arXiv:2602.12519v1 [math.RA] 13 Feb 2026

转置 Novikov-Poisson 代数

JIAROU JIN 和 YANYONG HONG（通讯作者）

摘要。本文介绍了转置 Novikov-Poisson 代数的定义，其仿射化是转置泊松代数。此外，我们证明了转置 Novikov-Poisson 代数与右微分 Novikov-Poisson 代数的张量积上存在自然的转置泊松代数结构。通过取 Novikov 代数的交换子李代数，也可以自然地从转置 Novikov-Poisson 代数得到转置泊松代数。我们证明，两个转置 Novikov-Poisson 代数的张量积也是转置 Novikov-Poisson 代数。本文给出了转置 Novikov-Poisson 代数的若干构造。此外，转置 Novikov-Poisson 代数与相应的 Novikov 代数的$(1,2)$-导子密切相关。利用$(1,2)$-导子，我们证明，在一定条件下，可解 Novikov 代数上存在非平凡转置 Novikov-Poisson 代数结构。我们还证明，如果一个非平凡转置 Novikov-Poisson 代数是简单的，那么其相应的 Novikov 代数也是简单的。因此，如果基域是代数闭域且特征零，那么任何简单的转置 Novikov-Poisson 代数都是维数 1 的。我们还刻画了某些单 Novikov 代数上的转置 Novikov-Poisson 代数结构。

目录

1. 引言 1
2. 转置 Novikov-Poisson 代数的性质及其与转置泊松代数的关系 4
2.1. 转置 Novikov-Poisson 代数与转置泊松代数 4
2.2. 转置 Novikov-Poisson 代数的性质 7
3. $(1,2)$-导子与 Novikov 代数的转置 Novikov-Poisson 代数结构 16
3.1. $(1,2)$-Novikov 代数的导子 16
3.2. $(1,2)$-可解 Novikov 代数的导子 18
4. 简单转置 Novikov-Poisson 代数 22
4.1. 关于简单转置 Novikov-Poisson 代数 22
4.2. 具有简单 Novikov 代数的转置 Novikov-Poisson 代数 23
参考文献 27

1. 引言

泊松代数起源于 20 世纪 70 年代对泊松几何的研究 [20, 28], ，如今已成为辛几何、量子化理论、可积系统和量子群等领域的重要工具。泊松代数的一种对偶概念称为转置泊松代数，于 [2] 提出，其定义是交换定义泊松代数的 Leibniz 法则中两种二元运算的角色。更准确地说，三元组 $(L,\ \cdot,\ [\cdot,\cdot])$ 称为

2010 数学主题分类。 17B63,17D25,17A30, 17A36。关键词和短语。 转置 Novikov-Poisson 代数，转置泊松代数，Novikov-Poisson 代数，$(1,2)$-导子。

转置泊松代数，如果 $(L,\ \cdot)$ 是交换结合代数，$(L,\ [\cdot,\cdot])$ 是李代数，并且满足以下相容条件：

$$2z\cdot[x,y]=[z\cdot x,y]+[x,z\cdot y]\quad \text{for all } x,y,z\in L. \tag{1}$$

如 [2], 所示，转置泊松代数具有泊松代数的许多共同性质，例如在张量积下封闭，以及作为运算子的 Koszul 自对偶，并且与其他代数结构密切相关，包括 Novikov-Poisson 代数和 3-Lie 代数。它们也与交换 Gel'fand-Dorfman 代数一致 [26] , 并且是 Jordan 括号代数的实例 [7]。此外，交换结合代数的 Novikov 变形的经典极限会得到一个转置泊松代数 [5]。文献 [9]建立了李代数的$_{1\ 2}$-导子与转置泊松代数之间的重要联系。利用这一联系，人们对若干重要类别李代数上的所有转置泊松代数结构进行了分类，包括有限维复半单李代数 [9], 、Witt 代数 [9], 、Virasoro 代数 [9], 、扭 Heisenberg-Virasoro 代数 [33],、Schr¨odinger-Virasoro 代数 [33], 、可解李代数和完全李代数 [17], 、Virasoro 型代数 [19, 36] 以及李关联代数 [18]。文献 [7] 研究了单转置泊松代数，文献 [21]则给出了此类代数的双代数理论。

Novikov 代数最初出现在形式变分演算中对哈密顿算子的研究 [10, 11] 以及流体力学型泊松括号的研究中 [1]。根据 [30],中的结果，它们还对应于一类李共形代数，这类代数描述了共形场论中手征场的算子乘积展开的奇异部分 [14]。**(左) Novikov 代数** $(A,\circ)$是一个配备二元运算 $\circ$ 的向量空间$A\otimes A\to A$，并满足以下相容条件：

$$(x\circ y)\circ z=(x\circ z)\circ y, \tag{2}$$

$$(x\circ y)\circ z-x\circ(y\circ z)=(y\circ x)\circ z-y\circ(x\circ z)\quad \text{for all } x,y,z\in A. \tag{3}$$

设 B 是一个配备二元运算 $\diamond$的向量空间。若 $(B,\circ)$ 是一个 Novikov 代数，且对所有 $a\circ b:=b\diamond a$，都有 $a,b\in B$，则称 $(B,\diamond)$ 为 **右 Novikov 代数**。由公式 (3) 可知，Novikov 代数也是前李代数的一个重要子类，与数学和物理学中的许多领域密切相关，例如凸齐性锥、仿射流形、李群上的仿射结构、结合代数变形、顶点代数等。

Novikov 代数在仿射化中也发挥着重要作用。

定理 1.1。 [1] 设 $\mathbf{k}$ 是一个特征零的域，A 是其上的一个向量空间，并且带有一个二元运算 $\circ$。在 $A[t,t^{-1}]:=A\otimes\mathbf{k}[t,t^{-1}]$ 上定义二元运算

$$[xt^m,yt^n]=m(x\circ y)t^{m+n-1}-n(y\circ x)t^{m+n-1},$$

对所有 $x,y\in A$ 和 $m,n\in\mathbb{Z}$，其中 $xt^m:=x\otimes t^m$。那么 $(A[t,t^{-1}],[\cdot,\cdot])$ 是李代数，当且仅当 $(A,\circ)$ 是 *Novikov* 代数。

这种构造产生了数学物理中许多重要的无限维李代数，例如 Witt 代数、无中心海森堡-维拉索罗代数、无中心薛定谔-维拉索罗代数等。诺维科夫算子与右诺维科夫算子之间的科祖尔对偶关系，进一步阐明了这种仿射化的代数基础[6, 12]。

现在，考虑一个带有两个二元运算 $\cdot, \circ$ 的向量空间 A 。如上所述，可以通过Novikov乘积 $\circ$ 在 $A[t,t^{-1}]$ 上定义李括号 $[\cdot,\cdot]$，也可以定义交换结合乘积:

$$(xt^m)\cdot(yt^n) = (x\cdot y)t^{m+n} \quad \text{for all } x, y \in A, m, n \in \mathbb{Z}.$$

根据 [22]，（$A[t, t^{-1}]$， $\cdot$， $[\cdot,\cdot]$）是泊松代数，当且仅当（A， $\cdot$， $\circ$）是微分 Novikov-Poisson 代数；这一概念由 [4] 引入。注意，微分 Novikov-Poisson 代数是 [29] 中引入的 Novikov-Poisson 代数的一个子类。

这一背景引出了一个自然的问题：在相同的仿射化过程中，A 上相应的代数结构是什么，才能诱导出转置泊松代数？为回答这个问题，我们引入以下概念。

定义 1.2. 三元组（$A, \cdot, \circ$）称为**转置 Novikov-Poisson 代数**，如果（$A, \cdot$）是交换结合代数，（$A, \circ$）是 Novikov 代数，并且满足以下相容条件:

$$(x\cdot y)\circ z = (x\cdot z)\circ y, \tag{4}$$

$$2z\cdot(x\circ y) = (z\cdot x)\circ y + x\circ(z\cdot y) \quad \text{for all } x, y, z \in A. \tag{5}$$

具有平凡交换结合代数的 Novikov 代数，以及具有平凡 Novikov 代数的交换结合代数，都是转置 Novikov-Poisson 代数。我们称这类转置 Novikov-Poisson 代数为**平凡**的。本文的主要结果（定理 2.3 ）阐明了这一概念的实质：当且仅当（ $A[t, t^{-1}]$， $\cdot$， $[\cdot,\cdot]$）是转置泊松代数时，（A， $\cdot$， $\circ$）是转置 Novikov-Poisson 代数。

事实上，转置 Novikov-Poisson 代数与转置泊松代数有着更为密切的关系，并具有良好的性质。除了转置 Novikov-Poisson 代数与转置泊松代数在仿射化 affinization 下的对应关系之外，我们证明，通过对 Novikov 代数取交换子李代数，可从转置 Novikov-Poisson 代数自然得到一个转置泊松代数，并且也可经由其导子从转置 Novikov-Poisson 代数导出转置泊松代数（见定理2.1）。我们进一步证明，在一个转置 Novikov-Poisson 代数与一个右微分 differential Novikov-Poisson 代数的张量积上存在转置泊松代数结构。此外，与诺维科夫-泊松代数类似，两个转置 Novikov-Poisson 代数的张量积也是转置 Novikov-Poisson 代数。我们还给出了构造转置 Novikov-Poisson 代数的若干方法。此外还给出了 $\mathbb{C}$ 上二维转置 Novikov-Poisson 代数的分类，并给出了转置 Novikov-Poisson 代数的若干代数恒等式。我们还证明，转置 Novikov-Poisson 代数与诺维科夫-泊松代数之间没有直接关系。受工作 [9],的启发，我们还给出了相应的 Novikov 代数的$_{1\ 2}$-导子与转置 Novikov-Poisson 代数之间的关系。此外，还给出了转置 Novikov-Poisson 代数与 Hom-Novikov 代数之间的关系。利用 Novikov 代数的$_{1\ 2}$-导子，我们在满足 $\mathrm{Ann}_A(A) \neq 0$ 的可解Novikov代数（$A, \circ$）上发展了转置 Novikov-Poisson 代数的一种技术性构造（见推论 3.15）。对于 $\mathrm{Ann}_A(A) = 0$ 的情形，（$A, \circ$）上的转置 Novikov-Poisson 结构可能不存在。因此，我们施加更强的条件，并提出一种显式方法来构造转置 Novikov-Poisson 代数

在（$A, \circ$）上（见定理 3.20）。最后，我们证明，若（$A, \cdot, \circ$）是非平凡的单转置 Novikov-Poisson 代数，则（$A, \circ$）是单 Novikov 代数。因此，特征零的代数闭域上的任意单转置 Novikov-Poisson 代数的维数均为 1。某些单诺维科夫代数上的转置 Novikov-Poisson 代数也得到了刻画。

本文组织如下。第 2 节介绍转置 Novikov-Poisson 代数与转置泊松代数之间的关系。此外，还介绍转置 Novikov-Poisson 代数的一些基本性质、恒等式、例子和构造。第 3 节建立相应的 Novikov 代数的$_{1\ 2}$-导子与转置 Novikov-Poisson 代数之间的关系。利用这一关系，本文研究可解 Novikov 代数上的转置 Novikov-Poisson 代数结构。第 4 节致力于研究简单转置 Novikov-Poisson 代数。我们证明，若 $(A, \cdot, \circ)$ 是非平凡的单转置 Novikov-Poisson 代数，则 $(A, \circ)$ 是单 Novikov 代数。此外，本文还刻画了一些单 Novikov 代数上的转置 Novikov-Poisson 代数。

记号。在本文中，设$\mathbf{k}$ 为一个特征不等于 2 的域。所有$\mathbf{k}$上的张量均记作 $\otimes$。用 $\mathbb{C}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 分别表示复数、整数、非负整数和正整数的集合。设A 为一个配备二元运算 $*$ 的向量空间，且$x \in A$。定义线性映射$L_*(x)$、$R_*(x) \in$ 自同态空间$_{\mathbf{k}}(A)$如下：

$$L_*(x)(y) = x * y, \quad R_*(x)(y) = y * x \quad \text{for all } y \in A.$$

2. 转置 Novikov-Poisson 代数的性质及其与转置泊松代数的关系

本节给出转置 Novikov-Poisson 代数的一些例子、构造、恒等式和基本性质，并介绍转置 Novikov-Poisson 代数与转置泊松代数之间的关系。

2.1. **转置 Novikov-Poisson 代数与转置泊松代数**。

转置 Novikov-Poisson 代数与转置泊松代数之间存在密切联系。首先，我们给出从转置 Novikov-Poisson 代数构造转置泊松代数的两种直接方法

定理 2.1. 设$(A, \cdot, \circ)$ 是一个带有导子 D 的转置 *Novikov-Poisson* 代数，即 D 同时是$(A, \cdot)$和$(A, \circ)$的导子。则有以下结论。

(a) 三元组$(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 是一个转置泊松代数，其中 $[\cdot, \cdot]$ 由下式给出

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x \quad \textit{for all } x, y \in A.$$

(b) 三元组$(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 是一个转置泊松代数，其中 $[\cdot, \cdot]$ 由下式给出

(6) $$[x, y] = D(x) \circ y - D(y) \circ x \ \textit{ for all } x, y \in A.$$

证明。（a）由于 $(A, \circ)$ 是 Novikov 代数，$(A, [\cdot, \cdot])$ 是李代数。由式 (5)，对所有x、y、$z \in A$，有

$$\begin{aligned} 2z \cdot [x, y] &= 2z \cdot (x \circ y - y \circ x), \\ &= (z \cdot x) \circ y + x \circ (z \cdot y) - (z \cdot y) \circ x - y \circ (z \cdot x) \end{aligned}$$

$$= [z\cdot x, y] + [x, z\cdot y].$$

因此，$(A, \cdot, \circ, [\cdot,\cdot])$ 是转置泊松代数。

(b) 由方程 (2) 和 (3) 可直接验证，$(A, [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。由方程 (4) 和 (5)，对所有 x、y、$z \in A$，我们得到

$$\begin{aligned} 2z\cdot[x,y] &= 2z\cdot(D(x)\circ y - D(y)\circ x) \\ &= (z\cdot D(x))\circ y + D(x)\circ(z\cdot y) - (z\cdot D(y))\circ x - D(y)\circ(z\cdot x), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} [z\cdot x, y] + [x, z\cdot y] &= D(z\cdot x)\circ y - D(y)\circ(z\cdot x) + D(x)\circ(z\cdot y) - D(z\cdot y)\circ x \\ &= (z\cdot D(x))\circ y + D(x)\circ(z\cdot y) - (z\cdot D(y))\circ x - D(y)\circ(z\cdot x) \\ &\quad +(x\cdot D(z))\circ y - (D(z)\cdot y)\circ x \\ &= (z\cdot D(x))\circ y + D(x)\circ(z\cdot y) - (z\cdot D(y))\circ x - D(y)\circ(z\cdot x). \end{aligned}$$

因此，$(A, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是一个转置泊松代数。 □

注记 2.2. 根据 [2, 定理 3。2], 与定理 2.1 的 (a) 中类似，可以从 Novikov-Poisson 代数构造转置泊松代数。然而，如定理 2.1 的 (b) 所示的转置泊松代数构造，在 Novikov-Poisson 代数的情形下并不成立。

接下来，我们证明当 **k** 是一个特征为 0 的域时，存在一种从转置 Novikov-Poisson 代数构造转置泊松代数的仿射化构造。

定理 2.3。 设 A 是一个带有两个二元运算 $\cdot$ 和 $\circ$的向量空间，且**k** 是一个特征0的域。在 A 上定义两个二元运算 $\cdot$ 和 $[\cdot,\cdot]$，其中$[t,t^{-1}] := A\otimes\mathbf{k}[t,t^{-1}]$ 满足

$$(xt^m)\cdot(yt^n) = (x\cdot y)t^{m+n}, \tag{7}$$

$$[xt^m, yt^n] = m(x\circ y)t^{m+n-1} - n(y\circ x)t^{m+n-1}, \tag{8}$$

对所有 $x, y \in A$ 及 $m, n \in \mathbb{Z}$，其中 $xt^m := x\otimes t^m$。那么，$(A[t,t^{-1}], \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是转置泊松代数，当且仅当$(A, \cdot, \circ)$ 是转置 *Novikov-Poisson* 代数。

证明。 显然，$(A, \cdot)$ 是交换结合代数，当且仅当 $(A[t,t^{-1}], \cdot)$ 是交换结合代数。根据定理 1.1, $(A, \circ)$ 是 Novikov 代数，当且仅当 $(A[t,t^{-1}], [\cdot,\cdot])$ 是李代数。由方程 (7) 和 (8)，可得

$$\begin{aligned} 2(zt^k)\cdot[xt^m, yt^n] &= 2(zt^k)\cdot(m(x\circ y)t^{m+n-1} - n(y\circ x)t^{m+n-1}) \\ &= 2m(z\cdot(x\circ y))t^{k+m+n-1} - 2n(z\cdot(y\circ x))t^{k+m+n-1}, \end{aligned}$$

$$[(zt^k)\cdot(xt^m), yt^n] = [(z\cdot x)t^{m+k}, yt^n] = (m+k)((z\cdot x)\circ y)t^{m+k+n-1} - n(y\circ(z\cdot x))t^{m+k+n-1},$$

and

$$[xt^m, (zt^k)\cdot(yt^n)] = [xt^m, (z\cdot y)t^{k+n}] = m(x\circ(z\cdot y))t^{m+k+n-1} - (n+k)((z\cdot y)\circ x)t^{m+k+n-1},$$

对所有 x, y, z $\in$ A 以及 m, n,l $\in \mathbb{Z}$ 都成立。比较 m、n、k 的系数可得，$(A[t, t^{-1}], \cdot, [\cdot,\cdot])$ 满足方程 (1)，当且仅当 $(A, \cdot, \circ)$ 满足等式 (4) 和 (5)。因此结论成立。□

例 e 2.4. 设 $(A = \mathbf{k}e, \cdot, \circ)$ 是如下定义的转置 Novikov-Poisson 代数:

(9) $$e \cdot e = \alpha e, \quad e \circ e = e,$$

其中 $\alpha \in \mathbf{k}$。于是根据定理 2.3，在 $A[t,t^{-1}]$上定义如下转置泊松代数结构

(10) $$et^m \cdot et^n = \alpha et^{m+n}, \quad [et^m, et^n] = (m-n)et^{m+n-1}.$$

最后，我们给出转置泊松代数仿射化构造的一种推广。

定义 2.5. A **右微分Novikov-Poisson 代数** 是一个三元组 $(B, \cdot, \diamond)$，其中 $(B, \cdot)$ 是交换结合代数，$(B, \diamond)$ 是右 Novikov 代数，并且它们满足

(11) $$(a \diamond b) \cdot c = a \diamond (b \cdot c),$$

(12) $$(a \cdot b) \diamond c = (a \diamond c) \cdot b + a \cdot (b \diamond c) \quad \text{for all } a, b, c \in B.$$

注记 2.6. 设 A 是一个向量空间，带有两个二元运算 $\cdot$ 和 $\circ$。若 $(A, \cdot, \diamond)$ 是右微分 Novikov-Poisson 代数，且对所有 $a, b \in A$ 都有 $a \diamond b := b \circ a$，则 $(A, \cdot, \circ)$ 是微分 Novikov-Poisson 代数 [4]。

设 $(B, \cdot, \diamond)$ 是一个右微分Novikov-Poisson 代数。由方程 (11) 和 (12)，对所有 $a,b,c \in B$，有

$$(a \cdot b) \diamond c - (a \cdot c) \diamond b = (a \diamond c) \cdot b + a \cdot (b \diamond c) - (a \diamond b) \cdot c - a \cdot (c \diamond b) = a \cdot (b \diamond c) - a \cdot (c \diamond b).$$

因此，我们有

(13) $$(a \cdot b) \diamond c - (a \cdot c) \diamond b = a \cdot (b \diamond c) - a \cdot (c \diamond b).$$

交换结合代数上带有导子的右微分 Novikov-Poisson 代数有一种自然构造。

命题 2.7. 设$(B, \cdot)$ 是一个带有导子 D 的交换结合代数。在 B 上定义二元运算 $\diamond$ 如下:

(14) $$a \diamond b := D(a) \cdot b \quad \textit{for all } a, b \in B.$$

那么$(B, \cdot, \diamond)$ 是一个右微分*Novikov-Poisson* 代数。

证明。 这是显然的。 □

例 2.8. 设 $(\mathbf{k}[t, t^{-1}], \cdot)$ 是 Laurent 多项式代数，且 $D = \frac{d}{dt}$。由命题 2.7，可得一个右微分Novikov-Poisson 代数 $(\mathbf{k}[t, t^{-1}], \cdot, \diamond)$，其中 $\diamond$ 定义如下

(15) $$t^m \diamond t^n = mt^{m+n-1} \quad \text{for all } m, n \in \mathbb{Z}.$$

命题 2.9。 设 $(A, \cdot_1, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数，且 $(B, \cdot_2, \diamond)$ 是一个右微分 *Novikov-Poisson* 代数。在 $A \otimes B$ 上定义两个二元运算 $\cdot, [\cdot, \cdot]$:

(16) $$(x \otimes a) \cdot (y \otimes b) = x \cdot_1 y \otimes a \cdot_2 b,$$

(17) $$[x \otimes a, y \otimes b] = x \circ y \otimes a \diamond b - y \circ x \otimes b \diamond a,$$

对所有 x、$y \in A$ 以及 a、$b \in B$，$(A \otimes B, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 都是转置泊松代数。

证明。显然，$(A \otimes B, \cdot)$ 是交换结合代数。根据 [13, 定理 2。0], $(A \otimes B, [\cdot,\cdot])$ 是李代数。接下来，我们需要验证方程 (1)。由方程 (4)、(5) 和 (13)，可得

$$\begin{aligned}
&2(z\otimes c)\cdot[x\otimes a, y\otimes b] - [(z\otimes c)\cdot(x\otimes a), y\otimes b] - [x\otimes a, (z\otimes c)\cdot(y\otimes b)]\\
&= 2(z\cdot_1(x\circ y))\otimes(c\cdot_2(a\diamond b)) - 2(z\cdot_1(y\circ x))\otimes(c\cdot_2(b\diamond a)) - ((x\cdot_1 z)\circ y)\otimes((a\cdot_2 c)\diamond b)\\
&+(y\circ(x\cdot_1 z))\otimes(b\diamond(a\cdot_2 c)) - (x\circ(y\cdot_1 z))\otimes(a\diamond(b\cdot_2 c)) + ((y\cdot_1 z)\circ x)\otimes((b\cdot_2 c)\diamond a)\\
&= (((x\cdot_1 z)\circ y)\otimes(c\cdot_2(a\diamond b)) - ((x\cdot_1 z)\circ y)\otimes(c\cdot_2(b\diamond a))\\
&-((x\cdot_1 z)\circ y)\otimes((c\cdot_2 a)\diamond b) + ((x\cdot_1 z)\circ y)\otimes((c\cdot_2 b)\diamond a)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

那么，$(A \otimes B, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 是一个转置泊松代数。 □

注 2.10. 设 $(A, \cdot_1, \circ)$ 是一个转置 Novikov-Poisson 代数，且 $(B, \cdot_2, \diamond)$ 是例 2.8 中给出的右微分 Novikov-Poisson 代数。那么，命题 2.9 中构造的转置泊松代数 $(A \otimes B, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 正是定理 2.3 中给出的 $(A[t, t^{-1}], \cdot, [\cdot,\cdot])$。

2.2. **转置 Novikov-Poisson 代数的性质**。

2.2.1. 从交换结合代数构造转置 *Novikov-Poisson* 代数。

定义 2.11. [8] 设 $(A, *)$ 是一个交换结合代数或 Novikov 代数。$(A, *)$ 的质心是线性映射 $\phi: A \to A$ 的集合，这些映射满足：对所有 $x, y \in A$, $\phi(x * y) = x * \phi(y) = \phi(x) * y$。我们将其记为 $\Gamma((A, *))$。

注 2.12. 设 $(A, \cdot)$ 是一个交换结合代数，且 $p \in A$。则 $L_p \in \Gamma((A, \cdot))$。令 $\alpha \in \mathbf{k}$。定义 $\widetilde{\alpha}: A \to A$，使得

$$\widetilde{\alpha}(x) = \alpha x \quad \text{for all } x \in A.$$

则 $\widetilde{\alpha} \in \Gamma((A, \cdot))$。

命题 2.13. 设 $(A, \cdot)$ 是一个交换结合代数，且 $\phi \in \Gamma((A, \cdot))$。在 A 上定义二元运算 $\circ$ 如下：

$$x \circ y := x \cdot \phi(y) \quad \textit{for all } x, y \in A. \tag{18}$$

则 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。

证明。 由于 $\phi \in \Gamma((A, \cdot))$，我们有

$$x \circ y = x \cdot \phi(y) = \phi(x \cdot y) = y \cdot \phi(x).$$

于是，对所有 x、y、$z \in A$，我们得到

$$\begin{aligned}
(x \circ y) \circ z &= (x \cdot \phi(y)) \cdot \phi(z) = (x \cdot \phi(z)) \cdot \phi(y) = (x \circ z) \circ y,\\
x \circ (y \circ z) &= x \circ (y \cdot \phi(z)) = x \cdot \phi(y \cdot \phi(z)) = x \cdot \phi(y) \cdot \phi(z),\\
(x \circ y) \circ z &= x \cdot \phi(y) \cdot \phi(z),
\end{aligned}$$

and

$$y \circ (x \circ z) = y \cdot \phi(x) \cdot \phi(z).$$

因此，我们得到

$$(x \circ y) \circ z - (y \circ x) \circ z = 0 = x \circ (y \circ z) - y \circ (x \circ z),$$
$$2z \cdot (x \circ y) = 2z \cdot x \cdot \phi(y) = z \cdot x \cdot \phi(y) + x \cdot \phi(z \cdot y) = (z \cdot x) \circ y + x \circ (z \cdot y),$$

and

$$(x \cdot y) \circ z = x \cdot y \cdot \phi(z) = x \cdot z \cdot \phi(y) = (x \cdot z) \circ y.$$

因此，$(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 Novikov-Poisson 代数。 □

推论 2.14. 设$(A, \cdot)$ 是一个交换结合代数，$p \in A$ 或 $p \in \mathbf{k}$。在 A 上定义二元运算 $\circ$如下：

$$x \circ y := p \cdot x \cdot y \quad \textit{for all } x, y \in A. \tag{19}$$

则$(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。

证明。 由命题2.13 和注记2.12可直接得出。 □

最后，我们给出一个转置 Novikov-Poisson 代数的例子。

例 2.15. 设A 是 $\mathbb{C}$ 上的三维向量空间，其基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$。则 $(A, \cdot)$ 是一个交换结合代数，其非零乘积为

$$e_1 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = e_1, \quad e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_2 = e_2, \quad e_3 \cdot e_3 = e_3.$$

由 [8], $(A, \cdot)$ 的质心由以下线性映射 ϕ 构成

$$\phi(e_1) = a_{11} e_1, \quad \phi(e_2) = a_{11} e_2, \quad \phi(e_3) = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{11} e_3,$$

其中a_{11}, a_{23} 和$a_{13} \in \mathbb{C}$。由命题2.13，我们得到一个 Novikov 代数 $(A, \circ$，其非零乘积为

$$e_1 \circ e_3 = e_3 \circ e_1 = a_{11} e_1, \quad e_2 \circ e_3 = e_3 \circ e_2 = a_{11} e_2, \quad e_3 \circ e_3 = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{11} e_3.$$

于是，$(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 Novikov-Poisson 代数。

2.2.2. 独立 性：*Novikov-Poisson* 代数与转置 *Novikov-Poisson* 代数 .

定义 2.16。 [29] 一个 **Novikov-Poisson 代数** 是一个三元组 $(A, \cdot, \circ)$，其中 $(A, \cdot)$ 是一个交换结合代数，$(A, \circ)$ 是一个 Novikov 代数，并且它们满足以下相容条件

$$(x \cdot y) \circ z = x \cdot (y \circ z), \tag{20}$$
$$(x \circ y) \cdot z - (y \circ x) \cdot z = x \circ (y \cdot z) - y \circ (x \cdot z) \quad \text{for all } x, y, z \in A. \tag{21}$$

我们以下述意义证明，Novikov-Poisson 代数的相容关系与转置 Novikov-Poisson 代数的相容关系彼此独立。

命题 2.17。 设$(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。则以下陈述等价。

(a) 代数 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个 *Novikov-Poisson* 代数。(b) 恒等式 $(x \cdot y) \circ z = z \circ (x \cdot y)$ 对所有 x、y、$z \in A$ 均成立。(c) $L_\cdot(x) \in \Gamma((A, \circ))$ 对所有 $x \in A$ 均成立。(d) $L_\circ(x) \in \Gamma((A, \cdot))$ 对所有 $x \in A$ 均成立。

证明。 (a) $\Rightarrow$ (b)：对于任意 x、y、$z \in A$，由方程 (4)、(5) 和 (20)，可得

$$\begin{aligned}(x\cdot y)\circ z - z\circ(x\cdot y) &= (x\cdot z)\circ y - z\circ(x\cdot y)\\ &= 2x\cdot(z\circ y) - 2z\circ(x\cdot y)\\ &= 2(x\cdot z)\circ y - 2z\circ(x\cdot y).\end{aligned}$$

因此，我们得到 $(x\cdot y)\circ z - z\circ(x\cdot y) = 0$。

(b) $\Rightarrow$ (c)：根据 (b)，对所有 x、y、$z \in A$，我们得到

$$z\cdot(x\circ y) = \frac{1}{2}(z\cdot x)\circ y + \frac{1}{2}x\circ(y\cdot z) = \frac{1}{2}(z\cdot x)\circ y + \frac{1}{2}(y\cdot z)\circ x = (z\cdot x)\circ y,$$

and

$$z\cdot(x\circ y) = \frac{1}{2}(z\cdot x)\circ y + \frac{1}{2}x\circ(z\cdot y) = \frac{1}{2}(z\cdot y)\circ x + \frac{1}{2}x\circ(z\cdot y) = x\circ(z\cdot y).$$

因此，对于所有 $z \in A$，我们有 $L_z \in \Gamma((A,\circ))$。

(c) $\Rightarrow$ (a)：对于所有 x、y、$z \in A$，根据质心的定义，我们有

$$x\cdot(y\circ z) = (x\cdot y)\circ z,$$
$$(x\circ y)\cdot z - (y\circ x)\cdot z = x\circ(y\cdot z) - y\circ(x\cdot z).$$

因此，$(A,\cdot,\circ)$ 是一个 Novikov-Poisson 代数。

(d) $\Leftrightarrow$ (b)：对于所有 x、y、$z \in A$，根据转置 Novikov-Poisson 代数的定义，我们有

$$x\cdot(z\circ y) - (z\circ x)\cdot y = \frac{1}{2}(x\cdot z)\circ y + \frac{1}{2}z\circ(x\cdot y) - \frac{1}{2}(y\cdot z)\circ x - \frac{1}{2}z\circ(x\cdot y) = 0,$$

and

$$z\circ(x\cdot y) - (z\circ x)\cdot y = z\circ(x\cdot y) - \frac{1}{2}(z\cdot y)\circ x - \frac{1}{2}z\circ(x\cdot y) = \frac{1}{2}(z\circ(x\cdot y) - (x\cdot y)\circ z).$$

因此，我们得到（d） $\Leftrightarrow$ （b）。 □

推论 2.18. 设（A，$\cdot$，$\circ$）是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。若（A，$\cdot$）有单位元 e，则（A，$\circ$）是一个交换 *Novikov* 代数，因此（A，$\cdot$，$\circ$）是一个 *Novikov-Poisson* 代数。

证明.（A，$\circ$）的交换性可由以下计算得出：

$$x\circ y = (x\cdot e)\circ y = (y\cdot e)\circ x = y\circ x.$$

这意味着（A，$\cdot$，$\circ$）满足命题2.17中的b条件。因此，（A，$\cdot$，$\circ$）是一个 Novikov-Poisson 代数。□

然而，反过来并不成立：一个同时也是 Novikov-Poisson 代数的转置 Novikov-Poisson 代数，不一定是交换 Novikov 代数。以下三维转置Novikov-Poisson代数便是一个反例。

例2.19。 设 A 是一个三维向量空间，其上定义在 $\mathbb{C}$ 上的基为 $\{e_1,e_2,e_3\}$。由 [3],$(A,\circ)$ 构成一个 Novikov 代数，其非零乘积如下：

$$e_2\circ e_3 = e_1, \quad e_3\circ e_2 = -e_1.$$

定义一个交换结合代数（A，$\cdot$），其非零乘积如下：

$$e_2\cdot e_2 = ne_1, \quad e_2\cdot e_3 = le_1 = e_3\cdot e_2, \quad e_3\cdot e_3 = ke_1.$$

其中 n、l、$k \in \mathbb{C}$。经过直接计算可得，（A，$\cdot$，$\circ$）既是转置 Novikov-Poisson 代数，也是 Novikov-Poisson 代数。然而，（A，$\circ$）不是交换 Novikov 代数。

2.2.3. 转置 *Novikov-Poisson* 代数中的恒等式及 $\mathbb{C}$ 上二维转置 *Novikov-Poisson* 代数的分类。

命题 2.20. 设 $(A,\cdot,\circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。则对所有 $x,y,z,h \in A$，以下恒等式成立：

$$(x\circ y)\cdot z = (x\circ z)\cdot y, \tag{22}$$

$$(x\circ y)\circ(h\cdot z) = (x\circ z)\circ(h\cdot y), \tag{23}$$

$$(x\circ y)\circ(h\cdot z)-(y\circ x)\circ(h\cdot z) = (h\cdot x)\circ(y\circ z)-(h\cdot y)\circ(x\circ z). \tag{24}$$

此外，若**k** 的特征不等于3，则对所有 $x,y,z,h \in A$，以下恒等式也成立：

$$(x\circ y)\circ(h\cdot z) = (y\circ x)\circ(h\cdot z). \tag{25}$$

证明。 对于 $x,y,z \in A$，由方程 (4) 和 (5)，可得

$$(x\circ y)\cdot z = \frac{1}{2}(z\cdot x)\circ y+\frac{1}{2}x\circ(z\cdot y) = \frac{1}{2}(x\cdot y)\circ z+\frac{1}{2}x\circ(z\cdot y) = y\cdot(x\circ z).$$

因此，方程 (22) 成立。

注意，$L_{(h)}$ 是 $\frac{1}{2}$-导子（作用于 $(A,\circ)$）。因此，方程 (23) 和 (24) 分别是引理 3.6中方程 (33) 和 (34) 的特例。详情可参见引理 3.6的证明。

由方程 (2), (4), (5) 和 (24，我们得到

$$\begin{aligned}
0 &= (h\cdot(y\circ z))\circ x-(h\cdot(x\circ z))\circ y-(x\circ y)\circ(h\cdot z)+(y\circ x)\circ(h\cdot z)\\
&= \frac{1}{2}((h\cdot y)\circ z)\circ x+\frac{1}{2}(y\circ(h\cdot z))\circ x-\frac{1}{2}((h\cdot x)\circ z)\circ y-\frac{1}{2}(x\circ(h\cdot z))\circ y\\
&\quad -(x\circ y)\circ(h\cdot z)+(y\circ x)\circ(h\cdot z)\\
&= \frac{3}{2}(y\circ x)\circ(h\cdot z)-\frac{3}{2}(x\circ y)\circ(h\cdot z).
\end{aligned}$$

因此，如果 **k** 的特征不等于 3，则方程 (25) 成立。 □

为了对转置 Novikov-Poisson 代数进行分类，我们可以考虑已知 Novikov 代数上的相容交换结合代数结构。

令 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 为转置 Novikov-Poisson 代数 $(A,\cdot,\circ)$ 的一组基。显然，$\cdot$ 和 $\circ$ 由以下特征矩阵确定

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n c_{11}^k e_k & \dots & \sum_{k=1}^n c_{1n}^k e_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n c_{n1}^k e_k & \dots & \sum_{k=1}^n c_{nn}^k e_k \end{pmatrix}, (D_{ij}) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n d_{11}^k e_k & \dots & \sum_{k=1}^n d_{1n}^k e_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n d_{n1}^k e_k & \dots & \sum_{k=1}^n d_{nn}^k e_k \end{pmatrix},$$

其中 $e_i\cdot e_j = \sum^n{}_{k=1} c_{ij}^k e_k$ 且 $e_i\circ e_j = \sum^n{}_{k=1} d_{ij}^k e_k$。

假设（A， ∘）是一个已知的 Novikov 代数。为了刻画（A， ∘）上相容的交换结合代数结构，根据转置 Novikov-Poisson 代数的定义，我们需要求解下列方程

$$c_{ij}^{p} = c_{ji}^{p}, \quad \sum_{l=1}^{n} c_{ij}^{l} c_{lk}^{p} = \sum_{l=1}^{n} c_{jk}^{l} c_{il}^{p}, \tag{26}$$

$$\sum_{l=1}^{n} c_{ij}^{l} d_{lk}^{p} = \sum_{l=1}^{n} c_{ik}^{l} d_{lj}^{p}, \ p = 1, \ldots, n; \tag{27}$$

$$2\sum_{l=1}^{n} d_{ij}^{l} c_{kl}^{p} = \sum_{l=1}^{n} c_{ki}^{l} d_{lj}^{p} + \sum_{l=1}^{n} c_{kj}^{l} d_{il}^{p}, \ p = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

注意到，复数域上的二维诺维科夫代数 $\mathbb{C}$在同构意义下的分类已在 [3]中给出。基于这一分类结果，我们给出二维转置 Novikov-Poisson 代数在同构意义下的分类。

命题 2.21。设 $(A, \cdot, \circ)$ 是复数域上的一个二维转置 *Novikov-Poisson* 代数，且具有非零二元运算 ∘。则 $(A, \cdot, \circ)$ 同构于以下情形之一：

$(A, \circ)$的特征矩阵	$(A, \cdot)$的相容特征矩阵
$(T2)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & ne_1 \\ me_1 & me_1 + ne_2 \end{pmatrix}$
$(T3)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$(N1)$ $\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ne_1 & 0 \\ 0 & ne_2 \end{pmatrix}$
$(N2)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} ne_1 & 0 \\ 0 & ne_2 \end{pmatrix}$
$(N3)$ $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & me_1 + ne_2 \\ ne_1 & ne_1 + ne_2 \end{pmatrix}$
$(N4)$ $\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$(N5)$ $\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_1 + e_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$(N6)$ $\begin{pmatrix} le_1 - e_2 & e_1 \\ e_2 & le_1 \end{pmatrix}, l \neq 0, 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

证明。 根据分类结果， [3], 2 维非平凡 Novikov 代数在同构意义下具有形式 $(T2)$ – $(T3)$ 和 $(N1)$ – $(N6)$。于是，通过逐一直接计算，我们可以在这些 Novikov 代数上得到相容的交换结合代数结构。□

注 2.22。 二维 Novikov 代数的仿射化会产生各种无限维李代数 [25]。类似地，我们也可以通过仿射化，从二维转置 Novikov-泊松代数的分类中得到许多无限维转置泊松代数结构。例如，李代数$L(N_3)$ 是通过 Novikov 代数 N_3 的仿射化得到的，它同构于 Witt 代数与其伴随模的半直和，即无中心的$W(2, 2)$ [35]。根据命题 2.21，在 $L(N_3$上存在非平凡的转置泊松代数结构，这与 [9,定理 22]一致。

2.2.4. 张量积。 转置 Novikov-Poisson 代数的一个重要性质是，它们在张量积运算下是封闭的。

命题 2.23。 设$(A_1, \cdot_1, \circ_1)$ 和$(A_2, \cdot_2, \circ_2)$ 是两个转置 *Novikov-Poisson* 代数。在 $A_1 \otimes A_2$ 上定义两个二元运算 $\cdot$ 和 $\circ$，其定义为

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2) = a_1 \cdot_1 b_1 \otimes a_2 \cdot_2 b_2, \tag{29}$$

$$(a_1 \otimes a_2) \circ (b_1 \otimes b_2) = a_1 \cdot_1 b_1 \otimes a_2 \circ_2 b_2 + a_1 \circ_1 b_1 \otimes a_2 \cdot_2 b_2, \tag{30}$$

对所有 $a_1, b_1 \in A_1$ 和 $a_2, b_2 \in A_2$均成立。则$(A_1 \otimes A_2, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。

证明。 显然，$(A_1 \otimes A_2, \cdot)$ 是一个交换结合代数。由于 $(A_1, \cdot_1)$ 和 $(A_2, \cdot_2)$ 是交换结合代数，因此对于所有 a_1,b_1,$c_1 \in A_1$ 以及 a_2,b_2,$c_2 \in A_2$,，有

$$\begin{aligned}
&((a_1 \otimes a_2) \circ (b_1 \otimes b_2)) \circ (c_1 \otimes c_2) \\
&\quad = ((a_1 \cdot_1 b_1) \otimes (a_2 \circ_2 b_2) + (a_1 \circ_1 b_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2)) \circ (c_1 \otimes c_2) \\
&\quad = (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes (a_2 \circ_2 b_2) \circ_2 c_2 + ((a_1 \cdot_1 b_1) \circ_1 c_1) \otimes ((a_2 \circ_2 b_2) \cdot_2 c_2) \\
&\qquad + ((a_1 \circ_1 b_1) \cdot_1 c_1) \otimes ((a_2 \cdot_2 b_2) \circ c_2) + ((a_1 \circ_1 b_1) \circ_1 c_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2).
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&((b_1 \otimes b_2) \circ (a_1 \otimes a_2)) \circ (c_1 \otimes c_2) \\
&\quad = (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes (b_2 \circ_2 a_2) \circ_2 c_2 + ((a_1 \cdot_1 b_1) \circ_1 c_1) \otimes ((b_2 \circ_2 a_2) \cdot_2 c_2) \\
&\qquad + ((b_1 \circ_1 a_1) \cdot_1 c_1) \otimes ((a_2 \cdot_2 b_2) \circ c_2) + ((b_1 \circ_1 a_1) \circ_1 c_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2).
\end{aligned}$$

将上述两个等式相减，得到

$$((a_1 \otimes a_2) \circ (b_1 \otimes b_2)) \circ (c_1 \otimes c_2) - ((b_1 \otimes b_2) \circ (a_1 \otimes a_2)) \circ (c_1 \otimes c_2) = (B_1) + (B_2) + (B_3),$$

其中

$$\begin{aligned}
(B_1) &= (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes ((a_2 \circ_2 b_2 - b_2 \circ_2 a_2) \circ_2 c_2), \\
(B_2) &= ((a_1 \cdot_1 b_1) \circ_1 c_1) \otimes (c_2 \cdot_2 (a_2 \circ_2 b_2 - b_2 \circ_2 a_2)) \\
&\qquad + (c_1 \cdot_1 (a_1 \circ_1 b_1 - b_1 \circ_1 a_1)) \otimes ((a_2 \cdot_2 b_2) \circ_2 c_2) \\
(B_3) &= ((a_1 \circ_1 b_1 - b_1 \circ_1 a_1) \circ_1 c_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2).
\end{aligned}$$

由方程（29）和（30），可得

$$\begin{aligned}
&(a_1 \otimes a_2) \circ ((b_1 \otimes b_2) \circ (c_1 \otimes c_2)) \\
&\quad = (a_1 \otimes a_2) \circ ((b_1 \cdot_1 c_1) \otimes (b_2 \circ_2 c_2) + (b_1 \circ_1 c_1) \otimes (b_2 \cdot_2 c_2)) \\
&\quad = (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes (a_2 \circ_2 (b_2 \circ_2 c_2)) + (a_1 \circ_1 (b_1 \cdot_1 c_1)) \otimes (a_2 \cdot_2 (b_2 \circ_2 c_2))
\end{aligned}$$

$$+(a_1\cdot_1(b_1\circ_1 c_1))\otimes(a_2\circ_2(b_2\cdot_2 c_2))+(a_1\circ_1(b_1\circ_1 c_1))\otimes(a_2\cdot_2 b_2\cdot_2 c_2).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}&(b_1\otimes b_2)\circ((a_1\otimes a_2)\circ(c_1\otimes c_2))\\&=(a_1\cdot_1 b_1\cdot_1 c_1)\otimes(b_2\circ_2(a_2\circ_2 c_2))+(b_1\circ_1(a_1\cdot_1 c_1))\otimes(b_2\cdot_2(a_2\circ_2 c_2))\\&\quad+(b_1\cdot_1(a_1\circ_1 c_1))\otimes(b_2\circ_2(a_2\cdot_2 c_2))+(b_1\circ_1(a_1\circ_1 c_1))\otimes(a_2\cdot_2 b_2\cdot_2 c_2).\end{aligned}$$

对上面两个方程作差，得到

$$(a_1\otimes a_2)\circ((b_1\otimes b_2)\circ(c_1\otimes c_2))-(b_1\otimes a_2)\circ((a_1\otimes b_2)\circ(c_1\otimes c_2))=(C_1)+(C_2)+(C_3),$$

其中

$$\begin{aligned}&(C_1)=(a_1\cdot_1 b_1\cdot_1 c_1)\otimes(a_2\circ_2(b_2\circ_2 c_2)-b_2\circ_2(a_2\circ_2 c_2)),\\&(C_2)=(a_1\circ_1(b_1\cdot_1 c_1))\otimes(a_2\cdot_2(b_2\circ_2 c_2))+(a_1\cdot_1(b_1\circ_1 c_1))\otimes(a_2\circ_2(b_2\cdot_2 c_2))\\&-(b_1\circ_1(a_1\cdot_1 c_1))\otimes(b_2\cdot_2(a_2\circ_2 c_2))-(b_1\cdot_1(a_1\circ_1 c_1))\otimes(b_2\circ_2(a_2\cdot_2 c_2)),\\&(C_3)=(a_1\circ_1(b_1\circ_1 c_1)-(b_1\circ_1(a_1\circ_1 c_1))\otimes(a_2\cdot_2 b_2\cdot_2 c_2).\end{aligned}$$

由于（A_1，$\circ_1$）和（A_2，$\circ_2$）是 Novikov 代数，因此有（B_1）=（C_1），（B_3）=（C_3）。此外，根据式（5），可得

$$\begin{aligned}(B_2)\;=\;&\frac{1}{2}((a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1)\otimes((c_2\cdot_2 a_2)\circ_2 b_2+a_2\circ_2(c_2\cdot_2 b_2))\\&-\frac{1}{2}((a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1)\otimes((b_2\cdot_2 c_2)\circ_2 a_2+b_2\circ_2(c_2\cdot_2 a_2))\\&+\frac{1}{2}((c_1\cdot_1 a_1)\circ_1 b_1+a_1\circ_1(b_1\cdot_1 c_1))\circ((a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2)\\&-\frac{1}{2}(b_1\circ_1(a_1\cdot_1 c_1)+(c_1\cdot_1 b_1)\circ_1 a_1)\otimes((a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(C_2)\;=\;&\frac{1}{2}(a_1\circ_1(b_1\cdot_1 c_1))\otimes((a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2+b_2\circ_2(a_2\cdot_2 c_2))\\&+\frac{1}{2}((a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1+b_1\circ_1(a_1\cdot_1 c_1))\otimes(a_2\circ_2(b_2\cdot_2 c_2))\\&-\frac{1}{2}(b_1\circ_1(a_1\cdot_1 c_1))\otimes((a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2+a_2\circ_2(b_2\cdot_2 c_2))\\&-\frac{1}{2}((a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1+a_1\circ_1(b_1\cdot_1 c_1))\otimes(b_2\circ_2(a_2\cdot_2 c_2))\\=\;&\frac{1}{2}(a_1\circ_1(b_1\cdot_1 c_1))\otimes((a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2)+\frac{1}{2}((a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1)\otimes(a_2\circ_2(b_2\cdot_2 c_2))\\&-\frac{1}{2}(b_1\circ_1(a_1\cdot_1 c_1))\otimes((a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2)-\frac{1}{2}((a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1)\otimes(b_2\circ_2(a_2\cdot_2 c_2)).\end{aligned}$$

由于 $(a_1\cdot_1 b_1)\circ_1 c_1=(a_1\cdot_1 c_1)\circ_1 b_1$ 和 $(a_2\cdot_2 b_2)\circ_2 c_2=(a_2\cdot_2 c_2)\circ_2 b_2$，，有 $(B_2)=(C_2)$。因此，式（2）成立。

由于

$$((a_1\otimes a_2)\circ(b_1\otimes b_2))\circ(c_1\otimes c_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big((a_1 \cdot_1 b_1 \otimes (a_2 \circ_2 b_2)) + ((a_1 \circ_1 b_1) \otimes a_2 \cdot_2 b_2)\Big) \circ (c_1 \otimes c_2) \\
&= (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes ((a_2 \circ_2 b_2) \circ c_2) + ((a_1 \cdot_1 b_1) \circ_1 c_1) \otimes ((a_2 \circ_2 b_2) \cdot_2 c_2) \\
&\quad + ((a_1 \circ_1 b_1) \circ c_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2) + ((a_1 \circ_1 b_1) \cdot_1 c_1) \otimes ((a_2 \cdot_2 b_2) \circ_2 c_2) \\
&= (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes ((a_2 \circ_2 c_2) \circ_2 b_2) + ((a_1 \cdot_1 c_1) \circ_1 b_1) \otimes ((a_2 \circ_2 c_2) \cdot_2 b_2) \\
&+ ((a_1 \circ_1 c_1) \circ_1 b_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2) + ((a_1 \circ_1 c_1) \cdot_1 b_1) \otimes ((a_2 \cdot_2 c_2) \circ_2 b_2) \\
&\quad = \Big((a_1 \otimes a_2) \circ (c_1 \otimes c_2)\Big) \circ (b_1 \otimes b_2),
\end{aligned}
$$

$(A_1 \otimes A_2, \cdot)$ 是一个 Novikov 代数。

由于

$$
\begin{aligned}
&2(c_1 \otimes c_2) \cdot ((a_1 \otimes a_2) \circ (b_1 \otimes b_2)) \\
&\quad = 2(c_1 \otimes c_2) \cdot \Big(a_1 \cdot_1 b_1 \otimes (a_2 \circ_2 b_2) + (a_1 \circ_1 b_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2)\Big) \\
&\quad = 2(a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes c_2 \cdot_2 (a_2 \circ_2 b_2) + 2(c_1 \cdot_1 (a_1 \circ_1 b_1)) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2) \\
&\quad = (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes ((c_2 \cdot_2 a_2) \circ_2 b_2 + a_2 \circ_2 (c_2 \cdot_2 b_2)) \\
&\qquad + ((c_1 \cdot_1 a_1) \circ_1 b_1 + a_1 \circ_1 (c_1 \cdot_1 b_1)) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2) \\
&\quad = ((a_1 \cdot_1 c_1) \otimes (a_2 \cdot_2 c_2)) \circ (b_1 \otimes b_2) + (a_1 \otimes a_2) \circ ((b_1 \cdot_1 c_1) \otimes (b_2 \cdot_2 c_2)) \\
&\quad = ((c_1 \otimes c_2) \cdot (a_1 \otimes a_2)) \circ (b_1 \otimes b_2) + (a_1 \otimes a_2) \circ ((c_1 \otimes c_2) \cdot (b_1 \otimes b_2)),
\end{aligned}
$$

等式（5）成立。

此外，我们有

$$
\begin{aligned}
&\Big((a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2)\Big) \circ (c_1 \otimes c_2) \\
&\quad = (a_1 \cdot_1 b_1 \otimes a_2 \cdot_2 b_2)) \circ (c_1 \otimes c_2) \\
&\quad = (a_1 \cdot_1 b_1 \cdot_1 c_1) \otimes ((a_2 \cdot_2 b_2) \circ_2 c_2) + ((a_1 \cdot_1 b_1) \circ_1 c_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2) \\
&\quad = (a_1 \cdot_1 c_1 \cdot_1 b_1) \otimes ((a_2 \cdot_2 c_2) \circ_2 b_2) + ((a_1 \cdot_1 c_1) \circ_1 b_1) \otimes (a_2 \cdot_2 b_2 \cdot_2 c_2) \\
&\quad = \Big((a_1 \otimes a_2) \cdot (c_1 \otimes c_2)\Big) \circ (b_1 \otimes b_2).
\end{aligned}
$$

因此，$(A_1 \otimes A_2, \cdot, \circ)$ 是一个转置 Novikov-Poisson 代数。 □

2.2.5. 由已知的转置 *Novikov-Poisson* 代数构造。

引理 2.24。 设 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。那么 $(A, \circ_x)$ 是由下式定义的 *Novikov* 代数

$$x \circ_p y := x \circ y + p \cdot x \cdot y \quad \textit{for all } x, y \in A,$$

其中 $p \in \mathbf{k}$或 $p \in A$。

证明。 显然。 □

注 2.25。 注意到 $(A, \circ_p)$ 是 $(A, \circ)$ 的变形。

定理 2.26. 设 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。那么，对于任意固定的元素 p、$q \in A$ 或 $\mathbf{k}$，三元组 $(A, \cdot_p, \circ_q)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数，其中

$$x \cdot_p y = p \cdot x \cdot y, \quad x \circ_q y = x \circ y + q \cdot x \cdot y \quad \textit{for all } x, y \in A.$$

证明. 可直接验证。 □

接下来，我们介绍如何利用Kantor乘积构造转置 Novikov-Poisson 代数。

我们先回顾两个二元运算的Kantor乘积的定义。详情请参阅 [15, 16]。设 V_n 是一个n维向量空间，并用 U(n) 表示 V_n上所有二元运算构成的空间。对于固定元素 $u \in V_n$ 以及任意两个二元运算 $A, B \in U(n)$，我们在 V_n 上定义一个新的二元运算 $[A, B]_u$，规定对所有 $x, y \in V_n$,

$$[A, B]_u(x, y) = A(u, B(x, y)) - B(A(u, x), y) - B(x, A(u, y)).$$

$[A,B]_u$ 称为**A** 和B的**左Kantor乘积** 。

命题2.27。 设$(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数，且 u 是 A 中的固定元素。则$(A, [\cdot, \circ]_u)$ 是一个 *Novikov* 代数，而 $(A, [\circ, \cdot]_u)$ 是一个结合交换代数。

证明。 首先，对任意 $x,y \in A$，定义

$$x * y := [\circ, \cdot]_u(x, y), \quad x \star y := [\cdot, \circ]_u(x, y).$$

于是得到

$$\begin{aligned} x * y &= u \circ (x \cdot y) - (u \circ x) \cdot y - x \cdot (u \circ y) \\ &= u \circ (x \cdot y) - 2x \cdot (u \circ y) = -(x \cdot u) \circ y = -(x \cdot y) \circ u, \end{aligned}$$

and

$$x \star y = u \cdot (x \circ y) - (u \cdot x) \circ y - x \circ (u \cdot y) = -u \cdot (x \circ y).$$

对任意 $x, y,z \in A$，有

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (((x \cdot y) \circ u) \cdot z) \circ u = (((x \cdot y) \circ z) \cdot u) \circ u \\ &= (((z \cdot y) \circ x) \cdot u) \circ u = (x \cdot ((y \cdot z) \circ u)) \circ u = x * (y * z), \end{aligned}$$

and

$$x * y = -(x \cdot y) \circ u = y * x.$$

因此，$(A, *)$ 是一个交换结合代数。

由于

$$(x \star y) \star z = -(u \cdot (x \circ y)) \star z = u \cdot ((u \cdot (x \circ y)) \circ z) = u \cdot (((x \circ y) \cdot z) \circ u) = (x \star z) \star y,$$

$$y \star (x \star z) = y \star (-u \cdot (x \circ z)) = u \cdot (y \circ (u \cdot (x \circ z))),$$

等式 (2) 成立。此外，我们得到

$$\begin{aligned} &(x \star y) \star z - (y \star x) \star z - x \star (y \star z) + y \star (x \star z) \\ &= u \cdot \big((u \cdot (x \circ y)) \circ z - ((y \circ x) \cdot u) \circ z - x \circ (u \cdot (y \circ z)) + y \circ (u \cdot (x \circ z))\big) \\ &= u \cdot \big(\frac{1}{2}((u \cdot x) \circ y) \circ z + \frac{1}{2}(x \circ (u \cdot y)) \circ z - \frac{1}{2}((u \cdot y) \circ x) \circ z - \frac{1}{2}(y \circ (u \cdot x)) \circ z \\ &\quad -\frac{1}{2}x \circ ((u \cdot y) \circ z) - \frac{1}{2}x \circ ((y \cdot u) \circ z) - \frac{1}{2}y \circ ((u \cdot x) \circ z) + \frac{1}{2}y \circ ((x \cdot u) \circ z)\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此，$(A, \star)$ 是一个 Novikov 代数。 □

定理 2.28. 设 $(A,\cdot,\circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数，且 u 是 A 中的一个固定元素。那么 $(A,\cdot,[\cdot,\circ]_u)$ 也是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。

证明。 记 $[\cdot,\circ]_u$ 为 $\star$。根据转置 Novikov-Poisson 代数的定义，我们得到

$$\begin{aligned} 2z\cdot(x\star y) &= 2z\cdot(-u\cdot(x\circ y)) = -2z\cdot u\cdot(x\circ y)\\ &= -u\cdot((z\cdot x)\circ y) - u\cdot(x\circ(z\cdot y)) = (z\cdot x)\star y + x\star(z\cdot y), \end{aligned}$$

and

$$(x\cdot y)\star z = -u((x\cdot y)\circ z) = -u((x\cdot z)\circ y) = (x\cdot z)\star y.$$

因此，$(A,\cdot,[\cdot,\circ]_u)$ 是一个转置 Novikov-Poisson 代数。 □

推论 2.29。 设 $(A,\cdot,\circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。对于固定元素 p，q，$r\in\mathbf{k}$ 或 A，三元组 $(A,\cdot_p,\circ_q)$ 也是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数，其中 $x\cdot_p y = x\cdot y\cdot p$，$x\circ_{q,r} y = q\cdot(x\circ y)+r\cdot x\cdot y$，对所有 x，$y\in A$ 均成立。

证明。 由定理2.26和 2.28可直接得出。 □

3. $\frac{1}{2}$-导数 Novikov 代数及转置 Novikov-Poisson 代数结构

本节介绍相关 Novikov 代数的$\frac{1}{2}$-导子与转置 Novikov-Poisson 代数之间的关系，并研究可解 Novikov 代数上的转置 Novikov-Poisson 代数结构。

3.1. $\frac{1}{2}$-Novikov 代数的导子。

我们从 δ-导子的一个特例——$\frac{1}{2}$-导子的定义开始。

定义 3.1。设 $(A,\circ)$ 是一个 Novikov 代数，$\varphi: A\to A$ 是一个线性映射，且 $\delta\in\mathbf{k}$。若 φ 满足下式，则称其为 $(A,\circ)$ 的 **δ-导子**：

$$\varphi(x\circ y) = \delta(\varphi(x)\circ y + x\circ\varphi(y)) \quad \text{for all } x,y\in A. \tag{31}$$

注记 3.2。设 $\alpha\in\mathbf{k}$。定义 $\varphi_\alpha: A\to A$ 为

$$\varphi_\alpha(x) = \alpha x \quad \text{for all } x\in A. \tag{32}$$

显然，φ_α 是 $(A,\circ)$ 的$\frac{1}{2}$-导子。我们称 $(A,\circ)$ 的这类$\frac{1}{2}$-导子为**平凡**的。

转置 Novikov-Poisson 代数与 Novikov 代数的$\frac{1}{2}$-导子有关。

引理 3.3。 设$(A,\cdot,\circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数，且 z 是 A 中任意一个元素。那么，$L_\cdot(z)$（或 $R_\cdot(z)$）是 *Novikov* 代数$(A,\circ)$的$\frac{1}{2}$-导子。

证明。 由等式（5）立即可得。 □

根据引理3.3，我们可以利用 Novikov 代数的$\frac{1}{2}$-导子来构造转置 Novikov-Poisson 结构。

例 3.4. 设 A 是 k 上的向量空间，其基为 $\mathcal{B}=\{e_i \mid i\in\mathbb{Z}\}$。定义二元运算 $\circ: A\otimes A\to A$，使得 $e_i\circ e_j = e_{i+j}$，对任意 e_i、$e_j\in\mathcal{B}$ 均成立。则 (A, ∘) 是一个 Novikov 代数。令 φ 是 (A, ∘) 的一个 $\frac{1}{2}$-导子。设 $\varphi(e_i)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_i$，$je_j$，对每个 $e_i\in\mathcal{B}$ 均成立。由于

$$2\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{i,j}e_j = 2\varphi(e_i) = 2\varphi(e_i\circ e_0) = \varphi(e_i)\circ e_0 + e_i\circ\varphi(e_0) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{i,j}e_j + \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{0,j}e_{i+j},$$

对每个 i ∈ ℤ，我们有 $\varphi(e_i) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{0,j} e_{i+j}$。因此，存在一个由 k 中元素构成的有限集 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$，使得 $\varphi(e_i) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j e_{i+j}$。接着，我们在 (A, ∘) 上考虑相容的交换结合代数结构 (A, ·)。记 L_{e_n} 为 L_n。根据引理 3.3，对每个 i，存在一个由 k 中元素构成的有限集 $\{a_{i,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$，使得 $L_j(e_i) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,k} e_{i+k}$。注意，$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,k} e_{i+k} = L_j(e_i) = e_j \cdot e_i = e_i \cdot e_j = L_i(e_j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{i,k} e_{k+j}$。令 j = 0。则对所有 i、k ∈ ℤ，我们有 $a_{i,k} = a_{0,k-i}$。因此，得到 $e_i \cdot e_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{i,k} e_{k+j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{0,k-i} e_{k+j} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{0,k} e_{k+i+j}$。对于任意由 k 中元素构成的有限集 $\{a_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$，定义 $e_i \cdot e_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_{k+i+j}$。直接验证可知，三元组 (A, ·, ∘) 是一个转置 Novikov-Poisson 代数。

定理 3.5. 设$(A, \circ)$ 是一个 *Novikov* 代数，且$\dim(A) \geq 2$。若$(A, \circ)$上仅存在平凡的$1\,2$-导子，则$(A, \circ)$ 上的每个转置 *Novikov-Poisson* 结构都是平凡的。

证明。设 (A, ·, ∘) 是一个转置 Novikov-Poisson 代数。根据引理 3.3，对于所有 x, y ∈ A，$R_{(y)}$ 和 $L_{(x)}$ 都是 (A, ∘) 上的 1 2-导子。根据假设，存在 $\kappa_x, \kappa_y \in k$，使得对所有 z ∈ A，$L_{(x)}(z) = \kappa_x z$ 且 $R_{(y)}(z) = \kappa_y z$。由于 dim(A) ≥ 2，我们可以取 x 和 y 为线性无关元。因此，$\kappa_x = \kappa_y = 0$，因为 $L_{(x)}(y) = \kappa_x y = x \cdot y = \kappa_y x = R_{(y)}(x)$。因此，对所有 x, z ∈ A，有 $x \cdot z = L_{(x)}(z) = \kappa_x z = 0$。□

引理 3.6。 设 $(A, \circ)$ 是一个 *Novikov* 代数，且 φ 是 $1\,2$-导子。则对于所有 x、y、$z \in A$，以下恒等式成立：

$$(x \circ y) \circ \varphi(z) = (x \circ \varphi(y)) \circ z, \tag{33}$$

$$(x \circ y) \circ \varphi(z) - (y \circ x) \circ \varphi(z) = \varphi(x) \circ (y \circ z) - \varphi(y) \circ (x \circ z). \tag{34}$$

证明。 对于所有 x、y、$z \in A$，有

$$\begin{aligned} \varphi((x \circ y) \circ z) &= \frac{1}{2}\varphi(x \circ y) \circ z + \frac{1}{2}(x \circ y) \circ \varphi(z) \\ &= \frac{1}{4}(x \circ \varphi(y)) \circ z + \frac{1}{4}(\varphi(x) \circ y) \circ z + \frac{1}{2}(x \circ y) \circ \varphi(z), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \varphi((x \circ z) \circ y) &= \frac{1}{2}\varphi(x \circ z) \circ y + \frac{1}{2}(x \circ z) \circ \varphi(y) \\ &= \frac{1}{4}(x \circ \varphi(z)) \circ y + \frac{1}{4}(\varphi(x) \circ z) \circ y + \frac{1}{2}(x \circ z) \circ \varphi(y). \end{aligned}$$

将上述两个恒等式相减可得式（ff）。

注意,

$$\begin{aligned} \varphi((x \circ y) \circ z) - \varphi((y \circ x) \circ z) &= \frac{1}{4}(x \circ \varphi(y)) \circ z + \frac{1}{4}(\varphi(x) \circ y) \circ z + \frac{1}{2}(x \circ y) \circ \varphi(z) \\ &\quad -\frac{1}{4}(y \circ \varphi(x)) \circ z - \frac{1}{4}(\varphi(y) \circ x) \circ z - \frac{1}{2}(y \circ x) \circ \varphi(z), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \varphi(x \circ (y \circ z)) - \varphi(y \circ (x \circ z)) &= \frac{1}{4}x \circ (y \circ \varphi(z)) + \frac{1}{4}x \circ (\varphi(y) \circ z) + \frac{1}{2}\varphi(x) \circ (y \circ z) \\ &\quad -\frac{1}{4}y \circ (x \circ \varphi(z)) - \frac{1}{4}y \circ (\varphi(x) \circ z) - \frac{1}{2}\varphi(y) \circ (x \circ z). \end{aligned}$$

根据方程（2）和（3），我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi((x\circ y)\circ z)-\varphi((y\circ x)\circ z)-\varphi(x\circ(y\circ z))+\varphi(y\circ(x\circ z)) \\ &= \frac{1}{4}\varphi(y)\circ(x\circ z)-\frac{1}{4}\varphi(x)\circ(y\circ z)+\frac{1}{4}(x\circ y)\circ\varphi(z)-\frac{1}{4}(y\circ x)\circ\varphi(z). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

最后，我们展示转置 Novikov-Poisson 代数与 Hom-Novikov 代数之间的关系。

定义 3.7. [32] 一个 **Hom-Novikov 代数** 是由向量空间$A,\circ,\alpha$组成的三元组（A、一个二元运算 $\circ: A\otimes A \longrightarrow A$ 以及一个代数同态 $\alpha: A \longrightarrow A$ 满足以下条件

$$(x\circ y)\circ\alpha(z)-\alpha(x)\circ(y\circ z)=(y\circ x)\circ\alpha(z)-\alpha(y)\circ(x\circ z), \tag{35}$$

$$(x\circ y)\circ\alpha(z)=(x\circ z)\circ\alpha(y) \quad \text{for all } x,y,z\in A. \tag{36}$$

命题 3.8. 设（$A,\cdot,\circ$）是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数，且 $p\in A$。若 $L_\cdot(p)$ 是（$A,\circ$）的代数同态，则（$A,\circ,L_\cdot(p)$）是一个 *Hom-Novikov* 代数。

证明。 由引理 3.3, $L_\cdot(p)$ 是一个 $\mapsto_2$-导子 of $(A,\circ)$. 再由引理 3.6，对于所有 $x,y,z\in A$，我们得到

$$\begin{aligned} (x\circ y)\circ(L_\cdot(p)(z))-(y\circ x)\circ(L_\cdot(p)(z)) &= (L_\cdot(p)(x))\circ(y\circ z)-(L_\cdot(p)(y))\circ(x\circ z), \\ (x\circ y)\circ(L_\cdot(p)(z)) &= (x\circ(L_\cdot(p)(y)))\circ z. \end{aligned}$$

因此，$(A,\circ,L_\cdot(p))$ 是一个 Hom-Novikov 代数。 □

3.2. $\mapsto_2$**-可解 Novikov 代数的导子**。 本小节中，我们讨论可解 Novikov 代数上的 $_{12}$-导子和转置 Novikov-Poisson 代数结构。首先回顾一些必要的概念。

定义 3.9. 设 (A, ∘) 是一个 Novikov 代数。定义 $A^{(0)}=A$，并对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$定义 $A^{(n)}=A^{(n-1)}\circ A^{(n-1)}$。那么，如果存在某个 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $A^{(n)}=\{0\}$，则称 (A,∘) 是可解的。定义 $A_L^1=A$ 和 $A_L^n=A_L^{n-1}\circ A$。那么，如果存在某个 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $A_L^n=\{0\}$，则称 (A,∘) 是右幂零的。左幂零性可以类似地定义。定义 $A^1=A$ 和 $A^n=\sum_{1\le i\le n-1}A^i\circ A^{n-i}$，$n\ge 2$。那么，如果对某个正整数 n 有 $A^n=\{0\}$，则称 (A,∘) 是幂零的。

注 3.10. 根据 [27, 定理 3.3], $(A,\circ)$ 是右幂零的，当且仅当 $(A^2,\circ)$ 是幂零的，当且仅当 $(A,\circ)$ 是可解的。

设 (A,∘) 是一个 Novikov 代数，且 $I\subset A$。回顾一下，I 在 A 中的湮灭子、左湮灭子和右湮灭子分别为 $\mathrm{Ann}_A(I)=\{a\in A\mid a\circ I=I\circ a=0\}$、$\mathrm{Ann}_L(I)=\{a\in A\mid a\circ I=0\}$ 和 $\mathrm{Ann}_R(I)=\{a\in A\mid I\circ a=0\}$。

引理 3.11. [24, 引理 2], [27, 引理 2.1] 设 $(A,\circ)$ 是一个 *Novikov* 代数。则以下结论成立。

(a) 如果 I 是$(A,\circ)$的左理想，那么 $Ann_L(I)$ 是$(A,\circ)$的理想。(b) 如果 I 是$(A,\circ)$的理想，那么 $Ann_A(I)$ 是$(A,\circ)$的理想。

引理 3.12。 设$(A,\circ)$是一个可分解 *Novikov* 代数，即 A 是两个非零理想的直和。那么$(A,\circ)$具有非平凡的$\frac{1}{2}$-导子。

证明。由假设可知，$\dim(A) \geq 2$。假设 $A = A_1 \oplus A_2$, , 其中 A_1, A_2 是 $(A,\circ)$ 的非零理想。对任意 $x_i = y_i + z_i \in A$，其中 $y_i \in A_1, z_i \in A_2$, , 定义线性映射$\varphi : A \to A$，使得 $\varphi(x_i) = z_i$。于是对任意 x_i，$x_j \in A$，均有

$$\varphi(x_i \circ x_j) = \varphi((y_i + z_i) \circ (y_j + z_j)) = \varphi(y_i \circ y_j + z_i \circ z_j) = z_i \circ z_j,$$
$$\frac{1}{2}\varphi(x_i) \circ x_j + \frac{1}{2}x_i \circ \varphi(x_j) = \frac{1}{2}z_i \circ x_j + \frac{1}{2}x_i \circ z_j = \frac{1}{2}z_i \circ z_j + \frac{1}{2}z_i \circ z_j.$$

因此，上述线性映射 φ 是 $(A,\circ)$ 的非平凡 $\frac{1}{2}$-导子。于是结论成立。□

引理 3.13. 设 $(A,\circ)$ 是一个有限维 *Novikov* 代数，满足 $\mathrm{Ann}_A(A) \neq 0$ 且 $A \circ A \neq A$。那么 A 存在非平凡的 $\frac{1}{2}$-导子。

证明。 当 $A \circ A = 0$时，所有线性映射 $\varphi : A \to A$ 都是 $\frac{1}{2}$-导子。因此结论成立。

接下来，我们只需考虑$A \circ A \neq 0$的情形。由于$A \circ A \neq A$，因此 $\dim(A) \geq 2$。

若 $(A \circ A) \cap \mathrm{Ann}_A(A) = 0$，则存在 A 的一个子空间 V，使得 $A = V \oplus (A \circ A) \oplus \mathrm{Ann}_A(A)$ 作为向量空间，其中 V 可以是零向量空间。由于 $V \oplus (A \circ A)$ 和 $\mathrm{Ann}_A(A)$ 是 $(A,\circ)$ 的非零理想，因此由引理 3.12 可得此结论。

若 $(A \circ A) \cap \mathrm{Ann}_A(A) \neq 0$，取一个非零元素 $x_1 \in (A \circ A) \cap \mathrm{Ann}_A(A)$。此外，存在 A 的一个非零子空间 W，使得 $A = (A \circ A) \oplus W$ 作为向量空间。定义一个线性映射 $\varphi : A \to A$，使得 $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = x_1$, , 其中对所有 $x \in A \circ A$ 和 $y \in W$ 均成立。于是，对所有 $z_1, z_2 \in A$，我们有

$$\varphi(z_1 \circ z_2) = 0 = \frac{1}{2}\varphi(z_1) \circ z_2 + \frac{1}{2}z_1 \circ \varphi(z_2).$$

因此，上述定义的 φ 是$(A,\circ)$上的非平凡$\frac{1}{2}$-导子。 □

基于引理 3.13中1 2-导子的构造，我们得到以下定理。

定理 3.14. 设$(A,\circ)$是一个有限维 *Novikov* 代数。若 $A \circ A \neq 0$，$A \circ A \neq A$ 且$\mathrm{Ann}_A(A) \neq 0$，则在$(A,\circ)$上存在非平凡的转置 *Novikov-Poisson* 结构。

证明。 我们使用与引理3.13证明中相同的记号来证明此结论。由假设可知，$\dim(A) \geq 2$。

若 $(A \circ A) \cap \mathrm{Ann}_A(A) = 0$，令 $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ 为 $V \oplus (A \circ A)$ 的一组基，$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$为 $\mathrm{Ann}_A(A)$ 的一组基。定义二元运算 $\cdot : A \otimes A \to A$，使得 $x_i \cdot x_j = x_i + x_j$，且 $z_1 \cdot z_2 = 0$，其中 $\{z_1, z_2\} \subset X \cup Y$ 且 $\{z_1, z_2\} \not\subseteq X$。显然，二元运算 $\cdot$ 是交换的且结合的。此外，对任意 $x, y, z \in A$，有

$$2z \cdot (x \circ y) \in 2z \cdot (A \circ A) = 0,\ (z \cdot x) \circ y \in \mathrm{Ann}_A(A) \circ A = 0,$$
$$x \circ (z \cdot y) \in A \circ \mathrm{Ann}_A(A) = 0,\ (x \cdot y) \circ z, (x \cdot z) \circ y \in \mathrm{Ann}_A(A) \circ A = 0.$$

因此，方程 (4) 和 (5) 对三元组 $(A, \cdot, \circ)$ 成立。于是，$(A, \cdot, \circ)$ 是一个非平凡的转置 Novikov-Poisson 代数。

若 $(A \circ A) \cap \mathrm{Ann}_A(A) \neq 0$，令 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 为 $A \circ A$ 的一组基，$Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ 为 W 的线性基。定义二元运算 $\cdot : A \otimes A \to A$，使得 $y_i \cdot y_j = x_1$，，且 $z_1 \cdot z_2 = 0$，其中 $\{z_1, z_2\} \subset X \cup Y$，且 $\{z_1, z_2\} \nsubseteq X$。显然，二元运算 $\cdot$ 是交换且结合的。于是，对所有 $x, y, z \in A$，类似于前一种情况，经过类似计算，我们得到

$$2z \cdot (x \circ y) = 0 = (z \cdot x) \circ y + x \circ (z \cdot y),$$
$$(x \cdot y) \circ z = 0 = (x \cdot z) \circ y.$$

因此，$(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 Novikov-Poisson 代数。 □

推论 3.15. 设$(A, \circ)$ 是一个有限维可解 *Novikov* 代数，且 $A \circ A \neq 0$，并且 $\mathrm{Ann}_A(A) \neq 0$。则$(A, \circ)$上存在一个非平凡转置 *Novikov-Poisson* 代数结构。

证明。 由于 $(A, \circ)$ 是可解的，因此有 $A \circ A \neq A$。由此可直接得到定理 3.14。 □

例 3.16. 设 A 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的三维向量空间，其一组基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$。根据 [3],$(A, \circ)$ 是一个传递（右幂零）Novikov 代数，其非零乘积如下：

$$e_3 \circ e_2 = e_2.$$

根据注 3.10，$(A, \circ)$ 是可解的。通过直接计算可得 $\mathrm{Ann}_R(A) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3$，且 $\mathrm{Ann}_L(A) = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$。因此，$\mathrm{Ann}_A(A) = \mathbb{C}e_1$，且 $(A \circ A) \cap \mathrm{Ann}_A(A) = \{0\}$，因为 $(A \circ A) = \mathbb{C}e_2$。应用定理 3.14，定义交换结合代数 $(A, \cdot)$，其非零乘积如下：$e_1 \cdot e_1 = 2e_1$。显然，三元组 $(A, \cdot, \circ)$ 构成一个转置 Novikov-Poisson 代数。

为进一步说明定理 3.14，我们给出一个转置 Novikov-Poisson 代数的例子，其中的 Novikov 代数不可解，但满足 $A \circ A \neq A$。

例 3.17. 设 A 为 $\mathbb{C}$ 上的三维向量空间，基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$。由 [3],$(A, \circ)$ 是非传递（右幂零）代数，其非零乘积由

$$e_1 \circ e_1 = e_2, \quad e_3 \circ e_3 = e_3.$$

由注 3.10，$(A, \circ)$ 不可解。易见 $\mathrm{Ann}_R(A) = \mathbb{C}e_2$ 且 $\mathrm{Ann}_L(A) = \mathbb{C}e_2$。因此，我们有 $\mathrm{Ann}_A(A) = \mathbb{C}e_2$, 且 $(A \circ A) \cap \mathrm{Ann}_A(A) = \mathbb{C}e_2$,，因为 $A \circ A = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$。设 $X = \{x_1 = e_2, e_3\}$ 且 $Y = \{e_1\}$。应用定理 3.14，定义一个交换结合代数 $(A, \cdot)$，其非零乘积由 $e_1 \cdot e_1 = e_2$ 给出。则三元组 $(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 Novikov-Poisson 代数。

接下来，我们将研究 $\mathrm{Ann}_A(A) = 0$ 的可解 Novikov 代数上的 $_1{}_2$-导子和转置 Novikov-Poisson 代数结构。然而，一些三维例子表明，对于 $\mathrm{Ann}_A(A) = 0$ 的可解 Novikov 代数，非平凡的转置 Novikov-Poisson 代数结构未必存在。

例 3.18. 设 A 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的三维向量空间，其基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$。由 [3],$(A, \circ)$ 是一个传递（右幂零）代数，其非零乘积如下：

$$e_2 \circ e_2 = e_1, \quad e_3 \circ e_1 = e_1, \quad e_3 \circ e_2 = \frac{1}{2}e_2.$$

由注记 3.10可知，$(A, \circ)$ 是可解的，且 $\mathrm{Ann}_A(A) = 0$。经过直接计算，转置 Novikov-Poisson 代数 $(A, \cdot, \circ)$ 是平凡的。

最后，我们给出在满足 $\mathrm{Ann}_A(A) = 0$ 的 Novikov 代数上构造 $(1,2)$-导子及相应的转置 Novikov-泊松代数结构的方法。

引理3.19。 设 $(A, \circ)$ 是一个满足 $\mathrm{Ann}_A(A) = 0$ 的可解 *Novikov* 代数。若 $\mathrm{Ann}_A(A \circ A) \backslash \mathrm{Ann}_L(A) \neq 0$，则 A 有非平凡的 $(1,2)$-导子。

证明。首先，我们有 $\dim(A) \geq 2$。取 $w \in \mathrm{Ann}_A(A \circ A) \backslash \mathrm{Ann}_L(A)$，定义线性映射 $\varphi : A \to A$，使得 $\varphi(x) = w \circ x$。若存在 $k_w \in k$，使得对所有 $x \in A$ 都有 $\varphi(x) = w \circ x = k_w x$，则对所有 $x, y \in A$，有 $\varphi(x \circ y) = w \circ (x \circ y) = k_w(x \circ y) = 0$。由于 $A \circ A \neq 0$，因此 $k_w = 0 = w \circ x$，这与 $w \notin \mathrm{Ann}_L(A)$ 矛盾。因此，上述定义的 φ 是非平凡的。

最后，我们验证 φ 是一个$(1,2)$-导子。由于

$$2\varphi(x \circ y) = 2w \circ (x \circ y) = 0,$$

and

$$\begin{aligned} \varphi(x) \circ y + x \circ \varphi(y) &= (w \circ x) \circ y + x \circ (w \circ y) \\ &= (x \circ w) \circ y + w \circ (x \circ y) - x \circ (w \circ y) + x \circ (w \circ y) \\ &= (x \circ y) \circ w + w \circ (x \circ y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

φ 是一个非平凡的$(1,2)$-导子。 □

定理 3.20. 设$(A, \circ)$ 是一个可解*Novikov*代数，且$\mathrm{Ann}_A(A) = 0$。若$\mathrm{Ann}_A(A \circ A) \backslash \mathrm{Ann}_L(A) \neq 0$，则在$(A, \circ)$上存在非平凡的转置 *Novikov-Poisson* 代数结构。

证明。按照引理3.19的证明，我们定义一个二元运算 $\cdot : A \otimes A \to A$，使得对所有$x, y \in A$，均有$x \cdot y = (w \circ x) \circ y$，其中$w \in \mathrm{Ann}_A(A \circ A) \backslash \mathrm{Ann}_L(A)$。根据方程(2)，$(A, \cdot)$是交换的。于是有

$$x \cdot y = (w \circ x) \circ y = (x \circ w) \circ y + w \circ (x \circ y) - x \circ (w \circ y) = -x \circ (w \circ y),$$

对所有x、$y \in A$均成立。若对所有x、$y \in A$有$x \cdot y = 0$，则$w \circ A \subset \mathrm{Ann}_L(A) \cap \mathrm{Ann}_R(A)$。这直接意味着 $w \circ A = 0$，因为$\mathrm{Ann}_A(A) = 0$，这与$w \notin \mathrm{Ann}_L(A)$矛盾。因此，上述定义的$(A, \cdot)$不是平凡的。此外，上述定义的$(A, \cdot)$是结合的，因为

$$(x \cdot y) \cdot z = (w \circ ((w \circ x) \circ y)) \circ z = 0,$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (w \circ x) \circ ((w \circ y) \circ z) = (w \circ ((w \circ y) \circ z)) \circ x = 0,$$

对所有的 x、y、$z \in A$。

最后，我们需要验证等式 (4) 和 (5) 对 $(A, \cdot, \circ)$ 成立。由于 $\mathrm{Ann}_A(A \circ A)$ 根据引理 3.11 是 $(A, \circ)$ 的一个理想，我们有 $w \circ A \subset \mathrm{Ann}_A(A \circ A)$。因此，对于所有 $x, y, z \in A$，都有 $(x \circ y) \circ (w \circ z) = 0$。于是，对于所有 $x, y, z \in A$，我们得到

$$(x \cdot y) \circ z = \big((w \circ x) \circ y\big) \circ z = \big((w \circ x) \circ z\big) \circ y = (x \cdot z) \circ y,$$

$$2z \cdot (x \circ y) = 2(w \circ z) \circ (x \circ y) = 2(w \circ (x \circ y)) \circ z = 0,$$

and

$$\begin{aligned}(z\cdot x)\circ y + x\circ(z\cdot y) &= ((w\circ z)\circ x)\circ y + x\circ((w\circ z)\circ y)\\ &= (x\circ(w\circ z))\circ y + (w\circ z)\circ(x\circ y) - x\circ((w\circ z)\circ y) + x\circ((w\circ z)\circ y)\\ &= (x\circ y)\circ(w\circ z) + (w\circ(x\circ y))\circ z\\ &= 0.\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

4. 单转置 Novikov-Poisson 代数

本节研究单转置 Novikov-Poisson 代数。我们证明，若 $(A,\cdot,\circ)$ 是非平凡的单转置 Novikov-Poisson 代数，则 $(A,\circ)$ 是简单的。基于这一结果，我们刻画了定义在某些单 Novikov 代数上的转置 Novikov-Poisson 代数。

4.1. 关于单转置 Novikov-Poisson 代数。 设 $(A,*)$ 是一个 Novikov 代数或交换结合代数。若 A 满足 $*$，且 $A*A\neq\{0\}$，并且 A 的唯一理想是**平凡理想**：$\{0\}$ 和 A，则称 $(A,*)$ 为**简单**。

定义 4.1。 转置 Novikov-Poisson 代数 $(A,\cdot,\circ)$ 的一个**理想** 是指满足以下条件的子空间 I：I 既是 $(A,\circ)$ 的理想，也是 $(A,\cdot)$ 的理想。0 和 A 称为 $(A,\cdot,\circ)$ 的**平凡理想** 。若非平凡转置 Novikov-Poisson 代数 $(A,\cdot,\circ)$ 不含非平凡理想，则称其为**简单**。

引理 4.2. 设$(A,\cdot,\circ)$ 是一个非平凡的转置 *Novikov-Poisson* 代数。若 $A\circ A\neq A$，则$(A,\cdot)$和$(A,\cdot,\circ)$ 都不是简单的。

证明. 由式 (5) 可得

$$(A\circ A)\cdot A\subset(A\cdot A)\circ A + A\circ(A\cdot A)\subset A\circ A.$$

因此，$A\circ A$ 是 $(A,\cdot)$ 的一个非平凡理想。注意，$A\circ A$ 是 $(A,\circ)$ 的一个理想。因此，$A\circ A$ 是 $(A,\cdot,\circ)$ 的一个非平凡理想。□

命题 4.3. 设$(A,\cdot,\circ)$ 是一个非平凡的简单转置 *Novikov-Poisson* 代数。那么 $A\circ A=A$。

证明. 这直接由引理 4.2 得出。 □

受文献 [7], 中对简单转置泊松代数的研究启发，我们引入转置 Novikov-Poisson 代数的转置拟理想定义。

定义 4.4. 转置 Novikov-Poisson 代数（$A,\cdot,\circ$）的**转置准理想** 是A 的一个非平凡子空间I，满足I 是（$A,\circ$）的理想，且（$A\cdot I$）$\circ A\subset I$，$A\circ$（$A\cdot I$）$\subset I$。

引理 4.5. 设$(A,\cdot,\circ)$ 是一个非平凡简单转置 *Novikov-Poisson* 代数。那么，$(A,\cdot,\circ)$ 的转置准理想 I 是$(A,\cdot,\circ)$的理想。

证明。注意，根据转置准理想的定义，I 是 (A,∘) 的理想。此外，由定理 4.3 和公式（5），我们有 A · I = (A ∘ A) · I ⊂ (A · I) ∘ I + A ∘ (A · I) ⊂ I。因此，I 也是 (A,·) 的理想。于是结论成立。□

引理 4.6。 非平凡的简单转置 *Novikov-Poisson* 代数 $(A, \cdot, \circ)$ 不含转置准理想。

证明。 由引理 4.5可直接得到。 □

引理 4.7。 设$(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数，且 $A \circ A = A$。则$(A, \circ)$ 的每个非平凡理想都是$(A, \cdot, \circ)$的转置准理想。

证明。 设 I 是 $(A, \circ)$ 的一个非平凡理想。由于 $A \circ I \subset I$ 且 $I \circ A \subset I$，由方程 (2) 和 (4) 可得

$$(A \cdot I) \circ A \subset (A \cdot A) \circ I \subset A \circ I \subset I,$$

and

$$\begin{aligned} A \circ (A \cdot I) &= (A \circ A) \circ (A \cdot I) = (A \circ (A \cdot I)) \circ A \subset ((A \cdot I) \circ A) \circ A \\ &\quad + A \circ ((A \cdot I) \circ A) - (A \cdot I) \circ (A \circ A) \subset I \circ A + A \circ I - (A \cdot I) \circ A \subset I. \end{aligned}$$

因此，I 是 $(A, \cdot, \circ)$ 的转置准理想。 □

定理 4.8。 设$(A, \cdot, \circ)$ 是一个非平凡的简单转置 *Novikov-Poisson* 代数。则 *Novikov* 代数$(A, \circ)$ 是简单的。

证明。 由命题 4.3，可得 $A \circ A = A$。由引理 4.7，若 I 是 $(A, \circ)$ 的一个非平凡理想，则 I 是 $(A, \cdot, \circ)$ 的转置准理想，这与引理 4.6矛盾。 □

推论 4.9。 设$(A, \cdot, \circ)$ 是一个转置 *Novikov-Poisson* 代数。当且仅当该转置 *Novikov-Poisson* 代数是单理想的直和时，其对应的 *Novikov* 代数$(A, \circ)$ 是单理想的直和。

证明。 假设 $A = \oplus_{i \in S} I_i$，其中每个 I_i 都是 $(A, \circ)$ 的单理想。因此，我们有 $I_i \circ I_i = I_i$。由式 (5)，可得

$$A \cdot I_i = A \cdot (I_i \circ I_i) \subset (A \cdot I_i) \circ I_i + I_i \circ (A \cdot I_i) \subset A \circ I_i + I_i \circ A \subset I_i.$$

因此，每个 I_i 都是 $(A, \cdot, \circ)$ 的理想。最后，每个 I_i 作为 $(A, \cdot, \circ)$ 的理想都是简单的，因为 I_i 作为 $(A, \circ)$ 的理想是简单的。反之，由定理 4.8 可直接得到。 □

文献 [34]中证明了，代数闭域上特征零的有限维单 Novikov 代数是一维的。注意，代数闭域上特征零的有限维单交换结合代数也是一维的。因此，由定理 4.8，可得以下推论。

推论 4.10。 设**k**是一个特征零的代数闭域。那么，**k** 上的任意简单有限维转置 *Novikov-Poisson* 代数都是一维的。

4.2. **具有单 Novikov 代数的转置 Novikov-Poisson 代数**。 根据上述讨论，对于非平凡简单转置 Novikov-Poisson 代数的分类，我们只需考虑单 Novikov 代数上的相容交换结合代数结构。

若**k** 是特征为零的代数闭域，根据推论4.10，有限维非平凡单转置 Novikov-Poisson 代数在同构意义下均具有例2.4中给出的形式。

接下来，设**k** 为特征$p > 2$ 的代数闭域，且（A，$\circ$）是一个有限维单 Novikov 代数，dim（A）≥ 2。由 [31], A 有一组基 $\{y_{-1}, y_0, \ldots\ldots, y_{p^n-2}\}$，其中$n$ 是满足以下条件的某个正整数：

$$y_i \circ y_j = \binom{i+j+1}{j} y_{i+j} + \delta_{i,-1}\delta_{j,-1} a y_{p^n-2} + \delta_{i,-1}\delta_{j,0} b y_{p^n-2} \tag{37}$$

对于i、$j = -1$、0、……、$p^n - 2$，其中a、$b \in \mathbf{k}$ 为常数。

定理4.11. 在特征为 $p > 2$ 的代数闭域**k** 上，维数为 ≥ 1 的有限维单 *Novikov* 代数不存在非平凡的$_{1\ 2}$-导子。

证明. 设 $(A, \circ)$ 是由式 (37) 定义的单 Novikov 代数，且 φ 是 $(A, \circ)$ 的$_{1\ 2}$-导子。令 $2\varphi(y_i) = \sum_{i=-1}^{p^n-2} \alpha_{i,j} y_j$，其中 $\alpha_{i,j} \in \mathbf{k}$。令$i = p^n - 2$、$j = 0$。于是我们有

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varphi(y_{p^n-2} \circ y_0) - \varphi(y_{p^n-2}) \circ y_0 - y_{p^n-2} \circ \varphi(y_0) \\ &= 2\left(\sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{p^n-2,k} y_k\right) - \left(\sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{p^n-2,k} y_k\right) \circ y_0 - y_{p^n-2} \circ \left(\sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{0,k} y_k\right) \\ &= 2\left(\sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{p^n-2,k} y_k\right) - \sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{p^n-2,k} y_k - \alpha_{p^n-2,-1} b y_{p^n-2} - \alpha_{0,0} y_{p^n-2}. \end{aligned}$$

因此，我们有 w e 有 $\varphi(y_{p^n-2}) = \alpha_{p^n-2,p^n-2} y_{p^n-2} = \alpha_{0,0} y_{p^n-2}$。类似地，当$i = j = 0$时，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varphi(y_0 \circ y_0) - \varphi(y_0) \circ y_0 - y_0 \circ \varphi(y_0) \\ &= 2\left(\sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{0,k} y_k\right) - \sum_{k=0}^{p^n-2} \alpha_{0,k}(k+1) y_k - \alpha_{0,-1} b y_{p^n-2} - \left(\sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{0,k} y_k\right). \end{aligned}$$

比较 比较y_{-1}的系数，我们有$\alpha_{0,-1} = 0$。令$i = -1$，$j = -1$。则有

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varphi(y_{-1} \circ y_{-1}) - \varphi(y_{-1}) \circ y_{-1} - y_{-1} \circ \varphi(y_{-1}) \\ &= 2a\alpha_{p^n-2,p^n-2} y_{p^n-2} - \sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{-1,k} y_k \circ y_{-1} - y_{-1} \circ \sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{-1,k} y_k \\ &= 2a\alpha_{p^n-2,p^n-2} y_{p^n-2} - 2a\alpha_{-1,-1} y_{p^n-2} - \alpha_{-1,0} b y_{p^n-2} - \sum_{k=0}^{p^n-2} \alpha_{-1,k} y_{k-1}. \end{aligned}$$

因此得到 $\alpha_{-1,k} = 0$ 当$k \neq -1$时。令$i = -1$，$j = 0$。则有

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varphi(y_{-1} \circ y_0) - y_{-1} \circ \varphi(y_0) - \varphi(y_{-1}) \circ y_0 \\ &= 2b\alpha_{0,0} y_{p^n-2} + 2\alpha_{-1,-1} y_{-1} - \alpha_{0,0} b y_{p^n-2} - \sum_{k=0}^{p^n-2} \alpha_{0,k} y_{k-1} - \alpha_{-1,-1} y_{-1} - \alpha_{-1,-1} b y_{p^n-2}. \end{aligned}$$

比较y_k、$k = -1$、0、…、$p^n - 1$的系数，我们有 $\varphi(y_0) = \alpha_{0,0} y_0 = \alpha_{-1,-1} y_0$。最后，当$i \neq 0$、$-1$ 且$j = 0$时，有

$$0 = 2\varphi(y_i \circ y_0) - y_i \circ \varphi(y_0) - \varphi(y_i) \circ y_0 = 2\sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{i,k} y_k - \alpha_{0,0} y_i - \alpha_{i,-1} b y_{p^n-2} - \sum_{k=-1}^{p^n-2} \alpha_{i,k} y_k.$$

于是 $\varphi(y_i) = \alpha_{i,\ i} y_i = \alpha_{0,\ 0} y_i$。因此，对于所有$i = -1$、0、……、$p^n - 2$，$\varphi(y_i) = \alpha_{0,\ 0} y_i$，即 φ 是平凡的。 □

推论 4.12。 设$(A, \circ)$是代数闭域$\mathbf{k}$上特征为$p > 2$的有限维单 *Novikov* 代数，其中$dim(A) \geq 2$。则$(A, \circ)$上不存在非平凡转置 *Novikov-Poisson* 代数结构。

证明。 由定理3.5 和 4.11可直接得到。 □

设$\mathbf{k}$是一个特征为零的域，且$(A, \circ)$是定义在$\mathbf{k}$上的无限维单 Novikov 代数，其中含有非零元素$e \in A$，使得左乘算子$L_\circ(e)$满足：

$$L_\circ(e)(e) \in \mathbf{k}e, \quad \dim(\mathrm{span}\{(L_\circ(e))^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}) < \infty \quad \text{for any } x \in A.$$

根据 [23] Osborn 分类及其简化公式，存在$\mathbf{k}$的一个加法子群Δ以及一个基$\{x_{\alpha,j} \mid \alpha \in \Delta, j \in J\}$，其中$J = \{0\}$或$\mathbb{N}, \{0\} \neq \Delta + J \subset \mathbf{k}$，使得

$$x_{\alpha,i} \circ x_{\beta,j} = (\beta + b)x_{\alpha+\beta,i+j} + jx_{\alpha+\beta,i+j-1}. \tag{38}$$

定理 4.13。 设$(A, \circ)$是上述定义的无限维单 *Novikov* 代数。则$H^1(A, A)$不存在$(A, \circ)$的非平凡导子。

证明。 设φ是$(A, \circ)$的一个$H^1(A, A)$-导子。对所有$\alpha \in \Delta$和$i \in \mathbb{N}$，令

$$\varphi(x_{\alpha,i}) = \sum_{\lambda \in \Delta, l \in \mathbb{N}} a_{\alpha,i}^{\lambda,l} x_{\lambda,l}, \tag{39}$$

其中$a_{\alpha,i}^{\lambda,l} \in \mathbf{k}$。

情形 1：当$\Delta = 0$ and $J = \mathbb{N}$时，我们将 $x_{0,i}$ and $a_{0,j}^{0,i}$ 简记为 x_i and $a_{i,j}$。因此，方程 (38) 和 (39) 分别等价于 $x_i \circ x_j = bx_{i+j} + jx_{i+j-1}$ 和 $\varphi(x_i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x_j$。令 $i = j = 0$。于是我们有

$$0 = 2\varphi(x_0 \circ x_0) - x_0 \circ \varphi(x_0) - \varphi(x_0) \circ x_0 = 2b \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{0,j} x_j - 2b \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{0,j} x_j - \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{0,j} j x_{j-1},$$

这意味着 $\varphi(x_0) = a_{0,0} x_0$。

若 $b \neq 0$，我们考虑

$$0 = 2\varphi(x_i \circ x_0) - x_i \circ \varphi(x_0) - \varphi(x_i) \circ x_0 = 2b \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x_j - b a_{0,0} x_i - b \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x_j,$$

这意味着 $\varphi(x_i) = a_{i,i} x_i = a_{0,0} x_i$，对所有$i \in \mathbb{N}$均成立。因此，$\varphi$是平凡的。

若 $b = 0$，则方程 (38) 等价于 $x_i \circ x_j = j x_{i+j-1}$。设$i = j = 1$。于是我们有

$$0 = 2\varphi(x_1 \circ x_1) - x_1 \circ \varphi(x_1) - \varphi(x_1) \circ x_1 = 2 \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{1,j} x_j - \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{1,j} j x_j - \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{1,j} x_j,$$

这意味着 $\varphi(x_1) = a_{1,1} x_1$。接下来，我们考虑

$$0 = 2\varphi(x_i \circ x_1) - x_i \circ \varphi(x_1) - \varphi(x_i) \circ x_1 = 2 \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x_j - a_{1,1} x_i - \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x_j,$$

这意味着对所有$i \in \mathbb{N}$，$\varphi(x_i) = a_{i,i} x_i = a_{1,1} x_i$。因此，$\varphi$是平凡的。

情形 2：当 $\Delta \neq 0$ 且 $J = 0$ 时，我们简单地记 $x_{\alpha,i} = x_\alpha$ 和 $a_{\alpha,i}^{\lambda,0} = a_{\alpha,\lambda}$。因此，方程 (38) 和 (39) 分别等价于 $x_\alpha \circ x_\beta = (\beta + b)x_{\alpha+\beta}$。以及 $\varphi(x_\alpha) = \sum_{\lambda \in \Delta} a_{\alpha,\lambda} x_\lambda$。令 $\alpha = \beta = 0$ 代入方程 (38)。于是有

$$0 = 2\varphi(x_0 \circ x_0) - x_0 \circ \varphi(x_0) - \varphi(x_0) \circ x_0 = 2b \sum_{\lambda\in\Delta} a_{0,\lambda} x_\lambda - \sum_{\lambda\in\Delta} a_{0,\lambda}(\lambda + b)x_\lambda - \sum_{\lambda\in\Delta} a_{0,\lambda} b x_\lambda,$$

这意味着 $\varphi(x_0) = a^{0,0}x_0$。

若 $b \neq 0$，我们考虑

$$0 = 2\varphi(x_\alpha \circ x_0) - x_\alpha \circ \varphi(x_0) - \varphi(x_\alpha) \circ x_0 = 2b \sum_{\lambda\in\Delta} a_{\alpha,\lambda} x_\lambda - a_{0,0} b x_\alpha - \sum_{\lambda\in\Delta} a_{\alpha,\lambda} b x_\lambda,$$

这意味着，对于所有 $\alpha \in \Delta$，$\varphi(x_\alpha) = a_{\alpha,\alpha}x_\alpha = a^{0,0}x_\alpha$。因此，$\varphi$是平凡的。

若 $b = 0$，则式（38）等价于 $x_\alpha \circ x_\beta = \beta x^{\alpha+\beta}$。对于 $\alpha \in \Delta$ 满足 $\alpha \neq 0$的，我们有

$$0 = 2\varphi(x_0 \circ x_\alpha) - x_0 \circ \varphi(x_\alpha) - \varphi(x_0) \circ x_\alpha = 2\alpha \sum_{\lambda\in\Delta} a_{\alpha,\lambda} x_\lambda - \sum_{\lambda\in\Delta} \lambda a_{\alpha,\lambda} x_\lambda - \alpha a_{0,0} x_\alpha,$$

这意味着，对于所有满足 $\alpha \neq 0$ 的 $\alpha \in \Delta$，$\varphi(x_\alpha) = a_{\alpha,\alpha}x_\alpha + a_{\alpha,2\alpha}x_{2\alpha} = a^{0,0}x_\alpha + a_{\alpha,2\alpha}x_{2\alpha}$。接下来，我们考虑

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varphi(x_\alpha \circ x_\beta) - x_\alpha \circ \varphi(x_\beta) - \varphi(x_\alpha) \circ x_\beta \\ &= 2\beta(a_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}x_{\alpha+\beta} + a_{\alpha+\beta,2(\alpha+\beta)}x_{2(\alpha+\beta)}) - \beta a_{\beta,\beta}x_{\alpha+\beta} - 2\beta a_{\beta,2\beta}x_{\alpha+2\beta} - \beta a_{\alpha,\alpha}x_{\alpha+\beta} - \beta a_{\alpha,2\alpha}x_{2\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

对于所有满足 α、β、$\alpha + \beta \neq 0$ 的 α、$\beta \in \Delta$，通过比较 $x^{2(\alpha+\beta)}$ 的系数，我们得到$a_{\lambda,2\lambda} = 0$ 对于所有满足 $\lambda \neq 0$的 $\lambda \in \Delta$。因此，φ是平凡的。

情形 3：当 $\Delta \neq 0$且 $J = \mathbb{N}$时，则 $|\Delta| = \infty$ 因为 $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = 0$。首先，令 $\alpha = \beta = 0$且$i = j = 0$取式（38）中。于是

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varphi(x_{0,0} \circ x_{0,0}) - x_{0,0} \circ \varphi(x_{0,0}) - \varphi(x_{0,0}) \circ x_{0,0} \\ &= 2b \sum_{\lambda\in\Delta, l\in\mathbb{N}} a_{0,0}^{\lambda,l} x_{\lambda,l} - \sum_{\lambda\in\Delta, l\in\mathbb{N}} a_{0,0}^{\lambda,l}((\lambda + b)x_{\lambda,l} + l x_{\lambda,l-1}) - \sum_{\lambda\in\Delta, l\in\mathbb{N}} a_{0,0}^{\lambda,l} \cdot b x_{\lambda,l}. \end{aligned}$$

比较$x_{\lambda,l}$的系数，得到

$$a_{0,0}^{\lambda,l+1} = \frac{-\lambda}{l+1} a_{0,0}^{\lambda,l}. \tag{40}$$

于是得到$a_0^{\lambda\, l}{}_{,0} = {}_{(-\lambda)^l\, l!}\, a_{0\,0}^{\lambda\, 0}{}_{,0}$。特别地，得到$a_0^{0\, l}{}_{,0} = 0$ $(l \geq 1)$。由于式（39）是一个有限和，因此对于所有满足 $\lambda \neq 0$的 $\lambda \in \Delta$，有$a_0^{\lambda\, 0}{}_{,0} = 0$，即 $\varphi(x^{0,0}) = a_{0,0}^{0,0} x^{0,0}$。

若$b \neq 0$，我们考虑

$$\begin{aligned} 0 &= 2\varphi(x_{\alpha,i} \circ x_{0,0}) - x_{\alpha,i} \circ \varphi(x_{0,0}) - \varphi(x_{\alpha,i}) \circ x_{0,0} \\ &= 2b \sum_{\lambda\in\Delta, l\in\mathbb{N}} a_{\alpha,i}^{\lambda,l} x_{\lambda,l} - a_{0,0}^{0,0} b x_{\alpha,i} - \sum_{\lambda\in\Delta, l\in\mathbb{N}} b a_{\alpha,i}^{\lambda,l} x_{\lambda,l}, \end{aligned}$$

这意味着，对于所有 $\alpha \in \Delta$，$i \in \mathbb{N}$，$\varphi(x_{\alpha,i}) = a_\alpha^{\alpha\, i}{}_{,i}x_{\alpha,i} = a_{0,0}^{0,0}x_{\alpha,i}$。因此，$\varphi$是平凡的。

若$b = 0$，式（38）等价于$x_{\alpha,i} \circ x_{\beta,j} = \beta x_{\alpha+\beta,i+j} + j x_{\alpha+\beta,i+j-1}$。令$i = j = 1$和$\alpha = \beta = 0$。于是我们有

$$\begin{aligned} &0 = 2\varphi(x_{0,1} \circ x_{0,1}) - \varphi(x_{0,1}) \circ x_{0,1} - x_{0,1} \circ \varphi(x_{0,1}) \\ &= 2 \sum_{\lambda\in\Delta, l\in\mathbb{N}} a_{0,1}^{\lambda,l} x_{\lambda,l} - \sum_{\lambda\in\Delta, l\in\mathbb{N}} a_{0,1}^{\lambda,l} x_{\lambda,l} - \sum_{\lambda\in\Delta, l\in\mathbb{N}} a_{0,1}^{\lambda,l}(\lambda x_{\lambda,l+1} + l x_{\lambda,l}). \end{aligned}$$

比较 $x_{0,l}$、$x_{\lambda,0}$ 和 $x_{\lambda,l+1}$ 的系数，对所有 $\alpha \in \Delta$ 和 $l \in \mathbb{N}$，可得 $a_0^{0\,l}{}_{,,1}=0$当 $l \neq 1$ 时，$a_0^{\lambda\,0}{}_{,,1}=0$ 且 $la_0^{\lambda\,l+1}{}_{,,1}=-\lambda a_0^{\lambda\,l}{}_{,,1}$ 对所有 $l \in \mathbb{N}$和 $\lambda \in \Delta$ 均成立。由于式（39）是有限和，我们有 $a_{0\,1}^{\lambda\,l}=0$，当 $l, \lambda \neq 0$ 时。因此，我们有 $\varphi(x_{0,l}) = a_{0\,1}^{0,1}{}_{,}x_{0,l}$。接下来，我们考虑

$$0=\varphi(x_{\alpha,i}\circ x_{0,1})-\varphi(x_{\alpha,i})\circ x_{0,1}-x_{\alpha,i}\circ\varphi(x_{0,1})=2\sum_{\lambda\in\Delta,l\in\mathbb{N}}a_{\alpha,i}^{\lambda,l}x_{\lambda,l}-\sum_{\lambda\in\Delta,l\in\mathbb{N}}a_{\alpha,i}^{\lambda,l}x_{\lambda,l}-a_{0,1}^{0,1}x_{\alpha,i},$$

这意味着，对于所有 $\alpha \in \Delta$ 和$i \in \mathbb{N}$，$\varphi(x_{\alpha,\,i}) = a_{\alpha,\,i}x_{\alpha,\,i} = a_{0,1}^{0,1}x_{\alpha,\,i}$。因此，$\varphi$是平凡的。 □

推论 4.14。 设 $(A, \circ)$ 是由式（**37**）定义的特征 0 的域 k上的无限维单 *Novikov* 代数。则在 $(A, \circ)$ 上不存在非平凡转置 *Novikov-Poisson* 代数结构。

证明。 由定理3.5 和4.13可直接得出。 □

致谢。 本研究得到中国国家自然科学基金（项目编号：12171129）和浙江省自然科学基金（项目编号：Z25A010006）的资助。**利益声明**。 作者声明不存在需要披露的利益冲突。**数据可用性**。 本研究未创建或分析新数据。

参考文献

[1] A. Balinsky 和 S. Novikov，流体力学型的泊松括号、弗罗贝尼乌斯代数与李代数，Sov. Math. Dokl. 32（1985年），228-231。2[2] C. Bai、R. Bai、L. Guo 和 Y. Wu，转置泊松代数、诺维科夫-泊松代数与 3-李代数，J. Algebra 632（2023年），535-566。1, 2, 5[3] C. Bai 和 D. Meng，低维诺维科夫代数的分类，J. Phys. A: Math. Theor. 34（2001a），1581-1594。9, 11, 20[4] L. Bokut、Y. Chen 和 Z. Zhang，关于自由格尔范德–多尔夫曼–诺维科夫–泊松代数及 PBW定理，J. Algebra 500（2016年），153-170。3, 6[5] S. Chen 和 C. Bai，通过诺维科夫变形对转置泊松代数进行量子化，J. Phys. A: Math. Theor. 57（2024年），论文编号 495203，17 页。2[6] A. Dzhumadil'daev，诺维科夫算子的余维增长与非科苏尔性，Comm. Algebra 39（2011年），2943-2953。2[7] A. Fern´andez Ouaridi，关于单转置泊松代数与约旦超代数，J. Algebra 641（2024年），173-198。2, 22[8] M. Fiidow、I. Rakhimov 和 S. Husain，结合代数的质心与导子，2015 年数学研究与教育国际会议（ICREM7），马来西亚吉隆坡，（2015年），227-232。7, 8[9] B. Ferreira、I. Kaygorodov 和 V. Lopatkin，李代数与转置泊松代数的 1 2-导子，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. 115（2021年），142-157。2, 3, 12[10] I. Gel'fand 和 I. Dorfman，哈密顿算子及与之相关的代数结构，Funct. Anal. Appl. 15（1979年），248-262。2[11] I. Gel'fand 和 I. Dorfman，哈密顿算子与无限维李代数，Funct. Anal. Appl. 15（1981），173̄-187。2[12] V. Ginzburg 和 M. Kapranov，算子的科苏尔对偶，Duke Math. J. 6（1994年），203-272。2[13] Y. Hong、C. Bai 和 L. Guo，通过诺维科夫双代数的仿射化与科苏尔对偶构造无限维李双代数，Commun. Math. Phys. 401（2023年），2011-2049。7[14] V. Kac，初学者的顶点代数，第 2 版，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998。2[15] I. Kantor，约旦代数的若干推广，Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. 16（1972），407-499。15[16] I. Kantor，泛守恒代数，Sib. Math. J. 31（1990），388-395。15

[17] I. Kaygorodov 和 A. Khudoyberdiyev，可解李代数与完全李代数上的转置泊松结构，J. Phys. A: Math. Gen. 57（2024年），论文编号 035205，19 页。2[18] I. Kaygorodov 和 M. Khrypchenko，李关联代数上的转置泊松结构，J. Algebra 647（2024年），458-491。2[19] I. Kaygorodov、A. Khudoyberdiyev 和 Z. Shermatova，Virasoro 型代数上的转置泊松结构，J. Geom. Phys. 207（2025年），论文编号 105356，12 页。2[20] A. Lichnerowicz，泊松流形及其相关李代数，J. Differ. Geom. 12（1977年），253-300。1[21] G. Liu 和 C. Bai，通过反前李双代数与反前李泊松双代数建立转置泊松代数的双代数理论，Commun. Contemp. Math. 26（2024年），论文编号 2350050，49 页。2[22] J. Liu 和 H. Zhou，泊松共形代数的上同调与变形量子化，J. Algebra 630（2023年），92-127。3[23] J. Osborn，特征零的无限维诺维科夫代数，J. Algebra 167（1994年），146-167。25[24] A. Panasenko，半素诺维科夫代数，Int. J. Algebra Comput. 32（2022年），1369-1378。18[25] Y. Pei 和 C. Bai，关于一个 Virasoro 型无限维李代数，J. Phys. A: Math. Theor.，45 2012年，235201。12[26] B. Sartayev，转置泊松代数簇的若干推广，Comm. Math. 32（2024年），55-62。2[27] I. Shestakov 和 Z. Zhang，诺维科夫代数的可解性与幂零性，Comm. Algebra. 48(12)（2020年），5412-5420。18[28] A. Weinstein，辛流形讲义，CBMS 数学区域会议丛书 29，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1979。1[29] X. Xu，诺维科夫-泊松代数，J. Algebra 190（1997年），253-279。3, 8[30] X. Xu，二次共形超代数，J. Algebra，231（2000年），1-38。2[31] X. Xu，关于单 Novikov 代数及其不可约模，J. Algebra 185（1996年），905-934。24[32] D. Yau，Hom-Novikov 代数，J. Phys. A: Math. Theor. 44（2011年），085202。18[33] L. Yuan 和 Q. Hua，李代数上的 1 2-（双）导子与转置泊松代数结构，Linear Multilinear Algebra 70（2022年），7672-7701。2[34] E. Zel’manov，关于一类局部平移不变李代数，Soviet Math.Dokl. 35(1)(1987年)，216-218。23[35] W. Zhang 和 C. Dong，W-代数 W(2, 2) 与顶点算子代数 L(1 2 , 0) ⊗L(1 2 , 0)，Commun. Math. Phys.，285（2009年），991-1004。12[36] Z. Zeng、J. Sun 和 H. Zhang，Virasoro 型（超）代数上的转置泊松结构，J. Geom. Phys. 206（2024年），论文编号 105295，22 页。2

杭州师范大学数学学院，杭州，311121，中国电子邮箱：
jrjin@stu.hznu.edu.cn

杭州师范大学数学学院，杭州，311121，中国电子邮箱：
yyhong@hznu.edu.cn