arXiv:2602.12738v1 [math.AT] 13 Feb 2026

关于 Λ-序列与含幺歌剧的 Kelly 幺半结构

Aowen Fan 和 Foling Zou

Abstract. 设 Λ 为带基点有限集 $\mathbf{n}$及基保持单射所构成的范畴。我们研究 Kelly 幺半结构下 Λ-序列中幺半群与模的性质。特别地，我们证明，从 Λ-序列中的右模范畴到对称序列中的右模范畴的遗忘函子是一个同构。我们证明，任意相容的下层数据都可以延拓为正规 oplax 幺半结构，并以此在 Λ-序列上建立延拓 Kelly 积的泛正规 oplax 幺半结构，从而将含单位元的算子等同于一般对称幺半范畴 $\mathscr{V}$中含幺 Λ-序列里的幺半群。我们还建立了一个闭幺半局部化定理。

Contents

引言1 1. 预备知识 4 2. 模 6 2.1. 幺半群与模 6 2.2. 比较 Λ-序列与 Σ-序列 7 2.3. 与算子范畴的关系 11 2.4. 单子的丰饶或稀缺 12 3. 幺半局部化 14 3.1. 局部化 14 3.2. 单oidal乘法闭包 16 3.3. 闭幺半局部化 17 4. 正规 oplax 幺半结构 19 4.1. n重 Day 卷积 19 4.2. 二重 Kelly 积 20 4.3. 三重 Kelly 乘积 22 4.4. 正规 oplax 幺半结构 24 4.5. 提升正规 oplax 幺半结构 27 4.6. 含单位元的算子作为幺半群 31 参考文献 32

Introduction

算子的概念由 Peter May 于20世纪70年代引入 [14], , 此后一直广泛用于研究拓扑空间、谱、代数等背景下的代数结构。Kelly [9]最先观察到，闭对称幺半范畴 $\mathscr{V}$ 中的算子结构与

在 $\mathscr{V}$中，对称序列构成的幺半群相同，其中的积是他定义的 $\odot_\Sigma$ 。这个积也称为复合积（历史回顾见 [17] ）。这种观点便于研究算子及其代数上的模型结构，也便于构造 Bar 构造 [1, 2, 11, 17, 18]。

对称幺半范畴中的一个厄尔巴运算子 $\mathscr{C}$（$\mathscr{V}$，$\otimes$，$\mathcal{I}$）称为带基点的，如果它带有一个映射 $\eta\colon \mathcal{I}\to\mathscr{C}(\mathbf{0})$，并且称为含幺的，如果 $\mathscr{C}(\mathbf{0})=\mathcal{I}$。含幺歌剧与带基点空间、谱或含幺 k-代数的背景相关，因为它们将预先指定的代数带基点条件内置于算子的组合结构中。在[17], May、Zhang 和第二位作者的工作中，他们发展了 Kelly 定理的含幺版本：用 Λ-序列替代对称序列，$\mathscr{V}$中的含单位元的算子（分别为带基点的算子）可以与含幺 Λ-序列（分别为 Λ-序列）中的幺半群在 $\mathscr{V}$Kelly 积下 $\odot_\Lambda$ （见第 1 节中的定义）。

模。将算子识别为幺半群，为研究左模、右模和 Bar 构造提供了新的视角。在第 2 节中，我们研究闭对称幺半范畴中 Σ-对象和 Λ-对象中的幺半群与模的性质 $\mathscr{V}$。特别地，我们在定理 2.5中证明了以下结果。

定理 0.1. 设 $\mathscr{C}$ 是一个带基点算子。那么，从 Λ-对象中的右 $\mathscr{C}$-模到 Σ-对象中的右 $\mathscr{C}$-模的遗忘映射是一个同构。

特别地（例 2.32），取 $\mathscr{C}=\mathscr{I}_1$ 其中 $\mathscr{I}_1(\mathbf{0})=\mathscr{I}_1(\mathbf{1})=\mathcal{I}$ 且$\mathscr{I}_1(\mathbf{n})=\emptyset$ 对于 $n\geq 2$，我们得到 [5, 5.1.8]；取 $\mathscr{C}$ 为交换歌剧，我们得到 [17, 4。10]和 [5, 5.1.6]。

我们还发现了一种构造新算子的有趣方法。对于笛卡尔幺半范畴 $\mathscr{V}$ 中的算子 $\mathscr{C}$，我们构造一个新算子 $\mathscr{B}$，其项有显式表达式

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(0)&=\mathscr{C}(0),\\ \mathscr{B}(1)&=\mathscr{C}(0)\sqcup\mathscr{C}(1),\\ \text{and }\mathscr{B}(n)&=\sqcup_{S\subset\{1,2,\cdots,n\}}\mathscr{C}(|S|).\end{aligned}$$

范畴 $\mathscr{B}$-代数的结构似乎丰富得令人难以置信：每个 $\mathscr{B}$-代数同时也是一个 $\mathscr{C}$-代数和一个交换代数；$\mathscr{C}$-代数和交换代数都是 $\mathscr{B}$-代数的忠实子范畴（见 命题 2.13 及其后的注记）。

从一个算子 $\mathscr{C}$在 $\mathscr{V}$中，文献研究了两个相关的 $\mathscr{V}$-富对称幺半范-畴：置换包络 $\mathscr{C}$ 和$\widehat{\ }$算子范畴 $\mathscr{C}$。它们都是以显式方式构造的。在 [17], 中，展示了如何利用 Day 卷积和凯利积构造 $\mathscr{C}$；在 命题-$\widehat{\ }$2.22 中，我们展示了如何利用 Day 卷积和凯利积构造 $\mathscr{C}$ 。

置换包络 $\mathscr{C}$ 具有这样的性质：$\mathscr{V}$id 中的 $\mathscr{C}$代数范畴与从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{V}$的强对称幺半函子范畴同构。当 $\mathscr{V}$是笛卡尔幺半时，它也与从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{V}$的强对称幺半函子$\widehat{\ }$同构。然而，在同伦论中，通常会以 Segal 条件取代强$\widehat{\ }$对称幺半条件，此时 $\mathscr{C}$ 会变得更有趣。对于子范畴 $\Pi\subset\widehat{\mathscr{C}}$，May–Thomason [16] 使用$\Pi[\mathrm{Top}_*]$ 上的单子 $\widehat{\mathbb{C}}^{op}_\Pi$ ，将 Segal 的 $\mathscr{F}$空间方法与 May 的运算子方法统一起来，用于无限循环空间机器。这里，$\Pi[\mathrm{Top}_*]$ 是从 Π 到带基点空间的协变函子范畴。

我们在 引理 2.30 中证明，对于 $\Sigma \subset \Lambda \subset \mathscr{C}$，单子 $\mathbb{C}_{\Sigma}^{op}$ 和$\mathbb{C}_{\Lambda}^{op}$ 同构于与幺半群 $\mathscr{C}$ 在 Σ-对象和 Λ-对象相关联的单子。由此，我们在 定理 2.31 中证明了以下关于 Σ-对象和Λ-对象的结果，从而完整地理解了右 $\mathscr{C}$-模。注意，$\mathscr{C}^{op}$ 不依赖于 Σ 或 Λ，因此这也给出了 定理 0.1的另一种证明。

定理 0.2. 右 $\mathscr{C}$-模范畴与从 $\mathscr{C}^{op}$ 到 $\mathscr{V}$的$\mathscr{V}$-富化函子范畴同构。

作为幺半群的含单位元算子。 为了使凯利积成为幺半积，需要 $\mathscr{V}$ 上的幺半结构是闭的，尤其是$\otimes$ 与小余极限可交换。有时我们希望去掉这一假设。例如，Top^{op} 并非闭幺半范畴，其中的算子是 Top 中的余歌剧。

在 [3, 定义 2.10-2.12], 中，Ching 将范畴 $\mathscr{E}$上的幺半结构概念推广为所谓的正规 oplax 幺半结构，即对所有 $n \geq 2$函子

$$\mu_n : \mathscr{E}^n \to \mathscr{E},$$

以及一些相容的自然变换 $\alpha_{n,\ l,\ r}$。随后，他在 $\mathscr{V}$ 上的对称序列上构造了正规 oplax 幺半结构，其中 μ_2 是凯利积。这样一来，他仍然可以定义幺半群和 Bar 构造。事实上，这种方法可以推广到 Λ-序列（注 4.16），但需要因基点识别而作出重大修改。

在第 4 节中，我们提出一种替代方法。在定理 4.30中，我们证明，任意相容的 μ_n 与$\alpha_{n,\ l,\ r}$ 关于 $n \leq 3$ 的数据都能扩展为正规 oplax 幺半结构，并且存在一个普适的结构。借助我们的幺半局部化，可得如下结果（定理 4.26）：

定理 0.3。在 Λ-序列上存在一个普适的正规反松幺半结构，其中 μ_2 和 μ_3 分别是二重和三重 *Kelly* 乘积。

特别地，Ching 的正规反松幺半结构的改编版本有一个态射指向我们的构造。此外，所有合理的正规反松幺半结构彼此等价，且具有相同的幺半群范畴（注 4.33）。利用这一结构，我们在定理 4.32中确立以下结果，回答了 [17]中遗留的一个问题。

定理 0.4。设 $\mathscr{V}$ 是一个完备且余完备的对称幺半范畴。$\mathscr{V}$ 中含单位元算子的范畴与 $\mathscr{V}$ 中含幺 Λ-序列的幺半群范畴之间存在同构；$\mathscr{V}$ 中带基点算子的范畴与 $\mathscr{V}$ 中 Λ- 序列的幺半群范畴之间存在同构。

幺半局部化。我们研究第3节中范畴的局部化。作为我们证明定理0.3的关键步骤，我们建立了以下闭单*oidal*局部化定理 （定理 3.9），该定理本身也可能具有独立的研究价值。

定理0.5。设 $\mathscr{V}$ 是一个完备且余完备的对称幺半范畴。存在一个局部化 $L : \mathscr{V} \to L\mathscr{V} = \mathscr{V}[S^{-1}]$，使得

- $L\mathscr{V}$ 是完备的、余完备的且为对称幺半范畴；
- L 保持小极限、余极限和 $\otimes$；
- $\otimes$ 与 $L\mathscr{V}$中的小余极限可交换。

注记 0.6. 如果 $L\mathscr{V}$ 是可呈现的，则由伴随函子定理可知它是闭幺半的。

Day 在 [4, 命题 25] 中证明，任何幺半范畴都可以嵌入一个完备且余完备范畴，并且该嵌入同时保留幺半结构、极限以及那些由张量积保留的余极限。Day 的局部化旨在实现余完备性，而我们的局部化旨在使其与余极限 $\otimes$ 交换。

在同一篇论文中，Day 引入了 幺半态射集 S 在 $\mathscr{V}$ 中的概念，使得局部化 $L:\ \mathscr{V}\to\mathscr{V}[S^{-1}]$ 保留张量积。我们引入 S 为 κ- 闭幺半乘法系统的概念，从而使局部化 $L:\ \mathscr{V}\to\mathscr{V}[S^{-1}]$ 不仅保留张量积，还保留 κ-小极限和余极限。随后我们在定理 3.7中证明

定理 0.7。 令 κ 为一个正则基数。
任意态射集 S 都有一个 κ-闭幺半乘法闭包 S。

致谢。 作者谨感谢 Peter May 和 Jonathan Rubin 的有益交流。

1. Preliminaries

我们回顾 [17] 中的一些定义和结果。以下始终设 $\mathscr{V}$ 为一个完备且余完备的对称幺半范畴。范畴 $\mathscr{V}$ 有三个特别的对象：

(1) $\emptyset$，即始对象，也就是空对象集的余积。(2) $*$，即终对象，也就是空对象集的积。(3) $\mathcal{I}$，即 $\mathscr{V}$ 上 $\otimes$ 的单位对象。

定义 1.1。 范畴 Λ 的对象是带基点有限集 $\mathbf{n}=\{0,1,\cdots,n\}$，其基点为 $\mathbf{0}$；态射是基保持单射。范畴 Σ 是 Λ 的子范畴，具有相同的对象和同构，即置换。注意，Λ 中的态射由置换和有序单射 σ_i 生成：$\mathbf{n}-\mathbf{1}\to\mathbf{n}$，$1\le i\le n$，其中跳过了目标中的 i。

在 $\mathscr{V}$ 中，对称序列 （也称为 Σ-序列 或 Σ-对象）是一个函子$\Sigma^{op}\to\mathscr{V}$； $\mathscr{V}$中的一个 Λ-对象 是一个函子 $\mathscr{D}$: $\Lambda^{op}\to\mathscr{V}$； $\mathscr{V}$中的一个（含幺） Λ-序列 是一个 Λ-对象 $\mathscr{D}$，并带有一个基映射 η: $\mathcal{I}\to\mathscr{D}(\mathbf{0})$。若一个 Λ-序列$\mathscr{D}$ 满足 $\mathscr{D}(\mathbf{0})=\mathcal{I}$，且 η 是恒等映射，则称其为含幺的 。

记号 1.2. 我们用 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$、 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$、 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$ 和 $\Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[\mathscr{V}]$ 分别表示Σ-序列、 Λ-对象、 Λ-序列和含幺 Λ-序列的范畴，其中态射是自然变换（在$\mathbf{0}$处限制后，在 $\mathcal{I}$ 下仍为态射）。我们有范畴的包含关系 $\Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[\mathscr{V}]\subset\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$。

定义 1.3. 对于 $m\ge 0$，我们令 $\mathscr{I}_m$ 表示如下 Λ-序列

$$\mathscr{I}_m=\Lambda(-,\mathbf{m})\otimes\mathcal{I}.$$

特别地， $\mathscr{I}_0(\mathbf{0})=\mathcal{I}$ 且 $\mathscr{I}_0(\mathbf{n})=\emptyset$对于 $n\ge 1$； $\mathscr{I}_1(\mathbf{0})=\mathscr{I}_1(\mathbf{1})=\mathcal{I}$ 且$\mathscr{I}_1(\mathbf{n})=\emptyset$ 对于 $n\ge 2$。我们稍微滥用一下记号，也将基映射写作 η: $\mathscr{I}_0\to\mathscr{D}$。

对于 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{E}$（属于 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$），Day 卷积 $\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$ 是图表中所示的左 Kan 延拓

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{op}\times\Lambda^{op} & \xrightarrow{\mathscr{D}\times\mathscr{E}} & \mathscr{V}\times\mathscr{V} & \xrightarrow{\otimes} & \mathscr{V}. \\ \vee\downarrow & & & \nearrow_{\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}} & \\ \Lambda^{op} & & & & \end{array} \tag{1.4}$$

它可以通过一个余端计算得到

$$(\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E})(\mathbf{n})=\int^{\mathbf{j}_1,\mathbf{j}_2}\Lambda(\mathbf{n},\mathbf{j_1}+\mathbf{j_2})\otimes\big(\mathscr{D}(\mathbf{j}_1)\otimes\mathscr{E}(\mathbf{j}_2)\big). \tag{1.5}$$

如 [8, 2 所证明。1], 显然， $\boxtimes$ 是一个对称幺半积；当 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{I}_0$ 时，它是 Day 卷积的单位。

当 $\mathscr{D}$和 $\mathscr{E}$是 Λ-序列时， $\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$也是。 $\mathscr{D}$和 $\mathscr{E}$的基映射通过以下方式诱导出 $\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$ 的基映射

$$\eta:\mathscr{I}_0\cong\mathscr{I}_0\boxtimes\mathscr{I}_0\xrightarrow{\eta\boxtimes\eta}\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}.$$

类似地，可以在 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 上进行 Day 卷积，我们用 $\boxtimes_\Lambda$和 $\boxtimes_\Sigma$ 表示上下文。对于 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$ 中的 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{E}$，存在一个自然映射 q: $\mathscr{D}\boxtimes_\Sigma\mathscr{E}\to\mathscr{D}\boxtimes_\Lambda\mathscr{E}$，事实证明它是Σ-序列 [17, 定理 3.4]的一个同构。因此，我们可以用 $\boxtimes$同时表示 $\boxtimes_\Lambda$ 和 $\boxtimes_\Sigma$。具体而言，

$$(\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E})(\mathbf{n})\cong\coprod_{j+k=n}\mathscr{D}(\mathbf{j})\otimes\mathscr{E}(\mathbf{k})\otimes_{\Sigma_j\times\Sigma_k}\Sigma_n.$$

注记 1.6. 协变序列也有 Day 卷积积。对于 $\mathscr{C}$， $\mathscr{D}\in\Lambda[\mathscr{V}]$，自然映射 q: $\mathscr{D}\boxtimes_\Sigma\mathscr{E}\to\mathscr{D}\boxtimes_\Lambda\mathscr{E}$不再是同构：例如，在 $(\mathscr{C}\boxtimes_\Lambda\mathscr{D})(\mathbf{3})$ 中，有一份 $\mathscr{C}(3)\otimes\mathscr{D}(0)$ 和三份 $\mathscr{C}(2)\otimes\mathscr{D}(0)$。这三份都通过不同的映射粘合到 $\mathscr{C}(3)\otimes\mathscr{D}(0)$，从而得到 $(\mathscr{C}\boxtimes_\Sigma\mathscr{D})(\mathbf{3})$ 的一个商空间。

当 $\otimes$ 在 $\mathscr{V}$ 中与有限余极限交换时，Day 卷积是结合的，并且存在

$$\mathscr{D}_1\boxtimes_\Lambda\cdots\boxtimes_\Lambda\mathscr{D}_n=\int^{i_1,\dots,i_n}\Lambda(-,\mathbf{i_1}+\cdots+\mathbf{i_n})\otimes\Big(\mathscr{D}_1(\mathbf{i_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_n(\mathbf{i_n})\Big) \tag{1.7}$$

定义 1.8. 在 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$ 上定义凯利积 $\odot_\Lambda$ 如下：

$$\big(\mathscr{D}\odot_\Lambda\mathscr{E}\big)(\mathbf{n})=\int^{k}\mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{E}^{\boxtimes k}(\mathbf{n}).$$

$\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{E}$ 的基映射通过复合映射诱导出 $\mathscr{D}\odot_\Lambda\mathscr{E}$ 的基映射

$$\mathscr{I}_0\xrightarrow{\eta}\mathscr{D}=\mathscr{D}\odot_\Lambda\mathscr{I}_0\xrightarrow{\mathscr{D}\odot_\Lambda\eta}\mathscr{D}\odot_\Lambda\mathscr{E}.$$

注意，若 $\mathscr{D}(\mathbf{0})=\mathcal{I}$ 且 $\mathscr{E}(\mathbf{0})=\mathcal{I}$，则它们是恒等映射，因此 $\odot$限制为含幺 Λ-序列上的积。

凯利积 $\odot_\Sigma$ 在 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 上定义为将 Λ 替换为 Σ，并在此定义中忽略基映射。

注记 1.9. 当第一个变量没有基映射时，凯利积也有定义，它是一个函子

$$\odot_\Lambda : \Lambda^{op}[\mathscr{V}] \times \Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0} \to \Lambda^{op}[\mathscr{V}].$$

2. Modules

在本节中，我们总是假设 $(\mathscr{V},\ \otimes,\ \mathcal{I})$ 是一个闭、完备且余完备的对称幺半范畴。

2.1. **幺半群与模。** 以下结果确立了凯利积作为一种幺半乘积，并确定了相应的幺半群。回忆，$\mathscr{I}_1(\mathbf{0}) = \mathscr{I}_1(\mathbf{1}) = \mathcal{I}$ 且 $\mathscr{I}_1(\mathbf{n}) = \emptyset$ 对于 $n \geq 2$。设 $\mathscr{I}_1^\Sigma \in \Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 满足 $\mathscr{I}_1(\mathbf{1}) = \mathcal{I}$ 且 $\mathscr{I}_1(\mathbf{n}) = \emptyset$ 对于 $n \neq 1$。

定理 2.1. 关于凯利积，我们有以下结果：

(1) 凯利积 $\odot_\Sigma$ 是结合的，单位为 $\mathscr{I}_1^\Sigma$，且在第一个变量上是强幺半的。*(2)* $\mathscr{V}$ 中的算子与 $(\Sigma^{op}[\mathscr{V}], \odot_\Sigma, \mathscr{I}_1^\Sigma)$ 中的幺半群相同。*(3)* 凯利积 $\odot_\Lambda$ 是结合的，单位为 $\mathscr{I}_1$，且在第一个变量上是强幺半的。*(4)* $\mathscr{V}$ 中的含单位元算子与 $(\Lambda_{\mathcal{I}}^{op}[\mathscr{V}], \odot_\Lambda, \mathscr{I}_1)$ 中的幺半群相同，而 $\mathscr{V}$ 中的带基点算子与 $(\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}, \odot_\Lambda, \mathscr{I}_1)$ 中的幺半群相同。*(5)* 若 $\mathscr{V}$ 是笛卡尔幺半的，则凯利积 $\odot_\Sigma$ 和 $\odot_\Lambda$ 在第一个变量上是反松幺半的。

证明。 性质 (1)-(4) 已在 [9, 17]中证明。对于 (5)，注意到当 $\mathscr{V}$是笛卡尔幺半时，我们有对角态射 $\Delta :\ A \to A \otimes A$ 对于 $A \in \mathscr{V}$。于是有

$$\begin{aligned}
&\mathscr{E} \odot_\Lambda (\mathscr{D} \boxtimes \mathscr{D}')(\mathbf{n}) \\
&= \int^{\mathbf{m}} \mathscr{E}(\mathbf{m}) \otimes (\mathscr{D} \boxtimes \mathscr{D}')^{\boxtimes m}(\mathbf{n}) \\
&\cong \int^{\mathbf{m}} \mathscr{E}(\mathbf{m}) \otimes \left(\mathscr{D}^{\boxtimes m} \boxtimes \mathscr{D}'^{\boxtimes m}\right)(\mathbf{n}) \\
&\to \int^{\mathbf{m}} \mathscr{E}(\mathbf{m}) \otimes \mathscr{E}(\mathbf{m}) \otimes \left(\mathscr{D}^{\boxtimes m} \boxtimes \mathscr{D}'^{\boxtimes m}\right)(\mathbf{n}) \\
&\cong \int^{\mathbf{m}} \mathscr{E}(\mathbf{m}) \otimes \mathscr{E}(\mathbf{m}) \otimes \left(\int^{\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}} \Lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \otimes \mathscr{D}^{\boxtimes m}(\mathbf{n}_1) \otimes \mathscr{D}'^{\boxtimes m}(\mathbf{n}_2) \right) \\
&\cong \int^{\mathbf{n_1},\mathbf{n_2},\mathbf{m}} \Lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \otimes \mathscr{E}(\mathbf{m}) \otimes \mathscr{D}^{\boxtimes m}(\mathbf{n}_1) \otimes \mathscr{E}(\mathbf{m}) \otimes \mathscr{D}'^{\boxtimes m}(\mathbf{n}_2) \\
&\to \int^{\mathbf{n_1},\mathbf{n_2},\mathbf{m_1},\mathbf{m_2}} \Lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \otimes \mathscr{E}(\mathbf{m_1}) \otimes \mathscr{D}^{\boxtimes m_1}(\mathbf{n}_1) \otimes \mathscr{E}(\mathbf{m_2}) \otimes \mathscr{D}'^{\boxtimes m_2}(\mathbf{n}_2) \\
&\cong \int^{\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}} \Lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \otimes \left(\int^{\mathbf{m_1}} \mathscr{E}(\mathbf{m_1}) \otimes \mathscr{D}^{\boxtimes m_1}(\mathbf{n}_1) \right) \otimes \left(\int^{\mathbf{m_2}} \mathscr{E}(\mathbf{m_2}) \otimes \mathscr{D}'^{\boxtimes m_2}(\mathbf{n}_2) \right) \\
&= (\mathscr{E} \odot_\Lambda \mathscr{D}) \boxtimes (\mathscr{E} \odot_\Lambda \mathscr{D}')(\mathbf{n}).
\end{aligned}$$

这里，第一个箭头由对角态射诱导，第二个箭头是余极限比较。对于这些同构，第一个使用了 $\boxtimes$ 是对称幺半的事实；第二个由定义成立；第三个和最后一个使用了余极限与 $\otimes$交换。将所有 Λ 替换为 Σ后，证明对于 $\odot_\Sigma$ 同样成立。□

我们列出 Σ-序列和 Λ-序列这两种情形的一些性质。

命题 2.2. 如果 $\mathscr{E}$是右 $\mathscr{C}$-模，那么 $\mathscr{D}\odot\mathscr{E}$是右 $\mathscr{C}$-模。如果$\mathscr{D}$是左 $\mathscr{C}$-模，那么 $\mathscr{D}\odot\mathscr{E}$是左 $\mathscr{C}$-模。

证明。 对于第一种情形，右 $\mathscr{C}$-模结构定义如下：

$$(\mathscr{D}\odot\mathscr{E})\odot\mathscr{C}\cong\mathscr{D}\odot(\mathscr{E}\odot\mathscr{C})\to\mathscr{D}\odot\mathscr{E}.$$

第二种情形类似。 □

命题 2.3。 若 $\mathscr{D}$和 $\mathscr{E}$是右 $\mathscr{C}$-模，则 $\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$是右 $\mathscr{C}$-模。

证明。 利用 定理 2.1，右 $\mathscr{C}$-模结构在 $\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$ 上的定义为 $(\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E})\odot\mathscr{C}\cong(\mathscr{D}\odot\mathscr{C})\boxtimes(\mathscr{E}\odot\mathscr{C})\to\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$。 □

命题 2.4。 若 $\mathscr{D}$和 $\mathscr{E}$是笛卡尔幺半范畴$\mathscr{V}$中的左 $\mathscr{C}$-模，则 $\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$是左 $\mathscr{C}$-模。

证明。 根据 定理 2.1(5)，左侧 $\mathscr{C}$-模结构在 $\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$上由下式给出：$\mathscr{C}\odot(\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E})\to(\mathscr{C}\odot\mathscr{D})\boxtimes(\mathscr{C}\odot\mathscr{E})\to\mathscr{D}\boxtimes\mathscr{E}$。 □

2.2. **比较 Λ-序列与 Σ-序列**。 任意 Λ-序列都可以通过遗忘结构视为一个 Σ-序列。我们用 $\iota:\mathscr{I}_1^{\Sigma}\to\mathscr{I}_1$ 表示 Σ-序列的包含映射。对于 $\mathscr{C}$， $\mathscr{D}\in\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$，存在一个典范商映射$q:\mathscr{C}\odot_{\Sigma}\mathscr{D}\to\mathscr{C}\odot_{\Lambda}\mathscr{D}$，且这两个图表

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{I}_1^{\Sigma}\odot_{\Sigma}\mathscr{D} & \xrightarrow{\cong} & \mathscr{D}\\ \downarrow{\scriptstyle\iota} & & \|\\ \mathscr{I}_1\odot_{\Sigma}\mathscr{D} & & \|\\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \|\\ \mathscr{I}_1\odot_{\Lambda}\mathscr{D} & \xrightarrow{\cong} & \mathscr{D}\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccc}\mathscr{D}\odot_{\Sigma}\mathscr{I}_1^{\Sigma} & \xrightarrow{\cong} & \mathscr{D}\\ \downarrow{\scriptstyle\iota} & & \|\\ \mathscr{D}\odot_{\Sigma}\mathscr{I}_1 & & \|\\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \|\\ \mathscr{D}\odot_{\Lambda}\mathscr{I}_1 & \xrightarrow{\cong} & \mathscr{D}\end{array}$$

比较单位映射可交换。通过映射 q 和 ι，遗忘映射限制为

$$\mathrm{Mon}(\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0})\to\mathrm{Mon}(\Sigma^{op}[\mathscr{V}])$$

以及模范畴。

定理 2.5。 设 $\mathscr{C}$是$(\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0},\odot_{\Lambda})$中的一个幺半群，即一个带基点算子。那么遗忘映射诱导出

$$\mathrm{RMod}_{\mathscr{C}}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]]\cong\mathrm{RMod}_{\mathscr{C}}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]].$$

特别地，$\Lambda^{op}[\mathscr{V}]\cong$右模范畴$_{\mathscr{I}_1}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]]\cong$右模范畴$_{\mathscr{I}_1}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]]$。

证明。 右模范畴中的一个对象 $\mathscr{D}$是一个满足相容性条件的态射 $\mathscr{D}\odot_{\Sigma}\mathscr{C}\to\mathscr{D}$。明确地，对于 $n\geqslant 0$ 存在态射

$$\coprod_{k,n_1,\cdots,n_k}\coprod_{\Sigma_n}\mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\mathscr{C}(\mathbf{n_k})\to\mathscr{D}(\mathbf{n}),\tag{2.6}$$

这等价于一系列态射

$$\psi^{\sigma}_{k,n_1,\cdots,n_k}:\mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\mathscr{C}(\mathbf{n_k})\to\mathscr{D}(\mathbf{n})\tag{2.7}$$

其中 $n=n_1+\cdots+n_k$; $\sigma\in\Sigma(\mathbf{n},\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k})=\Sigma_n$。

我们首先证明，态射族 $\{\phi^{\lambda}_{k,n_1,\cdots,n_k}\}$ 确定了 $\mathscr{D}$ 上的一个 Λ-序列结构。对于 $\sigma_i \in \Lambda(\mathbf{n}-\mathbf{1},\mathbf{n})$，令 $\mathscr{D}(\sigma_i):\mathscr{D}(\mathbf{n})\to\mathscr{D}(\mathbf{n}-\mathbf{1})$ 为复合态射

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{\cong} & \mathscr{D}(\mathbf{n})\otimes\mathcal{I} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\eta} \\
 & \overset{\mathscr{D}(\sigma_i)_0}{\swarrow} & \mathscr{D}(\mathbf{n})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{0}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{D}(\sigma_i)} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\
 & & \mathscr{D}(\mathbf{n})\otimes\mathcal{I}\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{0})\otimes\cdots\otimes\mathcal{I} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\eta_{\mathscr{C}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\eta_{\mathscr{C}}} \\
\mathscr{D}(\mathbf{n}-\mathbf{1}) & \xleftarrow[\psi^{\sigma_i}]{} & \mathscr{D}(\mathbf{n})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{0})\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{1})
\end{array}
\tag{2.8}
$$

为了将结构进一步提升为 $\mathscr{D}\in$ 右模范畴$_{\mathscr{C}}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]]$，我们需要一系列态射

$$
\phi^{\lambda}_{k,n_1,\cdots,n_k}:\mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\mathscr{C}(\mathbf{n_k})\to\mathscr{D}(\mathbf{n}) \tag{2.9}
$$

其中 $n\leqslant n_1+\cdots+n_k$; $\lambda\in\Lambda(\mathbf{n},\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k})$。这些数据限制为 $\psi^{\sigma}_{k,n_1,\cdots,n_k}$，作用于 $\Sigma(\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k},\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k})$，并且必须满足以下附加要求：

(1) 对于 $\lambda_1\in\Lambda(\mathbf{m},\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k})$，$\lambda_2\in\Lambda(\mathbf{l},\mathbf{m})$，有

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_k}) & \xrightarrow{\phi^{\lambda_1}} & \mathscr{D}(\mathbf{m}) \\
 & \searrow^{\phi^{\lambda_1\lambda_2}} & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{D}(\lambda_2)} \\
 & & \mathscr{D}(\mathbf{l})
\end{array}
$$

(2) 对于 $\lambda\in\Lambda(\mathbf{m},\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_{k-1}})$，$\sigma_i\in\Lambda(\mathbf{k},\mathbf{k}-\mathbf{1})$，其中省略了第 i 个目标，有

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathcal{I}\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_{k-1}}) & \xrightarrow{\eta} & \mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{0})\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_{k-1}}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{D}(\sigma_i)\otimes\cong} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi^{\lambda}_{k,n_1,\cdots,0,\cdots,n_{k-1}}} \\
\mathscr{D}(\mathbf{k}-\mathbf{1})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_{k-1}}) & \xrightarrow[\phi^{\lambda}_{k-1,n_1,\cdots,n_{k-1}}]{} & \mathscr{D}(\mathbf{m})
\end{array}
$$

其中 $\mathcal{I}$ 被插入第 i项。

我们已经有了 $\phi^{\sigma}_{k,n_1,\cdots,n_k}=\psi^{\sigma}_{k,n_1,\cdots,n_k}$，适用于 $\sigma\in\Sigma_n$；对于一般的 λ，我们用图表 **(1)** 定义 $\phi^{\lambda}_{k,n_1,\cdots,n_k}$。接下来要证明这些数据满足图表 **(2)**。由于图表 **(1)**，只需证明对于 $m=n_1+\cdots+n_{k-1}$ 和 $\lambda\in\Sigma(\mathrm{m},\mathrm{n_1}+\cdots+\mathrm{n_{k-1}})$ 成立。由 (2.8)，我们得到下图中的虚线箭头

且上方三角形可交换。下方三角形的可交换性来自 $\mathscr{D}$ 作为 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$中 $\mathscr{C}$ 模的结合性。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\mathscr{C}(\mathbf{n_{k-1}}) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta\otimes\mathrm{id}} & \mathscr{D}(\mathbf{k})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{C}(\mathbf{0})\otimes\cdots\mathscr{C}(\mathbf{n_{k-1}}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{D}(\sigma_i)\otimes\mathrm{id}} & \overset{\mathscr{D}(\sigma_i)_0}{\swarrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi^{\lambda}_{k,\cdots}=\psi^{\lambda}_{k,\cdots}} \\
\mathscr{D}(\mathbf{k}-\mathbf{1})\otimes\mathscr{C}(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\mathscr{C}(\mathbf{n_{k-1}}) & \xrightarrow[\phi^{\lambda}_{k-1,\cdots}=\psi^{\lambda}_{k-1,\cdots}]{} & \mathscr{D}(\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_{k-1}})
\end{array}
$$

或者，也可以证明下面由遗忘映射构成的图表是一个拉回方块，并将定理归约到 $\mathscr{C} = \mathscr{I}_1$这一情形；该情形见 [5,5.1。8]。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{RMod}_{\mathscr{C}}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]] & \longrightarrow & \mathrm{RMod}_{\mathscr{I}_1}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{RMod}_{\mathscr{C}}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]] & \longrightarrow & \mathrm{RMod}_{\mathscr{I}_1}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]]. \end{array}$$

□

推论 2.10. 对于 $\mathscr{D} \in \Lambda^{op}[\mathscr{V}]$，函子 $-\odot_\Sigma \mathscr{D}\colon \Sigma^{op}[\mathscr{V}] \to \Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 可经由 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$分解。

证明。 我们利用 定理 2.5 将 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$ 识别为 $\mathscr{I}_1$<style id='13'}-模于 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$，然后利用 命题 2.2。

□

对于 $\mathscr{V}$ 中的一个算子 $\mathscr{C}$，有 $\mathscr{V}$ 中的 $\mathscr{C}$-代数这一概念。左 $\mathscr{C}$-模以如下方式推广了 $\mathscr{C}$-代数。存在一个函子 $\iota_0\colon \mathscr{V} \to \Lambda^{op}[\mathscr{V}]$，定义为 $\iota_0(X)(\mathbf{n}) = \begin{cases} X & n = 0 \\ \emptyset & n \geq 1. \end{cases}$；

我们也将同一构造中取值于 Σ-序列的函子 $\mathscr{V} \to \Sigma^{op}[\mathscr{V}]$记作 ι_0。

命题 2.11。 令 $\mathscr{V}_{\mathcal{I}}$ 表示带有其单位 $\mathcal{I}$的范畴 $\mathscr{V}$。对于 $\mathscr{V}$中的带基点算子 $\mathscr{C}$，函子 ι_0限制为代数范畴$_{\mathscr{C}}[\mathscr{V}_{\mathcal{I}}] \to \mathrm{LMod}_{\mathscr{C}}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}]$；对于 $\mathscr{V}$中的算子 $\mathscr{C}$，函子 ι_0限制为代数范畴$_{\mathscr{C}}[\mathscr{V}] \to \mathrm{LMod}_{\mathscr{C}}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]]$。

证明。 对于 Λ-序列，这是 [17, 引理 6.5]。同样的论证也适用于Σ-序列。

□

例 2.12。 我们列举一些幺半群、盒积和凯利积的例子。

(1) $\mathscr{I}_0$ 不是幺半群，因为不存在单位映射 $\mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_0$。(2) $\mathscr{I}_1^{\Sigma}$是 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$中的幺半群。

$$\mathrm{LMod}_{\mathscr{I}_1^{\Sigma}}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]] = \mathrm{RMod}_{\mathscr{I}_1^{\Sigma}}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]] = \Sigma^{op}[\mathscr{V}]$$

(3) $\mathscr{I}_1$ 是 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 和 $\Lambda_{\mathcal{I}}^{op}[\mathscr{V}]$中的幺半群。

$$\begin{aligned} &\mathrm{LMod}_{\mathscr{I}_1}[\Lambda_{\mathcal{I}}^{op}[\mathscr{V}]] = \mathrm{RMod}_{\mathscr{I}_1}[\Lambda_{\mathcal{I}}^{op}[\mathscr{V}]] = \Lambda_{\mathcal{I}}^{op}[\mathscr{V}], \\ &\mathrm{RMod}_{\mathscr{I}_1}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]] = \Lambda^{op}[\mathscr{V}], \\ &\mathrm{LMod}_{\mathscr{I}_1}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]] = \Sigma^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{C}omm/} \end{aligned}$$

(4) 交换算子 $\mathscr{C}omm$：$\mathscr{C}omm(\mathbf{n}) = \mathcal{I}$，且所有结构映射都同构于 $\mathcal{I}$上的恒等映射。

$$\begin{aligned} (\mathscr{C}omm \boxtimes \mathscr{C}omm)(\mathbf{n}) &= \oplus_{m=0}^{n} \mathcal{I}[\Sigma_n/\Sigma_m \times \Sigma_{n-m}] \\ &= \mathcal{I}[\text{partition of } n \text{ into 2 ordered sets}], \\ (\mathscr{C}omm \odot_\Sigma \mathscr{C}omm)(\mathbf{n}) &= \mathcal{I}[\ n \text{ 的无序集合划分}], \\ (\mathscr{C}omm \odot_\Lambda \mathscr{C}omm)(\mathbf{n}) &= \mathcal{I}[\ n \text{ 的无序非空集合划分}] \end{aligned}$$

(5) 结合律算子系 $\mathscr{A}ss$: $\mathscr{A}ss(\mathbf{n}) = \mathcal{I}[\Sigma_n]$，其结构映射由字母置换的拼接与复合所诱导。

$$\mathscr{A}ss \boxtimes \mathscr{A}ss = \mathscr{A}ss$$
$$\mathscr{A}ss \odot_\Sigma \mathscr{A}ss = \oplus_{\mathbb{N}}\mathscr{A}ss$$
$$\mathscr{A}ss \odot_\Lambda \mathscr{A}ss = \mathscr{A}ss$$

命题 2.13. 设 $\mathscr{C}$ 是笛卡尔幺半范畴中的一个算子，则 $\mathscr{B} = \mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm$ 也是一个算子。当 $\mathscr{C}$ 是带基点的时，$\mathscr{B}$ 也是带基点的。

证明. 在笛卡尔幺半范畴中，$\mathscr{C}omm$ 是 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 和 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$ 中的终对象。$\mathscr{B}$ 的乘法映射由 $(\odot = \odot_\Sigma)$ 给出

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} \odot \mathscr{B} &\cong (\mathscr{C} \odot (\mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm)) \boxtimes (\mathscr{C}omm \odot (\mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm)) && \text{by Theorem 2.1(1)}\\
&\to (\mathscr{C} \odot \mathscr{C}) \boxtimes (\mathscr{C} \odot \mathscr{C}omm) \boxtimes (\mathscr{C}omm \odot (\mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm)) && \text{by Theorem 2.1(5)}\\
&\to (\mathscr{C} \odot \mathscr{C}) \boxtimes \mathscr{C}omm && \mathscr{C}omm \text{ 是终对象}\\
&\to \mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm = \mathscr{B}. && \mathscr{C} \text{ 的结构映射}
\end{aligned}$$

单位映射 η: $\mathscr{I}_1^\Sigma \cong \mathscr{I}_1^\Sigma \boxtimes \mathscr{I}_0 \to \mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm$ 是单位映射 $\mathscr{I}_1^\Sigma \to \mathscr{C}$ 与唯一映射 $\mathscr{I}_0 \to \mathscr{C}omm$ 的 $\boxtimes$-积。它是结合的且含幺的。当 $\mathscr{C}$ 带基点时，只需将 $\odot_\Sigma$ 替换为 $\odot_\Lambda$，并将 $\mathscr{I}_1^\Sigma$ 替换为 $\mathscr{I}_1$。

□

注 2.14。 更明确地说，

$$\mathscr{B}(0) = \mathscr{C}(0),$$
$$\mathscr{B}(1) = \mathscr{C}(0) \sqcup \mathscr{C}(1),$$
$$\text{and } \mathscr{B}(n) = \sqcup_{S\subset\{1,2,\cdots,n\}}\mathscr{C}(|S|).$$

任取 $S \subset \{1, \cdots, k\}$ 和 $T_i \subset \{1, \cdots, n_i\}$，对应于 $1 \le i \le k$。令 $T \subset \{1, \cdots, \Sigma_{i=1}^k n_i\}$ 为并集 $\cup_{i\in S}(T_i + \Sigma_{j<i, j\in S}|T_j|)$，其中 $T_i + n$ 是一个数 n 对应的 $\{x + n | x \in T_i\}$。乘法映射为

$$\mathscr{C}(|S|) \times \times_{i=1}^k \mathscr{C}(|T_i|) \xrightarrow[\text{if } i \notin S]{\text{project to } *} \mathscr{C}(|S|) \times \times_{i\in S}\mathscr{C}(|T_i|) \xrightarrow{\mu_\mathscr{C}} \mathscr{C}(|T|),$$

其余积给出乘法映射

$$\mu_\mathscr{B} : \mathscr{B}(k) \times \times_{i=1}^k \mathscr{B}(n_i) \to \mathscr{B}(\Sigma_{i=1}^k n_i).$$

注 2.15。 沿……限制

$$\mathscr{C} \cong \mathscr{C} \boxtimes \mathscr{I}_0 \to \mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm = \mathscr{B}$$

赋予 $\mathscr{B}$-代数以 $\mathscr{C}$-代数的结构。相反，$\mathscr{C}$-代数 X 可以通过与 $\mathscr{B}$-代数相同的操作，构造成一个 注 2.14。也就是说，结构映射 $\theta_\mathscr{B}$: $\mathscr{B}(n) \times X^n \to X$ 是以下对象的余积:

$$\mathscr{C}(|S|) \times \times_{i=1}^n X \xrightarrow[\text{if } i \notin S]{\text{project to } *} \mathscr{C}(|S|) \times \times_{i\in S} X \xrightarrow{\theta_\mathscr{C}} X$$

对于 $S \subset \{1, 2, \cdots, n\}$。这将 $\mathscr{C}$-代数范畴嵌入为 $\mathscr{B}$-代数范畴的一个完全忠实子范畴。

尽管 $\mathscr{I}_0$ 在我们的意义下并非算子，但将 $\mathscr{C} = \mathscr{I}_0$ 视为一个启发式例子仍然是有意义的。$\mathscr{I}_0$-代数的范畴是带基点对象。它作为平凡对象嵌入交换代数的范畴，其中交换代数的结构映射都具有 $X^n \to * \to X$ 的形式。

注记 2.16. 存在厄尔巴运算子的映射 $\mathscr{C}omm \to \mathscr{B} \to \mathscr{C}omm$。这里，第一个映射是

$$\mathscr{C}omm \cong \mathscr{I}_0 \boxtimes \mathscr{C}omm \to \mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm = \mathscr{B},$$

或者在每一层显式地取 $* \to \mathscr{C}(\mathbf{0}) \to \mathscr{B}(n)$，第二个映射则利用 $\mathscr{C}omm$ 是终对象这一点。这将交换代数嵌入为 $\mathscr{B}$-代数的一个忠实子范畴。

2.3. 与算子范畴的关系。令 $\mathscr{F}$ 表示以 $\mathbf{n}$ 为对象、以带基点映射为态射的范畴；令 $\mathscr{F}_{>0} \subset \mathscr{F}$ 表示以 $\mathbf{n}$ 为对象、仅包含满足 $\phi^{-1}(\mathbf{0}) = \{0\}$ 的态射 $\phi : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ 的范畴（May–Thomason [16] 将这些称为有效态射，Lurie [12] 将其称为主动态射）。用 Π 表示 $\mathscr{F}$ 的子范畴，其态射 $\phi : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ 满足：对每个 $1 \leqslant j \leqslant n$，$\phi^{-1}(j)$ 至多包含一个元素。注意，$\mathscr{F}$ 是有限基点集范畴的骨架，$\mathscr{F}_{>0}$ 是有限集范畴的骨架，而 $\Pi \cap \mathscr{F}_{>0}$ 恰好是 Λ。

回顾本节中 $\mathscr{V}$ 是一个完备余完备闭幺半范畴。当涉及算子范畴时，我们进一步假设 $\mathscr{V}$ 是笛卡尔幺半的。一个范畴通过将态射集与 $\mathcal{I}$张量而被视为 $\mathscr{V}$-充实范畴。

定义 2.17. （[15, 第 1] 节）一个 $\mathscr{V}$-算子范畴 $\mathscr{D}$ 是在 $\mathscr{V}$ 上充实的范畴，其对象与 $\mathscr{F}$相同，使得包含 $\Pi \to \mathscr{F}$分解为一个包含 $\Pi \to \mathscr{D}$ 和一个满射 $\mathscr{D} \to \mathscr{F}$。

定义 2.18. 对于笛卡尔幺半范畴 $\mathscr{V}$中的算子 $\mathscr{C}$，存在$\widehat{\ }$一个相伴的 $\mathscr{V}$-充实对称幺半范畴 $\mathscr{C}$，其态射为

$$\widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \coprod_{\phi \in \mathscr{F}(\mathbf{n}, \mathbf{m})} \mathscr{C}(\phi^{-1}(1)) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(\phi^{-1}(m)).$$

恒等映射由 $\mathrm{id} \in \mathscr{F}(\mathbf{n}, \mathbf{n})$ 以及每个单位 $\mathcal{I} \to \mathscr{C}(\mathbf{1})$给出，而复合由单位 $\mathcal{I} \to \mathscr{C}(\mathbf{1})$、投影映射 $\mathscr{C}(\mathbf{n}) \to *$ 以及算子结构映射 γ诱导。

例 2.19. 我们有 $\Pi = \mathscr{I}_1$，$\mathscr{F} = \mathscr{C}omm$。

当 $\mathscr{C}$ 是笛卡尔幺半范畴 $\mathscr{V}$中的含单位元的算子，且对所有$\mathbf{n}$都有 $\mathscr{C}(\mathbf{n}) \neq \varnothing$时，$\widehat{\mathscr{C}}$是一个算子范畴，其中映射 $\Pi \to \widehat{\mathscr{C}}$由 $\mathscr{I}_1 \to \widehat{\mathscr{C}}$诱导，而映射 $\widehat{\mathscr{C}} \to \mathscr{F}$ 由 $\widehat{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}omm$诱导。

定义 2.20. [17, 第 12] 节 设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{V}$中的一个算子。$\mathscr{C}$ 的置换包络是范畴 $\overline{\mathscr{C}}$，其对象为$\mathbf{n}$，态射由下式给出

$$\overline{\mathscr{C}}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \mathscr{C}^{\boxtimes n}(\mathbf{m}).$$

参见 [17]，了解 $\overline{\mathscr{C}}$中的复合。具体而言，有

$$\overline{\mathscr{C}}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \coprod_{\phi \in \mathscr{F}_{>0}(\mathbf{n}, \mathbf{m})} \mathscr{C}(\phi^{-1}(1)) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(\phi^{-1}(m))$$

$\widehat{\ }$，且 $\mathscr{C}$ 是 $\overline{\mathscr{C}}$的一个（$\mathscr{V}$-富集对称幺半）子范畴。

例 2.21。我们有 $\Lambda = \mathscr{I}_1$，$\overline{\mathscr{F}_{>0}} = \mathscr{C}omm$。

命题 2.22。对于任意带基点算子 $\mathscr{C}$，我们有 Λ^{op}-序列的同构

$$\overline{\mathscr{C}}(-,\mathbf{n}) \cong \mathscr{C}^{\boxtimes n}; \tag{2.23}$$

$$\widehat{\mathscr{C}}(-,\mathbf{n}) \cong \overline{\mathscr{C}}(-,\mathbf{n}) \boxtimes \mathscr{C}omm \cong \mathscr{C}^{\boxtimes n} \boxtimes \mathscr{C}omm. \tag{2.24}$$

证明。由 $\mathscr{C}(-,\overline{\mathbf{n}}) = \mathscr{C}^{\boxtimes n}$ 可得 [17, 引理 12。13]。对于 $\widehat{\mathscr{C}}$，我们有

$$\begin{aligned}
\overline{\mathscr{C}}(\mathbf{m},\mathbf{n}) \boxtimes \mathscr{C}omm &= \int^{\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2} \Sigma(\mathbf{m},\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2) \otimes \overline{\mathscr{C}}(\mathbf{m}_1,\mathbf{n}) \otimes \mathscr{C}omm(\mathbf{m}_2) \\
&= \int^{\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2} \Sigma(\mathbf{m},\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2) \otimes \coprod_{\phi\in\mathscr{F}_{>0}(\mathbf{m}_1,\mathbf{n})} \mathscr{C}(\phi^{-1}(1)) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(\phi^{-1}(n)) \\
&\cong \coprod_{\{\text{partition of } \mathbf{m}=S\vee T\}} \Big(\coprod_{\phi\in\mathscr{F}_{>0}(|S|,\mathbf{n})} \mathscr{C}(\phi^{-1}(1)) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(\phi^{-1}(n)) \Big) \\
&\cong \coprod_{\phi\in\mathscr{F}(\mathbf{m},\mathbf{n})} \mathscr{C}(\phi^{-1}(1)) \otimes \cdots \otimes \mathscr{C}(\phi^{-1}(n)) \\
&= \widehat{\mathscr{C}}(\mathbf{m},\mathbf{n}).
\end{aligned}$$

□

$\widehat{\ }$可以从 (2.24) 出发，将其作为 $\mathscr{C}$ 的定义，并采用与$\widehat{\ }$中 [17, 第 12 节1]相同的论证，证明 $\mathscr{C}$ 具有对称幺半范畴的结构。

注记 2.25。取 $\mathscr{B} = \mathscr{C} \boxtimes \mathscr{C}omm$ 如 命题 2.13中所示，则存在$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$\mathscr{V}$-富集对称幺半范畴之间的映射 $\mathscr{C} \to \mathscr{B} \to \mathscr{C} \to \mathscr{B}$。

2.4. **单子的丰饶或稀缺**。我们回顾一种一般的单子构造 [15]，并证明将其应用于置换包络 $\mathscr{C}$ 及其子范畴 Σ 和 Λ时，所得单子同构于与幺半群$\mathscr{C}$相关联的单子。我们完全刻画右 $\mathscr{C}$-模的范畴。

定义 2.26. 设 $\mathscr{D}$ 是一个以 $\mathscr{V}$为丰的范畴，Ξ 是 $\mathscr{D}$的一个子范畴。若 Ξ 是离散的，包含 $\mathscr{D}$的所有对象，并且通过态射 $\coprod_{\Xi(X,Y)} \mathcal{I} \to \mathscr{D}(X,Y)$ 成为 $\mathscr{D}$ 的一个子范畴，其中 $X, Y \in \mathscr{D}$为对象，则称 Ξ 是 $\mathscr{D}$ 的离散宽子范畴。

设 $\mathscr{D}$ 是一个以 $\mathscr{V}$ 为丰的范畴，且 Ξ 是$\mathscr{D}$的离散宽子范畴。回顾一下，对于函子 $X\colon \Xi \to \mathscr{V}$ 和 $Y\colon \Xi^{op} \to \mathscr{V}$，$Y \otimes_\Xi X$ 是余端 [1]

$$\int^{\mathbf{m}\in\Xi} Y(\mathbf{m}) \otimes X(\mathbf{m}).$$

定义 2.27. ([15, 构造 2.1]) $\Xi[\mathscr{V}]$ 中的相伴单子 $\mathbb{D}_\Xi$ 定义如下：

$$\mathbb{D}_\Xi X(\mathbf{n}) = \mathscr{D}(-,\mathbf{n}) \otimes_\Xi X.$$

我们也可以在反变函子上定义一个单子。

定义 2.28. 与之关联的单子 $\mathbb{D}^{op}_\Xi$ 在 $\Xi^{op}[\mathscr{V}]$ 中由下式给出

$$\mathbb{D}^{op}_\Xi Y(\mathbf{n}) = Y \otimes_\Xi \mathscr{D}(\mathbf{n},-).$$

[1]由于我们的应用，我们将 Ξ 的对象记作 $\mathbf{m}$ 。

可以验证，上述定义确实给出了单子。例如，单位映射 $\eta\colon X \to \mathbb{D}_\Xi X$ 由下式给出

$$X(\mathbf{n}) = \int^{\mathbf{m}} \Xi(\mathbf{m},\mathbf{n}) \otimes X(\mathbf{m}) \to \int^{\mathbf{m}} \mathscr{D}(\mathbf{m},\mathbf{n}) \otimes X(\mathbf{m}) = \mathbb{D}_\Xi X(n)$$

我们证明一个范畴论事实，用以刻画代数；其中一个特殊情形陈述于 [15, 命题 2。5] 但未给出证明。

命题 2.29。 设 Ξ 是 $\mathscr{V}$-富集范畴 $\mathscr{D}$的一个离散宽子范畴。存在如下范畴同构：

$$\mathrm{Fun}_{\mathscr{V}}(\mathscr{D},\mathscr{V}) \cong \mathrm{Alg}_{\mathbb{D}_\Xi}[\Xi[\mathscr{V}]]$$
$$\mathrm{Fun}_{\mathscr{V}}(\mathscr{D}^{op},\mathscr{V}) \cong \mathrm{Alg}_{\mathbb{D}_\Xi^{op}}[\Xi^{op}[\mathscr{V}]]$$

证明。 我们证明第一种情形；第二种情形可由在第一种情形中令 $\mathscr{D}$ 为$\mathscr{D}^{op}$ 、令 Ξ 为 Ξ^{op} 得到。我们将子范畴的包含映射记为 $\iota\colon \Xi \to \mathscr{D}$。单子 $\mathbb{D}_\Xi$ 确实是函子范畴$\iota^*\colon \mathrm{Fun}_{\mathscr{V}}(\mathscr{D},\mathscr{V}) \to \mathrm{Fun}_{\mathscr{V}}(\Xi,\mathscr{V})$的自由-遗忘伴随所对应的单子；由贝克单子性定理，我们证明这是一个单子伴随，结论随即得证。由于 Ξ 是宽子范畴， ι^*反映同构。现在取函子 $F,G \in \mathrm{Fun}_{\mathscr{V}}(\mathscr{D},\mathscr{V})$、 $H \in \mathrm{Fun}_{\mathscr{V}}(\Xi,\mathscr{V})$以及一个分裂余等化子图表

$$\iota^*F \underset{\iota^*g}{\overset{\iota^*f}{\rightrightarrows}} \iota^*G \underset{s}{\overset{e}{\rightleftarrows}} H.$$

我们通过在对象上令 $K(\mathbf{m}) = H(\mathbf{m})$，并在态射上如交换图表所示令 $K = e \circ H$，来定义 $K \in \mathrm{Fun}_{\mathscr{V}}(\mathscr{D},\mathscr{V})$

$$\begin{array}{ccc} \Xi(\mathbf{m},\mathbf{n}) & \xrightarrow{H} & \underline{\mathrm{Hom}}(H(\mathbf{m}),H(\mathbf{n})) \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & \overset{K}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle e} \\ \mathscr{D}(\mathbf{m},\mathbf{n}) & \xrightarrow[G]{} & \underline{\mathrm{Hom}}(G(\mathbf{m}),G(\mathbf{n})) \end{array}$$

那么 K 是 f,g 和 $\iota^*K = H$ 的余等化子。 □

令 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{V}$中的一个带基点算子。我们将 定义 2.28 应用于置换包络 $\mathscr{C}$ 和算子范畴 $\overline{\mathscr{C}}$，得到四个相应的单子 $\mathbb{C}_\Sigma^{op}$ 、$\mathbb{C}_\Lambda^{op}$ 、 $\widehat{\mathbb{C}}_\Sigma^{op}$ 、 $\widehat{\mathbb{C}}_\Lambda^{op}$ 。 命题 2.29 刻画了相应范畴中这些单子上的代数。

引理 2.30。 单子 $\mathbb{C}_\Sigma^{op}$ 和 $\mathbb{C}_\Lambda^{op}$同构于与幺半群 $\mathscr{C}$ 相关联的单子 $-\odot\mathscr{C}$，它们是 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 和 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$上的右端函子。

证明。 我们对 Λ 给出证明； Σ 的情形类似。根据定义，我们有

$$(\overline{\mathbb{C}}_\Lambda^{op}Y)(\mathbf{n}) = \int^{\mathbf{m}} Y(\mathbf{m}) \otimes \overline{\mathscr{C}}(\mathbf{n},\mathbf{m}) = \int^{\mathbf{m}} Y(\mathbf{m}) \otimes \mathscr{C}^{\boxtimes m}(\mathbf{n}) = (Y \odot_\Lambda \mathscr{C})(\mathbf{n}).$$

结构映射 $\mu\colon \mathbb{C}_\Lambda^{op}\mathbb{C}_\Lambda^{op}Y \to \mathbb{C}_\Lambda^{op}Y$和 $\eta\colon C_\Lambda^{op}Y \to Y$恰好是右模结构映射 $\mu'\colon Y \odot_\Lambda \mathscr{C} \odot_\Lambda \mathscr{C} \to Y \odot_\Lambda \mathscr{C}$和 $\eta'\colon Y \odot_\Lambda \mathscr{C} \to Y$。□

定理 2.31。 以下各组中的范畴彼此同构。

(1) (a) 函子范畴$\overline{\mathscr{V}}(\mathscr{C}^{op},\mathscr{V})$.

(b) 代数范畴$_{\mathbb{C}_\Sigma^{op}}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]]$

(c) 代数范畴$_{\mathbb{C}_\Lambda^{op}}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]]$

(d) 右模范畴$_{\mathscr{C}}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]]$
(e) 右模范畴$_{\mathscr{C}}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]]$(
2) (a) 函子范畴$_{\mathscr{V}}(\mathscr{C}^{op},\mathscr{V})$.
(b) 代数范畴$_{\widehat{\mathbb{C}^{op}_{\Sigma}}}[\Sigma^{op}[\mathscr{V}]]$(
c) 代数范畴$_{\widehat{\mathbb{C}^{op}_{\Lambda}}}[\Lambda^{op}[\mathscr{V}]]$
特别是，这给出了定理 *2.5*的另一种证明。

证明。命题 2.29 给出了(1a) (1b) (1c) 以及(2a) (2b) (2c)的同构。引理 2.30 表明$(1c) \cong (1e)$ 以及$(1b) \cong (1d)$。□

例 2.32。我们有：

(1) $\mathscr{I}_1$ 在 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 中或在 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$ 中的右模范畴与从 Λ 到 $\mathscr{V}$的反变函子范畴同构。(2) $\mathscr{C}omm$ 在 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$ 中或在 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$ 中的右模范畴与从 $\mathscr{F}_{>0}$ 到 $\mathscr{V}$的反变函子范畴同构。

3. Monoidal localization

3.1. **局部化**。设 $\mathscr{V}$ 为一个范畴，S 为 $\mathscr{V}$中的一族态射。Gabriel 和 Zisman [7] 构造了一个范畴 $\mathscr{V}[S^{-1}]$，称为关于 S 的 $\mathscr{V}$ 的局部化，以及一个忠实函子 $L: \mathscr{V} \to \mathscr{V}[S^{-1}]$，具有以下性质：

(1) 对于 S中的任意态射 s，$L(s)$ 都是一个同构。(2) 对于任意函子 $F: \mathscr{V} \to \mathscr{W}$，若对任意 S 中的 s，其像 $F(s)$ 都是一个同构，则存在唯一的函子 $\tilde{F}: \mathscr{V}[S^{-1}] \to \mathscr{W}$，使得$F = F \circ L$。

局部化 $\mathscr{V}[S^{-1}]$ 可如下刻画。$\mathscr{V}[S^{-1}]$的对象与 $\mathscr{V}$的对象相同。对于态射，我们考虑 $\mathscr{V}$中的“项链”，也就是 $\mathscr{V}$中形如以下形式的图表

$$\leftarrow \cdots \leftarrow \rightarrow \cdots \rightarrow \leftarrow \cdots \leftarrow \rightarrow \cdots \rightarrow$$

其中每个 $\rightarrow$ 表示 Mor($\mathscr{V}$) 中的一个态射，每个 $\leftarrow$ 表示 S 中的一个态射。对于 A，$B \in$ Ob($\mathscr{V}[S^{-1}]$) $=$Ob($\mathscr{V}$)，我们将 Map$^{\mathscr{V}[S^{-1}]}(A,\ B)$ 定义为 $\mathscr{V}$ 中所有连接 A和 B 的项链所构成的集合，并对以下关系取商。

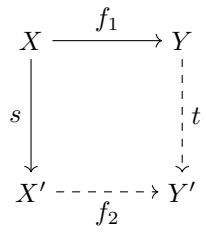
(1) $\xrightarrow{f}\xrightarrow{g}\sim\xrightarrow{g\circ f}$。(2) 对于 s：$A \to B$ 属于 S，
$\xrightarrow{s}\xleftarrow{s}\sim id_A$, $\xleftarrow{s}\xrightarrow{s}\sim id_B$。
复合按显然的方式定义。我们取 L：$\mathscr{V} \to \mathscr{V}[S^{-1}]$ 作为嵌入。可以验证，上述泛性质成立。

我们的目标是对一个对称幺半范畴 $\mathscr{V}$进行局部化，使张量积与小余极限或有限余极限可交换。一个直接的尝试是，直接取S为所有形如 $\{\mathrm{colim}_{i\in I}(A_i \otimes X) \to \mathrm{colim}_{i\in I}(A_i)\otimes X\}$的态射所组成的集合，其中 I 遍历所有小范畴，X 遍历 $\mathscr{V}$ 中的对象。为确保 $\mathscr{V}[S^{-1}]$ 拥有足够的余极限，Gabriel 和 Zisman 引入了 S 的以下性质。

定义 3.1. [7, 定义 2.2.] 设 $\mathscr{V}$为一个范畴，S 为一个态射集。若集合 S 满足以下性质，则称其为右乘法系 （或称 S 具有左分式演算）：S。

(1) $\mathscr{V}$的恒等态射都属于 S。

(2) 若 $f\colon A \to B$和 $g\colon B \to C$ 是 S中的两个态射，则 $g \circ f\colon A \to C$ 属于S。
(3) 假设给定两个态射 $f_1 : X \to Y$ 和 $s : X \to X'$，且 s属于 S，则存在两个态射 $f_2\colon X' \to Y'$ 和 $t\colon Y \to Y'$，其中 t 属于 S，并且下图表可交换



(4) 假设给定两个态射 $g_1, g_2\colon X \rightrightarrows Y$ in $\mathscr{V}$，以及一个态射$s\colon W \to X$ in S，满足 $g_1 \circ s = g_2 \circ s$，则存在一个对象 Z 和一个态射 $t\colon Y \to Z$ in S，使得 $t \circ g_1 = t \circ g_2$。

我们对偶地定义左乘法系统（或允许右分式演算的态射集）。如果 S 既是右乘法系统又是左乘法系统，则称其为乘法系统。

定义 3.2。固定一个基数 κ。若乘法系统 $S \subset \mathrm{Mor}(\mathscr{V})$ 在态射的 κ-小积与余积下封闭，则称其为κ-封闭；若它在态射的小积与余积下封闭，则称其为封闭。

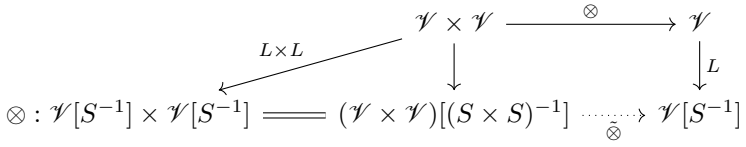
命题 3.3。设 S 是 $\mathscr{V}$ 中的一个乘法系统。

- 局部化 $L\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}[S^{-1}]$ 保留 (在[6, 命题 3.1]) 中存在的有限极限和余极限。
- 若 S 是 κ-闭的，则局部化 $L\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}[S^{-1}]$ 保留 $\mathscr{V}$ (在[10,命题 3.5。1]) 中存在的 κ-小极限和余极限。

定义 3.4。若态射集 $S \subset \mathrm{Mor}(\mathscr{V})$ 在与恒等映射 $\mathrm{id}_X : X \to X$ 张量后仍属于该态射集，对所有 $X \in \mathscr{V}$ ([4, 页1]) 都成立，则称其为幺半的。

命题 3.5。设 S 是幺半的。那么局部化 $L\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}[S^{-1}]$ 是强对称幺半的。

证明。这由 [4, 推论 1.4] 得出，我们在此给出另一种证明。注意，局部化 $L\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}[S^{-1}]$ 诱导出一个函子 $L \times L\colon \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}[S^{-1}] \times \mathscr{V}[S^{-1}]$。取 $S \times S \subset \mathrm{Mor}(\mathscr{V} \times \mathscr{V})$，形式上有 $(\mathscr{V} \times \mathscr{V})[(S \times S)^{-1}] \cong \mathscr{V}[S^{-1}] \times \mathscr{V}[S^{-1}]$。由于我们已规定 S 在有限复合以及与恒等态射的张量运算下封闭，因此对于 $(s_1, s_2) \in S \times S$，$L(s_1 \otimes s_2) = L(\mathrm{id} \otimes s_2) \circ L(s_1 \otimes \mathrm{id})$ 在 $\mathscr{V}[S^{-1}]$ 中是可逆的。因此，根据泛性质，存在唯一的函子 $\tilde{\otimes}\colon \mathscr{V}[S^{-1}] \times \mathscr{V}[S^{-1}] \to \mathscr{V}[S^{-1}]$，使得 $\tilde{\otimes} \circ (L \times L) = L \circ \otimes$。这赋予了 $\mathscr{V}[S^{-1}]$ 继承而来的对称幺半结构。



□

我们也将 $\mathscr{V}[S^{-1}]$ 上诱导的张量积记为 $\otimes$。由以上讨论可得 $LA \otimes LB = L($$A \otimes B)$。

3.2. **单oidal乘法闭包**。

构造 3.6. 对于包含所有恒等态射的 $S \subset \mathrm{Mor}(\mathscr{V})$，我们通过超限归纳为每个序数 α 定义一个态射集 S_α。

令 $S_0 = S$。对于序数 α，假设对所有$\beta < \alpha$， S_β 均已构造。当 α 是极限基数时，我们定义 $S_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} S_\beta$。当 $\alpha = \beta + 1$时，我们如下定义 S_α。

(1) 令$T_{\alpha,0} = S_\beta$。令$T_{\alpha,1}$ 为所有形如$s_1 : Y \to Y \coprod_X Z$的态射构成的集合，其中 $s_0 : X \to Z$ 属于$T_{\alpha,0}$，且 $f_1 : X \to Y$ 属于 $\mathscr{V}$。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ {\scriptstyle s_0}\downarrow & & \vdots\downarrow{\scriptstyle s_1} \\ Z & \dashrightarrow & Y \coprod_X Z \end{array}$$

注意，$T_{\alpha,1}$ 包含 $T_{\alpha,0}$。

(2) $T_{\alpha,\ 2}$ 由$T_{\alpha,\ 1}$ 中的态射以及所有典范态射组成

$$s_2 : \mathrm{coeq}(f \circ s_1, g \circ s_1) \to \mathrm{coeq}(f, g),$$

其中 f， $g : X \rightrightarrows Y$是 $\mathscr{V}$中的两个态射，而 $s_1 : W \to X$ 属于$T_{\alpha,\ 1}$。

$$W \xrightarrow{s_1} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \longrightarrow \mathrm{coeq}(f \circ s_1, g \circ s_1) \vdots\downarrow{\scriptstyle s_2} \mathrm{coeq}(f, g)$$

(3) $T_{\alpha,\ 3}$ 是所有形如 $s_3 : Y \coprod_X Z \to Y$ 的态射的集合，其中$s_2 : Z \to X$ 属于 $T_{\alpha,\ 3}$，且 $f_1 : Y \to X$ 属于 $\mathscr{V}$。

$$\begin{array}{ccc} Y \coprod_X Z & \dashrightarrow & Z \\ \vdots{\scriptstyle s_3}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_2} \\ Y & \xrightarrow[f_1]{} & X \end{array}$$

注意，$T_{\alpha,\ 3}$ 包含$T_{\alpha,\ 2}$。

(4) $T_{\alpha,\ 4}$ 由$T_{\alpha,\ 3}$ 中的态射以及所有典范态射组成

$$s_4 : \mathrm{eq}(f, g) \to \mathrm{eq}(s_3 \circ f, s_3 \circ g),$$

其中 f， $g : X \rightrightarrows Y$是 $\mathscr{V}$中的两个态射，而 $s_3 : Y \to Z$ 属于$T_{\alpha,\ 3}$。

$$\mathrm{eq}(f, g) \vdots{\scriptstyle s_4}\downarrow \searrow \mathrm{eq}(s_3 \circ f, s_3 \circ g) \longrightarrow X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{s_3} Z$$

（5）$T_{\alpha,\ 5}$ 由$T_{\alpha,\ 4}$中的所有有限态射复合组成。

(6) $T_{\alpha,6}$ 由$T_{\alpha,5}$中态射的所有 α-小余积与积组成。

(7) $T_{\alpha,7}$ 由所有形如$\mathrm{id}_X \otimes s_6$或 $s_6 \otimes \mathrm{id}_X$的态射组成，其中 s_6 属于$T_{\alpha,6}$ ，且 X 是 $\mathscr{V}$中的一个对象。我们令 $S_\alpha := T_{\alpha,7}$。

定理 3.7。对于正则基数 κ， $S := S_\kappa$ 在 构造 *3.6* 是一个κ-闭的幺半乘法系统，包含 S。它具有如下泛性质：若 S' 是一个 κ-闭的幺半乘法系统，包含 S，则局部化 $L'\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}[(S')^{-1}]$ 唯一地经由 $L\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}[S^{-1}]$分解。

我们将 $\overline{S}$称为 S的 κ-闭幺半乘法闭包。我们还有$\cup_\kappa S_\kappa$ 作为 S的幺半乘法闭包，它具有类似的泛性质。

证明。根据构造，我们有 $S = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_\kappa = \bigcup_{\beta<\kappa} S_\beta = \overline{S}$。

(1) 我们首先证明 S 既是右乘法系统，也是左乘法系统，即 S满足定义 3.1中的(1) 至 (4) 以及对偶陈述。

从构造可明显看出，S 包含所有恒等态射，且在有限复合下封闭。对于任意态射 $f_1\colon X \to Y$属于 $\mathscr{V}$，以及 $s\colon X \to X'$ 属于$S_\beta \subset S$，诱导映射 $s'\colon Y \to Y \coprod_X X'$ 属于 $S_{\beta+1} \subset S_\kappa$。假设给定两个态射 g_1， $g_2\colon X \rightrightarrows Y$属于 $\mathscr{V}$，以及一个态射 $s\colon W \to X$ 属于 $S_\beta \subset S$，满足 $g_1 \circ s = g_2 \circ s$。我们可以取 $Z = \mathrm{coeq}(f,\ g)$，以及 $t\colon Y \cong \mathrm{coeq}(f\circ s,\ g\circ s) \to \mathrm{coeq}(f,\ g) = Z$。那么 t 属于 $S_{\beta+1} \subset S$。对偶地，左乘法系统的相应断言也成立。

(2) 接下来我们验证 $\overline{S}$ 在 κ-小积和余积下封闭。对于任意序数 $\alpha < \kappa$和 $s_1, \ldots s_\alpha \in S$，对每个 $i \le \alpha$，都存在一个序数 $f(i) < \kappa$使得 $s_i \in S_{f(i)}$。取 $\beta_0 = \mathrm{Sup}\{f(1) \cdots,\ f(\alpha)\}$。由于 κ是正则基数，我们必有 $\beta_0 < \kappa$。根据构造，我们有 $\coprod_i s_i \in S_{\beta_0+1} \subset S_\kappa$ 和 $\prod_\tau s_i \in S_{\beta_0+1} \subset S_\kappa$。容易看出， S 在与恒等态射作张量积下封闭。

(3) 还需证明泛性质。假设另有一个包含 S 的κ-闭幺半乘法系统，记为 S'。我们用归纳法证明，对于任意序数 $\alpha \le \kappa$， L' 将 S_α 中的态射映到 $\mathscr{V}[S'^{-1}]$中的同构。基例成立，因为 $S_0 = S$。假设对所有 $\beta < \alpha$， $L'(S_\beta)$都是同构，我们希望证明 $L'(S_\alpha)$ 也满足这一点。如果 α 是极限序数，根据 S_α的定义，结论成立。如果 $\alpha = \beta + 1$ 对某个β成立，利用 L' 保 κ-小极限、余极限和张量积的事实（命题 3.3 和 命题 3.5），可以证明 L' 将构造 3.6 中的每个类映为同构。例如，L' 将 $T_{\alpha,\ 1}$ 映为同构，因为它对$T_{\alpha,\ 0}$ 如此，而同构的推出仍是同构。

由此，结论可由局部化的泛性质得出。 □

3.3. **闭张量局部化**。

引理 3.8. 设 J 是一个小图表， $\mathcal{B}$ 是 J中的一组态射。设 $J' = J[\mathcal{B}^{-1}]$ 为通过给每个 $f \in \mathcal{B}$添加逆态射而得到的图表。那么包含 $\iota\colon J \to J'$ 是共尾的 [2]。

证明。我们需要证明，对于所有对象 $x \in J'$，逗号范畴 $x \downarrow \iota$ 都非空且连通。显然，它包含对象 $(x \in J, \mathrm{id}\colon x \to x \in J')$。

[2]我们所说的共尾，是指在 [13, IX.3], 中就余极限而言为终。

假设给定任意对象 $(y \in J,\ F\colon x \to y \in J')$。那么 F 可以写成有限个复合映射

$$x = x_0 \xrightarrow{F_1} x_1 \xrightarrow{F_2} x_2 \xrightarrow{F_3} \cdots \xrightarrow{F_n} x_n = y,$$

其中每个 F_i 要么属于 J，要么是 $\mathcal{B}$中某个态射的形式逆。记$F_0 = \mathrm{id}_x$和 $G_i = F_i \circ F_{i-1} \circ \cdots \circ F_0$。我们通过给出对象对 (x, G_{i-1}) 与 (x, G_i) 之间的态射，证明存在一条从 (x, G_0) 到 (x, G_n) 的 $x \downarrow \iota$ 中态射之字形。

- Case 1: $F_i = g$ for $g \in J$. The diagram $\begin{array}{ccc} x & = & x \\ {\scriptstyle G_{i-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G_i} \\ x_{i-1} & \xrightarrow[F_i]{} & x_i \end{array}$ is a morphism from (x, G_{i-1}) to (x, G_i).
- Case 2: $F_i = f^{-1}$ for $f \in \mathcal{B}$. The diagram $\begin{array}{ccc} x & = & x \\ {\scriptstyle G_{i-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G_i} \\ x_{i-1} & \xleftarrow[f]{} & x_i \end{array}$ is a morphism from (x, G_i) to (x, G_{i-1}). □

定理 3.9. 令 $S = \{\mathrm{colim}_{i\in I}(A_i \otimes X) \to \mathrm{colim}_{i\in I}(A_i) \otimes X\}$，其中 I遍历所有 κ-小范畴，X 遍历 $\mathscr{V}$中的所有对象。则

(1) 局部化 $L\colon \mathscr{V} \to L\mathscr{V} := \mathscr{V}[S^{-1}]$ 保持 κ-小极限、余极限和张量积。*(2)* 对于 $\mathscr{V}$中的任意 κ-小图表 $(A_j)_{j\in J}$ 以及任意对象 $X \in \mathscr{V}$，诱导映射

$$\mathrm{colim}_{j\in J}(LA_j \otimes LX) \to \mathrm{colim}_{j\in J}(LA_j) \otimes LX$$

是 $L\mathscr{V}$ 中的一个同构。

(3) 对于任意 κ-小图表$(B_i)_{i\in I}$，在 $L\mathscr{V}$ 中以及任意对象 $X \in L\mathscr{V}$，自然映射

$$\mathrm{colim}_{i\in I}(B_i \otimes X) \to (\mathrm{colim}_{i\in I} B_i) \otimes X$$

是 $L\mathscr{V}$ 中的一个同构。

证明。 第 (1) 由 命题 3.3 和命题 3.5 得出。第 (2) 由 (1) 得出。

接下来只需证明第 (3) 项。我们用 X 表示它在 $\mathscr{V}$中的提升。我们可以利用项链将图表 $D_0 = (B_i)_{i\in I}$ 在 $L\mathscr{V}$中提升为一个 κ-小图表 $D = (A_j)_{j\in J}$，它位于 $\mathscr{V}$中，其中 $\mathrm{ob}(I) \subset \mathrm{ob}(J)$ 且 $A_i = B_i$ 对于 $i \in I$。

根据构造，如果我们将项链中的所有反向箭头反转，就得到另一个 κ-小范畴 K，其对象与 J 相同。由于 J 中的反向箭头在 $L\mathscr{V}$ 中被映射为同构，我们可以构造一个图表 $D'\colon K \to L\mathscr{V}$ 在项链中的对象和正向箭头上，$D' = LD$ $(s) = D(s)^{-1}$，如果 s 是项链 J 中的一个反向箭头，并通过复合将其延拓到其他态射。于是 I 是 K 的一个子范畴，并且 $(B_i)_{i\in I} = (D')|_I$。可以证明，$I \subset K$ 是一个共终子范畴，因此

$$\mathrm{colim}_K(D') \cong \mathrm{colim}_I(B_i) \tag{3.10}$$

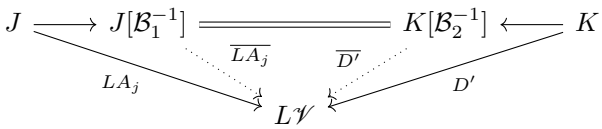
$$\mathrm{colim}_K(D' \otimes X) \cong \mathrm{colim}_I(B_i \otimes X) \tag{3.11}$$

$$\underset{\mathrm{J}}{\mathrm{r} \xleftarrow{s} \mathrm{j} \xrightarrow{f} \mathrm{t}} \qquad \underset{D=(A_j)\text{ in }\mathscr{V}}{B_r \xleftarrow{D(s)} A_j \xrightarrow{D(f)} B_t}$$

$$\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{r} \longrightarrow \mathrm{t}} \qquad \underset{\mathrm{K}}{\mathrm{r} \xrightarrow{s} \mathrm{j} \xrightarrow{f} \mathrm{t}}$$

$$\underset{D_0=(B_i)\text{ in }L\mathscr{V}}{B_r \longrightarrow B_t} \qquad \underset{D'\text{ in }L\mathscr{V}}{B_r \xrightarrow[\sim]{D'(s)} A_j \xrightarrow{LD(f)} B_t}$$

将 J 中所有反向箭头的类记为 $\mathcal{B}_1$，并将 K 中相应的逆转箭头记为 $\mathcal{B}_2$。于是 $J[\mathcal{B}_1^{-1}] \cong K[\mathcal{B}_2^{-1}]$，且根据万有性质，虚线箭头存在且相等：



有

$$\operatorname{colim}_J(LA_j) \cong \operatorname{colim}(\overline{LA_j}) \cong \operatorname{colim}(\overline{D'}) \cong \operatorname{colim}_K(D'), \tag{3.12}$$

其中第一个和最后一个同构由引理 3.8给出。类似地，有

$$\operatorname{colim}_J(LA_j \otimes X) \cong \operatorname{colim}_K(D' \otimes X). \tag{3.13}$$

注意，在这种情形下，我们用到了这样一个事实：如果 s是项链中的一个反向箭头，那么 $LD(s) \otimes \mathrm{id}_X$ 和 $D'(x) \otimes \mathrm{id}_X$ 都是 $L\mathscr{V}$中的同构，这由 S的幺半性质保证。

合并(3.12)、(3.13)和第(2)项，可得

$$\operatorname{colim}_K(D' \otimes X) \cong (\operatorname{colim}_K D') \otimes X.$$

结合(3.10) 和(3.11)，证明即告完成。 □

4. Normal oplax monoidal structure

设（$\mathscr{V}$，$\otimes$，$\mathcal{I}$）是一个对称幺半范畴，且 L 是定理定理 3.9中定义的幺半局部化函子。本节讨论当 Λ-序列中的 $\otimes$ 在 $\mathscr{V}$中不假设与余极限交换时的幺半积。

4.1. n重 Day 卷积。 对于有限集 S 以及 $\mathscr{V}$中的对象 X，定义$S \otimes X = \amalg_S X$ 为对象 X的 S 重余积。有

$$S \otimes (T \otimes X) \cong (S \times T) \otimes X \text{ for finite sets } S, T \text{ and } X \in \mathscr{V}.$$

命题 4.1。 函子 $-\otimes X\colon \mathrm{FinSet} \to \mathscr{V}$与有限余极限交换；函子 $T \otimes - : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$与余极限交换。

证明。 由定义可得。 □

警告 4.2. 对于 X, $Y \in \mathscr{V}$, $S \otimes (X \otimes Y)$ 只有当 $\otimes$ 在 $\mathscr{V}$ 中与有限余极限交换时，才能与 $(S \otimes X) \otimes Y$ 视为相同。我们会谨慎处理括号的放置。

定义 4.3. 对于 $\mathscr{D}_1$, ……, $\mathscr{D}_n \in \Lambda^{op}[\mathscr{V}]$, n 重盒积定义为

$$\mathscr{D}_1 \boxtimes_\Lambda \cdots \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_n = \int^{i_1,\ldots,i_n} \Lambda(-, \mathbf{i_1} + \cdots + \mathbf{i_n}) \otimes \Big(\mathscr{D}_1(\mathbf{i_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_n(\mathbf{i_n}) \Big)$$

注记 4.4. 由泛性质可得映射 $\mathscr{D}_1 \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_2 \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_3 \to (\mathscr{D}_1 \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_2) \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_3$ 和 $\mathscr{D}_1 \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_2 \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_3 \to \mathscr{D}_1 \boxtimes_\Lambda (\mathscr{D}_2 \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_3)$。只有当 $\otimes$ 与余极限交换时，它们才是同构。事实上，$(\Lambda^{op}[\mathscr{V}], \boxtimes_\Lambda, \mathscr{I}_0)$ 构成了稍后在 定义 4.17 中定义的正规反松弛幺半结构，但我们将省略细节。

命题 4.5. 对于 $\mathscr{D}_1$, ……, $\mathscr{D}_n \in \Lambda^{op}[\mathscr{V}]$, 自然映射

$$\iota : \mathscr{D}_1 \boxtimes_\Sigma \cdots \boxtimes_\Sigma \mathscr{D}_n \to \mathscr{D}_1 \boxtimes_\Lambda \cdots \boxtimes_\Lambda \mathscr{D}_n$$

是 Σ-序列的同构。

证明。 由于左 Kan 扩张可经由箭头范畴上的余极限逐点计算，只需证明在该图表中

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{op} \times \cdots \times \Sigma^{op} & \xrightarrow{i \times \cdots \times i} & \Lambda^{op} \times \cdots \times \Lambda^{op} \\ {\scriptstyle \vee_\Sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \vee_\Lambda} \\ \Sigma^{op} & \xrightarrow[i]{} & \Lambda^{op} \end{array}$$

箭头范畴的诱导映射 $i : \ \vee_\Sigma \downarrow \mathbf{n} \ \to \vee_\Lambda \downarrow \mathbf{n}$ 对每个 $\mathbf{n} \in \Sigma$ 均为共尾。 [17,定理 3.4] 的证明完全同样适用。□

4.2. 2**重 Kelly 积**。 回顾当 $(\mathscr{V}, \otimes, \mathcal{I})$ 为闭对称幺半时，Kelly 积定义为余端

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1 \odot_\Lambda \mathscr{D}_2 &:= \int^{\mathbf{k}} \mathscr{D}_1(\mathbf{k}) \otimes \mathscr{D}_2^{\boxtimes k} \\ &\cong \int^{\mathbf{k}, \mathbf{n_1}, \ldots, \mathbf{n_k}} \Lambda(-, \mathbf{n_1} + \cdots + \mathbf{n_k}) \otimes \mathscr{D}_1(\mathbf{k}) \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_k}) \end{aligned}$$

这些等价定义涉及若干同构，它们 $\otimes$与余极限交换。受此启发，对于 $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2 \in \Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$，我们令

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2^{\otimes k} : \Lambda^{op} \times (\Lambda^{op})^k &\to \mathscr{V} \\ (\mathbf{m}, \mathbf{n_1}, \cdots, \mathbf{n_k}) &\mapsto \mathscr{D}_1(\mathbf{m}) \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_k}). \end{aligned}$$

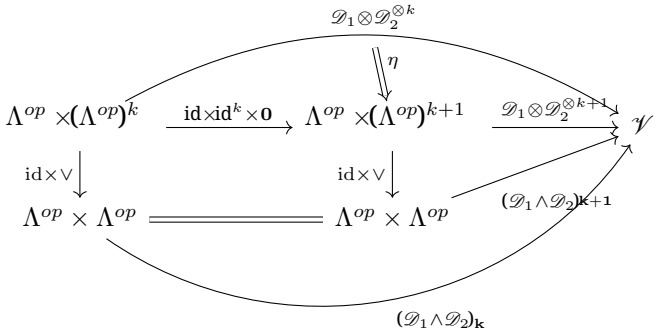
设 $(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_\mathbf{k} : \ \Lambda^{op} \times \Lambda^{op} \to \mathscr{V}$为如下所示的左 Kan 延拓:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{op} \times (\Lambda^{op})^k & \xrightarrow{\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2^{\otimes k}} & \mathscr{V} \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \times \vee}\downarrow & \nearrow_{(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_\mathbf{k}} & \\ \Lambda^{op} \times \Lambda^{op} & & \end{array}$$

具体来说,

$$(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_\mathbf{k}(\mathbf{m}, -) = \int^{\mathbf{n_1}, \cdots, \mathbf{n_k}} \Lambda(-, \mathbf{n_1} + \cdots + \mathbf{n_k}) \otimes \big(\mathscr{D}_1(\mathbf{m}) \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_k}) \big).$$

函子 $(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_{\mathbf{k}}(-,\ -)$ 对 Λ 中的 $\mathbf{k}$ 也具有函子性。为此，只需检验形如 σ_{k+1} 的态射：$\mathbf{k} \to \mathbf{k}+\mathbf{1}$。我们考察 $(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_{\mathbf{k}}$ 和 $(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_{\mathbf{k+1}}$ 的以下定义图表。



自然变换 η 由 $\mathcal{I} \to \mathscr{D}_2(\mathbf{0})$诱导，并且我们有自然变换

$$(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_{\mathbf{k}} \to \mathrm{LKan}_{\mathrm{id}\times\vee}\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2^{\otimes k} \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{0}) \to (\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_{\mathbf{k+1}},$$

其中，第一个箭头由 η 诱导，第二个箭头由 $\mathrm{id} \times \mathrm{id}^k \times \mathbf{0}$诱导。

定义 4.6. 对于 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2 \in \Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$，定义二重 Kelly 积为

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_1 \odot_\Lambda \mathscr{D}_2 &= \int^{\mathbf{k}} (\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2)_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, -) \\ &= \int^{\mathbf{k},\mathbf{n_1},\ldots,\mathbf{n_k}} \Lambda(-, \mathbf{n_1} + \cdots + \mathbf{n_k}) \otimes \big(\mathscr{D}_1(\mathbf{k}) \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_k})\big)\end{aligned}$$

命题 4.7. 与 $L : \mathscr{V} \to L\mathscr{V}$复合，得到函子

$$L : \Lambda^{op}[\mathscr{V}] \to \Lambda^{op}[L\mathscr{V}] \ \textit{and}\ L : \Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0} \to \Lambda^{op}[L\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$$

它们保持 $\boxtimes_\Lambda$ 和 $\odot_\Lambda$。

证明. 这是因为 L 在 $\mathscr{V}$中保持余极限和张量积。 □

We denote $\mathscr{I}_1 = \Lambda(-, \mathbf{1}) \otimes \mathcal{I}$. It is a unital Λ-sequence.

例 4.8. 有两个典范态射 $\alpha_{1,\ 0,\ 0} :\ \mathscr{D} \to \mathscr{I}_1 \odot_\Lambda \mathscr{D}$ 和$\alpha_{1,\ 1,\ 0} :\ \mathscr{D} \to \mathscr{D} \odot_\Lambda \mathscr{I}_1$，我们现在定义它们。由 Yoneda 引理可知，存在

$$\begin{aligned}\mathscr{D} &= \int^{\mathbf{n_1}} \Lambda(-, \mathbf{n_1}) \otimes \mathscr{D}(\mathbf{n_1}) \\ &= \int^{\mathbf{k},\mathbf{n_1},\cdots,\mathbf{n_k}} (\Lambda(-, \mathbf{n_1} + \cdots + \mathbf{n_k}) \times \Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{1})) \otimes \mathscr{D}(\mathbf{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}(\mathbf{n_k})\end{aligned}$$

通过像.....中那样将张量积与余积交换

$$\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{1}) \otimes (\mathcal{I} \otimes X) \to (\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{1}) \otimes \mathcal{I}) \otimes X,$$

映射 $\alpha_{1,\ 0,\ 0}$ 将 $\mathscr{D}$ 映射到

$$\mathscr{I}_1 \odot_\Lambda \mathscr{D} = \int^{\mathbf{k},\mathbf{n_1},\cdots,\mathbf{n_k}} \Lambda(-, \mathbf{n_1} + \cdots + \mathbf{n_k}) \otimes \left((\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{1}) \otimes \mathcal{I}) \otimes \mathscr{D}(\mathbf{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}(\mathbf{n_k})\right).$$

$\alpha_{1,\ 1,\ 0}$也同理。

注记 4.9. 当 $\otimes$ 与 $\mathscr{V}$ 中的余极限可交换时，$\alpha_{1,\ 0,\ 0}$ 和 $\alpha_{1,\ 1,\ 0}$ 都是同构。一般而言，$\mathscr{I}_1$ 不一定与 $\mathscr{I}_1 \odot_\Lambda \mathscr{I}_1$ 同构。

4.3. 三**重 Kelly 乘积**。现在我们考虑三重乘积。由于结合律不再成立，我们必须分别给出定义。

Let

$$\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2^{\otimes k} \otimes \mathscr{D}_3^{\otimes t} : \Lambda^{op} \times (\Lambda^{op})^k \times (\Lambda^{op})^t \to \mathscr{V}$$

$(\mathbf{m}, \mathbf{n_1}, \cdots, \mathbf{n_k}, \mathbf{j_1}, \cdots, \mathbf{j_t}) \mapsto \mathscr{D}_1(\mathbf{m}) \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_k}) \otimes \mathscr{D}_3(\mathbf{j_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_3(\mathbf{j_t})$,以及 $(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2 \wedge \mathscr{D}_3)_{\mathbf{k},\mathbf{t}}$：$\Lambda^{op} \times \Lambda^{op} \times \Lambda^{op} \to \mathscr{V}$为如下的左 Kan 延拓：

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{op} \times (\Lambda^{op})^k \times (\Lambda^{op})^t & \xrightarrow{\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2^{\otimes k} \otimes \mathscr{D}_3^{\otimes t}} & \mathscr{V} \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \times \vee \times \vee} \downarrow & \nearrow_{(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2 \wedge \mathscr{D}_3)_{\mathbf{k},\mathbf{t}}} & \\ \Lambda^{op} \times \Lambda^{op} \times \Lambda^{op} & & \end{array}$$

与之前类似，函子 $(\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2 \wedge \mathscr{D}_3)_{\mathbf{k},\mathbf{t}}$ 对于Λ中的$\mathbf{k}$,$\mathbf{t}$ 也具有函子性。

定义 4.10。对于 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3 \in \Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$，定义三重 Kelly 乘积为

$$\begin{aligned} \mu_3(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3) &= \int^{\mathbf{k},\mathbf{t}} (\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2 \wedge \mathscr{D}_3)_{\mathbf{k},\mathbf{t}}(\mathbf{k}, \mathbf{t}, -) \\ &= \int^{\substack{\mathbf{k},\mathbf{t} \\ \mathbf{n_1},\cdots,\mathbf{n_k} \\ \mathbf{j_1},\cdots,\mathbf{j_t}}} \big(\Lambda(-, \mathbf{j_1} + \cdots + \mathbf{j_t}) \times \Lambda(\mathbf{t}, \mathbf{n_1} + \cdots + \mathbf{n_k})\big) \\ &\quad \otimes \Big(\mathscr{D}_1(\mathbf{k}) \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_2(\mathbf{n_k}) \otimes \mathscr{D}_3(\mathbf{j_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_3(\mathbf{j_t})\Big) \end{aligned}$$

引理 4.11. 我们有以下同构：

- 对于任意对象 $X \in \mathscr{V}$，它可能依赖于

$$\mathbf{k}, \mathbf{n_1}, \mathbf{j}_{1,1}, \cdots, \mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}}, \mathbf{n_k}, \mathbf{j}_{\mathbf{k},1}, \cdots, \mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}},$$

存在

$$\begin{aligned} &\int^{\mathbf{r_1},\cdots,\mathbf{r_k}} \big(\Lambda(-, \mathbf{r_1} + \cdots + \mathbf{r_k}) \\ &\qquad \times \Lambda(\mathbf{r_1}, \mathbf{j}_{1,1} + \cdots + \mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}}) \times \cdots \times \Lambda(\mathbf{r_k}, \mathbf{j}_{\mathbf{k},1} + \cdots + \mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}})\big) \otimes X \\ &\cong \Lambda(-, \mathbf{j}_{1,1} + \cdots + \mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}} + \cdots + \mathbf{j}_{\mathbf{k},1} + \cdots + \mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}}) \otimes X; \end{aligned} \tag{4.12}$$

- 对于任意对象 $X \in \mathscr{V}$（它可能依赖于 $\mathbf{k}$、$\mathbf{n_1}$、$\cdots$、$\mathbf{n_k}$），都有

$$\begin{aligned} &\int^{\mathbf{t},\mathbf{j_1},\cdots,\mathbf{j_t}} \big(\Lambda(-, \mathbf{j_1} + \cdots + \mathbf{j_t}) \times \Lambda(\mathbf{t}, \mathbf{n_1} + \cdots + \mathbf{n_k})\big) \otimes \big(X \otimes \mathscr{D}_3(\mathbf{j_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_3(\mathbf{j_t})\big) \\ &\cong \int^{\mathbf{j_1},\cdots,\mathbf{j}_{\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k}}} \Lambda(-, \mathbf{j_1} + \cdots + \mathbf{j}_{\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k}}) \otimes \big(X \otimes \mathscr{D}_3(\mathbf{j_1}) \otimes \cdots \otimes \mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k}})\big) \end{aligned} \tag{4.13}$$

证明。 对于 (4.12)，注意到

$$\begin{aligned}&\int^{\mathbf{r_1},\cdots,\mathbf{r_k}} \big(\Lambda(-,\mathbf{r_1}+\cdots+\mathbf{r_k})\\&\qquad\times\Lambda(\mathbf{r_1},\mathbf{j}_{\mathbf{1},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{1},\mathbf{n_1}})\times\cdots\times\Lambda(\mathbf{r_k},\mathbf{j}_{\mathbf{k},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}})\big)\otimes X\\\cong&\int^{\mathbf{r_k}}\cdots\int^{\mathbf{r_1}}\big(\Lambda(-,\mathbf{r_1}+\cdots+\mathbf{r_k})\\&\qquad\times\Lambda(\mathbf{r_1},\mathbf{j}_{\mathbf{1},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{1},\mathbf{n_1}})\times\cdots\times\Lambda(\mathbf{r_k},\mathbf{j}_{\mathbf{k},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}})\big)\otimes X\end{aligned}$$

由 Yoneda 引理可得

$$\Lambda(-,\mathbf{j}_{\mathbf{1},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{1},\mathbf{n_1}}+\mathbf{r_2}+\cdots+\mathbf{r_k})\cong\int^{\mathbf{r_1}}\Lambda(-,\mathbf{r_1}+\cdots+\mathbf{r_k})\times\Lambda(\mathbf{r_1},\mathbf{j}_{\mathbf{1},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{1},\mathbf{n_1}})$$

对 $\mathbf{r_2},\cdots,\mathbf{r_k}$ 以及 命题 4.1重复这一过程即可得到(4.13)，令 $F:\Lambda^{op}\to\mathscr{V}$ 由下式给出

$$F(\mathbf{t})=\int^{\mathbf{j_1},\cdots,\mathbf{j_t}}\Lambda(-,\mathbf{j_1}+\cdots+\mathbf{j_t})\otimes(X\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_t})).$$

由 Yoneda 引理，$\int_{\mathbf{t}}\Lambda(\mathbf{t},\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k})\otimes F(\mathbf{t})\cong F(\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k})$。该结论由 命题 4.1得出。□

命题 4.14. 存在两个自然变换 $s_1:\mu_3(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,\mathscr{D}_3)\to(\mathscr{D}_1\odot_\Lambda\mathscr{D}_2)\odot_\Lambda\mathscr{D}_3$ 以及 $s_2:\mu_3(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,\mathscr{D}_3)\to\mathscr{D}_1\odot_\Lambda(\mathscr{D}_2\odot_\Lambda\mathscr{D}_3)$。当 $\otimes$ 与 $\mathscr{V}$ 中的余极限可交换时，s_1 和 s_2 是同构。

证明。我们有

$$\begin{aligned}&(\mathscr{D}_1\odot_\Lambda\mathscr{D}_2)\odot_\Lambda\mathscr{D}_3\\&=\int^{\mathbf{t},\mathbf{j_1},\cdots,\mathbf{j_t}}\Lambda(-,\mathbf{j_1}+\cdots+\mathbf{j_t})\otimes\Big((\mathscr{D}_1\odot_\Lambda\mathscr{D}_2)(\mathbf{t})\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_t})\Big)\\&=\int^{\mathbf{t},\mathbf{j_1},\cdots,\mathbf{j_t}}\Lambda(-,\mathbf{j_1}+\cdots+\mathbf{j_t})\otimes\Big(\Big(\int^{\mathbf{k},\mathbf{n_1},\cdots,\mathbf{n_k}}\Lambda(\mathbf{t},\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k})\\&\otimes\mathscr{D}_1(\mathbf{k})\otimes\mathscr{D}_2(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_2(\mathbf{n_k})\Big)\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_t})\Big).\end{aligned}$$

与公式定义 4.10相比，自然变换 s_1 由从张量的余端到与余端的张量积的自然映射给出。注意，s_1 在S上是逐点的。

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}_1\odot_\Lambda(\mathscr{D}_2\odot_\Lambda\mathscr{D}_3)\\&=\int^{\mathbf{k},\mathbf{r_1},\cdots,\mathbf{r_k}}\Lambda(-,\mathbf{r_1}+\cdots+\mathbf{r_k})\otimes\big(\mathscr{D}_1(\mathbf{k})\otimes(\mathscr{D}_2\odot_\Lambda\mathscr{D}_3)(\mathbf{r_1})\otimes\cdots\otimes(\mathscr{D}_2\odot_\Lambda\mathscr{D}_3)(\mathbf{r_k})\big)\\&=\int^{\mathbf{k},\mathbf{r_1},\cdots,\mathbf{r_k}}\Lambda(-,\mathbf{r_1}+\cdots+\mathbf{r_k})\otimes\Big(\mathscr{D}_1(\mathbf{k})\otimes\\&\int^{\mathbf{n_1},\mathbf{j}_{1,1},\cdots,\mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}}}\Lambda(\mathbf{r_1},\mathbf{j}_{\mathbf{1},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{1},\mathbf{n_1}})\otimes(\mathscr{D}_2(\mathbf{n_1})\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{1},1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{1},\mathbf{n_1}}))\otimes\cdots\\&\otimes\int^{\mathbf{n_k},\mathbf{j}_{\mathbf{k},1},\cdots,\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}}}\Lambda(\mathbf{r_k},\mathbf{j}_{\mathbf{k},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}})\otimes(\mathscr{D}_2(\mathbf{n_k})\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{k},1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}}))\Big).\end{aligned}$$

现在，我们将自然变换 s_2 定义为以下复合映射：

$$\begin{aligned}
\mu_3(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,\mathscr{D}_3) =& \int^{\substack{\mathbf{k},\mathbf{t}\\ \mathbf{n_1},\cdots,\mathbf{n_k}\\ \mathbf{j_1},\cdots,\mathbf{j_t}}} \big(\Lambda(-,\mathbf{j_1}+\cdots+\mathbf{j_t})\times\Lambda(\mathbf{t},\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k})\big)\\
&\otimes\Big(\mathscr{D}_1(\mathbf{k})\otimes\mathscr{D}_2(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_2(\mathbf{n_k})\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_t})\Big)\\
\text{by (4.13)}\cong& \int^{\substack{\mathbf{k}\\ \mathbf{n_1},\cdots,\mathbf{n_k}\\ \mathbf{j_1},\cdots,\mathbf{j}_{\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k}}}} \Lambda(-,\mathbf{j_1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k}})\\
&\otimes\Big(\mathscr{D}_1(\mathbf{k})\otimes\mathscr{D}_2(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_2(\mathbf{n_k})\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{n_1}+\cdots+\mathbf{n_k}})\Big)\\
\text{by (4.12)}\cong& \int^{\substack{\mathbf{k},\mathbf{r_1},\cdots,\mathbf{r_k}\\ \mathbf{n_1},\mathbf{j}_{1,1},\cdots,\mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}}\\ \cdots\\ \mathbf{n_k},\mathbf{j}_{\mathbf{k},1},\cdots,\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}}}} \big(\Lambda(-,\mathbf{r_1}+\cdots+\mathbf{r_k})\\
&\times\Lambda(\mathbf{r_1},\mathbf{j}_{1,1}+\cdots+\mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}})\times\cdots\times\Lambda(\mathbf{r_k},\mathbf{j}_{\mathbf{k},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}})\big)\\
&\otimes\Big(\mathscr{D}_1(\mathbf{k})\otimes\mathscr{D}_2(\mathbf{n_1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_2(\mathbf{n_k})\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{1,1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}}))\otimes\cdots\\
&\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{k},1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}})\Big)\\
\longrightarrow& \int^{\substack{\mathbf{k},\mathbf{r_1},\cdots,\mathbf{r_k}\\ \mathbf{n_1},\mathbf{j}_{1,1},\cdots,\mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}}\\ \cdots\\ \mathbf{n_k},\mathbf{j}_{\mathbf{k},1},\cdots,\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}}}} \Lambda(-,\mathbf{r_1}+\cdots+\mathbf{r_k})\otimes\Big(\mathscr{D}_1(\mathbf{k})\otimes\\
&\big(\Lambda(\mathbf{r_1},\mathbf{j}_{1,1}+\cdots+\mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}})\otimes(\mathscr{D}_2(\mathbf{n_1})\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{1,1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{1,\mathbf{n_1}}))\big)\otimes\cdots\\
&\otimes\big(\Lambda(\mathbf{r_k},\mathbf{j}_{\mathbf{k},1}+\cdots+\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}})\otimes(\mathscr{D}_2(\mathbf{n_k})\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{k},1})\otimes\cdots\otimes\mathscr{D}_3(\mathbf{j}_{\mathbf{k},\mathbf{n_k}}))\big)\Big)\\
\longrightarrow&\mathscr{D}_1\odot_\Lambda(\mathscr{D}_2\odot_\Lambda\mathscr{D}_3),
\end{aligned}$$

其中，第一个箭头从张量的余积指向与余积的张量积，第二个箭头从张量的余端指向与余端的张量积。注意，s_2 也是关于S逐点的。

□

例 4.15. 记作 $\mu_2(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)=\mathscr{D}_1\odot_\Lambda\mathscr{D}_2$，则存在典范映射

$$\begin{aligned}
\alpha_{2,0,0}:&\mu_2(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)\to\mu_3(\mathscr{I}_1,\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2),\\
\alpha_{2,1,0}:&\mu_2(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)\to\mu_3(\mathscr{D}_1,\mathscr{I}_1,\mathscr{D}_2),\\
\alpha_{2,2,0}:&\mu_2(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)\to\mu_3(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,\mathscr{I}_1)
\end{aligned}$$

其定义方式与例 4.8类似。原则上，它们是与余极限交换的张量积。我们将在后文中用到它们。

注 4.16. 在 Λ 中替换为 Σ，在定义 4.6 和定义 4.10中替换为 Ching 在 [3, 定义 2.12]中给出的定义。这些定义可以推广为n重凯利积。

4.4. 正规 oplax 幺半结构。 为了描述这些 n重积之间的关系，我们需要下面这个定义，它推广了幺半范畴的定义。

定义 4.17。 ([3]) 一个正规 oplax 单值范畴（$\mathscr{E}$，μ_n，$\alpha_{n,\ l,\ r}$，I）由以下数据组成：

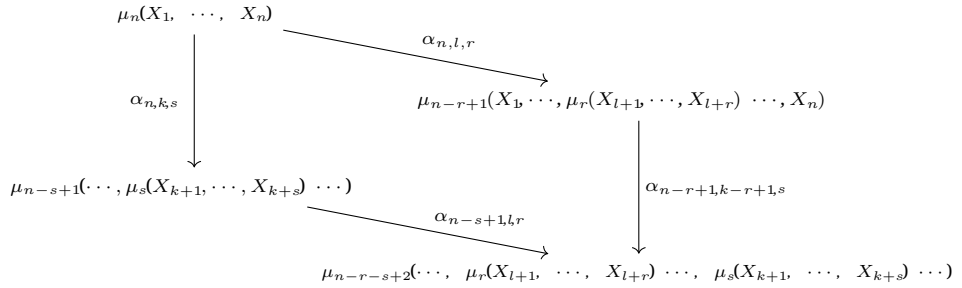
(1) 范畴 $\mathscr{V}$ 中的一个对象 I，称为单位。(2) 函子族 μ_0，μ_1，μ_2，$\cdots$，其中 μ_n：$\mathscr{E}^n \to \mathscr{E}$。函子 μ_0：
$* \to \mathscr{E}$ 取值为 I 和 μ_1：$\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ 是恒等函子。(3) 一系列自然变换

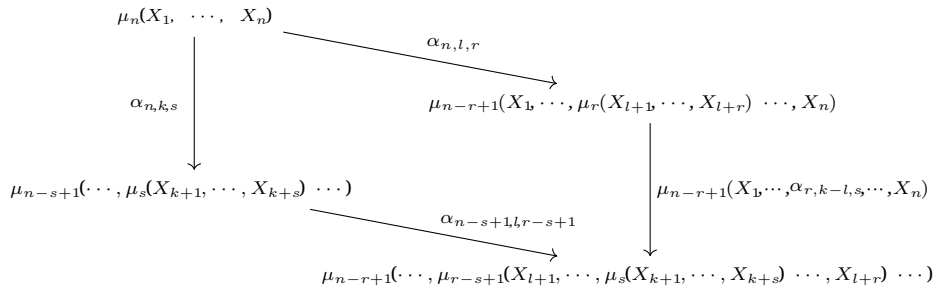
$$\alpha_{n,\ l,\ r}\colon\ \mu_n(X_1,\ \cdots,\ X_n) \to \mu_{n-r+1}(X_1,\ \cdots,\ X_l,\ \mu_r(X_{l+1},\ \cdots,\ X_{l+r})\ X_{l+r+1},\ \cdots,\ X_n)$$

for triples (n,l,r) satisfying $0 \leqslant l \leqslant l+r \leqslant n$.

这些数据必须满足以下条件：

(a) 对于每个 n 和 l, $\alpha_{n,\ l,\ 1}$ 和$\alpha_{n,\ 0,\ n}$ 都是恒等映射；(b) 对于 n，l，r，k，s 的所有有效取值，以下两个图表可交换。





幺半范畴通过取

$$\mu_n(X_1,X_2,\cdots,X_n) := (((X_1 \otimes X_2) \otimes \cdots) \otimes X_n)$$

以及 α 由结合子诱导而成为正规 oplax 单值范畴。反之，若自然变换$\alpha_{n,l,r}$ 均为同构，则正规 oplax 幺半结构来自幺半结构（参见 [3,例 1.2]）。

例 4.18 (约化正规 oplax 幺半结构)。设 $(\mathscr{E},\mu_n,\alpha_{n,l,r},I)$ 为正规 oplax 单值范畴，且 $\mathscr{E}$ 容许一个零对象。我们通过如下方式定义一个新的正规 oplax 幺半结构 $(\mathscr{E},\mu_n,\overline{\alpha}_{n,l,r},I)$

$$\overline{\alpha}_{n,l,r} = \begin{cases} \alpha_{n,l,r} & \text{for } r>0 \text{ or } r=n=0, \\ 0 & \text{for } r=0 \text{ and } n>0. \end{cases}$$

很容易看出，(b) 中的图表可交换。

例 4.19 （截断约化正规 oplax 幺半结构）。对于 $\mathscr{E}$，μ_n，$\alpha_{n,\ l,\ r}$，I）所示的约化正规 oplax 幺半结构，如 例 4.18 和

固定的 $k \geqslant 1$，我们定义一个新的正规 oplax 幺半结构（$\mathscr{E}$，$\mu_n^{\leqslant k}$，$\alpha_{n\ l\ ,r}^{\leqslant k}$，$I$），其定义如下

$$\mu_n^{\leqslant k}(X_1, \cdots, X_n) = \begin{cases} \mu_n(X_1, \cdots, X_n) & \text{for } 0 \leqslant n \leqslant k, \\ 0 & \text{for } n \geqslant k+1; \end{cases}$$

$$\overline{\alpha}_{n,l,r}^{\leqslant k} = \begin{cases} \overline{\alpha}_{n,l,r} & \text{for } 0 \leqslant n \leqslant k, \\ 0 & \text{for } n \geqslant k+1. \end{cases}$$

（b）中的图表仍然可交换，并且这确实构成一个正规 oplax 幺半结构，我们称之为 $(\mathscr{E},\ \mu_n,\ \alpha_{n,\ l,\ r})$ 的 k 阶截断。

例 4.20。根据 定义 4.6、例 4.8、命题 4.14和 例 4.15，我们已经得到了关于 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$ 的数据

$$\mu_n \text{ for } n \leq 3,\ \alpha_{n,l,r} \text{ for } n \leq 2 \text{ or } (n = 3 \text{ and } 1 \leq r \leq 3).$$

这些数据满足上述相容性条件。在定理 4.30中，我们将证明这些数据可以扩展为一个正规 oplax 幺半结构。

定义 4.21。设 $(\mathscr{E},\ \mu_n,\ \alpha_{n,\ l,\ r},\ I)$ 和 $(\mathscr{F},\ \nu_n,\ \beta_{n,\ l,\ r},\ J)$ 是两个正规 oplax 幺半范畴。从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathscr{F}$ 的一个态射 $(F,\ t)$ 是一个函子 $F\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$，连同自然变换 $t_n\colon F \circ \mu_n \to \nu_n \circ F^n$，满足

(1) F 将 I 映射到 J。(2) t_n 是 $n \leq 1$的恒等态射。(3) 对所有满足 $0 \leqslant l \leqslant l + r \leqslant n$ 的 $(n,\ l,\ r)$，下图均交换：

$$\begin{array}{ccc} F\mu_n(X_1, \cdots, X_n) & \xrightarrow{F\alpha_{n,l,r}} & F\mu_{n-r+1}(X_1, \cdots, \mu_r(X_{l+1}, \cdots, X_{l+r}), \cdots, X_n) \\ & & \downarrow t_{n-r+1}(X_1, \cdots, \mu_r(X_{l+1}, \cdots, X_{l+r}), \cdots, X_n) \\ \downarrow t_n(X_1, \cdots, X_n) & & \nu_{n-r+1}(FX_1, \cdots, F\mu_r(X_{l+1}, \cdots, X_{l+r}), \cdots, FX_n) \\ & & \downarrow \nu_{n-r+1}(FX_1, \cdots, t_r(X_{l+1}, \cdots, X_{l+r}), \cdots, FX_n) \\ \nu_n(FX_1, \cdots, FX_n) & \xrightarrow{\beta_{n,l,r}} & \nu_{n-r+1}(FX_1, \cdots, \mu_r(FX_{l+1}, \cdots, FX_{l+r}), \cdots, FX_n). \end{array}$$

若存在自然变换 t_n，使其补全为正规 oplax 幺半范畴之间的态射，则称 F 是正规 oplax 幺半函子。

定义 4.22. 设 $(\mathscr{E},\ \mu,\ I)$ 是一个正规 oplax 幺半范畴。$\mathscr{E}$中的幺半群是一个对象 M，带有态射 $m_n\colon \mu_n(M,\ M,\ \cdots,\ M) \to M$，使得对于所有满足 $0 \leqslant l \leqslant l + r \leqslant n$ 的 $(n,\ l,\ r)$，下图均交换：

$$\begin{array}{ccc} \mu_n(M, \cdots, M) & \xrightarrow{\alpha_{n,l,r}} & \mu_{n-r+1}(M, \cdots, \mu_r(M, \cdots, M), \cdots, M) \\ & & \downarrow m_{n-r+1}(\cdots, m_r, \cdots) \\ & \searrow^{m_n} & M \end{array}$$

当 $\mathscr{E}$ 是幺半范畴时，幺半群的两种定义是一致的。

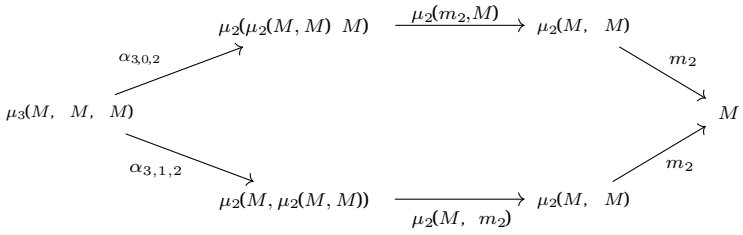
引理 4.23. *([3, 命题 3.4])*

假设我们给定一个正规 *oplax* 单值范畴 $(\mathscr{V}, \mu_n, \alpha_{n,l,r}, I)$中的对象 M，以及映射

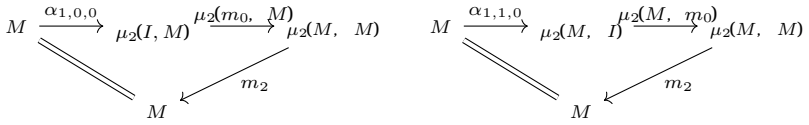
$$m_0 : I \to M \ \textit{and}\ m_2 : \mu_2(M, M) \to M.$$

它们在 M 上确定一个幺半群结构，当且仅当它们满足下列结合律和单位律：

(1)



(2)



□

受此结果启发，我们给出如下定义。

定义 4.24. 设 $(\mathscr{E},\mu_n,\alpha_{n,l,r},I)$ 和 $(\mathscr{E},\nu_n,\beta_{n,l,r},I)$ 是 $\mathscr{E}$ 上具有相同单位的两个正规 oplax 幺半结构。若存在一条由态射组成的之字形 $(\mathrm{id}\ t^i):(\mathscr{E},\mu_n^i)\to(\mathscr{E},\nu_n^i)$ 和 $(\mathrm{id}\ s^i):(\mathscr{E},\mu_n^{i+1})\to(\mathscr{E},\nu_n^i)$，其中 $0\le i\le k$ 满足 $\mu_n^0=\mu_n$ 和 $\mu_n^{k+1}=\nu_n$，且 t_n^i 和 s_n^i 对于 $0\le i\le k$ 和 $n\le 3$ 都是恒等态射，则称它们等价。

推论 4.25. 等价的正规反松幺半范畴具有同构的幺半群范畴。

证明. 只需证明，带有 $t_n=\mathrm{id}$ 的 $n\le 3$ 会诱导出 $\mathrm{Mon}(\mathscr{E},\nu_n)\cong\mathrm{Mon}(\mathscr{E},\mu_n)$，其中 $(\mathrm{id}\ t):(\mathscr{E},\mu_n,\alpha_{n,l,r},I)\to(\mathscr{E},\nu_n,\beta_{n,l,r},I)$。这是引理 4.23 的结论。□

在幺半范畴中，高阶乘法完全由两个对象之间的乘法决定。对于正规反松幺半范畴，情况则不再如此。例如，$\mathscr{E}$，$\mu_n^{\leqslant k}$，$\alpha_{n\,l\ ,\ r,\ I}^{\leqslant k}$所定义的截断约化正规 oplax 幺半结构例 4.19 对所有$k\geqslant 3$而言彼此等价但不同构。

4.5. **提升正规 oplax 单oidal 结构.** 在本小节中，我们固定一个正则基数 $\kappa>\omega$，并约定 small 表示 κ-小，因为所考虑的所有图表都是 κ-小的。

回顾一下，在定理 3.9 中，我们构造了一个幺半局部化

$$L:\mathscr{V}\to L\mathscr{V},$$

使得 $\otimes$ 在 $L\mathscr{V}$ 中与余极限交换。因此，$(\Lambda^{op}[L\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0},\odot_\Lambda,\mathscr{I}_0)$ 是一个幺半范畴。我们将证明:

定理 4.26. 在 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$ 上存在一个正规 *oplax* 幺半结构，记作 $(\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0},\mu_n,\alpha_{n,l,r},I)$，使得

(1) 单位 $I=\mathscr{I}_1$。*(2)* $\mu_2(\mathscr{D}_1,\ \mathscr{D}_2)=\mathscr{D}_1\odot_\Lambda\mathscr{D}_2$ 如定义 *4.6*所述。*(3)* $\mu_3(\mathscr{D}_1,\ \mathscr{D}_2,\ \mathscr{D}_3)$ 如定义 *4.10*所述。

(4) 自然变换 $\alpha_{n,\ l,\ r}$ 针对 $n \leq 2$，或 $n = 3$ 以及 $1 \leq r \leq 3$ 如例 *4.20*所述给出。*(5)* L ： $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{J}_0} \to \Lambda^{op}[L\mathscr{V}]_{\mathscr{J}_0}$ 是正规反松幺半范畴之间的函子。

此外，对于任意满足上述性质的正规 *oplax* 幺半结构$(\Lambda^{op}[\mathscr{V}], \nu_n, \beta_{n,l,r}, I)$ 在$\Lambda^{op}[\mathscr{V}]$上，存在一个从$(\Lambda^{op}[\mathscr{V}], \nu_n)$到$(\Lambda^{op}[\mathscr{V}], \mu_n)$的态射。

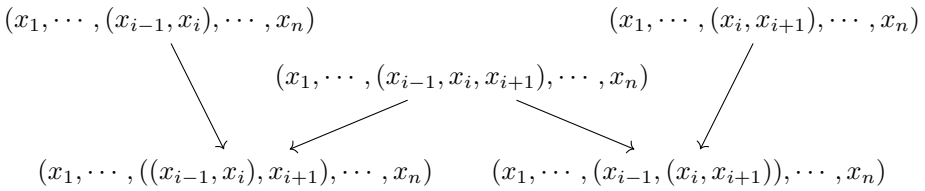
定义4.27. 对于 $n \geq 3$，我们将 W_n 定义为用括号将n 个字母组合成一个的所有方式构成的偏序集，且每个括号的长度至少为2、至多为 $n-1$。括号的长度是因子的个数，其中被括号括起的字母计为一个因子。

例4.28. W_3 有两个元素$((X_1, X_2)\ X_3)$和$(X_1,(X_2, X_3))$。下面的偏序集是 W_4的一部分。

$$(((X_1, X_2), X_3), X_4) \longleftarrow ((X_1, X_2), X_3, X_4) \longrightarrow ((X_1, X_2), (X_3, X_4))$$

引理 4.29. 当 $n \geqslant 4$时， W_n 是连通的。

证明。 通过添加括号， W_n 中的任意元素都与某个形如 $(x_1,\ (\cdots,\ (x_i,\ x_{i+1})\ \cdots)\ x_n)$ 的元素相连，其中有一个括号包含两个连续的单个字母。通过删除括号，该元素还与元素 $(x_1,\ \cdots,\ (x_i,\ x_{i+1})\ \cdots,\ x_n)$ 相连，其中只有两对括号。最后，任意两个这类“相邻”元素都相连，如下图所示。



□

定理 4.30。 设 $\mathscr{E}$ 是一个具有小极限的范畴。假设数据

$$\mu_n \ for\ n \leq 3,\ \alpha_{n,l,r} \ for\ n \leq 2 \ or\ (n = 3 \ and\ 1 \leq r \leq 3).$$

已定义，并且只要相关项有定义，定义 *4.17* 中的条件就成立。那么可以定义 μ_n，其中 $n \geq 4$ 以及 $\alpha_{n,\ l,\ r}$，以处理其余情形，从而在 $\mathscr{E}$ 上得到一个正规 *oplax* 幺半结构。此外，在所有这类结构中存在一个终对象 $(\mathscr{E},\ \mu_n,\ \alpha_{n,\ l,\ r},\ I)$。因此，所有这类结构按照定义 *4.24*的意义都是等价的。

证明。 我们对 n 进行归纳，定义 $\mu_n(X_1, \cdots, X_n)$ 和 $\alpha_{n,l,r}(X_1, \cdots, X_n)$。

对于 $n \geq 4$，假设我们已经定义了 μ_m、 $\alpha_{m,\ l,\ r}$，对于 $m \leq n-1$、 $1 \leq r \leq m$以及$\alpha_{m,\ l,\ 0}$，对于 $m \leq n-2$ 满足定义 4.17的情形。则对于 $\vec{X} = (X_1$、 $\cdots$、 $X_n) \in \mathscr{E}^n$，存在一个图表

$$D[\vec{X}, \mu] : W_n \to \mathscr{E}$$

利用相应的μ_2、$\cdots$、μ_{n-1}将每个元素映射为（X_1、$\cdots$、X_n）的组合，并将每个箭头映射为适当的$\alpha_{m,l,r}(m \leq n-1, r \geq 2)$（即复合），这些都已由归纳假设定义。定义

$$\mu_n(X_1, \cdots, X_n) = \lim_{W_n} D[\vec{X}, \mu],$$

以及$\alpha_{n,l,r}$作为 $2 \leq r \leq n-1$ 的典范映射

$$\mu_n(X_1, \cdots, X_n) \to D[\vec{X}, \mu](x_1, \cdots, x_l, (x_{l+1}, \cdots, x_{l+r}), x_{l+r+1}, \cdots, x_n).$$

定义$\alpha_{n,l,1}$和$\alpha_{n,0,n}$为恒等映射。对于$\alpha_{n-1,l,0}$，考虑

$$\vec{X}^\circ = (X_1, \cdots, X_{n-1}) \in \mathscr{E}^{n-1} \text{ and } \vec{X} = (X_1, \cdots, X_l, I, X_{l+1}, \cdots, X_{n-1}) \in \mathscr{E}^n.$$

为得到$\alpha_{n-1,l,0}$： $\mu_{n-1}(\vec{X}^\circ) \to \mu_n(\vec{X})$，只需证明，对于每个元素 $w \in W_n$，都存在典范映射$\alpha_{n-1,l,0}(w)$，从 $\mu_{n-1}(\vec{X}^\circ)$到 $D[\vec{X}](w)$，且这些映射对所有w都相容。对于一个元素 w，有两种情形：

- 从w中删去 x_{l+1} 后，若存在长度为 $n-1$ 的括号。由于 $n \geq 4$，唯一可能的情况是 $w = (x_1, (x_2, \cdots, x_n))$、$l = 0$，或$w = ((x_1, \cdots, x_{n-1})\ x_n)$、$l = n-1$或$w = (x_1, \cdots, (x_{l+\epsilon}, x_{l+\epsilon+1}) \cdots, x_n)$、$\epsilon = 0$ 或 1。我们令$\alpha_{n-1,l,0}(w)$为

$$\alpha_{1,0,0} : \mu_{n-1}(\vec{X}^\circ) \to \mu_2(I, \mu_{n-1}(\vec{X}^\circ))$$

在第一种情形中，

$$\alpha_{1,1,0} : \mu_{n-1}(\vec{X}^\circ) \to \mu_2(\mu_{n-1}(\vec{X}^\circ), I)$$

在第二种情形中，以及 $\mu_{n-1}(X_1, \cdots, \alpha_{2,\epsilon,0}, \cdots, X_{n-1}) \circ \alpha_{n-1,l+\epsilon-1,1}$在最后一种情形中。

- 删除 x_{l+1} 自w后，不存在长度为 $n-1$ 的括号。我们通过删除 x_{l+1} 以及由此产生的任何长度为 1 的括号，得到元素 $w^\circ \in W_{n-1}$。令$\alpha_{n-1,l,0}(w)$为

$$\mu_{n-1}(\vec{X}^\circ) \to D[\vec{X}^\circ](w^\circ) \to D[\vec{X}](w),$$

其中，第一个映射在 $n=4$ 时是某个$\alpha_{3,l',2}$，而在 $n>4$时是从极限得到的典范映射；第二个映射由某个$\alpha_{n',l',0}$ 诱导，其中$n' \leq n-2$，如果之前删除过长度为 1 的括号，则还可能与某个$\alpha_{n'',l'',1}$（对于 $n'' \leq n-2$）复合。

$\alpha_{n-1,l,0}(w)$ 在 w 上的紧致性由归纳假设可知，因为图表中出现的所有 μ_m 都满足 $m \leq n-1$。

我们还需要检查定义 4.17中的条件。定义 4.17(b)中实质上有三种情形：

(1) $s, r \neq 0$，我们需要检查 $\mu_n(X_1, \cdots, X_n)$。(2) $s = 0, r \neq 0$，我们需要检查 $\mu_{n-1}(X_1, \cdots, X_{n-1})$。(3) $s = r = 0$，我们需要检查 $\mu_{n-2}(X_1, \cdots, X_{n-2})$。

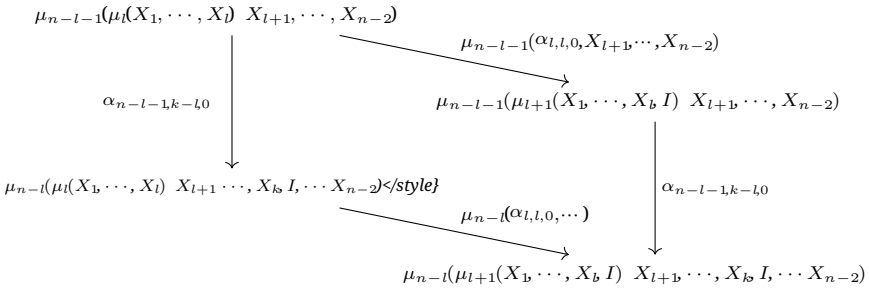
情形(1) 中的图表根据 μ_n的定义交换。情形(2)中的图表根据$\alpha_{n-1,l,0}$的定义交换。对于情形(3)，令

$$\vec{X}^\circ = (X_1, \cdots, X_{n-2}) \text{ and } \vec{X} = (X_1, \cdots, X_l, I, \cdots, X_k, I, \cdots, X_{n-2}) \in \mathscr{E}^n.$$

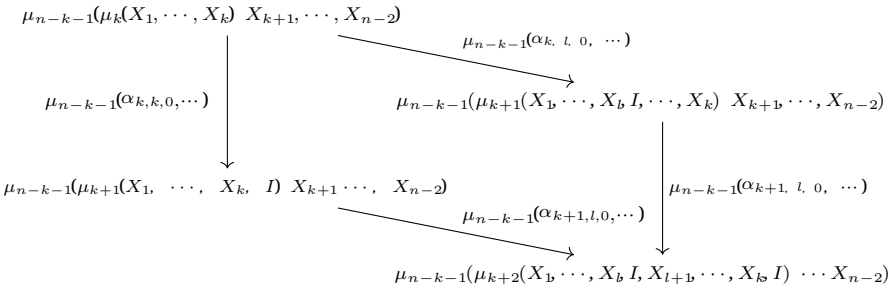
我们需要证明，这两个复合映射$\alpha_{n-1,k+1,0} \circ \alpha_{n-2,l,0}$和$\alpha_{n-1,l,0} \circ \alpha_{n-2,k,0}$给出相同的映射 $\mu_{n-2}(\vec{X}^\circ) \to \mu_n(\vec{X})$。为此，只需检查它们对每个 $w \in W_n$ 都给出相同的映射 $\mu_{n-2}(\vec{X}^\circ) \to D[\vec{X}, \mu](w)$。我们可以

假设 $w = (x_1, \cdots, (x_i, \cdots, x_j) \cdots, x_n)$ 有两对括号，因为任何 w 都有来自此类元素的映射。与之前类似，我们试图从 w 中删除字母 x_{l+1} 和 x_{k+2}，它们在 X 中的取值为 I，这里有几种情形：

- 当 x_{l+1} 和 x_{k+2} 中恰有一个位于内层括号中时。不失一般性，我们以 $w = ((x_1, \cdots, x_{l+1}) \cdots, x_n)$ 为例。由$\alpha_{n-l-1,k-l,0}$的自然性，下面的图表交换：



- 当 x_{l+1} 和 x_{k+2} 都在内层括号中，或它们都不在内层括号中时。不妨设我们对 $w = ((x_1, \cdots, x_{l+1}, \cdots, x_{k+2}) \cdots, x_n)$ 进行处理。则根据归纳假设，下面的图表交换：



现在验证泛性质。设 $(\mathscr{E}, \nu_n, \beta_{n,l,r}, I)$ 是一个正规 oplax 幺半结构，其中 $\nu_n = \mu_n$ and$\beta_{n,l,r} = \alpha_{n,l,r}$ for $n \leq 3$。我们证明，存在一个态射 s_n，从该正规 oplax 结构映射到 $(\mathscr{E}, \mu_n, \alpha_{n,l,r}, I)$。当$n \leqslant 3$, s_n 时，它是恒等态射。假设我们已经为所有 $m \leqslant n-1$ 构造了 s_m，这些 s_m 诱导出从 $D[\vec{X}, \nu]$ 到 $D[\vec{X}, \mu]$ 的自然态射。因此，我们在它们的极限之间得到自然映射。另一方面，β_m、$_l$、$_r$ for $m \leq n$ 诱导出从 $\nu_n(X_1, \cdots, X_n)$ 到图表 $D[\vec{X}, \nu]$ 的每个条目的相容映射，因而得到到其极限的映射。我们令 s_n 为虚线箭头。

$$\begin{array}{ccc} \nu_n(X_1, \cdots, X_n) & \longrightarrow & \lim_{W_n} D[\vec{X}, \nu] \\ {\scriptstyle s_n}\vdots & & \downarrow \\ \mu_n(X_1, \cdots, X_n) & = & \lim_{W_n} D[\vec{X}, \mu] \end{array}$$

□

定理 定理 *4.26*的证明。 根据定理 4.30，我们有一个终对象正规 oplax 幺半结构（$\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$，$\mu_n$，$\alpha_{n,\ l,\ r}$，$\mathscr{I}_0$），它扩展了 例 4.20 中的数据。特别地，根据定义，有

$$\mu_n(\mathscr{D}_1,\cdots,\mathscr{D}_n) := \lim_{W_n} D[\vec{\mathscr{D}},\mu],$$

其中，$\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$ 中的极限是逐点取的。我们证明，$L:\ \Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0} \to \Lambda^{op}[L\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$ 是正规反松幺半范畴之间的函子。

由于（$\Lambda^{op}[L\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$，$\odot_\Lambda$，$\mathscr{I}_0$）是一个幺半范畴，它具有正规反松幺半结构（$\upsilon_n$，$\beta_{n,\ l,\ r}$），且图表 $D[L\mathscr{D},\upsilon]$ 中的箭头都是 $\Lambda^{op}[L\mathscr{V}]$中的同构，因此从 $\upsilon_n(L\mathscr{D}_1,\ \cdots,\ L\mathscr{D}_n)$ 到图表中每一项的箭头也都是同构。由 W_n 根据引理 4.29是一个连通偏序集，我们得到

$$\upsilon_n(L\mathscr{D}_1,\cdots,L\mathscr{D}_n) \cong \lim_{W_n} D[L\vec{\mathscr{D}},\upsilon].$$

根据定理 3.9，L 保小极限和余极限。我们有

$$L(\mu_2(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2)) \cong L\mathscr{D}_1 \odot_\Lambda L\mathscr{D}_2 \text{ and } L\mu_3(\mathscr{D}_1,\mathscr{D}_2,\mathscr{D}_3) \cong L\mathscr{D}_1 \odot_\Lambda L\mathscr{D}_2 \odot_\Lambda L\mathscr{D}_3,$$

以及自然映射

$$L\mu_n(\mathscr{D}_1,\cdots,\mathscr{D}_n) \cong \upsilon_n(L\mathscr{D}_1,\cdots,L\mathscr{D}_n) \text{ and } L\alpha_{n,l,r} \cong \beta_{n,l,r}.$$

□

推论 4.31。 $\Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[\mathscr{V}] \subset \Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$ 是一个子正规 *oplax* 幺半范畴。

证明。 显然，范畴 $\Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[\mathscr{V}]$ 在算子 μ_n下封闭。 □

4.6. **作为幺半群的含幺算子**。 我们现在可以证明以下定理，它推广了 [17,定理 0.13]。

定理 4.32。 设 $\mathscr{V}$是一个完备且余完备的对称幺半范畴。设 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathcal{I}_0}$ 和 $\Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[\mathscr{V}]$ 配备了定理 *4.26*中定义的正规 *oplax* 幺半结构。存在范畴同构

$$\{based\ operads\ in\ \mathscr{V}\} \cong \{monoids\ in\ \Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}\};$$
$$\{unital\ operads\ in\ \mathscr{V}\} \cong \{monoids\ in\ \Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[\mathscr{V}]\}.$$

证明。 幺半局部化 $L:\ \mathscr{V} \to L\mathscr{V}$ 保留并反映幺半群。事实上，由于 L 是忠实的，如果结构映射 Lm_2 和 Lm_0 满足引理 4.23中的图表，m_2 和 m_0也满足。

容易看出，给定 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathcal{I}_0}$（或分别地，$\Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[\mathscr{V}]$）中的一个幺半群，结构映射 m_0 和 m_2 提供了 $\mathscr{V}$上一个带基点的（分别为含幺的）算子的结构映射。反过来，设我们给定了 $\mathscr{V}$中的一个带基点的（含幺的）算子$\mathscr{C}$。由于 L 是对称幺半的并且保持余极限，$L\mathscr{C}$ 是$L\mathscr{V}$中的一个算子，因而是 $\Lambda^{op}[L\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$（分别为 $\Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[L\mathscr{V}]$）中的一个幺半群。这证明了 $\mathscr{C}$ 是 $\Lambda^{op}[\mathscr{V}]_{\mathscr{I}_0}$（分别为 $\Lambda^{op}_{\mathcal{I}}[\mathscr{V}]$）中的一个幺半群。□

注 4.33. 正如我们在定理 4.26中所见，所有满足要求的正规 oplax 幺半结构在定义 4.24的意义下都是等价的。因此，根据 Λ-序列中配备的任意正规 oplax 幺半结构，算子范畴与幺半群范畴同构，依据是推论 4.25。

注 4.34. Ching [3] 在 Σ-序列上构造了一种正规 oplax 幺半结构，此处记为（$\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$, μ_n, $\alpha_{n,\ l,\ r}$, $\mathscr{I}_1^{\Sigma}$），以证明定理 4.32 的一个类似结果，将 $\mathscr{V}$ 中的算子与 $\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$中的幺半群对应起来。本节中的构造也可以类似地应用于 Σ-序列，从而得到另一种正规 oplax 幺半结构（$\Sigma^{op}[\mathscr{V}]$, ν_n, $\beta_{n,\ l,\ r}$, $\mathscr{I}_1^{\Sigma}$）。

Ching 的结构有一个态射指向我们的结构，因为它满足定理 4.26中的条件。我们不知道它们是否同构。

References

[1] Clemens Berger 和 Ieke Moerdijk。厄尔巴运算子的公理化同伦论。 *Comment. Math. Helv.* 78 4 805 831, 2003 , （）：–。 2

[2] Clemens Berger 和 Ieke Moerdijk。幺半模型范畴中厄尔巴运算子的 Boardman-Vogt 分解。 *Topology* 45 5 807 849, 2006 2 , （）：–。Michael Ching。关于对称序列复合积的注记。

[3] *J. Homotopy Relat. Struct.* 7 2 237 254, 2012 , （）：–。 3, 24, 25, 26, 32

[4] Brian Day。关于幺半局部化的注记。

Bulletin of the Australian Mathematical Society, 8 1 1 （）：– 16, 1973 4, 15 。Benoit Fresse。

[5] *Modules over operads and functors* 1967 *Lecture Notes in Mathe-* , 卷数为 。Springer-Verlag, 柏林, 。*matics* 2009 2, 9

[6] P. Gabriel 和 M. Zisman。 *Calculus of fractions and homotopy theory*, 第 *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]* 1967 的第 35 卷。Springer-Verlag New York, Inc., 纽约, 。[7] 15 Peter Gabriel 和 Michel Zisman。

Calculus of fractions and homotopy theory, 第 35 卷。Springer Science & Business Media, 2012 14 。G. M. Kelly。lax 代数和分配律的相干定理。载于

[8] *Category Seminar (Proc. Sem., Sydney, 1972/1973)* 281 375 , 第 – 页。数学讲义，第 420 卷。Springer, 柏林, 1974 年。5 [9] *Repr. Theory Appl. Categ.* 13 1 13, 2005 1, 6 G. [10] *Triangulated categories* M. Kelly。论 J. P. May 的厄尔巴运算子。 , （）：–。Henning Krause。三角范畴的局部化理论。载于 , 第 375 卷 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 第 161–235 页。剑桥大学出版社, 剑桥, 2010 15 。Tore August Kro。正

[11] *Homology Homotopy* 交谱中厄尔巴运算子的模型结构。*Appl.* 9 2 397 412, 2007 , （）：–。[12] 2 Jacob Lurie。

Higher topos theory 2009 11 。普林斯顿大学出版社, 。Saunders Mac Lane。, 第

[13] *Categories for the working mathematician* 5 卷。Springer Science & Business Media, 1998 17 。J. P. May。 *The geometry of iterated loop spaces*。

[14] Springer-Verlag, 柏林, 1972 年。《数学讲义》第 271 卷。1[15] J. P. May。由双置换范畴构造 E_∞ 环空间。载于 *New topological contexts for Galois theory and algebraic geometry (BIRS 2008)* 16 *Geom.* , 卷数为 , 第 – 页。Geom. Topol. *Topol. Monogr.* 283 330 2009 11, 12, 13 Publ., 考文垂, 。[16] J. P. May 和 R. Thomason。无限循环空间机器的唯一性。 *Topology*, 17 3 205 224, 1978 （）：–。

[17] J. P. May、Ruoqi Zhang 和 Foling Zou。含幺厄尔巴运算子、幺半群、单子与条构造。 *Adv. Math.*, 461：论文编号 110065，55，2025 年。2，3，4，5，6，9，11，12，20，31[18] Dmitri Pavlov 和 Jakob Scholbach。着色对称厄尔巴运算子的可容许性与严格化。 *Journal of Topology*，11：559–601，2018 年。2