arXiv:2602.12623v1 [math.CO] 13 Feb 2026

Plethysm与轨道调和

HAI ZHU

Abstract. 令 $\Pi_{(b^a)}$ 表示由 $[ab]$ 个大小为 b的块组成的无序集合划分的轨迹。我们将 $[n]$ 的无序集合划分嵌入仿射空间 $\mathbb{C}^{\binom{[n]}{2}}$，其坐标环为 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$。接着，我们对 $\Pi_{(2^a)}$ 和 $\Pi_{(a^2)}$ 应用轨道调和分析，得到分次 $\mathfrak{S}_{2a}$-模，其分次特征公式分别按照 λ_1细化了 $h_a[h_2]$ 和 $h_2[h_a]$ 的舒尔展开。我们进一步将这种 λ_1-分离现象推广到 $\mathbb{C}^{\binom{[n]}{2}}$ 的商，其中 n 为奇数。结合$\Pi_{(b^a)}$ $\Pi_{(a^b)}$与轨道调和分析，我们提出一个与 Foulkes 猜想相关的猜想，并证明其特殊情形 $b = 2$。我们还将轨道调和分析应用于轨迹 $\Pi_{n,m}$ ，即不含大小大于 m的块的 $[n]$ 无序集合划分，从而得到一个分次 $\mathfrak{S}_n$-模 $R(\Pi_{n,m})$。我们确定了 $R(\Pi_{n,m})$ 关于任意单项式序的标准单项式基，以及其分次特征标公式。

1. Introduction

设$\mathbf{x}_N = (x_1, \ldots\ldots, x_N)$为一列变量，令 $\mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$为这些变量上的多项式环。给定一个有限点集 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{C}^N$，其消失理想$\mathbf{I}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$定义为

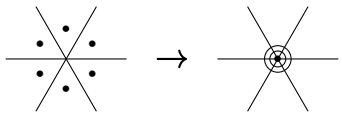
$$\mathbf{I}(\mathcal{Z}) \coloneqq \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}_N] \,:\, f(\mathbf{z}) = 0 \text{ for all } \mathbf{z} \in \mathcal{Z}\}.$$

轨道调和方法将$\mathbf{I}(\mathcal{Z})$关联到一个齐次理想 $\mathbf{grI}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$ ，并构造一个分次商环 $R(\mathcal{Z}) \coloneqq \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]/\mathbf{grI}(\mathcal{Z})$。存在一串向量空间同一关系

$$\mathbb{C}[\mathcal{Z}] \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]/\mathbf{I}(\mathcal{Z}) \cong R(\mathcal{Z}). \tag{1.1}$$

若 $\mathcal{Z}$ 在矩阵群 $G \subseteq \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$的作用下保持不变，则链（1.1）由$G$-模同构组成。 $\mathbb{C}[\mathcal{Z}]$ 是一个非分次的 $\mathfrak{S}_n$-模，而 $R(\mathcal{Z})$是一个分次的 $\mathfrak{S}_n$-模，它对 $\mathbb{C}[\mathcal{Z}]$进行了细化。这种分次结构由 $\mathcal{Z}$的组合学所支配。

从几何角度看，轨道调和方法是从有限点集 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{C}^N$到一个支撑在原点、重数为 $|\mathcal{Z}|$的概形的线性变形。例如，令 $\mathfrak{S}_3$ 通过置换分量作用于 $\mathbb{C}^3$ 。一般 $\mathfrak{S}_3$-轨道 $\mathcal{Z}$ 的轨道调和变形如下图所示。（$\mathcal{Z}$ 包含于一个超平面中，且 $\mathfrak{S}_3$的作用由下方直线上的反射生成。）



轨道调和理论应用于多个领域，例如上同调环的表示 [2], 麦克唐纳理论 [3, 4], 循环筛法 [9], 唐纳森–托马斯理论 [11], 和埃尔哈特理论 [12]。

Rhoades [13] 开创了将轨道调和方法应用于矩阵轨迹的先河。他考察了置换矩阵轨迹 $\mathfrak{S}_n \subseteq \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$，证明其$R(\mathfrak{S}_n)$的分次结构由 Schensted对应的 Viennot阴影线化身以及由 Specht 模 V^λ产生的首行长度 λ_1 所决定。他的工作在 [7, 5, 10, 15]中推广到了其他矩阵轨迹。有趣的是，Liu、Ma、Rhoades 和 Zhu [6] 发现，Rhoades观察到的 $R(\mathfrak{S}_n)$的“λ_1-决定分次结构”性质，在完美匹配轨迹中同样成立

Date: 2026年2月16日。

$\mathcal{PM}_n \subseteq \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$。具体而言，对于偶整数 n， $\mathcal{PM}_n$ 由所有与无不动点对合相对应的对称置换矩阵组成，而 $R(\mathcal{PM}_n)$的分次 $\mathfrak{S}_n$-模特征按照由舒尔函数 s_λ产生的 λ_1 细化复合运算 $h_{n/2}[h_2]$ 的舒尔展开。我们将这一轨道调和构造推广到复合运算 $h_2[h_{n/2}]$，得到一个分次 $\mathfrak{S}_n$-模，它同样按照 λ_1 细化 $h_2[h_{n/2}]$ 的舒尔展开。此外，我们将环结构推广到奇整数 n，得到两个族的分次 $\mathfrak{S}_n$-模，其分次特征也由 λ_1决定。

与一般的矩阵轨迹不同，我们只需要严格上三角部分。因此，我们关注仿射空间 $\mathbb{C}^{\binom{[n]}{2}}$，其坐标环为 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$。我们将 $[n]$ 的所有无序集合划分嵌入到 $\mathbb{C}^{\binom{[n]}{2}}$ 中。对于 $\mu \vdash n$，令 Π_μ 为 $[n]$ 的无序集合划分的轨迹，其块大小与 μ 相符。令 $\Pi_{n,m}$ 为 $[n]$ 的无序集合划分的轨迹，其块大小不大于 m。这两个轨迹在 $\mathfrak{S}_n$ 作用下均保持不变，因此 $R(\Pi_\mu)$ 和 $R(\Pi_{n,m})$ 是分次 $\mathfrak{S}_n$-模。特别地，$\mathrm{Frob}(R(\Pi_{(b^a)})) = h_a[h_b]$，这给出了复合运算$h_a[h_b]$的分次细化。因此，轨道调和分析或许能帮助我们理解复合运算和 Foulkes 猜想。我们提出了猜想 3.2，它比 Foulkes 猜想更强，并且我们可以证明该猜想的一个特殊情形（见定理 3.4）。下面陈述我们的主要结果。

我们发现三个分次特征公式（见定理 3.3、3.5 和命题 3.29）：

$$\mathrm{grFrob}(R(\Pi_{(2^a)}); q) = \sum_{\substack{\lambda \vdash 2a \\ \lambda \text{ is even}}} q^{\frac{2a-\lambda_1}{2}} \cdot s_\lambda \tag{1.2}$$

$$\mathrm{grFrob}(R(\Pi_{(a^2)}); q) = \sum_{d=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} q^d \cdot s_{(2a-2d,2d)} \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Frob}(R(\Pi_{n,m})_d) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 \le m \\ \ell(\lambda) = n-d}} \prod_{i \ge 1} h_{m_i(\lambda)}[h_i] \tag{1.4}$$

其中 $m_i(\lambda)$ 是 i 在 λ 中的重数。请注意，公式 (1.2) 重述了 [6, 定理 4.4]。此外，我们分别扩展了 $R(\Pi_{(2^a)}) = \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right] \Big/ \mathbf{grI}(\Pi_{(2^a)})$ 和 $R(\Pi_{(a^2)}) = \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right] \Big/ \mathbf{grI}(\Pi_{(a^2)})$ 的商环结构，从而得到 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ I(n)$ 和 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ J(n)$，其中 n 可能为奇数。这两个新商的分次特征公式分别推广了公式 (1.2) 和 (1.3)，它们也由 λ_1 控制（见定理 3.14 和 3.15）：

$$\mathrm{grFrob}\left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ I(n); q\right) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ 2 \mid \lambda_i \text{ for } i > 1}} q^{\frac{n-\lambda_1}{2}} \cdot s_\lambda \tag{1.5}$$

$$\mathrm{grFrob}\left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ J(n); q\right) = \sum_{d=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} q^d \cdot s_{(n-2d,2d)}. \tag{1.6}$$

请注意，(1.6) 表明 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]_d \Big/ J(n)_d \cong V^{(n-2d,\ 2d)}$，这为理解 Specht 模 $V^{(n-2d,2d)}$ 提供了一种新模型。

对于 Gröbner 理论和环结构，我们求得了 $R(\Pi_{n,\ m})$ 关于任意单项式序的标准单项式基（见定理 3.27）。我们还给出了轨道调和环 $R(\Pi_{(2^a)})$ $R(\Pi_{(a^2)})$ $R(\Pi_{n,\ m})$ 的显式表示（即定义理想的简洁生成集）（见定理 3.3、命题 3.6 和推论 3.26）。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍关于 Gröbner 理论、轨道调和分析、对称函数和对称群

表示论的一些必要背景知识。第 3 节首先描述如何将无序集合划分嵌入到 $\mathbb{C}(\binom{[n]}{2})$ 中，以及相关的 $\mathfrak{S}_n$- 作用；随后在第 3.1 小节研究 $R(\Pi_{(2^a)})$ 和 $R(\Pi_{(a^2)})$，在第 3.2 节扩展它们的环结构和分次模结构，并在第 3.3 小节研究 $R(\Pi_{n,m})$。第 4 节将介绍未来方向和开放问题。

2. Background

2.1. Gr¨obner 理论。 设 $\mathbf{x}_N = (x_1, x_2, \dots x_N)$ 是一列变量 N，令 $\mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$ 为这些变量上的多项式环。在 $\mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$ 的单项式集合上定义的全序 $<$ 称为<穷>单项式序</穷>，如果

- $1 \leq m$ 对于每个单项式 $m \in \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$
- 对于单项式 m, m_1, m_2，若 $m_1 < m_2$，则有 $mm_1 < mm_2$。

设 $<$ 为单项式序。对于任意非零多项式 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$， f 的<穷>初始单项式 </穷>$\mathsf{in}_< f$是相对于 $<$而言， f 中最大的单项式。给定理想 $I \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$，将其<穷>初始理想 </穷>定义为

$$\mathrm{in}_< I = \langle \mathrm{in}_< f : f \in I, f \neq 0 \rangle.$$

若单项式 $m \in \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$ 不是 $\mathsf{in}_< I$ 的元素，则称其为 I 的标准单项式。众所周知， I 的所有标准单项式构成的集合可导出向量空间 $\mathbb{C}[\mathbf{x}_N]/I$ 的一组基。这称为标准单项式基。有关格罗布纳理论的更多细节，请参阅 [1]。

2.2. 轨道调和分析。 设 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{C}^N$ 是一个有限点集。设 $\mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$ 为仿射空间 $\mathbb{C}^N$ 的坐标环，其中 $\mathbf{x}_N = (x_1, \dots, x_N)$ 是所有变量构成的序列。 $\mathcal{Z}$ 的消失理想$\mathbf{I}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$ 定义为

$$\mathbf{I}(\mathcal{Z}) \coloneqq \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}_N] \,:\, f(\mathbf{z}) = 0 \text{ for all } \mathbf{z} \in \mathcal{Z}\}.$$

设 $\mathbb{C}[\mathcal{Z}]$ 是由所有函数 $f\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{C}$ 构成的向量空间。多元拉格朗日插值给出向量空间同构

$$\mathbb{C}[\mathcal{Z}] \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]/\mathbf{I}(\mathcal{Z}). \tag{2.1}$$

对于任意非零多项式 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$，记作 $f = f_0 + \cdots + f_d$，其中 f_k 对 $1 \leq k \leq d$ 齐次，且 $f_d \neq 0$。将 f 的最高次齐次部分 f_d 记为 $\tau(f) \coloneqq f_d$。对于任意理想 $I \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]$， I 的相关分次理想 $\mathrm{gr}I$ 是齐次理想

$$\mathrm{gr}I \coloneqq \langle \tau(f) \,:\, 0 \neq f \in I \rangle.$$

注记 2.1。 给定生成集 $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$，包含关系 $\langle \tau(g_1) \dots, \tau(g_m) \rangle \subseteq \mathrm{gr}I$通常是严格的。然而，如果 $g_1, \dots, g_m$ 构成 I 的 *Gr¨obner* 基，则等式成立。一般而言，为$\mathrm{gr}I$ 求一个简洁的生成集很困难。

轨道调和方法给出一个分次环 $R(\mathcal{Z}) \coloneqq \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]/\mathbf{grI}(\mathcal{Z})$。轨道调和分析中的一个标准结果将向量空间同构 (2.1) 扩展为一条向量空间同构链

$$\mathbb{C}[\mathcal{Z}] \cong \mathbb{C}[\mathbf{x}_N]/\mathbf{I}(\mathcal{Z}) \cong R(\mathcal{Z}). \tag{2.2}$$

如果 $\mathcal{Z}$ 在子群 $G \subseteq \mathsf{GL}(\mathbb{C}^N)$的作用下保持稳定，我们可以进一步将(2.2)视为一条 G-模同构链。有趣的是， $R(\mathcal{Z})$还具有分次 G-模这一附加结构，从而为 $\mathbb{C}[\mathcal{Z}]$提供了分次细化。

2.3. **组合学**。 对任意非负整数 n， n 的一个分拆 是非负整数的弱递减序列 λ

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m)$$

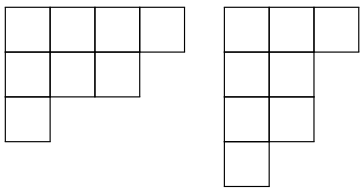
其中含有 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = n$。这里，我们称 n 的大小 为 λ，记作 $|\lambda| = n$ 或 $\lambda \vdash n$。一种记号上的约定是，允许在 λ后附加若干个零，从而得到如下恒等关系

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0).$$

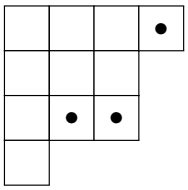
分量 λ_i 称为 λ的部分 。特别地，如果 λ 的所有部分都是偶数，我们就称 λ 为偶 。

[a]**注 2.2**。 重复部分构成的子序列 $b, b, \ldots, b$ 可以简写为 ~~b^a，例如~~ $(5,5,5,2,2,2,1) = (5^3, 2^3, 1)$。读者应注意不要将这一记号与乘方混淆。本文中我们绝不用 b^a 表示乘方。

给定一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$，其长度 $\ell(\lambda)$是满足 $\lambda_k \neq 0$的最大指标 k。我们总是将分拆 λ与其杨图等同，杨图是在第 i行左对齐放置 λ_i 个单元格的图形，其中对所有 $i \geq 1$均如此。将 λ的杨图转置后，得到 λ的共轭分拆λ' 。例如，下面展示了 $\lambda = (4,3,1) \vdash 8$ 及其共轭分拆 $\lambda' \vdash 8$ 的杨图。在此例中， $\ell(\lambda) = 3$ ， 且 $\ell(\lambda') = \lambda_1 = 4$。



若 λ/μ 是两个分拆 λ 和 μ ，且满足 $\mu \subseteq \lambda$，则称其为斜分拆。我们也将 λ/μ视为其杨图：从 λ中去掉 μ 的单元格后得到的图形。 λ/μ 的大小 $|\lambda/\mu|$ 由 $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$给出。特别地，如果 λ/μ 在每一列中至多有一个单元格，则称其为水平条带。例如，考虑内分拆 $\mu = (3<2 id='21'>,</2>3<2 id='23'>, </2>1<2 id='25'>, </2>1)$和外分拆$\lambda = (4<2 id='28'>,</2>3<2 id='30'>, </2>3<2 id='32'>, </2>1)$，则杨图 λ/μ 中的单元格以圆点 $\bullet$ 标出，如下所示。



由于 λ/μ 在每一列中至多有一个单元格，因此 λ/μ是水平条带。

2.4. **对称群表示论**。设 $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_n$ 为基域 $\mathbb{C}(q)$上、由无穷多个变量 $x_1, x_2, \ldots$构成的对称函数分次环。次数为 n的对称函数空间 Λ_n 有若干众所周知的、以 n的分拆为指标的 $\mathbb{C}(q)$-线性基：单项式基、完全齐次基、初等基、幂和基和舒尔基。其定义和性质见 [8] 。我们主要使用舒尔基、完全齐次基和幂和基，并分别用 h_d, p_d 表示 $h_{(d)}, p_{(d)}$。

如果一个对称函数 $F \in \Lambda$ 的舒尔展开 $F = \sum_\lambda c_\lambda(q) \cdot s_\lambda$ 具有非负系数 $c_\lambda(q) \in \mathbb{R}_{\geq 0}[q]$, 则称它为舒尔正。我们通过以下方式为 Λ 赋予一个偏序 $\leq$：

$$F \leq G \text{ if and only if } G - F \text{ is Schur-positive.}$$

我们还定义截断算子 $\{-\}_P$，其中 P是一个条件。对于 $F=\sum_\lambda c_\lambda(q)\cdot s_\lambda\in\Lambda$，我们定义 $\{F\}_P$ 如下：

$$\{F\}_P\coloneqq\sum_{\lambda\text{ satisfies }P}c_\lambda(q)\cdot s_\lambda.$$

我们将使用截断算子来限制分拆的第一行长度，例如

$$\{F\}_{\lambda_1\le a}=\sum_{\lambda_1\le a}c_\lambda(q)\cdot s_\lambda.$$

舒尔函数与完全齐次函数的乘法满足Pieri法则：对于任意分拆 μ 和任意整数 $a\ge 0$，有

$$s_\mu\cdot h_a=\sum_{\lambda/\mu}s_\lambda$$

对大小为 a的水平条带 λ/μ求和。

除了通常的乘法外，对称函数环 Λ 还具有一种称为复合运算的二元运算，记作 $(F,\ G)\mapsto F[G]$。对于 $G\in\Lambda$，有 $p_n[G]=G(x_1^n,\ x_2^n,\ \dots\dots)$。由于 $\{p_1,p_2,\dots\}$ 构成了 Λ的代数独立生成集，我们可以利用以下性质计算所有 $F,\ G\in\Lambda$ 的 $F[G]$

$$\begin{cases}(F_1+F_2)[G]=F_1[G]+F_2[G]\\(F_1\cdot F_2)[G]=F_1[G]\cdot F_2[G]\\c[G]=c\end{cases}$$

对于所有 $F_1,\ F_2,\ G\in\Lambda$ 以及 $c\in\mathbb{C}(q)$。更多详情请参阅 [8]。

考虑对称群 $\mathfrak{S}_n$。所有不可约的 $\mathfrak{S}_n$-模都与 n的所有分拆一一对应，称为*Specht* 模。对应于 $\lambda\vdash n$的 Specht 模记为 V^λ。给定具有唯一重数 $c_\lambda\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$的 $\mathfrak{S}_n$-模 $V\cong\bigoplus_{\lambda\vdash n}(V^\lambda)^{\oplus c_\lambda}$，我们利用其弗罗贝尼乌斯像 $\mathrm{Frob}(V)\in\Lambda$ 研究 $\mathfrak{S}_n$-模 V的结构，该像由下式给出

$$\mathrm{Frob}(V)\coloneqq\sum_{\lambda\vdash n}c_\lambda\cdot s_\lambda.$$

如果 $V=\bigoplus_{d=0}^m V_d$ 是 一个分次 $\mathfrak{S}_n$-模，我们将其分次弗罗贝尼乌斯像 $\mathrm{grFrob}(V;q)\in\Lambda$ 定义为

$$\mathrm{grFrob}(V;q)\coloneqq\sum_{d=0}^m q^d\cdot\mathrm{Frob}(V_d).$$

对于整数 $n,m\ge 0$，我们通过令 $\mathfrak{S}_n$作用于 $\{1,\dots,n\}$并令 $\mathfrak{S}_m$作用于 $\{n+1,\dots,n+m\}$，将 $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m$嵌入 $\mathfrak{S}_{n+m}$。因此，若 V是一个 $\mathfrak{S}_n$-模且 W是一个 $\mathfrak{S}_m$-模，则 $V\otimes W$自然是一个 $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m$-模，因此我们可以将诱导表示 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}}(V\otimes W)$视为一个 $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m$-模。$V$与 W的诱导积 定义为

$$V\circ W\coloneqq\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}}(V\otimes W).$$

诱导积与对称函数的乘法相容（参见例如 [8, 14]）：

$$\mathrm{Frob}(V\circ W)=\mathrm{Frob}(V)\cdot\mathrm{Frob}(W).$$

对于整 数 $n,\ m\ge 0$，*wreath*积 $\mathfrak{S}_n\wr\mathfrak{S}_m$是由b生成的 $\mathfrak{S}_{nm}$的子群 y:

- n重直积$(\mathfrak{S}_m)^n$，其中 $\mathfrak{S}_m$的第 i个副本作用在 $\{(i-1)m+1,\ (i-1)m+2,\ \dots\dots,\ im\}$ 上，对所有 $1\le i\le n$，以及
- 所有对换的乘积

$$((i-1)m+1,(j-1)m+1)((i-1)m+2,(j-1)m+2)\cdots(im,jm)$$

对于 $1\le i,\ j\le n$。

wreath积 $\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m$ 可以直观地理解如下：按英文阅读顺序将 1、2、.....、 nm 填入一个 $n \times m$ 网格中（以下图中 $n = 3$、 $m = 4$ 为例）。那么， $\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m$ 就是由这样一些置换生成的 $\mathfrak{S}_{nm}$ 子群：这些置换要么置换某一行中的元素，要么置换各行，但不改变每行内部元素的排列。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

设 V 是一个 $\mathfrak{S}_n$-模，且 W 是一个 $\mathfrak{S}_m$-模。$(\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m)$-模 $V \wr W$ 是向量空间 $V \otimes (W^{\otimes n})$，其上带有如下的 $(\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m)$-作用：

$$\begin{cases} (u_1, \dots, u_n) \cdot (v \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) \coloneqq v \otimes (u_1 \cdot w_1) \otimes \cdots \otimes (u_n \cdot w_n), & (u_1, \dots, u_n) \in (\mathfrak{S}_m)^n \\ g \cdot (v \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) \coloneqq (g \cdot v) \otimes w_{g^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes w_{g^{-1}(n)}, & g \in \mathfrak{S}_n. \end{cases}$$

wreath积与对称函数的复合运算相对应（见 [8]）：

$$\mathrm{Frob}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{nm}}(V \wr W)) = \mathrm{Frob}(V)[\mathrm{Frob}(W)].$$

对于任意分拆 $\lambda \vdash n$，令 Π_λ 为 $[n]$ 的无序集合划分所组成的集合，其块大小与 λ 相对应。也就是说，我们有

$$\Pi_\lambda \coloneqq \left\{ \{B_1, \dots, B_{\ell(\lambda)}\} : \bigsqcup_{i=1}^{\ell(\lambda)} B_i = [n] \text{ where } |B_i| = \lambda_i \text{ for } 1 \le i \le \ell(\lambda) \right\}.$$

复合运算可用于研究关于 Π_λ 的 $\mathfrak{S}_n$-表示理论。

引理 2.3. 令 $\mathfrak{S}_{nm}$ 通过置换 $[nm]$ 的元素作用于 $\Pi_{(m^n)}$，从而赋予 $\mathbb{C}[\Pi_{(m^n)}]$ 一个 $\mathfrak{S}_{nm}$-模结构。那么我们有

$$\mathrm{Frob}(\mathbb{C}[\Pi_{(m^n)}]) = h_n[h_m].$$

证明。 由于 $\Pi_{(m^n)}$ 的稳定子为 $\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m \subseteq \mathfrak{S}_{nm}$，我们有一个 $\mathfrak{S}_{nm}$-等变双射

$$\Pi_{(m^n)} \overset{1:1}{\to} \mathfrak{S}_{nm}/(\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m).$$

于是我们得到一串 $\mathfrak{S}_{nm}$-模同构

$$\mathbb{C}[\Pi_{(m^n)}] \cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{nm}/(\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m)] \cong \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{nm}} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m} \cong \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{nm}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n} \wr \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_m}).$$

由此可得

$$\mathrm{Frob}(\mathbb{C}[\Pi_{(m^n)}]) = \mathrm{Frob}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{nm}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n} \wr \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_m})) = \mathrm{Frob}(\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_n})[\mathrm{Frob}(\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_m})] = h_n[h_m].$$

□

为 $h_a[h_b]$ 的舒尔展开找到一个正项公式是极其困难的开放问题。不过，对于特殊情形 $a = 2$ 或 $b = 2$， $h_a[h_b]$ 有简洁的舒尔展开：

$$h_a[h_2] = \sum_{\substack{\lambda \vdash 2a \\ \lambda \text{ is even}}} s_\lambda \tag{2.3}$$

$$h_2[h_b] = \sum_{d=0}^{\lfloor b/2 \rfloor} s_{(2b-2d, 2d)}. \tag{2.4}$$

我们需要一个标准结果来控制分拆第一行的长度。对于 $1 \le j \le n$，我们通过令 $\mathfrak{S}_j$ 置换 1、2、.. . 、 $j \in [n]$ 来使用嵌入 $\mathfrak{S}_j \subseteq \mathfrak{S}_n$。令 $\eta_j \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_j] \subseteq \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ 为对称化算子

$$\eta_j \coloneqq \sum_{w \in \mathfrak{S}_j} w.$$

引理 2.4。 设 $1 \le j \le n$。对于一个分拆 $\lambda \vdash n$，当且仅当 $\lambda_1 \ge j$ 时，我们有 $\eta_j \cdot V^\lambda \neq 0$。

证明。 注意，对于所有 $w \in \mathfrak{S}_j\}$， $\eta_j \cdot V^\lambda = (V^\lambda)^{\mathfrak{S}_j} = \{v \in V^\lambda : \ w \cdot v = v$。因此，我们有

$$\eta_j \cdot V^\lambda \neq 0 \text{ if and only if } (\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_j}(V^\lambda))^{\mathfrak{S}_j} \neq 0.$$

因此，当且仅当 $\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_j}$ 在 $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_j}(V^\lambda)$ 中的重数为正时， $\eta_j \cdot V^\lambda \neq 0$。分支法则（例如参见 [8, 14]）表明

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}}(V^\lambda) = \bigoplus_\mu V^\mu$$

对所有通过从 λ 中移去一个单元格而得到的分拆 $\mu \vdash n-1$ 求和。反复应用这一法则，我们推得，当且仅当 $\lambda_1 \ge j$ 时，$\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_j} = V^{(j)}$ 在 $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_j}(V^\lambda)$ 中出现且重数为正。□

3. Plethysm and orbit harmonics

给定 $[n]$ 的一个无序集合划分 $\pi = \{B_1, \dots, B_\ell\}$（这意味着，对于 $1 \le i \le \ell$ 和 $\bigsqcup_{i=1}^{\ell} B_i = [n]$， $B_i \neq \varnothing$），我们将 π 与由下式给出的点 $\mathbf{z} = (z_{\{i,j\}})_{1 \le i < j \le n} \in \mathbb{C}^{\binom{[n]}{2}}$ 等同

$$z_{\{i,j\}} = \begin{cases} 1, & \text{if } \{i,j\} \subseteq B_k \text{ for some } 1 \le k \le \ell \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}.$$

直观地，我们将 π 视为这样一个图：把 π中同一块里的每一对顶点连接起来；然后令 $\mathbf{z}$ 为该图邻接矩阵的一半，该图是若干ℓ 完全子图的不相交并。因此，我们可以将由 $[n]$ 的若干无序集合划分组成的每个轨迹 $\mathcal{Z}$ 嵌入到 $\mathbb{C}^{\binom{[n]}{2}}$ 中，并对其应用轨道调和分析。

令 $\mathbf{x}^{\binom{[n]}{2}}$ 为变量数组 $(x_{\{i,j\}})_{1 \le i < j \le n}$，其指标由 $\binom{[n]}{2}$给出。令 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}^{\binom{[n]}{2}}\right]$ 为这些变量上的多项式环。若进一步假设 $\mathcal{Z}$ 在置换 $[n]$ 的 $\mathfrak{S}_n$-作用下稳定（例如$\mathcal{Z} = \Pi_\lambda$），则有一个 $\mathfrak{S}_n$-模同一 $\mathbb{C}[\mathcal{Z}] \cong R(\mathcal{Z})$（见 (2.2)），其中 $\mathfrak{S}_n$-作用在$R(\mathcal{Z}) = \mathbb{C}\left[\mathbf{x}^{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ \mathbf{grI}(\mathcal{Z})$ 上由代数方式生成，生成元为 $w \cdot x_{\{i,j\}} = x_{w(i),w(j)}$。

注 3.1。 在我们的设定中，指标是含有2 个元素的无序集合。因此，我们有 $x_{\{i,j\}} = x_{\{j,i\}}$。

如引理 2.3 所述，复合运算与无序集合划分密切相关。因此

$$\mathrm{Frob}(R(\Pi_{(b^a)})) = h_a[h_b].$$

因此，轨道调和方法为研究 Foulkes 猜想提供了一种潜在的方法。具体而言，我们给出以下更强的猜想。

猜想 3.2。 对于正整数 $a \ge b$，我们有

$$\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(b^a)}) \subseteq \mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(a^b)}).$$

事实上，一旦猜想 3.2 成立，我们就能得到一个 $\mathfrak{S}_n$-模满射 $R(\Pi_{(b^a)}) \twoheadrightarrow R(\Pi_{(a^b)})$，进而得到 $h_a[h_b] = \mathrm{Frob}(R(\Pi_{(b^a)})) \ge \mathrm{Frob}(R(\Pi_{(a^b)})) = h_b[h_a]$。目前，我们只能解决猜想 3.2 的特殊情形 $b = 2$。详情请见第3.1小节。

3.1. 通过轨道调和分析理解 $h_a[h_2]$ 和 $h_2[h_a]$。 对于 $h_a[h_2]$，以下结果由 [6] 推出，并给出了 $h_a[h_2]$ 的分次细化以及 $\mathbf{grI}(\Pi_{(2^a)})$ 的一个生成集。

定理 3.3. 对于所有正整数 a，我们有

$$\mathrm{grFrob}(R(\Pi_{(2^a)});q)=\sum_{\substack{\lambda\vdash 2a\\ \lambda\ is\ even}} q^{\frac{2a-\lambda_1}{2}}\cdot s_\lambda$$

并且 $R(\Pi_{(2^a)})$ 的定义理想 $\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)})$ 由以下元素生成

- 所有乘积 $x_S\cdot x_T$，其中 S、$T\in\binom{[2a]}{2}$ 满足 $S\cap T\neq\varnothing$（S 可等于 T），并且
- 所有和 $\sum_{\substack{j\in[2a]\\ j\neq i}} x_{\{i,j\}}$，其中 $i\in[2a]$。

证明。设由上述两个生成元族生成的理想为 $I_a\subseteq\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right]$。我们首先证明

$$I_a\subseteq \mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)}). \tag{3.1}$$

对于第一类生成元 $x_S\cdot x_T$和 $S\cap T\neq\varnothing$，若 $S\neq T$，则有 $x_S\cdot x_T\in\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)})$，因为同一无序集合划分中的任意两个不同块互不相交。若 $S=T$，则有 $x_S\cdot x_T-x_S=x_S\cdot(x_S-1)\in\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)})$，因为任意 $\mathbf{z}\in\Pi_{(2^a)}$ 的所有分量都取值于 $\{0,1\}$。无论 S 是否等于 T，都有 $x_S\cdot x_T\in\mathbf{grI}(\Pi_{(2^a)})$。对于第二类生成元 $\sum_{\substack{j\in[2a]\\ j\neq i}} x_{\{i,j\}}$，由对任意 $\pi\in\Pi_{(2^a)}$，每个 $i\in[2a]$ 恰好属于 π 的一个块这一事实，可推出 $\sum_{\substack{j\in[2a]\\ j\neq i}} x_{\{i,j\}}-1\in\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)})$。因此 $\sum_{\substack{j\in[2a]\\ j\neq i}} x_{\{i,j\}}\in\mathbf{grI}(\Pi_{(2^a)})$。由此可知，包含关系 (3.1) 成立。

(3.1) 的一个直接推论是自然的分次 $\mathfrak{S}_{2a}$-模满射 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right]\Big/I_a\twoheadrightarrow R(\Pi_{(2^a)})$，这表明

$$\mathrm{grFrob}\left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right]\Big/I_a;q\right)\geq\mathrm{grFrob}(R(\Pi_{(2^a)});q). \tag{3.2}$$

我们的目标是使这个不等式成为等式，从而使包含关系 (3.1) 成为等式。

设 $\mathbf{x}_{n\times n}$ 为变量矩阵 $(x_{i,\ j})_{1\leq i,\ j\leq n}$（其中 $x_{i,\ j}$ 由有序对 $(i,\ j)$ 编号，该有序对不同于 $x_{\{i,j\}}$）。令 $\mathcal{PM}_{2a}\subseteq\mathrm{Mat}^{(2a)\times(2a)}(\mathbb{C})$ 表示所有对应于无不动点对合的置换矩阵的轨迹。根据 [6, 命题 4.5]，，我们有

$$R(\mathcal{PM}_{2a})=\mathbb{C}[\mathbf{x}_{(2a)\times(2a)}]/J_a \tag{3.3}$$

其中 $J_a\subseteq\mathbb{C}[\mathbf{x}_{(2a)\times(2a)}]$ 是由以下元素生成的理想

- 所有乘积 $x_{i,\ j}\cdot x_{i,\ j'}$ 以及 $x_{i,\ j}\cdot x_{i',\ j}$ 对于 $i,\ i',\ j,\ j'\in[2a]$,
- 所有和式 $\sum_{j=1}^{2a}x_{i,j}$ 对于 $i\in[2a]$,
- 所有和式 $\sum_{i=1}^{2a}x_{i,j}$ 对于 $j\in[2a]$,
- 所有差 $x_{i,j}-x_{j,i}$ 对于 $i,j\in[2a]$, 以及
- 所有对角变量 $x_{i,i}$ 对于 $i\in[2a]$.

显然，$\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right]\Big/I_a\cong\mathbb{C}[\mathbf{x}_{(2a)\times(2a)}]/J_a$ 作为 $\mathfrak{S}_{2a}$-模，这是因为理想 J_a 消去了对角变量 $x_{i,\ i}$ 并将 $x_{i,\ j}$ 与$x_{j,\ i}$相等。因此，表示式 (3.3) 表明

$$\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right]\Big/I_a\cong R(\mathcal{PM}_{2a})$$

从而

$$\operatorname{grFrob}\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/I_a;q\Big)=\operatorname{grFrob}(R(\mathcal{PM}_{2a});q)=\sum_{\substack{\lambda\vdash 2a\\ \lambda \text{ is even}}} q^{\frac{2a-\lambda_1}{2}}\cdot s_\lambda \tag{3.4}$$

其中，最后一个等号由 [6, 定理 4.4]得出。现在我们将 $q=1$ 代入方程 (3.4)，得到

$$\operatorname{grFrob}\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/I_a;1\Big)=\sum_{\substack{\lambda\vdash 2a\\ \lambda \text{ is even}}} s_\lambda = h_a[h_2]=\operatorname{Frob}(R(\Pi_{(2^a)}))=\operatorname{grFrob}(R(\Pi_{(2^a)});1),$$

这迫使不等式 (3.2) 成为等式，进而迫使包含关系 (3.1) 成为等式。因此，结合等式 $\mathbf{grI}(\Pi_{(2^a)})=I_a$ 和方程 (3.4)，即可完成证明。□

借助定理 3.3 中的生成集，我们能够分析猜想 3.2 的特殊情形 $b=2$。

定理 3.4. 对于所有正整数 a，有

$$\operatorname{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)})\subseteq \operatorname{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)}).$$

证明。只需证明 $\mathbf{grI}(\Pi_{(a^2)})$ 包含定理 3.3 中提到的两个生成元族：

- 所有和式 $\sum_{\substack{j\in[2a]\\ j\neq i}} x_{\{i,j\}}$ 对于 $i\in[2a]$，以及
- 所有乘积 $x_S\cdot x_T$对于 $S,\ T\in\binom{[2a]}{2}$ 其中 $S\cap T\neq\varnothing$（S可能等于 T）。

对于第一类生成元 $\sum_{j\in[2a]} x_{\{i,j\}}$，我们注意到，对于任意$\pi\in\Pi_{(a^2)}$，整数 $ij\neq i$恰好属于 π 的一个块，并且 π 的每个块总共有 a个元素。这一观察表明

$$\sum_{\substack{j\in[2a]\\ j\neq i}} x_{\{i,j\}}-(a-1)\in\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)})$$

因此

$$\sum_{\substack{j\in[2a]\\ j\neq i}} x_{\{i,j\}}\in\operatorname{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)}).$$

对于第二类生成元 $x_S\cdot x_T$，其中 $S\cap T\neq\varnothing$，我们根据 S是否等于 T分两种情况讨论。若 $S=T$，轨迹 $\Pi_{(a^2)}$中的所有点都是 0-1 向量这一事实表明

$$x_S\cdot x_T-x_S=x_S\cdot(x_S-1)\in\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)}),$$

从而得到

$$x_S\cdot x_T\in\operatorname{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)}).$$

若 $S\neq T$，我们记 $S=\{i,j\}$ 和 $T=\{i,k\}$，其中 $i,\ j,\ k\in[2a]$两两不同。考虑

$$f\coloneqq(x_S-x_T)^2-(1-x_{\{j,k\}})=g-h$$

其中 $g=(x_S-x_T)^2,\ h=1-x_{\{j,k\}}$。我们断言 $f\in\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)})$。事实上，对于任意无序集合划分 $\pi\in\Pi_{(a^2)}$，我们只需关注 $j,\ k$ 是否属于 π 的同一个块。注意到

$$g(\pi)=\begin{cases}0^2=0, & \text{if } j,k \text{ belongs to the same block of } \pi\\ (\pm1)^2=1, & \text{otherwise}\end{cases}$$

并且

$$h(\pi)=\begin{cases}1-1=0, & \text{if } j,k \text{ belongs to the same block of } \pi\\ 1-0=1, & \text{otherwise}\end{cases}.$$

因此，对于任意 $\pi\in\Pi_{(a^2)}$，我们有 $f(\pi)=g(\pi)-h(\pi)=0$，这表明 $f\in\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)})$。由此，我们推得 $(x_S-x_T)^2\in\mathbf{grI}(\Pi_{(a^2)})$。如前所证，我们有 $x_S^2,x_T^2\in\mathbf{grI}(\Pi_{(a^2)})$，由此可得 $x_S\cdot x_T=\frac{x_S^2+x_T^2-(x_S-x_T)^2}{2}\in\mathbf{grI}(\Pi_{(a^2)})$，证明完毕。 □

由于定理 3.4 解决了猜想 3.2 的特殊情形 $b=2$，因此它为 Foulkes 猜想的特殊情形 $h_a[h_2]\geq h_2[h_a]$ 提供了另一种证明。此外，定理 3.4 给出了 $R(\Pi_{(a^2)})$ 的分次$\mathfrak{S}_{2a}$-模结构，从而得到如下 $h_2[h_a]$ 的分次细化。

定理 3.5. 对于 $a\geq 1$，我们有

$$\mathrm{grFrob}(R(\Pi_{(a^2)});q)=\sum_{d=0}^{\lfloor a/2\rfloor}q^d\cdot s_{(2a-2d,2d)}.$$

证明. 定理 3.4 表明存在一个分次 $\mathfrak{S}_{2a}$ 满射

$$R(\Pi_{(2^a)})\twoheadrightarrow R(\Pi_{(a^2)}).$$

此外，定理 3.3 表明，对于 $d\geq 0$ 中出现的任意 Specht 模 V^λ，若它出现在 $R(\Pi_{(2^a)})_d$中，则满足 $\lambda_1=2a-2d$。因此，上述分次满射迫使 $R(\Pi_{(a^2)})_d$ 中出现的每个 Specht 模V^λ 也满足 $\lambda_1=2a-2d$。由此可得

$$\mathrm{Frob}(R(\Pi_{(a^2)})_d)=\{\mathrm{Frob}(R(\Pi_{(a^2)}))\}_{\lambda_1=2a-2d}=\{h_2[h_a]\}_{\lambda_1=2a-2d}=\begin{cases}s_{(2a-2d,2d)}, & \text{if } 2a-2d\geq 2d\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

最后一个等号由等式 (2.4) 得出，因此证明完毕。 □

有趣的是，定理 3.5 意味着 $R(\Pi_{(a^2)})$ 的每个分次直和项都是不可约的 $\mathfrak{S}_{2a}$-模。换言之，对于 $0\leq d\leq\lfloor a/2\rfloor$，分次直和项 $R(\Pi_{(a^2)})_d$ 为 Specht 模 $V_{(2a-2d,2d)}$ 提供了另一种模型，它将 $V^{(2a-2d,2d)}$ 实现为 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right]_d$ 的一个商。为了更好地理解这个商，我们为定义理想 $\mathbf{grI}(\Pi_{(a^2)})$ 找到一个简洁的生成集。

命题 3.6. 对于 $a\geq 1$，$R(\Pi_{(a^2)})$ 的定义理想 $\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)})$ 由以下元素生成：

- 所有乘积 $x_S\cdot x_T$，其中 $S,\ T\in\binom{[2a]}{2}$，且 $S\cap T\neq\varnothing$（S 可以等于 T），
- 所有和 $\sum_{\substack{j\in[2a]\\ j\neq i}}x_{\{i,j\}}$，其中 $i\in[2a]$，以及
- 所有差 $x_{\{i,j\}}\cdot x_{\{k,l\}}-x_{\{i,k\}}\cdot x_{\{j,l\}}$，其中 i两两不同，$j,\ k,\ l\in[2a]$。

等价地（参见定理 *3.3* 中 $\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)})$ 的生成集），我们有

$$\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)})=\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)})+\langle x_{\{i,j\}}\cdot x_{\{k,l\}}-x_{\{i,k\}}\cdot x_{\{j,l\}}\ :\ i,j,k,l\in[2a]\ \textit{are pairwise distinct}\rangle,$$

这细化了定理 *3.4*。

证明。 设 $K_a\subseteq\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right]$ 为由上述三族多项式生成的理想。即，

$$K_a=\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(2^a)})+\langle x_{\{i,j\}}\cdot x_{\{k,l\}}-x_{\{i,k\}}\cdot x_{\{j,l\}}\ :\ i,j,k,l\in[2a]\text{ are pairwise distinct}\rangle.$$

我们首先证明

$$K_a\subseteq\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)}). \tag{3.5}$$

由于我们已在定理 3.4 中证明 $\mathbf{grI}(\Pi_{(2^a)}) \subseteq \mathbf{grI}(\Pi_{(a^2)})$，因此只需证明

$$x_{\{i,j\}} \cdot x_{\{k,l\}} - x_{\{i,k\}} \cdot x_{\{j,l\}} \in \mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(a^2)})$$

对于两两不同的 $i,j,k,l \in [2a]$。这一事实可直接由如下观察得出

$$\Big(x_{\{i,j\}} - \frac{1}{2}\Big)\Big(x_{\{k,l\}} - \frac{1}{2}\Big) - \Big(x_{\{i,k\}} - \frac{1}{2}\Big)\Big(x_{\{j,l\}} - \frac{1}{2}\Big) \in \mathbf{I}(\Pi_{(a^2)})$$

这可以通过任意选取 $\pi \in \Pi_{(a^2)}$，然后考察关于 π 整除 $\{i,j,k,l\}$ 的三种可能情况来验证：$4+0, 3+1, 2+2$。因此，包含关系 (3.5) 成立。

我们的最终目标是使包含关系 (3.5) 成为等式。注意，(3.5) 自然地导出一个分次 $\mathfrak{S}_{2a}$-模满射

$$\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/K_a \twoheadrightarrow R(\Pi_{(a^2)}).$$

只需使这个满射成为同构即可。也就是说，我们只需证明

$$\mathrm{Frob}\Big(\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/K_a\Big)_d\Big) \leq \mathrm{Frob}(R(\Pi_{(a^2)})_d) \tag{3.6}$$

对于所有 $d \geq 0$。直接观察可知，$\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/K_a\Big)_d$ 模 K_a 由该单项式族张成

$$\left\{\prod_{i=1}^{d} x_{S_i} : S_1,\dots,S_d \in \binom{[2a]}{2} \text{ are pairwise disjoint}\right\}, \tag{3.7}$$

这是由以下事实得出的：对于 $S,T \in \binom{[2a]}{2}$，所有元素 $x_S \cdot x_T \in \mathbf{grI}(\Pi_{(2^a)}) \subseteq K_a$ with $S \cap T \neq \varnothing$ (S may equal T)都会消去不属于（3.7）的所有单项式。我们进一步注意到，$x_{\{i,j\}} \cdot x_{\{k,l\}} - x_{\{i,k\}} \cdot x_{\{j,l\}} \in K_a$ 可以帮助我们在模 K_a 下识别两个单项式$x_{S_1} \cdot x_{S_2} \cdot x_{S_3} \cdots x_{S_d}$和 $x_{S_1'} \cdot x_{S_2'} \cdot x_{S_3} \cdots x_{S_d}$，其中 $S_1 \cup S_2 = S_1' \cup S_2'$。反复进行这种识别可得

$$\prod_{i=1}^{d} x_{S_i} \equiv \prod_{i=1}^{d} x_{T_i} \mod K_a \tag{3.8}$$

对于所有两两不相交的集合 $S_1,\dots,S_d \in \binom{[2a]}{2}$ 以及两两不相交的集合 $T_1,\dots,T_d \in \binom{[2a]}{2}$，使得 $\bigcup_{i=1}^d S_i = \bigcup_{i=1}^d T_i$。张成集（3.7）和识别关系（3.8）表明存在一个 $\mathfrak{S}_n$-模满射

$$\mathbb{C}\Big[\binom{[2a]}{2d}\Big] \twoheadrightarrow \Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/K_a\Big)_d,$$

由此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Frob}\Big(\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/K_a\Big)_d\Big) &\leq \mathrm{Frob}\Big(\mathbb{C}\Big[\binom{[2a]}{2d}\Big]\Big) \\ &= \mathrm{Frob}(\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{2d}} \circ \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{2a-2d}}) = h_{2d} \cdot h_{2a-2d}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

此外，包含关系 $\mathbf{grI}(\Pi_{(2^a)}) \subseteq K_a$ 表明

$$\mathrm{Frob}\Big(\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/K_a\Big)_d\Big) \leq \mathrm{Frob}(R(\Pi_{(2^a)})_d),$$

将其与定理 3.3 结合可知，每个出现在 $\mathfrak{S}_{2a}$- 模 $\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/K_a\Big)_d$ 中的 Specht 模 V^λ 都满足 $\lambda_1 = 2a - 2d$。这一 λ_1-限制结合不等式 (3.9) 意味着

$$\mathrm{Frob}\Big(\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\Big]\Big/K_a\Big)_d\Big) \leq \{h_{2d} \cdot h_{2a-2d}\}_{\lambda_1 = 2a-2d} = \begin{cases} s_{(2a-2d,2d)}, & \text{if } 2d \leq 2a-2d \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中最后一个等号来自舒尔函数的 Pieri 法则。因此，我们完成了 (3.6) 的证明，也就完成了整个证明。□

3.2. **首行长度分离现象**。 在第3.1小节中， $R(\Pi_{(2^a)})$ 和 $R(\Pi_{(a^2)})$ 都遵循“首行长度分离现象”。具体而言，$\mathrm{grFrob}(R(\Pi_{(2^a)}); q)$ 按照 λ_1 对 $h_a[h_2]$ 的舒尔展开进行分离（见定理 3.3），而 $\mathrm{grFrob}(R(\Pi_{(a^2)}); q)$ 也按照 λ_1 对 $h_2[h_a]$ 的舒尔展开进行分离（见定理 3.5）。然而， $R(\Pi_{(2^a)})$ 和 $R(\Pi_{(a^2)})$ 都是 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[2a]}{2}}\right]$ 的商。现在，我们希望将它们的构造扩展到 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$，其中 n 可以是奇数。我们采用相同的定义理想，并将看到“首行长度分离现象”仍然成立（见定理 3.14 和 3.15）。

定义 3.7. 对于整数 $n > 0$, $I(n) \subseteq \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$ 是由以下元素生成的理想

- 对 $i \in [n]$ 的所有和式 $\sum_{j\in[n]} x_{\{i,j\}}$，以及$j\neq i$
- 对 $S, T \in \binom{[n]}{2}$ 且满足 $S \cap T \neq \varnothing$ 的所有乘积 $x_S \cdot x_T$（S 可以等于 T）。

设 $J(n) \subseteq \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$ 为如下给出的理想

$$J(n) \coloneqq I(n) + \langle x_{\{i,j\}} \cdot x_{\{k,l\}} - x_{\{i,k\}} \cdot x_{\{j,l\}} : i, j, k, l \in [n] \text{ are pairwise distinct} \rangle.$$

为了研究这两个商 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/I(n)$ 与 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/J(n)$ 的 $\mathfrak{S}_n$-模结构，我们需要它们的策略性生成集。我们的生成集由以下单项式组成。

定义3.8。 令 $\mathcal{M}_{n,d}$ 为由以下给出的 d-匹配 集合

$$\mathcal{M}_{n,d} \coloneqq \left\{ \{S_1, \ldots, S_d\} : S_1, \ldots, S_d \in \binom{[n]}{2} \text{ are pairwise disjoint} \right\}.$$

对于 $\tau \in \mathcal{M}_{n,d}$，我们定义匹配单项式 $\mathfrak{m}(\tau) \in \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$ 为

$$\mathfrak{m}(\tau) \coloneqq \prod_{S\in\tau} x_S.$$

对于 $S \in \binom{[n]}{2d}$，记作 $S = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_{2d}\}$，并定义标准匹配单项式$\mathfrak{m}(S) \in \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$ 为

$$\mathfrak{m}(S) \coloneqq \mathfrak{m}(\tau)$$

其中 $\tau = \{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}, \ldots, \{i_{2d-1}, i_{2d}\}\} \in \mathcal{M}_{n,d}$。特别地，有 $\mathfrak{m}(\varnothing) = 1$。

例3.9。 令 $\tau \in \mathcal{M}_{7,3}$ 为3-匹配 $\{\{2,4\},\{5,7\},\{3,6\}\}$。那么匹配单项式为 $\mathfrak{m}(\tau) = x_{\{2,4\}} \cdot x_{\{5,7\}} \cdot x_{\{3,6\}}$。令 $S = \{2,3,4,5,6,7\}$。那么标准匹配单项式为 $\mathfrak{m}(S) = x_{\{2,3\}} \cdot x_{\{4,5\}} \cdot x_{\{6,7\}}$。

商 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/I(n)$具有以下张成集。

引理 3.10。 匹配单项式族

$$\bigsqcup_{d=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \{\mathfrak{m}(\tau) : \tau \in \mathcal{M}_{n,d}\}$$

下降为 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/I(n)$的张成集。

证明。 这是因为所有其他单项式都被带有 $S \cap T \neq \varnothing$ 的乘积 $x_S \cdot x_T \in I(n)$ 消去。 □

对于 $\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n)$，上述张成集可以进一步缩小。

推论 3.11. 标准匹配单项式族

$$\bigsqcup_{d=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left\{\mathfrak{m}(S)\,:\,S\in\binom{[n]}{2d}\right\}$$

降为 $\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n)$ 的张成集。此外，我们有

$$w\cdot\mathfrak{m}(S)\equiv\mathfrak{m}(w\cdot S)\mod J(n)$$

对所有 $w\in\mathfrak{S}_n$ 均成立。

证明。Since $I(n)\subseteq J(n)$，引理 3.10 表明，匹配单项式族

$$\bigsqcup_{d=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\{\mathfrak{m}(\tau)\,:\,\tau\in\mathcal{M}_{n,d}\}\tag{3.10}$$

也构成了 $\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n)$ 的张成集。不过，许多这样的匹配单项式模 $J(n)$ 后彼此等同，因为所有的差 $x_{\{i,j\}}\cdot x_{\{k,l\}}-x_{\{i,k\}}\cdot x_{\{j,l\}}$都使我们能够通过以下方式“互换”变量指标：

$$\mathfrak{m}(\tau)\equiv\mathfrak{m}(\tau')\mod J(n)$$

对于 $\tau=\{S_1,S_2,S_3,\ldots,S_d\},\tau'=\{S_1',S_2',S_3,\ldots,S_d\}$，其中 $S_1\cup S_2=S_1'\cup S_2'$。反复进行这样的互换，我们得到如下等同关系：

$$\mathfrak{m}(\tau)\equiv\mathfrak{m}(\tau')\mod J(n)\tag{3.11}$$

对于所有满足 $\tau,\tau'\in\mathcal{M}_{n,d}$ 的 $\bigcup_{S\in\tau}S=\bigcup_{T\in\tau'}T$。特别地，由此可知，任意匹配单项式$\mathfrak{m}(\tau)$ 模 $J(n)$ 后都与标准匹配单项式 $\mathfrak{m}(\bigcup_{S\in\tau}S)$ 等同。因此，张成集 (3.10) 可以替换为一个更小的集合

$$\bigsqcup_{d=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left\{\mathfrak{m}(S)\,:\,S\in\binom{[n]}{2d}\right\}.$$

这个集合模 $J(n)$ 在 $\mathfrak{S}_n$-作用下稳定，具体来说

$$w\cdot\mathfrak{m}(S)=w\cdot\mathfrak{m}(\tau)=\mathfrak{m}(w\cdot\tau)\equiv\mathfrak{m}(w\cdot S)\mod J(n)$$

其中 $S=\{i_1<i_2<\cdots<i_{2d}\}$，$\tau=\{\{i_{2k-1},i_{2k}\}:\,1\le k\le d\}$，其同余关系 $\equiv$ 源自 (3.11)。现在证明完毕。□

下面的结果使我们能够控制所有出现在 $\left(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/I(n)\right)_d$ 中的 Specht 模 V^λ 的首行长度 λ_1，λ。

引理 3.12。对于任意 $\tau\in\mathcal{M}_{n,\,d}$，我们有湮灭性质

$$\eta_j\cdot\mathfrak{m}(\tau)\in I(n)$$

对于 $n-2d<j\le n$。

证明。写出 $\tau = \{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \ldots, \{i_d, j_d\}\}$，并写出 $S = \{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_d, j_d\}$。假设 $S \cap [j] = (\bigcup_{k=1}^{t} \{i_k, j_k\}) \cup (\bigcup_{k=t+1}^{t+s} \{i_k\})$，并将此交集记为 T。写出$m = \mathfrak{m}(\tau)/\prod_{k=1}^{t+s} x_{\{i_k,j_k\}}$。令 $\doteq$表示相差一个非零倍数的等式。我们有

$$\begin{aligned}
\eta_j \cdot \mathfrak{m}(\tau) &\doteq \sum_{f:T\hookrightarrow[j]} \left(\prod_{k=1}^{t} x_{\{f(i_k),f(j_k)\}}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{t+s} x_{\{f(i_k),j_k\}}\right) m \\
&\equiv \left(\prod_{k=1}^{t} \sum_{f_k:\{i_k,j_k\}\hookrightarrow[j]} x_{\{f_k(i_k),f_k(j_k)\}}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{t+s} \sum_{f_k:\{i_k\}\to[j]} x_{\{f(i_k),j_k\}}\right) m \\
&\equiv \left(\prod_{k=1}^{t} \left(-\sum_{f_k:\{i_k,j_k\}\hookrightarrow[n]\setminus[j]} x_{\{f_k(i_k),f_k(j_k)\}}\right)\right)\left(\prod_{k=t+1}^{t+s} \left(-\sum_{f_k:\{i_k\}\to[n]\setminus([j]\cup\{j_k\})} x_{\{f(i_k),j_k\}}\right)\right) m \\
&\doteq \left(\prod_{k=1}^{t} \sum_{f_k:\{i_k,j_k\}\hookrightarrow[n]\setminus[j]} x_{\{f_k(i_k),f_k(j_k)\}}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{t+s} \sum_{f_k:\{i_k\}\to[n]\setminus([j]\cup\{j_k\})} x_{\{f(i_k),j_k\}}\right) m \\
&\equiv \sum_{f:T\hookrightarrow([n]\setminus[j])\setminus(S\setminus T)} \left(\prod_{k=1}^{t} x_{\{f(i_k),f(j_k)\}}\right)\left(\prod_{k=t+1}^{t+s} x_{\{f(i_k),j_k\}}\right) m \mod I(n)
\end{aligned}$$

其中，第一个和最后一个同余式 $\equiv$ 源于这样一个事实：当$S \cap T \neq \varnothing$时，$x_S \cdot x_T \in I(n)$；第二个同余式 $\equiv$ 则源于这样一个事实：对于所有$j \neq i$，$\sum_{j\in[n]} x_{\{i,j\}} \in I(n)$ $i \in [n]$。尽管如此，我们注意到

$$|([n] \setminus [j]) \setminus (S \setminus T)| = (n-j) - (|S| - |T|) = n - j - 2d + |T| < |T|,$$

这意味着不存在单射 $f\colon T \hookrightarrow ([n] \setminus [j]) \setminus (S \setminus T)$。因此，上述等式链表明 $\eta_j \cdot \mathfrak{m}(\tau) \in I(n)$，证明得证。□

推论 3.13. 对于 $0 \le d \le \lfloor n/2 \rfloor$，任一出现在 $\left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I(n)\right)_d$或 $\left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ J(n)\right)_d$ 中的 *Specht* 模 V^λ，均满足 $\lambda_1 \le n - 2d$。

证明。对于 $\left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I(n)\right)_d$，该结果可由引理 2.4、3.10 和 3.12 立即得到。然后，由包含关系 $I(n) \subseteq J(n)$，我们推得关于 $\left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ J(n)\right)_d$ 的类似结果。□

现在我们说明分次 $\mathfrak{S}_n$-模结构。下面的结果推广了定理 3.3。

定理 3.14。对于任意整数 $n > 0$，有

$$\operatorname{grFrob}\left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I(n); q\right) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ 2 \mid \lambda_i \text{ for } i>1}} q^{\frac{n-\lambda_1}{2}} \cdot s_\lambda.$$

证明。如果 n 为偶数，定理 3.3 直接说明了这一结果。下文中，我们假设 n为奇数。我们还可以假设 $n > 1$，因为 $n = 1$ 的情形是平凡的。引理 3.10 给出了$\mathfrak{S}_n$-模满射

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[\mathcal{M}_{n,d}] &\twoheadrightarrow \left(\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I(n)\right)_d \\
\tau &\mapsto \mathfrak{m}(\tau) \mod I(n) \qquad \text{for all } \tau \in \mathcal{M}_{n,d}
\end{aligned}$$

对于 $0 \le d \le \lfloor n/2 \rfloor$。因此，我们有

$$\begin{aligned}(3.12)\qquad &\mathrm{Frob}\Big(\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/I(n)\Big)_d\Big) \le \mathrm{Frob}(\mathbb{C}[\mathcal{M}_{n,d}]) = \mathrm{Frob}(\mathbb{C}[\Pi_{(2^d)}]\circ \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{n-2d}})\\ =&h_d[h_2]\cdot h_{n-2d} = \sum_{\substack{\mu\vdash 2d\\ \mu \text{ is even}}} s_\mu \cdot h_{n-2d} = \sum_{\substack{\mu\vdash 2d\\ \mu \text{ is even}}} \sum_{\substack{\lambda/\mu \text{ is a horizontal stripe,}\\ |\lambda/\mu|=n-2d}} s_\lambda\end{aligned}$$

其中最后一个等号用到了Pieri法则。随后，我们应用推论 3.13 对（3.12）中的最后一个表达式进行截断，得到

$$(3.13)\quad \mathrm{Frob}\Big(\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/I(n)\Big)_d\Big) \le \left\{\sum_{\substack{\mu\vdash 2d\\ \mu \text{ is even}}} \sum_{\substack{\lambda/\mu \text{ is a horizontal stripe,}\\ |\lambda/\mu|=n-2d}} s_\lambda\right\}_{\lambda_1\le n-2d} = \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda_1=n-2d\\ 2\mid \lambda_i \text{ for } i>1}} s_\lambda.$$

对于 $0 \le d \le \lfloor n/2 \rfloor$。我们的目标是使这个不等式成为等式。

考虑分次满射

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big] \twoheadrightarrow \mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n-1]}{2}}\Big]$$

由对所有 $i \in [n-1]$ 的求值 $x_{\{i,n\}} = 0$ 给出。注意， $\mathcal{F}$ 是 $\mathfrak{S}_{n-1}$-等变的，并且 $\mathcal{F}(I(n)) \subseteq I(n-1)$。于是 $\mathcal{F}$ 诱导出一个分次 $\mathfrak{S}_{n-1}$-模满射

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}}\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/I(n)\Big) \twoheadrightarrow \mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n-1]}{2}}\Big]\Big/I(n-1) = R\Big(\Pi_{(2^{\frac{n-1}{2}})}\Big),$$

这表明

$$\mathrm{Frob}\Big(\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}}\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/I(n)\Big)_d\Big) \ge \mathrm{Frob}\Big(R\Big(\Pi_{(2^{\frac{n-1}{2}})}\Big)_d\Big) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n-1\\ \lambda_1=n-1-2d\\ \lambda \text{ is even}}} s_\lambda$$

其中两个等号由定理 3.3 得出。结合上述不等式与分支法则，可知 (3.13) 对 $0 \le d \le \lfloor n/2 \rfloor$ 必为等式。由引理 3.10 可知，对于 $d > \lfloor n/2 \rfloor$, $\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/I(n)\Big)_d = 0$ ，故证明完成。□

下面的结果推广了定理 3.5。

定理3.15。对于任意整数 $n > 0$，我们有

$$\mathrm{grFrob}\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n); q\Big) = \sum_{d=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} q^d \cdot s_{(n-2d,2d)}.$$

注3.16。定理*3.15* 为 *Specht* 模 $V^{(n-2d,2d)}$ 提供了另一种模型，它是 $\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]_d$ 的一个商。

证明。如果 n 是偶数，命题 3.6 表明 $\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n) = R(\Pi_{((n/2)^2)})$，因此定理 3.5 得出结论，证明完毕。因此，我们假设 n 是奇数。我们还要求 $n > 1$，因为 $n = 1$ 的情形是平凡的。然后，推论 3.11 表明存在 $\mathfrak{S}_n$-模满射

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}\Big[\binom{[n]}{2d}\Big] \twoheadrightarrow \Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n)\Big)_d\\ &\qquad S \mapsto \mathfrak{m}(S) \mod J(n) \qquad \text{for all } S \in \binom{[n]}{2d}\end{aligned}$$

对于 $d \geq 0$，并约定当 $d > \lfloor n/2 \rfloor$ 时，上述两个 $\mathfrak{S}_n$-模都等于 0。因此，我们有

$$\mathrm{Frob}\Big(\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n)\Big)_d\Big) \leq \mathrm{Frob}\Big(\mathbb{C}\Big[\binom{[n]}{2d}\Big]\Big) = \mathrm{Frob}(\mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{2d}} \circ \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_{n-2d}}) = h_d \cdot h_{n-2d},$$

结合推论 3.13，可得

$$\mathrm{Frob}\Big(\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n)\Big)_d\Big) \leq \{h_d \cdot h_{n-2d}\}_{\lambda_1 \leq n-2d} = \begin{cases} s_{(n-2d,2d)}, & \text{if } n-2d \geq 2d \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.14}$$

其中等号由 Pieri 法则得出。我们的目标是使这个不等式成为等式。

考虑分次满射

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big] \twoheadrightarrow \mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n-1]}{2}}\Big]$$

由求值 $x_{\{i,n\}} = 0$ 给出，对所有 $i \in [n-1]$均成立。注意， $\mathcal{F}$ 是 $\mathfrak{S}_{n-1}$-等变的，并且$\mathcal{F}(J(n)) \subseteq J(n-1)$。因此， $\mathcal{F}$可下降为一个分次 $\mathfrak{S}_{n-1}$-模满射

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}}\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n)\Big) \twoheadrightarrow \mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n-1]}{2}}\Big]\Big/J(n-1) = R\Big(\Pi_{((\frac{n-1}{2})^2)}\Big)$$

其中等号由命题 3.6 得出。因此我们推得

$$\mathrm{Frob}\Big(\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}}\Big(\mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]\Big/J(n)\Big)_d\Big) \geq \mathrm{Frob}\Big(R\Big(\Pi_{((\frac{n-1}{2})^2)}\Big)_d\Big) = \begin{cases} s_{(n-1-2d,2d)}, & \text{if } 0 \leq d \leq \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中等号来自定理 3.5。该不等式连同分支法则迫使 (3.14) 成为等式（注意，对于奇数 n，我们有 $n-2d \geq 2d$ 当且仅当 $n-1-2d \geq 2d$），从而完成证明。□

3.3. **General 轨迹 Π_λ 及其并**。对于 $0 \leq m \leq n$，我们考虑一个更大的 loc us

$$\Pi_{n,m} \coloneqq \bigsqcup_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda_1 \leq m}} \Pi_\lambda.$$

有趣的是，我们借助定理 3.27 得到了 $R(\Pi_{n,\,m})$ 关于任意单项式序的标准单项式基。我们还在推论 3.26 中给出了环 $R(\Pi_{n,\,m})$ 的一个简洁表示。下面先给出一些有用的定义和技术结果。

定义 3.17. 对于任意无向简单图 G，其顶点集为 $[n]$，边集为 $E(G) \subseteq \binom{[n]}{2}$，我们如下定义图单项式 $\mathfrak{m}(G) \in \mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]$

$$\mathfrak{m}(G) \coloneqq \prod_{S \in E(G)} x_S.$$

注 3.18. 请注意，所有图单项式恰好就是所有不含重复变量的单项式。

定义 3.19. 对于 $0 \leq m \leq n$，令 $I_{n,m} \subseteq \mathbb{C}\Big[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\Big]$ 为由以下元素生成的理想：

- 对于 $S \in \binom{[n]}{2}$，所有平方项 x_S^2
- 对于两两不同的 $i, j, k \in [n]$，所有差 $x_{\{i,j\}} \cdot x_{\{j,k\}} - x_{\{i,k\}} \cdot x_{\{j,k\}}$，以及
- 对于具有 $m+1$ 个顶点且属于 $[n]$ 的树 T，所有单项式 $\mathfrak{m}(T)$。

我们有如下 由于理想包含，我们将通过推论 3.26 看到等式成立 .

引理 3.20. 我们有 $I_{n,m} \subseteq \mathrm{gr}_{\mathbf{I}}(\Pi_{n,m})$.

证明。只需证明，定义 3.19 中提到的三个生成元族都属于 $\mathbf{grI}(\Pi_{n,m})$。

对于平方项 x_S^2，我们有 $x_S^2 - x_S \in \mathbf{I}(\Pi_{n,\ m})$，因为每个无序集合划分都对应于 $\mathbb{C}(\binom{[n]}{2})$ 中的一个 0-1 向量，由此可推得 $x_S^2 \in \mathbf{grI}(\Pi_{n,\ m})$。

对于差 $x_{\{i,j\}} \cdot x_{\{j,k\}} - x_{\{i,k\}} \cdot x_{\{j,k\}}$，记 $f = x_{\{i,j\}} \cdot x_{\{j,k\}}$ 和 $g = x_{\{i,k\}} \cdot x_{\{j,k\}}$。注意，对于任意 $\pi \in \Pi_{n,\ m}$，我们有

$$f(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{if } i,j,k \text{ belong to the same block of } \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$g(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{if } i,j,k \text{ belong to the same block of } \pi \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，$(f-g)(\pi) = 0$ 对所有 $\pi \in \Pi_{n,\ m}$ 均成立，因此 $f - g \in \mathbf{I}(\Pi_{n,\ m})$，从而 $f - g \in \mathbf{grI}(\Pi_{n,\ m})$.

对于单项式 $\mathfrak{m}(T)$，其中 T 是 $[n]$ 中具有 $m+1$ 个顶点的树，我们声称 $\mathfrak{m}(T) \in \mathbf{I}(\Pi_{n,\ m})$。事实上，对于所有 $\pi \in \Pi_{n,\ m}$，π 的每个块至多含有 m 个元素；但对于任意无序集合划分 π'，$\mathfrak{m}(T)(\pi') \neq 0$ 当且仅当 T 的顶点集包含在 π' 的某个单一块中。因此，对所有 $\pi \in \Pi_{n,\ m}$，$\mathfrak{m}(T)(\pi)$ 均为零，这表明 $\mathfrak{m}(T) \in \mathbf{grI}(\Pi_{n,\ m})$。□

为了更好地理解 $I_{n,\ m}$ 进而理解 $\mathbf{grI}(\Pi_{n,\ m})$，我们在 $I_{n,\ m}$ 中寻找一些有用的元素，它们为商 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}(\binom{[n]}{2})\right] \Big/ I_{n,\ m}$ 提供了强有力的关系，从而也为 $R(\Pi_{n,\ m})$ 提供了关系。

定义 3.21。对于顶点集 $[n]$ 上的森林 F，将其各连通分支的顶点集记为 B_1、……、B_ℓ。定义与 F 相关联的无序集合划分为

$$\tilde{\pi}(F) := \{B_1, \ldots, B_\ell\}$$

它是 $[n]$ 的一个无序集合划分。

例 3.22。对于 $n = 7$，令 F 为 $[n]$ 上的森林，其边集为

$$E(F) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{6,7\}\}.$$

那么 F 有四个连通分支，对应的顶点集为 $\{1,2,3,4\}$、$\{5\}$、$\{6,7\}$。因此，我们有 $\tilde{\pi}(F) = \{\{1,2,3,4\}, \{5\}, \{6,7\}\}$。

引理 3.23。对于顶点集 $[n]$ 上的两片森林 F_1, F_2，满足 $\tilde{\pi}(F_1) = \tilde{\pi}(F_2)$，我们有

$$\mathfrak{m}(F_1) \equiv \mathfrak{m}(F_2) \mod I_{n,m}.$$

证明。我们首先考察顶点集 $B \subseteq [n]$ 上的两棵树 T_1, T_2。生成元 $x_{\{i,j\}} \cdot x_{\{j,k\}} - x_{\{i,k\}} \cdot x_{\{j,k\}} \in I_{n,\ m}$ 使我们能够移动一棵树 T 的一条边，该树的顶点集为 B，同时不改变同余类 $\mathfrak{m}(T) \bmod I_{n,m}$ 或顶点集 B。因此，我们可以进行有限次这样的移动操作，将 T_1 转换为 T_2，这表明 $\mathfrak{m}(T_1) \equiv \mathfrak{m}(T_2) \bmod I_{n,m}$。将这一事实应用于 F_1 和 F_2 的所有连通分支（此处需要假设 $\tilde{\pi}(F_1) = \tilde{\pi}(F_2)$），我们得出 $\mathfrak{m}(F_1) \equiv \mathfrak{m}(F_2) \bmod I_{n,m}$。□

推论 3.24。对于顶点集 $[n]$ 上的任意圈 C，我们有

$$\mathfrak{m}(C) \equiv 0 \mod I_{n,m}.$$

证明。将 C 的所有边写作 $\{i_1, i_2\}$，$\{i_2, i_3\}$，…，$\{i_{c-1}, i_c\}$，$\{i_c, i_1\}$。设 P 是一条总共有 $c-1$ 条边的路径 $\{i_1, i_2\}$，$\{i_2, i_3\}$，…，$\{i_{c-1}, i_c\}$。设 P' 是另一条总共有 $c-1$ 条边的路径 $\{i_c, i_1\}$，$\{i_1, i_2\}$，…，$\{i_{c-2}, i_{c-1}\}$。引理 3.23 表明 $\mathfrak{m}(P) \equiv \mathfrak{m}(P')$ 模 $I_{n,\ m}$，因此

$$\mathfrak{m}(C) = \mathfrak{m}(P) \cdot x_{\{i_c, i_1\}} \equiv \mathfrak{m}(P') \cdot x_{\{i_c, i_1\}} \equiv 0 \mod I_{n,m}$$

其中，最后一个同余 $\equiv$ 是由以下事实得出的： $x^2_{\{i_c,i_1\}} \mid (\mathfrak{m}(P') \cdot x_{\{i_c,i_1\}})$。 □

这是本节最后一个技巧性结果。

引理 3.25。对于顶点集为 $[n]$ 的任意森林族 $\{F_\pi\}_{\pi\in\Pi_{n,m}}$，若对所有 $\pi \in \Pi_{n,m}$ 都有 $\tilde{\pi}(F_\pi) = \pi$，则单项式族 $\{\mathfrak{m}(F_\pi) : \pi \in \Pi_{n,m}\}$ 在 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I_{n,m}$ 中诱导出一个张成集。

证明。由于对所有 $S \in \binom{[n]}{2}$ 都有 $x_S^2 \in I_{n,m}$，所有含重复变量的单项式都被 $I_{n,m}$ 消去。因此，所有图单项式 $\mathfrak{m}(G)$ 的集合在 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I_{n,m}$ 中诱导出一个张成集。当 G 含有一个作为子图的圈时，推论 3.24 表明，$\mathfrak{m}(G)$ 模 $I_{n,m}$ 消失。因此，单项式族 $\{\mathfrak{m}(F) : F$ 是 $[n]\}$ 上的一棵森林，在 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I_{n,m}$ 中诱导出一个张成集。

只需证明，对于顶点集 $[n]$ 上的任意森林 F，我们可以将 $\mathfrak{m}(F) \bmod I_{n,m}$ 写成同余类 $\mathfrak{m}(F_\pi) \bmod I_{n,m}$ 的线性组合，其中 $\pi \in \Pi_{n,m}$。我们分两种情况证明。如果 $\tilde{\pi}(F) \notin \Pi_{n,m}$，那么 F 必定包含一个顶点数大于 m 的连通分支，因此存在 F 的一个含有 $m+1$ 个顶点的子树 T。由 $\mathfrak{m}(T) \mid \mathfrak{m}(F)$ 这一事实可知，$\mathfrak{m}(F) \in I_{n,m}$。如果 $\tilde{\pi}(F) \in \Pi_{n,m}$，则由引理 3.23 可得 $\mathfrak{m}(F) \equiv \mathfrak{m}(F_{\tilde{\pi}(F)}) \bmod I_{n,m}$，从而完成证明。□

现在我们得到了 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I_{n,\ m}$ 的许多基，以及表示 $R(\Pi_{n,\ m}) = \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I_{n,\ m}$：

推论 3.26. 对于顶点集 $[n]$ 上任意满足对所有 $\pi \in \Pi_{n,m}$ 均有 $\tilde{\pi}(F_\pi) = \pi$ 的森林族 $\{F_\pi\}_{\pi\in\Pi_{n,m}}$，单项式族 $\{\mathfrak{m}(F_\pi) : \pi \in \Pi_{n,m}\}$ 在 $R(\Pi_{n,m})$ 中诱导出一个基。此外，我们有

$$\mathrm{gr}_{\mathbf{I}}(\Pi_{n,m}) = I_{n,m}.$$

证明. 引理 3.25 表明，单项式族 $\{\mathfrak{m}(F_\pi) : \pi \in \Pi_{n,m}\}$ 在 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I_{n,m}$ 中诱导出一个张成集，而引理 3.20 给出了包含关系 $I_{n,m} \subseteq \mathrm{gr}_{\mathbf{I}}(\Pi_{n,m})$。因此，$\{\mathfrak{m}(F_\pi) : \pi \in \Pi_{n,m}\}$ 也在 $R(\Pi_{n,m})$ 中诱导出一个张成集。然而，这个张成集的基数等于 $|\Pi_{n,m}| = \dim_{\mathbb{C}}(R(\Pi_{n,m}))$，这迫使该张成集成为一个基，同时也迫使包含关系 $I_{n,m} \subseteq \mathrm{gr}_{\mathbf{I}}(\Pi_{n,m})$ 成为等式。□

定理 3.27. 固定 $<$ 上的一个单项式序 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$. 对任意 $B \subseteq [n]$，令 T_B 为顶点集 B 满足以下条件的树

$$\mathfrak{m}(T_B) = \min\{\mathfrak{m}(T) : T \textit{ has vertex set } B\}.$$

那么，单项式族

$$\left\{ \prod_{B\in\pi} \mathfrak{m}(T_B) : \pi \in \Pi_{n,m} \right\}$$

降为 $R(\Pi_{n,m}) = \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]\Big/ I_{n,m}$ 的标准单项式基。

例 3.28. 考虑如下给定的变量序： $x_S < x_T$ 当且仅当 $S = \{i < j\}$、$T = \{k < l\}$ 以及

- 或者 $i < k$，或者
- $i = k$ 以及 $j < l$。

取单项式序 $<$ 为字典序。那么，对于任意非空集合 $B = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_b\} \subseteq [n]$，都有 $\mathfrak{m}(T_B) = \prod_{k=2}^{b} x_{\{i_1,i_k\}}$。根据定理 *3.27*，我们可以用这些单项式 $\mathfrak{m}(T_B)$ 的某些乘积来构造 $R(\Pi_{n,m})$ 的标准单项式基。

定理 *3.27* 的证明。 为方便起见，将标准单项式基记为 $\mathcal{SB}$。我们断言:

$$\mathcal{SB} \subseteq \left\{ \prod_{B\in\pi} \mathfrak{m}(T_B) \,:\, \pi \in \Pi_{n,m} \right\}.$$

事实上，只需证明补集的反向包含关系。考虑任意单项式$\tilde{\mathfrak{m}} \notin \left\{ \prod_{B\in\pi} \mathfrak{m}(T_B) : \pi \in \Pi_{n,m} \right\}$。若 $\tilde{\mathfrak{m}}$ 含有重复变量，则根据定义， $\tilde{\mathfrak{m}}$ 模$I_{n,m}$ 为零，从而可得 $\tilde{\mathfrak{m}} \notin \mathcal{SB}$。现在假设 $\tilde{\mathfrak{m}}$ 不含重复变量，这意味着对于某个以 $[n]$为顶点集的简单图 G ，有 $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}(G)$。若 G 不是森林，则推论 3.24 表明 $\tilde{\mathfrak{m}}$ 模$I_{n,m}$ 为零，因此 $\tilde{\mathfrak{m}} \notin \mathcal{SB}$。于是我们进一步假设，对于某个以 $[n]$为顶点集的森林 F ，有 $\tilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}(F)$。然后，引理 3.23 表明

$$\tilde{\mathfrak{m}} - \prod_{B\in\tilde{\pi}(F)} \mathfrak{m}(T_B) \in I_{n,m}.$$

然而，根据构造可知$\tilde{\mathfrak{m}} > \prod_{B\in\tilde{\pi}(F)} \mathfrak{m}(T_B)$，这意味着

$$\tilde{\mathfrak{m}} = \mathrm{in}_<\big(\tilde{\mathfrak{m}} - \prod_{B\in\tilde{\pi}(F)} \mathfrak{m}(T_B)\big) \in \mathrm{in}_< I_{n,m}.$$

由此可得 $\tilde{\mathfrak{m}} \notin \mathcal{SB}$。因此，我们上面的断言得证。

尽管如此， $|\mathcal{SB}| = \dim_{\mathbb{C}}(R(\Pi_{n,\ m})) = |\Pi_{n,\ m}|$，这迫使上面所述的包含关系成为等式，从而完成证明。 □

由于推论 3.26 中模 $I_{n,\ m}$ 的单项式基在 $\mathfrak{S}_n$-作用下都保持稳定，因此我们得到 $R(\Pi_{n,\ m})$ 的分次 $\mathfrak{S}_n$-模结构。

命题 3.29。对于 $d \geq 0$，我们有

$$\mathrm{Frob}(R(\Pi_{n,m})_d) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ \lambda_1\leq m \\ \ell(\lambda)=n-d}} SF_\lambda$$

其中 $SF_\lambda := \prod_{i=1}^r h_{a_i}[h_{b_i}]$ 若我们将 $\lambda = (b_1^{a_1}, b_2^{a_2}, \ldots, b_r^{a_r})$ 写作 $b_1 > b_2 > \cdots > b_r > 0$。

证明。 取一个森林族 $\{F_\pi\}_{\pi\in\Pi_{n,\ m}}$ ，它们定义在 $[n]$ 上，且对所有 $\pi \in \Pi_{n,\ m}$ 都有 $\tilde{\pi}(F_\pi) = \pi$ 。推论 3.26 指出，$\{\mathfrak{m}(F_\pi) : \pi \in \Pi_{n,\ m}\}$ 映射到 $R(\Pi_{n,\ m})$ 的一个基上。此外，引理 3.23 表明，这个基与 $\mathfrak{S}_n$-作用相容，即

$$w \cdot \mathfrak{m}(F_\pi) \equiv \mathfrak{m}(F_{w\cdot\pi}) \mod I_{n,m}$$

对所有 $w \in \mathfrak{S}_n$。注意，对于满足 $\pi \in \Pi_\lambda$ with $\lambda \vdash n$ 的 $\mathfrak{m}$，我们有 $\deg(F_\pi) = |E(F_\pi)| = n - \ell(\lambda)$。因此，我们推出 $\mathfrak{S}_n$-模同构

$$R(\Pi_{n,m})_d \cong \mathbb{C}\left[\bigsqcup_{\substack{\lambda\vdash n \\ \lambda_1\leq m \\ \ell(\lambda)=n-d}} \Pi_\lambda \right] = \bigoplus_{\substack{\lambda\vdash n \\ \lambda_1\leq m \\ \ell(\lambda)=n-d}} \mathbb{C}[\Pi_\lambda]$$

对于 $d \geq 0$，由此可得

$$\mathrm{Frob}(R(\Pi_{n,m})_d) = \sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ \lambda_1\leq m \\ \ell(\lambda)=n-d}} \mathrm{Frob}(\mathbb{C}[\Pi_\lambda]).$$

写出 $\lambda = (b_1^{a_1},\ b_2^{a_2},\ \ldots\ldots,\ b_r^{a_r})$，其中 $b_1 > b_2 > \cdots > b_r > 0$。于是我们得到

$$\mathbb{C}[\Pi_\lambda] \cong \mathbb{C}[\Pi_{(b_1^{a_1})}] \circ \cdots \circ \mathbb{C}[\Pi_{(b_r^{a_r})}]$$

因此

$$\mathrm{Frob}(\mathbb{C}[\Pi_\lambda]) = \prod_{i=1}^{r} h_{a_r}[h_{b_r}] = SF_\lambda,$$

从而完成了我们的证明。 □

注释 *3.30.* 对于 $\lambda \vdash n$ *with* $\lambda_1 \leq m$，我们有 $\Pi_\lambda \subseteq \Pi_{n,m}$ ，因此 $grI(\Pi_{n,m}) \subseteq grI(\Pi_\lambda)$。由此可得 $grFrob(R(\Pi_\lambda); q) \leq grFrob(R(\Pi_{n,m}); q)$。因此，命题 *3.29* 中的分次模结构为 $grFrob(R(\Pi_\lambda); q)$ 提供了一个上界。若取 $\lambda = (b^a)$，这个上界或许能帮助我们理解 $grFrob(R(\Pi_{(b^a)})); q)$，进而理解复合运算$h_a[h_b] = grFrob(R(\Pi_{(b^a)}));1)$。

4. Conclusion

除了与 Foulkes 猜想密切相关的猜想 3.2 外，我们还提出了关于对数凹性、Gr¨obner 理论和分次 $\mathfrak{S}_n$-模结构的其他一些未来研究方向。

为了研究猜想 3.2，或许最好先分析 $R(\Pi_{(b^a)})$的结构。

问题 4.1。 对于 $a, b \geq 3$，求出 $\mathrm{gr}\mathbf{I}(\Pi_{(b^a)})$ 的显式生成集、 $R(\Pi_{(b^a)})$ 的分次特征标公式，以及 $R(\Pi_{(b^a)})$ 关于某个有策略的单项式序的标准单项式基。

非负数列 $(a_1, \ldots, a_m)$ 称为对数凹的，如果对 $1 < i < m$ 有 $a_i^2 \geq a_{i-1} \cdot a_{i+1}$。推广对数凹性的一种方法是引入关于群 G 的等变性。具体而言， G-模数列 $(V_1, \ldots, V_m)$ 称为 G-对数凹的，如果对 $1 < i < m$ 存在G-模单射 $V_{i-1} \otimes V_{i+1} \hookrightarrow V_i \otimes V_i$，其中 G 在 G-模的张量积 $V \otimes W$ 上作对角作用。我们进一步称分次 G-模为 $V = \bigoplus_{d=0}^{m} V_m$ G-对数凹的，如果 $(V_0, \ldots, V_m)$ 是 G-对数凹的。我们提出了一个关于 $\mathfrak{S}_n$-对数凹性的开放问题。

对于第 3.1 和 3.2 小节中研究的分次 $\mathfrak{S}_n$-模，我们已通过编程验证了下述关于 $n \leq 20$ 的猜想。

猜想 4.2。 对于整数 $n > 0$， $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ I(n)$ 和 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ J(n)$ 均为 $\mathfrak{S}_n$-对数凹的。

对于第 3.3 小节中的分次 $\mathfrak{S}_n$-模 $R(\Pi_{n,\ m})$，当我们有$n = 7$，8 和 $4 \leq m \leq n$时， $\mathfrak{S}_n$-对数凹性不成立。然而，根据我们的编程输出，当$9 \leq n \leq 16$时， $\mathfrak{S}_n$-对数凹性成立，因此我们提出以下猜想。

猜想 4.3。 对于 $n \geq 9$， $R(\Pi_{n,\ m})$ 是 $\mathfrak{S}_n$-对数凹的。

另一个方向是寻找标准单项式基。虽然我们已经证明，对于任意单项式序， $R(\Pi_{n,\ m})$ 都存在简洁的标准单项式基，但对于第 3.1 和 3.2 小节中出现的环，我们无法做类似的事情。

问题 4.4。 在 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right]$ 上选择一个恰当的单项式序，并求出相对于此单项式序的 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ I(n)$ （分别为 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ J(n)$）的标准单项式基。

回忆一下，对于偶整数 n， $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ I(n) = R(\Pi_{(2^{n/2})})$ 和 $\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ J(n) = R(\Pi_{(n/2)^2})$。若 n 为奇数，我们希望找到类似的轨道调和构造。

问题 4.5。 对于奇数 $n > 0$，求有限点集 $\mathcal{Z}_n, \mathcal{Z}'_n \subseteq \mathbb{C}^{\binom{[n]}{2}}$，使得

$$\mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ I(n) = R(\mathcal{Z}_n), \quad \mathbb{C}\left[\mathbf{x}_{\binom{[n]}{2}}\right] \Big/ J(n) = R(\mathcal{Z}'_n).$$

5. Acknowledgements

自同构 hor 感谢 Brendon Rhoades 带来启发性的交流与建议 .

References

[1] David A. Cox、John Little 和 Donal O'Shea。《理想、簇与算法——计算代数几何与交换代数导论》。第五版。数学本科生教材。施普林格，查姆，[2025] ©2025，第 xvi+656 页。ISBN：978-3-031-91840-7；978-3-031-91841-4。DOI：10.1007/978-3-031-91841-4。URL：https://doi.org/10.1007/ 978-3-031-91841-4.[2] A. M. Garsia 和 C. Procesi。"关于某些分次 S_n模与 q-Kostka 多项式"。载于：Adv. Math. 94.1 (1992)，第 82–138 页。ISSN：0001-8708,1090-2082。DOI：10 . 1016 / 0001 - 8708(92)90034-I. URL：https://doi.org/10.1016/0001-8708(92)90034-I.[3] Sean T. Griffin。"有序集合划分、Garsia-Procesi 模与秩簇"。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 374.4 (2021)，第 2609–2660 页。ISSN：0002-9947,1088-6850。DOI：10. 1090/tran/8237. URL：https://doi.org/10.1090/tran/8237.[4] James Haglund、Brendon Rhoades 和 Mark Shimozono。"有序集合划分、广义余不变代数与 δ 猜想"。载于：Adv. Math. 329 (2018)，第 851–915 页。ISSN：0001-8708,1090-2082。DOI：10.1016/j.aim.2018.01.028。URL：https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.01.028.[5] Jasper M. Liu 和 Hai Zhu。通过轨道调和分析将 Viennot 阴影推广至车放置。2025。arXiv：2510 .23735 [math.CO]。URL：https : / / arxiv . org / abs / 2510 . 23735.[6] Jasper M. Liu 等。"对合矩阵轨迹与轨道调和分析"。载于：Math. Z. 310.2 (2025)，第 23 号论文，38 页。ISSN：0025-5874,1432-1823。DOI：10. 1007/ s00209- 025 - 03736- 4。URL：https://doi.org/10.1007/s00209-025-03736-4.[7] Jasper Moxuan Liu。"带色置换群中的 Viennot 阴影与分次模结构"。载于：Comb. Theory 5.2 (2025)，第 7 号论文，30 页。ISSN：2766-1334.[8] I. G. Macdonald。《对称函数与 Hall 多项式》。第二版。牛津物理科学经典文本。A. V. Zelevinsky 作出贡献，Richard Stanley 作序。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2015，第 xii+475 页。ISBN：978-0-19-873912-8.[9] Jaeseong Oh 和 Brendon Rhoades。"循环筛法与轨道调和分析"。载于：Math. Z. 300.1 (2022)，第 639–660 页。ISSN：0025-5874,1432-1823。DOI：10.1007/s00209-021-02800-z。URL：https://doi.org/10.1007/s00209-021-02800-z.[10] Jaeseong Oh 和 Brendon Rhoades。"之字形、列联表与商环"。载于：J. Lond. Math. Soc. (2) 112.5 (2025)，第 e70344 号论文，49 页。ISSN：0024-6107,1469-7750。DOI：10.1112/jlms.70344。URL：https://doi.org/10.1112/jlms.70344.[11] Markus Reineke、Brendon Rhoades 和 Vasu Tewari。"对称箭图的分 zonotope 代数、轨道调和分析与 Donaldson-Thomas 不变量"。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 23 (2023)，第 20169–20210 页。ISSN：1073-7928,1687-0247。DOI：10.1093/imrn/rnad033。URL：https://doi.org/10.1093/imrn/rnad033.[12] Victor Reiner 和 Brendon Rhoades。《调和理论与分次 Ehrhart 理论》。2024。arXiv：2407.06511 [math.CO]。URL：https://arxiv.org/abs/2407.06511.[13] Brendon Rhoades。"递增子序列、矩阵轨迹与 Viennot 阴影"。载于：Forum Math. Sigma 12 (2024)，第 e97 号论文，23 页。ISSN：2050-5094。DOI：10.1017/fms.2024.75。URL：https://doi.org/10.1017/fms.2024.75.[14] Bruce E. Sagan。《对称群：表示、组合算法与对称函数》。数学研究生教材。施普林格纽约，2013。ISBN：97814-75768046。URL：https://books.google.com/books?id=Y6vTBwAAQBAJ.[15] Hai Zhu。《车放置与轨道调和分析》。2025。arXiv：2510.25106 [math.CO]。URL：https://arxiv.org/abs/2510.25106。

Department of Mathematics, UC San Diego, La Jolla, CA, 92093, USA*Email address*: haz138@ucsd.edu