arXiv:2602.12729v1 [math.FA] 13 Feb 2026

分数 k-正性：对 k-正尺度的连续细化

MOHSEN KIAN

Abstract. 我们为矩阵代数之间映射的施密特数、块正性和 k-正性所依托的经典整数层级，引入一种实参数细化。我们从一族紧致的 α-可容许单位向量（$\alpha \in [1, d]$）出发，定义双体正算子的闭锥 K_α ，使其严格插值于相邻的施密特数锥之间，并同时定义相应的对偶见证锥。借助 Choi– Jamio-lkowski 对应关系，这给出映射锥 P_α的相应过滤；在整数参数处恢复通常的 k-正/k-超正类，并在顶端端点得到完全正性。

两项结果表明，分数层级揭示了真正的新结构。首先，我们证明 *fractional Kraus theorem*： α-超正映射恰好是那些存在 Kraus 分解、且其 Kraus 算子满足显式奇异值（Ky–Fan）约束的完全正映射，从而推广了经典的秩-k 刻画。其次，对于非整数 α ，锥 P_α 在完全正后复合下不具稳定性，这凸显了该理论相较整数理论发生的鲜明结构转变。最后，我们在典范对称族（包括退极化射线和各向同性切片）上推导出精确阈值，将熟悉的阶梯式判据转化为连续且可计算的分布曲线。

1. Introduction

矩阵代数之间的正线性映射及其形成的凸锥，是算子理论、矩阵分析以及（通过 Choi–Jamio-lkowski 对应）量子信息论中的核心研究对象。一方面，-正性和完全正性等正性约束刻画了非交换序结构和扩张现象；另一方面，正但非完全正的映射可通过 Peres–Horodecki 和 Horodecki 的可分性判据充当纠缠见证 [13, 6]。一种统一的视角是将这些类视为映射空间中的闭凸锥，并研究它们的对偶性、面结构，以及在自然运算（复合、放大、局部共轭）下的稳定性；例如，可参见 Størmer 关于映射锥的研究 [17, 18]以及近来对映射空间中锥的系统性研究 [16, 5]。

一个经典的整数层级贯穿了该领域的大部分内容。固定 $d = \min\{n, m\}$，并考虑施密特秩至多为 k 的双部向量 $\psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ 。它们的秩一投影生成 k-可分（或 k-纠缠）正算子的锥，且

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：46L07、47L07；次要分类号：81P45、15A60。*Key words and phrases.* 分数阶 k-正映射、施密特数、 k-超正、Choi矩阵。

对偶锥由 k-块正算子（施密特类为 k 的纠缠见证）构成；另见 [10]。通过 Choi–Jamio-łkowski 对应 [8, 3, 20], ，这些算子锥分别对应于 k-超正映射的锥（完全正映射具有秩为 $\leq k$ 的 Kraus 算子）以及 k-正映射的锥；见 [16]。在量子态层面，Terhal–Horodecki 引入的施密特数 [19] 给出了一种阶梯式分类：属于 k-可分锥的情况会在离散阈值处发生变化（例如在各向同性切片/Werner 切片上）。

目标与主要思路。 整数参数 k 会产生真实的几何和操作不连续性：许多自然的单参数族在 k 中呈现阶梯式隶属规则，并具有明确的断点。本文的一个指导目标是引入全局实参数 $\alpha \in [1, d]$ ，以受控且内在凸几何的方式在 k 与 $k+1$之间进行插值，从而细化整数层级。我们不改变环境空间，而是细化允许的秩一生成元：在 k 与 $k+1$ 之间，我们允许额外出现一个施密特系数，但用显式的比值上界约束其大小。由此得到一族连续变化的紧生成集，进而得到一族嵌套的闭锥。

贡献与结构安排。 固定 $n,\ m \in \mathbb{N}$，并令 $d := \min\{n, m\}$。我们通过仅在一族 $\mathcal{V}_\alpha$ α-允许的单位向量 $\alpha \in [1, d]$上检验正性，并取由此得到的闭锥包，引入整数层级（施密特数/k-块正性与 k-正性）之间的分数阶插值。由此得到嵌套的态锥 $\{\mathsf{K}_\alpha\}_{\alpha\in[1,d]}$ 和映射锥 $\{\mathsf{P}_\alpha\}_{\alpha\in[1,d]}$ ，它们在整数参数处与经典层级一致，并在其间实现严格插值。

虽然锥 K_α 和 P_α 在 $\alpha = k \in \{1, \ldots, d\}$处恢复了经典的整数层级，但它们在非整数 α 下的行为并非形式上的凸插值。特别是，偏离整数时，映射锥 P_α 不满足完全正后复合下的一种自然稳定性（命题 3.5），这使分数阶层级与 k正性理论中出现的通常映射锥结构截然不同。

我们的主要结果如下：

- **分数阶锥的几何与插值。** 我们证明了生成集的紧性以及所诱导锥的闭性和对偶性，证明了相邻整数阶之间的严格包含，并展示了经典整数层级的恢复（命题 3.1、3.2、4.1）。

- **分数阶 *Kraus* 定理。** 我们刻画 α-超正映射：它们恰好是那些存在 Kraus 分解的完全正映射，且其 Kraus 算子满足与之相同的分数阶奇异值约束 $\mathcal{V}_\alpha$ （定理 3.2）。

•精确阈值与闭式剖面。 我们计算出 α-正性阈值，该阈值对应于退极化族 $\Phi_t(X) = \text{迹}(X)I - tX$ （定理 3.1），并推导出各向同性切片张成空间上的精确分数阶剖面$\{I, P_\omega\}$ （定理 4.1），其中包括各向同性态的分数施密特指标的闭式反演（推论 4.1）。

本文的结构安排如下。第2 节固定记号。第 3 节构造分数阶锥 K_α、BP_α 及诱导映射锥 P_α、SP_α，并证明其结构性质，包括分数阶 Kraus 定理。第 4 节给出精确的去极化阈值及各向同性切片计算。

2. Preliminaries

本节固定记号，并回顾全文使用的基本对象。我们研究有限维矩阵代数、向量化与矩阵化之间的对应关系，以及线性映射的 Choi 表示。我们还简要回顾施密特秩／施密特数的术语，因为我们的分数阶构造对熟悉的整数层级进行插值。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathbb{M}_n := \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 表示复矩阵代数， $\mathbb{H}_n$ 表示厄米矩阵构成的实向量空间。半正定矩阵的（闭凸）锥记为 $\mathbb{M}_n^+$。我们用 $\mathrm{Tr}(\cdot)$ 表示通常的迹，并用 $\langle X, Y\rangle := \mathrm{Tr}(X^*Y)$ 表示 $\mathbb{M}_n$上的希尔伯特–施密特内积。

对于 $k,\ n \in \mathbb{N}$，我们通过克罗内克积将 $\mathbb{M}_k \otimes \mathbb{M}_n \cong \mathbb{M}_{kn}$ 对应起来，也将其视为分块矩阵 $[X_{ij}]_{i,\ j=1}^{k}$ 其分块为 $X_{ij} \in \mathbb{M}_n$。

设 $\mathcal{H}_A \simeq \mathbb{C}^n$ 且 $\mathcal{H}_B \simeq \mathbb{C}^m$。每个向量 $\psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 都可以进行施密特分解

$$\psi = \sum_{i=1}^{r} s_i\, x_i \otimes y_i,$$

其中 $r \le \min\{n, m\}$、 $\{x_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{H}_A$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{H}_B$ 是标准正交族，且施密特系数 满足

$$s_1 \ge s_2 \ge \cdots \ge s_r > 0.$$

若 $\|\psi\| = 1$，则 $\sum_{i=1}^r s_i^2 = 1$。

非零向量 ψ的施密特秩 记为 $\mathcal{SR}(\psi)$，它等于 ψ的任意施密特分解中非零施密特系数的个数 r 。

接下来，我们固定向量化约定，以便在双部向量与矩形矩阵之间自由转换。

Fix $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 的标准正交基 $\{f_j\}_{j=1}^m$。对于 $\psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$，记 e

$$\psi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, e_i \otimes f_j,$$

并将其矩阵化定义为 矩阵化 $\mathrm{mat}(\psi)\in \mathbb{M}_{n,m}$，即

$$\mathrm{mat}(\psi) := [a_{ij}]_{i,j}.$$

那么，对应关系 $\psi \mapsto \mathrm{mat}(\psi)$ 是 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ （赋予希尔伯特空间范数）与 $\mathbb{M}_{n,\ m}$ （赋予弗罗贝尼乌斯范数）之间的线性等距映射，即

$$\|\psi\|^2 = \|\mathrm{mat}(\psi)\|_F^2, \qquad \|\psi-\varphi\|^2 = \|\mathrm{mat}(\psi)-\mathrm{mat}(\varphi)\|_F^2. \tag{1}$$

此外，

$$\mathcal{SR}(\psi) = \mathrm{rank}(\mathrm{mat}(\psi)),$$

并且，如果 ψ 具有施密特系数 $s_1(\psi) \geq \cdots \geq s_d(\psi) \geq 0$ （必要时以零扩展），那么

$$s_i(\psi) = \sigma_i(\mathrm{mat}(\psi)), \qquad i = 1, \ldots, d,$$

其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots$ 表示奇异值。

对于矩阵 X，我们将其奇异值记为 $\sigma_1(X) \geq \sigma_2(X) \geq \cdots$，将迹范数记为 $\|X\|_1 := \sum_j \sigma_j(X)$，并将 Ky–Fan k-范数记为 $\|X\|_{(k)} := \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(X)$。

我们使用标准的按列堆叠向量化 $\mathrm{vec}: \mathbb{M}_d \to \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 及其逆映射 mat，其由恒等式刻画：

$$\mathrm{vec}(AXB) = \big(B^{\mathsf{T}} \otimes A\big)\mathrm{vec}(X), \qquad A, B, X \in M_d. \tag{2}$$

定义 2.1。 若 $W \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m$ 满足以下条件，我们称其为块正：

$$\langle x \otimes y,\ W(x \otimes y)\rangle \geq 0 \quad \textit{for all } x \in \mathbb{C}^n,\ y \in \mathbb{C}^m.$$

定义 2.2。 固定 $k \in \mathbb{N}$。若 $W \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m$ 满足以下条件，我们称其为 k-块正：

$$\langle \psi,\ W\psi\rangle \geq 0 \quad \textit{for all unit vectors } \psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \textit{ with } \mathcal{SR}(\psi) \leq k.$$

线性映射 Φ: $\mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ 若满足 $\Phi(\mathbb{H}_n) \subseteq \mathbb{H}_m$，则称其为厄米保持 。若$\Phi(\mathbb{M}_n^+) \subseteq \mathbb{M}_m^+$，则称其为正 。

对于 $k \in \mathbb{N}$， Φ 的 k-放大 为 $\mathrm{id}_k \otimes \Phi: \mathbb{M}_k \otimes \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_k \otimes \mathbb{M}_m$。若 $\mathrm{id}_k \otimes \Phi$ 为正，则映射 Φ 称为k-正。若 Φ 对所有 $k \in \mathbb{N}$均为 k-正，则称其为完全正（CP）。

我们经常通过 Choi表示将线性映射与矩阵对应起来，因此在此说明我们采用的约定。设 $\{E_{ij}\}_{i,\ j=1}^{n}$ 是 $\mathbb{M}_n$中的标准矩阵单位。线性映射 Φ: $\mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ 的*Choi*矩阵 为

$$C_\Phi \ := \ \sum_{i,j=1}^{n} E_{ij} \otimes \Phi(E_{ij}) \ \in \ \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m.$$

若 Φ 是厄米保持的，则 C_Φ 是厄米的。

等价地，若 $|\Omega\rangle := \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ 是（未归一化的）最大纠缠向量，则

$$C_\Phi = (\mathrm{id}_n \otimes \Phi)\big(|\Omega\rangle\langle\Omega|\big).$$

W我们将线性映射与其 Choi 矩阵对应起来。相应的 Choi 配对为

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathrm{Choi}} := \mathrm{Tr}(C_\Phi\, C_\Psi),$$

即 Choi 矩阵的希尔伯特–施密特内积。

存在如下标准对应关系

$$\Phi \text{ is a } k\text{-positive map} \quad \Longleftrightarrow \quad C_\Phi \text{ is a } k\text{-block-positive matrix.}$$

第3卷. Fractional α-positivity

现在我们引入本文的核心对象。其基本思想是通过将正性检验限制在一组受控的向量中，对整数施密特秩层级进行插值。

令 $d := \min\{n, m\}$，则每个 $\psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ 至多有 d 个非零施密特系数。给定 $\alpha \in [1, d]$，令 $k := \lfloor \alpha \rfloor$, $\theta := \alpha - k \in [0, 1)$，并令 $r := \lceil \alpha \rceil$。

定义 3.1 (α-可容许单位向量)。固定 $\alpha \in [1, d]$，并记 $k := \lfloor \alpha \rfloor$, $\theta := \alpha - k \in [0, 1)$，以及 $r := \lceil \alpha \rceil$。具有降序施密特系数$s_1(\psi) \geq \cdots \geq s_d(\psi)$ 的单位向量 $\psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ 称为 α-可容许，当且仅当：

(i) *(秩上限)* $s_j(\psi) = 0$ 对所有 $j \geq r + 1$ *(等价地* $\mathcal{SR}(\psi) \leq r$*);*(ii) *(归一化比值)* 若 $\theta > 0$，则

$$s_{k+1}(\psi) \;\leq\; \frac{\theta}{k} \sum_{j=1}^{k} s_j(\psi). \tag{3}$$

令 $\mathcal{V}_\alpha$ 表示 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ 中所有 α 可容许单位向量的集合。

注 3.1。(i) 若 $\alpha = k$ 是整数，则 $\theta = 0$ 且 $r = k$，因此定义 *3.1*可简化为 $\mathcal{SR}(\psi) \leq k$。于是

$$\mathcal{V}_k = \{\psi : \; \|\psi\| = 1,\; \mathcal{SR}(\psi) \leq k\}.$$

(ii) 若 $\alpha \in (k, k+1)$，则 $r = k + 1$，所以 $\psi \in \mathcal{V}_\alpha$ 当且仅当 $\mathcal{SR}(\psi) \leq k + 1$ 且

$$\frac{k\, s_{k+1}(\psi)}{\sum_{j=1}^{k} s_j(\psi)} \;\leq\; \theta.$$

等价地，$\alpha = k + \theta$ 至多允许在第 k 级之外再有一个施密特系数，而 θ 则控制其相对于领先的 k 个系数的大小。

（iii）对于每个满足 $\mathcal{SR}(\psi) \leq k+1$ 的单位向量，总有

$$s_{k+1}(\psi) \;\leq\; \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j(\psi) \qquad \big(since \;\sum_{j=1}^{k} s_j(\psi) \geq k\, s_{k+1}(\psi)\big).$$

因此，当 $\theta \uparrow 1$ 时，比值约束便自动满足，且 $\mathcal{V}_{k+\theta}$ 持续增大，直至达到完整的秩-$\leq k+1$ 类。特别是，对于 $\alpha \in (k,\ k+1)$，不存在平台期（“死区”）。

（iv）若 $X = \mathrm{mat}(\psi) \in \mathbb{M}_{n,\ m}$ 是一个固定的矩阵化，则 (3) 可写成 s

$$\frac{\|X\|_1}{\|X\|_{(k)}} \;\leq\; 1+\frac{\theta}{k} \;\; or\ equivalently \;\; \sigma_{k+1}(X) \;\leq\; \frac{\theta}{k}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j(X), \tag{4}$$

其中 $\|\cdot\|_{(k)}$ 是 *Ky-Fan* 范数。

现在我们定义分数阶锥。

定义 3.2。 我们将分数阶 α-超正锥定义为

$$\mathsf{K}_\alpha := \overline{\mathrm{cone}}\{\,\psi\psi^* :\ \psi \in \mathcal{V}_\alpha\,\} \subseteq (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^+, \tag{5}$$

及其对偶，即分数阶 α-块正锥，定义如下

$$\mathsf{BP}_\alpha := \mathsf{K}_\alpha^* = \{\,W \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}} :\ \langle\psi, W\psi\rangle \geq 0 \ for\ all\ \psi \in \mathcal{V}_\alpha\,\}. \tag{6}$$

换言之，K_α 由所有半正定算子组成，这些算子可由投影到 α-可容许向量上的秩一投影算子的锥组合逼近；随着 α 增大，它在可分锥与完整的正锥之间进行插值。

下面给出分数阶锥的一些基本性质。对于 $\alpha \in [1,d]$ 和 $W \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$，定义

$$\lambda_\alpha(W) \;:=\; \min\Big\{\langle x,\, Wx\rangle :\ x \in \mathcal{V}_\alpha\Big\}. \tag{7}$$

命题 3.1。 固定 $\alpha \in [1,d]$，并记 $k := \lfloor\alpha\rfloor$ 和 $\theta := \alpha - k \in [0,1)$。那么：

(a) 集合 $\mathcal{V}_\alpha$ 是 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ 的单位球面上的非空紧致子集。(b) 对于每个 $W \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$，式 (7) 中的最小值都能取到。此外，映射 $W \mapsto \lambda_\alpha(W)$ 是凹且 *Lipschitz* 连续的（因此连续）。(c) BP_α 是 $(\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$中的闭凸锥。特别地，

$$W \in \mathsf{BP}_\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda_\alpha(W) \geq 0.$$

证明。 (a) 由于任意单位简单张量 $u \otimes v$ 的施密特秩为 1，因此属于 $\mathcal{V}_\alpha$，对每个 $\alpha \in [1,d]$ 都成立，所以每个 $\mathcal{V}_\alpha$ 都非空。

令 $\mathbb{S}$ 表示 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$的单位球面，它是紧致的。只需证明 $\mathcal{V}_\alpha$在 $\mathbb{S}$中是闭集。

考虑由固定的矩阵化给出的连续映射 $x \mapsto X = \mathrm{mat}(x) \in \mathbb{M}_{n,m}$。 x 的施密特系数与 X 的奇异值相同；特别地，每个

函数 $x \mapsto s_j(x)$ 在 $\mathbb{S}$ [2, 第 II 章]上连续（奇异值随矩阵元素连续变化）。

若 $\theta = 0$，则 $\mathcal{V}_k = \{x \in \mathbb{S} : \operatorname{rank}(\operatorname{mat}(x)) \le k\}$。秩约束是闭的，因为它等价于所有 $(k+1) \times (k+1)$ 子式均为零，而这些子式是矩阵元素的多项式函数。

若 $\theta \in (0,1)$，则 $\mathcal{V}_\alpha$ 是闭集 $\{x \in \mathbb{S} : s_{k+2}(x) = 0\}$（等价地，$\operatorname{rank}(\operatorname{mat}(x)) \le k+1$）与闭集 $\{x \in \mathbb{S} : s_{k+1}(x) - \frac{\theta}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j(x) \le 0\}$ 的交，因为左侧关于 x 是连续的。因此，$\mathcal{V}_\alpha$ 在 $\mathbb{S}$中是闭集。

因此，$\mathcal{V}_\alpha$ 是紧集的闭子集，故为紧集。

(b) 对固定的 W，函数 $x \mapsto \langle x, Wx\rangle$ 在紧集 $\mathcal{V}_\alpha$上连续，因此（7）中的最小值可以取到。

W 中的凹性源于：λ_α 是线性泛函的逐点最小值：对于$t \in [0,1]$,

$$\lambda_\alpha(tW_1 + (1-t)W_2) = \min_{x \in \mathcal{V}_\alpha} \big(t\langle x, W_1 x\rangle + (1-t)\langle x, W_2 x\rangle\big) \ge t\lambda_\alpha(W_1) + (1-t)\lambda_\alpha(W_2).$$

最后，λ_α 关于算子范数是 Lipschitz 连续的：若 $\|W - W'\| \le \varepsilon$，则对于所有单位 x，我们有 $|\langle x, Wx\rangle - \langle x, W'x\rangle| \le \varepsilon$，因此 $|\lambda_\alpha(W) - \lambda_\alpha(W')| \le \varepsilon$。

(c) 根据定义，

$$W \in \mathrm{BP}_\alpha \iff \langle x, Wx\rangle \ge 0 \ \text{ for all } x \in \mathcal{V}_\alpha.$$

这等价于 $\min_{x \in \mathcal{V}_\alpha} \langle x, Wx\rangle \ge 0$，即 $\lambda_\alpha(W) \ge 0$。

由于 $\mathrm{BP}_\alpha = \{W : \lambda_\alpha(W) \ge 0\}$ 且 λ_α 是凹且连续的，因此 BP_α是$(\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$中的闭凸锥。□

由于 $\mathcal{V}_\alpha$的紧性，我们可以得出，由 $\mathcal{V}_\alpha$ 生成的凸锥自动是闭的。

引理3.1。设 $S \subset (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$ 是紧致的，并假设对所有 $H \in S$，迹$(H) = 1$。定义（锥）包

$$\operatorname{cone}(S) := \Big\{ \sum_{i=1}^{r} t_i H_i : \ r \in \mathbb{N},\ t_i \ge 0,\ H_i \in S \Big\}.$$

则 锥(S) 是一个闭凸锥。此外，

$$\operatorname{cone}(S) = \{\, t\rho : \ t \ge 0,\ \rho \in \operatorname{conv}(S) \,\}. \tag{8}$$

特别地，$\overline{\text{锥}(S)} = \text{锥}(S)$。

证明。我们在任意赋范的有限维实向量空间 $V := (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$ 中工作。由于 S 是紧致的，其凸包 conv(S) 也是紧致的（参见，

例如， [15, 定理 1.1。11]；这是 Carath´eodory 定理 [15,定理 1.1。4]）。

首先注意到（8）显然由凸包的定义得出。
设（Y_ℓ）$_{\ell\in\mathbb{N}} \subset$ 锥（S）是一个序列，且 $Y_\ell \to Y$ 属于 V。利用（8），可写为

$$Y_\ell = t_\ell \rho_\ell, \qquad t_\ell \geq 0,\ \rho_\ell \in \operatorname{conv}(S).$$

取迹并利用 Tr(ρ_ℓ) $= 1$ （因为 conv(S) 包含于仿射超平面{Tr $= 1$}），得到

$$t_\ell = \operatorname{Tr}(Y_\ell) \longrightarrow \operatorname{Tr}(Y) =: t.$$

特别地， $t \geq 0$。

若 $t = 0$，则 $t_\ell \to 0$。由于 conv(S) 是紧致的，因此有界：存在 $M > 0$，使得对所有 $\rho \in$ conv(S)，都有$\|\rho\| \leq M$。因此 $\|Y_\ell\| = \|t_\ell \rho_\ell\| \leq t_\ell M \to 0$，故 $Y = 0 \in$ 锥(S)。

若 $t > 0$，conv(S) 的紧性蕴含序列紧性，因此经过取子序列后，我们可以假设 $\rho_{\ell_j} \to \rho \in$conv($S$)。于是

$$Y_{\ell_j} = t_{\ell_j} \rho_{\ell_j} \longrightarrow t\rho,$$

根据极限的唯一性，我们有 $Y = t\rho \in$cone(S)。

因此，cone(S) 中的每个收敛序列都收敛到 cone(S) 中的一个点，即 cone(S) 是闭的。根据 cone(S) 的定义，其凸性显而易见，因此 cone(S) 是一个闭凸锥。□

推论 3.1. 对于 $\mathcal{S}_\alpha := \{xx^* : \ x \in \mathcal{V}_\alpha\}$ 有

$$\mathsf{K}_\alpha = \operatorname{cone}(\mathcal{S}_\alpha).$$

证明。 由命题3.1(a)，集合 $\mathcal{V}_\alpha$ 是紧致的。映射 $x \mapsto xx^*$ 是连续的，且 Tr(xx^*) $= \|x\|^2 = 1$，因此 $\mathcal{S}_\alpha$ 是紧致的，且迹为 1。引理 3.1 给出 cone($\mathcal{S}_\alpha$) $=$cone($\overline{\mathcal{S}_\alpha}$)。由于 $\mathsf{K}_\alpha =$cone($\mathcal{S}_\alpha$) 根据（5），结论得证。□

下一个结果表明，该插值是非平凡的：在 k 与 $k+1$ 之间可以得到真正的新锥。

命题 3.2. 固定整数 $k \in \{1, \ldots, d-1\}$ 与 $\theta \in (0, 1)$，并令 $\alpha := k + \theta$。则：

(a) $\mathcal{V}_k \subsetneq \mathcal{V}_\alpha \subsetneq \mathcal{V}_{k+1}$。
(b) $\mathsf{K}_k \subsetneq \mathsf{K}_\alpha \subsetneq \mathsf{K}_{k+1}$。(c)
$\mathsf{BP}_k \supsetneq \mathsf{BP}_\alpha \supsetneq \mathsf{BP}_{k+1}$。

证明。 (a) 根据定义， $\mathcal{V}_k$ 由施密特秩至多为 k的单位向量组成。因此，任意 $\psi \in \mathcal{V}_k$ 都满足：对所有 $j \geq k+1$， $s_{k+1}(\psi) = 0$ 且$s_j(\psi) = 0$。特别地， ψ 满足

秩上限 $\mathcal{SR}(\psi) \le k+1$，并且

$$s_{k+1}(\psi) = 0 \le \frac{\theta}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j(\psi),$$

因此 $\mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{V}_\alpha$。此外，$\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_{k+1}$ 可由定义 3.1 中的秩上限立即得出（对于$\alpha \in (k, k+1)$，此上限为 $\mathcal{SR}(\psi) \le k+1$）。

现在我们证明这两个包含关系都是严格的。取标准正交族 $\{e_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \mathbb{C}^n$和 $\{f_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \mathbb{C}^m$。令

$$a := \frac{1}{\sqrt{k+\theta^2}}, \qquad b := \frac{\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}.$$

定义

$$\psi_\theta := \sum_{i=1}^{k} a\, e_i \otimes f_i \;+\; b\, e_{k+1} \otimes f_{k+1}. \tag{9}$$

那么 $\|\psi_\theta\|^2 = ka^2 + b^2 = 1$。$\psi_\theta$ 的施密特系数为 a（重数为 k）和 b（重数为 1），因此 $\mathcal{SR}(\psi_\theta) = k+1$ 且

$$s_{k+1}(\psi_\theta) = b = \theta a = \frac{\theta}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j(\psi_\theta).$$

因此 $\psi_\theta \in \mathcal{V}_\alpha$，但 $\psi_\theta \notin \mathcal{V}_k$（因为 $\mathcal{SR}(\psi_\theta) = k+1$），所以 $\mathcal{V}_k \subsetneq \mathcal{V}_\alpha$。

对于第二个严格性，令 $\theta' := (1+\theta)/2 \in (\theta, 1)$，并定义

$$a' := \frac{1}{\sqrt{k+(\theta')^2}}, \qquad b' := \frac{\theta'}{\sqrt{k+(\theta')^2}}, \qquad \psi_{\theta'} := \sum_{i=1}^{k} a'\, e_i \otimes f_i \;+\; b'\, e_{k+1} \otimes f_{k+1}.$$

同样，$\|\psi_{\theta'}\| = 1$ 和 $\mathcal{SR}(\psi_{\theta'}) = k+1$，因此 $\psi_{\theta'} \in \mathcal{V}_{k+1}$。然而，

$$s_{k+1}(\psi_{\theta'}) = b' = \theta' a' > \theta a' = \frac{\theta}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j(\psi_{\theta'}),$$

因此 $\psi_{\theta'} \notin \mathcal{V}_\alpha$。所以 $\mathcal{V}_\alpha \subsetneq \mathcal{V}_{k+1}$。

(b) 对于 $\beta \in \{k, \alpha, k+1\}$，令

$$S_\beta := \{\, xx^* : \; x \in \mathcal{V}_\beta \,\} \subset (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^+.$$

由于 $\mathcal{V}_\beta$ 是单位球面的闭子集（因而是紧致的），且 $x \mapsto xx^*$ 是连续的，所以每个 S_β 都是紧致的。此外，对所有 $x \in \mathcal{V}_\beta$，$\mathrm{Tr}(xx^*) = \|x\|^2 = 1$，因此对所有 $H \in S_\beta$，$\mathrm{Tr}(H) = 1$。

我们记录两个初等结论。

断言1. 设 $S \subset (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$ 为紧致集，并假设对所有 $H \in S$，$\mathrm{Tr}(H) = 1$。若 $\rho \in \mathrm{cone}(S)$ 且 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$，则 $\rho \in \mathrm{conv}(S)$。

断言 1 的证明。取满足 $\rho_j \to \rho$ 的 $\rho_j \in \mathrm{cone}(S)$。记 $\rho_j = t_j \sigma_j$，其中

$$t_j := \mathrm{Tr}(\rho_j) \ge 0, \qquad \sigma_j := \rho_j / t_j \quad (t_j > 0).$$

由于 $\rho_j \in$cone(S)，且 S 中的每个元素的迹都为 1，因此 Tr$(\sigma_j) = 1$ ，从而$\sigma_j \in$ conv(S)（事实上，$\rho_j = \sum_i a_{i,\ j} H_{i,\ j}$ 满足 $a_{i,\ j} \geq 0$, $H_{i,\ j} \in S$，所以 $t_j = \sum_i a_{i,\ j}$ 且$\sigma_j = \sum_i (a_{i,\ j}/t_j) H_{i,\ j}$ 是一个凸组合）。由迹的连续性， $t_j =$ Tr$(\rho_j) \to$Tr$(\rho) = 1$，因此对所有充分大的 j ，我们有 $t_j > 0$ 且

$$\sigma_j = \rho_j / t_j \longrightarrow \rho.$$

最后，S的凸包是紧致的（因此是闭集），因为 S 在有限维空间中是紧致的（例如参见 [15, 定理 1.1。11]），所以 $\rho \in \text{conv}(S)$。

命题 2. 设 $\mathcal{T}$ 是迹为 1 的秩一半正定矩阵集合。若 ρ 是秩一的， $\rho \geq 0$，Tr$(\rho) = 1$，且 $\rho \in$ conv$(\mathcal{T})$，则实际上 $\rho \in \mathcal{T}$。

命题 2 的证明。写作 $\rho = \sum_{i=1}^{N} p_i \tau_i$ ，其中 $p_i > 0$、 $\sum_i p_i = 1$且 $\tau_i \in \mathcal{T}$。令 v 为任意一个与 Ran(ρ) 正交的单位向量；由于 ρ 的秩为一，这意味着 $v \perp \psi$ ，其中 $\rho = \psi\psi^*$且 $\|\psi\| = 1$。于是

$$0 = \langle v, \rho v \rangle = \sum_{i=1}^{N} p_i \langle v, \tau_i v \rangle.$$

每个 $\tau_i \geq 0$，因此每一项 $\langle v,\ \tau_i v \rangle \geq 0$，并且由于 $p_i > 0$ 我们得到 $\langle v,\ \tau_i v \rangle = 0$ 对所有 i均成立。对于 $\tau_i = \varphi_i \varphi_i^*$，这意味着 $0 = \langle v,\ \varphi_i \varphi_i^* v \rangle = |\langle v,\ \varphi_i \rangle|^2$，因此 $v \perp \varphi_i$。

由于 $v \perp \psi \Rightarrow v \perp \varphi_i$，我们有张成空间$\{\psi\}^\perp \subseteq$张成空间$\{\varphi_i\}^\perp$。取正交补得到张成空间$\{\varphi_i\} \subseteq$张成空间$\{\psi\}$，因此 $\varphi_i = c_i \psi$。由于 $\|\varphi_i\| = \|\psi\| = 1$，我们有 $|c_i| = 1$ ，从而 $\tau_i = \varphi_i \varphi_i^* = \psi\psi^* = \rho$。因此 $\rho \in \mathcal{T}$。

现在我们证明部分（b）中的严格包含。由部分（a）可知 $\mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_{k+1}$，因此 $S_k \subseteq S_\alpha \subseteq S_{k+1}$ ，进而

$$\mathsf{K}_k = \overline{\text{cone}}(S_k) \subseteq \overline{\text{cone}}(S_\alpha) = \mathsf{K}_\alpha \subseteq \overline{\text{cone}}(S_{k+1}) = \mathsf{K}_{k+1}.$$

为证明 $\mathsf{K}_k \subsetneq \mathsf{K}_\alpha$ 的严格性，令 ψ_θ 为部分（a）中构造的单位向量，使得 $\psi_\theta \in \mathcal{V}_\alpha \setminus \mathcal{V}_k$，并设 $\rho_\theta := \psi_\theta \psi_\theta^*$。于是 $\rho_\theta \in S_\alpha \subseteq \mathsf{K}_\alpha$ ，且 Tr$(\rho_\theta) = 1$。若 $\rho_\theta \in \mathsf{K}_k =$ cone(S_k)，则由断言1可得 $\rho_\theta \in$conv(S_k)。由于 ρ_θ 的秩为一，命题 2 推出 $\rho_\theta \in S_k$，即 $\psi_\theta \in \mathcal{V}_k$，矛盾。因此 $\rho_\theta \notin \mathsf{K}_k$ ，且 $\mathsf{K}_k \subsetneq \mathsf{K}_\alpha$。

最后，$\mathsf{K}_\alpha \subsetneq \mathsf{K}_{k+1}$ 的严格性可类似证明。令 $\psi_{\theta'}$ 为部分（a）中满足 $\psi_{\theta'} \in \mathcal{V}_{k+1} \setminus \mathcal{V}_\alpha$ 的单位向量，并设 $\rho_{\theta'} := \psi_{\theta'} \psi_{\theta'}^*$。于是 $\rho_{\theta'} \in S_{k+1} \subseteq \mathsf{K}_{k+1}$ ，且 Tr$(\rho_{\theta'}) = 1$。若$\rho_{\theta'} \in \mathsf{K}_\alpha =$ cone(S_α)，则由断言1可得 $\rho_{\theta'} \in$ conv(S_α)，再由命题 2 得到 $\rho_{\theta'} \in S_\alpha$，即 $\psi_{\theta'} \in \mathcal{V}_\alpha$，矛盾。因此 $\rho_{\theta'} \notin \mathsf{K}_\alpha$ ，且 $\mathsf{K}_\alpha \subsetneq \mathsf{K}_{k+1}$。

(c) 我们使用以下有限维对偶事实：若 $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{L}$ 是有限维实内积空间中的闭凸锥，则 $\mathcal{L}^* \subsetneq \mathcal{K}^*$。我们强调，$\mathcal{K}^*$ 表示对偶空间 V^*中的对偶锥：

$$\mathcal{K}^* = \{f \in V^* :\ f(y) \geq 0\ \forall y \in \mathcal{K}\},$$

而不是由所有线性泛函构成的整个对偶空间 V^*。事实上，取 $x \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{K}$。由于 $\mathcal{K}$是闭的、凸的，且包含 0，强分离定理保证存在非零线性泛函 f，使得对于所有 $y \in \mathcal{K}$都有 $f(y) \geq 0$，但 $f(x) < 0$。因此 $f \in \mathcal{K}^*$且 $f \notin \mathcal{L}^*$，从而证明了 $\mathcal{L}^* \subsetneq \mathcal{K}^*$。将此应用于 $\mathcal{K} = \mathrm{K}_k$、 $\mathcal{L} = \mathrm{K}\alpha$ ，再应用于 $\mathcal{K} = \mathrm{K}\alpha$、 $\mathcal{L} = \mathrm{K}k{+}1$，并利用 $\mathrm{BP}^\beta = \mathrm{K}^*_\beta$，我们得到

$$\mathrm{BP}_k \supsetneq \mathrm{BP}_\alpha \supsetneq \mathrm{BP}_{k+1}.$$

□

命题 3.3。 固定 $\alpha \in [1, d]$。设 $U \in \mathbb{M}_n$ 和 $V \in \mathbb{M}_m$ 为酉矩阵。则：

(i) $\psi \in \mathcal{V}_\alpha \iff (U \otimes V)\psi \in \mathcal{V}_\alpha$ *for any unit vector* $\psi \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$

(ii) $\rho \in \mathrm{K}_\alpha \iff (U \otimes V)\,\rho\,(U \otimes V)^* \in \mathrm{K}_\alpha$ *for any* $\rho \in \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m$,

(iii) $W \in \mathrm{BP}_\alpha \iff (U \otimes V)\,W\,(U \otimes V)^* \in \mathrm{BP}_\alpha$ *for any* $W \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$

3.1. **α-正映射和 α-超正映射**。 设 $\Phi\colon \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ 为厄米保持映射，且令 $C_\Phi \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$ 表示其 Choi矩阵。

定义 3.3 (α-正映射)。 对于 $\alpha \in [1, d]$，若厄米保持映射 $\Phi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ 满足 $C_\Phi \in \mathrm{BP}\alpha$，则称其为 α-正映射 。等价地，

$$\langle \psi, C_\Phi \psi \rangle \geq 0 \qquad \textit{for all } \psi \in \mathcal{V}_\alpha,$$

其中 $\mathcal{V}_\alpha$ 是 α-可容许向量的集合。 我们用$\mathrm{P}\alpha$表示 α-正映射构成的锥。

此外，我们称厄米保持映射 $\Phi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ 为 α-超正，如果 $C_\Phi \in \mathrm{K}\alpha$。我们用 SP_α 表示 α-超正映射构成的锥。

注3.2. 通过 *Choi* 对应，由于锥 K_α 和 BP_α 互为对偶，因此

$$\mathrm{SP}_\alpha = \mathrm{P}^*_\alpha, \qquad \mathrm{P}_\alpha = \mathrm{SP}^*_\alpha,$$

其中，对偶是相对于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{Choi}}$而言的。此外，由命题 *3.2*可知 $\mathrm{P}_k \supsetneq \mathrm{P}_\alpha \supsetneq \mathrm{P}k{+}1$ ，且 $\mathrm{SP}_k \subsetneq \mathrm{SP}_\alpha \subsetneq \mathrm{SP}k{+}1$。

命题 3.4. 固定 $\alpha \in [1, d]$ ，并令 $\Phi\colon \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ 为厄米保持映射。

(a) 对于所有酉矩阵 $U \in \mathbb{M}_m$、 $V \in \mathbb{M}_n$,

$\Phi \in \mathrm{P}_\alpha \iff \mathrm{Ad}_U \circ \Phi \circ \mathrm{Ad}_V \in \mathrm{P}\alpha$ 和 $\Phi \in \mathrm{SP}_\alpha \iff \mathrm{Ad}_U \circ \Phi \circ \mathrm{Ad}_V \in \mathrm{SP}\alpha$.

(b) Φ 是否属于 $\mathcal{P}_\alpha$ （以及 $\mathcal{SP}_\alpha$）并不取决于用于定义C_Φ的矩阵单位的选择。

证明。 (a) Choi矩阵 $C_{\mathrm{Ad}_U \circ \Phi \circ \mathrm{Ad}_V}$ 由 C_Φ 与局部酉算子 $V^{\mathsf{T}} \otimes U$共轭得到。由于 V^{T} 是酉矩阵，命题 3.3(c) 推出 $C_\Phi \in \mathrm{BP}\alpha$ 当且仅当

仅当 $C_{\mathrm{Ad}_U\circ\Phi\circ\mathrm{Ad}_V}\in \mathrm{BP}_\alpha$，即 $\Phi\in \mathrm{P}_\alpha$ 当且仅当 $\mathrm{Ad}_U\circ\Phi\circ\mathrm{Ad}_V\in \mathrm{P}_\alpha$。关于 SP_α 的结论可类似地利用 K_α的不变性得出。

(b) 用酉矩阵变换矩阵单位 V（即改变 $\mathbb{C}^n$ 的基）会将 Choi 矩阵变换为 $(V^{\mathsf{T}}\otimes I)\,C_\Phi\,(V^{\mathsf{T}}\otimes I)^*$。根据命题 3.3(c)，属于 BP_α （以及 K_α）的性质保持不变，因此属于P_α （以及 SP_α ）的性质也保持不变。□

在整数阶时，与 k-正性相关的熟知锥具有良好的稳定性（例如，与自然复合及锥运算相容）。分数阶插值的一个重要新颖之处在于，某些结构特征在非整数处不再成立。下一个命题给出了非整数 α 下 CP后复合稳定性失效的具体例子，说明 P_α 确实是新概念，而非整数阶理论的简单改写。

命题3.5。取整数 $k\in\{1,\dots,d-1\}$ 和 $\theta\in(0,1)$，并令 $\alpha:=k+\theta$。则 P_α 在完全正后复合下不稳定：存在一个厄米保持的 α-正映射 $\Phi\colon \mathbb{M}_n\to\mathbb{M}_m$ 和一个完全正映射 $\Gamma:\mathbb{M}_m\to\mathbb{M}_m$，使得$\Gamma\circ\Phi\notin \mathrm{P}_\alpha$。

更准确地说，如果 $\Phi\in \mathrm{P}_\alpha\setminus \mathrm{P}_{k+1}$，那么存在一个单*Kraus*算子*CP*映射 $\Gamma=\mathrm{Ad}_A$，满足$\mathrm{Ad}_A\circ\Phi\notin \mathrm{P}_\alpha$。

证明。由于 $\mathrm{P}_{k+1}\subsetneq \mathrm{P}_\alpha$，根据注 3.2，我们可以固定 $\Phi\in \mathrm{P}_\alpha\setminus \mathrm{P}_{k+1}$。令 $W:=C_\Phi\in(\mathbb{M}_n\otimes\mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$ 为其Choi矩阵。于是 $W\in \mathrm{BP}_\alpha$，但 $W\notin \mathrm{BP}_{k+1}$。

步骤*1*：秩为$(k+1)$ 的见证向量。由于 $W\notin \mathrm{BP}_{k+1}$，存在一个单位向量$\varphi\in\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m$，满足 $\mathcal{SR}(\varphi)\le k+1$，使得

$$\langle\varphi, W\varphi\rangle<0. \tag{10}$$

必有 $\mathcal{SR}(\varphi)=k+1$（否则 $\mathcal{SR}(\varphi)\le k$将推出 $\varphi\in\mathcal{V}_k\subseteq\mathcal{V}_\alpha$，这与$W\in$BP$_\alpha$矛盾）。固定一个施密特分解

$$\varphi=\sum_{i=1}^{k+1} s_i\, e_i\otimes f_i,\qquad s_1\ge\cdots\ge s_{k+1}>0,\qquad \sum_{i=1}^{k+1}s_i^2=1,$$

wi第th个标准正交族 $\{e_i\}_{i=1}^{k+1}\subset\mathbb{C}^n$ 和 $\{f_i\}_{i=1}^{k+1}\subset\mathbb{C}^m$。设 $S:=\sum_{i=1}^{k}s_i>0$.

*St*第*ep*步：衰减最后一个施密特系数，以进入 $\mathcal{V}_\alpha$。选择 $t>0$ 使得 t

$$\frac{s_{k+1}}{t}\;\le\;\frac{\theta}{k}\,S. \tag{11}$$

定义 $A_t\in\mathbb{M}_m$ 为

$$A_t f_i=f_i\ (1\le i\le k),\qquad A_t f_{k+1}=t\,f_{k+1},\qquad\text{and}\qquad A_t|_{\mathrm{span}\{f_1,\dots,f_{k+1}\}^\perp}=I,$$

并令 Γ_t :=Ad$_{A_t}$，它是完全正的。

现在定义（未归一化的）向量

$$\widetilde{\psi}_t := \sum_{i=1}^{k} s_i\, e_i \otimes f_i \;+\; \frac{s_{k+1}}{t}\, e_{k+1} \otimes f_{k+1}, \qquad \psi_t := \frac{\widetilde{\psi}_t}{\|\widetilde{\psi}_t\|}.$$

Then $\mathcal{SR}(\psi_t) = k+1$，且 ψ_t 已经处于施密特形式，其施密特系数为

$$s_i(\psi_t) = \frac{s_i}{\|\widetilde{\psi}_t\|}\ (1 \le i \le k), \qquad s_{k+1}(\psi_t) = \frac{s_{k+1}/t}{\|\widetilde{\psi}_t\|}.$$

因此，利用（11），

$$s_{k+1}(\psi_t) = \frac{s_{k+1}/t}{\|\widetilde{\psi}_t\|} \le \frac{\theta}{k}\,\frac{\sum_{i=1}^{k} s_i}{\|\widetilde{\psi}_t\|} = \frac{\theta}{k}\sum_{i=1}^{k} s_i(\psi_t).$$

因此， $\psi_t \in \mathcal{V}_\alpha$ 根据定义3.1。此外，

$$(I \otimes A_t^*)\widetilde{\psi}_t = \varphi, \qquad \text{hence} \qquad (I \otimes A_t^*)\psi_t = \frac{1}{\|\widetilde{\psi}_t\|}\,\varphi. \tag{12}$$

步骤*3*：后复合并进行检验。直接计算Choi矩阵可得

$$C_{\Gamma_t \circ \Phi} = (I \otimes \Gamma_t)(W) = (I \otimes A_t)\, W\, (I \otimes A_t^*). \tag{13}$$

因此，利用（12）和（13）可得

$$\langle \psi_t,\, C_{\Gamma_t \circ \Phi}\, \psi_t \rangle = \langle (I \otimes A_t^*)\psi_t,\; W\,(I \otimes A_t^*)\psi_t \rangle = \frac{1}{\|\widetilde{\psi}_t\|^2}\,\langle \varphi, W\varphi \rangle.$$

由（第10卷），右侧严格为负。由于 $\psi_t \in \mathcal{V}_\alpha$，这表明 $C_{\Gamma_t \circ \Phi} \notin \mathsf{BP}_\alpha$，即 $\Gamma_t \circ \Phi \notin \mathsf{P}_{\alpha\circ}$

因此，完全正后复合可能破坏 α-正性（对 $\alpha \in (k, k+1)$）。 □

注 3.3。 对于整数 $\alpha = k$，锥 P_k 与 k-正性重合，并且在完全正映射的前复合与后复合下保持不变。因此，上述现象确实是分数阶特有的：它只在非整数 α时出现。

3.2. **一个尖锐的阈值示例： α-正性：() Tr()**。 本小节计算酉协变单参数族的 α-正性区域

$$\Phi_t : \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d, \qquad \Phi_t(X) := \mathrm{Tr}(X)\, I_d - tX, \tag{14}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$，该映射均为厄米保持。注意，对于 $t \le 0$，有 $C_{\Phi_t} = I \otimes I + |t| d\, \omega\omega^* \ge 0$，因此 Φ_t 是完全正的（从而对每个 α均为 α-正）。所以唯一非平凡的情形是 $t \ge 0$，下文我们对此作此假设。

令 $\{e_i\}_{i=1}^{d}$ 为 $\mathbb{C}^d$ 的标准基，并定义

$$\omega := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} e_i \otimes e_i \;\in\; \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d.$$

众所周知， Φ_t 的 Choi矩阵为 $C_{\Phi_t} = I_d \otimes I_d - td\,\omega\omega^*$. 这是 Choi/Jamio-lkowski 表示中的标准计算；例如参见 [20, 第 2.2 节。2] (以及原始论文 [3])。

引理 3.2. 令 $x \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$，并记 $X = \mathrm{mat}(x) \in \mathbb{M}_d$，使得 $x = \mathrm{vec}(X)$。那么对于所有酉矩阵 U、$V \in \mathbb{M}_d$，

$$\langle \omega, (U \otimes V)x \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}\big(VXU^{\mathsf{T}}\big). \tag{15}$$

因此，

$$\max_{U,V \text{ unitary}} |\langle \omega, (U \otimes V)x \rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}} \|X\|_1, \tag{16}$$

其中 $\|\cdot\|_1$ 表示 *Schatten* 1-范数（迹范数）。

证明。 利用（2），结合 $A = V$和 $B = U^{\mathsf{T}}$ 可得

$$(U \otimes V)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(VXU^{\mathsf{T}}).$$

此外 $\omega = \frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{vec}(I_d)$ 且

$$\langle \mathrm{vec}(A), \mathrm{vec}(B) \rangle = \mathrm{vec}(A)^* \mathrm{vec}(B) = \sum_{i,j} \overline{a_{ij}} b_{ij} = \mathrm{Tr}(A^*B).$$

Thus

$$\langle \omega, (U \otimes V)x \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \langle \mathrm{vec}(I_d), \mathrm{vec}(VXU^{\mathsf{T}}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \mathrm{Tr}(VXU^{\mathsf{T}}),$$

证明（第15卷）。最后，由于 U 遍历酉矩阵时， U^{T}也遍历酉矩阵，因此由迹范数对偶性（冯·诺伊曼迹不等式）可得

$$\max_{U,V \text{ unitary}} |\mathrm{Tr}(VXU^{\mathsf{T}})| = \|X\|_1,$$

从而得到（第16卷）。 □

引理 3.3。 固定 $d \geq 2$、$k \in \{1, \ldots, d-1\}$ 和 $\theta \in [0, 1)$ 。令 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_d \geq 0$ 满足

$$\sigma_{k+2} = \cdots = \sigma_d = 0, \qquad \sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j^2 = 1.$$

若 $\theta = 0$，则假设 $\sigma_{k+1} = 0$ （因此 $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 = 1$）。若 $\theta > 0$，则假设

$$\sigma_{k+1} \leq \frac{\theta}{k} \sum_{j=1}^{k} \sigma_j. \tag{17}$$

Then

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j \leq \frac{k+\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}. \tag{18}$$

此外，当且仅当等号成立

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{k+\theta^2}} \qquad \textit{and} \qquad \sigma_{k+1} = \frac{\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}$$

（约定当 $\theta = 0$ 时 $\sigma_{k+1} = 0$）。

证明。令

$$S := \sum_{j=1}^{k} \sigma_j, \qquad b := \sigma_{k+1}.$$

于是 $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 = 1 - b^2$ 根据归一化条件 $\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j^2 = 1$。

步骤 *1*：的柯西–施瓦茨界。根据柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$S^2 = \Big(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \Big)^2 \le k \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 = k(1 - b^2). \tag{19}$$

因此

$$S \le \sqrt{k(1 - b^2)}. \tag{20}$$

此外，当且仅当19) 中等号成立

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_k. \tag{21}$$

步骤 *2*：情形 $\theta = 0$。在此情形下，约束条件（17）变为 $\sigma_{k+1} \le 0$，因此 $b = \sigma_{k+1} = 0$。由（20）可得 $S \le \sqrt{k}$，因此

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j = S \le \sqrt{k} = \frac{k}{\sqrt{k}} = \frac{k + \theta}{\sqrt{k + \theta^2}},$$

即（18）。当且仅当（21）成立且 $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 = 1$，也就是说 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k = 1/\sqrt{k}$ 且 $b = 0$。

步骤 *3*：设 $\theta \in (0,\ 1)$。比值约束（17）给出 $b \le \frac{\theta}{k} S$。结合（20）可得

$$b \le \frac{\theta}{k} \sqrt{k(1 - b^2)} = \frac{\theta}{\sqrt{k}} \sqrt{1 - b^2}.$$

由于两边均非负，我们可以平方，得到

$$b^2 \le \frac{\theta^2}{k} (1 - b^2).$$

重新整理可得

$$\Big(1 + \frac{\theta^2}{k} \Big) b^2 \le \frac{\theta^2}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad b^2 \le \frac{\theta^2}{k + \theta^2}.$$

等价地，

$$0 \le b \le b_{\max} := \frac{\theta}{\sqrt{k + \theta^2}}. \tag{22}$$

步骤 *4*：化为单变量最大化。我们希望对其进行界定

$$\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j = S + b.$$

对每个固定的 b，在约束条件 $\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2 = 1-b^2$ 下，当且仅当 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k$ 时，量 $S=\sum_{j=1}^{k}\sigma_j$ 取得最大值（由柯西–施瓦茨不等式取等号可知），其最大值为 $\sqrt{k}$（$1-b^2$）。因此，对于每个可行的 $(\sigma_1、\ldots\ldots、\sigma_{k+1})$，

$$S+b \le \sqrt{k(1-b^2)}+b =: f(b). \tag{23}$$

此外，根据（22），我们只需考虑 $b\in[0,b_{\max}]$。

步骤 *5*：证明 f 在 $[0,b_{\max}]$上递增。计算，当 $b\in(0,\ 1)$ 时，

$$f'(b)=\frac{d}{db}\big(\sqrt{k(1-b^2)}+b\big)=-\frac{\sqrt{k}\,b}{\sqrt{1-b^2}}+1=1-\frac{\sqrt{k}\,b}{\sqrt{1-b^2}}.$$

因此，$f'(b)\ge 0$ 等价于

$$\frac{\sqrt{k}\,b}{\sqrt{1-b^2}}\le 1 \quad\Longleftrightarrow\quad kb^2\le 1-b^2 \quad\Longleftrightarrow\quad b^2\le\frac{1}{k+1}.$$

现在，由于 $\theta\in(0,1)$，我们有 $\theta^2\le 1$，因此

$$b_{\max}^2=\frac{\theta^2}{k+\theta^2}\le\frac{1}{k+1}.$$

（实际上，$\theta^2\le 1$ 当且仅当 $\frac{\theta^2}{k+\theta^2}\le\frac{1}{k+1}$）。因此，对于所有 $b\in[0,b_{\max}]$，$f'(b)\ge 0$，即 f 在此区间上递增。

$f(b)$在 $[0,b_{\max}]$ 上的最大值在 $b=b_{\max}$处取得。

步骤 *6*：计算 $f(b_{\max})$。利用 $b_{\max}=\theta/\sqrt{k+\theta^2}$，我们计算得

$$1-b_{\max}^2=1-\frac{\theta^2}{k+\theta^2}=\frac{k}{k+\theta^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} f(b_{\max}) &= \sqrt{k(1-b_{\max}^2)}+b_{\max}\\ &= \sqrt{k\cdot\frac{k}{k+\theta^2}}+\frac{\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}\\ &= \frac{k+\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}. \end{aligned}$$

结合（23）可得

$$\sum_{j=1}^{k+1}\sigma_j = S+b\le f(b)\le f(b_{\max})=\frac{k+\theta}{\sqrt{k+\theta^2}},$$

这恰好就是（18）。

步骤 *7*：等号成立条件。假设（18）中等号成立。回溯证明过程可知，以下各处都必须取等号：

（1）柯西–施瓦茨不等式中的等号（19），因此 $\sigma_1=\cdots=\sigma_k=:\ a$；（2）比值约束取紧，即 $b=(\theta/k)\,S$；（3）在端点 $b=b_{\max}$ 处取到（等价地，界（22）取紧）。

由 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k = a$，我们有 $S = ka$，而取紧的比值约束给出 $b = \theta a$。归一化 $\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j^2 = 1$ 变为

$$ka^2 + (\theta a)^2 = (k + \theta^2)a^2 = 1,$$

因此 $a = 1/\sqrt{k+\theta^2}$ 和 $b = \theta/\sqrt{k+\theta^2}$，即

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{k+\theta^2}}, \qquad \sigma_{k+1} = \frac{\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}.$$

反过来，这些值满足所有假设，并使上述每个不等式都取等号，因此它们确实使（18）取等号。 □

定理 3.1 (锐 α-正性阈值，对于 Φ_t). 设 $d \geq 2$ 和 $\Phi_t : \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$ 由 (14)给出。固定 $\alpha \in [1, d]$ 并记 $k := \lfloor \alpha \rfloor$ 和 $\theta := \alpha - k \in [0, 1)$。则

$$\Phi_t \in \mathsf{P}_\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad t \;\leq\; t_\alpha^* := \frac{k+\theta^2}{(k+\theta)^2}. \tag{24}$$

等价地，

$$\lambda_\alpha(C_{\Phi_t}) \;=\; 1 - t\,\frac{(k+\theta)^2}{k+\theta^2}, \tag{25}$$

因此 Φ_t 是 α-正的，当且仅当 $\lambda_\alpha(C_{\Phi_t}) \geq 0$。

此外，该阈值是尖锐的：若 $t > t_\alpha^*$，则存在 $x \in \mathcal{V}_\alpha$，使得 $\langle x, C_{\Phi_t} x\rangle < 0$。若 $\alpha \in (k, k+1)$，可取施密特系数为 x 的

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k+\theta^2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{k+\theta^2}}}_{k \text{ times}}, \qquad \frac{\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}, \qquad 0, \ldots, 0.$$

若 $\alpha = d$，可取 $x = \omega$。

证明。令 $\omega = \frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{vec}(I_d)$。由于 $C_{\Phi_t} = I_d \otimes I_d - td\,\omega\omega^*$，对于任意单位向量 x，有

$$\langle x,\, C_{\Phi_t} x\rangle \;=\; 1 - td\,|\langle \omega, x\rangle|^2. \tag{26}$$

回顾定义（7），

$$\lambda_\alpha(C_{\Phi_t}) = \min_{x \in \mathcal{V}_\alpha} \langle x, C_{\Phi_t} x\rangle,$$

由（26）可得

$$\lambda_\alpha(C_{\Phi_t}) = \min_{x \in \mathcal{V}_\alpha} \left(1 - td\,|\langle \omega, x\rangle|^2\right) = 1 - td \max_{x \in \mathcal{V}_\alpha} |\langle \omega, x\rangle|^2 = 1 - td\, m_\alpha, \tag{27}$$

其中令

$$m_\alpha \;:=\; \max_{x \in \mathcal{V}_\alpha} |\langle \omega, x\rangle|^2.$$

因此，只需计算 m_α。

情况 *1*： $\alpha = d$。这里 $\mathcal{V}_d$ 是完整单位球面（因为 $\theta = 0$ 且定义 3.1 中的约束均为空）。根据柯西–施瓦茨不等式，我们有 $|\langle \omega,\ x\rangle| \le \|\omega\|\,\|x\| = 1$对所有单位 x均成立，且当 $x = \omega$时取等号。因此 $m_d = 1$ 从而

$$\lambda_d(C_{\Phi_t}) = 1 - td.$$

因此 $\lambda_d(C_{\Phi_t}) \ge 0$ 当且仅当 $t \le 1/d$，即（24）对 $\alpha = d$成立。尖锐性显而易见：若 $t > 1/d$，则 $\langle \omega,\ C_{\Phi_t}\omega\rangle = 1 - td < 0$。

情况 *2*： $\alpha \in [1, d)$(因此 $k := \lfloor \alpha \rfloor \in \{1, \dots, d-1\}$ 且 $\theta := \alpha - k \in [0, 1)$）。我们计算 m_α。步骤 *1*：将最大化问题化为迹范数问题。固定 $x \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 并记$X = \mathrm{mat}(x) \in \mathbb{M}_d$ 使得 $x = \mathrm{vec}(X)$。由引理 3.2,

$$\max_{U,V \text{ unitary}} |\langle \omega, (U \otimes V)x\rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}\,\|X\|_1.$$

现在注意到 $\mathcal{V}_\alpha$ 在局部酉变换下保持不变：若 $x \in \mathcal{V}_\alpha$ 和 U，V是酉矩阵，则 $(U \otimes V)x$ 具有与 x相同的施密特系数，因此 $(U \otimes V)x \in \mathcal{V}_\alpha$(根据定义 3.1）。因此,

$$\begin{aligned}\max_{y \in \mathcal{V}_\alpha} |\langle \omega, y\rangle| &= \max_{x \in \mathcal{V}_\alpha} \max_{U,V \text{ unitary}} |\langle \omega, (U \otimes V)x\rangle| \\ &= \max_{x \in \mathcal{V}_\alpha} \frac{1}{\sqrt{d}}\,\|\mathrm{mat}(x)\|_1,\end{aligned}$$

因此

$$m_\alpha = \frac{1}{d}\Big(\max_{x \in \mathcal{V}_\alpha} \|\mathrm{mat}(x)\|_1\Big)^2. \tag{28}$$

步骤 *2*：将约束 $x \in \mathcal{V}_\alpha$ 表示为奇异值。由于 mat(·) 是从 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 上的希尔伯特空间范数到 $\mathbb{M}_d$((1)) 上弗罗贝尼乌斯范数之间的等距映射，因此我们有

$$\|x\| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \|X\|_2 = 1,$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 是弗罗贝尼乌斯范数。此外，x 的施密特系数与 X的奇异值相同:

$$s_j(x) = \sigma_j(X) \qquad (j = 1, \dots, d).$$

因此，定义 $x \in \mathcal{V}_\alpha$ 3.1 中的条件 可精确转化为:

$$\sigma_{k+2}(X) = \cdots = \sigma_d(X) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j(X)^2 = \|X\|_2^2 = 1,$$

并且，当 $\theta > 0$ 时,

$$\sigma_{k+1}(X) \le \frac{\theta}{k} \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(X).$$

最后，在秩上限约束下，$\|X\|_1 = \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(X) = \sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j(X)$。

步骤 3：最大化 $\|X\|_1$，满足分数约束。根据引理3.3,

$$\|X\|_1 = \sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j(X) \;\le\; \frac{k+\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}.$$

因此（28）可得

$$m_\alpha = \frac{1}{d}\left(\frac{k+\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}\right)^2 = \frac{(k+\theta)^2}{d\,(k+\theta^2)}.$$

将其代入 $\lambda_\alpha(C_{\Phi_t}) = 1 - td\,m_\alpha$，得到

$$\lambda_\alpha(C_{\Phi_t}) = 1 - td\cdot\frac{(k+\theta)^2}{d\,(k+\theta^2)} = 1 - t\,\frac{(k+\theta)^2}{k+\theta^2},$$

即（25）。特别地,

$$\lambda_\alpha(C_{\Phi_t}) \ge 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t \le \frac{k+\theta^2}{(k+\theta)^2} =: t^*_\alpha,$$

从而证明了（24）对 $\alpha \in [1, d)$ 也成立。

尖锐性。先假设 $\alpha \in (k,\ k+1)$（即 $\theta \in (0,\ 1)$）。令 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k = \frac{1}{\sqrt{k+\theta^2}}$和$\sigma_{k+1} = \frac{\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}$并设

$$X := \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{M}_d, \qquad x := \mathrm{vec}(X).$$

那么 $\|x\| = \|X\|_2 = 1$，X 的奇异值恰好是上述的 σ_j，且比值约束取等号，因此 $x \in \mathcal{V}_\alpha$。此外，对于这个对角正 X，我们有 $\|X\|_1 = \mathrm{Tr}(X) = \sum_{j=1}^{k+1}\sigma_j$，并且

$$\langle \omega, x\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\mathrm{Tr}(X) = \frac{1}{\sqrt{d}}\|X\|_1,$$

所以 $|\langle \omega,\ x\rangle|^2 = m_\alpha$ (事实上，$\|X\|_1$ 在引理 3.3 中取得最大值)。因此，由式 (26),

$$\langle x, C_{\Phi_t} x\rangle = 1 - td\,m_\alpha < 0 \qquad \text{whenever } t > t^*_\alpha.$$

这证明了 $\alpha \in (k,\ k+1)$ 的尖锐性。对于 $\alpha = d$，其尖锐性已在情况 1 中证明（使用了 $x = \omega$）。若 $\theta = 0$（即 $\alpha = k < d$），取 $X = \mathrm{diag}(1/\sqrt{k},\ \ldots\ldots,\ 1/\sqrt{k},\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$ 和$x = \mathrm{vec}(X)$。于是 $x \in \mathcal{V}_k$、$\|X\|_1 = \sqrt{k}$，故 $|\langle \omega,\ x\rangle|^2 = k/d = m_k$，从而当 $t > 1/k$ 时 $\langle x,\ C_{\Phi_t} x\rangle = 1 - td\,m_k = 1 - tk < 0$。

□

3.3. **分数 Kraus 刻画 α-超正映射**。分数阶框架的一项核心优势是，映射上的对偶锥具有内在的 Kraus 型描述。在整数情形下，k-超正性等价于存在一个 Kraus 分解，其中 Kraus 算子的秩至多为 k。本小节的主要结果表明，分数阶层级 α 也有一个精确的类似结论：经典的秩上界被 α-可容许性所依据的同一奇异值约束所取代。

首先注意，我们也可以为矩阵 $X \in \mathbb{M}_{m,\ n}$ 定义 α-可容许性。因为 $X = \mathrm{mat}(x)$ 的奇异值恰好是 $x = \mathrm{Vec}(X)$ 的施密特系数。

定义 3.4 (α-可容矩阵)。 固定 $\alpha \in [1, d]$，记作 $k := \lfloor \alpha \rfloor$, $\theta := \alpha - k \in [0, 1)$，并令 $r := \lceil \alpha \rceil$。若矩阵 $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ 满足以下条件，则称其为 α-可容的:

(i) *(秩上限)* $\sigma_j(A) = 0$ 对所有 $j \geq r + 1$ *(等价地，* $\mathrm{rank}(A) \leq r$*);*(ii) *(归一化比值)* 若 $\theta > 0$，则

$$\sigma_{k+1}(A) \ \leq \ \frac{\theta}{k} \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(A). \tag{29}$$

我们用 $\mathfrak{A}_\alpha$ 表示所有 α-可容矩阵组成的集合。

备注 3.4。 若 $A \neq 0$ 且 $\mathrm{rank}(A) \leq k + 1$，则 (29) 等价于

$$\frac{\|A\|_1}{\|A\|_{(k)}} \leq 1 + \frac{\theta}{k},$$

其中 $\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} \sigma_j(A)$ 是 *Schatten* 1-范数（核范数），而 $\|A\|_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j(A)$ 是 *Ky Fan* k-范数。（对于 $A = 0$，(29) 显然成立。）

定理 3.2 (α-超正映射的分数 Kraus 刻画)。固定 $\alpha \in [1, d]$，并写作 $\alpha = k + \theta$，其中 $k = \lfloor \alpha \rfloor$ 且 $\theta \in [0, 1)$。设 $\Phi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ 为线性映射。以下条件等价:

(i) $\Phi \in \mathrm{SP}_\alpha$，即 $C_\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$。(ii) 存在 $N \in$ 个 N 以及矩阵 A_1、…、$A_N \in \mathfrak{A}_\alpha$，使得

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{N} A_i X A_i^* \qquad \textit{for all } X \in \mathbb{M}_n. \tag{30}$$

(iii) T存在 $N \in$ 个 N、向量 ψ_1、…、$\psi_N \in \mathcal{V}_\alpha$ 以及标量 t_1、…、$t_N > 0$，使得

$$C_\Phi = \sum_{i=1}^{N} t_i \, \psi_i \psi_i^*. \tag{31}$$

此外，在(iii) 中，可以取 $N \leq (nm)^2$。

特别地，SP_α 恰好由 *Kraus* 算子生成的完全正映射构成，其奇异值满足分数约束 (29)。

证明。 (iii)⇒(i) 根据 K_α 的定义可立即得出。

(ii)⇒(iii) 假设 (30)，且 $A_i \in \mathfrak{A}_\alpha$。根据 Choi–Jamio-łkowski 对应关系，这是标准用法:

$$C_\Phi = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vec}(A_i)\, \mathrm{vec}(A_i)^*.$$

对于每个 i 满足 $A_i \neq 0$ 的，令 $\psi_i := \mathrm{vec}(A_i)/\|\mathrm{vec}(A_i)\|$ 以及 $t_i := \|\mathrm{vec}(A_i)\|^2$。由于 $A_i \in \mathfrak{A}_\alpha$我们有 $\psi_i \in \mathcal{V}_\alpha$。由此得到 (31)。

(i)⇒(iii) 令 $\mathcal{S}_\alpha := \{\psi\psi^* : \psi \in \mathcal{V}_\alpha\}$。根据推论 3.1，$\mathsf{K}_\alpha = \text{锥}(\mathcal{S}_\alpha)$。因此 $C_\Phi \in \mathsf{K}_\alpha$表示 $C_\Phi = t\rho$ 存在某个 $t := \text{迹}(C_\Phi) \geq 0$ 以及某个

$$\rho := \frac{1}{\mathrm{Tr}(C_\Phi)}\, C_\Phi \in \mathrm{conv}(\mathcal{S}_\alpha),$$

若 $C_\Phi = 0$，则我们将 ρ 任意解释。由于 $\mathcal{S}_\alpha$ 的每个元素的迹均为 1，凸集 $\mathrm{conv}(\mathcal{S}_\alpha)$ 包含于仿射超平面

$$\mathcal{H} := \{H \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}} : \mathrm{Tr}(H) = 1\},$$

其（实）维数为 $(nm)^2 - 1$。根据 ′中的 Carathéodory 定理 $\mathcal{H}$ [1, 定理 1.3] (另见 [14, 第 17]节)，我们可以写成

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} p_i\, \psi_i\psi_i^* \quad \text{with} \quad N \leq (nm)^2,\ \ p_i \geq 0,\ \sum_i p_i = 1,\ \ \psi_i \in \mathcal{V}_\alpha.$$

因此

$$C_\Phi = \sum_{i=1}^{N} (tp_i)\, \psi_i\psi_i^*,$$

去掉零系数后，即为 (31)。

(iii)⇒(ii) 假设（31）。对于每个 i ，选择 $A_i \in \mathbb{M}_{m,\,n}$ 使得 $\mathrm{vec}(A_i) = \sqrt{t_i}\,\psi_i$ 且 $A_i \in \mathfrak{A}_\alpha$ 由 $\psi_i \in \mathcal{V}_\alpha$给出。定义 $\Psi : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_m$ 由 $\Psi(X) = \sum_{i=1}^{N} A_i X A_i^*$给出。计算 Ψ的 Choi矩阵，得到

$$C_\Psi = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{vec}(A_i)\,\mathrm{vec}(A_i)^* = \sum_{i=1}^{N} t_i\, \psi_i\psi_i^* = C_\Phi.$$

由于 $\Phi \mapsto C_\Phi$ 是单射，我们得出 $\Psi = \Phi$，因此（30）成立。

□

注 3.5（整数恢复与端点 $\alpha = d$）。如果 $\alpha = k$ 是整数，那么$\theta = 0$ 且（29）化简为 $\sigma_{k+1}(A) = 0$，即$\mathrm{rank}(A) \leq k$。因此，定理3.2 恢复了 k-超正映射的经典刻画。

如果 $\alpha = d$ （因此 $k = d$ 和 $\theta = 0$），那么 $\mathfrak{A}_d = \mathbb{M}_{m,\,n}$ 且 SP_d 与完全正映射的整个锥相同（等价地，$C_\Phi \geq 0$）。

4. 显式示例与阈值

本节展示了分数阶锥如何在对称情形下导出具体且可验证的判据。我们首先引入临界指标 $\mathcal{FSN}(\rho)$ 和 $\tau(\Phi)$，以及极值二次型 $\lambda_\alpha(\cdot)$ $\mu_\alpha(\cdot)$；它们构成了抽象锥理论的主要计算接口。接着，我们分析各向同性二维切片 $\mathrm{span}\{I, P_\omega\}$，在该切片中，属于 K_α 可化为明确的线性约束，并由此得到

闭式公式。最后，我们通过其 Choi矩阵，将这些切片计算与典范去极化射线 $\Phi_t(X) = \mathrm{Tr}(X)I_d - tX$ 联系起来，并推导出相应的稳定性指数行为，而无需重复完整的阈值证明。

4.1. 临界指标与极值二次型。 分数滤过 $(\mathsf{K}_\alpha)_{\alpha\in[1,d]}$和 $(\mathsf{P}_\alpha)_{\alpha\in[1,d]}$ 诱导出自然的临界指标，将参数 α 转化为数值不变量。这些指标是抽象锥理论与具体计算之间的主要接口。

定义 4.1 （分数施密特指标）。 对于非零的 $\rho \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^+$，其中 $d := \min\{n, m\}$，定义

$$\mathcal{FSN}(\rho) \;:=\; \inf\big\{\alpha \in [1, d] :\; \rho \in \mathsf{K}_\alpha\big\}. \tag{32}$$

定义 4.2 （稳定性指数）。 对于厄米保持映射 $\Phi \in \mathsf{P}_1$，其中 $d := \min\{n, m\}$，定义

$$\tau(\Phi) \;:=\; \sup\big\{\alpha \in [1, d] :\; \Phi \in \mathsf{P}_\alpha\big\}. \tag{33}$$

这给出了 Φ 保持 α-正性的最大分数层级。

注 4.1。 两个指标在自然意义下均为尺度不变：$\mathcal{FSN}(c\rho) = \mathcal{FSN}(\rho)$，且 $\tau(c\Phi) = \tau(\Phi)$ 对所有 $c > 0$ 均成立（因为每个 P_α 都是一个锥）。

我们将反复使用 $\mathcal{V}_\alpha$上的极值二次型。回顾（见（7）和命题 3.1），对于 $W \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^{\mathrm{h}}$,

$$\lambda_\alpha(W) := \min\{\langle\psi, W\psi\rangle :\; \psi \in \mathcal{V}_\alpha\}, \qquad W \in \mathsf{BP}_\alpha \iff \lambda_\alpha(W) \geq 0,$$

并且我们还定义

$$\mu_\alpha(W) := \max\{\langle\psi, W\psi\rangle :\; \psi \in \mathcal{V}_\alpha\} = -\lambda_\alpha(-W), \tag{34}$$

由于 $\mathcal{V}_\alpha$ 是紧致的，该值存在。

命题 4.1 (整数层级的恢复)。 设 $k \in \{1, \ldots, d\}$。

(i) 对于 $\rho \in (\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m)^+$,

$$\rho \in \mathsf{K}_k \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{FSN}(\rho) \leq k.$$

因此,

$$\min\big\{\ell \in \{1, \ldots, d\} :\; \rho \in \mathsf{K}_\ell\big\} = \big\lceil \mathcal{FSN}(\rho) \big\rceil.$$

(ii) 对于厄米保持映射 Φ,

$$\Phi \in \mathsf{P}_k \quad\Longleftrightarrow\quad \tau(\Phi) \geq k.$$

证明。 这两个结论直接由单调性 $\mathsf{K}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{K}_\alpha \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{K}_d$ 以及 $\mathsf{P}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathsf{P}_\alpha \supseteq \cdots \supseteq \mathsf{P}_d$, 连同定义（32）–（33）得出。 □

4.2. 秩一扰动切片上的精确分数阶剖面。 现在我们给出一个闭式应用，说明分数阶参数 α 如何将经典的阶梯式阈值解析为连续剖面。整个计算完全是有限维的，并且在由恒等算子和秩一投影生成的二维实子空间 $\mathrm{span}\{I, P_\omega\} \subset \mathbb{M}_{d^2}$内进行。

设定：在 $\mathsf{C}^d \otimes \mathsf{C}^d$ 上取二维切片。 固定 $d \geq 2$ ， 令 $\{e_i\}_{i=1}^d$ 为 C^d的标准基。定义

$$\omega \;:=\; \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} e_i \otimes e_i, \qquad P_\omega \;:=\; \omega\omega^* \in \mathbb{M}_{d^2}. \tag{35}$$

考虑归一化的半正定族

$$\rho_F \;:=\; \frac{1-F}{d^2-1}\,(I - P_\omega) \;+\; F\,P_\omega, \qquad 0 \leq F \leq 1, \tag{36}$$

使得 $\mathrm{Tr}(\rho_F) = 1$ 且 $\mathrm{Tr}(P_\omega \rho_F) = F$。

在 整数层级 $\alpha = k$上，族 (36) 在切片张成空间 $\{I, P_\omega\}$上呈现出明确的阶跃阈值：根据 Terhal–Horodecki 的经典计算（参见 [19, 定理 2]），有

$$\rho_F \in \mathsf{K}_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad F \leq \frac{k}{d}, \qquad k \in \{1, \ldots, d\}. \tag{37}$$

因此，在这个秩一扰动切片上，整数层级 $\{\mathsf{K}_k\}_{k=1}^d$ 给出了一个分段的隶属规则，其断点位于 $F = k/d$。我们的目标是计算 (分数阶精化，即确定一个显式函数 37) f_d（α），使得对每个$\alpha \in [1, d]$,

$$\rho_F \in \mathsf{K}_\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad F \leq f_d(\alpha),$$

其中 $f_d(k) = k/d$ 在整数处取值，并在相邻整数阈值之间进行连续插值。

引理 4.1. 固定 $d \geq 2$ 并令 $\omega \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 和 $P_\omega = \omega\omega^*$ 如 (35)中所示。固定 $\alpha \in [1, d]$并设 $k := \lfloor \alpha \rfloor$， $\theta := \alpha - k \in [0, 1)$，以及 $r := \lceil \alpha \rceil$。则

$$\mu_\alpha(P_\omega) \;=\; \max_{\psi \in \mathcal{V}_\alpha} \langle \psi,\, P_\omega \psi \rangle \;=\; \frac{(k+\theta)^2}{d\,(k+\theta^2)}. \tag{38}$$

此外， 最大值由一个向量 $\psi \in \mathcal{V}_\alpha$ 取得，其施密特系数满足

$$s_1 = \cdots = s_k = \frac{1}{\sqrt{k+\theta^2}}, \qquad s_{k+1} = \frac{\theta}{\sqrt{k+\theta^2}}, \qquad s_j = 0 \;\; (j \geq k+2),$$

（约定 $s_{k+1} = 0$ 当 $\theta = 0$，并且当 $\alpha = d$ 时可以取$\psi = \omega$。）

证明。若 $\alpha = d$，则 $k = d$、$\theta = 0$，而且 $\mathcal{V}_d$ 是 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 的完整单位球面。因此

$$\mu_d(P_\omega) = \max_{\|\psi\|=1} \langle \psi, P_\omega \psi \rangle = \|P_\omega\| = 1,$$

且最大值在 $\psi = \omega$ 处取得。另一方面，式（38）的右侧等于 $\frac{d^2}{d \cdot d} = 1$，因此式（38）成立。 —

若 $\alpha \in [1, d)$，则 $k = \lfloor \alpha \rfloor \in \{1, \dots, d-1\}$ 和 $r = k + 1$。设 $\psi \in \mathcal{V}_\alpha$ 为一个单位向量。由于 $\mathcal{V}_\alpha$ 在局部酉变换下保持不变，我们可以施加适当的酉矩阵 $U, V \in \mathbb{M}_d$，使得在定义 ω的基下，$(U \otimes V)\psi$ 呈施密特对角形式。由于对 ψ和 ω同时施加相同的局部酉变换不会改变 $\langle \psi, P_\omega \psi \rangle$（并且 ω本身在 $U \otimes U$下保持不变），因此不失一般性，我们可以假设

$$\psi = \sum_{j=1}^{r} s_j \, e_j \otimes e_j, \qquad s_1 \geq \cdots \geq s_r \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{r} s_j^2 = 1,$$

其中 $r = k + 1$ 且 $s_j = 0$，对 $j \geq r + 1$成立。于是

$$\langle \psi, P_\omega \psi \rangle = |\langle \omega, \psi \rangle|^2 = \frac{1}{d} \Big(\sum_{j=1}^{r} s_j \Big)^2 = \frac{1}{d} \Big(\sum_{j=1}^{k+1} s_j \Big)^2.$$

令 $S := \sum_{j=1}^{k} s_j$ 以及 $b := s_{k+1}$。若 $\theta > 0$，则 $\mathcal{V}_\alpha$ 的定义约束给出 $b \leq (\theta/k) S$。（若 $\theta = 0$，则 $r = k$，从而有 $b = 0$；等价地，同一不等式对 $b = 0$ 也成立。）因此，问题归结为在以下条件下最大化 $(S + b)^2$

$$\sum_{j=1}^{k} s_j^2 + b^2 = 1, \qquad b \leq \frac{\theta}{k} S \quad (\theta > 0), \qquad s_j \geq 0.$$

这正是引理 3.3（其中$\sigma_j = s_j$）中进行的标量优化：它给出了尖锐界

$$S + b = \sum_{j=1}^{k+1} s_j \;\leq\; \frac{k + \theta}{\sqrt{k + \theta^2}},$$

当且仅当 $s_1 = \cdots = s_k = 1/\sqrt{k + \theta^2}$ 且 $b = \theta / \sqrt{k + \theta^2}$（当 $\theta = 0$ 时 $b = 0$）时等号成立。因此

$$\langle \psi, P_\omega \psi \rangle = \frac{1}{d} (S + b)^2 \leq \frac{1}{d} \left(\frac{k + \theta}{\sqrt{k + \theta^2}} \right)^2 = \frac{(k + \theta)^2}{d \, (k + \theta^2)}.$$

这证明了（38）。等号成立条件给出了所述的最大化元。 □

定义轮廓函数

$$f_d(\alpha) \;:=\; \mu_\alpha(P_\omega). \tag{39}$$

为得到闭式约束，我们将范围限制在各向同性二维子空间张成空间$\{I, P_\omega\}$上，此时二次型对 $\mathcal{V}_\alpha$ 的检验可化为一个单变量优化问题。这种对称性约化将属于 K_α 转化为显式线性

不等式，涉及 $aI + bP_\omega$中的参数。下一个定理给出了由此得到的精确刻画。

定理 4.1 (切片张成空间上的精确分数阶轮廓$\{I, P_\omega\}$)。 设 $d \geq 2$，设 ρ_F 如 (36)所示，并设 $\alpha \in [1, d]$。则

$$\rho_F \in \mathsf{K}_\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad F \leq f_d(\alpha). \tag{40}$$

等价地，写作 $\alpha = k + \theta$，其中 $k = \lfloor \alpha \rfloor$ 且 $\theta \in [0, 1)$，则有

$$f_d(\alpha) = \frac{(k+\theta)^2}{d\,(k+\theta^2)}. \tag{41}$$

特别地，对于整数 $\alpha = k$，可得 $f_d(k) = k/d$，从而恢复了该切片上的经典整数阈值（参见 [19, 定理 2]）。

证明。 由引理4.1，厄米算子

$$W_\alpha \;:=\; I - \frac{1}{f_d(\alpha)}\, P_\omega \tag{42}$$

对所有 $\psi \in \mathcal{V}_\alpha$ 均满足 $\langle \psi,\ W_\alpha \psi \rangle \geq 0$，因此 $W_\alpha \in \mathsf{BP}_\alpha$。利用 $\mathrm{Tr}(P_\omega \rho_F) = F$，可得

$$\mathrm{Tr}(W_\alpha \rho_F) = 1 - \frac{F}{f_d(\alpha)}. \tag{43}$$

若 $F > f_d(\alpha)$ 则 (43) 为负，因此 $\rho_F \notin (\mathsf{BP}_\alpha)^* = \mathsf{K}_\alpha$。

反过来，假设 $F \leq f_d(\alpha)$，并令 $W \in \mathsf{BP}_\alpha$。

令 $\mathcal{T}\colon \mathbb{M}_{d^2} \to \mathbb{M}_{d^2}$ 为 Haar 平均映射

$$\mathcal{T}(X) \;:=\; \int_{\mathbb{U}(d)} (U \otimes \overline{U})^*\, X\, (U \otimes \overline{U})\, \mathrm{d}U,$$

其中 $\mathrm{d}U$ 表示 $\mathbb{U}(d)$ 上归一化的 Haar 概率测度。

令 $\overline{W} := \mathcal{T}(W)$。由于 $\mathcal{V}_\alpha$ 在局部酉变换下保持不变，我们有 $W \in \mathsf{BP}_\alpha$。

此外，$\rho_F \in$ 张成空间$\{I, P_\omega\}$ 是 $(U \otimes \overline{U})$-不变的，因此

$$\mathrm{Tr}(W \rho_F) = \mathrm{Tr}(\overline{W} \rho_F).$$

最后，一个标准事实是，$\mathcal{T}$的像恰好是二维空间张成空间$\{I, P_\omega\}$（等价地，是$\{U \otimes U$的交换子：$U \in \mathbb{U}(d)\}$），因此存在 $a,\ b \in \mathbb{R}$ 使得

$$\overline{W} = aI + bP_\omega.$$

参见，例如 [11, 例 49]。现在 $W \in \mathsf{BP}_\alpha$ 表示

$$0 \leq \langle \psi, \overline{W}\psi \rangle = a + b\,\langle \psi, P_\omega \psi \rangle \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{V}_\alpha.$$

由于 $0 \leq \langle \psi, P_\omega \psi \rangle \leq \mu_\alpha(P_\omega) = f_d(\alpha)$，这等价于 $a \geq 0$ 和 $a + b f_d(\alpha) \geq 0$（$a + bt$ 在 $t \in [0, f_d(\alpha)]$ 上的最小值在 $t = 0$ 处取得（若 $b \geq 0$），而在 $t = f_d(\alpha)$处取得（若 $b \leq 0$））。因此，

$$\mathrm{Tr}(\overline{W} \rho_F) = a + bF \geq 0 :$$

事实上，若 $b \geq 0$，则 $a \geq 0$ 给出 $a + bF \geq 0$；而若 $b \leq 0$，则 $F \leq f_d(\alpha)$ 给出$a + bF \geq a + bf_d(\alpha) \geq 0$。因此，对于所有 $W \in \overline{\mathrm{BP}}_\alpha$，$\mathrm{Tr}(W\rho_F) = \mathrm{Tr}(W\rho_F) \geq 0$，所以$\rho_F \in (\mathrm{BP}_\alpha)^* = \mathrm{K}_\alpha$。□

由此可立即得出，我们可以对切片不等式求逆，并直接用保真度参数表示各向同性态的分数施密特指标。这便得到了各向同性态上施密特数经典阶跃函数行为的闭式“分数细化”。

推论 4.1. 设 ρ_F 如 (36) 所示，并设 $f_d(\alpha)$ 由 (39)–(41)给出。则：

(i) 若 $0 \leq F \leq \frac{1}{d}$，则 $\mathcal{FSN}(\rho_F) = 1$.(ii) 若 $\frac{1}{d} < F \leq 1$，则 $\mathcal{FSN}(\rho_F)$ 是唯一的 $\alpha \in (1, d]$，使得

$$F = f_d(\alpha). \tag{44}$$

更准确地说，若 $F \in \left[\frac{k}{d}, \frac{k+1}{d}\right]$ 且 $k \in \{1, \ldots, d-1\}$，则

$$\mathcal{FSN}(\rho_F) = k + \theta(F),$$

其中 $\theta(F) \in [0, 1]$ 是下列方程的唯一解：

$$(Fd - 1)\theta^2 - 2k\theta + k(Fd - k) = 0. \tag{45}$$

等价地，对于 $F > \frac{k}{d}$（因此 $Fd - 1 > 0$），可以写作

$$\theta(F) = \frac{k - \sqrt{k^2 - k(Fd-1)(Fd-k)}}{Fd - 1}. \tag{46}$$

在端点 $F = \frac{k}{d}$ 处，有 $\theta(F) = 0$。

证明。根据定理 4.1，$\rho_F \in \mathrm{K}_\alpha$ 当且仅当 $F \leq f_d(\alpha)$。由于 K_α 关于 α单调递增，定义（32）给出

$$\mathcal{FSN}(\rho_F) = \inf\{\alpha \in [1, d] : F \leq f_d(\alpha)\}.$$

步骤 *1*：情形 $0 \leq F \leq 1/d$。我们有 $f_d(1) = 1/d$，因此 $F \leq f_d(1)$，从而$\rho_F \in \mathrm{K}_1$。根据定义，$\mathcal{FSN}(\rho_F) \geq 1$，故可得 $\mathcal{FSN}(\rho_F) = 1$。

步骤 *2*：情形 $F > 1/d$。函数 f_d 在 $[1, d]$上连续且严格递增（事实上，在每个区间 $\alpha \in [k, k+1]$ 上，它关于 $\theta = \alpha - k$递增，且 $f_d(k) = k/d$ 和$f_d(k+1) = (k+1)/d$）。因此，对每个 $F \in (1/d, 1]$ 都存在唯一的 $\alpha \in (1, d]$ 使得$F = f_d(\alpha)$。此外，由 f_d的单调性，这个唯一的 α 等于 $\mathcal{FSN}(\rho_F)$。

现在固定 $k \in \{1, \ldots, d-1\}$并假设 $F \in \left[\frac{k}{d}, \frac{k+1}{d}\right]$。记 $\alpha = k + \theta$其中 $\theta \in [0, 1]$。利用（41），方程 $F = f_d(\alpha)$ 变为

$$Fd\,(k + \theta^2) = (k + \theta)^2,$$

展开后得到（45）。解这个二次方程，得到（46），其中取负号得到 $\theta(F) \in [0,1]$。在 $F = \frac{k}{d}$ 时，方程迫使 $\theta = 0$，从而得到端点值。□

与映射阈值的兼容性（不重复）。同一个秩一投影 P_ω 也支配典范射线的 Choi 矩阵

$$\Phi_t(X) = \mathrm{Tr}(X) I_d - tX, \qquad C_{\Phi_t} = I_d \otimes I_d - td\, P_\omega. \tag{47}$$

令 $\alpha = k + \theta$，其中 $k = \lfloor \alpha \rfloor$ 和 $\theta \in [0,1)$，并设

$$t^*_\alpha := \frac{k + \theta^2}{(k+\theta)^2}. \tag{48}$$

由定理3.1可得 $\Phi_t \in \mathsf{P}_\alpha \iff t \le t^*_\alpha$。结合式（41），可得切片上的精确互反关系。

推论 4.2。对每个 $\alpha \in [1, d]$,

$$f_d(\alpha) = \frac{1}{d\, t^*_\alpha}. \tag{49}$$

特别地，沿射线 $\{\Phi_t\}_{t\in(0,1]}$，属于 P_α 与不属于该集合的分界点出现在 $t = 1/(d\, f_d(\alpha))$。

推论 4.3。固定 $d \ge 2$，并令 $\Phi_t : \mathbb{M}_d \to \mathbb{M}_d$ 为映射

$$\Phi_t(X) = \mathrm{Tr}(X) I_d - tX.$$

则稳定性指数 $\tau(\Phi_t)$ 由下式给出：

(i) 若 $t \le 0$，则 Φ_t 是完全正的，且 $\tau(\Phi_t) = d$。(ii) 若 $0 < t \le \frac{1}{d}$，则 $-\Phi_t$ 是完全正的，且 $\tau(\Phi_t) = d$。(iii) 若 $\frac{1}{d} < t < 1$，则 $\tau(\Phi_t)$ 是唯一满足以下条件的 $\alpha \in (1, d)$

$$t = t^*_\alpha, \qquad where \qquad t^*_\alpha = \frac{k+\theta^2}{(k+\theta)^2} \quad for \quad \alpha = k + \theta,\ k = \lfloor \alpha \rfloor,\ \theta \in [0,1). \tag{50}$$

更明确地说，若 $t \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ 对于某个 $k \in \{1, \dots, d-1\}$成立，则

$$\tau(\Phi_t) = k + \theta(t),$$

其中 $\theta(t) \in [0,1)$ 是下式的唯一解

$$(t-1)\theta^2 + 2tk\,\theta + (tk^2 - k) = 0. \tag{51}$$

等价地，对于 $t \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$，可以写成

$$\theta(t) = \frac{tk - \sqrt{k\big(t(k+1) - 1\big)}}{1 - t}. \tag{52}$$

在端点 $t = \frac{1}{k}$ 处，有 $\theta(t) = 0$，因此 $\tau(\Phi_{1/k}) = k$。

(iv) 如果 $t=1$，那么 $\tau(\Phi_1)=1$。

证明。 回顾定理 3.1 可知，对于 $t\geq 0$ 和 $\alpha\in[1,d]$,

$$\Phi_t\in \mathsf{P}_\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad t\leq t^*_\alpha, \qquad t^*_\alpha=\frac{k+\theta^2}{(k+\theta)^2} \ \text{ for } \alpha=k+\theta.$$

此外，对于 $t\leq 0$，Choi矩阵满足 $C_{\Phi_t}=I\otimes I+|t|d\,P_\omega\geq 0$，因此 Φ_t 是完全正的。

步骤*1*：完全正区域。 对于 $t\leq 1/d$，Choi矩阵 $C_{\Phi_t}=I\otimes I-td\,P_\omega$是半正定的，因此 Φ_t 是完全正的。特别地，对于每个$\alpha\in[1,d]$，都有 $\Phi_t\in\mathsf{P}_\alpha$，因此

$$\tau(\Phi_t)=\sup\{\alpha\in[1,d]:\Phi_t\in\mathsf{P}_\alpha\}=d,$$

从而证明 (i)–(ii)。

步骤*2*：中间区域 $1/d<t<1$。 在此区域内， Φ_t 是正的，但不是完全正的。由于 $\alpha\mapsto t^*_\alpha$ 在 $[1,d]$ 上连续且严格递减，满足$t^*_1=1$ 和 $t^*_d=1/d$，因此存在唯一的 $\alpha\in(1,\ d)$，使得 $t=t^*_\alpha$。此外，根据阈值刻画，

$$\Phi_t\in\mathsf{P}_\beta \iff t\leq t^*_\beta,$$

因此集合 $\{\beta\in[1,d]:\ \Phi_t\in\mathsf{P}_\beta\}$ 恰好是 $[1,\alpha]$，因此 $\tau(\Phi_t)=\alpha$。这证明了（第50卷）。

现在假设 $t\in(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]$其中 $k\in\{1,\dots,d-1\}$并记 $\alpha=k+\theta$其中 $\theta\in[0,1)$。方程 $t=t^*_\alpha$ 变为

$$t(k+\theta)^2=k+\theta^2,$$

展开后得到（51）。解这个二次方程得（52），所选分支是在此区间内唯一落在 $[0,1)$ 的分支。在 $t=1/k$ 处，方程迫使 $\theta=0$，因此$\tau(\Phi_{1/k})=k$。

步骤*3*：端点 $t=1$。 这里 Φ_1 是正的，但对于任何 $1+\varepsilon$，都不是 $\varepsilon>0$-正的（根据定理 3.1，因为 $t^*_{1+\varepsilon}<1$），因此 $\tau(\Phi_1)=1$。 □

注 4.2. 由于 $t^*_1=1$ 且 $t^*_{1+\theta}<1$ 对每个 $\theta>0$，定理 *3.1* 推出 $\tau(\Phi_1)=1$而 $\tau(\Phi_t)>1$ 对所有 $t<1$均成立。因此 τ 在这条典范射线上揭示了端点 Φ_1（它不会超出第一个分数层级）与每个内部点 $t<1$（它属于 $\mathsf{P}_{1+\varepsilon}$，对某个 $\varepsilon>0$成立）。

数据可用性声明。 由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

利益冲突声明。 不存在利益冲突。

伦理声明。 不适用。本研究未涉及人类参与者、个人数据或动物。

References

[1] A. Barvinok, *A Course in Convexity*, 《数学研究生教材》第54卷，美国数学会，2000年。[2] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, 《数学研究生教材》第169卷，施普林格，1997年。[3] M.-D. Choi, *Completely positive linear maps on complex matrices*, 《线性代数及其应用》第10卷（1975年），第285–290页。[4] R. A. Horn 和 C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, 剑桥大学出版社，1991年。[5] M. Giard、S.-H. Kye 和 E. Størmer, *Convex cones in mapping spaces between matrix algebras*, 《线性代数及其应用》第608卷（2021年），第248–269页。[6] M. Horodecki、P. Horodecki 和 R. Horodecki, *Separability of mixed states: necessary and sufficientconditions*, 《物理快报A辑》第223卷（1996年），第1–8页。[7] M. Horodecki、P. W. Shor 和 M. B. Ruskai, *Entanglement breaking channels*, 《数学物理评论》第15卷（2003年），第629–641页。[8] A.Jamio-lkowski, *Linear transformations which preserve trace and positive semidefinite operators*, 《数学物理报告》第3卷（1972年），第275–278页。[9] N. Johnston 和 E. Størmer, *Mapping cones are operator systems*, 《伦敦数学会通报》第44卷（2012年），第838–844页。[10] M. Kian, *A hierarchy of entanglement cones via rank-constrained C^*-convex hulls*, arXiv:2512.05560，2025年。[11] A. A. Mele, *Introduction to Haar Measure Tools in Quantum Information: A Beginner's Tutorial*, 《Quantum》第8卷（2024年），文章编号1340。[12] V. I. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, 剑桥大学出版社，2002年。[13] A. Peres, *Separability criterion for density matrices*, 《物理评论快报》第77卷（1996年），第1413–1415页。[14] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, 普林斯顿大学出版社，1970年。[15] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory*, 第2版增订版，《数学及其应用百科全书》第151卷，剑桥大学出版社，2014年。[16] -L. Skowronek、E. Størmer 和 K. ˙Zyczkowski, *Cones of positive maps and their duality relations*, 《数学物理杂志》第50卷（2009年），文章编号062106。[17] E. Størmer, *Mapping cones of positive maps*, 《斯堪的纳维亚数学》第108卷（2011年），第223–231页。[18] E. Størmer, *Positive Linear Maps of Operator Algebras*, 施普林格，2013年。[19] B. M. Terhal 和 P. Horodecki, *A Schmidt number for density matrices*, 《物理评论A辑》第61卷（2000年），文章编号040301。[20] J. Watrous, *The Theory of Quantum Information*, 剑桥大学出版社，2018年。

[1]Department of Mathematics, University of Bojnord, P. O. Box 1339, Bojnord 94531, Iran
Email address: kian@ub.ac.ir