arXiv:2602.12671v1 [math.RA] 13 Feb 2026

# Hom-post-Lie余代数的结构与余模

Houndedji Damien，´数学系，´科纳克里GamalAbdel Nasser大学，邮政信箱：1147，科纳克里，几内亚。houndedjidamien@gmail.com；
Ibrahima Bakayoko，´数学系，´N'Z´érékor´é大学，邮政信箱：50，N'Z´érékor´é，几内亚。ibrahimabakayoko27@gmail.com

**摘要**

本文引入 Hom-tridendriform余代数和 Hom-post-Lie余代数的概念，分别作为Hom-tridendriform代数和 Hom-post-Lie代数的对偶概念。我们给出了一些与之相关的性质。随后，研究了二者之间的关系，以及它们与后 Hom-Poisson 余代数之间的联系。接着，借助模情形中的 Yau 扭曲，我们通过扭曲余模结构或后 Hom-Lie 余代数结构，给出了后 Hom-Lie 余代数上的一些余模构造。

**关键词**。 post-Hom-Lie 余代数，Hom-tridendriform余代数，余模。**2020年数学主题分类**。 16T15, 16W10, 17B61.

## 1 引言

post-李代数最初源于Bruno Vallette [10] 在2007年借助纯粹的operad技术——Koszul对偶化——所做的工作。在Hom框架下，它们是post-李代数的扭变版本 [10], [11], [19], [22], ，既是Hom-Lie代数，也是交换dendriform代数 [17], [18]。这两种结构由若干相容性条件相联系。在 [15], 中证明，它们也自然产生于齐性空间与Klein几何的微分几何，这些主题与Cartan标架移动法密切相关。文中研究了post-李代数的泛包络代数以及自由post-李代数。给出了一些例子及相关结构。在其他结果中，作者在 [12] 中证明，tridendriform代数与Rota-Baxter李代数可导出post-李代数的结构。

给定一种经典代数结构，其对偶结构（余代数结构）的研究往往在经典结构出现数十年后才兴起。例如，李代数上同调由 C. Chevalley 和 S. Eilenberg 于 70 多年前引入，并在 H. Cartan 和 S. Eilenberg 的经典专著中得到标准的教科书式论述 [7]。如今，余代数不变量的研究作为代数对偶结构研究的一部分，且由于余代数具有诸多特殊性质，已受到数学家的关注。例如

，李代数与李余代数之间函子的构造 [2]；有限自由微分李（超）余代数范畴与有限自由李共形（超）代数范畴之间反等价对应的共形类比，以及有限秩微分李（超）余代数的分类 [3]；余结合余代数和余模及其同调代数[14], ；李余代数与交换代数之间的 Koszul 对应 [20]；Rota-Baxter 余代数 [5, 6]；前李余代数 [6]；Dendriform 余代数 [4], ；Hom-（余）代数 [1], ；Hom-（余）模，等等。

受我们此前的工作 [7, 8]以及上述关于某些余代数的研究启发，我们将后 Hom-Lie 余代数定义为 Hom-Lie 余代数（$C$，$\gamma$，$\alpha$）与一个线性余乘法 $\Delta : C \to C \otimes C$ 的组合，使其满足：

$$(\alpha \otimes \gamma) \circ \Delta - (\Delta \otimes \alpha) \circ \gamma - (\tau \otimes I) \circ (\alpha \otimes \Delta) \circ \gamma = 0, \tag{1.1}$$

$$(\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta - (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta - (\tau \otimes I) \circ (\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta + (\tau \otimes I) \circ (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta + (\gamma \otimes \alpha) \circ \Delta = 0. \tag{1.2}$$

本文旨在引入并研究作为后 Hom-Lie 代数对偶结构的 post-Hom-Lie 余代数。本文结构安排如下：第 2 节回顾 Hom-余结合余代数、Hom-Lie 余代数和 Hom-前李余代数的定义，以及这些结构的一些基本性质。第 3 节引入 Hom-tridendriform 余代数，给出一些通过扭曲得到的构造，并讨论它们与 Hom-结合 Rota-Baxter 余代数和 Hom-前 Lie 余代数之间的联系。随后，我们引入它们的余模并给出一个扭曲结果。第 4 节引入 post-Hom-Lie 余代数，并通过给定的结构、自同态或张量积构造新的结构。随后，我们研究其可容许性，以及它们与 Hom-前 Lie 余代数和 Hom-Lie Rota-Baxter 余代数之间的关系。为研究 post-Hom-Lie 余代数与余交换 Hom-Poisson 余代数之间的联系，我们引入交换 Hom-三分余代数和后 Hom-Poisson 余代数。最后一节介绍 post-Hom-Lie 余代数上的余模，并通过张量积或对 post-Hom-Lie 余代数、余模的结构进行扭曲，给出多种构造。

本文中，我们在特征零的域 $\mathbb{F}$ 上进行讨论。

## 2 预备知识

本节回顾 Hom-余结合余代数、Hom-Lie 余代数和 Hom-前李余代数的定义及基本性质。

**定义 2.1.** Hom-余结合余代数是一个三元组 $(A, \Delta_\cdot, \alpha)$，由一个向量空间 $A$、一个$\mathbb{K}$-双线性映射 $\Delta_\cdot : A \longrightarrow A \otimes A$ 和一个线性映射 $\alpha : A \longrightarrow A$ 组成，并满足

$$(\alpha \otimes \Delta_\cdot) \circ \Delta_\cdot = (\Delta_\cdot \otimes \alpha) \circ \Delta_\cdot \quad (\text{coassociativity}), . \tag{2.1}$$

此外，如果 $\alpha$ 满足

$$\Delta_\cdot \circ \alpha = (\alpha \otimes \alpha) \circ \Delta_\cdot \quad (\text{comultiplicativity}), \tag{2.2}$$

则称 $(A, \Delta_\cdot, \alpha)$ 为余乘的。

当 $\alpha = Id_A$ 时，$(A, \Delta, Id_A)$，简记为 $(A, \Delta)$，是一个余结合余代数。

下面的引理说明，如何由一个余结合余代数和一个余代数自同态构造出一个 Hom-余结合余代数。

**引理 2.2**。 设$(A,\Delta)$ 是一个余结合余代数， $\alpha:\ A\longrightarrow A$ 是一个余代数自同态。那么，三元组$(A,\Delta_\alpha,\alpha)$，其中 $\Delta_\alpha=\Delta\circ\alpha$，是一个余乘 *Hom*-余结合余代数。

**定义 2.3.** 权为 $\lambda\in\mathbb{K}$ 的 Hom-余结合 Rota-Baxter 余代数是指一个 Hom-余结合余代数 $(A,\Delta.,\alpha)$，以及一个满足以下恒等式的线性映射 $R:\ A\to A$

$$R\circ\alpha = \alpha\circ R, \tag{2.3}$$

$$(R\otimes R)\circ\Delta = \Big((R\otimes I)\circ\Delta+(I\otimes R)\circ\Delta+\lambda\Delta\Big)\circ R. \tag{2.4}$$

**定义 2.4.** Hom-Lie 余代数是一个三元组 $(L,\gamma,\alpha)$，由一个向量空间 $L$、一个线性映射$\gamma:\ L\longrightarrow L\otimes L$ 和一个满足以下条件的线性映射 $\alpha:\ L\longrightarrow L$ 组成

$$\gamma=-\tau\circ\gamma\quad(\text{skew-cocommutativity}), \tag{2.5}$$

$$\gamma\circ\alpha=\alpha^{\otimes^2}\circ\gamma\quad(\text{comultiplicativity}), \tag{2.6}$$

$$(1+\xi+\xi^2)\circ(\alpha\otimes\gamma)\circ\gamma=0\quad(\text{Hom-co-Jacobi identity}), \tag{2.7}$$

其中 $\tau(x\otimes y)=y\otimes x$, $\xi(x\otimes y\otimes z)=y\otimes z\otimes x$ 且 $\xi^2(x\otimes y\otimes z)=z\otimes x\otimes y$，对所有 $x,y,z\in L$均成立。

当 $\alpha=Id_L$时，我们得到李余代数的定义。

下面的结果是引理 2.2 的余 Lie 版本。

**命题 2.5.** 设$(L,\gamma)$ 是一个李余代数，且 $\alpha$ 是一个 *Lie* 余代数自同态。则$(L,\gamma_\alpha,\alpha)$是一个 *Hom-Lie* 余代数，其中 $\gamma_\alpha=\gamma\circ\alpha$。

下面的引理将 Hom-余结合余代数与 Hom-Lie 余代数联系起来，即对任意 Hom-余结合余代数 $A$，都可以关联一个 Hom-Lie 余代数。

**引理 2.6.** 设$(A,\Delta,\alpha)$ 是一个 *Hom*-余结合余代数。则$(A,\gamma,\alpha)$ 是一个 *Hom-Lie* 余代数，其中 $\gamma=(1-\tau)\circ\Delta$。

**定义 2.7.** 设 $(A,\Delta.,\alpha)$ 是定义在 $V$ 上的 Hom-余代数结构，由余乘法 $\Delta.$ 和余代数同态 $\alpha$ 定义。则若由下式定义的括号

$$\gamma=(1-\tau)\circ\Delta. \tag{2.8}$$

满足 Hom-余 Jacobi 恒等式 $(1+\xi+\xi^2)\circ(\alpha\otimes\gamma)\circ\gamma=0$。

注 2.8。 由于交换子括号 (2.8) 总是反对称余交换的，因此它使任意 Hom-Lie 容许余代数成为 Hom-Lie 余代数。

**定义 2.9.** Hom-前 Lie 余代数是一个三元组 $(A,\Delta.,\alpha)$，其中 $\Delta.:\ A\to A\otimes A$ 是一个线性映射，$\alpha:A\to A$ 是一个线性映射，并且

$$(\Delta.\otimes\alpha)\circ\Delta.-(\alpha\otimes\Delta.)\circ\Delta.=(\tau\otimes I)\circ\Big((\Delta.\otimes\alpha)\circ\Delta.-(\alpha\otimes\Delta.)\circ\Delta.\Big). \tag{2.9}$$

**命题 2.10.** *[21]* 设 $(C,\Delta_C,\alpha_C)$ 是一个 *Hom*-余结合余代数，且 $\gamma_C:\ C\longrightarrow C\otimes C$ 是由下式定义的线性映射

$$\gamma_C(x)=x_1\otimes x_2-x_2\otimes x_1\quad with\quad \Delta_C(x)=x_1\otimes x_2.$$

那么，$(L(C)\ \gamma_C,\alpha_C)$ 是一个 *Hom-Lie* 余代数，其中 $L(C)=C$作为向量空间。

# 3 Hom-tridendriform 余代数及余模

我们引入 Hom-tridendriform余代数及其余模，研究其扭曲，并阐述它们与 Hom-余结合（Rota-Baxter）余代数和 Hom-前李余代数之间的关系。

## 3.1 Hom-tridendriform余代数

**定义 3.1**。 Hom-tridendriform 余代数是一个向量空间 $C$ ，配备三个线性映射$\Delta_{-1}$、 $\Delta_0$、 $\Delta_1$： $C \to C$ 以及一个线性映射 $\alpha$： $A \to A$ ，满足以下关系：

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{-1} \otimes \alpha) \circ \Delta_{-1} &= (\alpha \otimes \Delta_{-1} + \alpha \otimes \Delta_1 + \alpha \otimes \Delta_0) \circ \Delta_{-1}, && (3.1)\\
(\Delta_1 \otimes \alpha) \circ \Delta_{-1} &= (\alpha \otimes \Delta_{-1}) \circ \Delta_1, && (3.2)\\
(\alpha \otimes \Delta_1) \circ \Delta_1 &= (\Delta_{-1} \otimes \alpha + \Delta_1 \otimes \alpha + \Delta_0 \otimes \alpha) \circ \Delta_1, && (3.3)\\
(\Delta_{-1} \otimes \alpha) \circ \Delta_0 &= (\alpha \otimes \Delta_1) \circ \Delta_0, && (3.4)\\
(\Delta_1 \otimes \alpha) \circ \Delta_0 &= (\alpha \otimes \Delta_0) \circ \Delta_1, && (3.5)\\
(\Delta_0 \otimes \alpha) \circ \Delta_{-1} &= (\alpha \otimes \Delta_{-1}) \circ \Delta_0, && (3.6)\\
(\Delta_0 \otimes \alpha) \circ \Delta_0 &= (\alpha \otimes \Delta_0) \circ \Delta_0. && (3.7)
\end{aligned}
$$

**例 3.2**。 $(T$、 $\Delta_{\dashv}$、 $\Delta_{\vdash}$、 $\Delta_{\cdot}$、 $\alpha)$ 是 Hom-tridendriform 余代数，当且仅当 $T^{op} = (T$、 $\Delta_{\dashv}^{op}$、 $\Delta_{\vdash}^{op}$、 $\Delta_{\cdot}^{op}$、 $\alpha)$ 是，其中

$$\Delta_{\dashv}^{op} := \tau \circ \Delta_{\vdash}, \quad \Delta_{\vdash}^{op} := \tau \circ \Delta_{\dashv} \quad \text{and} \quad \Delta_{\cdot}^{op} := \tau \circ \Delta_{\cdot}.$$

注 3.3。 Hom-tridendriform 余代数包含 Hom-余结合余代数 [9] $(\Delta_{-1} = \Delta_1 = 0)$ 和 Hom-分裂余代数 ( $\Delta_0 = 0$) 作为特例。

**命题 3.4.** 设 $(T, \dashv, \vdash, \cdot, \alpha)$ 是有限维 *Hom*-三叉分裂代数。则其对偶空间 $T^*$ 可赋予 *Hom*-三分余代数结构 $(T^*, \dashv^*, \vdash^*, \cdot^*, \alpha^*)$，其中 $\dashv^*, \vdash^*, \cdot^*, \alpha^*$ 是转置映射。

**定义 3.5.** Hom-tridendriform余代数之间的态射 $f$: $(C, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \alpha) \to (C', \Delta'_{-1}, \Delta'_0, \Delta'_1, \alpha')$ 是底层向量空间之间的线性映射，满足

$$f \circ \alpha = \alpha' \circ f, \quad \Delta'_{-1} \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_{-1}, \quad \Delta'_0 \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_0, \quad \Delta'_1 \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_1.$$

**定义 3.6.** 若 Hom-三分余代数 $(C, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \alpha)$ 中的 $\alpha$ 关于所有乘积都是自同态，则称其为乘法的。

**定理 3.7.** 设$(C, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \alpha)$ 是一个 *Hom*-三分余代数，且 $\beta$: $C \to C$ 是一个自同态。那么$(C, \Delta_{-1}^{\beta} = \Delta_{-1} \circ \beta, \Delta_0^{\beta} = \Delta_0 \circ \beta, \Delta_1^{\beta} = \Delta_1 \circ \beta, \beta \circ \alpha)$ 是一个 *Hom*-三分余代数。

证明. 我们只证明 (3.2)。有

$$\begin{aligned}
(\Delta_1^{\beta} \otimes \beta \circ \alpha) \circ \Delta_{-1}^{\beta} &= (\Delta_1 \circ \beta \otimes \beta \circ \alpha) \circ \Delta_{-1} \circ \beta \\
&= \beta^{\otimes 3} \circ (\Delta_1 \otimes \alpha) \circ (\beta \otimes \beta) \circ \Delta_{-1} \\
&= \beta^{\otimes 3} \circ (\Delta_1 \circ \beta \otimes \alpha \circ \beta) \circ \Delta_{-1} \\
&= (\beta^2)^{\otimes 3} \circ (\Delta_1 \otimes \alpha) \circ \Delta_{-1} \\
&= (\beta^2)^{\otimes 3} \circ (\alpha \otimes \Delta_{-1}) \circ \Delta_1 \quad (\text{by } (3.2)) \\
&= (\beta^2 \circ \alpha \otimes ((\beta^2 \otimes \beta^2) \circ \Delta_{-1}) \circ \Delta_1 \\
&= (\beta \circ \alpha \circ \beta \otimes \Delta_{-1} \circ \beta^2) \circ \Delta_1 \\
&= (\beta \circ \alpha \otimes \Delta_{-1} \circ \beta) \circ (\beta \otimes \beta) \circ \Delta_1 \\
&= (\beta \circ \alpha \otimes \Delta_{-1} \circ \beta) \circ \Delta_1 \circ \beta \\
&= (\beta \circ \alpha \otimes \Delta_{-1}^{\beta}) \circ \Delta_1^{\beta}.
\end{aligned}$$

其余公理的证明类似。 □

**推论 3.8.** 如果$(C, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \alpha)$ 是一个乘法 *Hom*-三叉余代数，那么下列结构也是

$$(C, \Delta_{-1}^n = \Delta_{-1} \circ \alpha^n, \Delta_0^n = \Delta_0 \circ \alpha^n, \Delta_1^n = \Delta_1 \circ \alpha^n, \alpha^{n+1}).$$

**推论 3.9.** 设$(C, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \alpha)$ 是一个乘法 *Hom*-三叉余代数，且 $\alpha$ 可逆。那么

$$(C, \Delta_{-1} \circ \alpha^{-1}, \Delta_0 \circ \alpha^{-1}, \Delta_1 \circ \alpha^{-1})$$

是一个三 *dendriform* 余代数。

下面的结果将一个 Hom-余结合余代数与给定的 Hom-三分余代数联系起来。

**定理 3.10.** 设$(C, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \alpha)$ 是一个 *Hom*-三分余代数。定义余乘法$\Delta: C \to C \otimes C$ 如下:

$$\Delta = \Delta_{-1} + \Delta_0 + \Delta_1.$$

那么$(C, \Delta, \alpha)$ 是一个 *Hom*-余结合余代数。

证明。 通过借助 $\Delta_i, i = -1, 0, 1$ 扩展 $c_\alpha(\Delta) := (\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta - (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta$，并利用定义 3.1 中的公理，可得 $(C, \Delta, \alpha)$ 是一个 Hom- 余结合余代数。 □

下面的定理表明，任意 Hom-余结合 Rota-Baxter 余代数都可以导出 Hom-三 dendriform 余代数。

**定理 3.11.** 设$(C, \Delta_0, \alpha, R)$ 是一个权为 $\lambda \in \mathbb{K}$ 的 *Hom*-余结合 *Rota-Baxter* 余代数。令

$$\Delta_{-1} = (I \otimes R) \circ \Delta_0, \quad \Delta_1 = (R \otimes I) \circ \Delta_0, \quad \bar{\Delta}_0 = \lambda \Delta_0.$$

于是，$(C, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \alpha)$ 是一个 *Hom*-三分余代数。

证明。 这里我们也只证明（3.2）。我们有

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1} &= ((R\otimes I)\circ\Delta_0\otimes\alpha)\circ((I\otimes R)\circ\Delta_0)\\ &= ((R\otimes I)\circ\Delta_0\otimes\alpha\circ R)\circ\Delta_0\\ &= ((R\otimes I)\circ\Delta_0\otimes R\circ\alpha)\circ\Delta_0\\ &= ((R\otimes I\otimes R)\circ(\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_0\\ &= ((R\otimes I\otimes R)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_0\\ &= (R\circ\alpha\otimes(I\otimes R)\circ\Delta_0)\circ\Delta_0\\ &= (\alpha\circ R\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_0\\ &= (\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ(R\otimes I)\circ\Delta_0\\ &= (\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_1.\end{aligned}$$

类似地，我们证明其他关系。 □

**推论 3.12.** 设$(C,\Delta_0,\alpha,R)$是权为 $\lambda\in\mathbb{K}$ 的 *Hom*-余结合 *Rota-Baxter* 余代数。那么，$(C,\bar{\Delta}_{-1},\bar{\Delta}_1,\alpha)$是一个 *Hom*-分裂余代数，其中

$$\bar{\Delta}_{-1}=\Delta_{-1}+\lambda\Delta_0 \quad and \quad \bar{\Delta}_1=\Delta_1.$$

现在令 $\mathcal{S}_3$ 为 3 阶对称群。给定 $\sigma\in\mathcal{S}_3$，我们定义一个线性映射

$$\Phi_\sigma : C^{\otimes 3}\to C^{\otimes 3}$$

by

$$\Phi_\sigma(x_1\otimes x_2\otimes x_3)=x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes x_{\sigma^{-1}(2)}\otimes x_{\sigma^{-1}(3)}.$$

下面一系列命题给出了 Hom-分裂余代数和 Hom-余结合 Rota-Baxter 余代数与 Hom-前 Lie 余代数之间的联系。

**命题 3.13.** 设$(C,\Delta_{-1},\Delta_1,\alpha)$是一个 *Hom*-分裂余代数。定义线性映射

$$\Delta=\Delta_1-\tau\circ\Delta_{-1}:C\to C\otimes C.$$

那么，$(C,\Delta,\alpha)$是一个 *Hom*-前 *Lie* 余代数。

证明。 一方面，我们有

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\alpha)\circ\Delta &= ((\Delta_1-\tau\circ\Delta_{-1})\otimes\alpha)\circ\Delta_1-(\alpha\otimes(\Delta_1-\tau\circ\Delta_{-1}))\circ\Delta_{-1}\\ &= (\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_1-(\tau\circ\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_1-\Phi_{(231)}\circ(\alpha\otimes\Delta_1)\circ\Delta_{-1}\\ &\quad+\Phi_{(321)}\circ(\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_{-1}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}(\alpha\otimes\Delta)\circ\Delta &= (\alpha\otimes(\Delta_1-\Delta_{-1}\circ\tau))\circ\Delta_1-\Phi_{(312)}\circ((\Delta_1-\Delta_{-1}\circ\tau)\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}\\ &= (\alpha\otimes(\Delta_1)\circ\Delta_1-(\alpha\otimes(\Delta_{-1}\circ\tau))\circ\Delta_1-\Phi_{(312)}\circ(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}\\ &\quad+\Phi_{(312)}\circ(\Delta_{-1}\circ\tau\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}\\ &= (\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_1+(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_1-(\alpha\otimes(\Delta_{-1}\circ\tau))\circ\Delta_1\\ &\quad-\Phi_{(312)}\circ(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}+\Phi_{(321)}\circ(\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_{-1}\\ &\quad+\Phi_{(321)}\circ(\alpha\otimes\Delta_1)\circ\Delta_{-1}.\quad\text{(by (3.3) and (3.1))}\end{aligned}$$

因此，利用 3.2 可得

$$\begin{aligned} c_\alpha(\Delta) &= -(\Delta_{-1}\circ\tau\otimes)\circ\Delta_1-\Phi_{(321)}\circ(\alpha\otimes\Delta_1)\circ\Delta_{-1}-(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_1\\ &\quad+\Phi_{(213)}\circ(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_1+\Phi_{(312)}\circ(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}\\ &\quad-\Phi_{(321)}\circ(\alpha\otimes\Delta_1)\circ\Delta_{-1}. \end{aligned}$$

由此可得

$$c_\alpha(\Delta)-\Phi_{(213)}\circ c_\alpha(\Delta)=0,$$

根据定义 3.1 中的公理，其中 $c_\alpha(\Delta)=(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_\cdot-(\Delta_\cdot\otimes\alpha)\circ\Delta_\cdot$. □

以下两个命题的证明与前一个命题类似。

**命题 3.14.** 设 $(C,\Delta_0,\alpha,R)$ 是一个权为0的 *Hom*-余结合 *Rota-Baxter* 余代数。那么，$(C,\Delta,\alpha)$ 是一个 *Hom*-前 *Lie* 余代数，其中

$$\Delta=(R\otimes I)\circ\Delta_0-\tau\circ(I\otimes R)\circ\Delta_0.$$

**命题 3.15.** 设 $(C,\Delta_0,\alpha,R)$ 是一个权为 $-1$ 的 *Hom*-余结合 *Rota-Baxter* 余代数。定义线性映射 $\Delta: C\to C\otimes C$ 为

$$\Delta=(R\otimes I)\circ\Delta_0-\tau\circ(I\otimes R)\circ\Delta_0-\Delta_0.$$

那么，$(C,\Delta,\alpha)$ 是一个 *Hom*-前 *Lie* 余代数。

## 3.2 Hom-三 dendriform 余模

**定义 3.16.** 三 dendriform 余代数 $(C,\Delta_{-1},\Delta_0,\Delta_1,\alpha)$ 上的 Hom-三 dendriform 余模是一个 Hom-模 $(M,\alpha_M)$，配备三个线性映射 $\Delta_{-1,M},\Delta_{0,M},\Delta_{1,M}$： $C\to C\otimes M$满足下列关系:

$$(\Delta_{-1}\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{-1,M} = (\alpha\otimes\Delta_{-1,M}+\alpha\otimes\Delta_{0,M}+\alpha\otimes\Delta_{1,M})\circ\Delta_{-1,M}, \tag{3.8}$$

$$(\Delta_1\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{-1,\ M} = (\alpha\otimes\Delta_{-1,M})\circ\Delta_{1,M}, \tag{3.9}$$

$$(\alpha\otimes\Delta_{1,M})\circ\Delta_{1,M} = (\Delta_{-1}\otimes\alpha_M+\Delta_1\otimes\alpha_M+\Delta_0\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{1,M}, \tag{3.10}$$

$$(\Delta_{-1}\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{0,\ M} = (\alpha\otimes\Delta_{1,M})\circ\Delta_{0,M}, \tag{3.11}$$

$$(\Delta_1\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{0,\ M} = (\alpha\otimes\Delta_{0,\ M})\circ\Delta_{1,\ M}, \tag{3.12}$$

$$(\Delta_0\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{-1,\ M} = (\alpha\otimes\Delta_{-1,\ M})\circ\Delta_{0,\ M}, \tag{3.13}$$

$$(\Delta_0\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{0,M} = (\alpha\otimes\Delta_{0,M})\circ\Delta_{0,M}. \tag{3.14}$$

**例 3.17**。 取 $M=C$ 为向量空间，$\Delta_{-1,\ M}=\Delta_{-1}$、 $\Delta_{0,\ M}=\Delta_0$、 $\Delta_{0,\ M}=\Delta_0$ 和 $\alpha_M=\alpha$，我们看到 Hom-三分余代数是其自身上的余模。

**定理 3.18**。 设 （$C$、 $\Delta_{-1,\ M}$、 $\Delta_{0,\ M}$、 $\Delta_{1,\ M}$、 $\alpha_M$） 是 *Hom*-三分余代数（$C$、 $\Delta_{-1}$、 $\Delta_0$、 $\Delta_1$、 $\alpha$）上的余模。定义线性映射

$$\Delta^{n,0}_{i,M}=(\alpha^n\otimes Id_M)\circ\Delta_{i,M}: M\to C\otimes M,\quad i=-1;0;1.$$

那么，$(M,\Delta^{n,0}_{-1,M},\Delta^{n,0}_{0,M},\Delta^{n,0}_{1,M},\alpha_M)$ 是一个 $C$-余模。

证明。 我们只证明 (3.13)。我们有

$$\begin{aligned}(\Delta_0 \otimes \alpha_M) \circ \Delta^{n,0}_{-1,M} &= (\Delta_0 \otimes \alpha_M) \circ (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_{-1,M} \\ &= (\Delta_0 \circ \alpha^n \otimes \alpha_M) \circ \Delta_{-1,M} \\ &= (\alpha^n \otimes \alpha^n \otimes Id_M) \circ (\Delta_0 \otimes \alpha_M) \circ \Delta_{-1,M} \\ &= (\alpha^n \otimes \alpha^n \otimes Id_M) \circ (\alpha \otimes \Delta_{-1,M}) \circ \Delta_{0,M} \\ &= (\alpha^{n+1} \otimes (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_{-1,M}) \circ \Delta_{0,M} \\ &= (\alpha \otimes \Delta^{n,0}_{-1,M}) \circ \Delta^{n,0}_{0,M}.\end{aligned}$$

其余公理的证明类似。 □

注 3.19. 通过直接计算可以证明，若 $(M, \Delta_{-1,M}, \Delta_{0,M}, \Delta_{1,M}, \alpha_M)$ 是一个 $C$-余模，且 $(C, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \alpha)$ 是一个 Hom-三分余代数，则 $(M, \Delta^{0,\overset{k}{\cdots},0}_{-1,M} = \Delta_{-1,M} \circ \alpha^{2^k-1}_M, \Delta^{0,\overset{k}{\cdots},0}_{0,M} = \Delta_{0,M} \circ \alpha^{2^k-1}_M, \Delta^{0,\overset{k}{\cdots},0}_{1,M} = \Delta_{1,M} \circ \alpha^{2^k-1}_M, \alpha^{2^k-1}_M)$ 是 $(C, \Delta^{0,\overset{k}{\cdots},0}_{-1} = \Delta_{-1} \circ \alpha^{2^k-1}, \Delta^{0,\overset{k}{\cdots},0}_{0,M} = \Delta_0 \circ \alpha^{2^k-1}, \Delta^{0,\overset{k}{\cdots},0}_{1,M} = \Delta_1 \circ \alpha^{2^k-1}, \alpha^{2^k-1})$ 上的余模。（分别地，$\Delta^{n,\overset{k}{\cdots},i,M} = (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_{i,M} \circ \alpha^{2^k}_M$ 赋予 $s$（分别地，$m$）一个 Hom-三 dendriform 余模结构。

# 4 后 Hom-Lie 余代数

本节定义后 Hom-Lie 余代数，并给出其与其他代数结构相关的一些性质。

**定义 4.1**。 后 Hom-Lie 余代数是一个向量空间 $C$，赋有两个线性余乘法$\Delta$： $C \to C \otimes C$和 $\gamma$: $C \to C \otimes C$，以及 $\alpha$： $C \to C$一个线性映射，使得:

$$\gamma = -\tau \circ \gamma; \quad \gamma \circ \alpha = \alpha^{\otimes^2} \circ \gamma \tag{4.1}$$

$$(1 + \xi + \xi^2) \circ (\alpha \otimes \gamma) \circ \gamma = 0, \tag{4.2}$$

$$(\alpha \otimes \gamma) \circ \Delta - (\Delta \otimes \alpha) \circ \gamma - (\tau \otimes I) \circ (\alpha \otimes \Delta) \circ \gamma = 0, \tag{4.3}$$

$$(\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta - (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta - (\tau \otimes I) \circ (\Delta \otimes \alpha) \circ \Delta + (\tau \otimes I) \circ (\alpha \otimes \Delta) \circ \Delta + (\gamma \otimes \alpha) \circ \Delta = 0, \tag{4.4}$$

其中 $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$, $\xi(x \otimes y \otimes z) = y \otimes z \otimes x$ 以及 $\xi^2(x \otimes y \otimes z) = z \otimes x \otimes y$对所有 $x, y, z \in C$ .

注 4.2。 我们有以下观察:

$$\xi = (I \otimes \tau) \circ (\tau \otimes I) \quad \text{and} \quad \xi^2 = (\tau \otimes I) \circ (I \otimes \tau).$$

注 4.3. 性质 (4.1)–(4.4) 可分别改写为:

$$x_1 \otimes x_2 = -x_2 \otimes x_1; \ \alpha(x)_1 \otimes \alpha(x)_2 = \alpha(x_1) \otimes \alpha(x_2) \tag{4.5}$$

$$\alpha(x_1) \otimes x_{21} \otimes x_{22} + x_{21} \otimes x_{22} \otimes \alpha(x_1) + x_{22} \otimes \alpha(x_1) \otimes x_{21} = 0, \tag{4.6}$$

$$\alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)1} \otimes x_{(2)2} - x_{1(1)} \otimes x_{1(2)} \otimes \alpha(x_2) - x_{2(1)} \otimes \alpha(x_1) \otimes x_{2(2)} = 0, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}x_{(1)(1)} \otimes x_{(1)(2)} \otimes \alpha(x_{(2)}) - \alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)(1)} \otimes x_{(2)(2)} - x_{(1)(2)} \otimes x_{(1)(1)} \otimes \alpha(x_{(2)}) \\ + x_{(2)(1)} \otimes \alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)(2)} + x_{(1)1} \otimes x_{(1)2} \otimes \alpha(x_{(2)}) = 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

注 4.4。 公理 (4.7) 和 (4.8) 分别等价于:

$$x_{(2)1}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)2}-x_{1(2)}\otimes x_{1(1)}\otimes\alpha(x_2)-\alpha(x_1)\otimes x_{2(1)}\otimes x_{2(2)}=0, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} x_{(1)(2)}\otimes x_{(1)(1)}\otimes\alpha(x_{(2)})&-x_{(2)(1)}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(2)}-x_{(1)(1)}\otimes x_{(1)(2)}\otimes\alpha(x_{(2)})\\ &+\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(1)}\otimes x_{(2)(2)}+x_{(1)2}\otimes x_{(1)1}\otimes\alpha(x_{(2)})=0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

注 4.5. 对于任意 Hom-Lie 余代数，我们有:

$$x_{11}\otimes x_{12}\otimes\alpha(x_2) = (\gamma\otimes\alpha)\gamma(x)=-(\gamma\otimes\alpha)\tau\gamma(x)=-x_{21}\otimes x_{22}\otimes\alpha(x_1). \tag{4.11}$$

$$x_{21}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{22} = (\tau\otimes I)(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x)=-(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\tau\gamma)\gamma(x)=-x_{22}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{21}. \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} x_{12}\otimes x_{11}\otimes\alpha(x_2) &= (\tau\otimes I)(x_{11}\otimes x_{12}\otimes\alpha(x_2))=(\tau\otimes I)(\gamma\otimes\alpha)\gamma(x)\\ &= (\gamma\otimes\alpha)\tau\gamma(x)=x_{21}\otimes x_{22}\otimes\alpha(x_1) \qquad (4.13)\\ &= -(\gamma\otimes\alpha)\gamma(x)=-x_{11}\otimes x_{12}\otimes\alpha(x_2). \qquad (4.14) \end{aligned}$$

注 4.6。 在任意后 Hom-Lie 余代数中，我们有:

$$x_{2(1)}\otimes x_{2(2)}\otimes\alpha(x_1) = (\Delta\otimes\alpha)\tau\gamma(x)=-(\Delta\otimes\alpha)\gamma(x)=x_{1(1)}\otimes x_{1(2)}\otimes\alpha(x_2). \tag{4.15}$$

**定义 4.7**。 设 $(A,\ \gamma,\ \Delta,\ \alpha)$ 和 $(A',\ \gamma',\ \Delta',\ \alpha')$ 是两个后 Hom-Lie 余代数。后 Hom-Lie余代数态射是一个线性映射 $f:\ A\to A'$，满足

$$\Delta\circ f=(f\otimes f)\circ\Delta',\quad \gamma\circ f=(f\otimes f)\circ\gamma'\quad\text{and}\quad\alpha'\circ f=f\circ\alpha.$$

**引理 4.8**。 设 $(L,\ \gamma,\ \Delta,\ \alpha)$ 是一个后 *Hom-Lie* 余代数，且 $\beta:\ L\to L$ 是一个后 *Hom-Lie*余代数自同态。则 $L_\beta=(L,\ \gamma_\beta=\gamma\circ\beta,\ \Delta_\beta=\Delta\circ\beta,\ \beta\circ\alpha)$ 是一个后 *Hom-Lie* 余代数。

此外，设 $(L',\ \gamma',\ \Delta')$ 是一个 *post-Lie*余代数，且 $\alpha':\ L'\to L'$ 是一个 *post-Lie*余代数自同态。若 $f:\ L\to L'$ 是满足 $\beta\circ f=f\circ\alpha'$ 的 *post-Lie*余代数态射，则 $f:\ L_\beta\to L'_{\alpha'}$ 是一个 *post-Hom-Lie*余代数态射。

证明。 显然，$(L,\ \gamma_\beta,\ \beta\circ\alpha)$ 是一个 Hom-Lie 余代数。于是，我们有:

$$\begin{aligned} &(\beta\alpha\otimes\gamma_\beta)\circ\Delta_\beta-\circ(\Delta_\beta\otimes\beta\alpha)\circ\gamma_\beta-(I\otimes\tau)\circ(\beta\alpha\otimes\Delta_\beta)\circ\gamma_\beta\\ =\ &(\beta\alpha\otimes\gamma\circ\beta)\circ\Delta\circ\beta-(\Delta\circ\beta\otimes\beta\alpha)\circ\gamma\circ\beta-(I\otimes\tau)\circ(\beta\alpha\otimes\Delta\circ\beta)\circ\gamma\circ\beta\\ =\ &(\alpha\otimes\gamma)\circ\Delta-(\Delta\otimes\alpha)\circ\gamma-(I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta)\circ\gamma)\circ\beta^2=0. \end{aligned}$$

公理 (4.4) 的证明类似。

对于第二部分，注意到

$$\begin{aligned} \gamma_\beta\circ f &= \gamma\circ\beta\circ f=\gamma\circ f\circ\alpha'\\ &= (f\otimes f)\circ\gamma'\circ\alpha'=(f\otimes f)\circ\gamma'_{\alpha'}, \end{aligned}$$

and

$$\Delta_\beta\circ f=\Delta\circ\beta\circ f=\Delta\circ f\circ\alpha'=(f\otimes f)\circ\Delta'\circ\alpha'=(f\otimes f)\circ\Delta'_{\alpha'}.$$

因此，结论成立。 □

**命题 4.9**。 设 $(C, \Delta, \gamma, \alpha)$ 是一个后 *Hom-Lie* 余代数。定义

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \gamma \quad and \quad \tilde{\gamma} = -\gamma.$$

˜那么，$(C, \Delta, \tilde{\gamma}, \alpha)$ 是一个后 *Hom-Lie* 余代数。

证明。 斜余对称性和 Hom-coJacobi 恒等式显然成立。我们来证明最后两个公理。对于任意 $x \in C$，一方面有

$$\begin{aligned}
&(\alpha\otimes\tilde{\gamma})\tilde{\Delta}(x) - (\tilde{\Delta}\otimes\alpha)\tilde{\gamma}(x) - (\tau\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\gamma}(x) = \\
&= -(\alpha\otimes\gamma)(\Delta+\gamma)(x) + ((\Delta+\gamma)\otimes\alpha)\gamma(x) + (\tau\otimes I)(\alpha\otimes(\Delta+\gamma))\gamma(x) \\
&= -(\alpha\otimes\gamma)\Delta(x) - (\alpha\otimes\gamma)\gamma(x) + (\Delta\otimes\alpha)\gamma(x) + (\gamma\otimes\alpha)\gamma(x) \\
&\quad +(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\Delta)\gamma(x) + (\tau\otimes I)(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x) \\
&= \Big( -(\alpha\otimes\gamma)\Delta(x) + (\Delta\otimes\alpha)\gamma(x) + (\tau\otimes I)(\alpha\otimes\Delta)\gamma(x)\Big) \\
&\quad +\Big( -(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x) + (\gamma\otimes\alpha)\gamma(x) + (\tau\otimes I)(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x)\Big).
\end{aligned}$$

第一个大括号中的项由（4.3）相消。对于第二个，我们有

$$\begin{aligned}
&-(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x) + (\gamma\otimes\alpha)\gamma(x) + (\tau\otimes I)(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x) = \\
&\quad = -\alpha(x_1)\otimes x_{21}\otimes x_{22} + x_{11}\otimes x_{12}\otimes\alpha(x_2) + x_{21}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{22}.
\end{aligned}$$

利用（4.11）和（4.12），该式由 Hom-coJacobi 恒等式相消。
另一方面,

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\Delta}\otimes\alpha)\tilde{\Delta}(x) - (\alpha\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(x) - (\tau\otimes I)(\tilde{\Delta}\otimes\alpha)\tilde{\Delta}(x) + (\tau\otimes I)(\alpha\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(x) + (\tilde{\gamma}\otimes\alpha)\tilde{\Delta}(x) = \\
&\quad = \tilde{\Delta}(x_{(1)})\otimes\alpha(x_{(2)}) + \tilde{\Delta}(x_1)\otimes\alpha(x_2) - \alpha(x_{(1)})\otimes\tilde{\Delta}(x_{(2)}) - \alpha(x_1)\otimes\tilde{\Delta}(x_2) \\
&\qquad -(\tau\otimes I)(\tilde{\Delta}(x_{(1)})\otimes\alpha(x_{(2)})) - (\tau\otimes I)(\tilde{\Delta}(x_1)\otimes\alpha(x_2)) + (\tau\otimes I)(\alpha(x_{(1)})\otimes\tilde{\Delta}(x_{(2)})) \\
&\qquad +(\tau\otimes I)(\alpha(x_1)\otimes\tilde{\Delta}(x_2)) + \tilde{\gamma}(x_{(1)})\otimes\alpha(x_{(2)}) + \tilde{\gamma}(x_1)\otimes\alpha(x_2) \\
&\quad = x_{(1)(1)}\otimes x_{(1)(2)}\otimes\alpha(x_{(2)}) + x_{(1)1}\otimes x_{(1)2}\otimes\alpha(x_{(2)}) + x_{1(1)}\otimes x_{1(2)}\otimes\alpha(x_2) + x_{11}\otimes x_{12}\otimes\alpha(x_2) \\
&\qquad -\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(1)}\otimes x_{(2)(2)} - \alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)1}\otimes x_{(2)2} - \alpha(x_1)\otimes x_{2(1)}\otimes x_{2(2)} - \alpha(x_1)\otimes x_{21}\otimes x_{22} \\
&\qquad -x_{(1)(2)}\otimes x_{(1)(1)}\otimes\alpha(x_{(2)}) - x_{(1)2}\otimes x_{(1)1}\otimes\alpha(x_{(2)}) - x_{1(2)}\otimes x_{1(1)}\otimes\alpha(x_2) - x_{12}\otimes x_{11}\otimes\alpha(x_2) \\
&\qquad +x_{(2)(1)}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(2)} + x_{(2)1}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)2} + x_{2(1)}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{2(2)} + x_{21}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{22} \\
&\qquad -x_{(1)1}\otimes x_{(1)2}\otimes\alpha(x_{(2)}) - x_{11}\otimes x_{12}\otimes\alpha(x_2).
\end{aligned}$$

经过排序和分组，可得

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\Delta}\otimes\alpha)\tilde{\Delta}(x) - (\alpha\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(x) - (\tau\otimes I)(\tilde{\Delta}\otimes\alpha)\tilde{\Delta}(x) + (\tau\otimes I)(\alpha\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(x) + (\tilde{\gamma}\otimes\alpha)\tilde{\Delta}(x) = \\
&\quad = \Big(x_{(1)(1)}\otimes x_{(1)(2)}\otimes\alpha(x_{(2)}) - \alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(1)}\otimes x_{(2)(2)} - x_{(1)(2)}\otimes x_{(1)(1)}\otimes\alpha(x_2) \\
&\qquad +x_{(2)(1)}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(2)} - x_{(1)1}\otimes x_{(1)2}\otimes\alpha(x_{(2)})\Big) + \Big( -\alpha(x_1)\otimes x_{21}\otimes x_{22} - x_{12}\otimes x_{11}\otimes\alpha(x_2) \\
&\qquad +x_{21}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{22}\Big) + \Big(x_{11}\otimes x_{12}\otimes\alpha(x_2) - \alpha(x_1)\otimes x_{21}\otimes x_{22}\Big) + \Big(x_{1(1)}\otimes x_{1(2)}\otimes\alpha(x_2) \\
&\qquad -\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)1}\otimes x_{(2)2} + x_{2(1)}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{2(2)}\Big) + \Big(x_{(2)1}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)2} - \alpha(x_1)\otimes x_{2(1)}\otimes x_{2(2)} \\
&\qquad -x_{1(2)}\otimes x_{1(1)}\otimes\alpha(x_2)\Big) + \Big(x_{(1)1}\otimes x_{(1)2}\otimes\alpha(x_2) - x_{(1)2}\otimes x_{(1)1}\otimes\alpha(x_{(2)})\Big).
\end{aligned}$$

□

**命题 4.10**。 设$(C, \Delta, \gamma)$是一个后 *Hom-Lie* 余代数。那么， $C$是一个可容许的 *Hom-Lie* 余代数，其映射为

$$\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) + \frac{1}{2}\gamma(x).$$

证明。 对于任意 $x \in C$，我们有

$$\begin{aligned}
&(\alpha \otimes \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}(x) = \\
= \;& (\alpha \otimes (\Delta + \frac{1}{2}\gamma - \tau\Delta - \frac{1}{2}\tau\gamma))\tilde{\Delta}(x) \\
& -(\tau \otimes I)(I \otimes \tau)((\alpha \otimes (\Delta + \frac{1}{2}\gamma - \tau\Delta - \frac{1}{2}\tau\gamma) \otimes \alpha)\tilde{\Delta}(x) \\
= \;& (\alpha \otimes (\Delta - \tau\Delta + \gamma))\Delta(x) + \frac{1}{2}(\alpha \otimes (\Delta - \tau\Delta + \gamma))\gamma(x) \\
& -(\tau \otimes I)(I \otimes \tau)((\Delta - \tau\Delta + \gamma) \otimes \alpha)\Delta(x) - \frac{1}{2}(\tau \otimes I)(I \otimes \tau)((\Delta - \tau\Delta + \gamma) \otimes \alpha)\gamma(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;& (\alpha \otimes \Delta)\Delta(x) - (I \otimes \tau)(\alpha \otimes \Delta)\Delta(x) + (\alpha \otimes \gamma)\Delta(x) - (\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\Delta \otimes \alpha)\Delta(x) \\
& +(\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\tau \otimes I)(\Delta \otimes \alpha)\Delta(x) - (\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\gamma \otimes \alpha)\Delta(x) + \frac{1}{2}(\alpha \otimes \Delta)\gamma(x) \\
& -\frac{1}{2}(\tau \otimes I)(\alpha \otimes \Delta)\gamma(x) + \frac{1}{2}(\alpha \otimes \gamma)\gamma(x) - \frac{1}{2}(\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\Delta \otimes \alpha)\gamma(x) \\
& -\frac{1}{2}(\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\gamma \otimes \alpha)\gamma(x) + \frac{1}{2}(\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\tau \otimes I)(\Delta \otimes \alpha)\gamma(x) \\
= \;& (\alpha \otimes \Delta)\Delta(x) - (I \otimes \tau)(\alpha \otimes \Delta)\Delta(x) + (\alpha \otimes \gamma)\Delta(x) - (\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\Delta \otimes \alpha)\Delta(x) \\
& +(\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\tau \otimes I)(\Delta \otimes \alpha)\Delta(x) - (\tau \otimes I)(I \otimes \tau)(\gamma \otimes \alpha)\Delta(x) \\
& -(I \otimes \tau)(\alpha \otimes \Delta)\gamma(x) + (I \otimes \tau)(\alpha \otimes \Delta)\gamma(x) + (\alpha \otimes \gamma)\gamma(x) \\
= \;& \alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)(1)} \otimes x_{(2)(2)} - \alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)(2)} \otimes x_{(2)(1)} + \alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)1} \otimes x_{(2)2} \\
& -\alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)(1)} \otimes x_{(1)(2)} + \alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)(2)} \otimes x_{(1)(1)} - \alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)1} \otimes x_{(1)2} \\
& -\alpha(x_1) \otimes x_{2(2)} \otimes x_{2(1)} + (\alpha \otimes \gamma)\gamma.
\end{aligned}$$

通过对各项进行分组，可得，

$$\begin{aligned}
&(\alpha \otimes \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}(x) + \xi(\alpha \otimes \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}(x) + \xi^2(\alpha \otimes \tilde{\gamma})\tilde{\gamma}(x) = \\
= \;& \Big(\alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)(1)} \otimes x_{(2)(2)} - x_{(1)(1)} \otimes x_{(1)(2)} \otimes \alpha(x_{(2)}) + x_{(1)(2)} \otimes x_{(1)(1)} \otimes \alpha(x_{(2)}) \\
& -x_{(1)1} \otimes x_{(1)2} \otimes \alpha(x_{(2)}) - x_{(2)(1)} \otimes \alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)(2)}\Big) + \Big( - \alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)(2)} \otimes x_{(2)(1)} \\
& +x_{(2)(1)} \otimes x_{(2)(2)} \otimes \alpha(x_{(1)}) - x_{(1)(2)} \otimes \alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)(1)} + x_{(1)(1)} \otimes \alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)(2)} \\
& -x_{(1)2} \otimes \alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)1}\Big) + \Big(\alpha(x_{(1)}) \otimes x_{(2)1} \otimes x_{(2)2} + x_{2(1)} \otimes x_{2(2)} \otimes \alpha(x_1) - x_{2(1)} \otimes \alpha(x_1) \otimes x_{2(2)}\Big) \\
& +\Big( - \alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)(1)} \otimes x_{(1)(2)} + \alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)(2)} \otimes x_{(1)(1)} - \alpha(x_{(2)}) \otimes x_{(1)1} \otimes x_{(1)2}
\end{aligned}$$

$$-x_{(2)(2)}\otimes x_{(2)(1)}\otimes\alpha(x_{(1)})+x_{(2)(2)}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(1)}\Big)+\Big(-\alpha(x_1)\otimes x_{2(2)}\otimes x_{2(1)}$$
$$+\alpha(x_1)\otimes x_{2(1)}\otimes x_{2(2)}+x_{(2)1}\otimes x_{(2)2}\otimes\alpha(x_{(1)})\Big)+\Big(-x_{2(2)}\otimes x_{2(1)}\otimes\alpha(x_1)$$
$$+\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)2}\otimes x_{(2)1}+x_{2(2)}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{2(1)}\Big).$$

右侧各项根据 (4.7) 和 (4.8) 相互抵消。 □

**引理 4.11**。 设 $(C,\Delta,\gamma,\alpha)$ 是一个后 *Hom-Lie* 余代数。定义映射 $\tilde{\Delta}\colon C\to C\otimes C$ *by*

$$\tilde{\Delta}(x)=\Delta(x)+\frac{1}{2}\gamma(x)$$

对任意 $x\in C$。那么，

$$as_{\tilde{\Delta}}(x)-(\tau\otimes I)as_{\tilde{\Delta}}(x)=-\frac{1}{2}(\tau\otimes I)(\gamma\otimes\alpha)\gamma(x).$$

证明。我们有，

$$\begin{aligned}as_{\tilde{\Delta}}(x) &= (\tilde{\Delta}\otimes\alpha)\tilde{\Delta}(x)-(\alpha\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(x)\\ &= ((\Delta+\frac{1}{2}\gamma)\otimes\alpha)(\Delta+\frac{1}{2}\gamma)(x)-(\alpha\otimes(\Delta+\frac{1}{2}\gamma))(\Delta+\frac{1}{2}\gamma)(x)\\ &= (\Delta\otimes\alpha)\Delta(x)+\frac{1}{2}(\gamma\otimes\alpha)\Delta(x)+\frac{1}{2}(\Delta\otimes\alpha)\gamma(x)+\frac{1}{4}(\gamma\otimes\alpha)\gamma(x)\\ &\quad -(\alpha\otimes\Delta)\Delta(x)-\frac{1}{2}(\alpha\otimes\gamma)\Delta(x)-\frac{1}{2}(\alpha\otimes\Delta)\gamma(x)-\frac{1}{4}(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x).\end{aligned}$$

对各项进行分组，可得

$$\begin{aligned}&as_{\tilde{\Delta}}(x)-(\tau\otimes\alpha)as_{\tilde{\Delta}}(x)=\\ &=\Big((\Delta\otimes\alpha)\Delta(x)-(\alpha\otimes\Delta)\Delta(x)-(\tau\otimes I)(\Delta\otimes\alpha)\Delta(x)+(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\Delta)\Delta(x)\Big)\\ &\quad+\Big(\frac{1}{2}(\gamma\otimes\alpha)\Delta(x)-\frac{1}{2}(\tau\otimes I)(\gamma\otimes\alpha)\Delta(x)\Big)+\Big(\frac{1}{2}(\Delta\otimes\alpha)\gamma(x)-\frac{1}{2}(\alpha\otimes\gamma)\Delta(x)\\ &\quad+\frac{1}{2}(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\Delta)\gamma(x)\Big)+\Big(\frac{1}{4}(\gamma\otimes\alpha)\gamma(x)-\frac{1}{4}(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x)+\frac{1}{4}(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x)\Big)\\ &+\Big(-\frac{1}{2}(\tau\otimes I)(\Delta\otimes\alpha)\gamma(x)+\frac{1}{2}(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\gamma)\Delta(x)-\frac{1}{2}(\alpha\otimes\Delta)\gamma(x)\Big)-\frac{1}{4}(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x)\\ &=-(\gamma\otimes\alpha)\Delta(x)+(\gamma\otimes\alpha)\Delta(x)+\Big(\frac{1}{2}(\Delta\otimes\alpha)\gamma(x)-\frac{1}{2}(\alpha\otimes\gamma)\Delta(x)\\ &\quad+\frac{1}{2}(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\Delta)\gamma(x)\Big)+\Big(\frac{1}{4}(\gamma\otimes\alpha)\gamma(x)-\frac{1}{4}(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x)+\frac{1}{4}(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x)\Big)\\ &+\Big(-\frac{1}{2}(\tau\otimes I)(\Delta\otimes\alpha)\gamma(x)+\frac{1}{2}(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\gamma)\Delta(x)-\frac{1}{2}(\alpha\otimes\Delta)\gamma(x)\Big)-\frac{1}{4}(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x)\\ &=-\frac{1}{4}(\alpha\otimes\gamma)\gamma(x).\end{aligned}$$

另外三个括号由 (4.2) 和 (4.3) 相消。 □

˜**命题 4.12**。 设$(C, \Delta, \gamma, \alpha)$ 为一个后 *Hom-Lie* 余代数。定义映射 $\Delta:\ C \to C \otimes C$如下:

$$\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) + \frac{1}{2}\gamma(x)$$

˜对任意 $x \in C$。那么，$(C, \Delta, \alpha)$ 是可容许 *Hom-Lie* 余代数，当且仅当

$$(I + \xi + \xi^2)\Big(as_{\tilde{\Delta}}(x) - (\tau \otimes I)as_{\tilde{\Delta}}(x)\Big) = 0.$$

证明。 这由引理 4.11 得出。 □

**定义 4.13**。 设 $(C, \gamma, \alpha)$ 是一个 Hom-Lie 余代数。线性映射 $R:\ C \to C$ 称为 $C$ 上的权为 $\lambda \in \mathbb{K}$ 的 Rota-Baxter 算子，如果

$$R \circ \alpha = \alpha \circ R, \tag{4.16}$$

$$(R \otimes R)\gamma(x) = ((R \otimes I)\gamma + (I \otimes R)\gamma + \lambda\gamma)R(x) \tag{4.17}$$

对任意 $x \in C$。

在这种情况下，我们称 $(C, \gamma, R, \alpha)$ 为 Rota-Baxter Hom-Lie 余代数。

**命题 4.14**。 设 $(C, \gamma, R, \alpha)$ 是一个 *Rota-Baxter Hom-Lie* 余代数。定义

$$\tilde{\gamma} = \lambda\gamma \quad and \quad \tilde{\Delta} = (R \otimes I) \circ \gamma.$$

˜那么，$(C, \Delta, \tilde{\gamma}, \alpha)$ 是一个后 *Hom-Lie* 余代数。

证明。 前两个公理显然成立。接下来,

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\Delta} \otimes \alpha)\tilde{\Delta}(x) - (\alpha \otimes \tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(x) - (\tau \otimes I)(\tilde{\Delta} \otimes \alpha)\tilde{\Delta}(x) \\
&\qquad\qquad +(\tau \otimes I)(\alpha \otimes \tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(x)+(\tilde{\gamma} \otimes \alpha)\tilde{\Delta}(x) = \\
&= ((R \otimes I)\gamma \otimes \alpha)(R \otimes I)\gamma(x) - (\alpha \otimes (R \otimes I)\gamma)(R \otimes I)\gamma(x) \\
&-(\tau \otimes I)((R \otimes I)\gamma \otimes \alpha)(R \otimes I)\gamma(x) \\
&\quad +(\tau \otimes I)(\alpha \otimes (R \otimes I)\gamma)(R \otimes I)\gamma(x) + \lambda(\gamma \otimes \alpha)(R \otimes I)\gamma(x) \\
&= ((R \otimes I)\gamma \otimes \alpha)(R \otimes I)\gamma(x) + \Big( - (\alpha \otimes (R \otimes I)\gamma)(R \otimes I)\gamma(x) + (\tau \otimes I)(\alpha \otimes \tilde{\Delta})\Delta(x)\Big) \\
&\quad -(\tau \otimes I)(\Delta \otimes \alpha)\Delta(x) + \lambda(\gamma \otimes \alpha)(R \otimes I)\gamma(x) \\
&= (R \otimes I \otimes I)(\gamma \otimes \alpha)(R \otimes I)\gamma(x) - (R \otimes R \otimes I)(\gamma \otimes \alpha)\gamma(x) \\
&\quad +(\tau \otimes I)((R \otimes I)\gamma \otimes \alpha)(R \otimes I)\gamma(x) + \lambda(\gamma R \otimes I)\gamma(x) \\
&= \Big((R \otimes I \otimes I)(\gamma R \otimes \alpha) - (R \otimes R \otimes I)(\gamma \otimes \alpha) + ((I \otimes R)\gamma R \otimes \alpha)\gamma + \lambda(\gamma R \otimes \alpha)\Big)\gamma(x) \\
&= \Big((R \otimes I)\gamma R \otimes \alpha - (R \otimes R)\gamma \otimes \alpha + (I \otimes R)\gamma R \otimes \alpha + \lambda\gamma R \otimes \alpha\Big)\gamma(x) \\
&= \Big\{\Big((R \otimes I)\gamma R - (R \otimes R)\gamma + (I \otimes R)\gamma R + \lambda\gamma R\Big) \otimes \alpha\Big\}\gamma(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

最后,

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\otimes\tilde{\gamma})\tilde{\Delta}-(\tilde{\Delta}\otimes\alpha)\tilde{\gamma}-(\tau\otimes I)(\alpha\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\gamma}=\\
&=(\alpha\otimes\lambda\gamma)(R\otimes I)\gamma-((R\otimes I)\gamma\otimes\alpha)\lambda\gamma-(\tau\otimes I)(\alpha\otimes(R\otimes I)\gamma)\lambda\gamma\\
&=\lambda(R\otimes\gamma)\gamma-\lambda(R\otimes I\otimes\alpha)(\gamma\otimes I)\gamma-\lambda(\tau\otimes I)(\alpha\otimes R\otimes I)(I\otimes\gamma)\gamma\\
&=\lambda\Big((R\otimes\gamma)\gamma+(R\otimes I\otimes\alpha)(\tau\gamma\otimes I)\gamma+(\tau\otimes I)(\alpha\otimes R\otimes I)(I\otimes\tau\gamma)\gamma\Big)\\
&=\lambda\Big(R(x_1)\otimes x_{21}\otimes x_{22}+R(x_{21})\otimes x_{22}\otimes\alpha(x_1)+R(x_{22})\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{21}\Big)\\
&=\lambda\Big(\alpha(x_1)\otimes x_{21}\otimes x_{22}+x_{21}\otimes x_{22}\otimes\alpha(x_1)+x_{22}\otimes\alpha(x_1)\otimes x_{21}\Big).
\end{aligned}
$$

右侧根据 Hom-coJacobi 恒等式相互抵消。证明至此完成。 □

**命题4.15.** 设$(C,\Delta,\gamma,\alpha)$是一个后 *Hom-Lie* 余代数，$(C',\Delta',\alpha')$是一个余交换 *Hom*-余代数。那么， $C'\otimes C$ 是一个后 *Hom-Lie* 余代数，且

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(a\otimes x) &= (I\otimes\tau\otimes I)(\Delta'(a)\otimes\Delta(x))=a_{(1)}\otimes x_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes x_{(2)},\\
\tilde{\gamma}(a\otimes x) &= (I\otimes\tau\otimes I)(\Delta'(a)\otimes\gamma(x))=a_{(1)}\otimes x_1\otimes a_{(2)}\otimes x_2,\\
\tilde{\alpha}(a\otimes x) &= \alpha'(a)\otimes\alpha(x)
\end{aligned}
$$

对任意 $a\in C',x\in C$。

证明. 对于所有 $a\in C',x\in C$,
斜余对称性:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(a\otimes x) &= -(I\otimes\tau\otimes I)(\tau\Delta(a)\otimes\tau\gamma(x))=-(I\otimes\tau\otimes I)(a_{(2)}\otimes a_1\otimes x_{(2)}\otimes x_1)\\
&= -a_{(2)}\otimes x_2\otimes a_{(1)}\otimes x_1=-\eta(a_{(1)}\otimes x_1\otimes a_{(2)}\otimes x_2)\\
&= -\eta\tilde{\gamma}(a\otimes x).
\end{aligned}
$$

Hom-CoJacobi 恒等式:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}(a\otimes x) &= (\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\gamma})(a_{(1)}\otimes x_1\otimes a_{(2)}\otimes x_2)\\
&= \alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_1)\otimes\tilde{\gamma}(a_{(2)}\otimes x_2)\\
&= \alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_1)\otimes a_{(2)(1)}\otimes x_{21}\otimes a_{(2)(2)}\otimes x_{22},
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}(a\otimes x)+\xi(\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}(a\otimes x)+\xi^2(\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\gamma})\tilde{\gamma}(a\otimes x)=\\
&\quad=\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_1)\otimes a_{(2)(1)}\otimes x_{21}\otimes a_{(2)(2)}\otimes x_{22}+a_{(2)(1)}\otimes x_{21}\otimes a_{(2)(2)}\otimes x_{22}\otimes\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_1)\\
&\qquad+a_{(2)(2)}\otimes x_{22}\otimes\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_1)\otimes a_{(2)(1)}\otimes x_{21}\\
&\quad=(\mathbf{I}\otimes\tau\otimes\mathbf{I})(I\otimes\tau\otimes\tau\otimes I)\alpha'(a_{(1)})\otimes a_{(2)(1)}\otimes a_{(2)(2)}\otimes\Big(\alpha(x_1)\otimes x_{21}\otimes x_{22}\\
&\qquad+x_{21}\otimes x_{22}\otimes x_1+x_{22}\otimes x_1\otimes x_{21}\Big).
\end{aligned}
$$

根据 $C$中的 Hom-coJacobi 恒等式，二者相互抵
消。˜让我们验证 $\Delta$ 和 $\tilde{\gamma}$ 的公理 (4.3):

$$
\begin{aligned}
&((\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\gamma}+(\eta\otimes\mathbf{I})(\tilde{\Delta}\otimes\tilde{\alpha})\tilde{\gamma}-(\eta\otimes\mathbf{I})(\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\gamma})\tilde{\alpha}))(a\otimes x)=\\
&=(\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\Delta})(a_{(1)}\otimes x_1\otimes a_{(2)}\otimes x_2)+(\eta\otimes\mathbf{I})(\tilde{\Delta}\otimes\tilde{\alpha})(a_{(1)}\otimes x_1\otimes a_{(2)}\otimes x_2)\\
&\quad-(\eta\otimes\mathbf{I})(\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\gamma})(a_{(1)}\otimes x_1\otimes a_{(2)}\otimes x_2)\\
&=\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_1)\otimes\tilde{\Delta}(a_{(2)}\otimes x_2)+(\tau\otimes\mathbf{I})(\tilde{\Delta}(a_{(1)}\otimes x_1)\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\alpha(x_2))\\
&\quad-(\eta\otimes\mathbf{I})(\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_1)\otimes\gamma(a_{(2)}\otimes x_2))\\
&=\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_1)\otimes a_{(2)(1)}\otimes x_{2(1)}\otimes a_{(2)(2)}\otimes x_{2(2)}+a_{(1)(2)}\otimes x_{1(2)}\otimes a_{(1)(1)}\otimes x_{1(1)}\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\alpha(x_2)\\
&\quad-a_{(2)(1)}\otimes x_{(2)1}\otimes\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes a_{(2)(2)}\otimes x_{(2)(2)}\\
&=(\mathbf{I}\otimes\tau\otimes\mathbf{I})(I\otimes\tau\otimes\tau\otimes I)\alpha'(a_{(1)})\otimes a_{(2)(1)}\otimes a_{(2)(2)}\otimes\Big(\alpha(x_1)\otimes\otimes x_{2(1)}\otimes\otimes x_{2(2)}\\
&\quad+x_{1(2)}\otimes x_{1(1)}\otimes\alpha(x_2)-x_{(2)1}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(2)}\Big).
\end{aligned}
$$

由 (4.7) 可知，右边为零。
现在我们来验证以下对象满足公理 (4.4): $\tilde{\Delta}$和 $\tilde{\gamma}$ :
As,

$$
\begin{aligned}
as_{\tilde{\Delta}}(a\otimes x) &= (\tilde{\Delta}\otimes\tilde{\alpha})\tilde{\Delta}(a\otimes x)-(\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\Delta})\tilde{\Delta}(a\otimes x)\\
&= \tilde{\Delta}(a_{(1)}\otimes x_{(1)})\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\alpha(x_{(2)})-\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes\tilde{\Delta}(a_{(2)}\otimes x_2)\\
&= a_{(1)(1)}\otimes x_{(1)(1)}\otimes a_{(1)(2)}\otimes x_{(1)(2)}\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\alpha(x_{(2)})\\
&\quad-\alpha(a_{(1)})\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes a_{(2)(1)}\otimes x_{(2)(1)}\otimes a_{(2)(2)}\otimes x_{(2)(2)},
\end{aligned}
$$

and

$$
(\tilde{\gamma}\otimes\tilde{\alpha})\tilde{\Delta}(a\otimes x)=a_{(1)(1)}\otimes x_{1(1)}\otimes a_{(1)(2)}\otimes x_{(1)2}\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\alpha(x_{(2)}),
$$

可得

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{\gamma}\otimes\tilde{\alpha})\tilde{\Delta}(a\otimes x)-(\eta\otimes I)(\tilde{\gamma}\otimes\tilde{\alpha})\tilde{\Delta}(a\otimes x)=\\
&=a_{(1)(1)}\otimes x_{(1)(1)}\otimes a_{(1)(2)}\otimes x_{(1)(2)}\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\alpha(x_{(2)})\\
&\quad-\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes a_{(2)(1)}\otimes x_{(2)(1)}\otimes a_{(2)(2)}\otimes x_{(2)(2)}\\
&\quad-a_{(1)(2)}\otimes x_{(1)(2)}\otimes a_{(1)(1)}\otimes x_{(1)(1)}\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\alpha(x_{(2)})\\
&\quad-a_{(2)(1)}\otimes x_{(2)(1)}\otimes\alpha'(a_{(1)})\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes a_{(2)(2)}\otimes x_{(2)(2)}\\
&\quad+a_{(1)(1)}\otimes x_{(1)1}\otimes a_{(1)(2)}\otimes x_{(1)2}\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\alpha(x_{(2)})\\
&=(\mathbf{I}\otimes\tau\otimes\mathbf{I})(I\otimes\tau\otimes\tau\otimes I)a_{(1)(1)}\otimes a_{(1)(2)}\otimes\alpha'(a_{(2)})\otimes\Big(x_{(1)(1)}\otimes x_{(1)(2)}\otimes\alpha(x_{(2)})\\
&\quad-\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(1)}\otimes x_{(2)(2)}-x_{(1)(2)}\otimes x_{(1)(1)}\otimes\alpha(x_{(2)})-x_{(2)(1)}\otimes\alpha(x_{(1)})\otimes x_{(2)(2)}\\
&\quad+x_{(1)1}\otimes x_{(1)2}\otimes\alpha(x_{(2)})\Big).
\end{aligned}
$$

由（4.8）可知，右边为零 □

## 4.1 与 Hom-三分余代数的联系

**定义4.16**。 余交换 Hom-tridendriform 余代数是一个四元组 $(T,\ \Delta_\star,\ \Delta_.,\ \alpha)$，其中 $(T,\ \Delta_.,\ \alpha)$ 是一个余交换Hom-余结合余代数，且 $\Delta_\star:\ T \to T\otimes T$ 是满足以下条件的线性运算：

$$((\Delta_\star + \tau\circ\Delta_\star + \Delta_.)\otimes\alpha)\circ\Delta_\star = (\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_\star, \tag{4.18}$$

$$(\Delta_\star\otimes\alpha)\circ\Delta_. = (\alpha\otimes\Delta_.)\circ\Delta_\star. \tag{4.19}$$

**命题 4.17**。 设$(T, \Delta_{-1}, \Delta_1, \Delta_0, \alpha)$ 是一个 *Hom*-三分余代数。那么，$(T, \gamma, \Delta_*, \alpha)$ 是一个后 *Hom-Lie* 余代数，其中 $\gamma = (1-\tau)\circ\Delta_0$ 且 $\Delta_* = \Delta_1 - \tau\circ\Delta_{-1}$。

证明。 根据引理 2.6，$(T, \gamma, \alpha)$ 是一个 Hom-Lie 余代数。现在，我们有：

$$\begin{aligned}
&\epsilon^2\circ(\alpha\otimes\gamma)\circ\Delta_* - \epsilon^2\circ(\Delta_*\otimes\alpha)\circ\gamma - (I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_*)\circ\gamma\\
&= \epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_1 - \epsilon^2\circ(I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_1 - (\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}\\
&\quad +(\tau\otimes I)\circ(\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1} - \epsilon^2\circ(\Delta_1\otimes_\alpha)\circ\Delta_0 + (I\otimes\tau)\circ(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_0\\
&\quad +\epsilon\circ(\alpha\otimes\Delta_1)\circ\Delta_0 - (\tau\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_{-1}) - (I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_1)\circ\Delta_0\\
&\quad +(\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_0 + (I\otimes\tau)\circ\epsilon^2\circ(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_0 - \epsilon\circ(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

根据定义 4.1 中的公理，左边为零。
Next

$$\begin{aligned}
&(\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_* - (\tau\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_* + (\tau\otimes I)\circ(\Delta_*\otimes\alpha)\circ\Delta_*\\
&\quad -(\Delta_*\otimes\alpha)\circ\Delta_* + (\tau\otimes I)\circ(\gamma\otimes\alpha)\circ\Delta_*\\
&= (\alpha\otimes\Delta_1)\circ\Delta_1 - (I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_1 - \epsilon\circ(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}\\
&\quad +(I\otimes\tau)\circ\epsilon^2\circ(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1} - (\tau\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_1)\circ\Delta_1\\
&\quad -\epsilon\circ(\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_1 - (I\otimes\tau)\circ(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1} + \epsilon^2\circ(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_{\dashv}\\
&\quad (\tau\otimes I)\circ(\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_1 - (\Delta_{-1}\otimes\otimes\alpha)\circ\Delta_1 + \epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_{-1}\\
&\quad -(I\otimes\tau)\circ\epsilon^2\circ(\alpha_\otimes\Delta_1)\circ\Delta_{-1} - (\Delta_1\otimes\alpha)\circ\Delta_1 + (\tau\otimes I)\circ(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_1\\
&\quad +\epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_1\circ\Delta_{-1} - (I\otimes\tau)\circ\epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_{-1} - (\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_1\\
&\quad +(\tau\otimes I)\circ(\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_1 - (I\otimes\tau)\circ\epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_{-1} + \epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_{-1}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

根据定义 4.1 中的公理，该式为零。 □

**命题 4.18**。 设$(A, \Delta_0, \alpha, R)$ 是一个 *Hom*-余结合 *Rota-Baxter* 余代数。定义

$$\begin{aligned}
\Delta_{-1} &:= (I\otimes B)\circ\Delta_0 - \Delta_0,\\
\Delta_1 &:= (B\otimes I)\circ\Delta_0 + \Delta_0.
\end{aligned}$$

那么，$(A, \Delta_{-1}, \Delta_1, \alpha)$ 是一个 *Hom*-分裂余代数。

证明。我们有：

$$\begin{aligned}(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1} &= (I\otimes B\otimes I)\circ(\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}-(\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1}\\ &= (I\otimes B\otimes\alpha)\circ(\Delta_0\otimes B)\circ\Delta_0-(I\otimes B\otimes I)\circ(\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_0\\ &\quad -(I\otimes I\otimes\alpha)\circ(\Delta_0\otimes B)\circ\Delta_0+(\Delta_0\otimes\alpha)\circ\Delta_0.\end{aligned}$$

利用 Hom-结合性以及 $\alpha$ 与 $B$可交换这一事实,

$$\begin{aligned}(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1} &= (I\otimes B\otimes B)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_0-(I\otimes B\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_0\\ &\quad -(I\otimes I\otimes B)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_0+(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_0\\ &= \Big((I\otimes B\otimes B)-(I\otimes B\otimes I)-(I\otimes I\otimes B)+1\Big)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_0.\end{aligned}$$

由于$B$是一个 Rota-Baxter 算子，并加上 $(1-\tau)\circ\Delta_0\circ(1+B)$,

$$\begin{aligned}(\Delta_{-1}\otimes\alpha)\circ\Delta_{-1} &= \Big[\Big(I\otimes(1-\tau)\circ\Delta\circ(1+B)-(I\otimes B\otimes I)-(I\otimes I\otimes B)\Big)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\\ &\quad (I\otimes\Delta_0)\circ(\alpha\otimes B)-(I\otimes(\tau\circ\Delta_0))\circ(\alpha\otimes B)\Big]\circ\Delta_0\\ &= \Big(I\otimes((I\otimes B)\circ\Delta_0)\circ(\alpha\otimes B)-(I\otimes I\otimes B)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\\ &\quad +(I\otimes(B\otimes I)\circ\Delta_0)\circ(\alpha\otimes B)-(I\otimes B\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\Big)\circ\Delta_0\\ &= (I\otimes I\otimes B+I\otimes B\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_0)\circ\Delta_{-1}\\ &= (\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_{-1}+(\alpha\otimes\Delta_{-1})\circ\Delta_{-1}.\end{aligned}$$

其余关系的证明类似。 □

为了研究后 Hom-Lie 余代数与余交换 Hom-tridendriform 余代数之间的关系，我们给出以下定义。

**定义 4.19.** post-Hom-Poisson 余代数是一个向量空间 $P$，配备四个线性映射$\gamma\colon\ P\to P\otimes P$、 $\Delta_\cdot\colon\ P\to P\otimes P$、 $\Delta_\star\colon\ P\to P\otimes P$和 $\Delta_*\colon\ P\to P\otimes P$，以及一个线性映射 $\alpha\colon\ P\to P$，使得（$P,\gamma,\Delta_\cdot,\alpha$）是一个后 Hom-Lie 余代数，（$P,\Delta_\star,\Delta_*,\alpha$）是一个余交换 Hom-tridendriform 余代数，并且它们在如下意义下相容：下列方程成立：

$$(\alpha\otimes\Delta_*)\circ\gamma=(\gamma\otimes\alpha)\circ\Delta_*+(\tau\otimes I)\circ(\alpha\otimes\gamma)\circ\Delta_*, \tag{4.22}$$

$$(I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\gamma=\epsilon^2\circ(\alpha\otimes\gamma)\circ\Delta_\star-\epsilon\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_*, \tag{4.23}$$

$$(\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_\cdot=(\Delta_\cdot\otimes\alpha)\circ\Delta_*+(\tau\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_*, \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}&\epsilon\circ(\Delta_\star\otimes\alpha)\circ\Delta_\cdot+\epsilon^2\circ(I\otimes\tau)\circ(\Delta_\star\otimes\alpha)\circ\Delta_\cdot+\epsilon\circ(\Delta_*\otimes\alpha)\circ\Delta_\cdot\\ &=(\Delta_\cdot\otimes\alpha)\circ\Delta_*+(\tau\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_*,\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}&(I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_\cdot=\epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_\star+(I\otimes\tau)\circ(\Delta\otimes\alpha)\circ\Delta_\star\\ &-\epsilon^2\circ(\Delta_\cdot\otimes\alpha)\circ\Delta_\star+(I\otimes\tau)\circ(\gamma\otimes\alpha)\circ\Delta_\star.\end{aligned} \tag{4.26}$$

**例4.20.** 后泊松余代数是具有 $\alpha = Id$的 post-Hom-Poisson 余代数。

注 4.21。 注意，$(P,\ \gamma,\ *,\ \alpha)$ 是一个余交换 Hom-泊松余代数 [13]，即 $(P,\ \gamma,\ \alpha)$ 是一个 Hom-Lie 余代数，$(P,\ \Delta_*,\ \alpha)$ 是一个余交换Hom-余结合余代数，并且 $\gamma$与 $\Delta_*$ 相容，即式 (4.22) 成立。

**定理4.22**。 设 $(P, \gamma, \Delta_\cdot, \Delta_\star, \Delta_*, \alpha)$ 是一个 *post-Hom-Poisson* 余代数。定义两个新的线性运算

$$\Delta_A(x) = (1-\tau)\circ\Delta_\cdot(x) + \gamma(x), \quad \Delta_R(x) = (1+\tau)\circ\Delta_\star(x) + \Delta_*(x),$$

对任意 $x \in P$。则 $(P, \Delta_A, \Delta_R, \alpha)$ 是一个余交换 *Hom*-泊松余代数。

证明。 1. 我们先证明余乘法 $\Delta_A$ 是一个Hom-李余括号：显然它是反对称余交换的，并且有：

$$\begin{aligned}
(\alpha\otimes\Delta_A)\circ\Delta_A &= (\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_A - (I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_A + (\alpha\otimes\gamma)\circ\Delta_A \\
&= (\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_\cdot - (I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_\cdot + (\alpha\otimes\gamma)\circ\Delta_\cdot \\
&\quad -\epsilon\circ(\Delta_\cdot\otimes\alpha)\circ\Delta_\cdot + \epsilon^2\circ(I\otimes\tau)\circ(\Delta_\cdot\otimes\alpha)\circ\Delta_\cdot - \epsilon\circ(\gamma\otimes\alpha)\circ\Delta_\cdot \\
&\quad (\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\gamma - (I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\gamma + (\alpha\otimes\gamma)\circ\gamma. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

根据定义 2.4，可得 $(1+\xi+\xi^2)\circ(\alpha\otimes\Delta_A)\circ\Delta_A = 0$。

2. 接下来证明乘积 $\Delta_R$ 是余交换且余结合的：乘积 $\Delta_R$ 的余交换性显然，因此我们有：

$$\begin{aligned}
(\Delta_R\otimes\alpha)\circ\Delta_R &= \Big(((1+\tau)\circ\Delta_\star + \Delta_*)\otimes\alpha\Big)\circ\Delta_R \\
&= ((\Delta_\star + \tau\circ\Delta_\star + \Delta_*)\otimes\alpha)\circ\Delta_\star + (\alpha\otimes(\Delta_\star + \tau\circ\Delta_\star + \Delta_*))\circ\Delta_\star \\
&\quad +((\Delta_\star + \tau\circ\Delta_\star + \Delta_*)\otimes\alpha)\circ\Delta_* \\
&= ((\Delta_\star + \tau\circ\Delta_\star + \Delta_*)\otimes\alpha)\circ\Delta_\star + \epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_\star + \epsilon^2\circ(\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_\star \\
&\quad +\epsilon^2\circ(I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_\star + (1+\tau\otimes I)\circ(\Delta_\star\otimes\alpha)\circ\Delta_* + (\Delta_*\otimes\alpha)\circ\Delta_*.
\end{aligned}$$

利用定义4.16中的公理，可得：

$$\begin{aligned}
(\Delta_R\otimes\alpha)\circ\Delta_R &= (1+(I\otimes\tau))\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_\star + (\epsilon^2\circ(I\otimes\tau)+\epsilon)\circ(\Delta_\star\otimes\alpha)\circ\Delta_\star \\
&\quad +\epsilon^2\circ(I\otimes\tau)\circ(\Delta_*\otimes\alpha)\circ\Delta_\star + (I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_* + (\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_\star \\
&\quad +(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_* + (\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_* \\
&= (1+I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_\star + (\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_\star + (\epsilon^2\circ(I\otimes\tau)+\epsilon)\circ(\Delta_\star\otimes\alpha)\circ\Delta_\star \\
&\quad +\epsilon^2\circ(I\otimes\tau)\circ(\Delta_*\otimes\alpha)\circ\Delta_\star + (I\otimes\tau+1)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_* + (\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_* \\
&= (\alpha\otimes\Delta_R)\circ\Delta_R.
\end{aligned}$$

3. 最后，我们来证明 $\Delta_A$ 和 $\Delta_R$的(4.22)。

$$\begin{aligned}
&(\alpha\otimes\Delta_R)\circ\Delta_A-(\Delta_A\otimes\alpha)\circ\Delta_R-(\tau\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_A)\circ\Delta_R\\
=&(1+I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_A+(\alpha\otimes\Delta_A)\circ\Delta_A+(\tau\otimes I-1)\circ(\Delta_.\otimes\alpha)\circ\Delta_R\\
&-(\gamma\otimes\alpha)\circ\Delta_R-(\tau\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_.)\circ\Delta_R\\
=&(1+I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\Delta_.+(\alpha\otimes\Delta_*)\circ\Delta_.-(\epsilon+\epsilon^2\circ(I\otimes\tau))\circ(\Delta_\star\otimes\alpha)\circ\Delta_.\\
&-\epsilon\circ(\Delta_*\otimes\alpha)\circ\Delta_.+(1+I\otimes\tau)\circ(\alpha\otimes\Delta_\star)\circ\gamma+(\alpha\otimes\Delta_*)\circ\gamma\\
&+(\tau\otimes I-1)\circ(\Delta_.\otimes\alpha)\circ\Delta_\star-(\gamma\otimes\alpha)\circ\Delta_\star.
\end{aligned}$$

通过展开并一次应用公理 (4.22)、(4.24) 和 (4.25)，两次应用关系 (4.23) 和 (4.26)，左侧为零。

因此，$(P,\ \Delta_*,\ \Delta_A,\ \alpha)$ 是一个余交换 Hom-泊松余代数。 □

# 5 Post-Hom-Lie 余模

本节最后一部分旨在介绍后 Hom-Lie 余代数上的余模，并给出通过扭曲得到的各种构造。

**定义 5.1.** Hom-模是一个有序对 $(M,\ \alpha_M)$，其中 $M$ 是一个向量空间，$\alpha_M\colon M\longrightarrow M$ 是一个线性映射。

**定义 5.2.** 设 $(L,\ \gamma,\ \Delta_.,\ \alpha)$ 是一个后 Hom-Lie 余代数。 $L$ 上的余模是一个 Hom-模 $(M,\ \alpha_M)$，并配备两个线性映射 $\Delta_\diamond\colon M\to L\otimes M$ 和 $\Delta_\bullet\colon M\to L\otimes M$，称为结构映射，使得:

$$\begin{aligned}
\Delta_\diamond\circ\alpha_M &= (\alpha_M\otimes\alpha)\circ\Delta_\diamond \quad\text{and}\quad \Delta_\bullet\circ\alpha_M=(\alpha_M\otimes\alpha)\circ\Delta_\bullet, && (5.1)\\
(\gamma\otimes\alpha_M)\circ\Delta_\diamond &= (\alpha\otimes\Delta_\diamond)\circ\Delta_\diamond-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha\otimes\Delta_\diamond)\circ\Delta_\diamond, && (5.2)\\
(\Delta_.\otimes\alpha_M)\circ\Delta_\diamond &= (\alpha\otimes\Delta_\diamond)\circ\Delta_\bullet-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha\otimes\Delta_\bullet)\circ\Delta_\bullet,, && (5.3)\\
(\gamma\otimes\alpha_M)\circ\Delta_\bullet &= (1-(\tau\otimes Id_M))\circ(\alpha\otimes\Delta_\bullet)\circ\Delta_\bullet+((\tau\otimes Id_M)-1)\circ(\Delta_.\otimes\alpha_M)\circ\Delta_\bullet. && (5.4)
\end{aligned}$$

**例 5.3.** 任意后 Hom-Lie 余代数都是其自身上的余模。

**命题 5.4.** 设 $(M_i,\Delta_{\diamond i},\Delta_{\bullet i},\alpha_{M_i})\ (i=1,2)$ 是后 *Hom-Lie* 余代数$(L,\gamma,\Delta_.,\alpha)$上的两个余模。那么，直和 $M=M_1\oplus M_2$ 是 $L$ 上的一个余模，其结构映射为

$$\Delta_\diamond=\Delta_{\diamond_1}\oplus\Delta_{\diamond_2},\quad \Delta_\bullet=\Delta_{\bullet_1}\oplus\Delta_{\bullet_2},\quad \alpha_M=\alpha_{M_1}\oplus\alpha_{M_2}.$$

证明。 通过计算可直接得出。 □

**命题 5.5.** 设 $(L,\gamma,\Delta_.,\alpha)$ 是一个余乘后 *Hom-Lie* 余代数。定义两个新的运算 $\Delta_\circ,\Delta_*\colon L\to L\otimes L$ 如下

$$\Delta_\circ:=(\alpha^k\otimes I)\circ\gamma\quad and\quad \Delta_*:=(\alpha^k\otimes I)\circ\Delta_.$$

那么，$(L,\Delta_\circ,\Delta_*,\alpha)$ 是后 *Hom-Lie* 余代数$(L,\gamma,\Delta_.,\alpha)$上的余模。

证明。我们有:

$$\begin{aligned}(\Delta_\cdot\otimes\alpha)\circ\Delta_\circ &= (\Delta_\cdot\otimes I)\circ(\alpha^k\otimes\alpha)\circ\gamma\\ &= (I\otimes\alpha^k\otimes I)\circ(\alpha^{k+1}\otimes\gamma)\circ\Delta_\cdot-(\tau\otimes I)\circ(I\otimes\alpha^k\otimes I)\circ(\alpha^{k+1}\otimes\Delta)\circ\gamma\\ &= (I\otimes\alpha^k\otimes I)\circ(\alpha\otimes\gamma)\circ\Delta_*-(\tau\otimes I)\circ(I\otimes\alpha^k\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_\circ\\ &= (\alpha\otimes\Delta_\circ)\circ\Delta_*-(\tau\otimes I)\circ(I\otimes\alpha^k\otimes I)\circ(\alpha\otimes\Delta_\cdot)\circ\Delta_\circ.\end{aligned}$$

其他公理可类似地证明。 □

**定理 5.6**。 设$(M_i,\Delta_{\diamond_i},\Delta_{\bullet_i},\alpha_{M_i})(i=1,2)$是乘法的 *post-Hom-Lie* 余李代数$(L,\gamma,\Delta_\cdot,\alpha)$上的两个余模。线性映射 $\Delta_\diamond,\Delta_\bullet:\ M_1\otimes M_2\to L\otimes M_1\otimes M_2$ 以及线性映射$\alpha_M:\ M_1\otimes M_2\to M_1\otimes M_2$ 定义为

$$\begin{aligned}\alpha_M &:= \alpha_{M_1}\otimes\alpha_{M_2}\\ \Delta_\diamond &:= (\alpha^k\otimes Id_{M_1})\circ\Delta_{\diamond_1}\otimes\alpha_{M_2}+\alpha_{M_1}\otimes(\alpha^k\otimes Id_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2}\\ \Delta_\bullet &:= (\alpha^k\otimes Id_{M_1})\circ\Delta_{\bullet_1}\otimes\alpha_{M_2}+\alpha_{M_1}\otimes(\alpha^k\otimes Id_{M_2})\circ\Delta_{\bullet_2}.\end{aligned}$$

为 $M_1\otimes M_2$ 赋予一个 $L$-余模结构。

证明。 首先有:

$$\begin{aligned}\Delta_\diamond\circ\alpha_M &= \Big((\alpha^k\otimes Id_{M_1})\circ\Delta_{\diamond_1}\otimes\alpha_{M_2}+\alpha_{M_1}\otimes(\alpha^k\otimes Id_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2}\Big)\circ\alpha_M\\ &\overset{(5.1)}{=} (\alpha^{k+1}\otimes\alpha_{M_1})\circ\Delta_{\diamond_1}\otimes\alpha_{M_2}^2+\alpha_{M_1}^2\otimes(\alpha^{k+1}\otimes\alpha_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2}\\ &= (\alpha\otimes\alpha_{M_1}\otimes\alpha_{M_2})\circ\Delta_\diamond\\ &= (\alpha\otimes\alpha_M)\otimes\Delta_\diamond.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\Delta_\diamond\circ\Delta_\bullet &= (\alpha\otimes\Delta_\diamond)\circ\Delta_\bullet\\ &= \Big(\alpha\otimes[(\alpha^k\otimes Id_{M_1})\circ\Delta_{\diamond_1}\otimes\alpha_{M_2}+\alpha_{M_1}\otimes(\alpha^k\otimes Id_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2}]\Big)\circ\Delta_\bullet\\ &= \Big(\alpha^{k+1}\otimes(\alpha^k\otimes Id_{M_1})\circ\Delta_{\diamond_1})\Big)\circ\Delta_{\diamond_1}\otimes\alpha_{M_2}^2\\ &\quad+(\alpha^{k+1}\otimes\alpha_{M_1})\circ\Delta_{\diamond_1}\otimes(\alpha^{k+1}\otimes\alpha_{M_2})\circ\Delta_{\bullet_2}\quad(\text{by (5.1)})\\ &\quad+(\alpha^{k+1}\otimes\alpha_{M_1})\circ\Delta_{\bullet_1}\otimes(\alpha^{k+1}\otimes\alpha_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2}\quad(\text{by (5.1)})\\ &\quad+\alpha_{M_1}^2\otimes\Big(\alpha^{k+1}\otimes((\alpha^k\otimes Id_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2})\Big)\circ\Delta_{\bullet_2}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&(\alpha\otimes\Delta_\diamond)\circ\Delta_\bullet-(\tau\otimes I_M)(\alpha\otimes\Delta_\diamond)\circ\Delta_\bullet=\\ &=\Big(\alpha^{k+1}\otimes(\Delta_{\diamond_1}\circ(\alpha^k\otimes I_{M_1})\circ\Delta_{\bullet_1})\Big)\otimes\alpha_{M_2}^2-\Big((\tau\otimes I_M)\circ(\alpha^{k+1}\otimes(\Delta_{\diamond_1}\circ(\alpha^k\otimes I_{M_1})\circ\Delta_{\bullet_1})\Big)\otimes\alpha_{M_2}^2\\ &\quad+\alpha_{M_1}^2\otimes\Big(\alpha^{k+1}\otimes((\alpha^k\otimes I_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2}\circ\Delta_{\bullet_2})\Big)-\alpha_{M_1}^2\otimes\Big((\tau\otimes I_{M_2})\circ(\alpha^{k+1}\otimes((\alpha^k\otimes I_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2}\circ\Delta_{\bullet_1})\Big)\\ &=((\Delta\circ\alpha^k)\otimes\alpha_{M_1})\circ\Delta_{\diamond_1}\otimes\alpha_{M_2}^2+\alpha_{M_1}^2\otimes((\Delta\circ\alpha^k)\otimes\alpha_{M_2})\circ\Delta_{\diamond_2}\\ &=(\Delta_\cdot\otimes_\diamond\otimes\alpha_{M_1}\otimes\alpha_{M_2})\circ\Delta_\diamond=(\Delta_\cdot\otimes\alpha_M)\circ\Delta_\diamond.\end{aligned}$$

其余关系的证明方法类似。 □

**推论 5.7**。 设$(L, \gamma, \Delta_\cdot, \alpha)$是一个余乘后 *Hom-Lie* 余代数。那么，$(L \otimes L, \alpha \otimes \alpha)$是一个 $L$余模，其作用为

$$\begin{aligned}\Delta_\diamond &:= (\alpha \otimes I) \circ \gamma \otimes \alpha + (\tau \otimes I) \circ \Big(\alpha \otimes (\alpha \otimes I) \circ \gamma\Big),\\ \Delta_\bullet &:= (\alpha \otimes I) \circ \Delta_\cdot \otimes \alpha + (\tau \otimes I) \circ \Big(\alpha \otimes (\alpha \otimes I) \circ \Delta_\cdot\Big).\end{aligned}$$

证明。 由命题 5.5 和定理 5.6 可得。 □

**定理 5.8**。 设 $(M, \Delta_\diamond, \Delta_\bullet, \alpha_M)$是后 *Hom-Lie* 余代数 $(L, \gamma, \Delta_\cdot, \alpha)$上的一个余模。对于任意非负整数 $n$，定义

$$\Delta_\diamond^{n,0} := (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\diamond : M \to L \otimes M, \tag{5.5}$$
$$\Delta_\bullet^{n,0} := (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\bullet : M \to L \otimes M \tag{5.6}$$

那么，$(M, \Delta^{n,0}_\diamond, \Delta^{n,0}_\bullet, \alpha_M)$是一个 $L$-余模。

证明。 对于任意正整数 $n$，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_\diamond^{n,0} &= (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\diamond \circ \alpha_M = (\alpha^n \otimes Id_M) \circ (\alpha \otimes \alpha_M) \circ \Delta_\diamond\\ &= (\alpha \otimes \alpha_M) \circ (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\diamond = (\alpha \otimes \alpha_M) \circ \Delta_\diamond^{n,0}.\end{aligned}$$

Next

$$\begin{aligned}(\gamma \otimes \alpha_M) \circ \Delta_\diamond^{n,0} &= (\gamma \otimes \alpha_M) \circ (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\diamond\\ &= (\gamma \circ \alpha^n \otimes \alpha_M) \circ \Delta_\diamond\\ &= (\gamma \circ (\alpha^n \otimes \alpha^n) \otimes \alpha_M) \circ \Delta_\diamond\\ &= (\alpha^n \otimes \alpha^n \otimes Id_M) \circ (\gamma \otimes \alpha_M) \circ \Delta_\diamond.\end{aligned}$$

然后利用 (5.2) 和 (5.5)，可得

$$\begin{aligned}(\gamma \otimes \alpha_M) \circ \Delta_\diamond^{n,0} &= (\alpha^n \otimes \alpha^n \otimes Id_M) \circ (1 - (\tau \otimes Id_M)) \circ (\alpha \otimes \Delta_\diamond) \circ \Delta_\diamond\\ &= \Big(\alpha^{n+1} \otimes (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\diamond\Big) \circ \Delta_\diamond\\ &\quad -\Big(\alpha^{n+1} \otimes [(\tau \otimes Id_M) \circ (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\diamond]\Big) \circ \Delta_\diamond\\ &= (\alpha^{n+1} \otimes \Delta_\diamond^{n,0}) \circ \Delta_\diamond - (\tau \otimes Id_M)(\alpha^{n+1} \otimes \Delta_\diamond^{n,0}) \circ \Delta_\diamond\\ &= (\alpha \otimes \Delta_\diamond^{n,0}) \circ (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\diamond\\ &\quad -(\tau \otimes Id_M)(\alpha \otimes \Delta_\diamond^{n,0}) \circ (\alpha^n \otimes Id_M) \circ \Delta_\diamond\\ &= (\alpha \otimes \Delta_\diamond^{n,0}) \circ \Delta_\diamond^{n,0} - (\tau \otimes Id_M)(\alpha \otimes \Delta_\diamond^{n,0}) \circ \Delta_\diamond^{n,0}.\end{aligned}$$

其余恒等式的证明类似。 □

**定理 5.9.** 设 $(M, \Delta_\diamond, \Delta_\bullet, \alpha_M)$为后 *Hom-Lie* 余代数 $(L, \gamma, \Delta_\cdot, \alpha)$ 上的余模。对任意非负整数 $k$，定义

$$\Delta_\diamond^{0,k} := \Delta_\diamond \circ \alpha_M^{2^k} : M \to L \otimes M, \tag{5.7}$$
$$\Delta_\bullet^{0,k} := \Delta_\bullet \circ \alpha_M^{2^k} : M \to L \otimes M. \tag{5.8}$$

那么，$(M, \Delta^{0,k}_\diamond, \Delta^{0,k}_\bullet, \alpha_M^{2^k})$是$(L, \gamma \circ \alpha^{2^k-1}, \Delta_\cdot \circ \alpha^{2^k-1}, \alpha^{2^k})$上的余模。

证明。 对于任意正整数 $k$，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_{\diamond}^{0,k}\circ\alpha_M^{2^k} &= \Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1}\circ\alpha_M^{2^k}=\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k}\circ\alpha_M^{2^k-1}=\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M\circ\alpha_M^{2^k-1}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &= (\alpha\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-2}\circ\alpha_M^{2^k-1}=(\alpha^2\otimes\alpha_M^2)\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-2}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &= (\alpha^2\otimes\alpha_M^2)\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-2}\circ\alpha_M^{2^k-1}=\cdots=(\alpha^{2^k}\otimes\alpha_M^{2^k})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &= \Delta_{\diamond}^{0,k}\circ(\alpha^{2^k}\otimes\alpha_M^{2^k}).\end{aligned}$$

Next

$$\begin{aligned}&(\gamma\circ\alpha^{2^k-1}\otimes\alpha_M^{2^k})\circ\Delta_{\diamond}^{0,k}=\\ &=(\gamma\circ\alpha^{2^k-1}\otimes\alpha_M^{2^k})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &=(\gamma\circ\alpha^{2^k-2}\otimes\alpha_M^{2^k-1})\circ(\alpha\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &=(\gamma\circ\alpha^{2^k-2}\otimes\alpha_M^{2^k-1})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k}=\cdots=\\ &=(\gamma\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2(2^k-1)}.\end{aligned}$$

然后利用 (5.2) 和 (5.1) 中的第一个恒等式（$2^k-1$ times），我们得到

$$\begin{aligned}&(\gamma\circ\alpha^{2^k-1}\otimes\alpha_M^{2^k})\circ\Delta_{\diamond}^{0,k}\\ &=\Big((\alpha\otimes\Delta_{\diamond})\circ\Delta_{\circ}-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha\otimes\Delta_{\diamond})\circ\Delta_{\diamond}\Big)\circ\alpha_M^{2(2^k-1)}\\ &=(\alpha\otimes\Delta_{\diamond})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1}\circ\alpha_M^{2^k-1}-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha\otimes\Delta_{\diamond})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &=(\alpha\otimes\Delta_{\diamond})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M\circ\alpha_M^{2^k-1}\circ\alpha_M^{2^k-1}-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha\otimes\Delta_{\diamond})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M\circ\alpha_M^{2^k-1}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &=(\alpha\otimes\Delta_{\diamond}\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-2}\circ\alpha_M^{2^k-1}-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha\otimes\Delta_{\diamond}\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-2}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &=\cdots=\\ &=(\alpha^{2^k}\otimes\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1}-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha^{2^k}\otimes\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1})\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M^{2^k-1}\\ &=(\alpha^{2^k}\otimes\Delta_{\diamond}^{0,k})\circ\Delta_{\diamond}^{0,k}-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha^{2^k}\otimes\Delta_{\diamond}^{0,k})\circ\Delta_{\diamond}^{0,k}.\end{aligned}$$

其余条件的证明类似。 □

**定理 5.10.** 设$(M,\Delta_{\diamond},\Delta_{\bullet},\alpha_M)$是后 *Hom-Lie* 余代数$(L,\gamma,\Delta_{\cdot},\alpha)$上的一个余模。设$\beta\colon L\to L$ 是 $A$ 的一个自同态，且 $\beta_M\colon M\to M$是一个线性映射，使得 $\alpha_M\circ\beta_M=\beta_M\circ\alpha_M$,$\Delta_{\diamond}\circ\beta_M=(\beta\otimes\beta_M)\circ\Delta_{\diamond}$和 $\Delta_{\bullet}\circ\beta_M=(\beta\otimes\beta_M)\circ\Delta_{\bullet}$。定义

$$\tilde{\Delta}_{\diamond}:=(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\beta_M:M\to L\otimes M, \tag{5.9}$$

$$\tilde{\Delta}_{\bullet}:=(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_{\bullet}\circ\beta_M:M\to L\otimes M. \tag{5.10}$$

那么，$(M,\tilde{\Delta}_{\diamond},\tilde{\Delta}_{\bullet},\alpha_M\circ\beta_M)$是$(L,\gamma\circ\beta,\Delta_{\cdot}\circ\beta,\beta\circ\alpha)$上的余模。

证明。我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{\diamond}\circ(\alpha_M\circ\beta_M) &= (\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\beta_M\circ(\alpha_M\circ\beta_M)\\ &= (\beta\otimes Id_M)\circ(\beta\otimes\beta_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\alpha_M\circ\beta_M\\ &= (\beta\otimes Id_M)\circ(\beta\otimes\beta_M)\circ(\alpha\otimes\alpha_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\beta_M\\ &= (\beta\circ\alpha\otimes\beta_M\circ\alpha_M)\circ(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_{\diamond}\circ\beta_M\\ &= (\beta\circ\alpha\otimes\beta_M\circ\alpha_M)\circ\tilde{\Delta}_{\diamond}.\end{aligned}$$

Next

$$
\begin{aligned}
&(\gamma\circ\beta\otimes\beta_M\circ\alpha_M)\circ\tilde{\Delta}_\diamond\\
&=(\gamma\circ\beta\otimes\alpha_M\circ\beta_M)\circ(\beta\otimes\beta_M)\circ(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_\circ\beta_M\\
&=(\gamma\otimes\alpha_M)(\beta\circ Id_M)\circ(\beta\otimes\beta_M)\circ\Delta_\circ\beta_M\\
&=(\beta\otimes\beta\otimes Id_M)\circ(\gamma\otimes\alpha_M)\circ(\beta\otimes Id_M)\circ(\beta\otimes\beta_M)\circ\Delta_\diamond\circ\beta_M\\
&=(\beta\otimes\beta\otimes Id_M)\circ(\gamma\otimes\alpha_M)\circ\Delta_\diamond\circ\beta_M^2.
\end{aligned}
$$

现在利用 (5.2)、(5.1) 中的第一个恒等式以及 (5.9)，我们得到

$$
\begin{aligned}
&(\gamma\circ\beta\otimes\beta_M\circ\alpha_M)\circ\tilde{\Delta}_\diamond=\\
&=(\beta\otimes\beta\otimes Id_M)\circ\Big((\alpha\otimes\Delta_\diamond)\circ\Delta_\diamond-(\tau\otimes Id_M)\circ(\alpha\otimes\Delta_\diamond)\circ\Delta_\diamond\Big)\circ\beta_M^2\\
&=[\beta\circ\alpha\otimes(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_\diamond]\circ\Delta_\diamond\circ\beta_M\circ\beta_M\\
&\quad-(\tau\otimes Id_M)\circ[\beta\circ\alpha\otimes(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_\diamond]\circ\Delta_\diamond\circ\beta_M\circ\beta_M\\
&=[\beta\circ\alpha^2\otimes(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_\diamond\circ\alpha_M]\circ\Delta_\diamond\circ\beta\\
&\quad-(\tau\otimes Id_M)[\beta\circ\alpha^2\otimes(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_\diamond\circ\alpha_M]\circ\Delta_\diamond\circ\beta\\
&=(\beta\circ\alpha^2\otimes\tilde{\Delta}_\diamond)\circ\Delta_\diamond\circ\beta_M-(\tau\otimes Id_M)(\beta\circ\alpha^2\otimes\tilde{\Delta}_\diamond)\circ\Delta_\diamond\circ\beta_M\\
&=(\beta\circ\alpha\otimes\tilde{\Delta}_\diamond)\circ(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_\diamond\circ\beta_M\\
&\quad-(\tau\otimes Id_M)\circ(\beta\circ\alpha\otimes\tilde{\Delta}_\diamond)\circ(\beta\otimes Id_M)\circ\Delta_\diamond\circ\beta_M\\
&=(\beta\circ\alpha\otimes\tilde{\Delta}_\diamond)\circ\tilde{\Delta}_\diamond-(\tau\otimes Id_M)\circ(\beta\circ\alpha\otimes\tilde{\Delta}_\diamond)\circ\tilde{\Delta}_\diamond.
\end{aligned}
$$

其余恒等式的证明类似。 □

# 参考文献


[1] D. Yau，*Hom*–双代数与余模代数，国际电子代数学杂志 8 (2010), 45-64.[2] W. Michaelis，李余代数，数学进展，第 38 卷，第 1 期，1980年10月，页码 1-54.[3] C. Boyallian and J. Liberati，有限秩单微分李与约当（超）余代数的分类，代数杂志 689 (2026), 179-218. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.09.041[4] A. Das，*Dendriform* 余代数的上同调与变形，arXiv预印本，arXiv:1907.08255.[5] Run-Qiang Jian, Jiao Zhang，*Rota-Baxter*余代数，arXiv:1409.3052 [math.RA], 2014年9月10日.[6] Ma T., Liu L. (2016)，*Rota-Baxter* 余代数与 *Rota-Baxter* 双代数，线性与多重线性代数，64(5), 968-979. https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1068269.[7] Bakayoko, I., Manga, B.*Hom*-交错模与 *Hom-Poisson*余模，Afr.Mat.28, 1297- 1311 (2017). https://doi.org/10.1007/s13370-017-0516-6.[8] I. Bakayoko，*Hom-post-Lie*模、*O*-算子及*Hom*-代数上的一些函子，ArXiv 1688907，2016年10月10日。

[9] A. Makhlouf and S. Silvestrov，Hom-李容许Hom-余代数与Hom-Hopf代数，《数学、物理及其他领域中的广义李理论》，189-206, 2009.[10] B. Vallette，广义分划偏序集的上同调，J. Pure Appl. Algebra 208 (2007) 699-725.[11] C. Bai, O. BELLIER, L. GUO, and X. NI，分解运算、Mainin乘积与 Rota-Baxter算子，arXiv: 1106.6080v1[Math.QA] 29 2011年6月.[12] C. Bai, L. GUO, and X. NI，非阿贝尔广义Lax对、经典Yang-Baxter方程与post-李代数，Commun. Math. Phys. 297 1-29, 2000.[13] D. Yau，非交换Hom-泊松代数，ArXiv : 1010.3408v1, 2010年10月17日.[14] L. Positselski, 两类导出范畴、Koszul对偶与余模-反余模对应，Mem. Amer. Math. Soc. 212 (2011), no. 996, vi+133页.[15] H. K. Munthe and A. Lundervold，论post-李代数、李Butcher级数与活动标架, arXiv:1203.4738v3 [math. NA] 26 2013年6月.[16] I. Bakayoko，$L$-模、 $L$-余模与Hom-李拟双代数, African Diaspora Journal of Mathematics，第17卷 (2014), 49-64.[17] J.-L. Loday and M. Ronco, 三代数与多面体族，载于《同伦论：与代数几何、群上同调及代数K理论的关系》，Comtep. Math. 346 (2004) 369-398.[18] J.-L. Loday，论拟洗牌代数，Manuscripta Math. 123 (2007) 79-93.[19] X. Ni and C. Bai，泊松双代数，Journal of Mathematical Physics, 54, 023515 (2013).[20] A. Lazarev and M. Markl，非连通有理同伦论，Adv. Math. 283 (2015), 303–361.[21] Ibrahima Bakayoko，L-模、L-余模与Hom-李拟双代数，African Diaspora Journal of Mathematics，第17卷，第1期，页码49-64 (2014).[22] Y. Zhang, C. Bai and L. Guo，全兼容结合双代数与李双代数、三重Dendriform代数及post-李代数，Science China Mathematics, 57 (2), 259-273, 2014。