Hopf 代数上同调维数的幺半群不变性：有限情形

JULIEN BICHON

Abstract. Ren 和 Zhu 最近关于 Hopf 代数上模的 Gorenstein 投射维数的研究带来了一个推论：若 A 和 B 是具有双射反演的 Hopf 代数，其余模的线性张量范畴等价，且二者的整体维数均有限，那么它们的整体维数相同。在本文中，我们不借助 Gorenstein 投射维数，直接证明这一结果，并指出可以去掉反拟双射这一假设。

arXiv:2602.12731v1 [math.KT] 13 Feb 2026

1. introduction

以下问题涉及一个经典的一般性问题：代数的哪些性质（环论性质、同调性质……）在“变形”下得以保留？该问题最初由 [4] 提出：

问题 1.1. 若 A 和 B 是余模的线性张量范畴等价的 Hopf 代数，是否有 gldim(A) = gldim(B)?

在取得若干积极的部分结果之后，[14, 5], R. Zhu [16]以及 W. Ren 和 R. Zhu [10]近期的工作给出了明确的答案。首先，Zhu [16] 通过举出满足$\mathcal{M}^A \simeq^{\otimes} \mathcal{M}^B$ 的 Hopf 代数 A、B （这是我们用来表示 A 和 B 具有等价的线性张量范畴的余模的符号），并且 gldim(A) $= 1$ 而 gldim(B) $= \infty$，证明了问题 1.1 的答案一般是否定的。那么接下来的问题是：如果假设两个整体维数都是有限的，是否仍然存在反例? Ren 和 Zhu 的论文 [10] 研究了 Hopf 代数上模的 Gorenstein 投射维数，并得出了以下积极结论：

定理 1.2. 设 A、B 为具有双射反演的 Hopf 代数，且满足 $\mathcal{M}^A \simeq^{\otimes} \mathcal{M}^B$。若 gldim($A$) 和 gldim($B$) 有限，则 gldim($A$) = gldim($B$)。

事实上，[10, 定理 3.2]证明了：若 A、B 具有双射反拟，且满足 $\mathcal{M}^A \simeq^{\otimes} \mathcal{M}^B$，则 A 与 B 的 Gorenstein整体维数相同。因此，鉴于当代数的整体维数有限时，它与 Gorenstein整体维数相同，[9], 定理 1.2 得证。

本文旨在给出定理 1.2 的一种证明，该证明不使用也不提及 Gorenstein 投射维数。我们还注意到，可以去掉反拟双射这一假设。

全文中，我们都在固定的基域 k上进行讨论，并假设读者熟悉 Hopf 代数理论；本文将使用其中一些标准记号。

2. The key result

我们先给出一个一般性结果：在某些假设下，函子保持投射维数不变。按照 [7], 若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是范畴，且 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是函子，记号 $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon G$ 表示 G 是

2010年数学主题分类。16T05，16E40，16E10。1

F的右伴随。此外，按照 [7], 若 $\mathcal{S}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$中对象的一个类，记号 add($\mathcal{S}$)表示 $\mathcal{C}$ 的全子范畴，其对象是 $\mathcal{S}$ 中对象的有限个直和项的直和（因此，如果 $\mathcal{S}$ 对直和封闭，那么 add($\mathcal{S}$)就只由 $\mathcal{S}$中对象的直和项组成）。记号 Proj($\mathcal{C}$)表示 $\mathcal{C}$的投射对象类。

下面的结果可由 [7, 命题 3.7] 直接推出（若再假设下文的函子 F 是忠实的），但我们给出一个不使用 Gorenstein 投射维数的证明。

命题 2.1. 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是有足够多投射对象的阿贝尔范畴，且 $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}\colon G$ 是一对伴随函子。假设 F 和 G 是正合的，且 add(G(Proj($\mathcal{D}$))) $=$ Proj($\mathcal{C}$)。那么，对于 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 X，若 pd$_{\mathcal{C}}(X)$ 有限，则 pd$_{\mathcal{C}}(X)$ $=$ pd$_{\mathcal{D}}(F(X))$。

证明。由于 G是正合的，且 F 是 G的左伴随，经典论证表明 F保持投射对象；又由于 F 是正合的，容易得到，对于 $\mathcal{C}$中的任意对象 X，都有 pd$_{\mathcal{D}}(F(X))$ $\leq$ pd$_{\mathcal{C}}(X)$。还要注意，根据 [1, 推论 1], ，对于 $\mathcal{D}$中的任意对象 Q,

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{D}}(F(X),Q) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{C}}(X,G(Q))$$

这也证明了 pd$_{\mathcal{D}}(F(X))$ $\leq$ pd$_{\mathcal{C}}(X)$ 。现在假设 pd$_{\mathcal{C}}(X)$ $= m$ 是有限的。利用长 Ext$^*_{\mathcal{C}}$ 正合序列的经典论证表明，存在一个投射对象 P，属于 $\mathcal{C}$，使得 Ext$^m_{\mathcal{C}}(X,P)$ $\neq \{0\}$。最后一个假设保证存在 Q一个投射对象，属于 $\mathcal{D}$，以及一个对象 P'，属于 $\mathcal{C}$，使得 $G(Q)$ $\simeq P\oplus P'$。因此我们有

$$\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{D}}(F(X)\ Q) \simeq \mathrm{Ext}^m_{\mathcal{C}}(X,G(Q)) \simeq \mathrm{Ext}^m_{\mathcal{C}}(X,P\oplus P') \simeq \mathrm{Ext}^m_{\mathcal{C}}(X,P)\oplus \mathrm{Ext}^m_{\mathcal{C}}(X,P') \neq \{0\}$$

这表明 pd$_{\mathcal{D}}(F(X))$ $\geq m =$ pd$_{\mathcal{C}}(X)$，并完成了证明。 □

3. Cohomological dimension of Hopf-Galois objects

现在我们给出定理 1.2 的证明，采用一种如今已成惯例的思路，见[15, 14, 5], ；该思路通过比较 Hopf 代数与其 Hopf-Galois 对象的上同调维数，并利用问题 1.1 中的幺半等价总是源自双伽罗瓦对象这一事实 [11]。

设 A 是一个 Hopf 代数， R 是一个左（分别地，右） A-余模代数。回忆一下, *canonical functor associated to* R 是如下函子

$$\begin{aligned} F^l_R : {}_A\mathcal{M} &\longrightarrow {}_R\mathcal{M}_R \qquad (\text{resp. } F^r_R : \mathcal{M}_A \longrightarrow {}_R\mathcal{M}_R \\ V &\longmapsto V\odot R \qquad\qquad\qquad\quad V \longmapsto R\odot V) \end{aligned}$$

其中 $V\odot R$（分别地， $R\odot V$）作为向量空间为 $V\otimes R$（分别地， $R\otimes V$），并具有由下式给出的 R-双模结构

$$x\cdot(v\otimes y)\cdot z = x_{(-1)}\cdot v\otimes x_{(0)}yz, \quad x,y,z\in R,\ v\in V$$
$$(\text{resp. } x\cdot(y\otimes v)\cdot z = xyz_{(0)}\otimes v\cdot z_{(1)} \quad x,y,z\in R,\ v\in V)$$

若 R 是左（分别为右） A-余模代数，且 R 非零，则称其为左（分别为右） A-伽罗瓦对象, 若规范映射 亚洲国产

$$\begin{aligned} \mathrm{can}_l : R\otimes R &\longrightarrow A\otimes R \qquad (\text{resp. } \mathrm{can}_r : R\otimes R \longrightarrow R\otimes A \\ x\otimes y &\longmapsto x_{(-1)}\otimes x_{(0)}y, \qquad\qquad x\otimes y \longmapsto xy_{(0)}\otimes y_{(1)},) \end{aligned}$$

是双射。关于 Hopf-Galois 对象理论的一般概述，参见 [12] 。

对于左（分别为右） A-伽罗瓦对象 R，映射 κ_l： $A \to R \otimes R$ 由$\kappa_l(a) = \mathsf{can}_l^{-1}(a \otimes 1)$（分别为 κ_r: $A \to R \otimes R$由 $\kappa_r(a) = \mathsf{can}_r^{-1}(1 \otimes a)$）定义，进而确定一个代数映射 $A \to R \otimes R^{\mathrm{op}}$ （分别为 $A \to R^{\mathrm{op}} \otimes R$）。对此我们采用 Sweedler 型记号 $\kappa_l(a) = a^{[1]} \otimes a^{[2]}$ （分别为 $\kappa_r(a) = a^{\langle 1\rangle} \otimes a^{\langle 2\rangle}$）。上述代数映射按通常方式定义了限制函子

$$\kappa_{l,*} : {}_R\mathcal{M}_R \to {}_A\mathcal{M}, \quad (\text{resp. } \kappa_{r,*} : {}_R\mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_A,)$$

将一个 R-双模 M 对应到左（分别为右） A-模 $\kappa_{l,*}(M)$（分别为 $\kappa_{r,*}(M)$），其底层向量空间为 M，左（分别为右） A-作用称为 Miyashita-Ulbrich 作用，定义为 $a \cdot x = a^{[1]}.x.a^{[2]}$ （分别为 $x \cdot a = a^{\langle 1\rangle}.x.a^{\langle 2\rangle}$）。

命题 3.1. 设 A 为一个 Hopf 代数，且 R 为一个左（分别为右） A-伽罗瓦对象。则

$$F_R^l : {}_A\mathcal{M} \leftrightarrows {}_R\mathcal{M}_R : \kappa_{l,*} \quad (resp.\ F_R^r : \mathcal{M}_A \leftrightarrows {}_R\mathcal{M}_R : \kappa_{r,*})$$

f构成一对满足命题 2.1 假设的伴随函子。

证明。众所周知， F_R^l: ${}_A\mathcal{M} \leftrightarrows {}_R\mathcal{M}_R$: $\kappa_{l,*}$ 构成一对伴随函子，其伴随的单位和余单位由以下态射给出，其中 V 是一个左 A-模，而 M 是一个 R-双模

$$\begin{aligned} \eta_V : V &\longmapsto \kappa_{l,*}(V \odot R) & \varepsilon_M : \kappa_{l,*}(M) \odot R &\to M \\ v &\longmapsto v \otimes 1 & m \otimes x &\longmapsto m \cdot x \end{aligned}$$

显然， F_R^l 和$\kappa_{l,\ *}$ 是正合的。根据 [15, 引理 2.1] 及其证明，我们有一个左A-模同构

$$\begin{aligned} {}_AA \otimes R &\longrightarrow \kappa_{l,*}({}_RR \otimes R_R) \\ a \otimes x &\longmapsto a^{[1]} \otimes xa^{[2]} \end{aligned}$$

若 V 是向量空间，则上述同构很容易调整为一个 A-模同构$\kappa_{l,\ *}({}_RR \otimes V \otimes R_R) \simeq {}_AA \otimes (V \otimes R)$，使得$\kappa_{l,\ *}$ 将自由 R-双模变为自由 A-模，从而将投射 R-双模变为投射 A-模：我们有$\kappa_{l,\ *}(\mathsf{Proj}({}_R\mathcal{M}_R)) \subset \mathsf{Proj}({}_A\mathcal{M})$。一个自由 A-模 ${}_AA \otimes V$是自由A-模 ${}_AA \otimes (V \otimes R) \simeq \kappa_{l,\ *}({}_RR \otimes V \otimes R_R)$的直和项，因此属于 $\mathsf{add}(\kappa_{l,\ *}(\mathsf{Proj}({}_R\mathcal{M}_R)))$。投射模本身是自由 A-模的直和项，因此我们有 $\mathsf{Proj}({}_A\mathcal{M}) \subset \mathsf{add}(\kappa_{l,\ *}(\mathsf{Proj}({}_R\mathcal{M}_R)))$，由此可得 $\mathsf{Proj}({}_A\mathcal{M}) = \mathsf{add}(\kappa_{l,\ *}(\mathsf{Proj}({}_R\mathcal{M}_R))$，如所需。

右伽罗瓦对象情形下的证明同样成立，类似地借助右 A-模同构

$$\begin{aligned} R \otimes A_A &\longrightarrow \kappa_{r,*}({}_RR \otimes R_R) \\ x \otimes a &\longmapsto a^{\langle 1\rangle}x \otimes a^{\langle 2\rangle} \end{aligned}$$

其逆元可方便地借助一个余群胚 $\mathcal{C}$ 得到，该余群胚有两个对象 X、 Y，使得 $R = \mathcal{C}(X,Y)$且 $A = \mathcal{C}(Y,Y)$（见 [3], 该余群胚可通过考虑左余模上的纤维函子得到，如 [3], 所述，或通过更直接的处理得到，如 [8]所述）。在此设定下，上述态射为

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X,Y) \otimes \mathcal{C}(Y,Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(X,Y) \otimes \mathcal{C}(X,Y) \\ a^{XY} \otimes b^{YY} &\longmapsto S_{YX}(b_{(1)}^{YX})a^{XY} \otimes b_{(2)}^{XY} \end{aligned}$$

而其逆元为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(X,Y)\otimes\mathcal{C}(X,Y)&\longrightarrow\mathcal{C}(X,Y)\otimes\mathcal{C}(Y,Y)\\ a^{XY}\otimes b^{XY}&\longmapsto S_{YX}S_{XY}(b^{XY}_{(1)})a^{XY}\otimes b^{YY}_{(2)}\end{aligned}$$

通过这一构造，我们看到 $\kappa_{r,\ *}$ 会将自由的 R-双模变为自由的右 A-模，其余论证与左侧情形类似。□

现在我们可以比较 Hopf 代数及其伽罗瓦对象的上同调维数了。这里有一个众所周知的微妙之处：对于伽罗瓦对象，必须从整体维数转而考虑 Hochschild 上同调维数。回忆一下，对于代数 R， R 的 Hochschild 上同调维数（记为 cd(R)）是 R 在范畴 ${}_R\mathcal{M}_R$ 中的投射维数。众所周知（例如参见 [14] 的附录），对于 Hopf 代数，我们有 gldim(A) = cd(A) = pd$_A$($_\varepsilon k$) = pd$_A$(k_ε)，其中 $_\varepsilon k$ 和 k_ε 分别是平凡的左、右 A-模。

定理 3.2. 设 A 是一个 Hopf 代数，且 R 是一个左或右 A-伽罗瓦对象。若 cd(A) 有限，则有 cd(A) = cd(R)。

证明。若 R 是左（分别为右） A-余模代数，则典范函子

$$F^l_R:{}_A\mathcal{M}\longrightarrow{}_R\mathcal{M}_R\qquad(\text{resp. } F^r_R:\mathcal{M}_A\longrightarrow{}_R\mathcal{M}_R)$$

将平凡左 A-模 $_\varepsilon k$ （分别平凡右 A-模 k_ε）映为 R-双模R。因此，若 R 是左或右 A-伽罗瓦对象，且 gldim(A) = pd$_A$($_\varepsilon k$) = pd$_A$(k_ε) 有限，则由命题 3.1 和命题 2.1 可得 gldim(A) = pd$_A$($_\varepsilon k$) = pd$_A$(k_ε) =pd$_{R\mathcal{M}_R}$(R) = cd(R)。□

注 3.3。在 [6, 定理 1.1] 中，定理 3.2 的结论是在附加假设 A 具有双射反拟，且 R 关于某个半余线性自同构具有含幺扭曲迹的条件下得出的。当然，上述定理 3.2 已经超越了这一结论，但我们仍认为，了解伽罗瓦对象是否关于某个半余线性自同构具有含幺扭曲迹，仍然很有意义。

注 3.4. 当 A具有双射反拟时，上述定理中右伽罗瓦对象的情形可由左侧情形推出，因为在这种情况下，若 R 是右A-伽罗瓦对象，则 R^{op} 是左 A-伽罗瓦对象。我们之所以稍费力气，没有从左侧情形推出右侧情形（或反之），正是为了在接下来的定理中去掉反拟具有双射性的假设。

定理 3.5. 设 A, B 是满足 $\mathcal{M}^A\simeq^{\otimes}\mathcal{M}^B$的 Hopf 代数。若 gldim($A$) 和 gldim($B$) 均有限，则 gldim($A$) = gldim($B$)。

证明。由 [11]，幺半等价 $\mathcal{M}^A\simeq^{\otimes}\mathcal{M}^B$ 的存在意味着存在一个 A-B-双伽罗瓦对象 R，因此由定理 3.2 可得，若 gldim(A) 和 gldim(B) 均有限，则 gldim(A) = cd(R) =gldim(B)。□

注 3.6. 当然，不具有双射反拟的 Hopf 代数十分罕见，且似乎具有病态性质，因此我们并不认为在定理 1.2 中去除反拟的双射性假设是一项非常重要的改进。尽管如此，不具有双射反拟的 Hopf 代数确实存在，其中有一些颇有意思，例如由矩阵余代数生成的自由 Hopf 代数 [13], ，其余模范畴存在一些非平凡的幺半等价，参见 [2, 第 5] 节。

References

[1] W.W. Adams, M. A. Rieffel, 伴随函子与导出函子及其在半群上同调中的应用, 《代数杂志》7 (1967), 25–34.[2] J. Bichon, Hopf-Galois 系统, 《代数杂志》264 (2003), no. 2, 565-581.[3] J. Bichon, Hopf-Galois 对象与余群胚, Rev. Un. Mat. Argentina 55 (2014), no. 2, 11–69.[4] J. Bichon, Hopf 代数的 Gerstenhaber-Schack 上同调与 Hochschild 上同调, Doc. Math. 21 (2016), 955-986.[5] J. Bichon, Hopf 代数上同调维数的幺半群不变性, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 360 (2022), 561-582.[6] J. Bichon, 伴随函子的扭曲可分性, 《范畴论及其应用》41 (2024), Paper No. 5, 150-167.[7] X.-W. Chen, W. Ren, Frobenius 函子与 Gorenstein 同调性质, 《代数杂志》610 (2022), 18-37.[8] C. Grunspan, Hopf-Galois 系统与 Kashiwara 代数, Comm. Algebra 32 (2004), no. 9, 3373- 3389.[9] H. Holm, Gorenstein 同调维数, J. Pure Appl. Algebra 189 (2004), no. 1-3, 167-193.[10] W. Ren, R. Zhu, Hopf 代数的 Gorenstein 同调不变量与幺半群模型范畴, arXiv:2601.20249.[11] P. Schauenburg, Hopf 双 Galois 扩张, Comm. Algebra 24, No. 12 (1996), 3797-3825.[12] P. Schauenburg, Hopf-Galois 扩张与双 Galois 扩张. Fields Inst. Commun. 43 (2004), 469–515.[13] M. Takeuchi, 由余代数生成的自由 Hopf 代数, J. Math. Soc. Japan 23 (1971), 561-582.[14] X. Wang, X. Yu, Y. Zhang, 幺半群 Morita-Takeuchi 等价下的 Calabi-Yau 性质, Pacific J. Math. 290 (2017), no. 2, 481-510.[15] X. Yu, Calabi-Yau Hopf 代数的 Hopf-Galois 对象, J. Algebra Appl. 15 (2016), no. 10, 1650194, 19 pp.[16] R. Zhu, Hopf Galois 扩张的 Artin-Schelter Gorenstein 性质, J. Pure Appl. Algebra 229 (2025), no. 12, Paper No. 108123, 26 pp.

Université Clermont Auvergne, CNRS, LMBP, F-63000 CLERMONT-FERRAND, FRANCE电子邮箱：julien.bichon@uca.fr