arXiv:2602.12626v1 [math.FA] 13 Feb 2026

量子厄米函数与算子的傅里叶变换

Rahul Garg 和 Sundaram Thangavelu

Abstract. 我们构造了厄米函数的算子类比，它们构成希尔伯特空间 $\mathcal{S}_2$ 上、作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$的希尔伯特-施密特算子的正交归一基。 我们利用这个正交归一基定义 $\mathcal{S}_2$ 上的傅里叶变换，并研究其若干基本性质。

1. Introduction

本文研究厄米函数的算子类比，它们构成一个有趣的正交归一基，该基属于希尔伯特空间 $\mathcal{S}_2$ ，其元素是作用于$L^2(\mathbb{R}^n)$的所有希尔伯特-施密特算子，内积定义为$(S,T) = \mathrm{tr}(ST^*)$。众所周知， $\mathcal{S}_2$ 与 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$之间存在一一对应，因为每个 $T \in \mathcal{S}_2$ 都是核为 $K \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$的积分算子。一个较少为人所知的事实是，对于每个非零的 $\lambda \in \mathbb{R}$，都存在一个酉算子 $\pi_\lambda : L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{S}_2$ ，称为韦尔变换。因此， $L^2(\mathbb{R}^{2n})$的每个正交归一基都会导出 $\mathcal{S}_2$ 的一个正交归一基，反之亦然。例如，完备的（经缩放的）厄米函数正交归一系 Φ_μ^λ, $\mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 导出了基 $\pi_\lambda(\Phi_\mu^\lambda)$。另一个例子是由特殊厄米函数族$\Phi^\lambda_{\alpha,\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$ 给出的。我们尚无法清楚描述算子 $\pi_\lambda(\Phi_\mu^\lambda)$，但算子 $\pi_\lambda(\Phi^\lambda_{\alpha,\beta})$可以用$L^2(\mathbb{R}^n)$的厄米正交归一基明确表示。本文构造了一个新的正交归一基 $\Psi_\mu^\lambda, \mu \in \mathbb{N}^{2n}$ ，它属于 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$，使得$S_\mu^\lambda = \pi_\lambda(\Psi_\mu^\lambda)$具有非常明确的形式，其定义类似于厄米函数，因此我们称它们为厄米函数的算子类比，或量子厄米函数。有趣的是，函数 Ψ_μ^λ 恰好是 $\mathbb{R}^{2n}$.上的厄米函数 Φ_μ 经过适当膨胀后得到的函数。

我们先回顾 $\mathbb{R}^n.$ 上的归一化埃尔米特函数的定义。对于任意$\alpha \in \mathbb{N}^n$，令 $\partial^\alpha = \Pi_{j=1}^n \partial_j^{\alpha_j}$ ，其中$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ 为偏导数。我们定义厄米函数 Φ_α 和厄米多项式 H_α 如下:

$$\Phi_\alpha(x) = \left(\pi^{n/2}\alpha! 2^{|\alpha|}\right)^{-1/2} H_\alpha(x)\, e^{-\frac{1}{2}|x|^2} = (-1)^{|\alpha|}\left(\pi^{n/2}\alpha! 2^{|\alpha|}\right)^{-1/2} \left(\partial^\alpha e^{-|x|^2}\right) e^{\frac{1}{2}|x|^2} \tag{1.1}$$

并且对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,$ 我们令 $\Phi_\alpha^\lambda(x) = |\lambda|^{n/4}\overline{\Phi_\alpha(\sqrt{|\lambda|}x)}$。这些函数 $\Phi_\alpha^\lambda, \alpha \in \mathbb{N}^n$ 构成 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一组正交归一基。函数 Φ_α^λ 是（缩放后的）厄米算子 $H(\lambda) = -\Delta + \lambda^2|x|^2$ 的特征函数，其特征值为 $(2|\alpha| + n)|\lambda|.$ 厄米算子有一个自伴扩张，它生成一个半群，称为厄米半群，记作 $e^{-tH(\lambda)}, t > 0.$ 在定义 Φ_α^λ 的算子类比时，高斯函数 $e^{-|x|^2}$ 的作用将由算子 $e^{-H(\lambda)}.$ 承担

日期：2026年2月16日。

在空间 $B(L^2(\mathbb{R}^n))$（即 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上所有有界线性算子构成的空间）中，我们有一个由导子组成的可交换族 $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_j(\lambda)$ $j = 1, 2, \ldots\ldots, 2n$。对于 $\mu \in \mathbb{N}^{2n}$，我们定义 $\mathcal{D}^\mu = \Pi_{j=1}^{2n} \mathcal{D}_j^{\mu_j}$，这些算子起到偏导数 ∂^α. 的作用。类比式（1.1），我们将厄米函数的算子类比定义为

$$S_\mu^\lambda = \left(\pi^n \mu! 2^{|\mu|}\right)^{-1/2} \left(\mathcal{D}^\mu e^{-H(\lambda)}\right) e^{\frac{1}{2}H(\lambda)}. \tag{1.2}$$

定理 1.1. 算子族 $S_\mu^\lambda, \mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 构成 $\mathcal{S}_2$. 的一组正交归一基

算子 S_μ^λ 是某些函数 $\Psi_\mu^\lambda \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 的韦尔变换，这些函数构成 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 的一组正交归一基。我们将证明，这些函数实际上只是 $\mathbb{R}^{2n}$. 上厄米函数的适当膨胀。事实上

$$\Psi_\mu^\lambda(x,u) = ((\lambda/2)\coth(\lambda/2))^{n/2}\, \Phi_\mu(\sqrt{(\lambda/2)\coth(\lambda/2)}(x,u)). \tag{1.3}$$

实际上，我们先定义函数 Ψ_μ^λ，再将 S_μ^λ 定义为 $\pi_\lambda(\Psi_\mu^\lambda)$。我们将证明 S_μ^λ 满足方程 (1.2)。通过计算 $e^{-H(\lambda)}$ 的非交换导子，可以证明

$$S_\mu^\lambda = P_\mu^\lambda(A(\lambda), A^*(\lambda))\, e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)} \tag{1.4}$$

其中 $P_\mu^\lambda(A(\lambda)\ A^*(\lambda))$ 是关于向量 $A(\lambda) = (A_j(\lambda))$ 和 $A^*(\lambda) = (A_j^*(\lambda))$ 的非交换多项式，这些向量由湮灭算子与产生算子构成。Ψ_μ^λ 的构造，以及由此得到的 S_μ^λ 的构造，源于寻找以下事实的扭曲类比；现在我们回顾这一事实。

若令 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 表示由所有关于高斯测度 $d\nu_n(z) = (4\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\, dz$平方可积的整函数 F 构成的福克空间，那么巴格曼变换 B 将 $L^2(\mathbb{R}^n)$酉映射到 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$。众所周知，$B$ 将厄米函数 Φ_α 映射为单项式 $\zeta_\alpha(z) = (\pi^{n/2} 2^{|\alpha|} \alpha!)^{-1/2}\, z^\alpha$. 有一族以 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为索引的（扭曲）福克空间 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$，当 $\lambda = 0$. 时，它们与经典福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$一致。这些空间与文献 [12] 中研究的扭曲伯格曼空间 $\mathcal{B}_t^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$有关；后者自然地出现在海森堡群 $\mathbb{H}^n$. 上的热核变换或西格尔-巴格曼变换中。这些空间是根据权函数定义的

$$w_\lambda(z,w) = 4^n\, c_{n,\lambda}\, e^{\lambda\, \mathrm{Im}(z\cdot\bar{w})}\, e^{-\frac{1}{2}\lambda(\coth\lambda)|(z,w)|^2}, \quad (z,w) \in \mathbb{C}^{2n}.$$

因此，$\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 是由定义在 $\mathbb{C}^{2n}$ 上、关于测度 $w_\lambda(z,w)$ 平方可积的所有整函数 F 构成的空间。$dz\, dw$. 我们指出，常数 $c_{n,\lambda}$ 的选取使得 $c_{n,0} = (4\pi)^{-n}$，但我们取 $w_0(z,w) = (4\pi)^{-n} e^{-\frac{1}{2}|(z,w)|^2}$，从而 $d\nu_{2n}(z,w) = w_0(z,w) dz\, dw$. 注意，$\mathcal{F}^0(\mathbb{C}^{2n}) = \mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 就是定义在 $\mathbb{C}^{2n}$. 上的标准整函数福克空间

B 的类似物是扭曲巴格曼变换 B_λ，该变换在 [9]，中进行了研究，它将 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 酉映射到 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$。正如 [2]，的作者所发现的，空间 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 与 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 之间存在一种非常简单的关系。存在一个可逆线性变换 σ_λ：$\mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$，使得当 $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 时，$F \circ \sigma_\lambda \in \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$。由此可知 $\zeta_\mu \circ \sigma_\lambda \in \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$，因此存在 $\Psi_\mu^\lambda \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 使得 $B_\lambda \Psi_\mu^\lambda = \zeta_\mu \circ \sigma_\lambda$。由于 ζ_μ，$\mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 是 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 的一组正交归一基，因此可知 Ψ_μ^λ，$\mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 构成一组

正交归一 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 的一组正交归一基，因此 $S_\mu^\lambda = \pi_\lambda(\Psi_\mu^\lambda)$ 是 $\mathcal{S}_2.$ 的一组正交归一基

福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 的若干有趣性质之一，是傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上与巴格曼变换之间的相互关系。更确切地说，若 U 是定义在福克空间上的幺正算子，由 $UF(z) = F(-iz)$ 给出，那么 $U \circ B = B \circ \mathcal{F}$.受这一关系的启发，我们在第 3.5 节定义希尔伯特-施密特算子的傅里叶变换。为此，我们使用高斯-Bargmann变换 $\mathcal{G}_\lambda = B_\lambda \circ \pi_\lambda^*$，它将 $\mathcal{S}_2$ 幺正地映射到 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$。同样，由 $UF(z,w) = F(-iz,-iw)$ 定义的映射 $U\colon \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n}) \to \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 是幺正的，因此，由关系 $U \circ \mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_\lambda \circ \mathcal{F}$ 定义的 $\mathcal{F}$ 是一个幺正算子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2$，我们称之为算子的傅里叶变换。我们证明了这一傅里叶变换的若干基本性质。特别地，我们证明算子 S_μ^λ 是这一傅里叶变换的特征向量，即 $\mathcal{F}(S_\mu^\lambda) = (-i)^{|\mu|} S_\mu^\lambda$.这与厄米函数满足的众所周知的性质 $\mathcal{F}(\Phi_\alpha) = (-i)^{|\alpha|}\Phi_\alpha$ 相对应。

本文的安排如下。第 2 节中，我们建立所需的记号并回顾预备知识，尤其是关于扭曲福克空间及其与标准Fock空间之间关系的结果。第 3 节中，我们引入厄米函数的算子类比，并确立其基本性质。在第 3.5 小节中，我们定义算子的傅里叶变换，并阐明经典傅里叶变换与 $\mathcal{S}_2.$ 上的新傅里叶变换之间的类比。作为示例，我们陈述并证明算子的傅里叶变换版哈代定理的精确类比。我们还介绍径向算子的傅里叶变换，并列出一些有待在后续论文中研究的重要问题。

2. 预备知识

2.1. 厄米函数、巴格曼变换与福克空间。 本文中用到的巴格曼变换的所有性质，均参见巴格曼的论文 [3]。关于厄米函数的结果，参见 Szego [22] 及专著 [17]。

考虑单项式 $\zeta_\alpha(w) = (\pi^{n/2}2^{|\alpha|}\alpha!)^{-1/2} w^\alpha,\ w \in \mathbb{C}^n.$ 它们在 $L^2(\mathbb{C}^n, d\nu_n)$ 中构成一个正交归一系，其中 $d\nu_n(w) = (4\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{2}|w|^2}\, dw.$ 那么，在 (1.1) 中定义的厄米函数 Φ_α 满足生成函数恒等式

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \Phi_\alpha(x)\,\zeta_\alpha(w) = \pi^{-n/2} e^{\frac{1}{4}w^2} e^{-\frac{1}{2}(x-w)^2}. \tag{2.1}$$

通过对整函数 $g_x(w) = e^{-w^2+2xw}$ 进行泰勒展开并注意到以下事实，即可在一维情形下轻松验证这一点：

$$e^{-w^2+2xw} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} H_k(x)\, w^k.$$

由于 $g_x(w) = e^{x^2} e^{-(x-w)^2}$，显然 $\frac{d^k}{dw^k} g_x(0) = H_k(x)$ 是一个次数为 $k.$ 的多项式。高维情形由一维情形推出，因为 $H_\alpha(x) = \Pi_{j=1}^n H_{\alpha_j}(x_j)$。众所周知，这族函数 $\Phi_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N}^n$ 构成了 $L^2(\mathbb{R}^n)$。的正交归一基。我们可以利用上述恒等式定义巴格曼变换，并轻松推导出它的许多性质。

对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，我们通过对生成函数右侧的核进行积分，来定义它的巴格曼变换 Bf。因此

$$Bf(w) = \pi^{-n/2} e^{\frac{1}{4}w^2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-\frac{1}{2}(x-w)^2} dx = \pi^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}w^2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, e^{x\cdot w} dx.$$

鉴于上述恒等式，显然 $B\Phi_\alpha = \zeta_\alpha$，并且我们有如下展开式

$$Bf(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (f, \Phi_\alpha)\, \zeta_\alpha(w).$$

由于函数 ζ_α 在 $L^2(\mathbb{C}^n, d\nu)$, 中构成正交归一系，由厄米展开的普朗歇尔定理可得

$$\int_{\mathbb{C}^n} |Bf(w)|^2\, d\nu_n(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |(f, \Phi_\alpha)|^2 \, = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx.$$

因此，对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，其巴格曼变换 Bf 是一个整函数，并且关于 $d\nu_n$. 平方可积

我们将福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 定义为 $L^2(\mathbb{C}^n, d\nu)$ 中由整函数构成的子空间。显然， $B: L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 是一个等距映射。可以证明，任意 $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 都可表示为 Bf，其中 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 唯一。 这使得 B 成为幺正映射，其逆映射由其伴随算子 B^*. 给出。_ $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 的再生核为 $\pi^{-n/2} e^{\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}$.。这意味着对于任意 $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$，我们有

$$\pi^{-n/2} \int_{\mathbb{C}^n} F(w)\, e^{\frac{1}{2}z\cdot\bar{w}}\, d\nu_n(w)\, dw = F(z).$$

2.2.海森堡群与韦尔变换。我们先回顾海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 及其表示的一些众所周知的事实。更多详情请参阅专著 [7, 18]。群 $\mathbb{H}^n$ 就是赋予群运算律的 $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$

$$(z,t)(w,s) = (z + w, t + s + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(z \cdot \bar{w})).$$

注意，若令 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则 $\mathrm{Im}(z \cdot \bar{w}) = (u \cdot y - x \cdot v)$ 无非是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的辛形式 $[\xi, \eta]$，作用于 $\xi = (x, u)$ 和 $\eta = (y, v)$ 之间。 因此，群运算律也可以写成如下形式

$$(\xi, t)(\eta, s) = (\xi + \eta, t + s + \frac{1}{2}[\xi, \eta]).$$

群 $\mathbb{H}^n$ 是一个二步幂零李群，因此它是幺模的，其哈尔测度就是 $\mathbb{R}^{2n+1}$. 上的勒贝格测度。空间 $L^p(\mathbb{H}^n)$ 是相对于勒贝格测度定义的。两个函数 f, $g \in L^1(\mathbb{H}^n)$ 之间的卷积按通常方式定义

$$f * g(\xi, t) = \int_{\mathbb{H}^n} f((\xi, t)(\eta, s)^{-1})\, g(\eta, s)\, d\eta\, ds.$$

海森堡群上的卷积会为 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的函数产生一族称为扭曲卷积的卷积。为了定义它们，我们先引入一些记号。对于一个

函数 $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$，我们用 f^λ 表示 f 关于中心变量的逆傅里叶变换（相差一个常数因子），其定义如下：

$$f^\lambda(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t)\, e^{i\lambda t}\, dt.$$

由于 $(\eta, s)^{-1} = (-\eta, -s)$，经过简单计算可得

$$(f * g)^\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^\lambda(\xi - \eta)\, g^\lambda(\eta)\, e^{i\frac{\lambda}{2}[\xi,\eta]}\, d\eta.$$

右侧定义了所谓的 λ-扭卷积，作用于 f^λ 与 g^λ，记作 $f^\lambda *_\lambda g^\lambda$. 通过定义 λ-扭平移 $\tau_\lambda(\eta)$，使其满足方程

$$\tau_\lambda(\eta) g^\lambda(\xi) = g^\lambda(\xi - \eta)\, e^{-i\frac{\lambda}{2}[\xi,\eta]}, \tag{2.2}$$

we 可见，扭卷积 $f^\lambda *_\lambda g^\lambda$ 由以下积分给出 1

$$f^\lambda *_\lambda g^\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^\lambda(\eta)\, \tau_\lambda(\eta) g^\lambda(\xi)\, d\eta. \tag{2.3}$$

对中心变量作部分傅里叶变换是一种有用的技巧，它能将 $\mathbb{H}^n$ 上的问题化为 $\mathbb{R}^{2n}$.上的问题

现在我们简要回顾定义群傅里叶变换所需的 $\mathbb{H}^n$ 表示论。对每个 $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,$，都有一个 $\mathbb{H}^n$ 在 L^2上的不可约酉表示π_λ $(\mathbb{R}^n)$，其显式形式为

$$\pi_\lambda(x, y, t) f(\xi) = e^{i\lambda t} e^{i\lambda(x\cdot\xi + \frac{1}{2}x\cdot y)} f(\xi + y), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

我们用记号 $\pi_\lambda(x,\ y)$ 表示算子 $\pi_\lambda(x,\ y,\ 0)$。函数$f \in L^1(\mathbb{H}^n)$的傅里叶变换是算子值函数

$$\hat{f}(\lambda) =: \int_{\mathbb{H}^n} f(\xi, t)\, \pi_\lambda(\xi, t)\ d\xi\, dt.$$

回顾 π_λ和 f^λ的定义，我们看到 $\hat{}\ f(\lambda) = \pi_\lambda(f^\lambda)$，其中

$$\pi_\lambda(f^\lambda) =: \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^\lambda(\xi)\, \pi_\lambda(\xi)\, d\xi$$

称为 f^λ. 的韦尔变换。通过研究韦尔变换，可以证明函数 $f \to \hat{}f$ 在 $\mathbb{H}^n$ 上的傅里叶变换的性质。

最初定义在 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \cap L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上的韦尔变换，可以扩展到整个 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$，成为希尔伯特–施密特算子。它将 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 映射到作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的希尔伯特–施密特算子空间 $\mathcal{S}_2$ 。韦尔变换的反演公式为

$$f(x, u) = (2\pi)^{-n/2} |\lambda|^{n/2}\ \mathrm{tr}(\pi_\lambda(-x, -u)\pi_\lambda(f)). \tag{2.4}$$

可以证明 $\pi_\lambda(f *_\lambda g) = \pi_\lambda(f)\ \pi_\lambda(g)$。我们来考虑量子力学中的位置算符和动量算符，

$$Q_j\varphi(\xi) = \xi_j\, \varphi(\xi) \quad \text{and} \quad P_j\varphi(\xi) = \partial_{\xi_j}\varphi(\xi)$$

作用于 $\mathbb{R}^n$ 上的适当函数 φ 。此外，对于任意两个算子 A 和 B，令 $[A, B]$ 表示交换子 $AB - BA.$ 。下一命题中陈述的关系在本文中起着重要作用。

Prop命题 2.1. 对于任意 $g \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，若 $x_j g, u_j g \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，则有

$$\pi_\lambda(\lambda x_j g) = i[\pi_\lambda(g), P_j], \quad \pi_\lambda(u_j g) = [\pi_\lambda(g), Q_j].$$

上述关系的证明见 [13, 命题 2.3]。算子 $[\pi_\lambda(f)\ P_j]$ 和$[\pi_\lambda(f)\ Q_j]$ 已用于研究 Weyl 乘子，并证明海森堡群上的 Paley-Wiener 定理，参见文献 [14, 16, 1]。我们还需要海森堡群上傅里叶变换的一些其他性质，陈述如下。令

$$\widetilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad \widetilde{Y}_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

为海森堡群上的右不变向量场，它们构成其李代数的一组基。以下关系已在 [13, 命题 2.3]中得到证明。

Pr命题 2.2. 在函数 f 在 $\mathbb{H}^n$上满足适当条件时，有

$$\widehat{(i\widetilde{X}_j f)}(\lambda) = \lambda\, Q_j\, \widehat{f}(\lambda) \quad and \quad \widehat{(-\widetilde{Y}_j f)}(\lambda) = P_j\, \widehat{f}(\lambda).$$

回顾 $\widehat{f}(\lambda) = \pi_\lambda(f^\lambda)$ 对任意函数 f在 $\mathbb{H}^n$上成立，并定义

$$\widetilde{X}_j^\lambda = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{i}{2}\lambda y_j, \ \ \widetilde{Y}_j^\lambda = \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{i}{2}\lambda x_j$$

我们可以很容易地得到以下关系:

$$\pi_\lambda(i\widetilde{X}_j^\lambda f^\lambda) = \lambda\, Q_j \pi_\lambda(f^\lambda) \quad \text{and} \quad \pi_\lambda(-\widetilde{Y}_j^\lambda f^\lambda) = P_j\, \pi_\lambda(f^\lambda)$$

通过定义复向量场

$$Z_j^\lambda = (\widetilde{X}_j^\lambda + i\widetilde{Y}_j^\lambda) \quad \text{and} \quad \overline{Z}_j^\lambda = (\widetilde{X}_j^\lambda - i\widetilde{Y}_j^\lambda)$$

上述公式也可以写成如下形式

$$\pi_\lambda(Z_j^\lambda f^\lambda) = -iA_j(\lambda)\pi_\lambda(f^\lambda) \quad \text{and} \quad \pi_\lambda(\overline{Z}_j^\lambda f^\lambda) = -iA_j^*(\lambda)\pi_\lambda(f^\lambda) \tag{2.5}$$

其中，$A_j(\lambda)$ 和 $A_j^*(\lambda)$ 是量子力学中的湮灭算子与产生算子:

$$A_j(\lambda) = \partial_{\xi_j} + |\lambda|\xi_j \quad \text{and} \quad A_j^*(\lambda) = -\partial_{\xi_j} + |\lambda|\xi_j. \tag{2.6}$$

2.3. 扭曲巴格曼变换与扭曲福克空间。众所周知，巴格曼变换 B 与 $\mathbb{H}^n$ 的薛定谔表示 π 密切相关，而该表示与在福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 上实现的一个表示酉等价。类似地，对于每个非零的 $\lambda \in \mathbb{R}$，都有一个幂零李群 $\mathbb{H}_\lambda^n$，称为扭曲海森堡群；还有一个在空间 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 上实现的酉表示 ρ_λ，该空间称为扭曲福克空间。此外，还有一种扭曲版本的巴格曼变换，记为 B_λ，它将 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 酉映射到 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$。我们首先回顾必要的背景材料，以陈述关于 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 的相关结果。本节的基本参考文献是 [12, 9, 20]。关于厄米算子和特殊厄米算子的相关结果，读者也可参阅 [17, 18] 。

除了在 $\mathbb{R}^n$ 上的厄米算子 $H(\lambda)$，我们还考虑在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的特殊厄米算子 L_λ，它生成半群 e^{-tL_λ}. 。众所周知，与该半群相关联的（扭曲）卷积核为

$$p_t^\lambda(x,u) = (4\pi)^{-n}\, \lambda^n (\sinh t\lambda)^{-n}\, e^{-\frac{1}{4}\lambda(\coth t\lambda)(|x|^2+|u|^2)},$$

因此 $e^{-tL_\lambda} f = f *_\lambda p_t^\lambda$.。核 $p_t^\lambda(x,\ u)$ 可全纯延拓为 $p_t^\lambda(z,\ w)$，定义在 $\mathbb{C}^{2n}$. 上。扭曲巴格曼变换 B_λ 在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上定义为

$$B_\lambda f(z,w) = (2\pi)^{-n/2}\,|\lambda|^{n/2}\,c_{n,\lambda}\;p_1^\lambda(z,w)^{-1}\;\mathrm{tr}\left(\pi_\lambda(-z,-w)\pi_\lambda(f)e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}\right) \tag{2.7}$$

其中 $c_{n,\lambda} = (4\pi)^{-n}\,\lambda^n(\sinh\lambda)^{-n}$. 鉴于 Weyl 变换的反演公式 (2.4)，并利用 $\pi_\lambda(p_t^\lambda) = e^{-tH(\lambda)}$, 这一事实，扭曲巴格曼变换也可表示为

$$B_\lambda f(z,w) = \ c_{n,\lambda}\;p_1^\lambda(z,w)^{-1}\,f *_\lambda p_{1/2}^\lambda(z,w).$$

$L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 在 B_λ 下的像已知是一个加权伯格曼空间，其权函数的显式形式为

$$w_\lambda(\zeta) = 4^n c_{n,\lambda}\;e^{-\frac{1}{2}\lambda(\coth\lambda)|\zeta|^2}\,e^{\lambda[\mathrm{Re}\,\zeta,\,\mathrm{Im}\,\zeta]},\ \zeta=(z,w).$$

这里，$[\xi,\eta]$ 是定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的辛形式，其定义为 $[(x,u),(y,v)] = (u\cdot y - v\cdot x)$，常数$c_{n,\lambda}$ 的选取使得 B_λ 为等距映射:

$$\int_{\mathbb{C}^{2n}} |B_\lambda f(z,w)|^2\,w_\lambda(z,w)\,dz\,dw = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x,u)|^2\,dx\,du.$$

扭曲福克空间 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 定义为 $\mathbb{C}^{2n}$ 上所有整函数构成的空间，这些函数关于测度 $w_\lambda(\zeta)\,d\zeta$ 平方可积，其中 $d\zeta$ 是 $\mathbb{C}^{2n}$. 上的勒贝格测度。赋予其内积

$$\langle F,G\rangle = \int_{\mathbb{C}^{2n}} F(\zeta)\,\overline{G(\zeta)}\,w_\lambda(\zeta)\,d\zeta,$$

空间 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 成为一个再生核希尔伯特空间，而巴格曼变换B_λ：$L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 成为一个酉算子。 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 的再生核有显式表达式。对于 $\zeta=(z,\ w)$ $\zeta'=(z',\ w')$，我们将 $[\zeta,\zeta'] = (w\cdot z' - z\cdot w')$ 定义为辛形式在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上到 $\mathbb{C}^{2n}$. 的延拓。采用这一记号，再生核可表示为

$$K_\zeta^\lambda(\zeta') = d_{n,\lambda}\;e^{\frac{\lambda}{2}(\coth\lambda)\,(\overline{\zeta}\cdot\zeta')}\,e^{i\frac{\lambda}{2}\,[\overline{\zeta},\zeta']} \tag{2.8}$$

其中 $d_{n,\ \lambda}$ 是一个依赖于 λ 和维数的显式常数。值得注意的是，当 $\lambda=0$ 时，核 $K_\zeta^0(\zeta')$ 是福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 的再生核的一个常数倍。关于这一变换及其更多性质，读者可参阅 [12, 9] 。 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 的更多性质。我们注意到，当 $\lambda=0$ 时，扭曲福克空间退化为经典福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$。

注记 2.3。 由于 $p_{1/2}^\lambda *_\lambda p_{1/2}^\lambda = p_1^\lambda$，可得 $B_\lambda p_{1/2}^\lambda = c_{n,\ \lambda}$ 因此常数 $c_{n,\ \lambda}$由以下方程确定

$$4^n c_{n,\lambda}^3 \int_{\mathbb{C}^{2n}} e^{-\frac{1}{2}\lambda(\coth\lambda)|\zeta|^2}\,e^{\lambda[\mathrm{Re}\,\zeta,\,\mathrm{Im}\,\zeta]}\,d\zeta = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |p_{1/2}^\lambda(x,u)|^2\,dx\,du.$$

特别地，在极限情形下，我们得到 $c_{n,0} = (4\pi)^{-n}$，于是 $w_0(z,w)dzdw = d\nu_0(z,w)$.类似地，定义 $K_\zeta^\lambda(\zeta')$ 中的常数 $d_{n,\lambda}$ 由下式给出

$$F(\zeta) = 4^n d_{n,\lambda}\int_{\mathbb{C}^{2n}} F(\zeta')\;e^{\frac{\lambda}{2}(\coth\lambda)\,(\overline{\zeta'}\cdot\zeta)}\,e^{i\frac{\lambda}{2}\,[\overline{\zeta'},\zeta]}\,w_\lambda(\zeta')\,d\zeta'.$$

取 $F(\zeta) = c_{n,\lambda}$ ，我们便可轻易求得常数 $d_{n,\lambda}$. 。令 λ 趋于零并取极限，可知 $4^n K_\zeta^0(\zeta')$ 是 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 的再生核，因此 $d_{n,0} = (4\pi)^{-n}$.

2.4. 有界线性算子空间上的导子。 我们用 $B(L^2(\mathbb{R}^n))$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上所有有界线性算子的空间。给定一个稠密定义的线性算子 A 和 $T \in B(L^2(\mathbb{R}^n))$，我们在其有意义且可视为 $B(L^2(\mathbb{R}^n))$ 中的元素时，定义 $\partial_A(T) = [T, A] = TA - AT$。那么容易验证，$\partial_A(ST) = \partial_A(S)T + S\partial_A(T)$，因此 ∂_A 称为一个导子。两个导子 ∂_A 和 ∂_B 一般不交换。由于 $[[T, A], B] = TAB - ATB - BTA + BAT$，我们可以改写上式，得到

$$\partial_B \circ \partial_A(T) = T[A, B] + TBA - ATB - BTA - [A, B]T + ABT.$$

由上述关系，我们很容易推导出，当 $[A, B] = cI$. 时，∂_A 与 ∂_B 交换

式 (2.6) 中定义的湮灭算子与产生算子之所以得名，是因为它们对厄米函数的作用如下所示:

$$A_j(\lambda)\Phi_\alpha^\lambda = \sqrt{2\alpha_j|\lambda|}\,\Phi_{\alpha-e_j}^\lambda \quad \text{and} \quad A_j(\lambda)^*\Phi_\alpha^\lambda = \sqrt{(2\alpha_j+2)|\lambda|}\,\Phi_{\alpha+e_j}^\lambda.$$

导子 $\partial_{A_j(\lambda)}$ 和 $\partial_{A_j^*(\lambda)}$ 在本文中发挥着重要作用。容易看出 $[A_j(\lambda)\ A_k^*(\lambda)] = 2|\lambda|\delta_{jk}\,I$，因此可得 $\{\partial_{A_j(\lambda)}\ \partial_{A_j^*(\lambda)}:\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ 是一个交换导子族。这些导子对厄米半群的作用很容易计算。

引理 2.4. 对于任意 $\lambda \neq 0$、$t > 0$ 和 $j = 1, 2, \ldots, n$，有

$$\partial_{A_j(\lambda)} e^{-tH(\lambda)} = (e^{2t|\lambda|} - 1)A_j(\lambda)e^{-tH(\lambda)},\ \partial_{A_j(\lambda)^*} e^{-tH(\lambda)} = (e^{-2t|\lambda|} - 1)A_j(\lambda)^* e^{-tH(\lambda)}.$$

证明。证明可通过直接计算得到，计算中用到了上一段给出的产生算子与湮灭算子对厄米函数的作用。□

3. 厄米函数的算子类比

3.1. 福克空间的变形。 本小节将说明，福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 与扭曲福克空间 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 之间存在一种非常简单的关系，这种关系在定义厄米函数的算子类比时起着重要作用。我们感谢 Venku Naidu（个人通信）提醒我们注意到这一点。

对于非零的 $\lambda \in \mathbb{R}$，令 δ_λ 表示膨胀 $\delta_\lambda\zeta = (\ ^\lambda\text{双曲正弦}\ \lambda)^{1/2}\zeta$，其中 $\zeta \in \mathbb{C}^{2n}$.。我们还定义 $c_\lambda =$ 双曲余弦 λ 和 $s_\lambda =$ 双曲正弦 λ.。令 σ_λ: $\mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ 表示由下式定义的线性变换

$$\sigma_\lambda(z, w) = \delta_\lambda(c_{\lambda/2}z - is_{\lambda/2}w, c_{\lambda/2}w + is_{\lambda/2}z).$$

于是得到以下结果，它表明 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 可以视为 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 的一种变形。

命题 3.1。 定义在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 上的映射 T_λ 由 $T_\lambda F(\zeta) = a_{n,\lambda}\,F(\sigma_\lambda\zeta)$ 给出，其中 $a_{n,\lambda} = \pi^{n/2}\sqrt{c_{n,\lambda}}$，它是从 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 到 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 的等距同构。

证明。对于任意 $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$，考虑积分

$$\int_{\mathbb{C}^{2n}} |F(\zeta)|^2\, w_0(\zeta)\, d\zeta.$$

由于行列式 $4n \times 4n$ 与该线性变换相关联的实矩阵的行列式

$$(z, w) \to (c_{\lambda/2} z - i s_{\lambda/2} w, c_{\lambda/2} w + i s_{\lambda/2} z)$$

为单位元，我们可以在最后一个积分中进行变量替换，得到

$$\int_{\mathbb{C}^{2n}} |F(\zeta)|^2 \, w_0(\zeta) \, d\zeta = \left(\frac{\lambda}{\sinh \lambda} \right)^{2n} \int_{\mathbb{C}^{2n}} |F(\sigma_\lambda \zeta)|^2 \, w_0(\sigma_\lambda \zeta) \, d\zeta.$$

鉴于易于验证的关系 $c_n^{-1}{}_{,0} \, w_0(\sigma_\lambda \zeta) = 4^{-n} c_n^{-1}{}_{,\lambda} \, w_\lambda(\zeta)$, 上述恒等式意味着，只要 $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$, 就有

$$\int_{\mathbb{C}^{2n}} |T_\lambda F(\zeta)|^2 \, w_\lambda(\zeta) \, d\zeta = \int_{\mathbb{C}^{2n}} |F(\zeta)|^2 \, w_0(\zeta) \, d\zeta$$

由于该映射显然是可逆的，命题得证。 □

注 3.2。 通过直接计算，我们还可以验证

$$e^{\frac{1}{2}(\sigma_\lambda \zeta') \cdot \overline{(\sigma_\lambda \zeta)}} = e^{\frac{1}{2} \lambda (\coth \lambda)(\zeta' \cdot \bar{\zeta})} e^{-i \frac{\lambda}{2} [\zeta', \bar{\zeta}]}.$$

因此，对于任意 $F \in \mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$，利用 $d_{n,\,0} \, e^{\frac{1}{2} \zeta' \cdot \bar{\zeta}}$是再生核这一事实，我们有

$$F(\sigma_\lambda \zeta) = (4\pi)^{-n} \int_{\mathbb{C}^{2n}} F(\zeta') \, e^{\frac{1}{2}(\sigma_\lambda \zeta) \cdot \bar{\zeta}'} \, w_0(\zeta') d\zeta'.$$

与之前一样，我们作相同的变量替换，将上式改写为

$$F(\sigma_\lambda \zeta) = (4\pi)^{-n} \left(\frac{\lambda}{\sinh \lambda} \right)^{2n} \int_{\mathbb{C}^{2n}} F(\sigma_\lambda \zeta') \, e^{\frac{1}{2} \sigma_\lambda \zeta \cdot \overline{\sigma_\lambda \zeta'}} \, w_0(\sigma_\lambda \zeta') \, d\zeta'.$$

根据上述计算，可得再生公式

$$T_\lambda F(\zeta) = \int_{\mathbb{C}^{2n}} T_\lambda F(\zeta') \, \overline{K_\zeta^\lambda(\zeta')} \, w_\lambda(\zeta') \, d\zeta'.$$

注3.3。上述福克空间与扭曲福克空间之间的关系带来了一些有趣的结论。例如，考虑定义在 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 上的如下 Toeplitz 算子 T_g:

$$T_g F(\zeta) = \int_{\mathbb{C}^{2n}} g(\zeta') \, F(\zeta') \, e^{\frac{1}{2} \lambda \coth \lambda (\zeta \cdot \bar{\zeta}')} e^{-i \frac{\lambda}{2} [\zeta, \bar{\zeta}']} \, w_\lambda(\zeta') \, d\zeta'.$$

I如果令 $F_0(\zeta) = F(\sigma_\lambda^{-1} \zeta)$ 且 $g_0(\zeta) = g(\sigma_\lambda^{-1} \zeta)$，那么可以验证 t

$$T_{g_0} F_0(\sigma_\lambda \zeta) = \int_{\mathbb{C}^{2n}} g_0(\zeta') \, F_0(\zeta') \, e^{\frac{1}{2}(\sigma_\lambda \zeta) \cdot \bar{\zeta}'} \, w_0(\zeta') \, d\zeta' = C_\lambda \, T_g F(\zeta).$$

因此，Toeplitz 算子 T_g 在 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 上有界，当且仅当 T_{g_0} 在$\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 上有界；而在 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 上研究 Toeplitz 算子，可以归结为在 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$ 上研究这类算子。

3.2. **算子 或厄米函数的类似物**。对于每个多重指标 $\mu \in \mathbb{N}^{2n}$ le t

$$\zeta_\mu(z,w) = c_\mu\,(z,w)^\mu,\ \ c_\mu = \pi^{-n/2}(2^{|\mu|}\mu!)^{-1/2}.$$

由此可知， ζ_μ， $\mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 是 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$的正交归一基。因此， $T_\lambda\zeta_\mu$， $\mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 构成 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$中的正交归一系。于是，存在函数 $\Psi_\mu^\lambda \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，使得 $B_\lambda\Psi_\mu^\lambda(z,\ w) = a_{n,\ \lambda}\,\zeta_\mu(\sigma_\lambda(z,\ w))$。回忆 a_n的定义，λ可将其转化为下列方程

$$\zeta_\mu(\sigma_\lambda(z,w)) = \pi^{-n/2}\sqrt{c_{n,\lambda}}\ p_1^\lambda(z,w)^{-1}\Psi_\mu^\lambda *_\lambda p_{1/2}^\lambda(z,w).$$

对方程两边取韦尔变换

$$\delta_\lambda^{|\mu|}\,c_\mu\,(c_{\lambda/2}x - is_{\lambda/2}u, c_{\lambda/2}u + is_{\lambda/2}x)^\mu\,p_1^\lambda(x,u) = \pi^{-n/2}\sqrt{c_{n,\lambda}}\ \Psi_\mu^\lambda *_\lambda p_{1/2}^\lambda(x,u).$$

可得到如下关系

$$\pi^{n/2}c_{n,\lambda}^{-1/2}\,c_\mu\,\delta_\lambda^{|\mu|}\pi_\lambda((x,u)_\lambda^\mu\,p_1^\lambda(x,u)) = \pi_\lambda(\Psi_\mu^\lambda)\,e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}.$$

在上述表达式中，我们将 $(x,u)_\lambda$ 简写为 $(c_{\lambda/2}x - is_{\lambda/2}u, c_{\lambda/2}u + is_{\lambda/2}x)$。

现在我们使用命题 2.1 中给出的以下关系。对于适当的 $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，有

$$\pi_\lambda(\lambda x_j f) = i\partial_{P_j}\pi_\lambda(f),\ \ \pi_\lambda(u_j f) = \partial_{Q_j}\pi_\lambda(f).$$

不失一般性，从现在起我们假设 $\lambda > 0$，并为使记号简洁而省略对 λ 的依赖。对于 $1 \le j \le n$, 定义

$$D_j = i(c_{\lambda/2}\partial_{P_j} - \lambda\,s_{\lambda/2}\partial_{Q_j})\ \ D_{j+n} = (\lambda c_{\lambda/2}\partial_{Q_j} - s_{\lambda/2}\partial_{P_j})$$

并令 $D^\mu = D_1^{\mu_1}D_2^{\mu_2}\cdots D_{2n}^{\mu_{2n}}$.。由于 $\pi_\lambda(p_t^\lambda) = e^{-tH(\lambda)}$，显然 $\pi_\lambda(\Psi_\mu^\lambda)$ 满足方程

$$\pi_\lambda(\Psi_\mu^\lambda)\,e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)} = c_\mu^\lambda\,(\lambda s_\lambda)^{-|\mu|/2}\,D^\mu e^{-H(\lambda)},\ \ c_\mu^\lambda = \pi^{n/2}c_{n,\lambda}^{-1/2}\,c_\mu\,.$$

上述方程与厄米函数的定义相似，这表明算子 $S_\mu^\lambda = \pi_\lambda(\Psi_\mu^\lambda)$ 可以看作厄米函数的算子类比。由于没有更合适的名称，我们想称它们为量子厄米函数。下面的定理进一步强化了这种类比。

定理 3.4。 $\mathcal{S}_2$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上赋予内积 $(S,T) = \mathrm{tr}(ST^*)$ 的希尔伯特–施密特算子希尔伯特空间。则算子族 $S_\mu^\lambda, \mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 构成 $\mathcal{S}_2$. 的正交归一基

证明。 我们已经证明， T_λ： $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n}) \to \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 是一个满射等距同构，因此可得

$$\int_{\mathbb{C}^{2n}} T_\lambda F(\zeta)\,\overline{T_\lambda G(\zeta)}\,w_\lambda(\zeta)\,d\zeta = \int_{\mathbb{C}^{2n}} F(\zeta)\,\overline{G(\zeta)}\,w_0(\zeta)\,d\zeta.$$

由于 $\zeta_\mu, \mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 是 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^{2n})$, 的正交归一基，显然 $T_\lambda\zeta_\mu, \mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 构成 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$. 的正交归一基。此外， B_λ： $L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 和 π_λ： $L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{S}_2$是幺正的。因此 $\Psi_\mu^\lambda, \mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 的正交归一基，从而 $S_\mu^\lambda, \mu \in \mathbb{N}^{2n}$结果是 $\mathcal{S}_2$. □的正交归一基

接下来，我们将进一步揭示厄米函数与其算子类比之间的相似之处。回顾定义了 $\mathbb{R}^{2n}$, 上的归一化埃尔米特函数 Φ_μ 的方程 $\Phi_\mu(\xi)e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}=(-1)^{|\mu|}\,c_\mu\,\partial_\xi^\mu e^{-|\xi|^2}$，可得关系式

$$(-\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\xi_j)\Phi_\mu(\xi)=\sqrt{2\mu_j+2}\,\Phi_{\mu+e_j}(\xi).$$

对于算子 $S_\mu^\lambda.$，我们也有类似的结果。注意，由于 $[P_j,Q_j]=I$，可知D_j 是一个交换导子族。将导子 D_j 作用于定义关系$S_\mu^\lambda e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}= c_\mu^\lambda(\lambda\sinh\,\lambda)^{-|\mu|/2}\,D^\mu e^{-H(\lambda)}$，得到

$$D_jS_\mu^\lambda\,e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}+S_\mu^\lambda\,D_je^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}=\sqrt{\lambda\sinh\lambda}\,\sqrt{2\mu_j+2}\;S_{\mu+e_j}^\lambda e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}.$$

令 $M_j=M_j(\lambda)\;=(D_je^{-\frac{1}{2}H(\lambda)})e^{\frac{1}{2}H(\lambda)}$，我们定义 $\mathcal{A}_jT=D_jT+TM_j.$于是有

$$\mathcal{A}_jS_\mu^\lambda=\sqrt{\lambda\sinh\lambda}\,\sqrt{2\mu_j+2}\;S_{\mu+e_j}^\lambda. \tag{3.1}$$

通过计算算子 M_j 作用于厄米函数 Φ_α^λ 在 $\mathbb{R}^n$.上的结果，我们可以明确写出这些算子

回忆一下湮灭算子与产生算子 $A_j=\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\lambda\xi_j$ 和 $A_j^*=-\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\lambda\xi_j$。将 P_j和 Q_j 用 A_j 和 A_j^* 表示，我们得到

$$D_j=\frac{i}{2}(e^{-\lambda/2}\partial_{A_j}-\,e^{\lambda/2}\partial_{A_j^*}),\;\;D_{j+n}=\frac{1}{2}(e^{\lambda/2}\partial_{A_j^*}+\,e^{-\lambda/2}\partial_{A_j}).$$

引理 2.4 中的计算表明

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda/2}\,\partial_{A_j}e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}=s_{\lambda/2}\,A_j\,e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)},\;\;\frac{1}{2}e^{\lambda/2}\,\partial_{A_j^*}\,e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}=-s_{\lambda/2}\,A_j^*\,e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}.$$

鉴于此，可得对于 $1\le j\le n$,

$$D_je^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}=2i\,s_{\lambda/2}\,\lambda\,Q_je^{-\frac{1}{2}H(\lambda)},\;\;D_{j+n}e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}=2\,s_{\lambda/2}\,P_je^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}.$$

这证明了 $M_j=2i\,s_{\lambda/2}\,\lambda\,Q_j$和 $M_{j+n}=2\,s_{\lambda/2}\,P_j.$因此我们有如下结果。

命题 3.5. 对于 $1\le j\le n$，考虑定义在 $\mathcal{S}_2$ 上的下列算子 :

$$\mathcal{A}_jT=D_jT+2i\,s_{\lambda/2}\,\lambda\,TQ_j,\;\;\mathcal{A}_{j+n}T=D_{j+n}T+2\,s_{\lambda/2}\,TP_j.$$

令 $\mathcal{A}_j^*$ 表示 $\mathcal{A}_j$ 在 $\mathcal{S}_2.$ 上的形式伴随，则有

$$\mathcal{A}_jS_\mu^\lambda=\sqrt{\lambda\sinh\lambda}\,\sqrt{2\mu_j+2}\,S_{\mu+e_j}^\lambda,\;\;\mathcal{A}_j^*S_\mu^\lambda=\sqrt{\lambda\sinh\lambda}\,\sqrt{2\mu_j}\,S_{\mu-e_j}^\lambda.$$

因此， S_μ^λ 是算子 $\mathcal{H}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\left(\mathcal{A}_j\mathcal{A}_j^*+\mathcal{A}_j^*\mathcal{A}_j\right)$ 的特征向量，其特征值为$(\lambda$ 双曲正弦 $\lambda)\,($ $2|\mu|+2n)$。

证明。关于 $\mathcal{A}_j$ 的结论由 (3.1) 得出。为证明$\mathcal{A}_j^*$ 也有同样的结论，考虑将 $\mathcal{A}_j^*S_\mu^\lambda$ 按 $S_{\mu'}^\lambda$ 展开:

$$\mathcal{A}_j^*S_\mu^\lambda=\sum_{\mu'\in\mathbb{N}^{2n}}(\mathcal{A}_j^*S_\mu^\lambda,S_{\mu'}^\lambda)\,S_{\mu'}^\lambda=\sum_{\mu'\in\mathbb{N}^{2n}}(S_\mu^\lambda,\mathcal{A}_jS_{\mu'}^\lambda)\,S_{\mu'}^\lambda.$$

系统 $S_{\mu'}^\lambda$，$\mu'\in\mathbb{N}^{2n}$ 的正交归一性，结合关于 $\mathcal{A}_j$ 的结果，证明了我们关于 $\mathcal{A}_j^*.$ 的主张。关于 $\mathcal{H}$ 的主张是由关于 $\mathcal{A}_j$ 的结果及其伴随算子推得的。□

注 3.6。 根据引理 2.4 的结果，我们可以轻易计算出 $S^\lambda_{e_j}$，其中 e_j 是 $\mathbb{R}^{2n}$. 中的坐标向量。事实上，对于 $1 \le j \le n$，我们有

$$D_j e^{-H(\lambda)} = i \sinh\lambda \left(e^{\lambda/2} A_j + e^{-\lambda/2} A_j^*\right) e^{-H(\lambda)},$$

$$D_{j+n} e^{-H(\lambda)} = \sinh\lambda \left(e^{\lambda/2} A_j - e^{-\lambda/2} A_j^*\right) e^{-H(\lambda)}.$$

因此， $S^\lambda_{e_j}$具有如下形式： $P(A_j, A_j^*)\ e^{-\frac{1}{2}H}(\lambda)$，其中 P是关于两个变量的一次多项式。我们还可以说， $S^\lambda_{e_j}$ 是如下形式的算子的线性组合： $R_j = A_j e^{-\frac{1}{2}H}(\lambda)$ 和 $R_j^* = A_j^* e^{-\frac{1}{2}H}(\lambda)$。由于 D_j, $1 \le j \le 2n$是一个交换导子族，我们很容易通过迭代证明，对于任意 $\mu \in \mathbb{N}^{2n}$，都存在关于 $2n$个变量的多项式 $P_\mu(x,u)$，使得 $S^\lambda_\mu = P_\mu(A, A^*) e^{-\frac{1}{2}H}(\lambda)$，其中 $A = (A_j)$ 且 $A^* = (A_j^*)$。

可以证明， $S^\lambda_\mu = P^\lambda_\mu(A, A^*) e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}$是零阶伪微分算子，因此在所有 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上都有界。对此还有另一种理解方式。我们可以使用 Mauceri [14] 的转移定理。根据该定理，若 $M \in B(L^2(\mathbb{R}^n))^\sim$ $^\sim$使得由 $\pi_\lambda(T_M f) = \pi_\lambda(f) M$定义的 Weyl乘子 T_M在 $L^p(\mathbb{R}^{2n})$ 上有界，则 M 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界。由于 $\pi_\lambda(\Psi^\lambda_\mu) = S^\lambda_\mu$，显然 $f \to f *_\lambda \Psi^\lambda_\mu$ 是一个右Weyl乘子。此外，对所有 $1 \le p \le \infty.$ ，该算子在 $L^p(\mathbb{R}^{2n})$ 上有界。因此我们得到以下结果。

命题 3.7。 对任意 $\mu \in \mathbb{N}^{2n}$, S^λ_μ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界，对所有 $1 < p < \infty.$ 均成立。此外，S^λ_μ 属于 *Schatten-von Neumann*类 $\mathcal{S}_p$ ，对任意 $1 \le p < \infty$.均成立

证明。 由于 $S^\lambda_\mu \in \mathcal{S}_2$， 我们只需证明它是迹类。一旦知道这一点，就可以利用插值和对偶证明其余结论。利用 Hermite基 Φ^λ_α， $\alpha \in \mathbb{N}^n$，可得 $|(S^\lambda_\mu \Phi^\lambda_\alpha,\ \Phi^\lambda_\alpha)| = O((2|\alpha| + n)^{|\mu|/2}) e^{-\frac{1}{2}(2|\alpha|+n)}$ $^{|\lambda|}$.由此证明了 $S^\lambda_\mu \in \mathcal{S}_1$. □

注 3.8。 算子 $P_\mu = P_\mu(A,\ A^*)$ 是由关系式 $\Phi_\alpha(x) = H_\alpha(x) e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$. 定义的（归一化）厄米多项式的算子类比。回想一下， H_α， $\alpha \in \mathbb{N}^n$，构成了 $L^2(\mathbb{R}^n,\ d\gamma)$ 的正交归一基，其中 $d\gamma(x) = e^{-|x|^2}\, dx$ 是高斯测度。令 $\mathcal{S}_2(\gamma)$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上满足 $T e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)} \in \mathcal{S}_2$. 的线性算子 T 子空间。我们在 $\mathcal{S}_2(\gamma)$ 上赋予内积

$$(T, S)_\gamma = (T e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}, S e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}) = \mathrm{tr}(e^{-H(\lambda)} S^* T)$$

这使其成为一个希尔伯特空间。显然， $(P_\mu, P_\nu)_\gamma = (S^\lambda_\mu, S^\lambda_\nu)$，因此$P_\mu, \mu \in \mathbb{N}^{2n}$, 构成了 $\mathcal{S}_2(\gamma)$. 的一组正交归一基。

注 3.9. 令 $L^2_\gamma(\mathbb{R}^{2n})$表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的所有缓增分布 f 所构成的空间，满足 $f *_\lambda p^\lambda_{1/2} \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$. 则可知， $\pi_\lambda :\ L^2_\gamma(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{S}_2(\gamma)$ 建立了一一对应。因此，对于任意 $f \in L^2_\gamma(\mathbb{R}^{2n}),$ ，我们有如下展开式

$$\pi_\lambda(f) = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^{2n}} (\pi_\lambda(f), P_\mu)\, P_\mu$$

其中级数在 $\mathcal{S}_2(\gamma)$中收敛。

3.3. 变形厄米函数。 我们将算子 S_μ^λ 定义为韦尔变换$\pi_\lambda(\Psi_\mu^\lambda)$，因此了解这些函数的形式会很有趣。回想一下， Ψ_μ^λ 由以下方程定义

$$\Psi_\mu^\lambda *_\lambda p_{1/2}^\lambda(x,u) = \pi^{n/2} c_{n,\lambda}^{-1/2}\, \zeta_\mu(\sigma_\lambda(x,u))\, p_1^\lambda(x,u).$$

这与厄米函数满足的方程完全类似。事实上，令 q_t 表示与 $\mathbb{R}^n$ 上的拉普拉斯算子相关联的热核，其显式表达式为

$$q_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{4t}|x|^2}.$$

对厄米函数的定义关系取傅里叶变换

$$\Phi_\alpha(x) e^{-\frac{1}{2}|x|^2} = (-1)^{|\alpha|}\, c_\alpha\, \partial_\alpha e^{-|x|^2}$$

并注意到 Φ_α 是傅里叶变换的特征函数，其特征值为 $(-i)^{|\alpha|}$ ，我们得到方程

$$\Phi_\alpha * q_{1/2}(\xi) = (2\pi)^{n/2} c_\alpha\, (-\xi)^\alpha q_1(\xi).$$

我们来试着计算 Ψ_μ^λ 在 $|\mu|.$取较小值时的一些函数

对于 $\mu = 0$，我们有 $\Psi_0^\lambda(x,\ u) = \pi^{n/2} c_n^{-1/2}.\ _\lambda\ p_{1/2}^\lambda(x,\ u)$，因为此时

$$\Psi_0^\lambda *_\lambda p_{1/2}^\lambda(x,u) = \pi^{n/2} c_{n,\lambda}^{-1/2}\, p_{1/2}^\lambda *_\lambda p_{1/2}^\lambda(x,u) = \pi^{n/2} c_{n,\lambda}^{-1/2}\ p_1^\lambda(x,u).$$

（2.5）中给出的两个一阶微分算子 Z_j^λ和 $\bar{Z}_j^\lambda$满足

$$\pi_\lambda(Z_j^\lambda p_{1/2}^\lambda) = -iA_j e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)},\ \pi_\lambda(\bar{Z}_j^\lambda p_{1/2}^\lambda) = -iA_j^* e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}.$$

由于 $\pi_\lambda(\Psi_{e_j}^\lambda) = S_{e_j}^\lambda$ （其显式表达式已在上面的注释中给出），我们看到，对于 $1 \le j \le n$,

$$\Psi_{e_j}^\lambda(x,u) = (\sinh\lambda)\left(e^{\lambda/2} Z_j^\lambda + e^{-\lambda/2}\bar{Z}_j^*\right) p_{1/2}^\lambda(x,u).$$

并且，对于 $\Psi_{e_{j+n}}^\lambda(x,\ u)$。 通过迭代，我们很容易证明，存在多项式 P_μ，使得 $\Psi_\mu^\lambda(x,\ u) = P_\mu(x,\ u)\, p_{1/2}^\lambda(x,\ u)$。 显然，这族函数 $\Psi_\mu^\lambda,\ \mu \in \mathbb{N}^{2n}$ 构成了 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$的正交归一基。事实证明，函数Ψ_μ^λ 正是经过适当缩放（或变形）的厄米函数。

设 Φ_μ 为 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的标准厄米函数，使得 $B\Phi_\mu = \zeta_\mu.$ 那么根据定义，我们有（$B_\lambda^* \circ T_\lambda \circ B$）$\Phi_\mu = \Psi_\mu^\lambda.$ 事实证明，算子 $B_\lambda^* \circ T_\lambda \circ B$ 是伸缩算子的一个常数倍。

命题 *3.10.* 对于 $\lambda \neq 0$，令 $D_\lambda\colon\ L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 由 $D_\lambda f(x,u) = (c_{\lambda/2}\delta_\lambda)^n f(c_{\lambda/2}\delta_\lambda(x,u))$ 定义。（注意，$(c_{\lambda/2}\delta_\lambda)^2 = (\lambda/2)(\coth\ \lambda/2)$。）那么 $B_\lambda^* \circ T_\lambda \circ B = D_\lambda$，使得 $\Psi_\mu^\lambda = D_\lambda \Phi_\mu.$ 。函数 Ψ_μ^λ 是变形厄米算子$H_\lambda = -\Delta + (\lambda/2\coth\lambda/2)^2|\xi|^2$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的特征函数，其特征值为 $(2|\mu| + 2n)(\lambda/2\coth\lambda/2)$。

证明。 回顾在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 上巴格曼变换的定义，我们有

$$(T_\lambda \circ B) f(z,w) = \pi^{-n/2}\sqrt{c_{n,\lambda}}\ e^{\frac{1}{4}(Z^2+W^2)} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x,u)\, e^{-\frac{1}{2}((x-Z)^2+(u-W)^2)} dx\, du$$

其中 $(Z,W) = \sigma_\lambda(z,w) = \delta_\lambda(c_{\lambda/2}z - is_{\lambda/2}w, c_{\lambda/2}w + is_{\lambda/2}z)$。通过作变量替换 $(x,u) \to c_{\lambda/2}\delta_\lambda(x,u)$，上述积分可写成

$$(T_\lambda \circ B)f(z,w) = \pi^{-n/2}\sqrt{c_{n,\lambda}}\,(c_{\lambda/2}\delta_\lambda)^n\, e^{\frac{1}{4}(Z^2+W^2)} \int_{\mathbb{R}^{2n}} D_\lambda f(x,u)\, e^{-\frac{1}{2}((c_{\lambda/2}\delta_\lambda x - Z)^2 + (c_{\lambda/2}\delta_\lambda u - W)^2)}\, dx\, du.$$

简单计算可得 $e^{-\frac{1}{2}((c_{\lambda/2}\delta_\lambda x - Z)^2 + (c_{\lambda/2}\delta_\lambda u - W)^2)}$ 化简为

$$e^{-\frac{1}{2}\delta_\lambda^2 c_{\lambda/2}^2((x-z)^2+(u-w)^2)}\, e^{-ic_{\lambda/2}s_{\lambda/2}\delta_\lambda^2(w(x-z)-z(u-w))}\, e^{\frac{1}{2}\delta_\lambda^2 s_{\lambda/2}^2(z^2+w^2)}.$$

由于 $2s_{\lambda/2}c_{\lambda/2} = s_\lambda$ 上述积分不过是

$$e^{\frac{1}{2}\delta_\lambda^2 s_{\lambda/2}^2(z^2+w^2)} \int_{\mathbb{R}^{2n}} D_\lambda f(x,u)\, e^{-\frac{\lambda}{4}(\coth\lambda/2)((x-z)^2+(u-w)^2)}\, e^{-i\frac{\lambda}{2}(w\cdot x - z\cdot u)}\, dx\, du.$$

我们还可以验证

$$(Z^2+W^2) + 2\delta_\lambda^2 s_{\lambda/2}^2(z^2+w^2) = \frac{\lambda}{\sinh\lambda}(1+2s_{\lambda/2}^2)(z^2+w^2) = \lambda(\coth\lambda)(z^2+w^2).$$

这就证明了

$$(T_\lambda \circ B)f(z,w) = \pi^{-n/2}(4\pi)^n\sqrt{c_{n,\lambda}}\,(c_{\lambda/2}\delta_\lambda)^n\Big(\frac{\sinh\lambda/2}{\lambda}\Big)^n c_{n,\lambda}\, p_1^\lambda(z,w)^{-1}\, D_\lambda f *_\lambda p_{1/2}^\lambda(z,w).$$

化简后，上式变为 $(T_\lambda \circ B)f(z,w) = (B_\lambda \circ D_\lambda)f(z,w)$，从而证明了该结果。由于 $B\Phi_\mu(z,w) = \zeta_\mu(z,w)$, 因此

$$T_\lambda\zeta_\mu(z,w) = 2^{-n}(4\pi)^{n/2}\sqrt{c_{n,\lambda}}\,\zeta_\mu(\sigma_\lambda(z,w)) = c_{n,\lambda}\; p_1^\lambda(z,w)^{-1} D_\lambda\Phi_\mu *_\lambda p_{1/2}^\lambda(z,w)$$

这就是 $\Psi_\mu^\lambda.$ 的定义关系。这证明了 $\Psi_\mu^\lambda = D_\lambda\Phi_\mu.$。由于 Φ_μ 是 $H = -\Delta + |\xi|^2$ 的特征函数，其特征值为 $(2|\mu| + 2n)$，因此可知 $\Psi_\mu^\lambda = D_\lambda\Phi_\mu$ 是 H_λ 的特征函数，正如所声称的那样。□

既然我们已将函数 Ψ_μ^λ 识别为变形厄米函数，现在很容易写出算子 $S_\mu^\lambda.$ 的生成函数

命题 3.11. 算子 S_μ^λ 满足生成函数恒等式

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^{2n}} (-i)^{|\mu|}\,\zeta_\mu(z,w)S_\mu^\lambda = \pi^{-n/2}c_{n,\lambda}^{-1/2}\, e^{\frac{1}{4}(z^2+w^2)}G_\lambda(r_\lambda(z,w))$$

其中 $G_\lambda(z,\ w) = \pi_\lambda(w,\ -z)e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}\pi_\lambda(-w,\ z)$ 且 $\lambda^2 r_\lambda^2 = (\lambda/2)\coth(\lambda/2)$.

证明。由 th 厄米函数满足的生成函数 (2.1) 可得 n

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^{2n}} \Psi_\mu^\lambda(x,u)\,\zeta_\mu(z,w) = \pi^{-n}(c_{\lambda/2}\delta_\lambda)^n e^{-\frac{1}{4}(z^2+w^2)}e^{c_{\lambda/2}\delta_\lambda(x,u)\cdot(z,w)}\, e^{-\frac{1}{2}(\lambda/2)\coth(\lambda/2)(|x|^2+|u|^2)}.$$

化简后，上述恒等式的右端变为

$$2^n\lambda^{-n/2}(\sinh\lambda)^{n/2}\, e^{-\frac{1}{4}(z^2+w^2)}e^{c_{\lambda/2}\delta_\lambda(x,u)\cdot(z,w)}\, p_{1/2}^\lambda(x,u).$$

因此，算子 S_μ^λ 满足生成函数恒等式

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^{2n}} \zeta_\mu(z,w)S_\mu^\lambda = \pi^{-n/2}c_{n,\lambda}^{-1/2}\, e^{-\frac{1}{4}(z^2+w^2)} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{c_{\lambda/2}\delta_\lambda(x,u)\cdot(z,w)}\, p_{1/2}^\lambda(x,u)\pi_\lambda(x,u)dxdu.$$

通过定义 $\lambda^2 r_\lambda^2 = c_{\lambda/2}^2 \delta_\lambda^2 = (\lambda/2)\coth(\lambda/2)$ 并将 (z,w) 替换为 (iz, iw)，我们可以将上式改写为

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^{2n}} (-i)^{|\mu|}\, \zeta_\mu(z,w) S_\mu^\lambda = \pi^{-n/2} c_{n,\lambda}^{-1/2}\, e^{\frac{1}{4}(z^2+w^2)} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\lambda r_\lambda(x,u)\cdot(z,w)}\, p_{1/2}^\lambda(x,u)\pi_\lambda(x,u)dxdu.$$

上述方程右侧出现的算子可以用一种更好的方式写出。

回顾一下，根据海森堡群的薛定谔表示，我们有$\pi_\lambda(x,\ u) = \pi_\lambda(x,\ u,\ 0)$，因此经过简单计算可得

$$\pi_\lambda(a,b)\pi_\lambda(x,u)\pi_\lambda(-a,-b) = e^{i\lambda(x\cdot b - u\cdot a)}\, \pi_\lambda(x,u).$$

对于复数值的 $a,\ b$，幺正算子 $\pi_\lambda(a,\ b)$也可以定义为无界算子。因此，由上述恒等式可得

$$\pi_\lambda(w,-z)\pi_\lambda(x,u)\pi_\lambda(-w,z) = e^{-i\lambda(x\cdot z + u\cdot w)}\, \pi_\lambda(x,u).$$

因此，由于 $\pi_\lambda(p_{1/2}^\lambda) = e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\lambda(x\cdot z+u\cdot w)}\, p_{1/2}^\lambda(x,u)\pi_\lambda(x,u)dxdu = \pi_\lambda(w,-z)e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}\pi_\lambda(-w,z). \tag{3.2}$$

这表明我们应考虑算子值函数

$$G_\lambda(z,w) = \pi_\lambda(w,-z)e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}\pi_\lambda(-w,z)$$

它可以被视为算子 $e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}$ 的平移。用 G_λ表示，算子 S_μ^λ 的生成函数恒等式可写成紧凑形式

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^{2n}} (-i)^{|\mu|}\, \zeta_\mu(z,w) S_\mu^\lambda = \pi^{-n/2} c_{n,\lambda}^{-1/2}\, e^{\frac{1}{4}(z^2+w^2)} G_\lambda(r_\lambda(z,w)).$$

命题的证明至此完成。 □

3.4. 索伯列夫空间与施瓦茨类算子。 在 [11]中，作者引入了施瓦茨函数的算子类比，并将其称为施瓦茨算子。由于若光滑函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上满足对所有$\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n.$均有界，则称其为施瓦茨函数。算子类比的定义很简单：将 x^α和 ∂^β替换为 Q^α和 P^β，其中 $Q = (Q_j)$和 $P = (P_j)$分别是位置算符和动量算符的向量。因此，根据 [11]，作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界线性算子 T 若满足$P^\alpha Q^\beta T P^{\alpha'} Q^{\beta'}$均有界，则称其为施瓦茨算子。所有施瓦茨算子构成的类记为 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$。在[11]中，作者确立了施瓦茨算子的若干性质。

利用算子 S_μ^λ ，我们可以简洁地描述由缓增算子构成的 $\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 及其对偶空间 $\mathcal{S}'(L^2(\mathbb{R}^n))$。为说明我们的定义，回顾一下，施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 $= \cap_{s\geq 0} W_H^s(\mathbb{R}^n)$，即所有厄米-索伯列夫空间的交集。这里，$W_H^s(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在厄米算子 $H(\lambda)$ 的分数次幂 $-s/2$ 下的像。换言之，对于 $f \in W_H^s(\mathbb{R}^n)$ $s \geq 0$，当且仅当存在某个 $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$。等价地，$f \in W_H^s(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当

$$\|f\|_{(s)}^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} ((2|\alpha| + n)|\lambda|)^s\, |(f, \Phi_\alpha^\lambda)|^2 < \infty.$$

Fr由此定义可知， $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当对于每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$|(f, \Phi_\alpha^\lambda)| \leq c_k((2|\alpha| + n)|\lambda|)^{-k}, \ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

根据对偶性，我们还知道，分布 f 是温和的，当且仅当对某个 $k \in \mathbb{N}$，有以下估计

$$|(f, \Phi_\alpha^\lambda)| \leq c_k((2|\alpha| + n)|\lambda|)^{k}, \ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

由于 S_μ^λ 是 Φ_α^λ 的算子类比，因此上述内容引出了以下定义。

对于 $s \geq 0$，我们称 $T \in W_{\mathcal{H}}^s$，当且仅当

$$\|T\|_{(s)}^2 = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^{2n}} ((2|\mu| + 2n)|\lambda|)^s \, |(T, S_\mu^\lambda)|^2 < \infty.$$

当 $s < 0$ 时，我们将 $W_{\mathcal{H}}^{-s}$ 定义为 $W_{\mathcal{H}}^s$. 的对偶。于是，在 [11] 中定义的空间 $\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 有如下描述。

定理 3.12. 我们有等式 $\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n)) = \cap_{s \geq 0} W_{\mathcal{H}}^s$，因此 $T \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))$当且仅当对每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$|(T, S_\mu^\lambda)| \leq c_k((2|\mu| + 2n)|\lambda|)^{-k}, \ \mu \in \mathbb{N}^{2n}.$$

若令 $\mathcal{S}$（L^2（$\mathbb{R}^n$）′表示 $\mathcal{S}$（L^2（$\mathbb{R}^n$） 的对偶，则 $\Lambda \in \mathcal{S}$（L^2（$\mathbb{R}^n$）′当且仅当存在某个 $k \in \mathbb{N}$，使得以下估计成立

$$|(\Lambda, S_\mu^\lambda)| \leq c_k((2|\mu| + 2n)|\lambda|)^{k}, \ \mu \in \mathbb{N}^{2n}.$$

证明。在 [11] 中， $T \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 当且仅当 $T = \pi_\lambda(f)$，其中 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$。通过将 f 按 $\Psi_\mu^\lambda = D_\lambda \Phi_\mu$ 展开，很容易看出， $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ 当且仅当 $(f, \ \Psi_\mu^\lambda)$ 满足所要求的衰减估计。由于 $(T, \ S_\mu^\lambda) = (f, \ \Psi_\mu^\lambda)$，定理的第一部分得证。我们注意到，空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ 的拓扑可以用 Hermite-Sobolev 范数 $\|f\|_{(k)}$ 来描述，因此 $\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 的拓扑也可以用 $\|T\|_{(k)}$.来描述

给定 $\Lambda \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))'$，我们通过如下规定在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ 上定义一个线性泛函：$\varphi_\Lambda(f) = \Lambda(\pi_\lambda(f))$。由于 $|\Lambda(T)| \leq C\|T\|_{(m)}$ 对某个 m 以及所有 $T \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 均成立，因此 φ_Λ 是一个温和分布。反过来，对于给定的缓增分布 g，我们可以通过令 $\Lambda_g(\pi_\lambda(f)) = (g, f)$，在 $\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))$ 上定义泛函 Λ_g。由于 g 是缓增的，$\Lambda_g \in \mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))'$. 因此， $\mathcal{S}(L^2(\mathbb{R}^n))'$ 与 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})'$. 之间存在一一对应。结合通过其在厄米函数上的作用对温和分布所作的刻画，这就完成了定理第二部分的证明。□

3.5. 算子的傅里叶变换。回顾一下，在经典情形中，巴格曼变换 B 与 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的傅里叶变换通过幺正算子U相关： $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ 定义为 $UF(z) = F(-iz)$。这三个算子满足关系 $U \circ B = B \circ \mathcal{F}$，因此傅里叶变换也可以定义为 $\mathcal{F} = B^* \circ U \circ B$.这启发我们如下定义算子的傅里叶变换。算子 $U : \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n}) \to \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 定义为 $UF(z, w) = F(-iz, -iw)$，对任意 λ.也为幺正算子。因此，可以按照以下方式定义 $\mathcal{S}_2$ 上的傅里叶变换。对于任意 $T \in \mathcal{S}_2$, $\widehat{}$，我们将 T定义为 $\mathcal{S}_2$ 中满足 $\mathcal{G}_\lambda(T) = (U \circ \mathcal{G}_\lambda)(T)$ 的唯一算子。

定理 3.13。傅里叶变换 $\mathcal{F}: \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2, T \to \widehat{T}$ 是一个酉算子。算子 S_μ^λ 是傅里叶变换的特征向量：$\widehat{S}_\mu^\lambda = (-i)^{|\mu|} S_\mu^\lambda$. 此外，对于任意$T \in \mathcal{S}_2$，有

$$\widehat{T} = \sum_{\mu \in \mathbb{N}^{2n}} (-i)^{|\mu|} \, (T, S_\mu^\lambda) \, S_\mu^\lambda.$$

对于任意 $T \in \mathcal{S}_p, 1 \le p \le 2$，我们有 $\|T\|_{p'} \le \|T\|_{\mathcal{S}_p}$，其中 $1/p + 1/p' = 1$.

证明。若令 $T = \pi_\lambda(f)$ $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$，使得 $\mathcal{G}_\lambda(T) = B_\lambda(f)$，则 $\mathcal{G}_\lambda(\widehat{T}) = B_\lambda(U_\lambda f)$，其中其中 $U_\lambda : L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 由以下性质刻画

$$U_\lambda f *_\lambda p_{1/2}^\lambda(z,w) = c_\lambda \, e^{-\frac{\lambda}{2}(z^2+w^2)} \, f *_\lambda p_{1/2}^\lambda(-iz, -iw).$$

在 [9] 中，我们已证明 $U_\lambda f(x, u) = c(\lambda)^n f(c(\lambda)(x, u))$，其中 $c(\lambda) = (\lambda/2) \coth(\lambda/2)$。由于 Φ_μ 是傅里叶变换的特征函数，并且

$$\Psi_\mu^\lambda(x,u) = D_\lambda \Phi_\mu(x,u) = \sqrt{c(\lambda)}^n \Phi_\mu(\sqrt{c(\lambda)}(x,u))$$

由此可得 $U_\lambda \Psi_\mu^\lambda = (-i)^{|\mu|} \Psi_\mu^\lambda$. 。这证明了 S_μ^λ 是 $\mathcal{F}$. 的特征函数。对于 T，展开式$\widehat{\ }$显然成立。Schatten–von Neumann 范数的单调性证明了傅里叶变换的 $\mathcal{S}_p - \mathcal{S}_{p'}$不等式。□

我们对傅里叶变换的定义取决于将 T 按 S_μ^λ. 展开。至少对某一类算子而言，最好能有傅里叶变换的积分表示。为说明我们另一个定义的动机，先回顾经典情形。$\mathbb{R}^n$ 上的厄米函数 Φ_α 由生成函数恒等式给出：

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (-i)^{|\alpha|} \, \zeta_\alpha(w) \, \Phi_\alpha(x) = \pi^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}w^2} e^{-\frac{1}{2}(x+iw)^2}.$$

给定 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，令 $F = Bf$ 为其巴格曼变换，它属于福克空间 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$。由于 $(f, \Phi_\alpha) = (F, \zeta_\alpha)$，我们有

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (-i)^{|\alpha|} \, (f, \Phi_\alpha) \, \Phi_\alpha(x) = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{1}{4}\bar{w}^2} e^{-\frac{1}{2}(x - i\bar{w})^2} \, F(w) e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \, dw.$$

由于左边不过是 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶变换，因此可以将右边作为傅里叶变换的等价定义。注意，对于任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$， Bf 都是有意义的整函数，因此我们可以通过下式在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上定义傅里叶变换：

$$\widehat{f}(x) = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{1}{4}\bar{w}^2} e^{-\frac{1}{2}(x - i\bar{w})^2} \, Bf(w) e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \, dw.$$

写出 Bf 的定义并化简后，我们可以验证右边的 $\widehat{\ }$ 化为 $f(x)$ 的通常定义。类比上述傅里叶变换的定义，我们可以利用 S_μ^λ 满足的生成函数恒等式来定义算子的傅里叶变换。

考虑由以下方程为 $T \in \mathcal{S}_2$ 定义的扭曲 Gauss–Bargmann 变换

$$\mathcal{G}_\lambda(T)(z,w) = (2\pi)^{-n/2} \, |\lambda|^{n/2} \, c_{n,\lambda} \, p_1^\lambda(z,w)^{-1} \, \mathrm{tr}\left(\pi_\lambda(-z,-w) T e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}\right)$$

当 $T=\pi_\lambda(f)$ 时，它与 $B_\lambda f$ 重合。由命题 3.11 中证明的生成函数恒等式可得

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^{2n}}(-i)^{|\mu|}\,\zeta_\mu^\lambda(z,w)S_\mu^\lambda=\pi^{-n/2}c_{n,\lambda}^{-1/2}\,e^{\frac{1}{4}(\lambda/s_\lambda)(z^2+w^2)}\,\widetilde{G}_\lambda(z,w) \tag{3.3}$$

其中我们定义了 $G_\lambda(z,w)=G_\lambda(r_\lambda\sigma_\lambda(z,w))$ 和 $\zeta_\mu^\lambda(z,w)=T_\lambda\zeta_\mu(z,w)$。</style}更明确地说，我们有

$$\widetilde{G}_\lambda(z,w)=G_\lambda(\frac{1}{2}(\coth(\lambda/2)z-iw,\coth(\lambda/2)w+iz)).$$

注意，t 定义核 $G_\lambda(z,w)$ 的 (3.3) 中的级数在 $\mathcal{S}_2$ 中收敛，并且我们有

$$\sum_{\mu\in\mathbb{N}^{2n}}|\zeta_\mu^\lambda(z,w)|^2=K^\lambda_{(z,w)}(z,w)$$

其中 $K_\zeta^\lambda(\zeta')$ 是 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 的再生核。因此，由再生核的显式表达式可得估计

$$|e^{\frac{1}{4}(\lambda/s_\lambda)(\bar{z}^2+\bar{w}^2)}|\|\widetilde{G}_\lambda(z,w)\|_{\mathcal{S}_2}\le C_\lambda\,e^{-\frac{\lambda}{2}(u\cdot y-v\cdot x)}\,e^{\frac{1}{4}\lambda(\coth\lambda)(|z|^2+|w|^2)}. \tag{3.4}$$

因此，$G_\lambda(z,w)$ 是一个取值于 $\mathcal{S}_2$ 的整函数，显然

$$\pi^{-n/2}c_{n,\lambda}^{-1/2}\,e^{\frac{1}{4}(\lambda/s_\lambda)(z^2+w^2)}\,\operatorname{tr}\left(\widetilde{G}_\lambda(z,w)(S_\mu^\lambda)^*\right)=(-i)^{|\mu|}\,\zeta_\mu^\lambda(z,w). \tag{3.5}$$

在对 $\mathcal{G}_\lambda(T)$ 作出某些附加条件后，我们现在可以证明 $T.$ 的如下积分表示-

定理 3.14. 假设 $T\in\mathcal{S}_2$ 满足 $\mathcal{G}_\lambda(T)(\zeta)\in L^1(\mathbb{C}^{2n},\sqrt{w_\lambda(\zeta)}\,d\zeta)$。那么

$$\widehat{T}=\pi^{-n/2}c_{n,\lambda}^{-1/2}\int_{\mathbb{C}^{2n}}e^{\frac{1}{4}(\lambda/s_\lambda)\zeta^2}\,\mathcal{G}_\lambda(T)(\zeta)\widetilde{G}_\lambda(\zeta)\,w_\lambda(\zeta)\,d\zeta. \tag{3.6}$$

特别地，上述表示对任意施瓦茨类算子都成立。

证明. 由估计式 (3.4) 以及关于 $\mathcal{G}_\lambda(T)$ 的假设可知，(3.6) 中的积分绝对收敛。根据 (3.5) 以及以下事实：

$$(\mathcal{G}_\lambda(T),\zeta_\mu^\lambda)_{\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})}=(T,\mathcal{G}_\lambda^*\zeta_\mu^\lambda)=(T,S_\mu^\lambda)_{\mathcal{S}_2}$$

我们得到 $(\widehat{T},S_\mu^\lambda)=(-i)^{|\mu|}(T,S_\mu^\lambda)$，这就证明了该积分表示。对于任意 $T\in\mathcal{S}_2$，我们有估计式 $|\mathcal{G}_\lambda(T)(\zeta)|\le C\,w_\lambda(\zeta)^{-1/2}$；若 $T=\pi_\lambda(f)$ 且 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$，则该估计还可以改进。事实上，文献 [15] 已证明，对于施瓦茨类函数，有如下估计：

$$|f*_\lambda p_t^\lambda(z,w)|\le C_{m,\lambda}(1+|z|^2+|w|^2)^{-m}\,e^{-\frac{\lambda}{2}(u\cdot y-v\cdot x)}\,e^{\frac{\lambda}{2}(\coth 2t\lambda)(|y|^2+|v|^2)}$$

对于任意正整数 $m.$（参见 [15]中的定理 4.4；定理陈述中有一处印刷错误：coth $4t$ 应为 coth $2t$）。利用这些估计，很容易验证 $\mathcal{G}_\lambda(T)(\zeta)=B_\lambda f(\zeta)\in L^1(\mathbb{C}^{2n},\sqrt{w_\lambda(\zeta)}\,d\zeta)$。至此，定理得证。□

注 3.15。给定 $T\in\mathcal{S}_2$，我们可以选取一列施瓦茨类算子 T_k，使得 且 $T_k\to T$ 在 $\mathcal{S}_2.$ 中成立。于是，由积分 (3.6) 定义的 T_k 在 $\mathcal{S}_2.$中收敛到 T

现在我们将证明，对于 $\mathcal{S}_2$ 上的傅里叶变换，存在一个与哈代定理类似的结果。回想一下，1933年，哈代 [10]在一维情形下证明了以下定理。

定理 3.1 **6.** $f(x) = ce^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ 是满足以下估计的唯一函数 :

$$|f(x)| \leq Ce^{-\frac{1}{2}|x|^2}, \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq Ce^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}.$$

这里给出了 算子上的傅里叶变换的哈代定理的精确类比。

定理 **3.17.** $T = ce^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}$ 是满足以下界的 $\mathcal{S}_2$ 中唯一的算子

$$T^*T \leq Ce^{-H(\lambda)}, \ \widehat{T}^*\widehat{T} \leq Ce^{-H(\lambda)}.$$

证明。 根据 Douglas 的一个引理 [5] ，关于 T 和 T 的假设蕴含 $T = e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}M$ 以及 $\widehat{T} = e^{-\frac{1}{2}H(\lambda)}M'$，其中 M和 M'是有界线性算子。由此可知， $\varphi = \mathcal{G}_\lambda(T)$ 和 $\psi = \mathcal{G}_\lambda(\widehat{T})$ 都属于 $\mathcal{A}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 这一子空间，该子空间在 [9]中得到研究，并定义了作用于 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 上的有界线性算子 S^λ_φ和 S^λ_ψ。 根据定义， $\psi = \mathcal{G}_\lambda(\widehat{T}) = U \circ \mathcal{G}_\lambda(T) = U\varphi$. 于是，利用 [9] 中定理 1.4 证明的不确定性原理，我们可以得出 φ 是一个常数，因此 $M = cI$. 这就证明了该定理。□

3.6. 算子框架中的乘子与傅里叶乘子。 在定理 3.17 的证明中，我们已经遇到作用于扭曲福克空间 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$上的算子 和。 已经证明，下列关系成立:

$$B^*_\lambda \circ S^\lambda_\varphi \circ B_\lambda = T_M, \ \widetilde{S}^\lambda_\psi = U^* \circ S^\lambda_{U\psi} \circ U$$

其中 $\varphi = G_\lambda(M)$ $M \in B(L^2(\mathbb{R}^n))$，而 T_M 是由 $\pi_\lambda(T_M f) = \pi_\lambda(f)M$. 定义的韦尔乘子算子。关于这些关系，参见 [9]。除了用 B_λ:$L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 进行共轭外，我们也可以用 $\mathcal{G}_\lambda$: $\mathcal{S}_2 \to \mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 进行共轭，从而得到作用于 $\mathcal{S}_2$. 上的算子。首先考虑算子 $\mathcal{G}^*_\lambda \circ S^\lambda_\varphi \circ \mathcal{G}_\lambda$ ，并假设 $\varphi = G_\lambda(M)$，因此共轭算子在 $\mathcal{S}_2$. 上有界。利用关系 $\mathcal{G}^*_\lambda(S^\lambda_\varphi F) = \mathcal{G}^*_\lambda(F)M$，我们很容易验证以下关系

$$(\mathcal{G}^*_\lambda \circ S^\lambda_\varphi \circ \mathcal{G}_\lambda)T = TM.$$

另一方面，由于 $(U \circ \mathcal{G}_\lambda)T = \mathcal{G}_\lambda(T) = (\mathcal{G}_\lambda \circ \mathcal{F})T$，我们还有以下关系

$$\mathcal{G}^*_\lambda \circ \widetilde{S}^\lambda_\psi \circ \mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}^*_\lambda \circ U^* \circ S^\lambda_{U\psi} \circ U \circ \mathcal{G}_\lambda = \mathcal{F}^* \circ \mathcal{G}^*_\lambda \circ S^\lambda_{U\psi} \circ \mathcal{G}_\lambda \circ \mathcal{F}.$$

由上述结果可知，若令 $G_\lambda(M) = U\psi$, ，则共轭算子$\mathcal{G}^*_\lambda \circ \widetilde{S}^\lambda_\psi \circ \mathcal{G}_\lambda$ 成为一个傅里叶乘子:

$$(\mathcal{G}^*_\lambda \circ \widetilde{S}^\lambda_\psi \circ \mathcal{G}_\lambda)T = \mathcal{F}^*(\widehat{T}M).$$

因此，研究 $\mathcal{S}_2$ 上的傅里叶乘子，等价于研究扭曲福克空间 $\mathcal{F}^\lambda(\mathbb{C}^{2n})$ 上的算子 S^λ_ψ。

注记 3.18. 寻找关于 M 的条件，使得傅里叶乘子算子 $T \to \mathcal{F}^*(TM)$ 能延拓为 $\mathcal{S}_p$ 上的有界算子，是一个有趣的开放问题。我们计划在后续工作中探讨这个问题。

3.7. 径向算子及其傅里叶变换。 当 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 是径向函数时，我们注意到 $(f, \Phi_\alpha) = 0$，除非每个 α_j 都是偶数。这是因为一维厄米函数 $h_k(x)$ 在 k 为偶数时是偶函数，在 k 为奇数时是奇函数。因此， f 的展开中所有非零厄米系数均为 $(f, \Phi_{2\alpha})$. 此外,

$$(f, \Phi_{2\alpha}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Phi_{2\alpha}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{SO(n)} \Phi_{2\alpha}(\sigma y)d\sigma \right) dy.$$

由于内层积分是厄米算子的径向特征函数，其特征值为 $(4|\alpha| + n)$，因此它是拉盖尔函数的一个常数倍

$$\psi_k^{n/2-1}(y) = L_k^{n/2-1}(|y|^2)\, e^{-\frac{1}{2}|y|^2}$$

其中 $k = |\alpha|$. 因此，径向函数的厄米展开形式为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(f) \Big(\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \Phi_{2\alpha}(x) \Big), \;\; R_k(f) = c_k \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi_k^{n/2-1}(y)\, dy.$$

类比于此，我们称算子 $T \in \mathcal{S}_2$ 是径向的，若系数 $(T, S_\mu^\lambda) = 0$，除非 $\mu = 2\nu$；在这种情况下，所有满足 $|\nu| = k$ 固定的系数 $(T, S_{2\nu}^\lambda)$ 都彼此成比例。因此 $(T, S_{2\mu}^\lambda) = c_\mu^\lambda\, R_k^\lambda(T)$，其中 $k = |\mu|$，而 T 的展开式为

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^\lambda(T) \Big(\sum_{|\mu|=k} c_\mu^\lambda\, S_{2\mu}^\lambda \Big).$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的径向函数，事实证明 $\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \Phi_{2\alpha}(x) = c_{n,k}\, \psi_k^{n/2-1}(x)$，且这些常数满足

$$c_{n,k}^2 \int_{\mathbb{R}^n} (\psi_k^{n/2-1}(x))^2\, dx = \sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^2$$

我们有兴趣研究算子 $P_{k,\lambda} = \sum_{|\mu|=k} c_\mu^\lambda\, S_{2\mu}^\lambda$. 。考虑到 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的厄米函数 $\Phi_\mu(x, u)$，我们有如下公式

$$\sum_{|\mu|=k} c_\mu \Psi_{2\mu}^\lambda(x, u) = c_{2n,k}\, D_\lambda \psi_k^{n-1}(x, u) = c_{2n,k}\, \sqrt{c(\lambda)}^n\, \psi_k^{n-1}(\sqrt{c(\lambda)}(x, u)).$$

对上述方程两边应用韦尔变换，我们得到

$$\sum_{|\mu|=k} c_\mu^\lambda\, S_{2\mu}^\lambda = c_{2n,k}\, \sqrt{c(\lambda)}^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} \pi_\lambda(x, u)\, \psi_k^{n-1}(\sqrt{c(\lambda)}(x, u))\, dx\, du.$$

由于函数 $\psi_k^{n-1}(x, u)$ 是径向的，其韦尔变换是厄米算子的函数，因而可按谱投影 $P_k(\lambda)$ 展开，这些谱投影与 $H(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}^n$. 上相关联。这意味着存在定义在 $\mathbb{N}$ 上的函数 m_k，使得

$$\sum_{|\mu|=k} c_\mu^\lambda\, S_{2\mu}^\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} m_k((2j + n)\lambda)\, P_j(\lambda).$$

或许可以显式计算 m_k，从而得到

$$P_{k,\lambda} = \sum_{|\mu|=k} c_\mu^\lambda\, S_{2\mu}^\lambda = m_k(H(\lambda)).$$

命题 3.19. 算子 $T \in \mathcal{S}_2$ 是径向的，当且仅当存在某个函数 $\widehat{\ } m.$，使得 $T = m(H(\lambda))$。此外，只要 T 是径向的，T 也具有径向性。

证明。 假设 T 是径向的，我们已经证明了 $T = \pi_\lambda(f)$，其中

$$f(x,u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2n,k}\, R_k^\lambda(T)\, \sqrt{c(\lambda)}^{\,n}\, \psi_k^{n-1}(\sqrt{c(\lambda)}(x,u)).$$

众所周知，函数 g 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上是径向的，当且仅当 $\pi_\lambda(g)$ 是 $H(\lambda)$ 的函数。因此可知，对于某个函数 $m.$，有 $T = \pi_\lambda(f) = m(H(\lambda))$。反过来，若 $T = m(H(\lambda))$，使得 $f = \pi_\lambda^*(T)$ 是径向的，我们可以将 $g = D_\lambda^{-1} f$ 按 ψ_k^{n-1} 展开，从而得到

$$D_\lambda^{-1} f(x,u) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(g)\, \psi_k^{n-1}(x,u).$$

由上可知，算子 T 可展开为

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2n,k}^{-1}\, R_k(g)\, P_{k,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\mu|=k} c_{2n,k}^{-1}\, R_k(g)\, c_\mu^\lambda\, S_{2\mu}^\lambda.$$

由上可清楚地看出，对于任意 μ，ν满足 $|\mu| = |\nu| = k$，都有 $(T,\ S_{2\mu}^\lambda) = R_k(g)c_\mu^\lambda$，且 $(T,\ S_{2\nu}^\lambda) = R_k(g)c_\nu^\lambda$，因此根据我们的定义，$T$是径向的。我们已经证明，每个径向的$T$ 都可展开为

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^\lambda(T) \Big(\sum_{|\mu|=k} c_\mu^\lambda\, S_{2\mu}^\lambda \Big).$$

由于 S_μ^λ 是傅里叶变换的特征向量，其特征值为 $(-i)$，因此显然，当 T 为径向时，$\widehat{T}$ 也是径向的。□

注 3.20：尽管 $\mathbb{R}^n$ 上的厄米函数 Φ_α 不是径向的，但存在一些常数 c_α，使得特定的组合 $\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\, \Phi_{2\alpha}$ 是径向的。类似地，对于 $\mu \neq 0$，算子 S_μ^λ 不是径向的，但适当的组合 $\sum_{|\mu|=k} c_\mu\, S_{2\mu}^\lambda$ 是径向的。

拉盖尔函数 $\psi_k^{n-1}\ (x,\ u)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 中构成一个正交系，因此算子 $P_{k,\ \lambda} = \pi_\lambda(D_\lambda \psi_k^{n-1})$ 在 $\mathcal{S}_2.$ 中构成一个正交的算子族。由于显而易见的原因，我们称其为拉盖尔型算子。任意径向算子 T 都可以按 $P_{k,\ \lambda}.$ 展开。

注记 3.21。 回顾傅里叶变换的 Hecke-Bochner 恒等式 $\mathcal{F}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的形式如下。设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的径向函数，它可以自然地视为任意 $\mathbb{R}^d.$ 上的径向函数。设 P 是次数为 $m.$的实调和多项式。那么

$$\mathcal{F}_n(Pf) = P\, \mathcal{F}_{n+2m}(f).$$

根据 Geller [6] 的工作，我们得到了一个类比 Hecke-Bochner 恒等式的结果，适用于作用于 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$。球谐函数的算子类比被证明是双分次球谐函数的 Weyl 对应，参见 [6] 和 [18]。利用 Geller 的公式，我们可以在 $\mathcal{S}_2.$上建立一个 Hecke-Bochner 恒等式，适用于傅里叶变换。该公式的细节及其与幺正群 $U(n)$某些一级表示的联系，将在后续工作中讨论。

Acknowledgements

这项工作始于2024年5月，当时第二作者（ST）正在印度科学教育与研究院博帕尔分校访问。随着 ST 访问根特大学和孟买印度理工学院，这项工作逐渐成形，并于近期在班加罗尔印度科学研究所完成。ST 谨向这些机构致谢，感谢其热情接待并提供所需条件。他也感谢 Hasan Ali Biswas 帮忙检查手稿中的常数是否正确。

References

[1] S. Bagchi 和 S. Thangavelu，海森堡群上 Weyl 乘子与傅里叶乘子的加权范数不等式，J. Anal. Math. 136 (2018)，第 1 期，1–29。[2] S. Bais 和 V. N. Dogga，通过巴格曼变换研究扭曲巴格曼变换，Forum Math. 33 (2021)，第 6 期，1659-1670。[3] V. Bargmann，关于解析函数的一个希尔伯特空间及其相关积分变换。第一部分。Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961)，187-214。[4] G. Cao、J. Li、M. Shen、B. D. Wick 和 L. Yan，福克空间上卷积型奇异积分算子的有界性判据，Adv. Math. 363 (2020)，[5] R. Douglas，关于希尔伯特空间上算子的主序、因子分解和值域包含，Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966)，413-415。[6] D. Geller，球谐函数、韦尔变换与海森堡群上的傅里叶变换，Can. J. Math. 36 (4) (1984) 615-684。[7] G. B. Folland，相空间中的调和分析，Annals of Mathematics Studies，第 122 卷，Princeton University Press，Princeton, NJ，1989。MR 983366[8] , 元海森堡群。载于 Fourier analysis (Orono, ME, 1992)，Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 第 157 卷，第 121–147 页。Dekker，New York，1994。[9] R. Garg 和 S. Thangavelu，扭曲福克空间上某些线性算子的有界性，Math. Z. 307 (2024)，第 2 期，论文编号 39，共 24 页。[10] G. H. Hardy，关于傅里叶变换的一个定理，J. London Math. Soc. 8，227-231 (1933)[11] M. Keyl、J. Kiukas 和 R. F. Werner，施瓦茨算子，Reviews in Math. Physics，第 28 卷，第 3 期 (2016) https://doi.org/10.1142/S0129055X16300016[12] B. Kr¨otz、S. Thangavelu 和 Y. Xu，海森堡群上的热核变换，J. Funct. Anal. 225 (2005)，第 2 期，301–336。MR 2152501[13] R. Lakshmi Lavanya 和 S. Thangavelu，重新审视海森堡群上的傅里叶变换，Publ. Mat. 58 (2014)，第 1 期，47–63。[14] G. Mauceri， $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的韦尔变换与有界算子，J. Funct. Anal. 39，408–429 (1980)。[15] R. Radha 和 S. Thangavelu，全纯索博列夫空间、厄米与特殊厄米半群，以及加窗傅里叶变换的一个佩利–维纳定理，J. Math. Anal. Appl. 354 (2009)，564-574。[16] S. Thangavelu，关于海森堡群上的 Paley-Wiener 定理，J. Funct. Anal. 115 (1993)，第 1 期，24–44。[17] , 厄米与拉盖尔展开讲义，Mathematical Notes，第 42 卷，Princeton University Press，Princeton, NJ，1993，Robert S. Strichartz 作序。MR 1215939[18] , 不确定性原理导论，Progress in Mathematics，第 217 卷，Birkhäuser Boston, Inc.，Boston, MA，2004，李群上的哈代定理，Gerald B. Folland 作序。MR 2008480[19] , 福克–索博列夫空间上的傅里叶乘子与伪微分算子，Integral Equations Operator Theory 97 (2025)，第 1 期，论文编号 2，共 21 页。[20] , 整函数代数与扭曲海森堡群的表示，Indian J. Pure Appl. Math. 55 (2024)，第 3 期，911–921。[21] , 关于福克空间上某些卷积型算子的有界性，Proc. Amer. Math. Soc. 153 (2025)，第 7 期，3011–3025。[22] G. Szego，正交多项式，Amer. Math. Soc. Colloq. Pub.，第 23 卷，Providence (1967)

(R.Garg) Department of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal–462066, India.电子邮箱地址: rahulgarg@iiserb.ac.in

(S. THANGAVELU) National Science Chair, Department of Mathematics, Indian Institute ofScience, Bangalore–560012, India and Honorary Professor, University of Queensland, Bris-bane, Australia.

电子邮件地址：veluma@iisc.ac.in