arXiv:2602.12710v1 [math.ST] 13 Feb 2026

# 多项式项下全球向量自回归模型与矩阵时间序列模型之间的关系

Kurtulus Kidik[a]，Dietmar Bauer[a]

[a]计量经济学，比勒费尔德大学，*Universitätsstrasse 25*，
比勒费尔德，*33615*，北莱茵-威斯特法伦州，德国

**摘要**

矩阵值时间序列（MaTS）和全球向量自回归（GVAR）模型都对多维数据集的一般向量自回归模型施加约束，以减少参数数量。

这两类模型的出发视角各不相同，因此乍看之下似乎没有太多共同之处。然而，仔细考察这些模型后，会发现两类模型之间存在诸多联系。

本文研究这两种模型所施加的约束之间的关系。我们表明，在两种模型中施加适当的约束后，可以得到一个联合框架，从 MaTS 的视角深入了解全球向量自回归模型的性质。

关键词：矩阵时间序列、全球向量自回归、多项矩阵自回归

## 1. 引言

本文考虑一个矩阵时间序列 (MaTS) $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$，$Y_t \in \mathbb{R}^{M\times N}$ 其中 $M$ 表示变量的数量，$N$ 表示区域的数量。这里假设所有区域测量的变量都相同，这对于宏观经济数据集而言是常见的，例如经济合作与发展组织（经济合作与发展组织）提供的数据集，或圣路易斯联邦储备银行的FRED数据库（FRED）。因此，第 $n$ 列 $Y_{t,:,n} \in \mathbb{R}^M$ 表示区域 $n$在时间点 $t$的观测向量。本文中，大写字母表示矩阵（例如 $Y_t$），小写字母则表示相应的向量化过程，因此 $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$，$y_t \in \mathbb{R}^{MN}$是通过按列向量化 $Y_t$得到的向量过程。我们将

还使用符号":"表示矩阵的行或列，例如，$Y_{t,\ m,\ :}$ 表示矩阵 $Y_t$的第 $m$行，而$Y_{t,\ :,\ n}$ 表示矩阵 $Y_t$的第 $n$列。

在此记号下，含多个项的矩阵时间序列模型（$MAR_j(p)$）表示为：

$$Y_t = \sum_{j_1=1}^{J_1} A_{1,j_1} Y_{t-1} B'_{1,j_1} + \cdots + \sum_{j_p=1}^{J_p} A_{1,j_p} Y_{t-p} B'_{p,j_p} + U_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

其中，$A_{i,\ j_i} \in \mathbb{R}^{M\times M}$、$B_{i,\ j_i} \in \mathbb{R}^{N\times N}$和$(u_t)_{\ t\in\mathbb{Z}}$，$u_t \in \mathbb{R}^{MN}$是一个白噪声过程。

通常假设噪声 $U_t$ 服从如下意义下的 可分离的 多元正态分布：$\mathbb{V}(u_t) = \Sigma_c \otimes \Sigma_r$（例如参见Gupta 和 Nagar（2000年）、Chen 等人（2021年））。一种重要情形 $\Sigma_c = I_N$意味着，每个区域的噪声与其他区域的噪声不相关。方差 $\mathbb{V}(u_t) = (I_N \otimes \Sigma_r)$于是为具有相同对角块的分块对角矩阵。

将该方程向量化后，可得到一个向量自回归（VAR）模型：

$$y_t = \underbrace{\left(\sum_{j_1=1}^{J_1} (B_{1,j_1} \otimes A_{1,j_1})\right)}_{\mathcal{A}_1} y_{t-1} + \cdots + \underbrace{\left(\sum_{j_p=1}^{J_p} (B_{p,j_p} \otimes A_{p,j_p})\right)}_{\mathcal{A}_p} y_{t-p} + u_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

注意到，$\mathcal{A}_1$ 中的元素数量：$= \left(\sum_{j_1=1}^{J_1} (B_{1,\ j_1} \otimes A_{1,\ j_1})\right)$等于$(MN)^2$，而$A_{1,\ j}$、$B_{1,\ j}$中的元素数量等于$(M^2+N^2)\ J_1 - J_1^2$（考虑到可识别性约束，详情见下文），$MAR_j(p)$是向量自回归模型的一个约束，当 $0 \le J_1 \le (\min(M,\ N))^2$时成立。

因此，$MAR_j(p)$模型本质上是一种结构化向量自回归（VAR）设定。本文讨论它与其他结构化向量自回归设定之间的关系，尤其是与全球向量自回归（GVAR）模型的关系。

## 2. 全球VAR模型

全球向量自回归模型（Chudik 和 Pesaran，2013年）以另一种方式为向量自回归引入约束：其核心思想是

将模型构建过程分解为针对每个区域分别设定的模型：

$$\begin{aligned} Y_{t,:,i} &= A_1^{(i)} Y_{t-1,:,i} + \cdots + A_p^{(i)} Y_{t-p,:,i} \\ &\quad + B_0^{(i)} Y_{t,:,i}^* + \cdots + B_q^{(i)} Y_{t-q,:,i}^* + U_{t,:,i} \quad i = 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $A_j^{(i)} \in \mathbb{R}^{M \times M}$，$B_j^{(i)} \in \mathbb{R}^{M \times S}$，$Y_t^* \in \mathbb{R}^{S \times N}$ 表示外生变量（在适当意义下），代表溢出效应。[1]

将所有区域模型合并为一个大向量，我们得到：

$$y_t = \mathcal{A}_{1,\oslash} y_{t-1} + \cdots + \mathcal{A}_{p,\oslash} y_{t-p} + \sum_{j=0}^{q} \mathcal{B}_{j,\oslash} y_{t-j}^* + u_t. \tag{4}$$

这里，$\mathcal{A}_{j,\oslash} = \mathrm{diag}(A_j^{(1)}, \ldots, A_j^{(N)}) \in \mathbb{R}^{NM \times NM}$ 表示一个分块对角矩阵。

全球向量自回归模型的核心思想是定义星号变量 $Y_{t,:,i}^*$，用于概括其余区域的影响。这些变量通常定义为相邻区域变量的加权平均：

$$Y_{t,m,n}^* = \sum_{j=1, j \neq n}^{N} w_{m,n,j} Y_{t,m,j} = Y_{t,m,:} W_{m,n}, \quad w_{m,n,n} = 0, W_{m,n} = \begin{pmatrix} w_{m,n,1} \\ w_{m,n,2} \\ \vdots \\ w_{m,n,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N. \tag{5}$$

例如，选择 $w_{m,n,j} = 1/(N-1)$ $j \neq n$，会得到所有其他区域变量的平均值。如果将其用于系统中的所有变量（$w_{m,n,j} = \omega_{n,j}$，$W_{m,n} = W_n$，$\forall m$），我们得到：

$$Y_{t,:,n}^* = Y_t W_n.$$

再次将这些定义叠加起来，我们得到：

[1]星号变量的数量可能因区域而异，但出于表述上的考虑，我们在此采用相同的数量，这可以通过用零填充矩阵来实现数量相等。类似地，一个区域内的变量数量一般也可能不同；然而，在MaTS环境中，每个区域所建模的是同一组变量。

$$y_t^* = Wy_t = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{1,2}I_M & \cdots & \omega_{1,N}I_M \\ \omega_{2,1}I_M & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N,1}I_M & \cdots & \omega_{N,N-1}I_M & 0 \end{pmatrix} y_t.$$

注意，$W = \tilde{W} \otimes I_M$，$\tilde{W} = [W_1, ..., W_N]' \in \mathbb{R}^{N \times N}$。如果并非所有变量˜都由星号变量表示，则可以用维数较小的 $I_M$ 替换 $I_M$。

另一种设定采用三角依赖，使得$\omega_{n,\ j}$ =0，$j \geq n$，此时 $W$ 为下三角矩阵。这种设定引入了一种特殊的影响情形：区域按顺序排列，排序靠前的区域会影响靠后的区域，反之则不会。

利用关系式 $y_t^* = Wy_t$，模型变为（为简洁起见，假设 $p = q$，并假设下文定义的 $\mathcal{G}_0$ 可逆）

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{j=1}^{p} \mathcal{A}_{j,\otimes} y_{t-j} + \sum_{j=0}^{p} \mathcal{B}_{j,\otimes} W y_{t-j} + u_t \\ &= \mathcal{B}_{0,\otimes} W y_t + \sum_{j=1}^{p} (\mathcal{A}_{j,\otimes} + \mathcal{B}_{j,\otimes} W) y_{t-j} + u_t \\ \Rightarrow \underbrace{(I_{MN} - \mathcal{B}_{0,\otimes} W)}_{\mathcal{G}_0} y_t &= \sum_{j=1}^{p} (\mathcal{A}_{j,\otimes} + \mathcal{B}_{j,\otimes} W) y_{t-j} + u_t, \\ y_t &= \sum_{j=1}^{p} \mathcal{G}_0^{-1} (\mathcal{A}_{j,\otimes} + \mathcal{B}_{j,\otimes} W) y_{t-j} + \mathcal{G}_0^{-1} u_t. \end{aligned}$$

由此可得一个向量自回归模型。如果$\mathcal{B}_{0,\ \otimes} \neq 0$则可将其表示为所谓的“结构形式”。对于三角系统，$\mathcal{G}_0$ 必定可逆；否则，可逆性并非显而易见，必须予以假设（参见Chudik 和 Pesaran (2013年）。

对于一个三角系统，其中 $W$ 是分块下三角的，向量化方程中的所有矩阵都是分块下三角矩阵。

### 3. $MAR_j(p)$的性质

$MAR_j(p)$需要额外的约束才能被识别。显然，克罗内克积 $B \otimes A$ 只能将两个矩阵 $A$ 和 $B$识别到相差一个标量因子的程度。当涉及多个项时（即$J_r > 1$），还会出现其他问题。为了理解$MAR_j(p)$模型的结构，可以采用下面介绍的两种主要工具。

**工具 1：神奇的映射：**确定可识别参数化的一项关键工具由以下映射给出 $\mathcal{R}$ ： $\mathbb{R}^{MN\times MN} \to \mathbb{R}^{M^2\times N^2}$（有时称为“重排算子”Van Loan 和 Pitsianis（1993））定义如下：

$$\mathcal{R}(B \otimes A) = \text{vec}(A)\text{vec}(B)'.$$

将矩阵向量化后，可以验证该映射会重新排列矩阵中的元素。以 $M = N = 2$ 为例：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$B \otimes A = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ \hline a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{array}\right),$$

$$\mathcal{R}(B \otimes A) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{21} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{21} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{11} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{22} \end{array}\right).$$

因此，该映射是双射且线性的（它可以用一个由零和一构成的（$MN^2$）× （$MN$）$^2$选择矩阵来描述，该矩阵将各向量化结果连接起来），使得

$$\mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{J}(B_j \otimes A_j)\right) = \sum_{j=1}^{J}\text{vec}(A_j)\text{vec}(B_j)'.$$

注意，每个 $\text{vec}(A_j)\text{vec}(B_j)'$ 都是一个秩一矩阵，因此通常， $J$ 个矩阵之和会得到一个秩为$J$的矩阵。

这种表示可用于实现可识别性：Li 和 Xiao（2021年）以及 Hsu 等人（2024）基于重排矩阵 $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1)$ 的奇异值分解（SVD）给出了可识别性条件。另一种方法是使用 QR分解，从乘积 $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}\mathcal{B}'$ 中识别因子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 。此处 $\mathcal{A} = [\ A_1\ ,\ A_2\ \ldots\ A_J\ ] \in \mathbb{R}^{M^2\times J}$ $\mathcal{B} = [\ B_1\ ,\ B_2\ \ldots\ B_J\ ] \in \mathbb{R}^{N^2\times J}$ vec( ) $\mathcal{A}'\mathcal{A} = I_J$ vec( ) $\mathcal{B}'$ vec( ) ,vec( ) , vec( ) vec( ) , vec( ), 满足.....，且.....为正的上三角矩阵（见 Bauer 等人（2020年），引理1）。Kidik 和 Bauer（2025）采用了这种方法。

**工具 2：分块分解：**从分块表示中可以获得另一种见解：

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{1N}A \\ b_{21}A & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{N1}A & \cdots & \cdots & b_{NN}A \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathcal{R}(B \otimes A) = \begin{pmatrix} b_{11}\mathrm{vec}(A) & b_{21}\mathrm{vec}(A) & \cdots & b_{NN}\mathrm{vec}(A) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(C_{11}) & \mathrm{vec}(C_{21}) & \cdots & \mathrm{vec}(C_{NN}) \end{pmatrix}$$

例如，这意味着每个下三角矩阵都可以写成至多 $N(N+1)/2$ 个克罗内克积项之和。 $\mathcal{G}_0$ 在下三角情形下最多由 $N(N-1)/2+1$ 项组成，因为对角块均为 1。

~ ~此外，在 $W = W \otimes I_M$ 的情况下，我们得到如下结果。

$$\mathcal{B}_{0,\otimes}W = \begin{pmatrix} \omega_{11}B_0^{(1)}\tilde{I}_M & \cdots & \omega_{1N}B_0^{(1)}\tilde{I}_M \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{N1}B_0^{(N)}\tilde{I}_M & \cdots & \omega_{NN}B_0^{(N)}\tilde{I}_M \end{pmatrix}$$

该矩阵可以写成至多 $N$ 个克罗内克积项之和，因此 $\mathcal{G}_0$ 可以写成至多 $N+1$ 项之和。

### 4. 全球向量自回归与 $MAR_j(p)$之间的联系

由于全球向量自回归和 $MAR_j(p)$都是针对向量化矩阵时间序列的一般VAR系统的约束，并且在项数达到最大值时， $MAR_j(p)$等价于VAR，因此显然可以将全球向量自回归视为 $MAR_j(p)$的一个特例。特别是，当星号变量˜ ˜根据 $W = W \otimes I_M$ 定义时，由上文可得

$$\mathcal{G}_0 y_t = \sum_{j=1}^{p} (\mathcal{A}_{j,\diamond} + \mathcal{B}_{j,\diamond} W) y_{t-j} + u_t$$

其中

$$\mathcal{A}_{j,\diamond} + \mathcal{B}_{j,\diamond} W = \begin{pmatrix} A_j^{(1)} & \omega_{1,2} B_j^{(1)} & \cdots & \omega_{1,N} B_j^{(1)} \\ \omega_{2,1} B_j^{(2)} & A_j^{(2)} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N,1} B_j^{(N)} & \cdots & \omega_{N,N-1} B_j^{(N)} & A_j^{(N)} \end{pmatrix}.$$

是克罗内克积之和，最多包含 $2N$ 项：分块对角矩阵$\mathcal{A}_{j,\diamond}$ 最多包含 $N$ 项，此外$\mathcal{B}_{j,\diamond} W$最多还包含 $N$ 项。这通常远小于$\min(M^2, N^2)$。

在等式左侧纳入 $\mathcal{G}_0$ 对于 $MAR_j(p)$模型而言并不常见。乘以$\mathcal{G}_0^{-1}$后，可得到一个简化式方程。可以使用 $MAR_j(p)$框架对其进行估计。可得以下方程：

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} \hat{\mathcal{A}}_j y_{t-j} + \hat{u}_t$$

其中 $\hat{\mathcal{A}}_j = \sum_{r=1}^{J_j} (\hat{B}_{j,\ r} \otimes \hat{A}_{j,\ r})$。根据这些简化式估计，可以得到用于识别结构式参数的方程：

$$\hat{\mathcal{G}}_0 \hat{\mathcal{A}}_j = \hat{\mathcal{A}}_{j,\diamond} + \hat{\mathcal{B}}_{j,\diamond} W + \hat{V}_j, \quad j = 1, ..., p.$$

星号变量与第 $i$个区域的残差之间的不相关性增加了一组方程:

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{N} w_{i,j} B_0^{(i)} \sum_{t=p+1}^{T} Y_{t,:,j} \hat{U}'_{t,:,i} = 0.$$

计算约束的数量后，我们得到 $p(MN)^2+NM^2$ 个方程，用于估计 $2pNM^2$（针对 $A_j^{(i)}, B_j^{(i)}$）以及 $NM^2$（针对 $B_0^{(i)}$），再加上 $N(N-1)$ 个参数（针对 $w_{i,j}$）。因此，二者之差为

$$(N-2)pNM^2 - N(N-1) = N[(N-2)pM^2 - N + 1]$$

对于 $N > 2$，该差值通常为正。因此，可以利用这些方程为所有参数求得最小绝对距离估计量或最小二乘估计量。可以施加约束 $\sum_{j=1,j\neq i}^{N} w_{i,j} = 1$, $w_{i,i} = 0$ 和 $w_{i,j} \geq 0$ 。

以此初始估计量为起点，可以使用交替优化程序来估计全球向量自回归模型参数，包括权重序列:

- 在给定 $W$ 的情况下，估计 $A_{(i)j}, B_{(i)j}$：这是标准的区域全球向量自回归估计量。
- 在给定 $A_{(i)j}, B_{(i)j}$ 的情况下，估计 $W$：

$$\begin{aligned} Y_{t,:,i} - \sum_{j=1}^{p} A_j^{(i)} Y_{t-j,:,i} &= B_0^{(i)} Y^*_{t,:,i} + \cdots + B_q^{(i)} Y^*_{t-q,:,i} + U_{t,:,i} \\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{N} w_{i,j} (B_0^{(i)} Y_{t,:,j} + \cdots + B_q^{(i)} Y_{t-q,:,j}) + U_{t,:,i} \\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{N} w_{i,j} \tilde{Y}_{t,:,j} + U_{t,:,i} \end{aligned}$$

在第二个方程中，误差项的方差为 $\Omega_i$ ，可以˜将其纳入考量。此外，回归变量 $Y_{t,:,j}$ 可能是内生的，因此应使用工具变量估计。

此外，对于误差项，我们得到约化形式误差 $\mathcal{G}_0^{-1}u_t$，使得误差方差等于（如果矩阵 $\mathbb{V}(u_t) = \Sigma_{\diamond}$ 是块对角的）

$$\mathcal{G}_0^{-1}\mathbb{V}(u_t)\mathcal{G}_0^{-T} = \mathcal{G}_0^{-1}\Sigma_{\diamond}\mathcal{G}_0^{-T}$$

在三角情形下，我们由此得到，新息方差的Cholesky因子等于 $\mathcal{G}_0^{-1}\Sigma_{\diamond}^{1/2}$。由于在 $\mathcal{G}_0$ 中分块对角等于单位矩阵，因此在该情形下很容易从Cholesky因子中识别 $\mathcal{G}_0^{-1}$和 $\Sigma_{\diamond}^{1/2}$。

虽然可以从向量自回归估计 $\mathcal{A}_j$ 出发遵循同样的程序，但向量自回归中的自由元素数量远多于近似的 $MAR_j(p)$。因此， $MAR_j(p)$ 可被视为高度受限的全球向量自回归与不受限的向量自回归之间的中间模型，从而能够获得更精确的估计，以便开始GVAR估计（包括对权重的估计）。此外，可以在较小的模型中检验全球向量自回归的适用性，因而与使用不受限向量自回归的检验相比具有更大的功效。

## 5. 结论

本短文表明，项数有限的 $MAR_j(p)$ 可用作严格受限的全球向量自回归与不受限的向量自回归模型之间的中间模型。后者由于涉及的参数数量很大，在典型样本量下难以估计，而前者的限制可能过强。此外，全球向量自回归模型中所涉及的权重$\omega_{i,\ j}$往往是未知的，其定义包含启发式论证。 $MAR_j(p)$ 在这两个极端之间提供了某种中间地带，有助于全球向量自回归的设定，尤其是估计权重的方法。

## 参考文献

FRED数据库，圣路易斯。 https://fred.stlouisfed.org访问日期：2025-09-19。

经济合作与发展组织的数据。https://www.oecd.org/en/data.html。访问日期：2025- 09-19。

Dietmar Bauer、Lukas Matuschek、Patrick de Matos Ribeiro 和 Martin Wagner。《单位根过程模型的参数化：结构理论与假设检验》。计量经济学，8(4):42，2020年。Rong Chen、Han Xiao 和 Dan Yang。《矩阵值时间序列的自回归模型》。《计量经济学杂志》，222:539–560，2021年。Alexander Chudik 和 M Hashem Pesaran。《具有主导单位根的高维向量自回归模型的计量经济学分析》。《计量经济学评论》，32(5- 6):592–649，2013年。Arjun K. Gupta 和 Daya K. Nagar。矩阵变量分布。Chapman & Hall/CRC，2000年。Nan-Jung Hsu、Hsin-Cheng Huang、Ruey S Tsay 和 Tzu-Chieh Kao。《用于时空数据建模的秩-r矩阵自回归模型》。《统计学及其交叉领域》，17(2):275–290，2024年。Kurtulus Kidik 和 Dietmar Bauer。《含多个项的矩阵时间序列模型的设定与估计》。提交给《多元分析杂志》的技术报告，比勒费尔德大学，2025年。Zebang Li 和 Han Xiao。《多线性张量自回归模型》。*arXiv*，2021年。URLhttps://arxiv.org/abs/2110.00928。C. F. Van Loan 和 N. Pitsianis。克罗内克积近似，第293–314页。Springer Netherlands，多德雷赫特，1993年。ISBN 978-94-015-8196-7。doi: 10.1007/978-94-015-8196-7_17。URLhttps://doi.org/10.1007/978-94-015-8196-7_17。