}e_4,\ e_2 \circ_{-\frac{1}{2}} e_2 = \tfrac{1}{4}e_4,\ e_2 \circ_{-\frac{1}{2}} e_3 = \tfrac{1}{2}e_4,$$
$$e_3 \circ_{-\frac{1}{2}} e_1 = -\tfrac{1}{2}e_3 - \tfrac{1}{2}e_4,\ e_4 \circ_{-\frac{1}{2}} e_1 = -\tfrac{1}{2}e_4.$$

引理 3.9. 设 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。$\int_A$ 与 $(A, \cdot, \circ)$上所有不变对称双线性型所构成的向量空间之间存在一个双射。

证明。 设 v 是 $(A, \cdot, \circ)$ 上的一个积分。于是，对所有a、$b \in A$，令 $\mathcal{B}_v(a, b) := v(a \cdot b)$。显然，$\mathcal{B}_v(\cdot,\cdot)$ 是对称的。注意到

$$\mathcal{B}_v(a \cdot b, c) = v((a \cdot b) \cdot c) = v(a \cdot (b \cdot c)) = \mathcal{B}_v(a, b \cdot c),$$
$$\mathcal{B}_v(a \circ b, c) = v((a \circ b) \cdot c) = -v(b \cdot (a \circ c + c \circ a)) = -\mathcal{B}_v(b, a \circ c + c \circ a)$$

对所有 a、b、$c \in A$ 均成立。因此， $\mathcal{B}_v(\cdot,\cdot)$ 是 $(A, \cdot, \circ)$ 上的不变对称双线性形式。

反之，设 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 是 $(A, \cdot, \circ)$ 上的不变对称双线性形式。定义 $v_{\mathcal{B}} : A \to \mathbf{k}$，$v_{\mathcal{B}}(a) := \mathcal{B}(a, 1_A) = \mathcal{B}(1_A, a)$。于是，$v_{\mathcal{B}}$ 是 $(A, \cdot, \circ)$ 上的一个积分，因为

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{B}}((a \circ b) \cdot c) &= \mathcal{B}((a \circ b) \cdot c, 1_A) = \mathcal{B}(a \circ b, c \cdot 1_A) = \mathcal{B}(a \circ b, c) = -\mathcal{B}(b, a \circ c + c \circ a) \\ &= -\mathcal{B}(a \circ c + c \circ a, b) = -\mathcal{B}(a \circ c + c \circ a, b \cdot 1_A) = -\mathcal{B}((a \circ c + c \circ a) \cdot b, 1_A) \\ &= -v_{\mathcal{B}}((a \circ c + c \circ a) \cdot b) = -v_{\mathcal{B}}(b \cdot (a \circ c + c \circ a)) \end{aligned}$$

对所有a、b、$c \in A$。

显然，对应关系 $(v \mapsto \mathcal{B}_v(\cdot,\cdot), \mathcal{B}(\cdot,\cdot) \mapsto v_{\mathcal{B}})$ 是双射。 □

最后，我们给出有限维 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数的若干个等价刻画。

定理 3.10. 设$(A, \cdot, \circ)$ 是一个有限维 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数。则以下条件等价。

(a) $(A, \cdot, \circ)$ 是 Frobenius Jacobi-Novikov-Poisson 代数。(b) 存在双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$，使得 $(A, \cdot, \circ, \mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。(c) 存在定义在 $(A, \cdot, \circ)$ 上的非退化积分。(d) 存在一对 $(v, e = \sum e^1 \otimes e^2)$，其中 v 是定义在 $(A, \cdot, \circ)$ 上的积分，且 $e = \sum e^1 \otimes e^2 \in A \otimes A$ 是一个元素，使得对于任意 $a \in A$,

$$\sum a \cdot e^1 \otimes e^2 = \sum e^1 \otimes e^2 \cdot a, \quad \sum v(e^1) \cdot e^2 = \sum e^1 \cdot v(e^2) = 1_A. \tag{25}$$

这样的 $(v, e = \sum e^1 \otimes e^2) \in \int_A \times (A \otimes A)$ 称为**Jacobi-Novikov-Poisson-Frobenius 对**，$\omega_A := \sum e^1 \cdot e^2 \in A$ 称为**欧拉-卡西米尔元**，属于 $(A, \cdot, \circ)$。

证明. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) 假设 $(A, L_{A,\circ}, R_{A,\circ}, L_{A,\cdot}) \cong (A^*, L^*_{A,\circ}+R^*_{A,\circ}, -R^*_{A,\circ}, -L^*_{A,\cdot})$ 是 $(A, \cdot, \circ)$ 的模。设 $f : A \to A^*$ 是这样的同构。定义双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 为

$$\mathcal{B}(a, b) := f(a)(b) \quad \text{for all } a, b \in A.$$

对于所有 a、b、$c \in A$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(a\cdot b,c) &= f(b\cdot a)(c)=f(L_{A,\cdot}(b)a)(c)=\Big((-L^*_{A,\cdot})(b)f(a)\Big)(c)\\ &= f(a)(b\cdot c)=\mathcal{B}(a,b\cdot c),\\ \mathcal{B}(a\circ b,c) &= f(a\circ b)(c)=f(L_{A,\circ}(a)(b))(c)=\Big((L^*_{A,\circ}+R^*_{A,\circ})(a)f(b)\Big)(c)\\ &= -f(b)\Big((L_{A,\circ}+R_{A,\circ})(a)(c)\Big)=-f(b)(a\circ c+c\circ a)=-\mathcal{B}(b,a\circ c+c\circ a).\end{aligned}$$

那么， $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 是 $(A,\cdot,\circ)$ 上的不变双线性形式。显然， $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 是非退化且对称的。反之，给定这样的双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$，定义 $f: A \to A^*$ 为

$$f(a)(b) := \mathcal{B}(a,b) \quad \text{for all } a,b\in A.$$

那么，根据上述讨论，容易看出，f 是 $(A,\cdot,\circ)$ 的模同构，它将 $(A, L_{A,\circ}, R_{A,\circ}, L_{A,\cdot})$ 映射到 $(A^*, L^*_{A,\circ}+R^*_{A,\circ}, -R^*_{A,\circ}, -L^*_{A,\cdot})$。

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) 这由引理3.9得出，该引理在 $\int_A$ 与 $(A,\cdot,\circ)$ 上所有不变对称双线性型构成的空间之间建立了双射。此外，容易看出，积分 ν 在 $(A,\cdot,\circ)$ 上非退化，当且仅当在引理 3.9 的证明中定义的相应双线性形式 $\mathcal{B}_\nu(\cdot,\cdot)$ 是非退化的。

(a) $\Longleftrightarrow$ (d) 假设 $(A, L_{A,\circ}, R_{A,\circ}, L_{A,\cdot}) \cong (A^*, L^*_{A,\circ}+R^*_{A,\circ}, -R^*_{A,\circ}, -L^*_{A,\cdot})$ 作为 $(A,\cdot,\circ)$ 的模同构，且同构由 f 给出。设 $\{e_i \mid i = 1,\dots,n\}$ 是 $(A,\cdot,\circ)$ 的一组基， $\{e_i^* \mid i = 1,\dots,n\}$是其对偶基。定义

$$\nu := f(1_A)\in A^*, \quad e := \sum_{i=1}^n e_i\otimes f^{-1}(e_i^*)\in A\otimes A.$$

直接计算可知，(ν,e) 满足方程（25），因此构成一个 Jacobi Novikov-Poisson-Frobenius 对。反过来，假设 $(\nu, e=\sum e^1\otimes e^2)$ 是一个 Jacobi Novikov-Poisson-Frobenius 对。定义线性映射 $f: A \to A^*$ 如下

$$f(a)(b) := \nu(a\cdot b) \quad \text{for all } a,b\in A.$$

那么，f是（A，$\cdot$，$\circ$）的模同构，其逆映射 $f^{-1}: A^*\to A$ 定义为

$$f^{-1}(a^*) := \sum a^*(e^1)\cdot e^2 \quad \text{for all } a^*\in A^*.$$

□

3.2. **低维二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数的分类及 Frobenius Jacobi 代数的构造**。 根据定理 3.10，为了研究 Frobenius Jacobi Novikov-Poisson 代数，我们只需研究二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数。根据命题 2.10 和2.11，我们给出二维和三维二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数在同构意义下的分类。

命题 3.11。 任意二维二次 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数，其定义在 $\mathbb{C}$ 上，同构于 $(A=\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_2,\cdot,\circ,\mathcal{B}(\cdot,\cdot))$，其中乘积 $\cdot$和 $\circ$由命题 *2.10*中的相应类型给出，而不变对称双线性型 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 由下表中的度量矩阵描述。

Type	双线性形式的度量矩阵 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$
(J1) $(k_1 = k_2 = 0)$	$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $g_{12} \neq 0$
(J1) $(k_1 \neq 0, k_2 = -2k_1)$	$\begin{pmatrix} g_{12} & g_{11} \\ g_{12}k_1 & 0 \end{pmatrix}$, $g_{12} \neq 0$
(J2) $(k_1 \neq 0, k_2 = -2k_1)$	$\begin{pmatrix} g_{12} & g_{11} \\ g_{12}k_1 & 0 \end{pmatrix}$, $g_{12} \neq 0$
(J3) $(k_1 = k_2 = 0)$	$\begin{pmatrix} g_{12} & g_{11} \\ g_{12} & 0 \end{pmatrix}$, $g_{12} \neq 0$, $g_{11} \neq g_{12}$

证明。注意，所有二维 Jacobi-Novikov-Poisson 代数在同构意义下已在命题 2.10 中完成分类。因此，我们可以假设 $(A, \cdot, \circ)$ 是命题 2.10 中分类的某一种情形。接下来，我们考虑 $(A, \cdot, \circ)$ 上的非退化对称不变双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$。设 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 的度量矩阵为 $G = (g_{ij})_{2\times 2}$。那么 $g_{ij} = g_{ji}$ 且 $\det G \neq 0$。以类型（J1）为例，由方程 (23) 可得 $g_{22} = 0$。由 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 的非退化性可得 $g_{12} \neq 0$。此外，由方程 (24) 可得 $k_1 g_{11} = 0$ 和 $(2k_1 + k_2)g_{12} = 0$。于是得到 $k_2 = -2k_1$。若 $k_1 = 0$，则 Novikov 乘积为平凡乘积，且 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & 0 \end{pmatrix}$。若 $k_1 \neq 0$，则 $(A, \circ)$ 的特征矩阵为 $\begin{pmatrix} k_1 e_1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$，且 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & g_{12} \\ g_{12} & 0 \end{pmatrix}$。类型 (J2)-(J3) 的计算方法类似。证毕。

□

类似于命题3.11，我们可以给出 $\mathbb{C}$上的三维二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数在同构意义下的分类。

命题 3.12。任意 3维二次 *Jacobi-Novikov-Poisson* 代数 $\mathbb{C}$ 都同构于 $(A = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3, \cdot, \circ, \mathcal{B}(\cdot,\cdot))$，其中乘法 $\cdot$ 和 $\circ$ 由命题 *2.11* 中相应的类型给出，而不变对称双线性型 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 由下表中的度量矩阵描述。

Type	双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 的度量矩阵
(J1) $(k_1 = k_2 = k_3 = 0)$	$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{13} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $g_{13} \neq 0$
(J1) $(k_1 \neq 0, k_2 = -\frac{k_1}{2})$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2k_3}{3k_1}g_{13} & g_{13} \\ -\frac{2k_3}{3k_1}g_{13} & g_{13} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $g_{13} \neq 0$
(J2) $(k_1 \neq 0, k_2 = -\frac{k_1}{2})$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{k_1}g_{13} & -\frac{2k_3}{3k_1}g_{13} & g_{13} \\ -\frac{2k_3}{3}k_1 g_{13} & g_{13} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $g_{13} \neq 0$
(J3) $(k_1 = k_2 = 0, k_3 = -2)$	$\begin{pmatrix} g_{11} & -g_{13} & g_{13} \\ -g_{13} & g_{13} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $g_{13} \neq 0$

续表。

Type	双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\ \cdot)$ 的度量矩阵
(J3) $(k_1 \neq 0, k_2 = -\frac{k_1}{2})$	$\begin{pmatrix} \frac{-3k_1+2k_3+4}{3k_1^2}g_{13} & \frac{2k_3+4}{3k_1}g_{13} & g_{13} \\ \frac{2k_3+4}{3k_1}g_{13} & g_{13} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ g_{13} \neq 0$
(J4) $(k_1 = k_2 = 0, k_3 = -2)$	$\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} \\ 0 & g_{13} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ g_{13} \neq 0$
(J4) $(k_1 \neq 0, k_2 = -\frac{k_1}{2})$	$\begin{pmatrix} \frac{2k_3+4}{3k_1^2}g_{13} & \frac{2k_3+4}{3k_1}g_{13} & g_{13} \\ \frac{2k_3+4}{3k_1}g_{13} & g_{13} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ g_{13} \neq 0$
(J5) $(k_1 \neq 0, k_2 = -k_1, k_3 = -2k_1)$	$\begin{pmatrix} g_{12} - \frac{1}{k_1}g_{13} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_{12}, g_{13} \neq 0$
(J6) $(k_1 = k_2 = k_3 = 0)$	$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_{12}, g_{13} \neq 0$
(J6) $(k_1 \neq 0, k_2 = -k_1, k_3 = -2k_1)$	$\begin{pmatrix} g_{12} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_{12}, g_{13} \neq 0$
(J7) $(k_1 = k_2 = k_3 = 0)$	$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{12} & 0 \\ g_{13} & 0 & g_{13} \end{pmatrix},\ g_{12}, g_{13} \neq 0,\ g_{11} \neq g_{12} + g_{13}$

回顾一下， [1, 22] 一个**Frobenius Jacobi代数**$(J, \cdot, [\cdot,\cdot], (\cdot,\cdot)_J$是一个有限维 Jacobi代数（$J, \cdot, [\cdot,\cdot]$），配有一个非退化对称双线性形式（$\cdot,\cdot)_J$，满足不变性

$$(a \cdot b, c)_J = (a, b \cdot c)_J, \tag{26}$$

$$([a,b], c)_J = (a, [b,c])_J \text{ for all } a, b, c \in J. \tag{27}$$

接下来，我们介绍如何从二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数和二次右 Jacobi-Novikov-Poisson 代数构造 Frobenius Jacobi代数。

定理 3.13。 设$(A, \cdot_1, \circ, \mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是有限维二次 *Jacobi Novikov-Poisson* 代数，$(B, \cdot_2, \diamond, (\cdot,\cdot))$ 是有限维二次右 *Jacobi Novikov-Poisson* 代数，并且$(J = A \otimes B, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是诱导的 *Jacobi*代数。定义 J 上的双线性形式$(\cdot,\cdot)_J$

$$(a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2)_J = \mathcal{B}(a_1, b_1)(a_2, b_2) \quad \textit{for all } a_1, b_1 \in A, a_2, b_2 \in B. \tag{28}$$

那么$(J, \cdot, [\cdot,\cdot], (\cdot,\cdot)_J)$ 是一个 *Frobenius Jacobi*代数。

证明。 根据 [14, 命题 3。14], $(\cdot,\cdot)_J$ 是 $(J, [\cdot,\cdot])$ 上满足等式 (27) 的非退化对称双线性形式。容易验证等式 (26) 成立。证毕。 □

最后，我们使用定理 3.13 给出的构造，给出一个 Frobenius Jacobi 代数的例子。

例3.14。 设 $(A = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2, \cdot, \circ, \mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是一个二维二次 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，$(B = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2, \cdot, \diamond, \mathcal{B}(\cdot,\cdot))$ 是一个二维二次右 Jacobi-Novikov-Poisson 代数，二者具有相同的乘积 $\cdot$ 和相同的双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$。它们的非零乘积如下：

$$\begin{aligned}
&e_1 \cdot e_1 = e_1,\ e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2,\\
&e_1 \circ e_1 = e_1,\ e_1 \circ e_2 = -2e_2,\ e_2 \circ e_1 = e_2,\\
&e_1 \diamond e_1 = e_1,\ e_1 \diamond e_2 = e_2,\ e_2 \diamond e_1 = -2e_2,
\end{aligned}$$

双线性形式 $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ 定义如下

$$\mathcal{B}(e_1,e_2) = \mathcal{B}(e_2,e_1) = 1,\ \mathcal{B}(e_1,e_1) = \mathcal{B}(e_2,e_2) = 0.$$

根据定理 3.13，$(J = A \otimes B,\ \cdot_J,\ [\cdot,\cdot]_J,\ (\cdot,\cdot)_J)$ 是一个 Frobenius Jacobi代数，其非零乘积定义如下

$$\begin{aligned}
&(e_1\otimes e_1)\cdot_J (e_1\otimes e_1) = e_1\otimes e_1,\\
&(e_1\otimes e_1)\cdot_J (e_1\otimes e_2) = (e_1\otimes e_2)\cdot_J (e_1\otimes e_1) = e_1\otimes e_2,\\
&(e_1\otimes e_1)\cdot_J (e_2\otimes e_1) = (e_2\otimes e_1)\cdot_J (e_1\otimes e_1) = e_2\otimes e_1,\\
&(e_1\otimes e_1)\cdot_J (e_2\otimes e_2) = (e_2\otimes e_2)\cdot_J (e_1\otimes e_1) = e_2\otimes e_2,\\
&(e_1\otimes e_2)\cdot_J (e_2\otimes e_1) = (e_2\otimes e_1)\cdot_J (e_1\otimes e_2) = e_2\otimes e_2,\\
&[e_1\otimes e_1, e_1\otimes e_2]_J = -[e_1\otimes e_2, e_1\otimes e_1]_J = 3e_1\otimes e_2,\\
&[e_1\otimes e_1, e_2\otimes e_1]_J = -[e_2\otimes e_1, e_1\otimes e_1]_J = -3e_2\otimes e_1,\\
&[e_1\otimes e_2, e_2\otimes e_1]_J = -[e_2\otimes e_1, e_1\otimes e_2]_J = 3e_2\otimes e_2,
\end{aligned}$$

双线性形式 $(\cdot,\cdot)_J$ 定义如下

$$(e_1\otimes e_1, e_2\otimes e_2)_J = (e_2\otimes e_2, e_1\otimes e_1)_J = (e_1\otimes e_2, e_2\otimes e_1)_J = (e_2\otimes e_1, e_1\otimes e_2)_J = 1,$$

其他所有数对均等于 0。

致谢。 本研究得到中国浙江省自然科学基金（编号：Z25A010006）和中国国家自然科学基金（编号：12171129）资助。

D利益声明。 作者声明不存在需要披露的利益冲突 .

数据可用性。本研究未创建或分析任何新数据。

参考文献

[1] A. Agore and G. Militaru, 《Jacobi 代数与 Poisson 代数》, 《非交换几何杂志》9（2015）, 1295–1342。1, 2, 14, 21[2] C. Bai, R. Bai, L. Guo and Y. Wu, 《转置 Poisson 代数、Novikov-Poisson 代数与 3-Lie 代数》, 《代数杂志》632（2023）, 35–66。6[3] L. Bokut, Y. Chen and Z. Zhang, 《关于自由 Gelfand-Dorfman-Novikov-Poisson 代数及 PBW 定理》, 《代数杂志》500（2016）, 153–170。2, 4[4] B. Bakalov, V. Kac, 《场代数》, 《国际数学研究通知》3（2003）, 123–159。2[5] C. Bai, H. Li and Y. Pei, 《顶点代数的 ϕ_ϵ-协调模》, 《代数杂志》246（2015）, 211–242。2[6] A. Balinsky and S. Novikov, 《流体力学型 Poisson 括号、Frobenius 代数与 Lie 代数》, 《苏联数学文摘》32（1985）, 228–231。2, 6

[7] K. H. Bhaskara and K. Viswanath, 《Poisson 代数与泊松流形》, Pitman 数学研究札记丛书174, Longman 科学与技术出版社, 哈洛; 与 John Wiley & Sons, Inc. 联合出版于美国纽约, 1988年。1[8] A. Dzhumadil'daev, 《Novikov 运算子的余维增长与非 Koszul 性》, 《通讯代数》39（2011）, 2943–2952。2[9] I. Gelfand andI. Dorfman, 《哈密顿算子及其相关代数结构》, 《泛函分析及其应用》13（1979）, 248–262。2[10] I. Gelfand and I. Dorfman, 《哈密顿算子与无限维李代数》, 《泛函分析及其应用》15（1981）, 173–187。2[11] M. Gerstenhaber, 《结合环的上同调结构》, 《数学年刊》78（1963）, 267–288。2[12] J. Grabowski, 《抽象 Jacobi 与 Poisson 结构》, 《几何与物理杂志》9（1992）, 45–73。1[13] J. Grabowski and G. Marmo, 《分次雅可比代数与（余）上同调》, 《物理学杂志 A》36（2003）, 161–181。1[14] Y. Hong, C. Bai and L. Guo, 《通过 Novikov 双代数的仿射化与 Koszul 对偶构造无限维李双代数》, 《数学物理通讯》401（2023）, 2011–2049。3, 4, 7, 16, 21[15] Y. Hong, C. Bai and L. Guo, 《通过微分反对称无穷小双代数构造 Novikov 双代数的变形族》, arXiv：2402.16155。5, 17[16] V. Ginzburg and M. Kapranov, 《歌剧的 Koszul 对偶》, 《杜克数学杂志》6（1994）, 203–272。2[17] I. Kaygorodov, 《关于 Kantor 积》, 《代数及其应用杂志》16（2017）, 9, 1750167。14[18] A. Kirillov, 《局部李代数》, 《俄罗斯数学评论》31（1976）, 55–75。1[19] J. Koszul, 《有界齐次域与仿射变换群的轨道》, 《法国数学会通报》89（1961）, 515–533。2[20] A. Lichnerowicz, 《Poisson 流形及其相关李代数》, 《微分几何杂志》12（1977）, 253–300。1[21] A. Lichnerowicz, 《Jacobi 流形及其相关李代数》, 《纯粹与应用数学杂志》57（1978）, 453–488。1[22] G. Liu and C. Bai, 《相对Poisson双代数与Frobenius Jacobi代数》, 《非交换几何杂志》18（2024）, 995–1039。1, 2, 21[23] Y. Lin, X. Liu and C. Bai, 《微分反对称无穷小双代数、相干导子与泊松双代数》, 《对称性、可积性与几何方法及其应用》19（2023）, 第018号论文, 47页。4, 17[24] J. Liu and H. Zhou, 《泊松共形代数的上同调与变形量子化》, 《代数杂志》630（2023）, 92–127。2[25] C. M. Marle, 《关于 Jacobi 流形与 Jacobi 丛》, 载于《辛几何、群胚与可积系统》, 227¨C246, 数学科学研究所出版物第20卷, 施普林格, 1991年。1[26] A. Rovi, 《与 Jacobi代数相关的 Hopf 代数胚》, 《国际几何方法与现代物理学杂志》11（2014）, 1450092, 20页。1[27] J. Osborn, 《Novikov 代数的模》, 《当代数学》184（1995）, 327–327。15[28] E. Study, 《复数系统及其在变换群理论中的应用》, 《数学月刊》1（1890）, 283–354。8, 10[29] A. Weinstein, 《辛流形讲义》, CBMS 数学区域会议系列29, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 1979年。1[30] X. Xu, 《Novikov-Poisson代数》, 《代数杂志》190（1997）, 253–279。4, 11[31] X. Xu, 《二次共形超代数》, 《代数杂志》231（2000）, 1–38。2[32] X. Xu, 《关于单诺维科夫代数及其不可约模》, 《代数杂志》185（1996）, 905–934。2, 10

杭州师范大学数学学院, 杭州, 311121, 中国电子邮件地址:
2024111029011@stu.hznu.edu.cn

杭州师范大学数学学院, 杭州, 311121, 中国电子邮件地址:
yyhong@hznu.edu.cn