arXiv:2602.12762v1 [math.AG] 13 Feb 2026

张量的非线性方法：超越仙人掌的割线簇行列式方程

MATĚJ DOLEŽÁLEK 和 MATEUSZ MICHAŁEK

摘要。我们提出一类张量展平方法，称为 *Kronecker-Koszul* 展平，它推广了著名的 Koszul 展平以及 Landsberg、Manivel、Ottaviani 和 Strassen 等人研究的其他割线簇方程。我们建立了新的边界秩判据，其条件是 Kronecker-Koszul 展平的子式消失。我们得到首批显式多项式方程——切触展平 ——它们在 Segre 簇的割线簇上消失，但在仙人掌簇上不消失。此外，我们的多项式具有简单的行列式表达式。作为另一项应用，我们给出了一种无需计算机的新证明，证明 2×2矩阵乘法张量的边界秩为 7。

“不要试图弯曲勺子。这是不可能的。相反，只要试着认识真相。
没有勺子。然后你会明白，弯曲的不是勺子，而是你自己。”– 黑客帝国

1. 引言

关于张量的核心问题是张量分解——将张量表示为若干简单张量之和，或者求出分解可能达到的最小规模，称为张量秩。尽管一般而言，该问题是 NP 困难的 [Hås90, HL13], ，但估计秩或边界秩、渐近秩等相关概念一直是一个成果丰硕的研究领域。或许最著名的应用是研究矩阵乘法的计算复杂性（例如 [Stra69, CW82, AV24, VXXZ24]）。此外，近期一系列研究将某些特殊张量的低渐近秩与求解 NP 困难问题的算法速度快于已知算法这一现象联系起来 [BCH+25, BK24, Prat24, ADV+25]。关于张量的代数视角导论，请参阅 [MS21，第 9 章；2], 如需更详尽的论述，请参阅 [Land11] 。关于其与复杂性理论的联系，请参阅 [BCS13, Land17]。

本文的主要主题是如何求得张量边界秩的下界，这是张量几何领域一个由来已久的问题。解决这一问题的经典方法，是为 Segre 簇的割线簇提供方程。展平，或是将给定张量映射为矩阵的映射，一直是求得此类下界的丰富来源（例如 [LO13、LM08、LO15、LM17a、LM25]）；由此得到的方程均以子式的形式出现。尤其是，*Strassen* 方程经 Landsberg 和 Manivel 进一步研究，并由 Landsberg 和 Ottaviani 推广为*Koszul* 和*Young* 展平，成为该领域的黄金标准。除展平外，边界极性（见 [BB21]）和边界替换（见 [Land17]）等技术也已被提出，并在近年用于证明若干新的下界。然而，所有这些方法的适用范围都相当有限。

事实上，现有的下界方法远不足以证明 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$中的张量具有一般边界秩，其值约为 $\frac{n^2}{3}$。相反，已知的展平方法在 $(2-\varepsilon)n$ 较小时，给出的最大下界可达 $\varepsilon > 0$。结合代数方程与其他方法，可以构造边界秩为 $2.02n$ [LM25]的张量实例。不过，展平方法无法突破一些已充分理解的障碍 [Bucz26、Gał17、EGOW18、GMOW19]。

2020 数学主题分类。主要分类：14N07，次要分类：14C05、15A69。关键词和短语。张量边界秩、展平、割线簇、仙人掌簇、行列式方程、点的希尔伯特概形。

相比之下，计算机科学中关于渐近秩的应用需要边界秩的超线性下界。

一般边界秩与现有下界之间的差距，被归因于割线簇包含在仙人掌簇之中（见第 2 节）。具体而言，已知的展平方法无法区分割线簇和仙人掌簇，即使已知前者严格包含于后者——引述 [CHL23]:

> “ [EGOW18、Gałą17] 所揭示的边界秩下界障碍的几何解释是：通过取子式得到的所有方程（称为秩方法），实际上都是针对一个比 $\sigma_r(\mathrm{Seg}(\mathbb{P}A \times \mathbb{P}B \times \mathbb{P}C))$ 更大的簇的方程，该簇称为第 r 阶仙人掌簇 [BB21]。”

事实上，正如 [Bucz26、Gałą17、Gałą23b] 所证明的，所有已知的、能为第 r 阶割线簇生成方程的方法，所得到的方程都是第 r 阶仙人掌簇的方程。此外，已知 Segre 簇在 r 中的第 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes 3}$ 阶仙人掌簇，当 r 随 n[BBG19、BJMR18、Gałą23a] 线性增长时，会填满环境空间。

因此，张量几何学界长期以来一直认为，不太可能，甚至不可能找到易于计算的行列式方程：这些方程在割线簇上消失，却不在仙人掌簇上消失。本文说明，造成仙人掌障碍的并非行列式表达式本身，而是将张量积线性嵌入矩阵空间的方式。因此，本文方法的出发点是研究从张量空间到矩阵空间的非线性映射。利用线性嵌入对矩阵秩建立界，只需考察 Segre 簇嵌入后的像，并运用线性性质。另一方面，对于非线性映射，我们需要采用更一般的方法，但这确实能带来更强的结果。我们提出了一种新方法，称为*Kronecker-Koszul* 展平，更一般地称为*Kronecker-Young* 展平，它能够构造出割线簇的显式且可高效计算的行列式方程，而这些方程通常不会在仙人掌簇上消失。特别是，与直接识别定义割线簇的理想的方法相比，Kronecker-Koszul 展平所需的计算时间和内存更少（参见[HIL13]）。

粗略地说，我们的方法首先将同一个张量的多个副本张量积在一起。根据对陪域的不同理解，这可以视为 Kronecker 幂或 Veronese 嵌入 [KM25]，，因而是固定次数多项式的通用映射。接下来，我们再与若干个 2-张量作张量积，这些张量对应于各种向量空间上的恒等映射。最后，我们将部分因子分组并收缩为外幂。由此得到我们称为 *Kronecker- Koszul* 张量的对象。随后，Kronecker-Koszul 展平就是对 Kronecker-Koszul 张量进行的经典展平。请注意，由于一开始取了张量幂，Kronecker-Koszul 张量通常是起始张量的非线性函数。关于这一构造的详细信息，请参见第 3 节。我们还会在那里介绍所谓的 Kronecker-Young 展平，这是对该方法的进一步推广，它将 Young 展平的方法融入其中。

我们的主要结果使用了切触展平，这是一种非常特殊的 Kronecker-Koszul 展平，它二次依赖于一个张量。定义见推论 3.9之前的段落。

定理 1.1. 对所有 $n \geqslant 14$，切触展平的大小为 $n(n-1)(n-2)+1$ 的子式在 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ 中 *Segre* 簇的第 n 个割线簇上为零，但在其第 n 个仙人掌簇上不为零。

例如，对于 $n = 14$ 所讨论的子式而言，它们是次数为4370 、含有2744 个变量的多项式。然而，它们是显式的，因此我们可以非常快速地确定它们是否为零。我们将通过利用推论1.1 中切触展平的秩给出边界秩的下界，证明定理3.9 ，并在定理5.6 中展示一列仙人掌秩为 n 的张量，在这些张量上，上述切触展平的子式均不为零。“切触”展平这一名称的由来，是因为它与点的 Hilbert 概形的切空间之间存在猜想上的联系——参见猜想6.1。此外，在第5.1小节中，我们还将展示，切触展平为以下事实提供了一种全新且完全初等的证明： 2×2 矩阵乘法张量的边界秩为7。

虽然 Kronecker-Koszul 展平推广了 Koszul 展平（参见 [LO13、LM08、LM17a、LM25]），但我们还将在第4 节中分析利用 Koszul 展平可以得到的、关于某些代数的结构张量的边界秩（以及边界仙人掌秩）的界。已知 [BL16]，一个（有限）代数是可平滑的，当且仅当其相应的结构张量具有最小边界秩。这也是边界湮灭方法应用中的主要挑战之一。此外，代数的结构张量的两个经典展平会产生可交换矩阵空间。因此，许多展平方法无法为此类张量的边界秩提供非平凡的界。然而，我们证明，即使使用 Koszul 展平，也可以得到严格大于代数次数的代数结构张量的边界仙人掌秩下界（参见命题4.2）。

最后，我们证明，在适当的假设下，为了给张量的边界秩提供下界，可以用某些二次克罗内克–科祖尔展平取代 Koszul 展平，并进一步改进（见命题 4.4）。

致谢

我们感谢 Jarosław Buczyński、Fulvio Gesmundo、Joachim Jelisiejew、Petteri Kaski、J. M. Landsberg 和 Giorgio Ottaviani 与我们进行了有益的讨论，并提出了意见和鼓励。

本工作得到欧盟地平线欧洲（HORIZON）玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动计划下的 HORIZON–MSCA-2023-DN-JD 项目资助，资助协议编号为 101120296（TENORS）。

2. 预备知识与记号

对于整数 n，我们令 $[n]=\{1,..,n\}$。所有向量空间均取自复数域 $\mathbb{C}$。给定向量空间 V 的一组基 $v_1,\dots,v_n$，我们将 $v_1^*,\dots,v_n^*$ 记为 V^* 的对偶基。张量积也取自 $\mathbb{C}$。当 $m>n$ 时，任意二项式 $\binom{n}{m}$ 都等于零。类似地，当 $m>$ 时，$\bigwedge^m V=0$ 等于零。本文所讨论的代数均为 $\mathbb{C}$ 上有限、交换且含幺的代数。提到它们的维数时，指的是作为向量空间的维数，而非克鲁尔维数。

对于射影簇 $X\subset\mathbb{P}(V)$，其第 k 个割线簇 $\sigma_k(X)\subset\mathbb{P}(V)$ 是 X 中由 k 元组点的射影张成的并集的扎里斯基闭包。$[v]\in\mathbb{P}(V)$ 的 k 秩是满足 $v=\sum_{i=1}^k x_i$ 的点 $[x_1],..,[x_k]\in X$ 的最小数目 k。第 X 个仙人掌簇 $\kappa_k(X)\subset\mathbb{P}(V)$ 是 X 中次数为 k 的零维子概形的射影张成的并集的扎里斯基闭包。我们总有 $\sigma_k(X)\subset\kappa_k(X)$。众所周知，经过 Veronese 再嵌入后，不可平滑戈伦斯坦概形会使仙人掌簇大于割线簇。目前，唯一对仙人掌簇的明确研究，基于对 $\mathbb{C}^6$ [GMR23] 中 14 次不可平滑戈伦斯坦概形的深入理解。更多详情请参阅 [BB14, IK99]。

在我们的情形中，通常取 X 为 Segre 簇 $X=\prod_{i=1}^r\mathbb{P}(V_i)\subset\mathbb{P}(\bigotimes_{i=1}^r V_i)$。此时，如果 $[T]\in\sigma_k(X)$（分别地，$[T]\in\kappa_k(X)$），我们就说 T 的 边界秩（分别地，边界仙人掌秩）至多为 k。X-秩简称为张量的秩。若 $r=2$，通过将 $V_1\otimes V_2=$ 识别为 Hom $(V_1^*,\ V_2)$，它便与线性映射的秩一致。

给定张量 $T\in\bigotimes_{i\in[r]}V_i$ 和子集 $I\subset[r]$，我们可以将 T 识别为一个线性映射

$$T^I:\bigotimes_{i\in I}V_i^*\to\bigotimes_{i\in[r]\setminus I}V_i,$$

它就是 T 的经典展平。经典展平的秩为 T 的边界秩提供下界。对于张量 $T\in A\otimes B\otimes C$，其中 $\dim B=\dim C$，若存在 $l\in A^*$ 使得 $T(l)\in B\otimes C$ 是一个满秩矩阵，我们就称 T 为 1_A-一般的。

回忆一下，给定任意一组 $F\subset\mathbb{C}[x_1,\ .....,\ x_n]$ 多项式，我们得到由湮灭极性理想$F^\perp\subset\mathbb{C}[\partial_1,\ .....,\ \partial_n]=D$ 其中每个元素的算子所构成的 F。与湮灭代数对应于 F的代数就是 $D/F^\perp$。我们始终假设 F 是有限的，或等价地说，是一个有限生成的 D-模。极性对偶构造可追溯至 Macaulay [Maca94], ，更多细节请参见[IK99，第 XX 页], [Dolg12，第 75]页，以及 [FJM25，第 2 节1]。

n 点的 $\mathbb{C}^d$的希尔伯特概形，记作 $\mathrm{Hilb}_n\,\mathbb{C}^d$，参数化满射环同态 $S := \mathbb{C}[x_1, \ldots\ldots, x_d] \twoheadrightarrow R$ 到 n 维代数 R，或者非正式地说，参数化由 d 个生成元生成的 n 维代数。将 $S \twoheadrightarrow R$ 的核记为 I，则在 $\mathrm{Hilb}_n\,\mathbb{C}^d$ 上作为点的 R 处的切空间可识别为 $\mathrm{T}_{[R]}\,\mathrm{Hilb}_n\,\mathbb{C}^d = \mathrm{Hom}_S(I, R)$。$\mathrm{Hilb}_n\,\mathbb{C}^d$ 的一个特殊的可光滑化分支由可光滑化代数组成；通过考察光滑代数的稠密子集，该分支的维数为 dn。关于点的 Hilbert 概形的更多信息，请参阅综述 [Jeli24]。

3. Kronecker-Koszul 展平

我们考虑张量 $T \in \bigotimes_{i=1}^r V_i$，其中 $d_i :=$ 维 V_i。对于我们的主要构造，我们固定：

- 一个正整数 k；• r 集合 $[k]$ 的划分 $\{\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,s_i}\}_{1\leqslant i\leqslant r}$，也就是说，对于每个 $1 \leqslant i \leqslant r$，都有互不相交且非空的子集 $\lambda_{i,j} \subset [k]$，其并集为 $[k]$；• 对于每个 $\lambda_{i,j}$，一个非负整数 $d'_{i,j}$。

我们将在下文介绍的对象都隐式或显式地依赖于这些固定数据。在继续之前，先直观地说明上述对象的含义。数 k 将表示张量 T 的张量幂。$d'_{i,j}$ 将提供外幂，我们将用这些外幂与其取张量积，这类似于 Koszul 展平的构造。划分 $\lambda_{i,j}$ 将告诉我们如何将 T 的张量幂与这些外幂进行缩并，从而得到高阶外幂。

我们首先介绍外幂的形式化表述。固定一个张量

$$J \in \bigotimes_{i=1}^{r} \bigotimes_{j=1}^{s_i} \bigwedge^{d'_{i,j}} V_i \otimes \bigwedge^{d'_{i,j}} V_i^*,$$

它对应于 $\bigotimes_{i=1}^r \bigotimes_{j=1}^{s_i} \bigwedge^{d'_{i,j}} V_i$ 上的恒等映射。这里，当 $d'_{i,j} = 0$ 时，我们可以直接省略张量积中的这一项。这在形式上意味着与一维空间 $\mathbb{C} = \mathbb{C}\otimes\mathbb{C} = \bigwedge^0 V_i \otimes \bigwedge^0 V_i^*$ 作张量积。我们还将每个外幂视为一个向量空间，并称其相应的张量秩和边界秩。[1]

接下来，我们考虑张量积 $T \to \tilde{T}$ 的多项式映射。根据秩（分别为边界秩）在张量积下的次可乘性，它将秩（分别为边界秩）至多为 q 的张量映射为秩（分别为边界秩）至多为

$$(\mathrm{rk}\,T)^k \cdot \mathrm{rk}\,J = q^k \cdot \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s_i} \binom{d_i}{d'_{i,j}}.$$

然而，给定 T 作为 q 个简单张量之和的任意一种分解，其诱导的分解 $T^{\otimes k}$ n ee都具有一种特殊形式。这正是我们将要利用的性质。

我们注意到 $T^{\otimes k} \in \bigotimes_{i=1}^r V_i^{\otimes k}$。不过，划分 $\lambda_{i,j}$ 区分了不同的排序，因此我们将记作 $V^{\otimes k}$ $_i = V_{i,1} \otimes V_{i,2} \otimes \cdots \otimes V_{i,k}$ 其中我们有 $V_{i,t} = V_i$。在这种情形下，我们有

$$\tilde{T} \in \bigotimes_{i=1}^{r} \left(\left(\bigotimes_{t=1}^{k} V_{i,t} \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{s_i} \bigwedge^{d'_{i,j}} V_i \otimes \bigwedge^{d'_{i,j}} V_i^* \right) \right) = \bigotimes_{i=1}^{r} \left(\left(\bigotimes_{j=1}^{s_i} \bigotimes_{t\in\lambda_{i,j}} V_{i,t} \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{s_i} \bigwedge^{d'_{i,j}} V_i \otimes \bigwedge^{d'_{i,j}} V_i^* \right) \right).$$

下一步是与典范映射进行缩并

$$\left(\bigotimes_{t\in\lambda_{i,j}} V_{i,t} \right) \otimes \bigwedge^{d'_{i,j}} V_i \to \bigwedge^{d'_{i,j}+|\lambda_{i,j}|} V_i.$$

[1]通过考察源自 Grassmannian（的乘积）的 X-秩，我们或许可以改进我们的大多数方法。不过，本文不再探讨这一点。

我们得到一个映射

$$\pi:\bigotimes_{i=1}^{r}\left(\left(\bigotimes_{j=1}^{s_i}\bigotimes_{t\in\lambda_{i,j}}V_{i,t}\right)\otimes\left(\bigotimes_{j=1}^{s_i}\bigwedge^{d'_{i,j}}V_i\otimes\bigwedge^{d'_{i,j}}V_i^*\right)\right)\to\bigotimes_{i=1}^{r}\bigotimes_{j=1}^{s_i}\bigwedge^{d'_{i,j}+|\lambda_{i,j}|}V_i\otimes\bigwedge^{d'_{i,j}}V_i^*.$$

˜我们的主要研究对象是张量 $T_\pi := \pi(T)$，我们称之为克罗内克–科苏尔张量。我们将 T_π 视为 $\sum_{i=1}^{r}2s_i$ 个向量空间的张量积中的一个张量，其中一些向量空间可能是一维的，甚至是零维的；在后一种情况下，$T_\pi = 0$。换句话说，我们将每个 $\bigwedge^{d'_{i,j}+|\lambda_{i,j}|}V_i$ 以及每个 $\bigwedge^{d'_{i,j}}V_i^*$都视为单个向量空间，并计算$T_\pi$ 相对于这种张量积的秩和边界秩。

为了陈述关于 T_π的（边界）秩上界的主要定理，我们还需要引入一个对象。若一个 k元组 $(l_1,\ldots,l_k)\in[q]^k$ 满足以下条件，则称其相容：

- 对于任意 $1\leqslant t_1\neq t_2\leqslant k$，如果存在 $\lambda_{i,j}$ 同时包含 t_1 和 t_2，那么 $l_{t_1}\neq l_{t_2}$。

令 $C([q]^k)$ 为相容的 k 元组集合，并令 $F(q) := |C([q]^k)|$ 为相容的 k 元组的数量。

注 3.1。考虑一个图 G，其顶点集为 $[k]$。对于每个 $\lambda_{i,j}$ 我们将 $\lambda_{i,j}$中的顶点两两用边连接。因此，G 是若干团的并（通常并不互不相交）。于是，$F(q)$ 是 G 的正确顶点着色数，其中使用 q 种颜色；也就是说，它是色多项式 $\chi_G(q)$ 的取值。

例 3.2。考虑如下数据下的克罗内克–科祖尔构造：$r=3$ 向量空间、张量幂 $k=4$、划分，其中 $\lambda_{1,1}=\{1,2,3\}$，$\lambda_{2,1}=\{3,4\}$ 以及所有其他 $\lambda_{i,j}$ 单点集。注 G 3.1 中的图如图 1 所示；特别要注意，参数 $d'_{i,j}$ 以及向量空间的维数 d_i 与构造 G 无关。对 χ_G 进行标准计算即可得到 $F(q)=\chi_G(q)=q(q-1)^2(q-2)$。

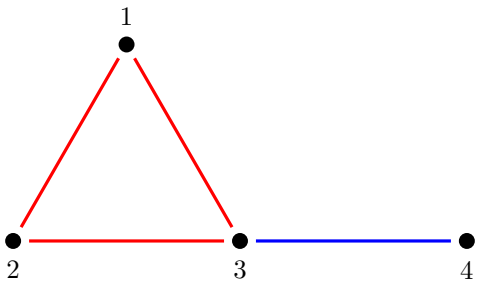

图 1. 图 G 由团 $\lambda_{1,1}=\{1,2,3\}$ 与团 $\lambda_{2,1}=\{3,4\}$的并得到。划分中的所有其他集合均为单元素集，不贡献任何边。

定理 3.3. 若 T 的秩（相应地，边界秩）至多为 q，则 T_π 的秩（相应地，边界秩）至多为 $F(q)\cdot\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s_i}\binom{d_i-|\lambda_{i,j}|}{d'_{i,j}}$。

证明。由于我们所应用的所有映射都是连续的，只需证明关于秩的陈述。因此，在 T 的秩至多为 q 的假设下，即 $T=\sum_{l=1}^{q}v_{l,1}\otimes\cdots\otimes v_{l,r}$，我们给出 T_π 的秩的上界。我们注意到

$$T^{\otimes k}\otimes J=\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in[q]^k}\left(\bigotimes_{t=1}^{k}v_{l_t,1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k}v_{l_t,r}\right)\otimes J.$$

因此，

$$T_\pi=\pi(T^{\otimes k}\otimes J)=\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in[q]^k}\pi\left(\left(\bigotimes_{t=1}^{k}v_{l_t,1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k}v_{l_t,r}\right)\otimes J\right).$$

我们注意到，如果 $(l_1, \ldots\ldots, l_k)$ 不相容，那么

$$\pi\left(\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,r}\right)\otimes J\right)=0$$

因为我们将对两个相同的向量取外积。因此，我们有

$$T_\pi=\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in C([q]^k)}\pi\left(\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,r}\right)\otimes J\right).$$

这个和包含 $F(q)$ 许多项，我们将给出每一项秩的上界。固定 $(l_1,\ldots,l_k)$。若对任意$\lambda_{i,j}$，向量$v_{l_t,i}$（其中 $t\in\lambda_{i,j}$）不是线性无关的，那么

$$\pi\left(\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,r}\right)\otimes J\right)=0.$$

因此，我们假设情况并非如此，并且对每个$\lambda_{i,j}$，都将序列$S_{i,j}:=(v_{l_t,i})_{t\in\lambda_{i,j}}$ 扩充为 V_i的一个基$B_{i,j}$。注意，$|S_{i,j}|=|\lambda_{i,j}|$。我们可以将 J 表示为

$$J=\bigotimes_{i=1}^{r}\bigotimes_{j=1}^{s_i}\sum_{B\subset B_{i,j}}\bigwedge_{b\in B} b\otimes\bigwedge_{b\in B} b^*,$$

其中$\sum_{B\subset B_{i,j}}$遍历所有基数为$d'_{i,j}$的子集。注意，若$B\cap S_{i,j}\neq\varnothing$，则

$$\pi\left(\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,r}\right)\otimes\bigotimes_{i=1}^{r}\bigotimes_{j=1}^{s_i}\bigwedge_{b\in B} b\otimes\bigwedge_{b\in B} b^*\right)=0.$$

因此，我们可以将$\sum_{B\subset B_{i,j}}$改为对所有与$S_{i,j}$不相交且基数为$d_{i,j}$的子集求和。固定 $(l_1,\ldots,l_k)$，我们得到：

$$\pi\left(\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,1}\right)\otimes\cdots\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k} v_{l_t,r}\right)\otimes\bigotimes_{i=1}^{r}\bigotimes_{j=1}^{s_i}\sum_{B\subset B_{i,j}\setminus S_{i,j}}\bigwedge_{b\in B} b\otimes\bigwedge_{b\in B} b^*\right).$$

这是$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s_i}\binom{d_i-|\lambda_{i,\ j}|}{d'_i}$个秩一张量的和。由于 $F(q)$ 对于$(l_1、\ldots\ldots、l_k)$有许多种可能性，定理得证。□

D定义 3.4. T 的一个*Kronecker-Koszul* 展平是张量 T的任意一种经典展平 π.

推论 3.5. 若 T 的边界秩至多为 q，则T 的 *Kronecker-Koszul* 展平的秩至多为 $F(q)\cdot\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s_i}\binom{d_i-|\lambda_{i,\ j}|}{d'_{i,\ j}}$。特别地，*Kronecker-Koszul* 展平的子式给出了 *Segre* 簇割线簇的方程。

证明。 由定理 3.3可得，因为经典展平的秩是张量边界秩的下界。□

定理 3.3 和推论 3.5 中的界不一定是紧的。这可能由多种原因造成，其中有些原因比其他原因更难以理解：

例 3.6。 设 $r=3, k=2, s_1=s_2=s_3=1, \lambda_{1,\ 1}=\lambda_{2,\ 1}=\lambda_{3,\ 1}=\{1,\ 2\}$ 以及所有 $d'_{i,\ j}$ 均为零。记作 $T=\sum_{l=1}^{q} a_l\otimes b_l\otimes c_l\in A\otimes B\otimes C$，则相应的克罗内克–科苏尔张量为

$$T_\pi=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant q}(a_i\wedge a_j)\otimes(b_i\wedge b_j)\otimes(c_i\wedge c_j)\in\bigwedge^2 A\otimes\bigwedge^2 B\otimes\bigwedge^2 C.$$

然而，在求和中交换 i 与 j 的角色并应用反对称性，可得 $T_\pi=-T_\pi$，因此 $T_\pi=0$。特别地，定理 3.3 中的界并不紧。

专家可能会注意到，这是因为 $S^2(A\otimes B\otimes C)$ 的不可约 (一般线性群$(A)\times$一般线性群$(B)\times$一般线性群(C))-表示分解中不含 $\bigwedge^2 A\otimes\bigwedge^2 B\otimes\bigwedge^2 C$。

例 3.7. 考虑 $r=3,\quad d_1=d_2=d_3=q,\quad k=1$，其中 $d'_{1,\,1}=d'_{2,\,1}=1,\quad d'_{3,\,1}=0$。当 $T=\sum_{i=1}^{q}a_i\otimes b_i\otimes c_i\in A\otimes B\otimes C$ 是一个秩最小的简约张量时，推论 3.5 预测展平

$$\bigwedge^{2}A^*\otimes\bigwedge^{2}B^*\to C\otimes A^*\otimes B^*$$

基于分解，使秩至多为 $q(q-1)^2$

$$T_\pi=\sum_{\substack{1\leqslant i,j_1,j_2\leqslant n\\ j_1\neq i\neq j_2}}(a_i\wedge a_{j_1})\otimes(b_i\wedge b_{j_2})\otimes c_i\otimes a_{j_1}^*\otimes b_{j_2}^*.$$

然而，对于所选的展平，对于每个满足 $(i,\ j_1,\ j_2)=(x,\ y,\ y)$ 的项，我们可以将其与$(i,\ j_1,\ j_2)=(y,\ x,\ x)$ 合并为

$$(a_x\wedge a_y)\otimes(b_x\wedge b_y)\otimes\left(c_x\otimes a_y^*\otimes b_y^*+c_y\otimes a_x^*\otimes b_x^*\right),$$

由此得到的 Kronecker-Koszul 展平的秩至多为 $q(q-1)^2-\binom{q}{2}$。特别地，推论 3.5 中的界并不紧。

然而，对于许多值得关注的 Kronecker-Koszul 展平，该界是紧的。下面我们将介绍许多此类情形；特别是，这些情形涵盖了第 4 节和5节中应用所需的所有 Kronecker-Koszul 展平。

命题 3.8. 假设 $d_1=\cdots=d_r=q$，并且对于每个 $1\leqslant t\leqslant k$，至少存在两个$\lambda_{i_1(t),\,j_1(t)},\quad\lambda_{i_2(t),\,j_2(t)}=\{t\}$，使得 $d'_{i_1(t),\,j_1(t)}=d'_{i_2(t),\,j_2(t)}=0$。若 π 的陪域非零，即 $d'_{i,\,j}+|\lambda_{i,\,j}|\leqslant d_i$，则存在一个秩为 T 的张量 q 以及一个 *Kronecker-Koszul* 展平，使其达到推论 *3.5*中的界。特别地，定理 *3.3* 中的界是紧的。

特别是，当 $r=3$ 且我们只使用一个外幂时，这些假设总是成立。

证明。令 T为单位张量 $T=\sum_{l=1}^{q}\otimes_{i=1}^{r}e_{i,\,l}$，其中相应的 $e_{i,\,l}$ 构成每个 V_i的一组基。我们有 $T_\pi\in\bigotimes_{i=1}^{r}\bigotimes_{j=1}^{s_i}\bigwedge^{d'_{i,\,j}+|\lambda_{i,\,j}|}V_i\otimes\bigwedge^{d'_{i,\,j}}V_i^*$。我们选取 T_π 的展平，其定义域为

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{r}\bigotimes_{j=1}^{s_i}\bigwedge^{d'_{i,j}}V_i\right)\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k}\bigwedge^{d'_{i_1(t),j_1(t)}+|\lambda_{i_1(t),j_1(t)}|}V_{i_1(t)}^*\right)=\left(\bigotimes_{i=1}^{r}\bigotimes_{j=1}^{s_i}\bigwedge^{d'_{i,j}}V_i\right)\otimes\left(\bigotimes_{t=1}^{k}V_{i_1(t)}^*\right).$$

定理 3.3 的界基于一个由相容元组 $(l_1,\ldots,l_k)$索引的分解，随后还涉及一个$(d_{i,\,j}-|\lambda_{i,\,j}|)$元集合的 $d'_{i,\,j}$ 元子集。在由 V_i各自的基诱导的外幂基中进行运算，并固定一个 $(l_1,\ \ldots,\ l_k)$后，我们记 $L_{i,\,j}:=\{l_t\mid t\in\lambda_{i,\,j}\}$，并将其与 $(l_1,\ \ldots,\ l_k)$ 及每个基数为 $d'_{i,\,j}$ 的子集 $P_{i,\,j}\subset[q]\backslash L_{i,\,j}$ 关联，得到基向量

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{r}\bigotimes_{j=1}^{s_i}\bigwedge_{p\in P_{i,j}}e_{i,p}\right)\otimes\bigotimes_{t=1}^{k}e^*_{i_1(t),l_t}$$

在定义域中。其在展平中的像将是

$$\bigotimes_{\substack{i\in[r],\ j\in[s_i],\\ (i,j)\neq(i_1(t),j_1(t))\text{ for any }t}}\ \bigwedge_{p\in P_{i,j}\cup L_{i,j}}e_{i,p}.$$

特别　　地，这是陪域中的一个基向量。如果我们现在证明可以从这个像 中重构出原始数据 $(l_1,\ \ldots\ldots,\ l_k)$ 和 $P_{i,\,j}$，该命题便得证。

为此，我们首先考察对每个 t 而言由 $(i,j)=(i_2(t),j_2(t))$ 索引的因子。根据我们的假设，该因子就是 $V_{i_2(t)}$，而基元素为 $e_{i_2(t),l_t}$。因此，我们可以重构每个 l_t。于是我们知道 $L_{i,j}$，随后便可从每个因子中恢复 $P_{i,j}=(P_{i,j}\cup L_{i,\,j})\backslash L_{i,j}$，从而完成证明。□

现在我们介绍一般构造的两个特例，其中第一个是众所周知的。对于 $r=3$, $k=1$, $\lambda_{i,j}=\{1\}$ 且只有一个 $d'_{i,j}$ 非零时，我们得到著名的 Koszul 展平[LO13，LM08]。

考虑 $r=3$, $k=2$, $\lambda_{1,\ 1}=\{1,\ \ 2\}$, $\lambda_{2,\ 1}=\lambda_{3,\ 1}=\{1\}$, $\lambda_{2,\ 2}=\lambda_{3,\ 2}=\{2\}$, $d'_{1,\ 1}=1$ 以及所有其他$d'_{i,\ j}$ 均为零。在这种情况下，我们考虑一个特殊的 Kronecker-Koszul 展平，其定义为

$$\bigwedge^3 V_1^*\otimes V_2^*\otimes V_3^*\to V_1^*\otimes V_2\otimes V_3.$$

我们称之为切触展平，并记为 $\Phi^{V_1\mathrm{T}}\ (T)$。下面的推论是定理3.3的推论。

推论 3.9。若维数$V_1=$维数$V_2=$维数$V_3=n$，则切触展平的 $q(q-1)(n-2)+1$ 个子式给出了边界秩 q 的方程。

证明。由于 $\lambda_{1,\ 1}=\{1,\ \ 2\}$，$(l_1,\ l_2)$ 的相容性仅意味着 $l_1\neq l_2$。因此 $F(q)=q(q-1)$，这对应于每个点中的前两个因子。此外：

$$\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{s_i}\binom{n-|\lambda_{i,j}|}{d'_{i,j}}=\binom{n-|\lambda_{1,1}|}{d'_{1,1}}=\binom{n-2}{1}=n-2.$$

这就得到了最后一个因子。 □

3.1. **Kronecker-Young 展平**。在 [LO13], *Young* 展平中，采用了 Koszul 展平的一种推广：用一般线性群(V) 的其他不可约表示代替仅使用 $\bigwedge^{d'}V$。我们的 Kronecker-Koszul 展平构造可直接推广为 Kronecker-Young 展平：通过投影到外积之外的 Schur 函子，并应用这些 Schur 函子。

本节介绍一种我们认为特别有趣的显式构造。令 [KM25]为 k 阶 Kronecker 幂的像中张量的线性张成，且这些张量属于 $A\otimes B\otimes C$，则有 $S^k(A\otimes B\otimes C)$。作为一个一般线性群$(A)\times$一般线性群$(B)\times$一般线性群(C) 表示，后一个空间可分解为若干等型分量

$$S^k(A\otimes B\otimes C)=\bigoplus_{\lambda,\mu,\rho\vdash k}\left(S^\lambda(A)\otimes S^\mu(B)\otimes S^\rho(C)\right)^{\oplus K_{\lambda,\mu,\rho}},$$

其中 $K_{\lambda,\ \mu,\ \rho}$ 是 Kronecker 系数。特别地，当 $\lambda=\mu=1^k$ 和 $\rho=(k)$ 时，我们有$K_{\lambda,\ \mu,\ \rho}=1$。这给出了一个典范投影

$$\pi: S^k(A\otimes B\otimes C)\to\bigwedge^k A\otimes\bigwedge^k B\otimes S^k(C).$$

克罗内克–杨展平的一个例子是 $\pi(T^{\otimes k})$ 的经典展平，定义如下：

$$\Phi^C_{\mathrm{M},k}(T):\bigwedge^k A^*\otimes\bigwedge^k B^*\to S^k(C).$$

这些选择的优点在于，映射 $\Phi^C_{\mathrm{M},\ k}(T)$ 的像可以通过展平 $T^C\colon C^*\to A\otimes B$ 直接解释。具体而言，$\Phi^C_{\mathrm{M},\ k}(T)$ 的像是所有 $k\times k$ 子式的线性张成，其中将 T^C 视为一个元素取自 C 的矩阵。因此，我们称 $\Phi_{\mathrm{M},\ k}$ 为 k-子式展平。

引理 3.10。若 $\dim A=\dim B=\dim C=n$，且张量 $T\in A\otimes B\otimes C$ 的边界秩至多为 n，则 k-子式展平 $\Phi^C_{\mathrm{M},\ k}(T)$ 的秩至多为 $\binom{n}{k}$。

证明。Segre 簇的第 n 个割线簇是单位张量 $I_n:=\sum_{i=1}^n a_i\otimes b_i\otimes c_i$ 在 $\mathrm{GL}(A)\times\mathrm{GL}(B)\times\mathrm{GL}(C)$ 轨道下的闭包，其中 a_i、b_i、c_i 分别是 A、B、C 的基。由于我们的构造是连续且等变的，只需证明 $\mathrm{rk}\Phi^C_{\mathrm{M},\ k}(I_n)=\binom{n}{k}$。注意到 $I_n^C(C^*)$ 是对角矩阵的空间。显然，对角矩阵的 $k\times k$ 阶子式的线性张成，等于 n 个变量中次数为 k 的无平方因子单项式的线性张成，因此其维数为 $\binom{n}{k}$。□

k 阶子式展平 $\Phi^{C}_{\mathrm{M},\ k}$ 有几个显著的优点:

(1) 即使 n 和 k 相对较大，其秩也能快速计算。(2) 它有望证明属于希尔伯特概形某些分支的 Gorenstein 概形不可平滑化；这些分支的一般切空间维数大于可光滑化分支的维数。

说明第二点的具体例子将在小节 5.3中给出。下面我们说明第一点。给定一个张量 T，为了给 $\Phi^{C}_{\mathrm{M},\ k}(T)$ 关于 r 的像的维数提供下界，我们不必对 $\binom{n}{k}^2$ 个可能的子式作形式上的线性组合。相反，可以:

(1) 选取 r 个一般点 $p_i \in C^*$，以及 r 个一般矩阵对 $U_j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k,\ A)$, $V_j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k,\ B)$。(2) 构造一个 $r \times r$ 矩阵 (m_{ij})，令 m_{ij} 等于 $k \times k$ 矩阵$U_j^T T^C(p_i) V_j$ 的行列式。(3) 计算 (m_{ij}) 的秩。

显然，如果上述方法返回的矩阵的秩为 r'，那么 $\mathbf{rk}\,\Phi^{C}_{\mathrm{M},\ k}(T) \geqslant r'$。此外，如果 $r \geqslant \mathbf{rk}\,\Phi^{C}_{\mathrm{M},\ k}(T)$, 那么该方法以概率 1 返回 $r' = \mathbf{rk}\,\Phi^{C}_{\mathrm{M},\ k}(T)$。

4. Koszul 展平

本节中，我们专门讨论三阶张量，并将三个起始向量空间记为 A、B 和 C。对于张量 $T \in A \otimes B \otimes C$，我们用 $\Phi^{A,\ B\,\mathrm{K}}(T)$ 表示第一Koszul展平

$$\begin{aligned}&\bigwedge^2 A^* \otimes B^* \to A^* \otimes C,\\ &(\alpha \wedge \alpha') \otimes \beta \mapsto \alpha \otimes T(\alpha', \beta) - \alpha' \otimes T(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

在各基下，它可以表示为具有特定分块结构的矩阵：令 $n := \dim A$，取 A^* 的一组基 α_1，……，α_n，并令 $M_i := T(\alpha_i) \in B \otimes C$，则 $\Phi^{A,\ B\,\mathrm{K}}(T)$ 是分块矩阵

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \{1,2\} & \dots & \{i,j\} & \dots & \{n-1,n\} \end{array} \\ \begin{pmatrix} M_2 & & \cdots & & 0 \\ -M_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & \varepsilon_{i,j} M_j & & \cdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & M_{n-1} \\ 0 & & \cdots & & -M_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{1}$$

其中，如果 $i < j$，则 $\varepsilon_{i,\ j} := 1$；如果 $i > j$，则 -1。我们以类似方式定义其余五种展平：$\Phi^{A,\ C\,\mathrm{K}}$、$\Phi^{B,\ A\,\mathrm{K}}$、$\Phi^{B,\ C\,\mathrm{K}}$、$\Phi^{C,\ A\,\mathrm{K}}$和 $\Phi^{C,\ B\quad\mathrm{K}}$。

4.1. 代数的结构张量。 约定，对于交换代数，结构张量 R 始终视为 $R^* \otimes R^* \otimes R$ 的元素，即部分对称性位于第一个和第二个因子之间。

由于这种部分对称性，结构张量 T 实质上只有三种 Koszul 展平：$\Phi^{A,\ B\,\mathrm{K}}(T)$，$\Phi^{A,\ C\,\mathrm{K}}(T)$ 和 $\Phi^{C,\ A\,\mathrm{K}}(T)$。以下引理已为人所知——它类似于 Landsberg、Manivel 和 Ottaviani 对 Strassen交换性方程 [Stra83] 的阐释 [LM08，Otta08], [LM17b，第 2 节。1]。

引理 4.1。 对于交换代数 R 的任意结构张量 T，*Koszul* 展平 $\Phi^{A,B\,\mathrm{K}}(T)$ 和 $\Phi^{A,C\,\mathrm{K}}(T)$ 的秩均为 $n(n-1)$。

证明。 由于 R 是交换的，空间 $T(R) \subset R^* \otimes R \simeq \mathrm{Hom}(R,R)$ 中的矩阵彼此交换。此外，由于 $1 \in R$ 我们有 $T(1) = \mathrm{id}_R \in T(R)$。因此，在 (1) 中，我们可以取 $M_1 = \mathrm{id}_R$。我们可以用这些 $n-1$ 满秩块 M_1 通过行列变换消去其他块。一般而言，这会在其他位置产生形如 $M_iM_j - M_jM_i$ 的块。在我们的情形中，由于 $T(R)$ 的交换性质，所有这类块都会消失。因此， $\Phi^{A}_{,B\,\mathrm{K}}(T)$ 和 $\Phi^{A}_{,C\,\mathrm{K}}(T)$ 的秩恰为 $(\mathbf{rk}\, M_1)(n-1) = n(n-1)$。□

前述引理表明，展平 $\Phi^{A}_{,B\,\mathrm{K}}(T)$ 和 $\Phi^{A}_{,C\,\mathrm{K}}(T)$ 绝不能用于证明代数的不可平滑性。此外，即使将论证限制在子空间 $V \subset R$ 并针对张量 $T' \in V^* \otimes R^* \otimes R$ 进行，同样的论证仍然成立。这常常使人误以为 Koszul 展平绝不能用于证明代数的不可平滑性。事实上，当 R 是 Gorenstein 时，张量 T 是对称的 [HMV20，定理 p. 1507] ；对于其他展平，也可以得到类似结论。然而，令人惊讶的是，一般而言，另一个 Koszul 展平 $\Phi^{C,\,A\,\mathrm{K}}(T)$ 可以得出非平凡结果：

命题 4.2。 令 R 为 d 个变量上的 $e \leqslant \binom{d+1}{2}$ 一般二次型的湮灭代数。若 $e \geqslant 3$，则 R 的结构张量 T 的边界仙人掌秩至少为 $\left\lfloor \frac{3}{2}d \right\rfloor + 3$。特别地，若 $3 \leqslant e \leqslant \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$，则 R 不可平滑。

证明。 根据极对构造， R 是一个具有希尔伯特函数 $(1,\ d,\ e)$、因而维数为 $n := 1 + d + e$ 的分次代数。我们选取一个一般的三维子空间 $V \subset R^*$，并考虑张量 $T' \in R^* \otimes R^* \otimes V^*$ 及其 Koszul 展平 $\Phi^{C,\,A\,\mathrm{K}}(T')$。这相当于选取一般矩阵 $M_i \in T(R^*) \subset R^* \otimes R^*$、 $i = 1,\ 2,\ 3$ 并构造该矩阵

$$K := \begin{pmatrix} M_2 & M_3 & \\ -M_1 & & M_3 \\ & -M_1 & -M_2 \end{pmatrix}.$$

我们将证明 $\mathbf{rk}\ K = 6 + 2\left\lfloor \frac{3}{2}d \right\rfloor$。记边界仙人掌秩为 bcr， [Gał23b，定理 1.18]，[Bucz26] 将进而推出 $\mathbf{bcr}(T) \geqslant \mathbf{bcr}(T') \geqslant 3 + \left\lfloor \frac{3}{2}d \right\rfloor$，因为任意秩一张量 $Z \in R^* \otimes R^* \otimes V^*$ 都将得到 $\mathbf{rk}\,\Phi^{C,\,A\,\mathrm{K}}(Z) = 2$。

矩阵 $T(\gamma) \in T(R^*) \subset R^* \otimes R^*$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} x_0 & \mathbf{x}_1^T & \mathbf{x}_2^T \\ \mathbf{x}_1 & S(\mathbf{x}_2) & \\ \mathbf{x}_2 & & \end{pmatrix},$$

其中， x_0、$\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 分别是描述 R 的 0 次、1 次和 2 次部分上线性形式 γ 的坐标（向量），而 $S(\mathbf{x}_2)$ 是一个关于 $\mathbf{x}_2$ 线性相关的 $d \times d$ 对称矩阵。为 M_i 选取三个这样的矩阵，我们得到

$$K = \begin{pmatrix} y_0 & \mathbf{y}_1^T & \mathbf{y}_2^T & z_0 & \mathbf{z}_1^T & \mathbf{z}_2^T & & & \\ \mathbf{y}_1 & S(\mathbf{y}_2) & & \mathbf{z}_1 & S(\mathbf{z}_2) & & & & \\ \mathbf{y}_2 & & & \mathbf{z}_2 & & & & & \\ -x_0 & -\mathbf{x}_1^T & -\mathbf{x}_2^T & & & & z_0 & \mathbf{z}_1^T & \mathbf{z}_2^2 \\ -\mathbf{x}_1 & -S(\mathbf{x}_2) & & & & & \mathbf{z}_1 & S(\mathbf{z}_2) & \\ -\mathbf{x}_2 & & & & & & \mathbf{z}_2 & & \\ & & & -x_0 & -\mathbf{x}_1^T & -\mathbf{x}_2^T & -y_0 & -\mathbf{y}_1^T & -\mathbf{y}_2^T \\ & & & -\mathbf{x}_1 & -S(\mathbf{x}_2) & & -\mathbf{y}_1 & -S(\mathbf{y}_2) & \\ & & & -\mathbf{x}_2 & & & -\mathbf{y}_2 & & \end{pmatrix}.$$

首先，我们注意到，每个块的首行和首列总共对秩贡献 6——向量 $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2$ 和 $\mathbf{z}_2$ 是从一个 e 维空间中一般选取的，因此它们与 $e \geqslant 3$ 线性无关。利用这些分块部分消去其余各自行和列后，我们将剩余部分记为 $U := S(\mathbf{x}_2)$、 $V := S(\mathbf{y}_2)$、 $W := S(\mathbf{z}_2)$ ，并将它们留待

考虑

$$\begin{pmatrix} V & W & \\ -U & & W \\ & -U & -V \end{pmatrix}.$$

由于代数 R是一般选取的，而 U、 V、 W是在 $T(R^*)$中一般选取的，因此它们总共就是三个一般的对称 $d\times d$ 矩阵；特别地， U 是满秩的。通过分解$U = PP^T$并分别用 $P^{-1}V(P^{-1})^T$、 $P^{-1}W(P^{-1})^T$替换 V、 W，我们可以假设 U是单位矩阵。接下来，通过行列变换，我们将

$$\begin{pmatrix} V & W & \\ -\mathrm{id} & & W \\ & -\mathrm{id} & -V \end{pmatrix} \quad \text{into} \quad \begin{pmatrix} & & VW-WV \\ -\mathrm{id} & & \\ & -\mathrm{id} & \end{pmatrix}.$$

因此，只需证明对于一般的 $d\times d$个对称矩阵 V、 W，交换子 $VW-WV$的秩为 $2\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$。首先，这个交换子是反对称的，因此其秩至多为 $2\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$。根据秩的半连续性，只需证明存在一对对称矩阵 V、 W，使得 $\mathbf{rk}(VW-WV) = 2\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor$。例如，以下情形很容易验证：

$$V = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\lfloor\frac{d}{2}\rfloor \text{ ones}}$

□

对类型 $(1、\ d、\ e)$ 代数可平滑性的研究是一个经典课题 [Shaf90]。我们注意到，对于 $d = 4$ 和 $e = 3$ ，我们得到关于 8 个点的希尔伯特概形可约性的经典结果 [IE78 、 CEVV09]。关于希尔伯特概形分支的其他结果，参见 [SS23、Jeli19]。不过，据我们所知，超出代数维数的边界仙人掌秩界限是新的。此外，命题 4.2 并未穷尽所有情形—— $\Phi^{C}{}_{,A\,\mathrm{K}}$ 也可能在其他情形下证明其不可平滑性，尽管随着希尔伯特函数中非零项增多，块结构及后续的秩分析会变得更加复杂。

例 4.3. 设 $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ 为两个一般三次齐次多项式， l_i,1, $l_{i,2} \in \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3, y_4]$, $i = 1, 2, 3$为六个一般线性形式。令 $f_i := q_i(l_i,1, l_{i,2}) \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_4]$， 并设 R为 $\{f_1, f_2, f_3\}$的湮灭代数。其希尔伯特函数为 $(1, 4, 6, 3)$, 维数为 14；但通过计算机辅助计算直接计算其结构张量 T可得[2] $\mathbf{rk}\ \Phi^{C}{}_{,A\,\mathrm{K}}\ (T) = 184 > 14\cdot 13$，因此 R不可平滑。

4.2. **Koszul 展平与二次展平的比较。** 考虑一个由 $k = 2$ 得到的二次 Kronecker-Koszul 展平，其中只有一个非平凡分拆 $\lambda_{1,\ 1} = \{1,\ 2\}$，并且所有 $d'_{i,\ j} = 0$。我们将其记为

$$\begin{aligned} \Phi^{A}_{\mathrm{Q}}(T) : \bigwedge^2 A^* \otimes B^* \otimes C^* &\to C \otimes B, \\ (\alpha \wedge \alpha') \otimes \beta \otimes \gamma &\mapsto T(\alpha, \beta) \otimes T(\alpha', \gamma) - T(\alpha', \beta) \otimes T(\alpha, \gamma). \end{aligned}$$

我们以类似的方式定义 Φ^{B}_{Q} 和 Φ^{C}_{Q}。

命题 4.4。 空间 $\operatorname{im} \Phi^{C}_{\mathrm{Q}}(T) \subset A \otimes B$ 等于所有 $(T(\alpha) \otimes \mathrm{id}_A)\left(\operatorname{im} \Phi^{C}{}_{,\ B\,\mathrm{K}}\ (T)\right)$对 $\alpha \in A^*$ 的和，其中我们将 $T(\alpha)$ 视为一个映射 $C^* \to B$。特别地，若 $\dim B = \dim C$ 且 T 是 1_A-一般的，则可推出 $\operatorname{rk} \Phi^{C}_{\mathrm{Q}}(T) \geqslant \operatorname{rk} \Phi^{C}{}_{,\ B\,\mathrm{K}}\ (T)$。

[2]由于我们采用一般选择，严格来说，我们证明 $\mathbf{rk}\ \Phi^{C}{}_{,\ A\,\mathrm{K}}\ (T) \geqslant 184$，且对于一般的 T，等式以概率 1 成立。

证明。 在任意元素 $\alpha\otimes(\gamma\wedge\gamma')\otimes\beta$ 上求值，可以很容易地验证该复合映射

$$A^*\otimes\bigwedge^2 C^*\otimes B^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{A^*}\otimes\Phi_{\mathrm{K}}^{C,B}(T)} A^*\otimes C^*\otimes A \xrightarrow{T^B\otimes\mathrm{id}_A} B\otimes A$$

（其中第二个箭头使用经典展平 $T^B\colon A^*\otimes C^*\to B$）等于 Φ_{Q}^C，差别仅在于因子的排序。这个复合映射的像显然是所有 $T(\alpha)\left(\operatorname{im}\Phi^{C,B\,\mathrm{K}}(T)\right)$ 的和，这就证明了命题的第一部分。当 T 是 1_A-一般的时，我们取一个 $\alpha\in A^*$，使得 $T(\alpha)$ 满秩。于是 $T(\alpha)\otimes\mathrm{id}_A$ 是单射，因此至少有一个对 $\operatorname{im}\Phi_{\mathrm{Q}}^C(T)$ 有贡献的项，其大小不小于 $\operatorname{im}\Phi^{C,B\,\mathrm{K}}(T)$，从而证明了该不等式。□

该命题意味着，在一般性假设下，Φ_{Q}^C 在尝试证明张量 $\Phi^{C,B\,\mathrm{K}}$ 的边界秩非最小时，“至少同样有用” $T\in\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$，因为对于这两种展平，推论 3.5 给出了 $n(n-1)$，这是需要超越的像维数界。然而，这仍然留下了这样一种可能性：Φ_{Q}^C 或许无法证明不可平滑化性，但 $\Phi^{C,B\,\mathrm{K}}$在投影到一个较小空间后却可以做到，类似于命题 4.2的证明。

确实，存在某些情形，使得命题 4.4 中的不等式变为严格不等式，即二次展平 严格优于相应的 Koszul 展平。

例 4.5。 设 T_1为 $\mathbb{C}^5\otimes\mathbb{C}^5\otimes\mathbb{C}^5$中的一般秩 6 张量，$T_2\in\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4$为代数 $\mathbb{C}[x,y,z]/((x,y,z)^2)$ 的结构张量。那么令 $T\coloneqq T_1\oplus T_2\oplus T_2\in\mathbb{C}^{13}\otimes\mathbb{C}^{13}\otimes\mathbb{C}^{13}$，通过直接计算可验证 $\operatorname{rk}\Phi^{C,B\,\mathrm{K}}(T)=13\cdot12$，但 $\operatorname{rk}\Phi_{\mathrm{Q}}^C(T)=13\cdot12+1$。因此，$\Phi_{\mathrm{Q}}^C$证明了边界秩非极小，但 $\Phi^{C,B\,\mathrm{K}}$ 则不能。

然而，对于交换代数的结构张量，我们可以证明一个等式——我们的二次展平与相应的 Koszul 展平给出相同的信息：

命题 4.6. 设 $T\in R^*\otimes R^*\otimes R=A\otimes B\otimes C$ 是一个 n 维交换代数 R 的结构张量。那么

$$\operatorname{rk}\Phi_{\mathrm{Q}}^C(T)=\operatorname{rk}\Phi_{\mathrm{K}}^{C,B}(T)\qquad and\qquad \operatorname{rk}\Phi_{\mathrm{Q}}^A(T)=\operatorname{rk}\Phi_{\mathrm{K}}^{A,C}(T)=n(n-1). \tag{2}$$

证明。 我们只证明等式组（2）中的第二组，因为第一组的证明非常相似。

具体而言，所讨论的两个展平映射为

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{Q}}^A(T)\colon\bigwedge^2 R\otimes R\otimes R^*&\to R\otimes R^*,\\ (a\wedge a')\otimes b\otimes\gamma&\mapsto(ab)\otimes\gamma(a'\cdot\bullet)-(a'b)\otimes\gamma(a\cdot\bullet)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{K}}^{A,C}(T)\colon\bigwedge^2 R\otimes R^*&\to R\otimes R^*,\\ (a\wedge a')\otimes\gamma&\mapsto a\otimes\gamma(a'\cdot\bullet)-a'\otimes\gamma(a\cdot\bullet),\end{aligned}$$

其中我们用 $\gamma(a\cdot\bullet)$ 表示线性形式 $(x\mapsto\gamma(ax))\in R^*$。我们声称，实际上 $\Phi_{\mathrm{Q}}^A(T)$ 和 $\Phi^{A,C\,\mathrm{K}}(T)$ 具有相同的像。只需考察后一个映射中的 $b=1$，即可显然看出 $\operatorname{im}\Phi^{A,C}(T)\subseteq$包含于 $\operatorname{im}\Phi_{\mathrm{Q}}^A$。

对于反向包含，注意到可逆元在 R 中构成稠密集，因此特别地，R 可由它们张成，故 $\operatorname{im}\Phi_{\mathrm{Q}}^A$ 由 $(a\wedge a')\otimes b\otimes\gamma$ 的像张成，其中 b 可逆。这些像都属于 $\operatorname{im}\Phi^{A,C\,\mathrm{K}}$，理由如下：我们令

$$\tilde a\coloneqq ba,\qquad \tilde a'\coloneqq ba',\qquad \tilde\gamma\coloneqq\gamma(b^{-1}\cdot\bullet),$$

从而得到

$$\Phi_{\mathrm{K}}^{A,C}(T)\left((\tilde{a}\wedge\tilde{a}')\otimes\tilde{\gamma}\right)=\tilde{a}\otimes\tilde{\gamma}(\tilde{a}'\cdot\bullet)-\tilde{a}'\otimes\tilde{\gamma}(\tilde{a}\cdot\bullet)=(ab)\otimes\gamma(b^{-1}ba'\cdot\bullet)-(a'b)\otimes\gamma(b^{-1}ba\cdot\bullet)=$$
$$=(ab)\otimes\gamma(a'\cdot\bullet)-(a'b)\otimes\gamma(a\cdot\bullet)=\Phi_{\mathrm{Q}}^{A}(T)\left((a\wedge a')\otimes b\otimes\gamma\right).$$

这就证明了 $\operatorname{rk}\Phi_{\mathrm{Q}}^{A}(T)=\operatorname{rk}\Phi^{A,C\mathrm{K}}(T)$。这个共同的秩等于 $n(n-1)$，则由引理4.1可得。□

5. 应用

5.1. **矩阵乘法**。众所周知，2×2 矩阵乘法张量 M_2 的边界秩 7 [Land06，HIL13]。然而，直到最近才出现了“首个可手工检验的代数证明” [CHL23]。下面我们将证明，切触展平可以提供一种简明的证明。

命题 5.1. *M_2 的边界秩等于七。*

证明。Strassen [Stra69] 给出了 M_2的一个显式秩七分解。我们着重于给出边界秩的下界。

根据推论3.9 对于 $n=4, q=6$，我们需要证明切触展平的秩大于 60。我们将证明其秩为 64。我们固定 $\mathbb{C}^4$的一组基 $(i,\ j)$，其中 $i,\ j\in\{0,\ 1\}$，并用 $\neg i$ 表示 i的否定。回忆一下，$M_2=\sum_{i,\ j,\ k\in\{0,\ 1\}}(i,\ j)\otimes(j,\ k)\otimes(k,\ i)$。

我们将证明，切触展平是一个分块对角矩阵，包含五个分块：一个 48×48单位矩阵和四个同构的非退化 4×4 矩阵。

M_2 的切触展平是对 $\bigwedge^3\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4$ 的限制：

$$(\mathbb{C}^4)^{\otimes3}\otimes\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^4, \tag{3}$$

$$(i_1,j_1)\otimes(i_2,j_2)\otimes(i_3,j_3)\otimes(i_4,j_4)\otimes(i_5,j_5)\mapsto\begin{cases}(i_1,j_1)\otimes(i_2,j_4)\otimes(i_5,j_3), & \text{if } j_2=i_4 \text{ and } i_3=j_5,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们将定义域中的基向量分成五组。

第一组由形如 $\big((\neg j_5,\neg i_4)\wedge(i_2,i_4)\wedge(j_5,j_3)\big)\otimes(i_4,j_4)\otimes(i_5,j_5)$的向量构成。先选择 i_4,j_4,i_5,j_5（有 16 种选择），再选择包含 $(\neg j_5,\neg i_4)$的外积（有 3 种选择），可得 48 个这样的非零向量。注意，这已经限定了外积必须具有上述形式，因为剩下的两个外因子分别从 $(\neg j_5,i_4)$,$(j_5,\neg i_4)$ 和 (j_5,i_4)中选取。尽管该外积展开后是六个张量积的带符号和，但只有其中一个——即按上述表达式中的顺序排列的那个——映射到 (3) 中的非零向量。因此，每个这样的基向量的像都是 $(\neg j_5,\neg i_4)\otimes(i_2,j_4)\otimes(i_5,j_3)$。注意，这些像必须满足 $(\neg j_5,\neg i_4)\neq(\neg i_2,\neg j_3)$。

接下来的四组由 j_4、$i_5\in\{0、1\}$ 编号。对于固定的 j_4、i_5，该组由四个基向量 $\big((j_5、i_4)\wedge(\neg j_5、i_4)\wedge(j_5、\neg i_4)\big)\otimes(i_4、j_4)\otimes(i_5、j_5)$ 构成，其中 i_4、j_5 是任意的。每个这样的向量的像为：

$$(j_5,i_4)\otimes(\neg j_5,j_4)\otimes(i_5,\neg i_4)-(\neg j_5,i_4)\otimes(j_5,j_4)\otimes(i_5,\neg i_4)-(j_5,\neg i_4)\otimes(\neg j_5,j_4)\otimes(i_5,i_4).$$

具体而言，这些像是基向量的线性组合，与第一组以及其他组的像各不相同——在每一项中，第一个张量因子恰好由第二个因子的第一坐标和第三个因子的第二坐标的否定构成。与此同时，通过分别读取第二个因子的第二坐标和第三个因子的第一坐标，可以确定该组对应的 j_4 和 i_5。

因此，切触展平确实呈分块对角形式。我们接下来要证明，同构的 4×4 块具有满秩。每个这样的矩阵形式如下，其中我们将$(j_5、i_4)\otimes(\neg j_5、j_4)\otimes(i_5、\neg i_4)$ 标记为第一个因子 $(j_5,\ i_4)$，随后对行和列排序

按照 $(j_5,\ i_4) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1)$的顺序:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

此类矩阵的行列式为 -3，因此该矩阵确为满秩，切触展平也如此。□

备注 5.2. 在我们分享预印本的第一个版本后，J. M. Landsberg 指出，命题 5.1 的证明或许还能借助表示论进一步简化。事实上，回想一下，在坐标无关的表述中， $M_2 \in (V_1 \otimes V_2^*) \otimes (V_2 \otimes V_3^*) \otimes (V_1^* \otimes V_3)$ 是一个 一般线性群$(V_1) \times$ 一般线性群$(V_2) \times$一般线性群(V_3) 不变张量。因此，切触展平的陪域是 8 个不可约表示之和。因此，只需验证这 8 个明确给出的向量属于像。通过分析 M_2 稳定子的离散部分及其与恒等元的相互作用，可以利用对称性进一步减少向量的数量。尽管对于 M_2 而言，每个证明都非常简单，但我们相信，这条备注在处理更大的矩阵乘法张量时可能会有所帮助。

5.2. 区分仙人掌簇与割线簇。 在进一步讨论之前，我们先证明切触展平 Φ_{T} 在直和下的行为。

命题 5.3. 对于 $i = 1,\ 2$ 令 $T_i \in A_i \otimes B_i \otimes C_i$，其中 维数 $A_i =$ 维数 $B_i =$ 维数 C_i，并且

$$A := A_1 \oplus A_2, \qquad B := B_1 \oplus B_2, \qquad C := C_1 \oplus C_2, \qquad T := T_1 \oplus T_2 \in A \otimes B \otimes C.$$

Then

(4)

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} \Phi^A_{\mathrm{T}}(T) = {} & \operatorname{rk} \Phi^A_{\mathrm{T}}(T_1) + \operatorname{rk} \Phi^A_{\mathrm{T}}(T_2) + \dim A_2 \cdot \operatorname{rk} \Phi^A_{\mathrm{Q}}(T_1) + \dim A_1 \cdot \operatorname{rk} \Phi^A_{\mathrm{Q}}(T_2) + \\ & + \operatorname{rk} T_2^B \cdot \operatorname{rk} \Phi^{A,B}_{\mathrm{K}}(T_1) + \operatorname{rk} T_2^C \cdot \operatorname{rk} \Phi^{A,C}_{\mathrm{K}}(T_1) + \operatorname{rk} T_1^B \cdot \operatorname{rk} \Phi^{A,B}_{\mathrm{K}}(T_2) + \operatorname{rk} T_1^C \cdot \Phi^{A,C}_{\mathrm{K}}(T_2), \end{aligned}$$

其中 Φ_{Q} 表示第 4.2 节的二次展平， T_i^B: $A_i^* \otimes C_i^* \to B_i$， T_i^C: $A_i^* \otimes B_i^* \to C_i$ 是经典展平。

证明。 借助由直和产生的典范嵌入，我们可以将 T_i 都视为 $A \otimes B \otimes C$ 中的（非简约）张量。考虑恒等矩阵 $\mathsf{id}_i \in A_i^* \otimes A_i \subset A^* \otimes A$。于是，我们可以将 $\Phi^A_{\mathrm{T}}(T)$ 视为三线性映射 $\Phi(T_1 + T_2,\ T_1 + T_2,\ \mathsf{id}_1 + \mathsf{id}_2)$ 的取值

$$\Phi : (A \otimes B \otimes C) \times (A \otimes B \otimes C) \times (A^* \otimes A) \to \operatorname{Hom}\left(\bigwedge^3 A^* \otimes B^* \otimes C^*,\ A^* \otimes B \otimes C \right)$$

由.....给出

$$\Phi(F_1, F_2, F_3)\Big((\alpha^{(1)} \wedge \alpha^{(2)} \wedge \alpha^{(3)}) \otimes \beta \otimes \gamma\Big) := \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) F_3(\alpha^{(\sigma(1))}) \otimes F_1(\alpha^{(\sigma(2))}, \gamma) \otimes F_2(\alpha^{(\sigma(3))}, \beta).$$

With

$$\bigwedge^3 A^* = \bigwedge^3 A_1^* \oplus \left(\bigwedge^2 A_1^* \otimes A_2^* \right) \oplus \left(A_1^* \otimes \bigwedge^2 A_2^* \right) \oplus \bigwedge^3 A_2^*,$$

我们可以将 Φ 的陪域重写为

$$\bigoplus_{u,v,w,i,j,k} \operatorname{Hom}\left(\left(\bigwedge^u A_1^* \otimes \bigwedge^{3-u} A_2^* \right) \otimes B_v^* \otimes C_w^*,\ A_i^* \otimes B_j \otimes C_k \right).$$

先验地，这将有 128 个求和项；然而， $\Phi(T_1 + T_2, T_1 + T_2, \mathsf{id}_1 + \mathsf{id}_2)$ 到 most 的投影将恒为零。也就是说，请注意，一旦选定 $j \in \{1, 2\}$ ，我们就必须选择 $w = j$

才能通过 T_j^B: $A_j^* \otimes C_j^* \to B_j$ 对像作出非零贡献。类似地，我们必须有$v = k$。最后，对于 A^* 因子，多重集必须满足以下等式

$$\{i,j,k\} = \{\underbrace{1}_{u\text{-times}}, \underbrace{2}_{(3-u)\text{-times}}\},$$

因此， $i,j,k \in \{1,2\}$ 的选择唯一确定了 u, v, w。这八个对$\Phi(T_1+T_2, T_1+T_2, \mathrm{id}_1+\mathrm{id}_2)$ 的贡献，其像分别位于彼此独立的空间中，因此我们只需将这八个投影的秩相加。下面依次列出：

- 对于 $(i,j,k) = (1,1,1)$，我们得到切触展平 $\Phi_{\mathrm{T}}^A(T_1)$。类似地，对于 $(i,j,k) =(2,2,2)$。
- 对于 $(i,j,k) = (1,2,2)$，我们得到映射 id_1： $A_1^* \to A_1^*$和 $\bigwedge^2 A_2^* \otimes B_2^* \otimes C_2^* \to B_2 \otimes C_2$的克罗内克积，这正是二次展平 $\Phi_{\mathrm{Q}}^A(T_2)$。类似地，对于 $(i,j,k) =(2,1,1)$。
- 对于 $(i,j,k) = (1,1,2)$，我们得到 $\bigwedge^2 A_1^* \otimes C_1^* \to A_1^* \otimes B_1$的克罗内克积，即 Koszul 展平 $\Phi^{A,C}\mathrm{K}_{(T_1)}$，以及 $A_2^* \otimes B_2^* \to C_2$，后者正是经典展平$T_2^C$。类似地，对于 $(i,j,k) = (1,2,1), (2,2,1)$ 以及 $(2,1,2)$。

将这些秩相加，即可得到 (4)。 □

推论 5.4。 若 $T_i \in R_i^* \otimes R_i^* \otimes R_i$, $i = 1,2$ 是 n_i 维交换代数 R_i 的结构张量，则代数 $n := (n_1+n_2)$ 维的结构张量 $T_1 \oplus T_2$ $R_1 \oplus R_2$ 满足

$$\text{秩 } \Phi_{\mathrm{T}}^A(T_1 \oplus T_2) - n(n-1)(n-2) = \Big(\text{秩 } \Phi_{\mathrm{T}}^A(T_1) - n_1(n_1-1)(n_1-2)\Big) + \Big(\text{秩 } \Phi_{\mathrm{T}}^A(T_2) - n_2(n_2-1)(n_2-2)\Big).$$

证明。 结合命题 4.6的结论，注意到代数的结构张量是简约的。因此，右端 (4) 中除前两项外的所有项都可化简，从而得到

$$\mathrm{rk}\,\Phi_{\mathrm{T}}^A(T_1 \oplus T_2) = \mathrm{rk}\,\Phi_{\mathrm{T}}^A(T_1) + \mathrm{rk}\,\Phi_{\mathrm{T}}^A(T_2) + 3n_1n_2(n_1+n_2-2).$$

重新整理后即得推论。 □

以下引理是专家们熟知的。它可以例如由 [JLP24]中的结果推出。为求完整起见，我们给出证明。

引理 5.5. 设 R 是一个有限 *Gorenstein* 代数， $T \in (R^*)^{\otimes k} \otimes R$ 是与映射 $R^k \to R$, $(r_1, \ldots, r_k) \mapsto r_1 \cdots r_k$相对应的结构张量。 T的仙人掌秩等于 $d =$ 维数$_{\mathbb{C}}\, R$。

证明。 由于 T是简约的，只需证明其仙人掌秩至多为 d。因此，我们需要在 Segre 簇中找出一个长度为 d的概形 Spec R，使得 T 属于其线性张成。由于仙人掌秩在直和下具有次可加性，我们不妨假设 $(R,\ \mathfrak{m})$ 是局部的。

我们有一个从 m 上的对称代数到 R的典范满射：

$$S^\bullet(\mathfrak{m}) \twoheadrightarrow R, \text{ and hence } (S^\bullet(\mathfrak{m}))^{\otimes(k+1)} \twoheadrightarrow R.$$

它诱导出一个包含 Spec $R \hookrightarrow \prod_{i=1}^{k+1} \mathfrak{m}^*$。在 R^* 上有一个典范线性函数，由 $1 \in R$给出。它使我们能够将 $\mathfrak{m}^*$ 与仿射部分

$$\{l \in R^* \mid l(1) = 1\} = \{[l] \in \mathbb{P}(R^*) \mid l(1) \neq 0\} \subset \mathbb{P}(R^*).$$

因此，我们有一个自然的包含

$$\mathrm{Spec}\, R \hookrightarrow \prod_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(R^*) \subset \mathbb{P}\left((R^*)^{\otimes(k+1)}\right),$$

其中第二个包含是 Segre 嵌入。

$\mathbb{P}\left((R^*)^{\otimes(k+1)}\right)$ 上的齐次线性形式是 $\left(\mathbb{P}\left((R^*)^{\otimes(k+1)}\right)\right)^* = R^{\otimes(k+1)}$的一个元素。当且仅当 $\sum r_1 \cdots r_{k+1} = 0$时，这样的线性形式 $l = \sum r_1 \otimes \cdots \otimes r_{k+1}$ 在 Spec R 的像上消失。

到目前为止，我们尚未使用 Gorenstein 假设。回顾一下，其中一个等价定义是存在一个线性形式 $l_0 \in R^*$，使得配对 $R \times R \to \mathbb{C}$, $(r_1, r_2) \mapsto l_0(r_1 r_2)$

是完美的。我们利用这个配对诱导出由 $\mathbb{P}\left((R^*)^{\otimes k}\otimes R\right) \simeq \mathbb{P}\left((R^*)^{\otimes k}\right)$ 给出的 $[l_1\otimes\cdots\otimes l_k\otimes r]\mapsto[l_1\otimes\cdots\otimes l_k\otimes l(r\cdot\bullet)]$同构。

为完成证明，我们将证明 $T\in\mathbb{P}\left((R^*)^{\otimes k}\otimes R\right)$ 属于 Spec R的像的射影张成。设 $r_1:=1$，并选取 $\mathfrak{m}$的一组基 r_2、……、r_d。为表示 T，我们引入如下常数：$\lambda_{i_1,\ldots,i_k,j}$

$$r_{i_1}\cdots r_{i_k} =: \sum_j \lambda_{i_1,\ldots,i_k,j} r_j. \tag{5}$$

Thus

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j} \lambda_{i_1,\ldots,i_k,j} r_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes r_{i_k}^*\otimes r_j.$$

现在固定一个线性形式

$$l = \sum_{i_1,\ldots,i_k,i} \mu_{i_1,\ldots,i_k,i} r_{i_1}\otimes\cdots\otimes r_{i_k}\otimes l_0(r_i\cdot\bullet)$$

在 $\mathbb{P}\left((R^*)^{\otimes k}\otimes R\right)$上。在 Spec R的像上 l的消失等价于

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k,i} \mu_{i_1,\ldots,i_k,i} r_{i_1}\cdots r_{i_k} r_i = 0.$$

将（5）代入后，我们得到

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k,i,j} \mu_{i_1,\ldots,i_k,i}\lambda_{i_1,\ldots,i_k,j} r_j r_i = 0.$$

应用 l_0 后得到

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k,i,j} \mu_{i_1,\ldots,i_k,i}\lambda_{i_1,\ldots,i_k,j} l_0(r_j r_i) = 0. \tag{6}$$

我们的目标是证明 $l(T)=0$，这样便可得出结论： T 属于 Spec R 的像的线性张成。我们有：

$$\begin{aligned} l(T) &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j} \lambda_{i_1,\ldots,i_k,j} l(r_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes r_{i_k}^*\otimes r_j) = \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j} \lambda_{i_1,\ldots,i_k,j} \sum_{i'_1,\ldots,i'_k,i} \mu_{i'_1,\ldots,i'_k,i} r_{i_1}^*(r_{i'_1})\otimes\cdots\otimes r_{i_k}^*(r_{i'_k})\otimes l_0(r_j r_i) = \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j,i} \lambda_{i_1,\ldots,i_k,j}\mu_{i_1,\ldots,i_k,i} l_0(r_j r_i). \end{aligned}$$

这确实由 (6) 得出零。 □

定理 5.6. 对于所有 $n\geqslant 14$，边界秩为 n 的切触展平的 $(n(n-1)(n-2)+1)$-子式在 $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$ 中的第 n 个仙人掌簇上不消失。

证明。 由引理 5.5可知，Gorenstein 代数的结构张量具有最小仙人掌秩。因此，只需构造 n 维 Gorenstein 代数的结构张量示例，使其切触展平的秩严格高于 $n(n-1)(n-2)$。

对于 $n=14$，我们使用六个变量上的一般三次型的湮灭代数，并通过计算机辅助直接验证，其结构张量的切触展平秩为 $\operatorname{rk}\Phi^A_{\mathrm{T}}(T) = 2192 = 14\cdot 13\cdot 12+8$。

随后，我们采用归纳法：若 R 是一个 n维戈伦斯坦代数，其结构张量 T的切触展平秩高于 $n(n-1)(n-2)$，则考虑 $R\oplus\mathbb{C}$。 $\mathbb{C}$ 的结构张量是 $1\times 1\times 1$ 恒等张量 I_1，由于$\dim\bigwedge^3\mathbb{C}^1 = 0 = 1\cdot 0\cdot(-1)$，其切触展平是平凡的。因此，推论 5.4 给出

$$\operatorname{rk}\Phi^A_{\mathrm{T}}(T\oplus I_1) - (n+1)n(n-1) = \operatorname{rk}\Phi^A_{\mathrm{T}}(T) - n(n-1)(n-2) > 0.$$ □

5.3. **子式扁平化与代数**。 在本小节中，我们证明子式扁平化 $\Phi^C_{\mathrm{M},4}$ 即使在该代数所属的希尔伯特概形分支大于可光滑化分支时，也可能证明局部戈伦斯坦代数 R 不可平滑化。

例 5.7。 设 R_6 和 R_8 分别是 6 个和 8 个变量中的一般三次型的湮灭代数，令 T_6 和 T_8 为它们的结构张量。借助计算机辅助，我们得到 [3]

$$\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{M},3}(T_6)=372>364=\binom{14}{3},\qquad \operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{M},4}(T_8)=3123>3060=\binom{18}{4},$$

这证明这些代数不可平滑。注意，代数 R_8 属于希尔伯特概形的一个维数为 $155>144=8\cdot 18$ 的分支。

6. Future directions

6.1. **希尔伯特概形**。 下面的猜想说明了切触展平这一名称的由来：

猜想 6.1。 设 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_d]\twoheadrightarrow R$ 是到一个 n 维代数 R 的满射，令 $[R]$ 为 $\mathrm{Hilb}_n\mathbb{C}^d$ 中对应的点，令 T 为 R 的结构张量。那么

$$\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T}}(T)-n(n-1)(n-2)=dn-\dim \mathrm{T}_{[R]}\mathrm{Hilb}_n\mathbb{C}^d.$$

非正式地说： R 的结构张量的切触展平超过（或未达到）秩阈值 $n(n-1)(n-2)$ 的程度，恰好等于 $\mathrm{Hilb}_n\mathbb{C}^d$ 中 $[R]$ 处的切空间相对于可光滑化分支小（或大）的程度。

鉴于这一猜想，我们对定理 5.6 的证明或许只能被视为重新得到一个已知事实：六个变量的一般三次型的湮灭代数，其切空间相对于希尔伯特概形而言过小。命题 4.2 和例 4.3 所涵盖的代数既包括切空间较小的代数，也包括切空间较大的代数（参见 [Iarr72], 的维数计数；它甚至给出了 $\mathrm{Hilb}_n\mathbb{C}^d$的分支维数下界）。因此，仅凭 Koszul 展平就足以证明切空间较大的代数不可平滑化。

通过考察直和下的展平行为，我们可以构造其他代数：即使切触展平的秩较小，Kronecker-Koszul 展平仍能发挥作用：

例 6.2（高阶切触扁平化）。 令 R_1 为 4 个变量中 3 个一般二次型的湮灭代数， R_2 为对应于如下可平滑概形的代数：该概形由一个一般的光滑概形 $R_2'\subset\mathbb{C}^6$ 乘以 $t\in\mathbb{C}^*$ 缩放后，在 $t=0$处取极限而得。分别令这些代数的维数为 $n_1=8$ 和 $n_2=11$ ，然后取 $R:=R_1\oplus R_2$。

令 T_1、 T_2、 $T=T_1\oplus T_2$ 分别为结构张量。可以直接计算得出

$$\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T}}(T_1)=8\cdot 7\cdot 6+7\qquad\text{and}\qquad \operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T}}(T_2)=11\cdot 10\cdot 9-9,$$

因此，根据推论 5.4，秩 $\Phi^C_{\mathrm{T}}(T)=19\cdot 18\cdot 17-2$，这意味着切触展平无法证明 R 的不可平滑化性。

让我们修改切触展平，在 $\bigwedge^2 C^*$ 上使用恒等映射，而非仅使用 C^*。我们可以将以下映射称为

$$\Phi^C_{\mathrm{T},2}(T):\bigwedge^4 C^*\otimes A^*\otimes B^*\to\bigwedge^2 C^*\otimes A\otimes B$$

“第二切触扁平化”。类似于命题5.3 和推论5.4，可以分析它在直和下的行为，以证明对于代数的结构张量，它满足一个

[3]此处的秩是通过第 3.1 小节所述的方法得到的，因此严格来说，无条件下它们是下界，并且以概率 1 等于真实秩。

结合第二切触扁平化与通常切触展平的公式：

$$\begin{aligned}&\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T},2}(T) - n(n-1)\binom{n-2}{2} = \\ &= \left(\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T},2}(T_1) - n_1(n_1-1)\binom{n_1-2}{2}\right) + \left(\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T},2}(T_2) - n_2(n_2-1)\binom{n_2-2}{2}\right) + \\ &\quad + 2n_2\cdot\left(\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T}}(T_1) - n_1(n-1-1)(n_1-2)\right) + 2n_1\cdot\left(\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T}}(T_2) - n_2(n-2-1)(n_2-2)\right).\end{aligned}$$

显式计算 $\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T},\,2}(T_1) = 8\cdot 7\cdot\binom{6}{2} + 28$ 和 $\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T},\,2}(T_2) = 11\cdot 10\cdot\binom{9}{2} - 36$，随后得

$$\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{T},2}(T) - 19\cdot 18\cdot\binom{17}{2} = 28 - 36 + 2\cdot 11\cdot 7 - 2\cdot 8\cdot 9 = 2 > 0,$$

因此 $\Phi^C_{\mathrm{T},\,2}$ 证明了 R 的不可平滑化性，尽管 Φ^C_{T} 无法做到这一点。

与猜想 6.1 类似，我们可以考察例 5.7。我们注意到 $\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{M},\,3}(T_6)$ 比 $\binom{14}{3}$ 大 $372 - 364 = 8$。这也等于希尔伯特概形在一个光滑概形（次数为六）处与在对应于 T_6的代数处的切空间维数之差。

猜想 6.3。设 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_d] \twoheadrightarrow R$ 是到一个 n维 Gorenstein 代数 R的满射，设 $[R]$ 是 $\operatorname{Hilb}_n\mathbb{C}^d$ 中对应的点，且设 T 是 R的结构张量。那么

$$\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{M},3}(T) - \binom{n}{3} = dn - \dim \mathrm{T}_{[R]}\operatorname{Hilb}_n\mathbb{C}^d.$$

6.2. **与博登湖计划的关系**。在 [DMS25, CM21, Mich23]中，博登湖计划得以启动。该计划建议通过研究格拉斯曼流形及完全列线变换簇的相关子簇的几何性质来研究张量。该计划还与通过置换多面体簇的子簇研究拟阵直接相关[Huh14]。沿着这一方向，张量的共线变换簇在[GK25]中被引入并加以研究。我们注意到，k-阶子式展平$\Phi^C_{\mathrm{M},\,k}$的像等于相关共线变换簇的线性张成，其秩或可区分仙人掌簇与割线簇。此外，[JPS25，命题 3.3] 以及 [BES21，定理 1.1] 推出，对于 n维局部戈伦斯坦代数的结构张量 T，有 $\operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{M},\,k}(T) = \operatorname{rk}\Phi^C_{\mathrm{M},\,n-k}(T)$。

簇的线性张成的维数，是人们能想到的最基本的不变量之一。将其推广到希尔伯特函数的其他取值，是一个非常自然的研究方向。另一个自然的问题是，广义舒伯特簇或共线变换簇的哪些其他代数、上同调或几何不变量，能够帮助控制张量的边界秩。

6.3. **特殊张量与割线簇的方程**。许多特殊张量及其边界秩都特别值得关注。例如，矩阵乘法、单项式 [LT10,HM22]，行列式张量 [JKK25, CHL23] 或匹配张量 [BK24, BCH+25]。我们没有对这些例子全面检验所有方程；值得指出的是，对于 M_2 我们的方程无疑提供了一种新方法。自然的下一步是进一步研究 Kronecker-Young 展平所给出的下界。

另一条研究路线从定性 [DK14, Sam17]或显式 [Raic12] 的角度研究割线簇的方程。自然会想到，Kronecker-Young 展平在多大程度上能够描述割线簇，因为它们是 Koszul 展平的推广。

6.4. **加强该方法**。最后，我们提出若干开放性建议，探讨如何进一步改进 Kronecker-Koszul 展平方法。

问题 6.4（更复杂的缩并）。在第 3 节的构造中，如果将若干个 $\bigwedge^{d'_{i,\,j}} V_i^*$ 一起缩并，会怎样？或者，如果我们还对若干个 $\bigwedge^{d'_{i,\,j}+|\lambda_{i,\,j}|} V_i$ 进行缩并，又会怎样？

问题 6.5 (更多输入)**.** 我们的方法从输入张量 T 以及某些向量空间上的恒等映射构造出一个大型张量。由此得到的秩判据本质上源于这样一个观察：

当 T 通过底层自同态环的作用变形为另一个张量 T' 时，Kronecker-Koszul 展平的秩只能降低。

如果我们考虑带有多个输入张量的 Kronecker-Koszul 展平版本，情况也会相同：通过底层空间上的自同态对任意一个输入进行变形时，秩只会下降。我们能否通过选择依赖于 T 的合适“见证张量”作为额外输入，从张量 T 中提取出更强的结果？

问题 6.6（以非经典方式展平 Kronecker-Koszul 张量）。 在第 3 节的构造中，我们先构造一个 Kronecker-Koszul 张量，然后对其进行经典展平。如果我们改为最后进行某种非经典展平呢？例如，以某种方式将该张量括成一个 3-张量，再进行 Koszul 展平？

当然，通过复合函子，Kronecker-Koszul 张量的任何 Koszul 展平都可以化为若干个 Kronecker-Young 展平的直和。不过，人们或许会希望，通过反复取外幂来考察这一构造，比直接处理复杂的表示论表达式更容易操作。

参考文献

[ADV+25] Josh Alman、Ran Duan、Virginia Vassilevska Williams、Yinzhan Xu、Zixuan Xu 和 Renfei Zhou。《更多的非对称性带来更快的矩阵乘法》。载于 Yossi Azar 和 Debmalya Panigrahi（编），《2025 年 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》，SODA 2025，美国路易斯安那州新奥尔良，2025 年 1 月 12 日至 15 日，第 2005–2039 页。SIAM，2025。[AV24] Josh Alman 和 Virginia Vassilevska Williams。《一种改进的激光法与更快的矩阵乘法》。《TheoretiCS》，3，2024。[BB14] Weronika Buczyńska 和 Jarosław Buczyński。《高次数维罗内重新嵌入的割线簇、催化矩阵与可平滑 Gorenstein 概形》。《代数几何杂志》，23 90，2014 1 63( ): – 。[BB21] Weronika Buczyńska 和 Jarosław Buczyński。《极性对偶、边界秩与多重分次希尔伯特概形》。《杜克数学杂志》，170(16):3659–3702，2021。[BBG19] Edoardo Ballico、Alessandra Bernardi 和 Fulvio Gesmundo。《关于 Segre–Veronese 簇的仙人掌秩的一则注记》。《代数杂志》，526:6–11，2019。[BCH+25] Andreas Björklund、Radu Curticapean、Thore Husfeldt、Petteri Kaski 和 Kevin Pratt。《渐近秩猜想下的快速确定性色数算法》。载于《2025 年 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》（SODA），第 2804–2818 页。SIAM，2025。[BCS13] Peter Bürgisser、Michael Clausen 和 Mohammad A Shokrollahi。《代数复杂性理论》，第 315 卷。施普林格科学与商业媒体，2013。[BES21] Arthur Bik、Henrik Eisenmann 和 Bernd Sturmfels。《对称矩阵的约旦代数》。《Matematiche（卡塔尼亚）》，76:337–353，2021。[BJMR18] Alessandra Bernardi、Joachim Jelisiejew、Pedro Macias Marques 和 Kristian Ranestad。《关于具有给定希尔伯特函数的多项式及其应用》。《数学汇刊》，69(1):39–64，2018。[BK24] Andreas Björklund 和 Petteri Kaski。《渐近秩猜想与集合覆盖猜想并非同时成立》。载于《第 56 届 ACM 理论计算研讨会年会论文集》，第 859–870 页，2024。[BL16] Markus Bläser 和 Vladimir Lysikov。《关于张量与代数的退化》。载于《第 41 届数学基础与计算机科学国际研讨会（MFCS 2016）》，第 19–1 页。Schloss Dagstuhl– Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2016。[Bucz26] Jarosław Buczyński。《仙人掌障碍》。arXiv 预印本 arXiv:2602.11309，2026。[CEVV09] Dustin Cartwright、Daniel Erman、Mauricio Velasco 和 Bianca Viray。《8 个点的希尔伯特概形》。《Algebra & Number Theory》，3(7):763–795，2009。[CHL23] Austin Conner、Alicia Harper 和 J. M. Landsberg。《矩阵乘法与 $\det_3$的新下界》。《数学论坛：Pi》，11:e17，2023。[CM21] Austin Conner 和 Mateusz Michałek。《张量的特征数与色多项式》。arXiv 预印本 arXiv:2111.00809，2021。[CW82] Don Coppersmith 和 Shmuel Winograd。《关于矩阵乘法的渐近复杂度》。《SIAM 计算杂志》，11(3):472–492，1982。[DK14] Jan Draisma 和 Jochen Kuttler。《有界秩张量由有界次数方程定义》。《杜克数学杂志》，163(1):35–63，2014。[DMS25] Rodica Andreea Dinu、Mateusz Michałek 和 Tim Seynnaeve。《交理论与梯度的应用：从最大似然到色多项式》。载于《簇、多面体与计算》，第 95–141 页。欧洲数学会出版社，2025。

[Dolg12] Igor V Dolgachev。《经典代数几何：现代视角》。剑桥大学出版社，2012。[EGOW18] Klim Efremenko、Ankit Garg、Rafael Oliveira 和 Avi Wigderson。《算术复杂性中秩方法的障碍》。载于《第 9 届理论计算机科学创新会议（ITCS 2018）》。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2018。[FJM25] Cosimo Flavi、Joachim Jelisiejew 和 Mateusz Michałek。《对称幂：结构、可平滑性与应用》。《国际数学研究通报》，2025(18):rnaf277，2025。[Gałą17] Maciej Gałązka。《向量丛给出仙人掌簇的方程》。《Linear Algebra and its Applications》，521:254–262，2017。[Gałą23a] Maciej Gałązka。《多重分次湮灭性》。《数学通讯》，296(1):286–313，2023。[Gałą23b] Maciej Gałązka。《割线簇、华林秩及其推广：代数几何视角》。博士论文，华沙大学，2023年12月。[GK25] Fulvio Gesmundo 和 Hanieh Keneshlou。《张量的共线变换簇》。《数学汇刊》，第 1–21 页，2025。[GMOW19] Ankit Garg、Visu Makam、Rafael Oliveira 和 Avi Wigderson。《秩方法的更多障碍：通过“数值到符号”的转换》。载于《2019 年 IEEE 第 60 届计算机科学基础年会（FOCS）》，第 824–844 页。IEEE，2019。[GMR23] Maciej Gałązka、Tomasz Mańdziuk 和 Filip Rupniewski。《区分割线簇与仙人掌簇》。《计算数学基础》，23(4):1167–1214，2023。[HIL13] Jonathan D. Hauenstein、Christian Ikenmeyer 和 J. M. Landsberg。《边界秩下界的方程》。《实验数学》，22(4):372–383，2013。[HL13] Christopher J Hillar 和 Lek-Heng Lim。《大多数张量问题都是 NP 困难的》。《美国计算机学会会刊》（JACM），60(6):1–39，2013。[HM22] Kangjin Han 和 Hyunsuk Moon。《单项式华林秩的新界》。《工业与应用数学学会应用代数与几何杂志》，6(3):407–431，2022。[HMV20] Hang Huang、Mateusz Michałek 和 Emanuele Ventura。《消失的海森矩阵、野形式及其边界 VSP》。《数学年刊》，378(3):1505–1532，2020。[Huh14] June Huh。《Rota 猜想与排列多面体簇中代数循环的正性》。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2014。博士论文——密歇根大学。[Hås90] Johan Håstad。《张量秩是 NP 完全问题》。《算法杂志》，11(4):644–654，1990。[Iarr72] Anthony Iarrobino。《簇上零维概形族的可约性》。《数学发明》，15(1):72–77，1972。[IE78] Anthony Iarrobino 和 Jacques Emsalem。《一些零维一般奇点；具有小切空间的有限代数》。《数学汇编》，36(2):145–188，1978。[IK99] Anthony Iarrobino 和 Vassil Kanev。《幂和、Gorenstein 代数与行列式簇》。施普林格科学与商业媒体，1999。[Jeli19] Joachim Jelisiejew。《点的希尔伯特概形的初等分支》。《伦敦数学学会杂志》，100(1):249–272，2019。[Jeli24] Joachim Jelisiejew。《阿廷代数变形、希尔伯特概形及相关领域中的开放问题》。载于《阿廷代数的变形与 Jordan 型》，当代数学第 805 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2024。[JKK25] Jeong-Hoon Ju、Taehyeong Kim 和 Yeongrak Kim。《具有对称性的行列式张量新公式》。《线性与多重线性代数》，73(16):3609–3624，2025。[JLP24] Joachim Jelisiejew、J. M. Landsberg 和 Arpan Pal。《具有最小边界秩的简洁张量》。《数学年刊》，388(3):2473–2517，2024。[JPS25] Jakub Jagiełła、Paweł Pielasa 和 Anatoli Shatsila。《代数的特征数》。arXiv 预印本 arXiv:2507.19587，2025。[KM25] Petteri Kaski 和 Mateusz Michałek。《渐近秩猜想的通用张量序列》。载于《第 16 届理论计算机科学创新会议（ITCS 2025）》，第 64–1 页。Schloss Dagstuhl– Leibniz-Zentrum für Informatik，2025。[Land06] J. M. Landsberg。《2×2 矩阵乘法的边界秩为七》。《美国数学会杂志》，19(2):447–459，2006。[Land11] J. M. Landsberg。《张量：几何与应用》，第 128 卷。美国数学会，2011。[Land17] J. M. Landsberg。《几何与复杂性理论》，第 169 卷。剑桥大学出版社，2017。[LM08] J. M. Landsberg 和 Laurent Manivel。《Segre 簇割线簇的 Strassen 方程推广》。《代数通信》，36(2):405–422，2008。[LM17a] J. M. Landsberg 和 Mateusz Michałek。《矩阵乘法边界秩的 $2n^2 - \log_2(n) - 1$ 下界》。《国际数学研究通报》，2018(15):4722–4733，03 2017。[LM17b] J. M. Landsberg 和 Mateusz Michałek。《阿贝尔张量》。《纯粹与应用数学杂志》，108(3):333–371，2017。[LM25] J. M. Landsberg 和 Mateusz Michałek。《迈向大海捞针：边界秩大于 $2.02m$ 的显式张量（在 $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m$中）》。《Theory of Computing》，21(13):1–17，2025。

[LO13] J. M. Landsberg 和 Giorgio Ottaviani。Veronese 簇及其他簇的割线簇方程。Annali di Matematica Pura ed Applicata，192:569–606，2013年8月。[LO15] J. M. Landsberg 和 Giorgio Ottaviani。矩阵乘法边界秩的新下界。Theory of Computing，11(11):285–298，2015年。[LT10] J. M. Landsberg 和 Zach Teitler。关于对称张量的秩与边界秩。Foundations of Computational Mathematics，10(3):339–366，2010年。[Maca94] F. S. Macaulay。模系统的代数理论。Cambridge Mathematical Library。剑桥：剑桥大学出版社，1994年。1916年原版的修订重印本，附有 P. Roberts 的导言。[Mich23] Mateusz Michałek。枚举几何与统计学、组合学和拓扑学相遇。Notices Amer. Math. Soc.，70(4):588–597，2023年。[MS21] Mateusz Michałek 和 Bernd Sturmfels。《非线性代数导论》，第211卷。美国数学学会，2021年。[Otta08] Giorgio Ottaviani。平面上的辛丛、割线簇与 Luroth 四次曲线再探。载于《向量丛与低余维子簇：现状与最新进展》，第317–352页。Aracne，2008年。[Prat24] Kevin Pratt。渐近秩猜想与集合覆盖猜想之间更强的联系。载于第56届 ACM 理论计算研讨会论文集，第871–874页，2024年。[Raic12] Claudiu Raicu。Segre–Veronese 簇的割线簇。Algebra & Number Theory，6 1868，2012 8 1817( ): – 。[Sam17] Steven V. Sam。有界秩对称张量的理想由有界次数的元素生成。《数学创立》，207(1):1–21，2017年。[Shaf90] Igor Rostislavovich Shafarevich。二级交换代数的变形。Algebra i Analiz，2(6):178–196，1990年。[SS23] Matthew Satriano 和 Andrew P Staal。点的 Hilbert 概形的小型初等分支。载于 Forum of Mathematics, Sigma，第11卷，文章 e45。剑桥大学出版社，2023年。[Stra69] Volker Strassen。高斯消元并非最优。Numerische Mathematik，13(4):354–356，1969年。[Stra83] Volker Strassen。一般张量的秩与最优计算。Linear Algebra and its Applications，52:645–685，1983年。[VXXZ24] Virginia Vassilevska Williams、Yinzhan Xu、Zixuan Xu 和 Renfei Zhou。矩阵乘法的新界：从 alpha 到 omega。载于2024年 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，第3792–3835页。SIAM，2024年。

康斯坦茨大学数学与统计系，德国康斯坦茨电子邮箱： matej.dolezalek@uni-konstanz.de

康斯坦茨大学数学与统计系，德国康斯坦茨电子邮箱： mateusz.michalek@uni-konstanz.de