arXiv:2602.12581v1 [math.PR] 13 Feb 2026

随机带状托普利兹矩阵的条件数通常很大

PAULO MANRIQUE

摘要。众所周知，具有独立同分布（iid）随机元素的方阵通常具有良好的条件性。一个自然的问题是，当随机矩阵的元素还遵循额外的结构约束（即其在矩阵中的位置）时，这种良好性质是否依然成立。结构化矩阵中一个重要的类别是托普利兹矩阵，其特点是具有常数对角线。一个尤其易于处理的子类是循环矩阵，其额外特征（元素按行循环 排列）使得我们可以根据相应多项式零点的位置来表示其条件性。当循环矩阵的元素独立同分布时，该矩阵具有良好条件性的充要条件是相应的随机多项式在单位圆上没有零点。这种联系尤为重要，因为随着随机多项式次数的增加，其零点趋于集中在单位圆附近，因此，量化距离单位圆最近的零点究竟有多近，是一个微妙的问题。托普利兹矩阵中的另一个重要类别是带状托普利兹矩阵，即只有主对角线周围有限条对角线可能非零的矩阵。这类矩阵在算子理论中得到了广泛研究；然而，尽管它们看似简单，其条件数的行为仍引出了一些微妙的问题。在本文中，我们表明带宽不对称性起着决定性作用：如果带状区域在主对角线下方包含 r 条对角线、上方包含s 条对角线，那么当 $r = s$ 时，带状托普利兹矩阵以高概率具有良好的条件性；而当 $r \neq s$ 时，它通常具有较差的条件性。这表明，结构约束会影响随机矩阵的数值表现。

1. 引言

托普利兹矩阵是具有重要科学意义的结构化矩阵，在工程学中有着广泛应用。算子理论领域已对其进行了深入研究，其中一个核心议题是随着维数增大，其谱的渐近行为 [8, 9]。从数值角度看，这类矩阵的结构自然源于某些微分方程的离散化以及时间序列分析 [11]。在这些背景下，谱性质同样发挥着关键作用，尤其是在研究矩阵条件数时；条件数决定数值稳定性，并由矩阵的极端奇异值决定 [20, 11]。

在这里，我们感兴趣的是理解带状托普利兹矩阵的稳定性 。为使表述精确，我们回顾一下：矩阵 A （无论是方阵还是矩形矩阵）的奇异值，是矩阵 $\sqrt{A^T A}$ 的特征值，其中 A^T 表示 A的转置。特别地，所有奇异值均为非负数。极端奇异值与矩阵的算子范数密切相关。若 A 是一个

2000 数学主题分类。主要分类 60B30,15B05, 30C15；次要分类 65F35,11CXX。关键词与短语。带状托普利兹矩阵，条件数，随机多项式，带状托普利兹算子，马勒测度，小球概率，奇异值，图兰引理，詹森公式。

大小为 $n \times n$ 的方阵，其算子范数定义为

$$||A|| := \max_{||x||_2=1} ||Ax||_2 ,$$

其中 $||\cdot||_2$ 表示欧几里得范数。将 A 的奇异值记为

$$0 \leqslant \sigma_n \leqslant \sigma_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \sigma_1,$$

我们有

$$||A|| = \sigma_1.$$

注意， A 是奇异的，当且仅当 $\sigma_n = 0$。若 A 非奇异，则

$$\left|\left|A^{-1}\right|\right| = \left(\min_{||x||_2=1} ||Ax||_2\right)^{-1} = \sigma_n^{-1}.$$

这个恒等式表明，随着 σ_n 趋近于零， $||A^{-1}||$ 会增大，这说明 A 是近奇异的。事实上， σ_n 衡量了 A 到奇异矩阵集合 [8, 10, 14] 的距离。 A 的条件数 $\kappa(A)$ 定义为

$$\kappa(A) := \frac{\sigma_1}{\sigma_n},$$

它量化了线性方程组 $Ax = b$ 对 A 或 b 中扰动的敏感性。特别是， $\kappa(A)$ 的值较大表明数值精度可能会损失 [10, 13, 24, 27]。

本文旨在理解带状托普利兹矩阵的条件数。为此，我们先回顾托普利茨矩阵的定义，它的特征是具有常数对角线。更具体地说，维数为 T_n $n \times n$ 的矩阵称为托普利茨矩阵，若其具有以下形式：

$$T_n := \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_{-1} & x_0 & \dots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ x_{-2} & x_{-1} & \dots & x_{n-4} & x_{n-3} \\ & & \dots & & \\ x_{-n+1} & x_{-n+2} & \dots & x_{-1} & x_0 \end{bmatrix}.$$

若托普利茨矩阵满足以下条件，则称其为带状托普利兹矩阵： $x_j = 0$当 $j < -r$ 或$j > s$时， r, s，其中相关参数为固定的正整数。

一般而言，理解托普利茨矩阵的条件数是一项颇具挑战的任务 [6, 7]。不过，在对系数x_j的性质作出各种假设后，可以得到有意义的结果（参见 [7, 17, 21]及其中的参考文献）。关于带状托普利兹矩阵，我们请读者参阅经典文献 [8] ，其中对其奇异值和条件数进行了详尽的确定性 研究。相比之下，本文旨在分析带状托普利兹矩阵的元素为随机变量时的行为，即矩阵 T_n 具有以下形式：

$$T_n = T_n(r,s) := \begin{bmatrix} \xi_0 & \dots & \xi_s & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ \xi_{-r} & & \ddots & & \xi_s \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & \xi_{-r} & \xi_0 \end{bmatrix}$$

其中 ξ_j 是随机变量。我们称 $T_n(r,\ s)$ 的带宽为 $r + s + 1$。

带状托普利兹矩阵 $T_n(r,\ s)$ 可以与所谓的劳朗多项式P相关联，其形式为

$$P(z) = P_{r,s}(z) := \sum_{j=-r}^{s} \xi_j z^j,$$

其中 $z \in \mathbb{C}$。函数 P 通常称为带状托普利兹矩阵 T_n的符号。需要注意的是，如果带宽 $T_n(r,s)$ 保持固定，即 r,s 是固定整数，那么矩阵序列$\{T_n(r,s)\colon\ n=1,2,\ldots\}$ 的渐近行为可以通过劳朗多项式 $P_{r,s}$来分析，该多项式不依赖于 n [8]。

可以为一个劳朗多项式关联一个标准多项式。设 $Q(z) =Q_{r+s}(z) = z^r P_{r,s}(z)$，其中 $P_{r,s}(z)$ 是一个劳朗多项式。注意， Q_{r+s} 是一个次数为 $r+s$的多项式。 Q 的根的性质描述了相关带状托普利兹矩阵 [2]的条件数行为。为说明这一点，我们引入以下记号。我们称 $Q_{r,s}$ 为 (m,u,l) 型，当

- 它有 m 个模严格小于 1 的零点、
- u 个模等于 1 的零点，以及
- l 个模严格大于 1 的零点。

那么以下结论成立（见 [2]中的定理 3）：

- 如果 Q_{r+s} 属于 $(r,\mathbf{0},s)$ 类型，则存在正常数 C，使得
$$\kappa(T_n) \leqslant C \quad \text{for all } n.$$
- 如果 Q_{r+s} 属于 (r_1,r_2,s) 或 (r,s_1,s_2) 类型，其中 $r_1+r_2=r$ 和 $s_1+s_2=s$，则
$$\kappa(T_n) = \mathrm{O}(n^v),$$
其中， v 表示模为 1 的零点中的最大重数。

如果带状托普利茨矩阵是上三角或下三角矩阵，则上述结果既是必要条件也是充分条件，见 [2] 中的定理 1 和定理 2。

考虑随机带状托普利兹矩阵时，相应的劳伦多项式也是随机的，因此多项式 Q 也是随机的。在 [4]（定理 1.1）中，证明了当系数 ξ_j 是满足 $\mathbb{E}[\xi_0]=0$、$\mathbb{E}[\xi_0^2] < +\infty$ 且

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \mathbb{P}\left(|\xi_0 - u| \leqslant \gamma\right) \leqslant 1-q, \quad and \quad \mathbb{P}\left(|\xi_0| > M\right) \leqslant \frac{q}{2}$$

对于某些常数 $M>0$、 $\gamma>0$ 和 $q\in(0,\ 1)$ 时，以下结论成立。若 $m=r+s$，则对每个 $t\geqslant 1$，都有

$$\mathbb{P}\left(\min_{||z|-1|\leqslant tm^{-2}(\log m)^{-3}} |Q_m| \leqslant tm^{-1/2}(\log m)^{-2}\right) = \mathrm{O}\left((\log m)^{-1/2}\right),$$

其中隐含常数取决于 t 以及 ξ_0 的分布。

当 $m=r+s$ 足够大时，多项式 Q_m 以高概率在单位圆上没有零点。随机多项式的零点研究是一个成熟的研究领域，参见 [4, 5, 12, 15, 18, 28] 及其中的参考文献。事实上， [15] 证明了，条件 $\mathbb{E}[\log(1+|\xi_0|)] < +\infty$ 成立，当且仅当 Q_m 的零点渐近地（$m\to\infty$）集中在单位圆周围。此外，在适当的假设下， [12, 18] 证明了，距离单位圆最近的零点与单位圆的距离约为 m^{-2}。

正如前面的评论所述，为了理解当 T_n 是带状托普利茨矩阵时 $\kappa(T_n)$ 的行为，必须确定相关符号有多少个零点位于单位圆盘内。以下观察通过绕数的概念对此作出了精确说明。设

$$\mathbf{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}.$$

若 $a:$ **单位圆** $\to$ C\0连续，那么当 t沿**单位圆** 逆时针移动时，像 $a(t)$ 会在 C\0中描绘出一条连续闭曲线。该曲线逆时针绕原点的圈数称为绕数，记作 $\mathsf{wind}(a)$。

现在考虑一个劳朗多项式 $P(z) = \sum_{j=-r}^{s} \xi_j z^j$，满足对所有 $z \in$ **单位圆**上的 $P(z) \neq 0$，都有 $P(z) \neq 0$。那么

$$\mathrm{wind}(P) = \nu - r,$$

其中 ν 表示 P 在开圆盘 $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ 中的零点个数（见 [8]中的表达式 1.2）。注意到

$$P(z) = \sum_{j=-r}^{s} \xi_j z^j = z^{-r} \sum_{j=0}^{r+s} \xi_j z^j,$$

因此，P 在**单位圆** 上有零点，当且仅当 $G_{r+s}(z) := \sum_{j=0}^{r+s} \xi_j z^j$ 在**单位圆**上有零点。根据上述讨论，当 $r+s$ 较大时，G_{r+s} 以高概率不会在**单位圆** 上消失。

在 [8]，的第3章中，若矩阵序列 A_n 中的每个 A_n 尺寸均为 $n \times n$，则称其为稳定，如果存在 $n_0 \leqslant 1$ 和 $M \in (0, \infty)$，使得对于所有 $n \geqslant n_0$，A_n 都可逆，并且

$$\left\|A_n^{-1}\right\| \leqslant M \quad \text{for all} \quad n \geqslant n_0.$$

由于具有相同带宽的带状托普利兹矩阵序列 T_n 可对应于同一个劳朗多项式 $P(z)$，因此 [8] 的第3章表明，T_n 稳定当且仅当 P 在**单位圆** 上没有零点，且 $\mathsf{wind}(T) = 0$。当带状托普利兹矩阵属于类型 $(r, 0, s)$ 时，这一判据与 [2] 中的分类一致。因此，给定劳朗多项式 $P_{r,\,s}$，我们自然会问，相应多项式 G_{r+s} 中有多少个零点位于单位圆盘内。此前已有研究在[28] 中考察了利特尔伍德多项式的情形，即系数属于 $-1, +1$ 的多项式。利特尔伍德多项式可视为如下形式的随机多项式

$$G_m(z) = \sum_{j=0}^{m} \xi_j z^j,$$

其中系数 ξ_j 是独立同分布的拉德马赫随机变量（iid），即

$$\mathbb{P}(\xi_0 = 1) = \mathbb{P}(\xi_0 = -1) = \frac{1}{2}.$$

我们记

$$\nu_n := \sum_{z : G_n(z)} \delta_z$$

G_n 的零点随机计数测度，其中 δ_z 表示位于 z 处的狄拉克质量。在 [28]，中证明了

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\nu_m(\mathbb{D}) - \frac{m}{2}\right| \geqslant m^{9/10}\right) = 0. \tag{1.1}$$

由此可知，Littlewood 多项式的零点约有一半位于 D 内。因此，若考虑一个元素为独立同分布拉德马赫

随机变量的带状托普利茨矩阵，那么与之关联的劳朗多项式$P(z) = z^{-r}G_{r+s}(z)$ 在 D 内的零点数以高概率近似为

$$\frac{r+s}{2}$$

只要 $r+s$ 足够大。如果此外 $\frac{r+s}{2} = r$，而这在 $r = s$ 时会发生，那么相应的带状托普利兹矩阵关于主对角线具有对称带宽。此外，高概率下， P 在**单位圆**上没有零点，这表明该带状托普利茨矩阵的条件良好。换言之，高概率下，与同一个劳朗多项式相关联的带状托普利兹矩阵序列 T_n 满足

$$\kappa(T_n) \leqslant M \quad \text{for all sufficiently large } n,$$

对于某个常数 $M \in (0, \infty)$。需要强调的是，这一结论仅在对称带状情形下成立， $r = s$。事实上，例如，如果 $m = r+s$ 很大，且 $r = \lambda m$ 和 $s = (1-\lambda)m$ 对于 $\lambda \in (0, 1)$ 满足 $\lambda \neq \frac{1}{2}$，那么

$$\frac{m}{2} = \frac{r+s}{2} \neq r = \alpha m.$$

在此情形下，高概率下绕数满足

$$\operatorname{wind}(P) \approx \frac{m}{2} - \alpha m \neq 0.$$

当一个在**单位圆** 上没有零点的劳朗多项式的绕数非零时，会出现以下现象。定义

$$\delta := \max\{|\delta_j| < 1 : G_{r+s}(\delta_j) = 0\}, \quad \mu := \min\{|\mu_k| > 1 : G_{r+s}(\mu_k) = 0\}.$$

那么（参见 [8] 中的定理 4.1），对于每个

$$\alpha < \min\left\{\log\frac{1}{\delta}, \log\mu\right\}$$

都存在一个常数 $C_\alpha > 0$，它仅取决于 α 和 P，使得

$$\left\|T_n^{-1}\right\|_2 \geqslant C_\alpha e^{\alpha n} \quad \text{for all } n \geqslant 1,$$

其中， T_n 表示与 $P(z)$ 相关联的带状托普利兹矩阵。这意味着，当 $r+s$ 较大且带宽参数 r， s 不平衡 （即 $r \neq \frac{r+s}{2}$ ）时，具有独立同分布的拉德马赫随机变量条目的带状托普利兹矩阵往往以高概率是病态的。

本文旨在理解对于一大类随机系数，1.1 中所述事件发生概率的数量级，并据此推断随机带状托普利兹矩阵的条件数的行为。需要强调的是，我们用来估计 1.1 中所述量的策略，本质上与 [28] 中的步骤相同，但也存在若干重要差异。控制 1.1 的主要工具是引理 3.2；在 [28] 中，该引理仅针对拉德马赫情形得到证明，并依赖于一个专为该情形设计的引理 5.1 版本。引理 5.1 是一种所谓的小球概率命题，其证明用到了经典的埃森引理和图兰引理；而在 [28], 中，我们只是在此基础上加入了一些概率论方法，以将结果推广到更多类型的随机变量。为处理更一般的分布，本文中引理 3.2 的证明需要对期望马勒测度 [25] 作出估计； [28] 中并未处理这一问题，而该估计本身也具有独立研究价值。

本文结构如下。第2节陈述本文的主要结果，并将引言中讨论的若干观点形式化。第3节陈述并证明一项结果：对于满足 $\mathcal{H}$ 中第2节所列假设的随机系数，当次数足够大时，随机多项式的零点中约有一半以高概率位于单位圆盘内。第4节分析随机多项式的马勒测度；第5节讨论一个小球概率问题，借此证明第3节中的主要结果。

致谢。继续之前，我谨向 Víctor Pérez-Abreu 致以谢意，感谢他提出的宝贵意见；同时感谢 Michelle Zela、Marceline X.、Kusy X.、Yanay X. 和 Sophie X. 在本研究准备期间给予的支持。

2. 主要结果

在陈述主要结果之前，我们先介绍一些记号。令 μ 表示 $[-\pi,\pi]$上的归一化测度。若存在常数 $C>0$ 使得对所有充分大的 n都有 $f_n \leqslant Cg_n$ ，则记作 $f_n = \mathsf{O}(g_n)$ ；若当 $n\to\infty$ 时 $f_n/g_n \to 0$ ，则记作 $f_n = \mathsf{o}(g_n)$ 。若当 $n\to\infty$时 $f_n/g_n\to 1$，则记作 $f_n \sim g_n$。全文中，$c, C, C_*, C_1, C_2, \ldots$ 表示正常数，其取值可能随行而变化。我们用符号 $\propto$ 表示某种正比关系。

给定一个带状托普利茨矩阵 $T_n \in C^{n\times n}$，我们也考虑它的无限维对应版本 T （视为托普利兹算子），即其 T （算子）版本，亦即，

$$T := \begin{bmatrix} \xi_0 & \cdots & \xi_r & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ \xi_{-r} & & \ddots & & \ddots \\ & \ddots & & \ddots & \end{bmatrix}.$$

我们记作 $T_n(P)$（分别地， $T(P)$），以强调其与劳朗多项式 P 的关系；后者通常称为 T_n（分别地， T）的符号 。

我们考虑一个 Kac（随机）多项式

$$G(z) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j z^j, \quad n \geqslant 2,$$

其系数满足以下基本假设 $\mathcal{H}$:

($\mathcal{H}1$) ξ_j 是独立同分布（iid）的非退化随机变量。($\mathcal{H}2$) $\mathbb{E}[\xi_0]=0$， $\mathbb{E}[\xi_0^2]=1$，$\mathbb{E}[\xi_0^4]<+\infty$。($\mathcal{H}3$) 零点附近的反集中性：存在 $C_1>0$ 使得

$$\mathbb{P}(|\xi_0|\leqslant t) \leqslant C_1 t^{1/2}, \quad t\in[0,1].$$

($\mathcal{H}4$) 令 ξ_0' 为 ξ_0 的一个独立副本，并定义

$$\overline{\xi}_0 := (\xi_0' - \xi_0)\mathbb{1}_{\{\xi_0'\neq\xi_0\}}.$$

于是 $\overline{\xi}_0$ 在零附近也满足反集中性：存在 $C_2>0$ 使得

$$\mathbb{P}\left(|\overline{\xi}_0|\leqslant t\right) \leqslant C_2 t^{1/2}, \quad t\in[0,1].$$

（$\mathcal{H}5$）存在 $M>0,\gamma>0$ 和 $q\in(0,1)$ 使得

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\mathbb{P}\left(|\xi_0-u|\leqslant\gamma\right)\leqslant 1-q,\quad \mathbb{P}\left(|\xi_0|>M\right)\leqslant\frac{q}{2}.$$

注意， $\mathcal{H}3$ 意味着 $\mathbf{P}\left(\xi_0=0\right)=0$。观察可知，拉德马赫随机变量和标准高斯随机变量都满足上述假设。更一般地，任何非退化随机变量 ξ_0，只要其服从对称分布，且对于某个 $c>0$ 满足 $\mathbf{P}\left(|\xi_0|\geqslant c\right)=1$，就满足 $\mathcal{H}3$ 和 $\mathcal{H}4$。事实上，

$$\mathbb{P}\left(|\xi_0|\leqslant t\right)\leqslant c^{-1/2}t^{1/2},\quad t\in[0,1].$$

此外，由于 ξ_0 至少取两个不同的值，差值 $\xi_0'-\xi_0$ 至少取四个值，其中 ξ_0' 是 ξ_0的独立副本。特别地，它以 $|\xi_0'-\xi_0|\geqslant c$取到非零值，由此得到 $\mathcal{H}4$中所需的反集中界。

本文的主要结果如下。

定理 2.1。 设 r、 s 为非负整数，并令 $m:=r+s$。令

$$G_m(z)=\sum_{j=0}^{m}\xi_j z^j\quad P_{r,s}(z)=z^{-r}G_m(z).$$

我们假设$P_{r,\ s}$ 是一个随机劳朗多项式，其随机系数 ξ_j 满足假设 $\mathcal{H}$。对于 G_m的每一种实现，令 $\{T_n:\ \ n\in\mathbb{N}\}$ 表示相应的、以$P_{r,\ s}$为符号的 $n\times n$ 带状托普利兹矩阵序列。我们有：

- 若 $r=s$,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(T_n(P_{r,s}))=\left\|T^{-1}(P_{r,s})\right\|\geqslant c_1\left[m^2(\log m)^3\right]^{-m},$$
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_1(T_n(P_{r,s}))=\|T(P_{r,s})\|\leqslant c_2 m^{1/2}\log m,$$

以概率

$$1-c_3-\mathrm{O}\left((\log m)^{-1/2}\right),$$

对某些常数 $c_1,c_2>0$, $c_3\in(0,1)$ 成立。所有常数，包括大–O记号中的隐含常数，都只依赖于分布 ξ_0。

- 若 $r\neq s$，则

$$\left\|T_n^{-1}(P_{r,s})\right\|\geqslant c_4\left[2m^3(\log m)^4\right]^{-m}e^{\alpha_m n}$$

以概率

其中 $\alpha_m:=\log\left(1+\frac{1-c_5-\mathrm{O}\left((\log m)^{-1/2}\right)}{2m^2(\frac{1}{\log m)^3}}\right)$，且对某些常数 $c_4>0$, $c_5\in(0,1)$ 成立。所有常数，包括大–O记号中的隐含常数，都只依赖于 ξ_0的分布。

注 2.2。 正如将在定理 *2.1* 的证明中看到的，常数 c_3、 c_5 可以很小，但不能任意小。事实上，存在关系 $c_1\propto\frac{1}{c_3}$ 和 $c_4\propto\frac{1}{c_5}$。

定理 *2.1* 的证明。我们观察到，必有 $r=\nu_m$，其中 ν_m 是 $G_m(z)$ 位于单位圆内的零点数。从定理 3.1 可知，

我们以概率 $1-\mathrm{O}\left((\log\ m)^2 m^{-1/10}\right)$, 有如下结论，其中隐含常数取决于分布 ξ_0，即 r 可能满足关系式

$$\frac{m}{2}-\frac{1}{m^{1/10}} \leqslant r \leqslant \frac{m}{2}+\frac{1}{m^{1/10}},$$

也就是说， r 可能的整数值数量至多为

$$\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{m^{1/10}}\right)-\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{m^{1/10}}\right)+1=\frac{2}{m^{1/10}}+1.$$

若 m 足够大，则有 $r=\frac{m}{2}$，即 $r=s$。因此，若初始时 $r=s$，则有（见 [8]中的表达式 1.12）

$$\operatorname{wind}(P)=\frac{2r}{2}-r=0,$$

概率为

$$1-\mathrm{O}\left((\log m)^2 m^{-1/10}\right).$$

根据定 理 1.1（ [4], ）可知， $G_m(z)$中距离单位圆最近的 z^* 满足

$$|z^*| \leqslant 1-\frac{1}{m^2(\log m)^3} \quad \text{or} \quad 1+\frac{1}{m^2(\log m)^3} \leqslant |z^*|$$

以概率

$$1-\mathrm{O}\left((\log m)^{-1/2}\right),$$

其中隐含常数取决于分布 ξ_0。若 $r=s$，根据 [8]中的推论 6.5（见表达式 6.16），我们有 T 是一个可逆算子，使得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sigma_n(T_n)=\left|\left|T^{-1}(P)\right|\right|,\\
&\lim_{n\to\infty}\sigma_1(T_n)=||T(P)||=\max_{t\in\mathbf{T}}|G_m(t)|,\\
&\lim_{n\to\infty}\kappa(T_n)=\kappa(T),
\end{aligned}$$

其中 $\kappa(T)$ 的定义与有限维情形类似。

来自第泰勒近似，见 [4],

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbf{T}}|G_m(t)| \leqslant C_0 m^{1/2}\log m\right)=1-\mathrm{O}\left((\log m)^{-1/2}\right), \tag{2.1}$$

对于某个适当的正常数 C_0 ，大 O 记号中的隐含常数仅取决于 ξ_0的分布。

根据 [8] 中的第 1.7 节，我们有 $P(t)=P_-(t)P_+(t)$ ，其中

$$P_-(t)=\prod_{j=1}^{r}\left(1-\frac{\delta_j}{t}\right), \quad P_+(t)=\xi_s\prod_{k=1}^{s}(t-\mu_k), \tag{2.2}$$

其中 δ_j， μ_k 是 $G_m(z)$ 和 $|\delta_j|<1$ 的零点，且 $|\mu_k|>1$。令

$$\delta=\max\{|\delta_j|: j=1,\ldots,r\}, \quad \mu:=\min\{|\mu|: k=1,\ldots,s\}. \tag{2.3}$$

由 [8],中的表达式 1.20 可知

$$T^{-1}(P)=T(P_-^{-1})T(P_+^{-1}),$$

then

$$\left|\left|T^{-1}(P)\right|\right| \leqslant \left|\left|T(P_-^{-1})\right|\right| \left|\left|T(P_+^{-1})\right|\right|.$$

由 [8],中的定理 1.5

$$\left|\left|T(P_+^{-1})\right|\right| = \max_{t\in\mathbf{T}}\left|P_+^{-1}\right| = \left(\min_{t\in\mathbf{T}}|P_+|\right)^{-1},$$
$$\left|\left|T(P_-^{-1})\right|\right| = \max_{t\in\mathbf{T}}\left|P_-^{-1}\right| = \left(\min_{t\in\mathbf{T}}|P_-|\right)^{-1}.$$

根据表达式 2.2 和前述观察,

$$\left|\left|T(P_+^{-1})\right|\right| \leqslant \frac{1}{(1-\delta)^r} \leqslant \left[m^2(\log m)^3\right]^r,$$
$$\left|\left|T(P_-^{-1})\right|\right| \leqslant \frac{1}{|\xi_s|\,(\mu-1)^s} \leqslant \frac{1}{c}\left[m^2(\log m)^3\right]^s,$$

其中最后一行以概率成立（见假设 $\mathcal{H}3$）

$$\mathbb{P}\left(|\xi_s| > c\right) = 1 - C_1 c^{1/2} > 0,$$

并且 $c\in(0,\ 1)$。于是,

$$\left|\left|T^{-1}(b)\right|\right| \leqslant \frac{1}{c}\left[m^2(\log m)^3\right]^m$$

以概率

$$1 - C_1 c_0^{1/2} - \mathrm{O}\left((\log m)^2 m^{-1/10}\right) - \mathrm{O}\left((\log m)^{-1/2}\right).$$

若 $r\neq s$，则

$$\mathrm{wind}(P)\neq 0$$

以概率

$$1 - \mathrm{O}\left((\log m)^2 m^{-1/10}\right).$$

我们考虑 $P(z)$ 的 Wiener–Hopf 分解（见 [8] 中的定理 1.8）,

$$P(t) = P_-(t)t^{\mathrm{wind}(P)}P_+(t),\quad t\in\mathbf{T},$$

其中 $P_-(t),\ P_+(t)$ 的定义见 2.2。由 [8], 中的引理 1.7 可得

$$P_-^{-1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_n^-}{t^j},\quad P_+^{-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}q_j^+ t^j,$$

使得

$$\left|q_n^-\right| \leqslant \left(\min_{|z|=\delta+\varepsilon}|P_-(z)|\right)^{-1}(\delta+\varepsilon)^n \quad \text{for } \varepsilon>0,$$
$$\left|q_n^+\right| \leqslant \left(\min_{|z|=\mu-\varepsilon}|P_+(z)|\right)^{-1}(\mu-\varepsilon)^{-n} \quad \text{for } 0<\varepsilon<\mu.$$

其中 $\delta,\ \mu$ 的定义见 2.3。对于上述观察，我们发现

$$\min_{|z|=\delta+\varepsilon}|P_-(z)| \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{\delta+\varepsilon}\right)^r,\quad \min_{|z|=\mu-\varepsilon}|P_+(z)| \geqslant |\xi_s|\,\varepsilon^s,$$

因此

$$\left|q_n^-\right| \leqslant \left(\frac{\delta+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^r(\delta+\varepsilon)^n \leqslant \varepsilon^{-r}(\delta+\varepsilon)^{n+r} \leqslant \varepsilon^{-r}\left(1-\frac{1}{m^2(\log m)^3}+\varepsilon\right)^{n+r}, \tag{2.4}$$

$$\left|q_n^+\right| \leqslant \frac{1}{|\xi_s|}\varepsilon^{-s}(\mu-\varepsilon)^{-n} \leqslant \frac{1}{c}\varepsilon^{-s}(\mu-\varepsilon)^{-n} \leqslant \frac{1}{c}\varepsilon^{-s}\left(1+\frac{1}{m^2(\log m)^3}-\varepsilon\right)^{-n}, \tag{2.5}$$

其中最后一行以概率（见假设 $\mathcal{H}3$）成立

$$\mathbb{P}\left(|\xi_s| > c\right) = 1 - C_1 c^{1/2} > 0,$$

并且 $c \in (0,\ 1)$。令 $0 < \varepsilon < \mu \leqslant 1 + \frac{1}{m^2(\log m)^3}$ 充分小且固定，使得量 2.4 和 2.5 以指数速度递减至零。例如，$\varepsilon_m := \frac{1}{2m^2(\log m)^3}$。根据 [8], 中定理 4.1 的证明，如果 wind $(P) < 0$，我们可以考虑 $x^{(n)} = (q_0^+,\ \ldots\ldots,\ q_{n-1}^+)^T$（或者在 wind$(P) > 0$ 时考虑 $x^{(n)} = (q_0^-,\ \ldots\ldots,\ q_{n-1}^-)^T$），并由 2.1 观察到

$$\left|\left|T_n x^{(n)}\right|\right|_2 \leqslant C_2 \left[2m^2(\log m)^3\right]^m ||T_n||_2 \, e^{-\alpha_m n} \leqslant C_2 \left[2m^3(\log m)^4\right]^m e^{-\alpha_m n},$$

以概率

$$1 - C_1 c^{1/2} - \mathrm{O}\left((\log m)^2 m^{-1/10}\right) - \mathrm{O}\left((\log m)^{-1/2}\right),$$

对于某个仅取决于 ξ_0 的分布和 C_2 的正常数

$$\alpha_m := \log\left(1 + \frac{1}{2m^2(\log m)^3}\right),$$

由于

$$\left|q_n^+\right| \leqslant \frac{1}{c}\left[2m^2(\log m)^3\right]^s e^{-\alpha_m n}, \quad \left|q_n^-\right| \leqslant \left[2m^2(\log m)^3\right]^r e^{-\alpha_m n},$$

whe其中第二个关系源于以下事实：$\log(1-\varepsilon_m) \leqslant -\log(1+\varepsilon_m)$，因此

$$(n+r)\log(1-\varepsilon_m) \leqslant n\log(1-\varepsilon_m) \leqslant -n\log(1+\varepsilon_m) = -\alpha_m n$$

□

定理 2.1 表明，当 $r \neq s$ 带状托普利茨矩阵的序列 $\{T_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ 不稳定时，特别地，对所有充分大的 n，矩阵 T_n 通常是病态的。鉴于具有独立同分布的条目的随机矩阵的经典理论，这一行为多少有些令人惊讶：其中奇异概率随维数的增长而趋于 0，而对极端奇异值的定量界则以高概率给出良好的条件性 [3, 16, 22, 23]。对于循环矩阵这一托普利茨矩阵的特殊子类，当其条目为独立同分布的随机变量时，条件数是多项式的 [3]。

3. 单位圆内随机多项式的零点个数

这里我们建立本文的第二个主要结果。我们证明，对于系数满足假设 $\mathcal{H}1$–$\mathcal{H}4$的随机多项式，其零点渐近地有一半位于单位圆内。这一结果本身具有独立意义。

定理 3.1。设 $G(z) = \sum_{j=0}^n \xi_j z^j$，其中其系数满足 $\mathcal{H}1$–$\mathcal{H}4$，则

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\nu_n(\mathbb{D})}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant n^{-1/10}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{(\log n)^2}{n^{1/10}}\right),$$

其中隐含常数取决于 ξ_0 的分布。特别地，$\frac{\nu_n(\mathbb{D}_n)}{n} \to \frac{1}{2}$ 以概率成立。

为了证明定理 3.1，我们证明

$$\mathbb{P}\left(\nu_n(\mathbb{D}) \geqslant \frac{n}{2} + n^{9/10}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{(\log n)^2}{n^{1/10}}\right), \tag{3.1}$$

and

$$\mathbb{P}\left(\nu_n(\mathbb{D}) \leqslant \frac{n}{2} - n^{9/10}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{(\log n)^2}{n^{1/10}}\right). \tag{3.2}$$

其中隐含的正常数取决于 ξ_0 的分布。

由詹森公式（ [1]第207页）可知

$$\int_0^r \frac{N_f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\mu(\theta) - \log|f(0)| \tag{3.3}$$

其中 f 是 $\{|z| \leqslant r\}$ 上的解析函数，使得 $f(0) \neq 0$ ，并且

$$N_f(t) := \#\{|z| \leqslant t : f(z) = 0\}.$$

证明　　定理 *3.1.* 我们建立上界3.1。设 $\tau = n^{-11/10} > 0$。注意到

$$\begin{aligned}
\nu_n(\mathbb{D}) &\leqslant \frac{1}{\log(1+\tau)} \int_1^{1+\tau} \frac{\nu_n(r\mathbb{D})}{r}\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\log(1+\tau)} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|G_n((1+\tau)e^{i\theta})\right| \mathrm{d}\mu(\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|G_n(e^{i\theta})\right| \mathrm{d}\mu(\theta)\right] \\
&= \frac{\log\sigma(1+\tau) - \log\sigma(1)}{\log(1+\tau)} \\
&\quad + \frac{1}{\log(1+\tau)} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\tilde{G}_n((1+\tau)e^{i\theta})\right| \mathrm{d}\mu(\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\tilde{G}_n(e^{i\theta})\right| \mathrm{d}\mu(\theta)\right].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们定义

$$S(r) := \sum_{j=0}^{n} r^{2j}, \quad h(r) := \log S(r),$$

因此，根据定义 $\sigma(r)$，我们有 $\log\sigma(r) = \frac{1}{2}h(r)$。现在，我们看到 S 关于 r 的三阶及以下导数为

$$S'(r) = \sum_{j=0}^{n} 2jr^{2j-1}, \quad S''(r) = \sum_{j=0}^{n} 2j(2j-1)r^{2j-2}, \quad S''(r) = \sum_{j=0}^{n} 2j(2j-1)(2j-2)r^{2j-3},$$

而对于 $h(r)$,

$$\begin{aligned}
h'(r) &= \frac{S'}{S}, \\
h''(r) &= \frac{S''S - (S')^2}{S^2}, \\
h'''(r) &= \frac{S^2S''' - 3SS'S'' + 2(S')^3}{S^3}.
\end{aligned}$$

如果 $r \in [1-\tau, 1+\tau]$，那么所有充分大的 n,

- $e^{-4}n \leqslant S(r) \leqslant e^2 n$,
- $|S'(r)| \leqslant 2e^2 \sum_{j=0}^{n} j = \mathrm{O}(n^2)$,
- $|S''(r)| \leqslant 4e^2 \sum_{j=0}^{n} j^2 = \mathrm{O}(n^3)$,
- $|S'''(r)| \leqslant 8e^2 \sum_{j=0}^{n} j^3 = \mathrm{O}(n^4)$.

由上述观察可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\log\sigma(r)\Big|_{r=1} &= \frac{1}{2}n,\\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}\log\sigma(r)\Big|_{r=1} &= \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{3},\\ \left|\frac{\partial^2}{\partial r^2}\log\sigma(r)\right| &= \frac{1}{2}\left|h'''(r)\right| = \mathrm{O}(n^3),\end{aligned}$$

对所有 $r\in[1-\tau,1+\tau]$ 均一致。对 $\log\ \sigma(r)$ 使用三阶泰勒展开，

$$\begin{aligned}2\log\sigma(1+r) &= 2\log\sigma(1)+rh'(1)+\frac{1}{2}r^2h''(1)+\mathrm{O}(h'''(r^*)r^3)\\ &= 2\log\sigma(1)+nr+\frac{n(n-1)}{6}r^2+\mathrm{O}(n^3r^3),\end{aligned}$$

当 $r>0$ 时，对某些 $r^*\in[1,1+r]$；当 $r<0$ 时，对某些 $r^*\in[1+r,1]$。

利用 $\log(1+\tau)\sim\tau$ 在 τ 较小时的性质，可得：

$$\frac{\log\sigma_n(1+\tau)-\log\sigma(1)}{\log(1+\tau)}-\frac{n}{2}=\frac{1}{12}\tau n^2+\mathrm{O}(n^3\tau^2)=\frac{1}{12}n^{9/10}+\mathrm{O}(n^{8/10}),$$

and

$$\frac{\log\sigma_n(1)-\log\sigma(1+\tau)}{-\log(1-\tau)}-\frac{n}{2}=-\frac{1}{12}n^{9/10}+\mathrm{O}(n^{8/10}).$$

因此，利用马尔可夫不等式和前面的观察，我们注意到

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\nu_n(\mathbb{D})\geqslant\frac{n}{2}+n^{9/10}\right)\\ &\quad\leqslant\mathbb{P}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1+\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)-\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)\geqslant\frac{11}{12}\tau n^{9/10}+\mathrm{O}(\tau n^{8/10})\right)\\ &\quad=\mathbb{P}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1+\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)-\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)\geqslant\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)\\ &\quad\leqslant\mathbb{P}\left(\left|\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1+\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)+\frac{\gamma}{2}\right|\geqslant\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)\\ &\qquad+\mathbb{P}\left(\left|\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)+\frac{\gamma}{2}\right|\geqslant\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)\\ &\quad\leqslant C_1\left(\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)^{-2}\times\frac{(\log n)^2}{n^{1/2}}\leqslant C_2\frac{(\log n)^2}{n^{1/10}},\end{aligned}$$

对于某个正常数 C_2，该常数取决于 ξ_0 的分布。

下界 3.2 的推导方法类似，此时考虑不等式

$$\begin{aligned}\nu_n(\mathbb{D}) &\geqslant \frac{1}{-\log(1-\tau_n)}\int_{1-\tau_n}^{1}\frac{\nu_n(r\mathbb{D})}{r}\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{-\log(1-\tau_n)}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|G_n(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)-\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|G_n((1-\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)\right]\\ &= \frac{\log\sigma_n(1)-\log\sigma_n(1-\tau_n)}{-\log(1-\tau_n)}\\ &\quad+\frac{1}{-\log(1-\tau_n)}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)-\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1-\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)\right].\end{aligned}\tag{3.5}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\nu_n(\mathbb{D})\leqslant\frac{n}{2}-n^{9/10}\right)\\ &\leqslant\mathbb{P}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)-\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1-\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)\leqslant-\frac{11}{12}\tau n^{9/10}+\mathrm{O}(\tau n^{8/10})\right)\\ &\leqslant\mathbb{P}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)-\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1-\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)\leqslant-\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)\\ &\leqslant\mathbb{P}\left(\left|\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1-\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)-\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\geqslant\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)\\ &\leqslant\mathbb{P}\left(\left|\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1-\tau_n)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)+\gamma\right|\geqslant\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)\\ &\quad+\mathbb{P}\left(\left|\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\tilde{G}_n((1)e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta)+\gamma\right|\geqslant\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)\\ &\leqslant C_1\left(\frac{11}{12}n^{-1/5}+\mathrm{O}(n^{-3/10})\right)^{-2}\times\frac{(\log n)^2}{n^{1/2}}\leqslant C_4\frac{(\log n)^2}{n^{1/10}}\end{aligned}$$

对于某个正常数 C_4，它取决于 ξ_0 的分布。

□

引理 3.2. 设 $m\in\{1,2\}$。对于所有 $r\in[1-n^{-11/10},1+n^{-11/10}]$，有

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi}\log|\tilde{G}(re^{i\theta})|\mathrm{d}\mu(\theta)\right)^m\right]=\left(-\frac{\gamma}{2}\right)^m+\mathrm{O}\left(\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right),$$

其中 $\gamma\approx 0.5772...$ 是欧拉常数，隐含常数取决于 ξ_0 的分布。

在证明引理 3.2 之前，我们先引入一些记号和一个有用的辅助结果。

对于每个固定的 $\theta\in[-\pi,\ \pi]$，记

$$F_n^{\theta}(x):=\mathbb{P}\left(\left|\tilde{G}(re^{i\theta})\right|^2\leqslant x\right),\quad F(x):=1-e^{-x}.$$

对于满足 $\theta\neq\phi$ 且 $\theta,\ \phi\in[-\pi,\ \pi]$ 的情形，记

$$F_n^{\theta,\phi}(x,y):=\mathbb{P}\left(\left|\tilde{G}(re^{i\theta})\right|^2\leqslant x,\left|\tilde{G}(re^{i\theta})\right|^2\leqslant y\right).$$

引理 3.3。 存在一个通用常数 $C>0$，使得

(1) 对于所有 $|\theta| \geqslant n^{-1/2}$ 以及所有 $x \in (0, \infty)$

$$\left|F_n^{\theta}(x) - F(x)\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

(2) 对于所有满足 $|\theta - \phi| > n^{-1/2}$ 的 θ、$\phi \notin [-n^{-1/2}, n^{-1/2}]$

$$\left|F_n^{\theta,\phi}(x,y) - F(x)F(y)\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}$$

对于所有的 x、$y \in (0$、$\infty)$。

现在，我们继续证明引理 3.2。

引理 *3.2* 的证明。我们只证明 $m = 2$ 的情形，另一种情形类似。记 $p(\theta) := \tilde{G}(re^{i\theta})$，并将事件定义为

$$\mathcal{A}_\theta := \left\{\left|G(re^{i\theta})\right| \leqslant n^{-A}\right\}$$

其中某个较大的值 A 将在稍后选定。根据引理 4.1，我们可以应用 Fubini 定理，并观察到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\tilde{G}(re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\mu(\theta)\right)^2\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\int\int_{[-\pi,\pi]^2} \log|p(\theta)| \log|p(\phi)| \,\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\int\int_{[-\pi,\pi]^2} L(\theta,\phi)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta^c}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\right] + 2\mathbb{E}\left[\int\int_{[-\pi,\pi]^2} L(\theta,\phi)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\int\int_{[-\pi,\pi]^2} L(\theta,\phi)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi}\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\right],
\end{aligned}$$

其中 $L(\theta, \phi) := \log|p(\theta)| \log|p(\phi)|$。我们分别用$E_1$，$E_2$，$E_3$表示前一个和式中的各项。我们证明 E_2，E_3 很小。

应用 Tonelli 定理、柯西-施瓦茨不等式、引理 4.1 和引理 5.1，并取 $c = 5$ 和 $a = n^{-112}$ ($A = 112$)，可得

$$\begin{aligned}
|E_3| &\leqslant \int\int_{[-\pi,\pi]^2} \mathbb{E}\left[\left|\log|p(\theta)| \log|p(\phi)|\right| \mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi}\right] \mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi) \\
&\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\mathbb{E}\left[(\log|p(\theta)|)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta}\right]} \mathrm{d}\mu(\theta)\right)^2 \\
&\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\mathbb{E}\left[(\log|p(\theta)|)^4\right] \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_\theta\right)} \mathrm{d}\mu(\theta) \\
&\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}\left[\left|\log|p(\theta)|\right|^4\right] \mathrm{d}\mu(\theta)\right)^{1/2} \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_\theta\right) \mathrm{d}\mu(\theta)\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\left(C^* + 1\right)(n\log n)^4\right)^{1/2} \times \left(C_5 \frac{112 \log n}{n^5}\right)^{1/2} \\
&\leqslant C_6 \frac{(\log n)^{5/2}}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

对于某个正常数 C_6，它取决于 ξ_0 的分布。

在 E_2 的情况下，首先我们注意到，对于所有 $n>1$ 和 $t>0$,

$$\mathbb{P}\left(|p(\phi)|>t\right)=\mathbb{P}\left(\left|G(re^{i\phi})\right|>\sigma(r)t\right)\leqslant\frac{1}{t^2},$$

thus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\log|p(\phi)|\right|^2\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\right]&\leqslant(112\log n)^2+\int_0^\infty\mathbb{P}\left(\log|p(\phi)|\geqslant\sqrt{t},|p(\phi)|>n\right)\mathrm{d}t\\&\leqslant(112\log n)^2+\frac{(\log n)^2}{n^2}+\int_{(\log n)^2}^\infty e^{-2\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\&\leqslant(112\log n)^2+\frac{3(\log n)^2+1}{n^2}.\end{aligned}$$

由上述结果可得

$$\begin{aligned}|E_2|&\leqslant\int\int_{[-\pi,\pi]^2}\mathbb{E}\left[\left|\log|p(\theta)|\log|p(\phi)|\right|\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\right]\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\\&\leqslant\int\int_{[-\pi,\pi]^2}\left(\mathbb{E}\left[\left|\log|p(\theta)|\right|^2\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta}\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left[\left|\log|p(\phi)|\right|^2\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\right]\right)^{1/2}\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\\&=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbb{E}\left[\left|\log|p(\theta)|\right|^2\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta}\right]\right)^{1/2}\mathrm{d}\mu(\theta)\right)\times\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbb{E}\left[\left|\log|p(\phi)|\right|^2\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\right]\right)^{1/2}\mathrm{d}\mu(\phi)\right)\\&\leqslant\left(C_6\frac{(\log n)^{5/2}}{\sqrt{n}}\right)^{1/2}\times\left((112\log n)^2+\frac{3(\log n)^2+1}{n^2}\right)^{1/2}\\&\leqslant C_7\frac{(\log n)^{9/4}}{n^{1/4}},\end{aligned}$$

对于某个正常数 C_7，它取决于 ξ_0 的分布。

现在，我们定义以下事件

$$D_n:=\left\{|\theta-\phi|\leqslant n^{-1/2}\right\}\cup\left\{|\theta|\leqslant n^{-1/2}\right\}\cup\left\{|\phi|\leqslant n^{-1/2}\right\}\subset[-\pi,\pi]^2.$$

根据 D_n 的定义,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int\int_{D_n}\left|\log|p(\theta)|\log|p(\phi)|\right|\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta^c}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\right]\\&\quad\leqslant\int\int_{[-\pi,\pi]^2}\mathbb{E}\left[\left|\log|p(\theta)|\log|p(\phi)|\right|\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta^c}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\right]\mathbb{1}_{D_n}\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\\&\quad\leqslant\left((112\log n)^2+\frac{3(\log n)^2+1}{n^2}\right)\times\left(\int\int_{[-\pi,\pi]}\mathbb{1}_{D_n}\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}\mu(\phi)\right)\\&\quad\leqslant\left((112\log n)^2+\frac{3(\log n)^2+1}{n^2}\right)\times\left(\frac{3}{n^{1/2}}\right)\\&\quad\leqslant C_8\frac{(\log n)^2}{n^{1/2}},\end{aligned}$$

对某个依赖于 ξ_0的分布的正常数 C_8 。

不难验证

$$\begin{aligned}\int_{n^{-A}}^{n}(\log(x))dF(x) &= \int_{0}^{\infty}(\log(x))e^{-x}dx + \mathrm{O}_A\left(\frac{\log n}{n^A}\right)\\ &= -\gamma + \mathrm{O}_A\left(\frac{\log n}{n^A}\right).\end{aligned}$$

若 $(\theta,\ \phi)\notin D_n$，我们可以应用引理 3.3 中的第 2 项（当 $l=1$ 时，应用第 1 项），从而得到

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\log\left(|p(\theta)|^2\right)\log\left(|p(\phi)|^2\right)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\theta^c}\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\phi^c}\right]-\gamma^2\right|\\ &\leqslant \int_{n^{-A}}^{n}\int_{n^{-A}}^{n}|\log(x)\log(y)|\,\mathrm{d}\left(F_n^{\theta,\phi}(x,y)-F(x)F(y)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right)+\mathrm{O}_A\left(\frac{\log n}{n^A}\right)\\ &\leqslant (A\log n)^2\left|\int_{n^{-A}}^{n}\int_{n^{-A}}^{n}\mathrm{d}\left(F_n^{\theta,\phi}(x,y)-F(x)F(y)\right)\right|+\mathrm{O}\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right)+\mathrm{O}_A\left(\frac{\log n}{n^A}\right)\\ &\leqslant \frac{C(A\log n)^2}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right)+\mathrm{O}_A\left(\frac{\log n}{n^A}\right)\\ &= \mathrm{O}\left(\frac{(\log n)^2}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

其中隐含常数取决于 ξ_0 的分布。证明完毕。□

引理 *3.3* 的证明。回忆 $\tilde{G}(z)=\frac{1}{\sigma(r)}G(z)$ 其中 $G(z)=\sum_{j=0}^{n}\xi_j z^k$，$\sigma(r)=\mathbb{E}\left[\left|G(re^{i\theta})\right|^2\right]$，$r\in[1-n^{-11/10},1+n^{-11/10}]$。我们假设 $\{\xi_j\}$ 是一组独立同分布随机变量，满足 $\mathbb{E}[\xi_j]=0$ 和 $\mathbb{E}[\xi_j]=1$（假设 $\mathcal{H}2$）。我们定义以下随机向量

$$p(\theta)=\frac{1}{\sigma(r)}\left(\sum_{j=0}^{n}\xi_j r^j\cos(k\theta),\sum_{j=0}^{n}\xi_j r^j\sin(j\theta)\right)\in\mathbb{R}^2$$

and

$$(p(\theta),p(\phi))=\frac{1}{\sigma(r)}\left(\sum_{j=0}^{n}\xi_j r^j\cos(k\theta),\sum_{j=0}^{n}\xi_j r^j\sin(k\theta),\sum_{j=0}^{n}\xi_j r^j\cos(k\phi),\sum_{j=0}^{n}\xi_j r^j\sin(k\phi)\right)\in\mathbb{R}^4.$$

注意，它们的协方差结构分别由以下给出

$$V(\theta)=\frac{1}{\sigma(r)^2}\sum_{j=0}^{n}r^{2j}\begin{bmatrix}\cos^2(j\theta) & \cos(j\theta)\sin(j\theta)\\ \cos(j\theta)\sin(j\theta) & \sin^2(j\theta)\end{bmatrix},\tag{3.6}$$

and

$$\begin{aligned}V(\theta,\phi)=&\frac{1}{\sigma(r)^2}\sum_{j=0}^{n}r^{2j}\\ &\times\begin{bmatrix}\cos^2(j\theta) & \cos(j\theta)\sin(j\theta) & \cos(j\theta)\cos(j\phi) & \cos(j\theta)\sin(j\phi)\\ \cos(j\theta)\sin(j\theta) & \sin^2(j\theta) & \sin(j\theta)\cos(j\phi) & \sin(j\theta)\sin(j\phi)\\ \cos(j\phi)\cos(j\theta) & \cos(j\phi)\sin(j\theta) & \cos^2(j\phi) & \sin(j\phi)\cos(j\phi)\\ \sin(j\phi)\cos(j\theta) & \sin(j\phi)\sin(j\theta) & \sin(k\phi)\cos(j\phi) & \sin^2(j\phi)\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

由 $V(\theta)$ 和 $V(\theta,\ \phi)$，我们可以观察到，本引理的证明遵循 [28]中引理 3.2 的证明所采用的相同策略。□

4. 马勒测度期望的界

回顾一下，对于首一多项式 $F(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-\alpha_j)$，其马勒测度由 F 给出

$$M(F):=\prod_{j=1}^{n}\max\{1,|\alpha_j|\}.$$

由詹森公式可知，

$$\log M(F)=\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|F(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\mu(\theta).$$

利用詹森不等式，下面的结果给出了 G 的马勒测度对数的四阶矩上界。关于马勒测度的更多细节，请参见 [25]。

引理 4.1. 设 $G(re^{i\theta})=\sum_{j=0}^{n}\xi_j r^j e^{ij\theta}$，其中 $\theta\in[-\pi,\ \pi]$，且 $r\in[1-n^{-11/10},1+n^{-11/10}]$ 为固定值，ξ_j、$j=0$、.....、n 是独立同分布随机变量，满足 $\mathbb{E}[\xi_0]=0$、$\mathbb{E}[\xi_0^2]=1$、$\mathbb{E}[\xi_0^4]<+\infty$，并且 $\mathbb{P}(|\xi_0|\leqslant t)\leqslant Ct^{1/2}$，其中某个常数 $C>0$ 满足 $t\in[0、1]$。那么，存在一个正常数 C^*，它仅取决于 ξ_0 的分布，使得

$$\mathbb{E}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left|\log\left|G(re^{i\theta})\right|\right|^4\mathrm{d}\mu(\theta)\right]\leqslant C^*\left(n\log n\right)^4.$$

证明。若 $||G||_\infty:=\sup_{\theta\in[-\pi,\ \pi]}\left|G(re^{i\theta})\right|$ 且 $||G||_2:=\int_{-\pi}^{\pi}\left|G(re^{i\theta})\right|^2 d\mu(\theta)$。注意到 $||G||_2^2=\sum_{j=0}^{n}|\xi_j|^2 r^{2j}$, $||G||_2\leqslant||G||_\infty$，由柯西-施瓦茨不等式

$$\left|G(re^{i\theta})\right|\leqslant\sum_{j=0}^{n}|\xi_j|\,r^j\leqslant\sqrt{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n}|\xi_j|^2 r^{2j}\right)^{1/2}=\sqrt{n+1}\,||G||_2,$$

即，$||G||_\infty\leqslant\sqrt{n+1}\,||G||_2$。

在继续证明引理 4.1 之前，我们先陈述经典的图兰-纳扎罗夫引理（见 [19] 中的定理 1.5）。

引理 4.2（图兰-纳扎罗夫引理）。设 $T(x):=\sum_{k=0}^{h}\alpha_k e^{im_k x}$ 是一个三角多项式，其中 $\alpha_k\in\mathbb{C}$ 且 $m_1<m_2<\ldots<m_h\in\mathbb{Z}$。那么对任意可测集$E\subset[-\pi,\pi]$，有

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|T(x)|\leqslant\left(\frac{C}{\mu(E)}\right)^{h-1}\sup_{x\in E}|T(x)|,$$

其中 $C>0$ 是一个绝对常数。

因此，我们定义

$$E_\lambda:=\left\{\theta\in[-\pi,\pi]:\left|G(re^{i\theta})\right|\leqslant\lambda\,||G||_2\right\},$$

注意，$||G||_2\neq0$ 以概率 1 成立，因为 $\mathbf{P}(\xi_0=0)=0$。因此，由图兰–纳扎罗夫引理可得

$$||G||_2\leqslant||G||_\infty\leqslant\left(\frac{C}{\mu(E_\lambda)}\right)^n\sup_{\theta\in E_\lambda}\left|G(re^{i\theta})\right|\leqslant\left(\frac{C}{\mu(E_\lambda)}\right)^n\lambda\,||G||_2,$$

then

$$\mu(E_\lambda) \leqslant C_1 \lambda^{1/n} \tag{4.1}$$

其中某个普适正数常数为 C_1。

我们假设 ξ_j 是固定的。

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left|G(re^{i\theta})\right|\right|^4 \mathrm{d}\mu(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left|\log \frac{\left|G(re^{i\theta})\right|}{||G||_2} + \log||G||_2\right|^4 \mathrm{d}\mu(\theta) \\ &\leqslant 8\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log \frac{\left|G(re^{i\theta})\right|}{||G||_2}\right|^4 \mathrm{d}\mu(\theta) + 8\left|\log||G||_2\right|^4.\end{aligned}$$

我们定义事件 $B := \left\{\left|G(re^{i\theta})\right| > ||G||_2\right\}$, 那么

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log \frac{\left|G(re^{i\theta})\right|}{||G||_2}\right|^4 \mathbb{1}_B \mathrm{d}\mu(\theta) &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left(\log \frac{\sqrt{n+1}\,||G||_2}{||G||_2}\right)^4 \mathbb{1}_B \mathrm{d}\mu(\theta) \\ &\leqslant \frac{1}{2^4}\left(\log(n+1)\right)^4.\end{aligned}$$

另一方面，如果$\mathbf{P}_\theta$ 表示关于 $\mu(\theta)$的分布，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log \frac{\left|G(re^{i\theta})\right|}{||G||_2}\right|^4 \mathbb{1}_{B^c} \mathrm{d}\mu(\theta) &= \int_0^\infty 4u^3 \mathbb{P}_\theta\left(-\log \frac{\left|G(re^{i\theta})\right|}{||G||_2} \geqslant u, B^c\right) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty 4u^3 \mathbb{P}_\theta\left(\left|G(re^{i\theta})\right| \leqslant e^{-u}||G||_2\right) \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

利用4.1，我们有

$$\mathbb{P}_\theta\left(\left|G(re^{i\theta})\right| \leqslant e^{-u}||G||_2\right) \leqslant \min\left\{1, C_1 e^{-u/n}\right\}.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty u^3 \mathbb{P}_\theta\left(\left|G(re^{i\theta})\right| \leqslant e^{-u}||G||_2\right) \mathrm{d}u = \int_0^{n\log n} u^3 \mathrm{d}u + \int_{n\log n}^\infty u^3 \mathbb{P}_\theta\left(\left|G(re^{i\theta})\right| \leqslant e^{-u}||G||_2\right) \mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{1}{4}(n\log n)^4 + C_1 \int_{n\log n}^\infty u^3 e^{-u/n} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}(n\log n)^4 + C_1 n^4 \int_{\log n}^\infty v^3 e^{-v} \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{4}(n\log n)^4 + C_1 n^4 e^{-\log n}\left((\log n)^3 + 3(\log n)^2 + 6(\log n) + 6\right) \\ &\leqslant C_2\left((n\log n)^4\right),\end{aligned}$$

其中 C_2为某个普适正数常数。结合以上陈述，我们得出

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left|G(re^{i\theta})\right|\right|^4 \mathrm{d}\mu(\theta) \leqslant C_3\left((n\log n)^4 + \left|\log||G||_2\right|^4\right).$$

现在，我们对 ξ_j取期望，

$$\mathbb{E}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left|G(re^{i\theta})\right|\right|^4 \mathrm{d}\mu(\theta)\right] \leqslant C_3\left((n\log n)^4 + \mathbb{E}\left[\left|\log||G||_2\right|^4\right]\right),$$

这意味着我们需要分析 $\left|\log ||G||_2\right|^4$ 的期望。为此，我们注意到

$$\left|\log ||G||_2\right|^4 = \frac{1}{2^4}\left|\log\left(\frac{1}{n}||G||_2^2\right) + \log n\right|^4 \leqslant \frac{1}{2}\left((\log n)^4 + \left[\log\left(\frac{1}{n}||G||_2^2\right)\right]^4\right),$$

并注意

$$\frac{1}{n}||G||_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\xi_j^2 r^{2j} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\xi_0^2\right] = 1 \quad \text{a.s.},$$

对所有 $r \in [1-n^{-11/10}, 1+n^{-11/10}]$。此外，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}||G||_2^2 - 1\right)^2\right] &= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left[\xi_j^2 r^{2j} - 1\right]\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=0}^{n}\mathbb{E}\left[(\xi_j^2 r^{2j} - 1)^2\right] + 2\sum_{j_1<j_2}\mathbb{E}\left[(\xi_{j_1}^2 r^{2j_1} - 1)(\xi_{j_2}^2 r^{2j_2} - 1)\right]\right) \\
&\leqslant \frac{4e^4}{n^2}\left(n(\mathbb{E}\left[\xi_0^4\right] + 1)\right) + \frac{2}{n^2}\sum_{j_1<j_2}(r^{2j_1} - 1)(r^{2j_2} - 1) \\
&\leqslant \frac{4e^4}{n^2}\left(n(\mathbb{E}\left[\xi_0^4\right] + 1)\right) + \frac{2}{n^2}\sum_{j_1<j_2}(4e^4 j_1 n^{-11/10})(4e^4 j_2 n^{-11/10}) \\
&= \frac{4e^4}{n^2}\left(n(\mathbb{E}\left[\xi_0^4\right] + 1)\right) + \frac{2^5 e^8}{n^2}\sum_{j_1<j_2} j_1 j_2 n^{-22/10} \\
&\leqslant \frac{4e^4}{n^2}\left(n(\mathbb{E}\left[\xi_0^4\right] + 1)\right) + 2^5 e^8 n^{-2/10} \\
&\leqslant \frac{C_4}{n^{1/5}},
\end{aligned}$$

对于某个依赖于 $\mathbb{E}[\xi_0^4]$ 的正常数 C_4。我们定义 $Y_n := \frac{1}{n}||G||_2^2$ 和 $D := \{Y_n \in [0, 1/2]\}$, 我们有

$$\mathbb{E}\left[\left|\log\left(Y_n\right)\right|^4\right] = \mathbb{E}\left[\left|\log\left(Y_n\right)\right|^4 \mathbb{1}_D\right] + \mathbb{E}\left[\left|\log\left(Y_n\right)\right|^4 \mathbb{1}_{D^c}\right]$$

因此，在 D 上有如下结论

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\log\left(Y_n\right)\right|^4 \mathbb{1}_D\right] &= \int_0^\infty 4u^3 \mathbb{P}\left(-\log Y_n \geqslant u, D\right) \mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_0^{\log n} 4u^3 \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}u + \int_{\log n}^\infty 4u^3 \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant e^{-u}\right) \mathrm{d}u \\
&\leqslant (\log n)^4 \mathbb{P}\left(|Y_n - 1| \geqslant \frac{1}{2}\right) + \int_{\log n}^\infty 4u^3 \mathbb{P}\left(\xi_0^2 \leqslant n e^{-u}\right) \mathrm{d}u \\
&\leqslant C_4 \frac{(\log n)^4}{n} + 4Cn^{1/4}\int_{\log n}^\infty u^3 e^{-u/4} \mathrm{d}u \\
&\leqslant C_4 \frac{(\log n)^4}{n} + C_5 \frac{(\log n)^3}{n^{1/4}} \leqslant C_6 \frac{(\log n)^4}{n^{1/4}},
\end{aligned}$$

其中某些正常数 C_5, $C_6 > 0$ 取决于 ξ_0 的分布。对于左侧部分，注意到对所有 $x \geqslant -\frac{1}{2}$ 都有不等式 $|\log(1+x)|^4 \leqslant 8x^2$，我们得到

$$\mathbb{E}\left[|\log(Y_n)|^4 \mathbb{1}_{D^c}\right] = \mathbb{E}\left[|\log(1+(Y_n-1))|^4 \mathbb{1}_{D^c}\right] \leqslant 8\mathbb{E}\left[|Y_n-1|^2\right] \leqslant \frac{8C_4}{n^{1/5}}.$$

我们得出

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left|G(re^{i\theta})\right|\right|^4 \mathrm{d}\mu(\theta)\right] &\leqslant C_7\left((n\log n)^4 + \frac{(\log n)^4}{n^{1/5}}\right)\\ &\leqslant C_8(n\log n)^4,\end{aligned}$$

存在一些正常数 C_7, C_8 它们取决于 ξ_0 的分布。 □

5. Small ball probability

本节中我们证明引理 5.1。我们取 $r \in [1-n^{-11/10}, 1+n^{-11/10}]$。为了得到引理 3.2 中所出现积分的期望的一个合适上界，我们需要控制相应的小球概率。注意，该积分本身是一个随机变量，因为它取决于底层 Kac 多项式的随机系数。因此我们考虑以下命题。

引理 5.1。 *在定理 3.1 的假设下，存在一个常数 $C_5 > 0$，它取决于 ξ_0 的分布，使得对于所有 $a \in (0,1)$ 以及所有 $r \in [1-n^{-11/10}, 1+n^{-11/10}]$，我们有*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{P}\left(|G(re^{i\theta})| \leqslant a\right) \mathrm{d}\mu(\theta) \leqslant C_5\left(\frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^c} + n^{20c+6} a\log(a^{-1})\right)$$

对于 $c > 1$。

证明。从Esseen 反集中不等式（见 [26] 中的定理 7.17），我们得

$$\mathbb{P}\left(|P(re^{i\theta})| \leqslant a\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|\Re P(re^{i\theta})| \leqslant a\right) \leqslant C_0 a \int_{-a^{-1}}^{a^{-1}} |g(t)|\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

对于某个普适正数常数 C_0，且 g 是多项式实部的特征函数，$\Re P(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k r^k \cos(k\theta)$。若 $g_k(t)$ 是$\xi_k r^k \cos(k\theta)$的特征函数，则有

$$|g_k(t)|^2 = \mathbb{E}_{\tilde{\xi}_k}\left[\cos\left(tr^k\cos(k\theta)\tilde{\xi}_k\right)\right],$$

其中 $\tilde{\xi}_k$ 是 ξ_k的对称化，即 $\tilde{\xi}_k := \xi_k - \xi_k'$，而 ξ_k' 是ξ_k 的独立副本（它也与所有其他所考虑的随机变量独立），$\mathbb{E}_{\tilde{\xi}_k}$ 表示关于 $\tilde{\xi}_k$ 的期望。由不等式 $x \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}(1-x^2)\right)$（对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立）可得

$$|g_k(t)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}(1-|g_k(t)|^2)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left[1-\mathbb{E}_{\tilde{\xi}_k}\left[\cos\left(tr^k\cos(k\theta)\tilde{\xi}_k\right)\right]\right]\right).$$

由上可知，$\Re P(re^{i\theta})$ 的特征函数 $g(t)$ 满足

$$\begin{aligned}|g(t)| = \prod_{k=0}^{n}|g_k(t)| &\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\left[n - \sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\tilde{\xi}_k}\left[\cos\left(tr^k\cos(k\theta)\tilde{\xi}_k\right)\right]\right]\right)\\ &\leqslant e^{-\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\tilde{\xi}_k}\left[\cos\left(tr^k\cos(k\theta)\tilde{\xi}_k\right)\right]\right)\end{aligned} \tag{5.2}$$

令 $p:=\mathbf{P}\left(\tilde{\xi}_0=0\right)$，注意到 $p<1$，因为 ξ_0的分布是非退化的。根据前面的表达式 5.2 和 ξ_k的定义（见假设 $\mathcal{H}4$），利用 Fubini定理可得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{P}\left(\left|G_n(re^{i\theta})\right|\leqslant a\right)\mathrm{d}\mu(\theta)\\
&\quad\leqslant a\int_{-a^{-1}}^{a^{-1}}e^{-n/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\tilde{\xi}_k}\left[\cos\left(r^k\cos(k\theta)t\tilde{\xi}_k\right)\left(\mathbb{1}_{\{\tilde{\xi}_k\neq 0\}}+\mathbb{1}_{\{\tilde{\xi}_k=0\}}\right)\right]\right)\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}t\\
&\quad=a\int_{-a^{-1}}^{a^{-1}}e^{-(1-p)n/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{1-p}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\bar{\xi}_k}\left[\cos(r^k\cos(k\theta)t\bar{\xi}_k)\right]\right)\mathrm{d}\mu(\theta)\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{5.3}$$

固定 $t\in[-a^{-1},\ a^{-1}]$，我们定义以下事件:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(t,n)&:=\left\{\theta\in[-\pi,\pi]:\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\bar{\xi}_k}\left[\cos(tr^k\cos(k\theta)\bar{\xi}_k)\right]<\frac{n}{2}\right\},\\
\Lambda_2(t,n)&:=[-\pi,\pi]\backslash\Lambda_1(t,n)
\end{aligned}$$

对 5.3 中关于 $\mathrm{d}\mu(\theta)$ 的积分，在 $\Lambda_1(t,\ n)$ 上进行积分可得一个指数界，$e^{-(1-p)n/2}e^{(1-p)n/4}=e^{-(1-p)n/4}$。因此，我们只考虑同一积分在 $\Lambda_2(t,\ n)$上的情形。

为了处理 $\Lambda_2(t,\ n)$的情形，我们引入记号 $\alpha_k(\theta):=r^k\cos(k\theta)$，并注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\bar{\xi}_k}\left[\cos(r^k\cos(k\theta)t\bar{\xi}_k)\right]\right)^{10}\mathrm{d}\mu(\theta)\\
&\quad=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\bar{\xi}_k}\left[e^{i\alpha_k(\theta)t\bar{\xi}_k}+e^{-i\alpha_k(\theta)t\bar{\xi}_k}\right]\right)^{10}\mathrm{d}\mu(\theta)\\
&\quad=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\mathbb{E}_{\bar{\xi}_k}\left[e^{i\alpha_k(\theta)t\bar{\xi}_k}\right]+\mathbb{E}_{\bar{\xi}_k}\left[e^{-i\alpha_k(\theta)t\bar{\xi}_k}\right]\right)\right)^{10}\mathrm{d}\mu(\theta)\\
&\quad=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\bar{\xi}_k}\left[e^{i\alpha_k(\theta)t\bar{\xi}_k}\right]\right)^{10}\mathrm{d}\mu(\theta)\\
&\quad=\frac{1}{2^{10}}\sum_{k_1,\ldots,k_{10}=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{E}_{\bar{\xi}_{k_{1:10}}}\left[e^{it\sum_{l=1}^{10}a_{k_l}(\theta)\bar{\xi}_{k_l}}\right]\mathrm{d}\mu(\theta)
\end{aligned}$$

由于 ξ_k 是一个对称随机变量，而且事实是

$$(\mathbb{E}[X])^2=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[XY]$$

其中 Y 是 X的一个独立副本。利用 Fubini 定理，并记 $\xi_{k_{1:10}}:=\{\xi_{k_1},\ \ldots\ldots,\ \bar{\xi}_{k_{10}}\},$，我们有

$$\frac{1}{2^{10}}\sum_{k_1,\ldots,k_{10}=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{E}_{\bar{\xi}_{k_{1:10}}}\left[e^{it\sum_{l=1}^{10}a_{k_l}(\theta)\bar{\xi}_{k_l}}\right]\mathrm{d}\mu(\theta)=\frac{1}{2^{10}}\sum_{k_1,\ldots,k_{10}=0}^{n}\mathbb{E}_{\bar{\xi}_{k_{1:10}}}\left[\int_{-\pi}^{\pi}e^{it\sum_{l=1}^{10}a_{k_l}(\theta)\bar{\xi}_{k_l}}\mathrm{d}\mu(\theta)\right].$$

注意，在上述求和中，有 2^{10} 项至少有一个 k_l 在$\sum_{l=1}^{10} a_{k_l}(\theta)\xi_{k_l}$ 中等于零，而这些项的总和至多为 1。因此，下面可以假设所有 $k_l \geqslant 1$都成立。为了估计其余的主要求和，我们将期望拆分如下：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\bar{\xi}_{k_{1:10}}}\left[\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\sum_{l=1}^{10} a_{k_l}(\theta)\bar{\xi}_{k_l}}\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\right] \\
&\quad\leqslant \mathbb{E}_{\bar{\xi}_{k_{1:10}}}\left[\mathbb{1}_{\left\{\max_{l\in\{1,\ldots,10\}}\left\{\left|\bar{\xi}_{k_l}\right|\right\}\leqslant n^{-1}\right\}}\cdot\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\sum_{l=1}^{10} a_{k_l}(\theta)\bar{\xi}_{k_l}}\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\right] \\
&\qquad+\mathbb{E}_{\bar{\xi}_{k_{1:10}}}\left[\mathbb{1}_{\left\{\max_{l\in\{1,\ldots,10\}}\left\{\left|\bar{\xi}_{k_l}\right|\right\}\geqslant n^{-1}\right\}}\cdot\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\sum_{l=1}^{10} a_{k_l}(\theta)\bar{\xi}_{k_l}}\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\right].
\end{aligned}$$

根据假设 $\mathcal{H}4$，右侧的第一个期望满足

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\bar{\xi}_{k_{1:10}}}\left[\mathbb{1}_{\left\{\max_{l\in\{1,\ldots,10\}}\left\{\left|\bar{\xi}_{k_l}\right|\right\}\leqslant n^{-1}\right\}}\cdot\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\sum_{l=1}^{10} a_{k_l}(\theta)\bar{\xi}_{k_l}}\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\right] \\
&\quad\leqslant \mathbb{E}_{\bar{\xi}_{k_{1:10}}}\left[\mathbb{1}_{\left\{\max_{l\in\{1,\ldots,10\}}\left\{\left|\bar{\xi}_{k_l}\right|\right\}\leqslant n^{-1}\right\}}\right] \\
&\quad= \mathbb{P}\left(\left|\bar{\xi}_{k_l}\right|\leqslant n^{-1}\text{ for all } l=1,\ldots,10\right) \\
&\quad\leqslant \left(C_2 n^{-1/2}\right)^{10} = C_2^{10} n^{-5}.
\end{aligned}$$

对于剩余的期望，我们假设 $\max_{l\in\{1,\ldots,10\}}\left|\xi_{k_l}\right| \geqslant n^{-1}$。令 $T(\theta) = \sum_{l=1}^{10} a_{k_l}(\theta)\xi_{k_l}$。令 $h=10$ 和 $c>0$，其取值将在后文定义。令

$$\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_L \in [-\pi,\pi]$$

单位圆内满足以下条件的点

$$|T'(\theta_j)| = n^{-h(c+1)}, \quad j=1,\ldots,L.$$

由于导数 T' 是次数为 $\max_{l=1,\ldots,10} k_l \leqslant n$的三角多项式，因此可得 $L\leqslant 2n$。我们将单位圆划分为 L 个区间，定义如下：

$$I_j := [\theta_j,\theta_{j+1}] \quad \text{for} \quad j=1,\ldots,L-1 \quad \text{and} \quad I_L := [-\pi,\pi]\setminus\left(\cup_{j=1}^{L-1} I_j\right).$$

若对所有 $\theta\in I_j$，$|T'(\theta)|\geqslant n^{-h(c+1)}$ 成立，则称 I_j 为良区间。若 I_j 不是良区间，则称其为劣区间。我们用 $\mathcal{G}$ 表示良区间集合，用 $\mathcal{B}$ 表示劣区间集合。我们指出，若 $I\in\mathcal{B}$，则 $\mu(I)\leqslant n^{-(c+1)}$。若情况相反，则根据构造，存在一个区间 $I\subset[-\pi,\pi]$，使得

$$\mu(I) > \frac{1}{n^{c+1}} \quad \text{and} \quad \sup_{\theta\in I}|T'(\theta)| \leqslant n^{-h(c+1)}.$$

根据图兰引理，我们有

$$\sup_{\theta\in[-\pi,\pi]}|T'(\theta)| \leqslant \left(\frac{C}{\mu(I)}\right)^{h-1} n^{-h(c+1)} \leqslant C^{h-1} n^{-(c+1)}.$$

另一方面，存在一个普适正数常数 C_1 使得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|T'(\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\sum_{l=1}^{h}r^{k_l}k_l\sin(k_l\theta)\overline{\xi}_{k_l}\right)^2\mathrm{d}\mu(\theta)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{l_1=1}^{h}\sum_{l_2=1}^{h}k_{l_1}k_{l_2}r^{k_{l_1}+k_{l_2}}\overline{\xi}_{k_{l_1}}\overline{\xi}_{k_{l_2}}\sin(k_{l_1}\theta)\sin(k_{l_2}\theta)\right)\mathrm{d}\mu(\theta)\\ &= \sum_{l=1}^{h}k_l^2r^{2k_l}(\overline{\xi}_{k_l})^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(k_l\theta)\mathrm{d}\mu(\theta)\\ &\geqslant \frac{C_1}{2}\sum_{l=1}^{h}(\overline{\xi}_{k_l})^2 \geqslant \frac{C_1}{2}\max_l\left\{(\overline{\xi}_{k_l})^2\right\} \geqslant \frac{C_1}{2}n^{-2},\end{aligned}$$

这意味着，如果 $c>1$，不等式 $\left[C^{h-1}n^{-(c+1)}\right]^2 \geqslant \frac{C_1}{2}n^{-2}$ 并非对所有充分大的 n 都成立，因为 $h=10$。因此，对所有充分大的 n，我们有

$$\mu\left(\cup_{I\in\mathcal{B}}I\right) \leqslant \frac{2n}{n^{c+1}} = \frac{2}{n^c}$$

其中 $c>1$。

最后，我们利用上述观察结果和分部积分，

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi}e^{itT(\theta)}\mathrm{d}\mu(\theta)\right| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathbb{1}_{\cup_{I\in\mathcal{B}}I}(\theta)+\mathbb{1}_{\cup_{I\in\mathcal{G}}I}(\theta)\right)e^{itT(\theta)}\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\\ &\leqslant \frac{2}{n^c}+\sum_{I\in\mathcal{G}}\left|\int_I e^{itT(\theta)}\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\\ &\leqslant \frac{2}{n^c}+\frac{2n\cdot n^{h(c+1)}}{|t|}+\sum_{I\in\mathcal{G}}\frac{1}{|t|}\left|\int_I\frac{T''(\theta)}{(T'(\theta))^2}\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\\ &\leqslant \frac{2}{n^c}+\frac{2n\cdot n^{h(c+1)}}{|t|}+\frac{2n}{|t|}\left|\int_I\frac{T''(\theta)}{(T'(\theta))^2}\mathrm{d}\mu(\theta)\right|\\ &\leqslant \frac{2}{n^c}+\frac{2n\cdot n^{h(c+1)}}{|t|}+\frac{2n\cdot n^{2h(c+1)}}{|t|}\int_I|T''(\theta)|\,\mathrm{d}\mu(\theta)\\ &\leqslant \frac{2}{n^c}+\frac{2n\cdot n^{h(c+1)}}{|t|}+\frac{20n\cdot n^{2h(c+1)+2}}{|t|}\sum_{l=1}^{10}|\overline{\xi}_l|.\end{aligned}$$

现在，对上述表达式取期望，我们发现存在一个正常数 C_2，它取决于 ξ_0 的分布，使得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\overline{\xi}_{k_{1:10}}}\left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\sum_{l=1}^{10} a_{k_l}(\theta)\overline{\xi}_{k_l}}\mathrm{d}\mu(\theta)\right] \\
&\quad\leqslant \frac{C^{10}}{n^5}+\frac{4}{n^c}+\frac{4n\cdot n^{h(c+1)}}{|t|}+\frac{40n\cdot n^{2h(c+1)+2}}{|t|} \\
&\quad\leqslant \frac{C^{10}}{n^5}+\frac{4}{n^c}+\frac{4n^{h(c+1)+1}}{|t|}+\frac{40n^{2h(c+1)+3}}{|t|} \\
&\quad\leqslant C_2\left(\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^c}+\frac{n^{2h(c+1)+3}}{|t|}\right).
\end{aligned}$$

其中 $c>1$。因此，存在一个正常数 C_3，它取决于 ξ_0 的分布，使得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}_{\overline{\xi_k}}\left[\cos(r^k\cos(k\theta)t\overline{\xi}_k)\right]\right)^{10}\mathrm{d}\mu(\theta) \\
&\quad=\frac{1}{2^{10}}\sum_{k_1,\ldots,k_{10}=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{E}_{\overline{\xi}_{k_{1:10}}}\left[e^{it\sum_{l=1}^{10}a_{k_l}(\theta)\overline{\xi}_{k_l}}\right]\mathrm{d}\mu(\theta) \\
&\quad\leqslant 1+C_2n^{10}\left(\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^c}+\frac{n^{2h(c+1)+3}}{|t|}\right) \\
&\quad\leqslant C_3n^{10}\left(\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^c}+\frac{n^{2h(c+1)+3}}{|t|}\right).
\end{aligned}$$

根据马尔可夫不等式，我们有：存在一个取决于 ξ_0 的分布的正常数 C_4，使得

$$\begin{aligned}
\mu(\Lambda_2(t,n)) &\leqslant \frac{2^{10}}{(1-p)^{10}n^{10}}\left[C_3n^{10}\left(\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^c}+\frac{n^{2h(c+1)+3}}{|t|}\right)\right] \\
&\leqslant C_4\left(\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^c}+\frac{n^{2h(c+1)+3}}{|t|}\right).
\end{aligned}$$

由表达式 5.3 和前述结论，对于 $a<1$，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\mathbb{P}\left(\left|G_n(re^{i\theta})\right|\leqslant a\right)\mathrm{d}\mu(\theta) &\leqslant 2e^{-(1-p)n/4}+a\int_{-a^{-1}}^{a^{-1}}\mu(\Lambda_2(t,n))\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2e^{-(1-p)n/4}+2a\int_{0}^{a^{-1}}\mu(\Lambda_2(t,n))\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2e^{-(1-p)n/4}+2a+2a\int_{1}^{a^{-1}}\mu(\Lambda_2(t,n))\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2e^{-(1-p)n/4}+2a+2C_4\left(\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^c}+n^{2hc+6}a\log(a^{-1})\right) \\
&\leqslant C_5\left(\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^c}+n^{2hc+6}a\log(a^{-1})\right),
\end{aligned}$$

对于某个正常数 C_5，其取决于 ξ_0 的分布。

□

参考文献

1. Lars V. Ahlfors，《复分析》，第3版，McGraw–Hill，1979。2. P. Amodio 和 L. Brugnano，托普利茨带状矩阵的条件性，《数学与计算机建模》23（1996），第10期，29–42。3. Gerardo Barrera 和 Paulo Manrique-Mirón，随机循环矩阵条件数的渐近分布，《极值》25（2022），第4期，567–594。4.，Kac 多项式在单位圆周围的无零邻域，《匈牙利数学期刊》84（2022），第2期，159–176。5. A. T. Bharucha-Reid 和 M. Sambandham，《随机多项式：概率与数理统计》，《概率与数理统计专著和教材丛书》，Academic Press，2014。6. Eugene Bogomolny，随机托普利茨矩阵的谱统计，《物理评论E》102（2020），040101。7. Eugene Bogomolny 和 Olivier Giraud，结构化随机矩阵的统计性质，《物理评论E》103（2021），第4期，042213。8. Albrecht Böttcher 和 Sergei M Grudsky，带状托普利茨矩阵的谱性质，SIAM，2005。9. Albrecht Böttcher 和 Bernd Silbermann，《托普利茨算子分析》，施普林格，2006。10. Peter Bürgisser 和 Felipe Cucker，《条件：数值算法的几何》，《数学科学基础丛书》第349卷，施普林格·柏林·海德堡，2013。11. Raymond Hon-Fu Chan 和 Xiao-Qing Jin，《迭代托普利茨求解器导论》，SIAM，2007。12. Nicholas A. Cook、Hoi H. Nguyen、Oren Yakir 和 Ofer Zeitouni，Kac 多项式根模泊松极限的普适性，《国际数学研究通知》2023（2023），第8期，6648–6690。13. Herman H. Goldstine 和 约翰·冯·诺依曼，高阶矩阵的数值求逆。II，《美国数学会会刊》2（1951），第2期，188–202。14. Gene H. Golub 和 Charles F. Van Loan，《矩阵计算》，第4版，约翰斯·霍普金斯大学出版社，2013。15. Ildar Ibragimov 和 Dmitry Zaporozhets，关于复平面中随机多项式零点的分布，《普罗霍罗夫与当代概率论》，《施普林格数学与统计学论文集》第33卷，施普林格，2013，第303–323页。16. Galyna V Livshyts、Konstantin Tikhomirov 和 Roman Vershynin，非齐次方随机矩阵的最小奇异值，《概率年刊》49（2021），第3期，1286–1309。17. Paulo Manrique-Mirón，随机托普利茨矩阵：高度随机依赖下的条件数，《随机矩阵：理论与应用》11（2022），第03期，2250027。18. Marcus Michelen 和 Julian Sahasrabudhe，随机多项式：最接近单位圆的根，arXiv:2010.10869，2020。19. F. L. Nazarov，指数多项式的局部估计及其在不确定性原理型不等式中的应用，《圣彼得堡数学杂志》5（1994），第4期，663–717，译自：《代数与分析》5（1993），第4期，3–66。20. Michael K Ng，《托普利茨系统的迭代法》，《数值数学与科学》，2004。21. Alexei Onatski 和 Vladislav Kargin，大型随机矩形托普利茨矩阵与循环矩阵的最小奇异值，《电子概率期刊》31（2026），论文编号1462。22. Victor Y Pan、John Svadlenka 和 Liang Zhao，随机循环矩阵、托普利茨矩阵及其逆矩阵范数的估计，《线性代数及其应用》468（2015），197–210。23. Mark Rudelson 和 Roman Vershynin，随机矩阵的非渐近理论：极端奇异值，《2010年国际数学家大会论文集》（ICM 2010）（4卷本）第一卷：全体会议报告与典礼；第二至四卷：特邀报告，World Scientific，2010，第1576–1602页。24. 斯蒂芬·斯梅尔，关于分析算法的效率，《美国数学会通报》13（1985），第2期，87–121。25. Chris Smyth，代数数的马勒测度：综述，arXiv预印本 math/0701397（2007）。26. 陶哲轩和 Van Vu，《加性组合学》，剑桥大学出版社，剑桥，2006。27. Henryk Woźniakowski，求解非线性方程的数值稳定性，《数值数学》27（1976），第4期，373–390。

28. Oren Yakir, 随机 *Littlewood* 多项式的根约有一半位于单位圆内, 斯洛伐克数学学会。Studia Mathematica **261**(2021), 第 2 期，227–240。

https://orcid.org/0000-0002-4908-5514电子邮箱: pmanriquem@ipn.mx