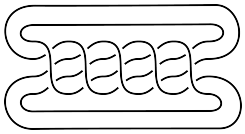
arXiv:2602.12692v1 [math.GT] 13 Feb 2026

KHOVANOV 一致性极小元与 (4,5) 环面结。

安德鲁·洛布

Abstract. 带状一致性在结类型上给出一个偏序；将结同调函子应用于带状一致性，则会得到同调之间的包含关系。每个一致性类中是否存在全局带状极小元这一问题，是切片带状猜想的推广；该猜想断言，平凡结是其所在一致性类中的全局最小元。我们证明，(4,5) 环面结的（约化有理）Khovanov 同调是其一致性类中任意纽结的 Khovanov 同调的一个直和项。



1. Introduction

对于定向结 $K_0, K_1 \subset S^3$，我们记作 $K_0 \leq K_1$，如果存在一个一致性 $\mathcal{C}\colon K_0 \to K_1$（即一个光滑子流形 $S^1 \times [0,1] \cong \mathcal{C} \subset S^3 \times [0,1]$，满足 $\partial \mathcal{C} = K_0 \times \{0\} \sqcup K_1 \times \{1\}$），使得到 $[0,1]$ 的投影是 Morse 函数且没有局部极大值。我们称这种关系为：K_1 与 K_0之间存在带状一致性。

Agol [1] 证明了 Gordon 的一个猜想：[6]该关系 $\leq$ 满足

$$K \leq K' \text{ and } K' \leq K \iff K = K'.$$

此前，Zemke [16]指出，Heegaard Floer 结同调可以阻碍带状一致性。他的论证可以直接推广到许多其他结同调（或许经过适当刻画后，可以推广到所有结同调）[13, 9, 4]。具体来说，若$\mathcal{C}\colon K ! K'$是一种带状一致性，那么可以考虑反向一致性$\mathcal{C}\colon K' ! K$（由于 $\mathcal{C}$ 的每个局部极小点都会变成局部极大点，因此它可能不再是带状一致性）。复合 $\mathcal{C} \circ \mathcal{C}\colon K ! K$ 给出 K的一个自同痕。许多结同调的性质与复合 $\overline{\mathcal{C}} \circ \mathcal{C}$的拓扑性质相结合，可以确定诱导映射

$$H_*(\overline{\mathcal{C}}) \circ H_*(\mathcal{C}) = H_*(\overline{\mathcal{C}} \circ \mathcal{C})\colon H_*(K) \longrightarrow H_*(K)$$

是一个同构（这里我们用 H_* 表示读者最喜欢的结同调）。因此，我们得出结论：$H_*(\mathcal{C})$必须包含在 $H_*(K')$中的 $H_*(K)$。因此，如果 $H_*(K)$不是 $H_*(K')$的直和项，那么 $K \leq K'$就不可能成立。

这促使我们给出一个定义。

定义 1.1. 我们记作 $K_0 \leq_{H_*} K_1$，如果每个一致性 $\mathcal{C}\colon K_0 ! K_1$ 都诱导出一个作为直和项的包含 $H_*(\mathcal{C})\colon H_*(K_0) \hookrightarrow ! H_*(K_1)$。

请注意，这一定义取决于结同调 H_* 的选择。

感谢 Hayato Imori 向我们介绍他的部分研究成果，也感谢 KAIST 和 OIST 的热情接待。

2. Three conjectures and a theorem.

带状一致性领域尚未解决的重要猜想是切片带状猜想：

猜想 2.1 (切片带状猜想)。 平凡结的一致性类相对于 $\leq$ 有一个全局最小元（即平凡结本身）。

将这一结论推广到其他一致性类，便得到一个更强的猜想：

猜想 2.2。 每个一致性类相对于 $\leq$ 都有一个全局最小元。

这也引出了一个代数对应物：

C猜想2.3。 每个一致性类都存在相对于 $\leq_{H_*}$的全局最小元 .

请注意，猜想2.2和猜想2.3互不蕴含，但二者都蕴含：在每个一致性类中，都存在一个结K ，其同调 $H_*(K)$是该类中每个结的同调的直和项。概括而言，可以将对猜想2.3若干情形的验证视为支持猜想2.2成立的证据。 $\leq_{H_*}$ 的全局最小元是其一致性类中 $\leq$ 唯一最小元的候选者。

注2.4。 假设 K 是其一致性类中关于 $\leq_{H_*}$ 的全局最小元。那么（例如，假设 H_* 取值于有限生成阿贝尔群或有限维向量空间）我们有，任意自同痕 $K ! K$ 都会在 H_*（K）上诱导一个同构。

反过来，如果纽结 K 的任意自同痕 $K ! K$ 总是在 $H_*(K)$ 上诱导一个同构，那么若 $\mathcal{C}$: $K ! K'$ 是一个一致性，我们便可知 $H_*(\mathcal{C}) \circ H_*(\mathcal{C}) = H_*(\mathcal{C} \circ \mathcal{C})$ 是一个同构。因此，我们可以得出结论： K 是其一致性类中 $\leq_{H_*}$ 的全局最小元。

本文尤其关注环面结的一致性类。在拓扑方面，Gordon [6]证明了环面结是 $\leq$的局部最小元，近期也取得了相关结果，例如 [3, 2] 中的结果。在代数方面，Daemi-Scaduto [5] 证明了环面结的任意自同痕 $\mathcal{C}$: $K \to K$ 都会在瞬子结同调（其许多不同版本）上诱导一个同构。L-空间结包含所有环面结，而 Zemke [17] 证明了 L-空间结的自同痕也会在 Heegaard Floer 结同调上诱导同构。

最近，Imori-Sano-Sato-Kaniguchi [7, 8] 证明，任意二股环面结 $T(2, n)$ 都是其一致性类中的全局最小元，其中 $\mathrm{Kh}_{h,t}$ 是系数取自整数上的多项式环的任意广义 Khovanov 同调。

本文现在将注意力转向结同调中最常见的一种：有理数上的约化Khovanov同调 $\mathbb{Q}$，记作 Kh。这是一个有限维有理向量空间，带有双分次 $(i, j) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$：同调分次 $i \in \mathbb{Z}$ 和量子分次$j \in \mathbb{Z}$。若 U 是平凡结，则我们采用如下规范化，使 Kh(U) 为一维，并且支撑在双分次 (0,0) 上。

定理 2.5。 (4,5) 环面结 T 是其一致性类中关于 $\leq_{\mathrm{Kh}}$ 的全局最小元。

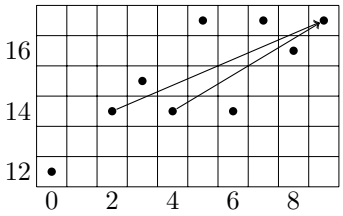
这个定理的得出，是通过将从 Kh(T) 开始的谱序列相互比较，并利用 [14]中发现的纽结与 T 及简单结之间的余边界来约束这些谱序列的微分。我们相信，这些技术足以将猜想2.3推广到其他类别的纽结，以及 Khovanov 同调的其他几种不那么常见的变体。

3. Two spectral sequences and the $(4,5)$ torus knot.

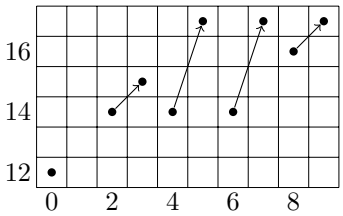
Khovanov 同调 Kh 出现在许多谱序列的较早页面中，相关研究在文献中已有大量记载。一个早期例子是 Lee 谱序列的约化版本 E_*^{Lee}其中 $E_2^{\mathrm{Lee}}(K) = \mathrm{Kh}(K)$ 和 $E_\infty^{\mathrm{Lee}}(K)$ 是 1 维的，并且支撑在双分次 (0，$s(K)$) 上，其中$s(K) \in 2\mathbb{Z}$ 是 Rasmussen 不变量 [12, 15]。

Kronheimer-Mrowka E_*^{KM} [10, 11] 给出了一个更近期的例子（或者更准确地说，对于不同滤过的选择，有许多例子）。对于这个谱序列，$E_2^{\mathrm{KM}}(K)$ =Kh(K)（我们允许调整各页的排序，使得第二页始终为 Khovanov 页，而不论所选的滤过为何），并且 $E_\infty^{\mathrm{KM}}(K)$ 是约化瞬子结同调 $I^\natural(K)$（或者更准确地说，是滤过在 $I^\natural(K)$上所诱导的伴随分次向量空间）。

现在我们讨论关于这两个谱序列的一些已知结果。下面的图分别表示 Kh(T)，其总维数为 9。一个圆点表示 $\mathbb{Q}$ 的一个副本。横坐标给出同调分次 i，而 y 坐标给出坐标 $j-i$，其中 j是量子分次。



谱序列 $E_*^{\mathrm{KM}}(T)$ 在 Khovanov 页 $E_2^{\mathrm{KM}}(T) = \mathrm{Kh}(T)$ 之后恰有一个非平凡微分，且该微分的秩为 1（见 [11] 第 11 节）。我们指出两个可能的微分（见 [14] 第 4.1 小节）。



谱序列 $E_*^{\mathrm{Lee}}(T)$ 收敛到 $E_\infty^{\mathrm{Lee}}(T)$，后者是一维的，且支撑在双分次 (0，12) 上。 $E_2^{\mathrm{Lee}}(T) = \mathrm{Kh}(T)$ 之后的微分由每个微分的同调分次均为 1 这一事实确定。

若 $\Sigma\colon K_0 ! \ K_1$ 是一个定向结协边，并且为每个链环切片选定一个光滑基点，那么将 Σ 表示为连接图 D_0 与 D_1 的电影 M，即可得到谱序列态射：

$$E_*^{\mathrm{KM}}(M)\colon E_*^{\mathrm{KM}}(D_0) \longrightarrow E_*^{\mathrm{KM}}(D_1) \text{ and } E_*^{\mathrm{Lee}}(M)\colon E_*^{\mathrm{Lee}}(D_0) \longrightarrow E_*^{\mathrm{Lee}}(D_1).$$

对于 Lee 谱序列， E_2^{Lee} =Kh 上的映射与由 M在 Khovanov 同调上诱导的标准映射一致。对于 Kronheimer-Mrowka 谱序列，只有在不涉及 Reidemeister 变换的电影中，才知道 $E_2^{\mathrm{KM}} = \mathrm{Kh}$ 上的映射与标准 Khovanov 映射一致（但请参见 [7, 8] 关于非约化情形的研究）。

现在令 $\mathcal{C}\colon T ! \ T$为 T 的任意自同痕。根据备注 2.4，要证明定理 2.5，我们希望看到 $\mathcal{C}$ 在 Kh(T) 上诱导一个同构。为避开 E_2^{KM}与 Kh 之间的 Reidemeister 变换问题，我们注意到，一致性 $\mathcal{C}$ 可以表示为 T的两个图 D 和 D' 之间的一个带基点电影，其变换按以下顺序进行：

- k 0-柄附着，
- Reidemeister 变换，
- （$k+l$）1-柄附着，
- Reidemeister 变换，
- l 2-手柄附着。

4. Khovanov homology and the (4,5) torus knot.

定理 *2.5* 的证明。 Kronheimer-Mrowka 构造将这个 $\mathcal{C}$ 的电影： $T!$ T 关联到一个谱序列态射，它可分解为五个态射的复合，每个态射对应上文中的一个项目。我们将该电影的分解写作

$$D = D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3 \longrightarrow D_4 \longrightarrow D_5 \longrightarrow D_6 = D'.$$

在 Khovanov 页 E_2^{KM} 上，第一个映射给出了包含映射

$$\mathrm{Kh}(T) \cong \mathrm{Kh}(D = D_1) \longhookrightarrow \mathrm{Kh}(D_1 \sqcup U_k = D_2) = \mathrm{Kh}(D) \otimes \langle v_+, v_- \rangle^{\times k} \colon v \longmapsto v \otimes v_+^{\otimes k}$$

其中，我们用 U_k 表示 k 分支无结。

第二个映射给出了双分次为 (0，0) 的同构

$$\mathrm{Kh}(D_2) \longrightarrow \mathrm{Kh}(D_3).$$

尚不清楚这个映射是否与通常在 Khovanov 同调上定义的映射一致。不过，在第一个映射像所支撑的每个双分次中，这只是一个一维向量空间的同构，因为 $Kh(T)$ 在每个同调分次上的维数至多为 1。

第三个映射给出一个双分次为 $(0, -k-l)$ 的线性映射

$$\mathrm{Kh}(T) \otimes \langle v_+, v_- \rangle^{\otimes k} \cong \mathrm{Kh}(D_3) \longrightarrow Kh(D_4) \cong \mathrm{Kh}(T) \otimes \langle v_+, v_- \rangle^{\otimes l},$$

它确实与 Khovanov 映射一致。注意，这把第一个映射的像映入直和项 $\mathrm{Kh}(T) \otimes \langle v_- \rangle^{\otimes l}$。

第四个映射给出一个双分次为 (0,0) 的同构

$$\mathrm{Kh}(D_4) \longrightarrow \mathrm{Kh}(D_5),$$

并且尚不清楚这是否与通常的 Khovanov 映射一致。我们再次指出，在支撑 $\mathrm{Kh}(T) \otimes \langle v_- \rangle^{\otimes l}$ 的每个双分次中，这是一个一维向量空间的同构。

最后，第五个映射是投影

$$\mathrm{Kh}(D_5 = D_6 \sqcup U_l) = \mathrm{Kh}(D_6) \otimes \langle v_+, v_- \rangle^{\otimes l} \longrightarrow \mathrm{Kh}(D_6 = D') \colon v \otimes v_-^{\otimes l} \longmapsto v.$$

因此我们观察到该映射

$$E_2^{\mathrm{KM}}(\mathcal{C}) \colon \mathrm{Kh}(D) = E_2^{\mathrm{KM}}(D) \longrightarrow E_2^{\mathrm{KM}}(D') = \mathrm{Kh}(D')$$

在每个非零双分次中，它都对应于一维向量空间之间的 Khovanov 映射的复合，以及一维向量空间之间的同构。因此，该映射在每个双分次中的秩都与 Khovanov 映射的秩相同。

由于 $E_\infty^{\mathrm{KM}}(\mathcal{C})$ 是由 $\mathcal{C}$ 在（伴随分次）瞬子同调 $I^\natural(T)$ 上诱导的映射，且我们知道该映射是一个同构，因此，除了可能在 (2，14)、(4，14) 和 (9，17) 处外，$\mathrm{Kh}(\mathcal{C})$ 在所有双分次中都是同构。

另一方面，这些分次中的生成元各自都是谱序列 $E_*^{\mathrm{Lee}}(T)$ 中某个非平凡微分的源或靶。每个微分的另一端在 Khovanov 映射下保持不变。由于 $E_*^{\mathrm{Lee}}(\mathcal{C})$ 给出了谱序列态射，并且它在 $E_2^{\mathrm{Lee}}(T) = \mathrm{Kh}(T)$ 上是 Khovanov 映射，因此我们得出结论：$\mathrm{Kh}(\mathcal{C})$ 在每个双分次 (2，14)、(4，14) 和 (9，17) 上也都是同构。□

References

1. Ian Agol, *Ribbon concordance of knots is a partial ordering*, 《美国数学会通讯》**2** (2022), 374–379。MR 4520779
2 *Positive knots and ribbon concordance* **335** 2025 1, 81 95 4891413 。
3
Joe Boninger, , 《太平洋数学杂志》( ), 第 – 期。MR 。Joe Boninger 和 Joshua Evan Greene, *Special alternating knots are band prime*, 《国际数学研究通知》IMRN (2024), 第 10 期, 8758–8763。MR 4749185 4. Aliakbar Daemi、Tye Lidman、David Shea Vela-Vick 和 C.-M. Michael Wong, *Ribbon homology cobordisms*, 《数学进展》**408** 4467148 5 2022 108580, 第 68 卷 ( ), 论文编号 .。MR 。Aliakbar Daemi 和 Christopher Scaduto, *Chern-Simons functional singular instantons and the four-dimensional* , , , *clasp number* **26** 2024 6, 2127 2190
《欧洲数学会杂志》(JEMS) ( ), 第 – 期。MR 4742808 6 **257** 1981 . C. McA. Gordon, *Ribbon concordance of knots in the* 3*-sphere* 2, 157 170 634459 , 《数
7
学年刊》( ), 第 – 期。MR 。Hayato Imori、Taketo Sano、Kouki Sato 和 Masaki Taniguchi, *Cobordism maps in singular instanton homologyand Khovanov homology I*, 期刊=arXiv:2505.12095v1。8. , *Cobordism maps in singular instanton homology and Khovanov homology II*, 期刊=arXiv:2510.09399v2。9. Sungkyung Kang, *Link homology theories and ribbon concordances*, 《量子拓扑》**13** (2022), 第 1 期, 183–205。MR 4404800 10. P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka, *Khovanov homology is an unknot-detector*, 《高等科学研究所数学出版物》 ´Etudes Sci. (2011 2805599 11 113, 97 208), 第 – 期。MR 。Peter Kronheimer 和 Tomasz Mrowka, *Filtrations on instanton homology*, 《量子拓扑》**5** (2014), 第 1 期, 61–97。MR 3176310 12. E.S. Lee, *An endomorphism of the Khovanov invariant*, 《数学进展》**197** (2002), 第 2 期, 554–586。MR 2173845 (2006g:57024) 13. Adam Simon Levine 和 Ian Zemke, *Khovanov homology and ribbon concordances*, 《伦敦数学会通报》**51** (2019), 第 6 期, 1099–1103。MR 4041014 14. Andre w Lobb 和 Raphael Zentner, *On spectral sequences from Khovanov homology*, 《代数与几何拓扑》**20**(2020 4092306 15 2, 531 564), 第 – 期。MR 。J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, 《数学发明》**182**(2010), 419–447。16. Ian Zemke, *Knot Floer homology obstructs ribbon concordance*, 《数学年刊》(2) **190** (2019), 第 3 期, 931–947。MR 4024565 17. , *Link cobordisms and absolute gradings on link Floer homology*, 《量子拓扑》**10** (2019), 第 2 期, 207–323。MR 3950650

Durham University, UK.*Email address*:
andrew.lobb@durham.ac.uk