arXiv:2602.12795v1 [math.AT] 13 Feb 2026

典范挠扭结配对与闭3维流形的显式 TMF 态空间

RUILIANG LI

ABSTRACT. 我们研究 Gukov–Krushkal–Meier–Pei 的 TMF 值（$3+1$）维拓扑量子场论，并根据整数手术表示，显式描述与闭定向三维流形Y 相关联的 TMF 模态空间 $\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y)$。

给定一个用于 $Y=\partial W(A)$的对称整数手术矩阵 A ，我们构造一个典范不变量 Canon(A)，它编码 $b_1(Y)$以及 Tor $H_1(Y;\mathbb{Z})$上挠链接配对的等距类。这通过选取与 Kirby 稳定化相容的典范代表，细化了挠链接配对的经典分类；我们还证明 Canon(A) 在 Kirby 变换下不变且是完备的。从 Canon(A) 转到相关的典范令牌包 T =Tok(A) 后，我们组装一个典范对称整矩阵 $B(T)$，并定义实现函子 $\mathcal{R}:\mathrm{Tok}\to\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$，其定义如下：

$$\mathcal{R}(T) \;:=\; L_{B(T)}\big[3b_+(B(T))-2b_-(B(T))\big].$$

我们的主要定理将 GKMP 态空间与这一显式实现相识别，

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y) \;\simeq\; \mathcal{R}\big(\mathrm{Tok}(A)\big),$$

从而给出按素数分解、由有限个局部基本构件构成的描述。

我们进一步计算闭 4 维流形类 $Z_{\mathrm{TMF}}(\mathbb{CP}^2)=\pm\nu\in\pi_3\mathrm{TMF}$，并且在假设 Gukov–Krushkal–Meier–Pei 所提出的关于反转单连通协边的自然性断言成立的情况下，识别 $Z_{\mathrm{TMF}}(S^2\times S^2)=\eta\in\pi_1\mathrm{TMF}$。最后，我们为每个整数 n 建立秩一时间反演对偶 $L_{(-n)}\simeq L^{\vee}{}_{n()}[1]$ 。

1. INTRODUCTION

拓扑量子场论（TQFTs）按照 Atiyah 的公理化定义， [4], 将代数对象赋予流形，并将函子性映射赋予协边。在实践中，最基本的问题是计算性的：给定一个闭定向三维流形 Y，如何确定某个固定的（ Y）维拓扑量子场论赋予$3+1$它的态空间?

Date：2026年1月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要领域57R56；次要领域55N34、57M27。*Key words and phrases.* Kirby 演算、挠链接配对、手术、拓扑模形式、拓扑量子场论。

本文探讨 Gukov–Krushkal–Meier–Pei 构造的 TMF 值拓扑量子场论 [12]中的这一问题。该理论为闭定向三维流形 Y 赋予一个（分次）对象

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y) \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}),$$

以及一个紧致定向协边 $W\colon Y_0 \to Y_1$ 一个态射 $\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(W)\colon \mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y_0) \to \mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y_1)$。该构造的一个核心特征是，当$Y = \partial X$ 界定一个单连通四维流形 X时，态空间可通过 X 的整数交叉形式、GKMP TMF 模 L_b 以及一个归一化位移来表示。然而，对于一般通过手术 Y 得到的对象，这一描述取决于辅助选择；因此必须理解 TMF 模 [17]在 Kirby 变换下如何变化。本文旨在用一组典范的代数不变量取代这种对选择的依赖，并给出 $\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y)$ 关于这些不变量的显式公式。

1.1. 手术矩阵、链接形式与典范化问题。固定一个具有整数带框的有序带框链环 $L \subset S^3$ ，令$A \in M_n(\mathbb{Z})$为其对称链接矩阵。令 $W(A)$为相应的 2-手柄体，并设

$$Y_A := \partial W(A).$$

群 $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 自然地可识别为余核 $G(A)$:=coker$(A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n)$，其挠子群 Tor$(G(A))$ 带有一个非奇异链接配对

$$\lambda_A : \mathrm{Tor}(G(A)) \times \mathrm{Tor}(G(A)) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

该配对在等距意义下典范地确定。（我们将在 §2 中回顾精确的约定，包括奇异情形和取向符号。）对手术链进行 Kirby 变换，会在矩阵 A 上诱导两种代数运算：幺模合同变换 $A \mapsto P^{\mathsf{T}}AP$和 ± 1 稳定化 $A \mapsto A \oplus (\pm 1)$ [17]。这两种运算都保持 (Tor$(G(A))$ λ_A) 的等距类，因此也保持 Tor $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 上的配对 λ_{Y_A}。

链接配对的经典分类（参见 Wall [30] 和 Kawauchi–Kojima [16]）逐素数地给出了 (Tor$(G(A))$ λ_A) 的一组完备等距不变量。经典文献并未提供的是一种与 GKMP 理论中出现的稳定化运算相容的典范标准形选取方式。要得到显式的 TMF 模公式，需要一个确定性过程：给定 A，输出 (Tor$(G(A))$ λ_A) 的等距类的典范代表元（并在 A 为奇异时记录自由秩 $b_1(A)$），且该过程在 Kirby 变换下保持稳定。

1.2. 主要结果。我们的第一个结果是针对 GKMP 设置的挠链接配对规范化。具体而言，我们为每个对称整矩阵 A 关联一个典范不变量

$$\mathrm{Canon}(A) \in \mathrm{Tok},$$

其中，Tok 是一个交换幺半群，其元素是按素数索引的有限数据包，以典范的方式编码 (Tor($G(A)$) λ_A) 的等距类以及整数 $b_1(A)$。重点不在于编码本身（它可以序列化以供计算），而在于 Canon(A) 是一个数学不变量，并且在正交和与 Kirby 稳定化下具有函子性。

定理 *A*（链接配对的典范不变量）。赋值 $A \mapsto$ *Canon(A)* 仅取决于配对 $\big($ *Tor(*$G(A)$*))* $\lambda_A\big)$ 的等距类以及 $b_1(A)$。此外，当且仅当存在一个等距 *Tor(*$G(A)$*))* $\cong$ *Tor(*$G(A')$*))*，将 λ_A 与 $\lambda_{A'}$ 对应，并且将 $b_1(A)$ 与 $= b_1(A')$ 对应时，*Canon(*A*)* $=$ *Canon(*A'*)*。特别地，*Canon(*A*)* 在幺模合同和 ± 1稳定化下均为不变量，因此是该手术表示的 *Kirby* 稳定合同类的不变量，进而也是所得 *3*维流形 Y_A的不变量。

该构造在第 3 节中完成，其中第 4–5 节发展了奇素数情形的局部分类与典范选择，以及 2-主部分的细微问题。全文始终强调，Canon(A) 的作用是提供一种 典范标准形 ，而不是重新证明已知的分类结果。

我们的第二个结果是在这些典范不变量与 GKMP 状态空间之间建立一套显式字典。为陈述该结果，回顾一下：GKMP 将一个 TMF 模 b a 与整对称双线性形式相关联，而单连通边界 4-流形 X 的态空间由正规化平移 $L_{b(X)}[\,3b_+(X) - 2b_-(X)\,]$给出。对于每个令牌包 $T \in$ Tok，我们构造一个典范对称整矩阵 $B(T)$，使之实现相应的挠链形式，并定义实现函子

$$\mathcal{R}(T) \;:=\; L_{B(T)}\big[\,3b_+(B(T)) - 2b_-(B(T))\,\big] \;\in\; \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}),$$

如§6所示。主定理将 GKMP 状态空间与这一显式实现联系起来。

定理 B（显式状态空间公式；令牌实现）。对于每个对称整矩阵 A，都存在一个等价

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y_A) \;\simeq\; \mathcal{R}\big(\mathrm{Canon}(A)\big) \qquad \text{in } \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}).$$

等价地，$\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y)$ 仅取决于$(b_1(Y),\ \mathrm{Tor}\ H_1(Y;\ \mathbb{Z})\ \lambda_Y)$，并由与典范不变量相关联的显式TMF–模计算得出$\mathrm{Canon}(A)$。证明见定理*6.3*。

注 1.1（并非 3维流形的分类）。 手术矩阵并不能确定底层 3维流形的微分同胚型，而挠链形式（即使与 b_1 一起）也远不足以对 3维流形进行分类。定理 B 断言，GKMP 态空间经过这一粗略的代数数据分解；因此，许多彼此不同胚的 3维流形会得到等价的 TMF 态空间。

注 1.2（等价与典范等价）。 Gukov–Krushkal– Meier–Pei 表明，态空间 $\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y)$ 在 Ho(Mod$_{\mathrm{TMF}}$) 中在等价意义下定义良好，但一般而言并非在典范等价意义下定义良好；参见 [12, §7。2]。我们的令牌包 Canon(A) 以及组装得到的模$\mathcal{R}$（Canon(A)）均由手术矩阵典范地构造而成，因而给出了该等价类的一个典范代表元。我们不试图将定理 B 中的比较等价提升为典范等价。在 §7 中，当我们计算闭 4 维流形的值 $Z_{\mathrm{TMF}}(S^2 \times S^2)$ 时，我们明确假设了关于反向单连通协边的附加自然性断言，该断言表述为 [12, 问题 7。14]。

一个关键的代数输入是一个明确的稳定分类陈述：具有相同 b_1 且给出等距挠链接配对的两个对称整矩阵，在添加若干块（± 1）后变为合同；见命题 6.2。这一步使我们能够从λ_A 的不变量转向归一化 GKMP 模的不变量，并且它以可直接用于定理 B 证明的形式给出。

这个字典与连通和及按素数分解相容。特别地，关于令牌包的不交并，$\mathcal{R}$ 是对称幺半的：

$$\mathcal{R}(T \oplus T') \;\simeq\; \mathcal{R}(T) \otimes_{\mathrm{TMF}} \mathcal{R}(T') \qquad (\text{Theorem } 6.5).$$

因此， $\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}$($Y$的计算可归结为有限列表中的局部生成元及其张量积，具体见§6。

除了通用公式之外，我们还提取出两项 TMF 固有的结构，因此它们为 GKMP 理论提供了真正的几何信息。首先，我们将闭 4 维流形 $S^2 \times S^2$ 和 $\mathbb{CP}^2$ 的取值与 π_*TMF 中的经典霍普夫元素对应起来。

定理 C（来自闭 4 维流形的霍普夫元）。在 *GKMP* 理论中，有

$$Z_{\mathrm{TMF}}(\mathbb{CP}^2) \;=\; \pm\nu \;\in\; \pi_3(\mathrm{TMF}),$$

并且，假设 [12, 问题 7。14]，

$$Z_{\mathrm{TMF}}(S^2 \times S^2) \;=\; \eta \;\in\; \pi_1(\mathrm{TMF}),$$

其中 η，ν 表示经典稳定霍普夫元在 π_*TMF 中的像（参见 *Adams* [1]）。这作为定理 *7.1* 得到证明。

其次，我们证明秩一构件的时间反演对偶性，并将其表述为 TMF 模理论中的一个精确的格罗滕迪克对偶陈述。

定理 D（秩一时间反演对偶）。对于每个整数 n，秩一 *GKMP* 模满足典范等价

$$L_{(-n)} \;\simeq\; L_{(n)}^{\vee}[1],$$

与几何时间反演协边配对相容。该结论证明为定理*8.6* 见*§8*。

定理 D 中的等价在乘以单位 $-1 \in \pi_0(\mathrm{TMF})^\times$后才是典范的；我们将在 §8 中说明这种符号歧义如何源于秩一生成元的归一化，以及它如何与对偶配对相互作用。（特别是，这不会影响定理 D 的有效性，但若要实现严格的函子性，则必须仔细追踪这一点。）

1.3. **证明策略与章节安排**。本文的组织旨在将真正的新成果与经典分类结果区分开来。

在 §2 中，我们约定手术矩阵、链接配对和 Kirby 变换的记号，并回顾 GKMP 状态空间中内含的归一化位移。在 §3 中，我们定义典范不变量 Canon(A)，并证明其不变性。第 4 节和第 5 节建立典范选择所需的局部分类：奇素数情形通过平方类和循环直和项处理，而 2-主精化则需要单独分析，以确保相关分次配对的非退化性及其与稳定化的相容性。在 §6 中，我们通过为每个令牌包 $\mathcal{R}$ 选取一个典范代表矩阵 $B(T)$，构造实现函子 T；并结合稳定分类（命题 6.3）与 GKMP 不变性定理，证明状态空间公式（定理 6.2）。第 7节证明定理 7.1 ，并确定 GKMP 理论在两个基本幺模形式上的相应归一化。最后，§8 利用谱 Grothendieck 对偶方法（参见 Lurie [18]和 Mathew–Meier [19]）证明秩一时间反演对偶（定理 8.6）。

备注（实现）。虽然第 3–6 节中的构造纯属数学内容，我们还提供了典范化和实现过程的完整实现，以及一套可复现的测试套件和一系列计算示例。这些计算材料旨在作为补充验证和探索工具，并未用于主要定理的逻辑证明。

2. Background and conventions

2.1. **手术矩阵、2柄体与 Kirby 变换**。我们回顾整数手术的矩阵模型，并确定本文中始终视为*Kirby* 等价的代数变换。Kirby 演算的标准参考文献包括 [17, 14]。

2.1.1. *Kirby* 矩阵。设 $L = L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_n \subset S^3$ 为一个具有有序定向、且带整数框架的带框架链环。其关联的*Kirby* 矩阵

$$A(L) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$$

是由以下方式定义的对称整矩阵

$$a_{ii} = \text{framing on } L_i, \qquad a_{ij} = \mathrm{lk}(L_i, L_j) \quad (i \neq j),$$

其中，lk 表示 S^3 中的定向链接数。我们将 Y_A 记为对 L 进行整数手术（矩阵为$A = A（L）$）所得的闭定向三维流形，并将 W_A 记为通过沿 L 附加 2-柄（采用给定的框架）从 B^4 得到的四维流形。于是 $\partial W_A = Y_A$。我们始终将 $\mathbb{Z}^n$ 的元素视为列向量；转置也相应处理。

注记 2.1（定向约定）。 我们的约定是， $Y_A = \partial W_A$带有边界定向。特别地，反转 Y_A的定向会改变挠链接配对的符号（见下文§2.2 和（2.2）。

2.1.2. 矩阵形式的 *Kirby* 变换。 Kirby 定理表明，两个带框架链环给出保定向微分同胚的手术流形，当且仅当它们可通过一系列 Kirby 变换 [17] 相互关联。在矩阵层级上，我们用对称整矩阵上的以下操作来表示这些变换：

(1) 幺模合同变换 （柄滑动）：

$$A \longmapsto A' = P^{\mathsf{T}} A P, \qquad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}).$$

(2) ± 1–稳定化 （爆破 / 收缩）：

$$A \longmapsto A \oplus [\varepsilon], \qquad \varepsilon \in \{+1, -1\},$$

其中 $[\varepsilon]$ 表示 1×1 矩阵（ε）。

我们记作 $A \sim_{\mathrm{Kirby}} A'$，如果 A 和 A' 可通过这些操作的有限序列相互关联。

2.1.3. 非退化矩阵与奇异矩阵。 若 $\det(A) \neq 0$，则 $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 是有限群，因此 Y_A 是有理同调球面。这种情况下，挠链接配对定义在整个 $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 上。若 $\det(A) = 0$，则群 $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 有自由部分；在步骤 A 的完整理论中，除了挠链形式外，我们还保留完整的史密斯标准形数据（因此也保留自由秩）。本背景部分将聚焦于非奇异情形，但下文的代数构造经过安排，使挠元部分能够以典范方式分离出来。

2.2. **从矩阵到判别群与链接配对**。固定一个对称矩阵 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$。

2.2.1. 判别群。定义判别群（或余核群）

$$G(A) := \mathrm{coker}\big(A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n\big) = \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n.$$

如果 $\det(A) \neq 0$，那么 $G(A)$ 是一个阶为 $|\det(A)|$ 的有限群（例如可由史密斯标准形得到）。在 §2.2.3 中，我们回顾由把手体 $G(A) \cong H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 导出的标准识别 W_A。

2.2.2. 矩阵链接型。 假设 $\det(A) \neq 0$。逆矩阵 A^{-1} 是一个有理矩阵，因此对于 x， $y \in \mathbb{Z}^n$ 量 $x^{\mathsf{T}}A^{-1}y$ 属于 $\mathbb{Q}$。我们定义

$$\lambda_A \colon G(A) \times G(A) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad \lambda_A(\bar{x}, \bar{y}) := x^{\mathsf{T}}A^{-1}y \bmod \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

其中 $\bar{x}$， $\bar{y}$ 表示 x， y 在 $G(A)$ 中的类。

引理 2.2。 若$\det(A) \neq 0$，则 λ_A 定义良好，且是非奇异对称双线性配对。

证明。良定义性。若 $x' = x + Az$ 对于某个 $z \in \mathbb{Z}^n$，则

$$(x')^{\mathsf{T}}A^{-1}y = (x + Az)^{\mathsf{T}}A^{-1}y = x^{\mathsf{T}}A^{-1}y + z^{\mathsf{T}}y,$$

且 $z^{\mathsf{T}}y \in \mathbb{Z}$，因此模 $\mathbb{Z}$ 的类不变。同理，将 y 替换为$y + Az'$ 会使 $x^{\mathsf{T}}A^{-1}y$ 改变整数 $x^{\mathsf{T}}z'$。因此，(2.1) 仅取决于_ _x， y。

双线性与对称性。双线性由公式立即可得。由于A 是对称的， A^{-1}也对称，因此 $x^{\mathsf{T}}A^{-1}y = y^{\mathsf{T}}A^{-1}x$也对称，且 λ_A 是对称的。

非奇异性。令 $\mathrm{ad}\lambda_A$： $G(A) \to \mathrm{Hom}(G(A)\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 为伴随映射，$\mathrm{ad}\lambda_A(\bar{x})(\bar{y})$ $= \lambda_A(\bar{x}$， $\bar{y})$。假设 $\mathrm{ad}\lambda_A(\bar{x}) = 0$。那么，对所有$y \in \mathbb{Z}^n$，都有 $x^{\mathsf{T}}A^{-1}y \in \mathbb{Z}$ 。令 $u := A^{-1}x \in \mathbb{Q}^n$。该条件表明，对所有 $y \in \mathbb{Z}^n$，都有 $u^{\mathsf{T}}y \in \mathbb{Z}$ ，因此$u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^n$， $\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$。于是 $x = Au \in A\mathbb{Z}^n$，即 $\bar{x} = 0$ 属于 $G(A)$。因此 $\mathrm{ad}\lambda_A$ 是内射的。由于 $G(A)$ 是有限的，内射即意味着双射，所以 λ_A 是非奇异的。□

2.2.3. 拓扑解释。 接下来，我们将 $(G(A)\ \lambda_A)$ 与 $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 上经典的挠链形式联系起来。

命题 2.3 (同调与挠链接配对)。 设 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ 为对称矩阵，且 $\det(A)$ $\neq 0$。则 $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 是有限的，并且存在典范同一

$$H_1(Y_A;\mathbb{Z}) \ \cong\ G(A),$$

在该同一之下， $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 上的挠链接配对 λ_{Y_A} 与 λ_A 一致。

证明。 我们首先将 $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 与 $G(A)$ 识别起来。把手体 W_A 具有一个由单个 0-柄和 n 2 个柄组成的把手分解，因此 $H_1(W_A;\mathbb{Z}) = 0$且 $H_2(W_A;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$。令 $e_i \in H_2(W_A;\ \mathbb{Z})$ 表示由 2-柄核与 L_i 的塞弗特曲面封闭后得到的类，其中 L_i 位于 S^3 中（如 [14, § 5.2] 所述）；则 $\{e_i\}$ 是一组基，且该基下的交形式由 Kirby 矩阵 A 表示。

考虑对偶 $(W_A$， $Y_A)$ 的长正合列：

$$H_2(W_A;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota} H_2(W_A, Y_A;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_1(Y_A;\mathbb{Z}) \to H_1(W_A;\mathbb{Z}) = 0,$$

因此 $H_1(Y_A;\mathbb{Z})$ 是 $\cong \mathrm{coker}(\iota)$。根据庞加莱–勒夫谢茨对偶，

$$H_2(W_A, Y_A;\mathbb{Z}) \ \cong\ H^2(W_A;\mathbb{Z}) \ \cong\ \mathrm{Hom}\big(H_2(W_A;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}\big).$$

在此识别下，映射 ι 将 $x \in H_2(W_A;\mathbb{Z})$ 映射为泛函 $(x\cdot -) \in \mathrm{Hom}(H_2(W_A;\mathbb{Z})\ \mathbb{Z})$，也就是说，它是交叉配对的伴随映射。在基 $\{e_i\}$ 下，该映射由矩阵 A表示。因此

$$H_1(Y_A;\mathbb{Z}) \ \cong\ \mathrm{coker}\big(A:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^n\big) \ =\ G(A).$$

由于 $\det(A) \neq 0$，该群是有限群，因此 Y_A 是一个有理同调球面。

现在我们比较链接配对。对于具有 $H_1(W;\ \mathbb{Z}) = 0$ 的定向有理同调球面$Y = \partial W$， $H_1(Y;\mathbb{Z})$ 上的挠链形式有一种标准描述，可用 $H_2(W,Y;\mathbb{Z})$ 上的（有理）逆交叉配对来表示；例如参见 [30, § 1]。具体来说，映射ι: $H_2(W;\ \mathbb{Z}) \to H_2(W,Y;\ \mathbb{Z})$ 在与$\smile\mathbb{Q}$张量化后成为同构。给定 $\alpha,\beta \in H_1(Y;$ $\mathbb{Z}) \cong \mathrm{coker}(\iota)$ 中的类，选取提升 $\widetilde{\alpha},\beta \in H_2(W,Y;\ \mathbb{Z})$，并令 $u,v \in H_2(W;$ $\mathbb{Q})$ 为满足 $\iota(u) = \widetilde{\alpha}$ 和 $\smile(v) = \beta$ 的唯一有理类。那么，量 $u\cdot v \in \mathbb{Q}$ 对这些选择的依赖仅模$\mathbb{Z}$，且

$$\lambda_Y(\alpha,\beta) \ =\ u\cdot v \bmod \mathbb{Z} \ \in\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

在我们的把手体 W_A 中，基 $\{e_i\}$ 将 $H_2(W_A;\mathbb{Z})$ 识别为 $\mathbb{Z}^n$，而对偶基将 $H_2(W_A,$ $Y_A;\mathbb{Z})$ 识别为 $\mathbb{Z}^n$，从而 ι 由 A 表示。因此，如果 $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}$ 在 $H_2(W_A,Y_A;\mathbb{Z})$ 中分别对应于 $x,y\in\mathbb{Z}^n$，那么 $u = A^{-1}x$ 和 $v = A^{-1}y$ 在 $H_2(W_A;\mathbb{Q})$ 中 $\cong \mathbb{Q}^n$，并且

$$u\cdot v \ =\ (A^{-1}x)^{\mathsf{T}}A(A^{-1}y) \ =\ x^{\mathsf{T}}A^{-1}y.$$

模 $\mathbb{Z}$，这正是（2.1）。因此 λ_{Y_A} 在识别 $H_1(Y_A;\ \mathbb{Z}) \cong G(A)$ 下与 λ_A 一致。□

2.2.4. 等距类的 *Kirby* 不变性。 尽管 λ_A 是由选定的矩阵 A 定义的，但其等距类只取决于 Y_A。

命题 2.4（合同与稳定化不变性）。 设 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ 是对称矩阵，且 $\det(A)$ $\neq 0$。

(1) 若 $A' = P^{\mathsf{T}}AP$ *with* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$，则映射

$$\phi_P\colon G(A)\to G(A'),\qquad \phi_P(\bar{x}) = \overline{P^{\mathsf{T}}x},$$

是定义良好的群同构，并且是等距： $\lambda_{A'}\big(\phi_P(\bar{x})\ \phi_P(\bar{y})\big) = \lambda_A(\bar{x},\bar{y})$。*(2)* 若 $A'' = A\oplus[\varepsilon]$ *with* $\varepsilon\in\{+1,-1\}$，则由投影 $\mathbb{Z}^{n+1}\to\mathbb{Z}^n$ 诱导的典范同一$G(A'')\ \cong\ G(A)$ 是等距： $\lambda_{A''}\cong\lambda_A$。

$(G(A)\ \lambda_A)$ 的等距类在 $\sim_{\mathrm{Kirby}}$下是不变量。

证明。 **(1)** 若 $x'\equiv x$ **(**模 $A\mathbb{Z}^n$**)**，设 $x' = x + Az$，则

$$P^{\mathsf{T}}x' = P^{\mathsf{T}}x + P^{\mathsf{T}}Az = P^{\mathsf{T}}x + P^{\mathsf{T}}AP(P^{-1}z) = P^{\mathsf{T}}x + A'(P^{-1}z),$$

并且 $P^{-1}z\in\mathbb{Z}^n$ 因为 P 是幺模的。因此 $P^{\mathsf{T}}\overline{x' = }\,P^{\mathsf{T}}\overline{x}$ 属于 $G(A')$，所以 ϕ_P定义良好。它是双射，其逆矩阵由 $(P^{-1})^{\mathsf{T}}$诱导。

对于配对，注意 $(P^{\mathsf{T}}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P^{-\mathsf{T}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上。因此，对于提升 $x, y \in \mathbb{Z}^n$ 我们计算

$$\lambda_{A'}\big(\overline{P^{\mathsf{T}}x}, \overline{P^{\mathsf{T}}y}\big) = (P^{\mathsf{T}}x)^{\mathsf{T}}(A')^{-1}(P^{\mathsf{T}}y) \bmod \mathbb{Z} = x^{\mathsf{T}}A^{-1}y \bmod \mathbb{Z} = \lambda_A(\bar{x}, \bar{y}).$$

(2) 写出 $A'' = A \oplus [\varepsilon]$ 并确定 $\mathbb{Z}^{n+1} \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}$。然后

$$G(A'') = \frac{\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}}{A\mathbb{Z}^n \oplus \varepsilon\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}^n}{A\mathbb{Z}^n} \ \oplus \ \frac{\mathbb{Z}}{\varepsilon\mathbb{Z}} \cong G(A) \oplus 0 \cong G(A).$$

此外 $(A \oplus [\varepsilon])^{-1} = A^{-1} \oplus [\varepsilon^{-1}]$ 在 $\mathrm{Mat}_{n+1}(\mathbb{Q})$ 中，并且由于 $\varepsilon^{-1} = \varepsilon \in \mathbb{Z}$，最后一个直和项在（2.1）中仅贡献整数值，因此在$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中消失。因此，$G(A'') \cong G(A)$ 上的诱导配对恰好是 λ_A。□

备注 2.5（奇异手术矩阵的挠链形式）。当 $\det(A) = 0$ 时，余核 $G(A) = \operatorname{coker}(A)$ 具有一个自由直和项。尽管如此，挠子群 $\mathrm{Tor}(G(A))$ 仍带有一个典范的非奇异链接配对：选取 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 使得

$$P^{\mathsf{T}}AP \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{\mathrm{red}} \end{pmatrix}$$

对于 A_{red} 非奇异，将 $\mathrm{Tor}(G(A)) \cong G(A_{\mathrm{red}})$，并将配对 $\lambda_{A_{\mathrm{red}}}$（由 2.1 定义）传递过去。对这类约化的不同选择，在非奇异块上彼此相差一个幺模合同，因此命题 2.4(1) 表明所得配对在等距意义下定义良好；它与 Tor 上的经典挠链形式一致 $H_1(Y_A;\ \mathbb{Z})$。我们仍将此挠配对记为 λ_A。关于带框架链环手术背景下这一构造的详细讨论，参见例如 [16,§1]。

2.2.5. 定向反转。若 A 是对称矩阵且 $\det(A) \neq 0$，则 $-A$ 也对称，并且 $(-A)^{-1} = -A^{-1}$。因此

$$\big(G(-A), \lambda_{-A}\big) \ \cong \ \big(G(A), -\lambda_A\big). \tag{2.2}$$

从拓扑角度看，这与如下事实一致：对有理同调球面作定向反转会使挠链接配对取负；参见 [30, § 1]。

2.3. **链接配对作为代数输入。** A（挠元）链接配对 是一个有序对 (G, λ)，其中 G 是有限阿贝尔群，并且

$$\lambda\colon G \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

是一个对称双线性映射，使得伴随映射 $\mathrm{ad}_\lambda\colon G \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是同构。若两个链接配对等距，即存在保持 λ的群同构将二者联系起来，则称它们等价。

正交直和定义了一个交换幺半群结构：

$$(G_1, \lambda_1) \ \oplus \ (G_2, \lambda_2) := (G_1 \oplus G_2, \ \lambda_1 \oplus \lambda_2),$$

其中交叉项消失。素数分解给出典范的正交分解

$$(G, \lambda) \ \cong \ \bigoplus_p \ (G_{(p)}, \lambda_{(p)}),$$

其中 $G_{(p)}$ 是 p–主子群。等距类的分类是经典结果。对于奇素数，Wall [30] 通过格的判别形式描述生成元和关系。Kawauchi–Kojima [16]对由闭定向三维流形产生的链接配对给出了完整的代数分类，其中包括 2-主关系。对于后续构造中便于使用的 2–群情形的显式标准形，我们还采用 Miranda 的细化 [20]。

2.4. 稳定 TMF模、移位与对偶。 我们用 TMF 表示拓扑模形式的 E_∞ 环谱。记 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}$ 为（右）TMF 模谱所构成的稳定对称幺半范畴，并以 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$ 表示其同伦范畴。我们的约定与 Gukov–Krushkal–Meier–Pei 的 TMF 基 3+1维拓扑量子场论原型 [12]相容。

2.4.1. 移位与三角。 对于 TMF 模 M，我们用 $M[1]$ 表示悬挂 ΣM，更一般地，用 $M[k] = \Sigma^k M$ 表示 $k \in \mathbb{Z}$。$\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}$ 中的余纤维序列在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$ 中写作正合三角。

2.4.2. 内部 *Hom* 与对偶。 令 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{TMF}}(-,\ -)$ 表示 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}$ 中的内部映射谱。对于 TMF 模 M，我们将其 TMF线性对偶 定义为

$$M^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{TMF}}(M, \mathrm{TMF}).$$

当 M 是可对偶的（例如，当 M 是完美的或由有限胞腔TMF–模构造而成时），存在求值映射和余求值映射，从而表明 $M^\vee$ 是该对称幺半范畴中的对偶对象。我们只会在通过构造保证可对偶性的语境中应用 $(\cdot)^\vee$，如 [12]所示；关于稳定同伦论语境中的对偶的一般背景，请参见 [15]。

2.4.3. 拓扑量子场论和实现字典的记号。沿用 [12]，我们用 $\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}$ 表示所讨论的 (3+1)–维 TMF–值拓扑量子场论。（我们专门将 $\mathbb{Z}$ 保留用于整数。）在本文中，步骤 A 将 Kirby 矩阵 A 关联到一个<此处原文样式标签内的术语应保持标签不变>典范令牌包 Canon(A)，其编码以下信息：

(1) 完整的史密斯标准形数据（特别是$H_1(Y_A;\mathbb{Z})$的自由秩），以及 (2) 挠链接配对 Tor $H_1(Y_A;\ \mathbb{Z})$ λ_{Y_A} 的等距类，采用按素数排序的标准形。

步骤 B 随后定义一个实现字典（一个函子）$\mathcal{R}$，将局部令牌映射到显式的 TMF 模，以便能够以函子性的方式将步骤 A 输出与态空间赋值进行比较

$$Y \longmapsto \mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}(Y) \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}).$$

2.5. 运行示例和符号表。

2.5.1. 基准手术矩阵。 我们固定以下具体矩阵作为运行示例。它们将反复用于说明步骤 A 和 B 中的构造。

(1)平凡情形。 对于 $A = [1]$，手术得到 $Y_A \cong S^3$，因此H_1(Y_A;ℤ) = 0 和 $\lambda_A = 0$。(2)秩一（透镜空间）族。 对于 $A = [n]$ ，其中 $n \neq 0$，有G(A) ≅ ℤ/|n|，并且

$$\lambda_A(\bar{1}, \bar{1}) = \frac{1}{n} \bmod \mathbb{Z}.$$

在我们的定向约定下， $Y_{[n]}$ 是透镜空间 $L(n,1)$。由（2.2），将 n 替换为 $-n$ 会使配对变号。

(3) A 2–主双曲块。设

$$A_{\mathrm{hyp}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么 $G(A_{\mathrm{hyp}}) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$, 和 $\lambda_{A_{\mathrm{hyp}}}$ 是 $(\mathbb{Z}/2)^2$ 上的标准双曲非奇异对称形式（区别于由 diag(2，2) 得到的对角型）。

（4）阶较小的混合素数示例。令 $A = \mathrm{diag}(2, 6)$。那么G(A) ≅ ℤ/2 ⊕ ℤ/6 的阶为 12，其 2-主层和 3-主层为步骤 A 中素数分解提供了一个最小测试平台。

2.5.2. 符号表。为便于快速查阅，我们总结几个前文确定的符号：

A 对称整数手术矩阵（Kirby 矩阵）W_A 2–柄体，由 B^4 附加矩阵为 A Y_A ∂W_A 的 2-柄得到；所得闭定向三维流形G(A) 余核($A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$) ≅ H_1 (Y_A;ℤ)λ_A 定义在 G(A) 上的矩阵链接型，由式 (2.1) 给出（若 det $A \neq 0$）Ca non(A) 步骤 A：对 Smith 标准形链接等距类进行编码的典范令牌包 +链接等距类 $\mathcal{R}$ 步骤 B：从标记到 TMF 模的实现字典$\mathcal{Z}_{\mathrm{TMF}}$ 由 [12] 给出的基于 TMF 的 (3+1)-拓扑量子场论函子

3. Step A: Canonical invariants for torsion linking pairings

本节提取出控制 Gukov–Krushkal–Meier–Pei 框架中 (3+1) 维 T MF–拓扑量子场论态空间的挠元敏感部分的纯代数数据：闭定向三维流形的非奇异挠链接配对。具体而言，我们首先在非奇异情形下发展挠分类：$A \in M_n(\mathbb{Z})$，其中 det(A) $\neq 0$给出一个有理同调球面 Y_A。诱导配对 (G(A) λ_A) 是 Y_A 的一个经典不变量，在等距意义下定义良好，且在 Kirby 变换（整数合同与 ± 1 稳定化）下保持不变。当 det(A) = 0 时，余核含有自由部分；我们将相同的构造应用于典范的

Tor(上的挠配对$G(A)$（备注 2.5），并将 $b_1(A)$ 记录为步骤 A 输出的一部分。

步骤 A 的目标不是引入新的不变量，而是为这个等距类选择一种典范的 描述，以便在后续构造中能够明确无误地使用。根据链接配对的逐素数分类（Wall、Kawauchi–Kojima 和 Miranda），我们从 ($G(A)$ λ_A) 中提取一组明确的不变量元组，记作 Canon(A)；它对该等距类是完备的 。为使记号简洁，我们还使用一个等价的“令牌列表”Tok(A)，它是将 Canon(A) 展平为按素数排序的局部符号列表所得。令牌不携带任何额外结构；它们只是对同一组典范不变量的编码。

3.1. **从整数手术矩阵到链接配对**。设 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个对称矩阵，且 det(A) $\neq 0$。记

$$G(A) \;=\; \operatorname{coker}(A) \;=\; \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n,$$

一个阶为 $|G(A)| = |\det(A)|$ 的有限阿贝尔群。我们定义一个配对

$$\lambda_A \colon G(A) \times G(A) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad \lambda_A\big([x],[y]\big) \;=\; x^{\mathsf{T}} A^{-1} y \mod \mathbb{Z}, \quad (3.1)$$

其中 $x,\ y \in \mathbb{Z}^n$ 是代表元。

引理 3.1. 映射 λ_A 是定义良好、非奇异的对称双线性配对。特别地，($G(A)$ λ_A) 按照 *Wall* 和 *Kawauchi–Kojima* 的定义是一个链接配对。

证明。良定义性。若 $x' = x + Az$ 对某个 $z \in \mathbb{Z}^n$成立，则

$$x'^{\mathsf{T}} A^{-1} y = (x + Az)^{\mathsf{T}} A^{-1} y = x^{\mathsf{T}} A^{-1} y + z^{\mathsf{T}} y,$$

并且 $z^{\mathsf{T}} y \in \mathbb{Z}$，因此 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中的等价类不变。对第二变量进行同样的计算可知，该结果与 y的选取无关。

双线性与对称性。 双线性由公式直接得到；由于 A^{-1} 是对称的，因此对称性成立。

非奇异性。 考虑伴随同态

$$\mathrm{ad}_{\lambda_A} \colon G(A) \longrightarrow \operatorname{Hom}(G(A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \qquad [x] \longmapsto \big([y] \mapsto \lambda_A([x],[y])\big).$$

令 $x \in \mathbb{Z}^n$ 表示核中的一个元素。那么对于所有$y \in \mathbb{Z}^n$， $x^{\mathsf{T}} A^{-1} y \in \mathbb{Z}$ 。等价地， $A^{-\mathsf{T}} x = A^{-1} x \in \mathbb{Z}^n$。记 $A^{-1}x = z \in \mathbb{Z}^n$。那么$x = Az$，因此 $[x] = 0$ 属于 $G(A)$。故 ad$_{\lambda_A}$ 是内射的。由于 $G(A)$是有限的，它是双射。□

在拓扑情形中， A 是描述某个2-手柄体的带框架链环的链接矩阵，其边界是一个有理同调球面M；此时 $G(A) \cong H_1(M;\mathbb{Z})$，且 λ_A 与由庞加莱′对偶定义的经典挠链形式 λ_M 一致（例如参见 [14, § 5.2]和 [17]）。

3.2. **Kirby 不变性：合同变换与稳定化。** Kirby 演算的两个特征与步骤 A 有关。首先，手柄滑动对应于整数合同 $A \mapsto P^{\mathsf{T}}AP$ 与 $P \in GL_n(\mathbb{Z})$。其次，± 1–稳定化对应于 $A \mapsto A \oplus (\pm 1)$。这两种操作都不会改变边界三维流形 [17]。

引理 3.2。若 $A' = P^{\mathsf{T}}AP$ 满足 $P \in GL_n(\mathbb{Z})$，则存在一个同构 $f\colon G(A) \to G(A')$，使得对所有 $x, y \in G(A)$，$\lambda_{A'}(f(x), f(y)) = \lambda_A(x, y)$。因此，$(G(A), \lambda_A)$ 的等距类仅取决于 A 的 Kirby 等价类。

证明。定义 $f([x]) = [P^{\mathsf{T}}x]$。若 $x' = x + Az$，则

$$P^{\mathsf{T}}x' \;=\; P^{\mathsf{T}}x + P^{\mathsf{T}}Az \;=\; P^{\mathsf{T}}x + (P^{\mathsf{T}}AP)(P^{-1}z),$$

因此 $f([x']) = f([x])$ 属于 $G(A') = \operatorname{coker}(P^{\mathsf{T}}AP)$；故 f 定义良好。由于 $P^{\mathsf{T}} \in GL_n(\mathbb{Z})$，映射 f 是一个同构。利用 $(P^{\mathsf{T}}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P^{-\mathsf{T}}$，我们计算

$$\lambda_{A'}\big(f([x]), f([y])\big) = (P^{\mathsf{T}}x)^{\mathsf{T}}(P^{\mathsf{T}}AP)^{-1}(P^{\mathsf{T}}y) = x^{\mathsf{T}}A^{-1}y \quad \text{in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

因此 f 是一个等距。 □

引理 3.3。 设 $A_{\pm} = A \oplus (\pm 1)$。则 $G(A_{\pm}) \cong G(A)$，且在此识别下，$\lambda_{A_{\pm}}$ 与 λ_A 一致。

证明。由于余核 $(\pm 1) = 0$，我们有 $G(A_{\pm}) \cong G(A) \oplus 0 \cong G(A)$。此外，$(A \oplus (\pm 1))^{-1} = A^{-1} \oplus (\pm 1)$，且额外的直和项与 $G(A)$ 配对为零，因为它对应于零群。因此，链接配对保持不变。□

因此，任何仅从 $(G(A), \lambda_A)$ 的等距类中提取的不变量，自动都是 Kirby 不变量。步骤 A 是提取该等距类的一个典范的完全不变量。

3.3. **史密斯标准形与群的典范基。** 设 A 如上。取幺模矩阵 $U, V \in GL_n(\mathbb{Z})$，使得

$$UAV \;=\; D \;=\; \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), \qquad d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n, \tag{3.2}$$

史密斯标准形。然后

$$G(A) \cong G(D) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z},$$

典范地精确到唯一的不变因子（d_i）。

左变换 U 为传递配对提供了一种简便方法。令 $\bar{e}_i$ 表示 $G(D)$ 中标准基向量 $e_i \in \mathbb{Z}^n$ 的等价类，因此 $\bar{e}_i$ 的阶为 d_i。

引理 3.4. 令 $\phi\colon G(A)\to G(D)$ 为由乘以 U诱导的同构：$\phi([x])=[Ux]$。在 $G(D)$的基$(\bar e_i)$下，从 λ_A 传递而来的配对的格拉姆矩阵为

$$P \;=\; U^{-\mathsf{T}}A^{-1}U^{-1} \;\in\; M_n(\mathbb{Q}), \tag{3.3}$$

在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中逐项解释。

证明。对于表示 $G(D)$ 中元素的 $x',y'\in\mathbb{Z}^n$，记作 $x'=Ux$ 和 $y'=Uy$。于是

$$\lambda_A([x],[y]) = x^{\mathsf{T}}A^{-1}y = (U^{-1}x')^{\mathsf{T}}A^{-1}(U^{-1}y') = x'^{\mathsf{T}}(U^{-\mathsf{T}}A^{-1}U^{-1})y',$$

模 $\mathbb{Z}$。这给出了 $G(D)$ 基下的格拉姆矩阵。 □

一个关键点是，尽管矩阵 U,V 并不唯一，但我们在下文从 P 中提取的不变量是内禀的：它们只取决于 $(G(A)\ \lambda_A)$ 的等距类，因而是典范的。

3.4. 初等分解与 p^k–层。 记 $G=\bigoplus_p G_{(p)}$ 为有限阿贝尔群的初等分解，其中 $G_{(p)}$ 是由 p–幂阶元素构成的子群。

引理 3.5。 设(G,λ) 是一个链接配对。那么

$$\lambda\big(G_{(p)},G_{(q)}\big)=0 \qquad (p\neq q),$$

因此(G,λ) 是其 p–主分量的正交直和。

证明。设 $x\in G_{(p)}$ 和 $y\in G_{(q)}$，于是 $p^a x=0$ 和 $q^b y=0$，其中 a,b。那么在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中，$0=\lambda(p^a x,y)=p^a\lambda(x,y)$，且 $0=\lambda(x,q^b y)=q^b\lambda(x,y)$。因此，$\lambda(x,y)$ 在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中同时是 p^a–挠元和 q^b–挠元，故其被 $\gcd(p^a,q^b)=1$ 消去，从而 $\lambda(x,y)=0$。 □

在史密斯标准形基中，每个循环因子 $\mathbb{Z}/d_i$ 都有一个典范的p–主生成元，它由 d_i去除与p 互素的部分得到。令$v_p(\cdot)$ 表示 p–进赋值，并记

$$d_i = p^{e_i}\cdot s_i, \qquad e_i=v_p(d_i),\ \ \gcd(s_i,p)=1.$$

定义 $\bar e_{i,\ p}=s_i\,\bar e_i\in\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$，这是一个阶为 p^{e_i} 的元素（可能为 1）。

引理 3.6。 设 P 如 (3.3)所示。对于固定的素数 p，p–主配对 $\lambda_{(p)}$ 在基 $\{\bar e_{i,p}\}_{e_i>0}$ 下的格拉姆矩阵为

$$P^{(p)}_{ij}\equiv s_i s_j P_{ij} \pmod 1, \tag{3.4}$$

对于指标 i,j，其中 $e_i,e_j>0$。

证明。根据构造，$\bar e_{i,\ p}=s_i\bar e_i$ 和 $\bar e_{j,\ p}=s_j\bar e_{j}$。由于 λ 是双线性的，$\lambda(\bar e_{i,\ p},\ \bar e_{j,\ p})=s_i s_j\lambda(\bar e_i,\ \bar e_j)$。在 $G(D)$ 基下，$\lambda(\bar e_i,\ \bar e_j)\equiv P_{ij}$(模 1)，故结论成立。□

现在我们将齐次的“p^k–层”单独列出。对每个 $k \geq 1$，定义指标集

$$I_{p,k} \;=\; \{\, i \mid v_p(d_i) = k \,\}, \qquad n_{p,k} = |I_{p,k}|.$$

由 $\{\bar{e}_{i,p}\}_{i\in I_{p,k}}$ 生成的子群典范地同构于 $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^{n_{p,k}}$。

引理 3.7。对于 $i, j \in I_{p,k}$，量 $p^k\, P_{ij}^{(p)}$ 是一个整数。它模 p 的约化定义了一个对称矩阵

$$B_{p,k} \in M_{n_{p,k}}(\mathbb{F}_p), \qquad (B_{p,k})_{ij} \equiv p^k P_{ij}^{(p)} \pmod{p},$$

该矩阵是非奇异的。

证明。当 $i,j \in I_{p,k}$ 时，元素 $\bar{e}_{i,p}, \bar{e}_{j,p}$ 的阶为 p^k。因此 $p^k\lambda(\bar{e}_{i,p}, \bar{e}_{j,p}) = 0$ 在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中，这意味着 $p^k P_{ij}^{(p)} \in \mathbb{Z}$。对称性继承自 $P_{(p)}$。

为证明非奇异性，考虑 p–主子群 $G(A)_{(p)}$ 及其第 k 层商

$$P_k\big(G(A)_{(p)}\big) := G(A)_{(p)}[p^k] \Big/ \big(G(A)_{(p)}[p^{k-1}] + p\, G(A)_{(p)}[p^{k+1}]\big),$$

如附录A 中奇数 p 的情形（定义 A.2）以及附录 B 中的 $p = 2$ 情形（B.1）。在史密斯基下，类 $\{\bar{e}_{i,p}\}_{i\in I_{p,k}}$ 映射为该 $\mathbb{F}_p$–向量空间的一组基，而诱导层形式为

$$b_k(\bar{x}, \bar{y}) = p^k\, \lambda_{(p)}(x, y) \bmod p.$$

根据定义，$B_{p,k}$ 是 b_k 在该基下的格拉姆矩阵。层形式是非奇异的（奇数 p 的情形见引理 A.3 ， $p = 2$的情形见命题 B.1 ），因此$B_{p,k}$ 是非奇异的。□

3.5. **奇素数：行列式符号**。假设 p为奇数。在 $\mathbb{F}_p$上，非奇异对称双线性形式的等距类由其维数和行列式的平方类决定。我们用勒让德符号记录后者。

定义 3.8。对于奇数 p 和 $k \geq 1$，定义

$$x_{p,k} \;=\; \left(\frac{\det(B_{p,k})}{p}\right) \in \{\pm 1\},$$

其中 $B_{p,k}$ 是引理 3.7中的矩阵。当 $n_{p,k} = 0$ 时，我们省略该层。

引理 3.9。设 p 为奇素数。两个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的非奇异对称双线性形式等距，当且仅当它们具有相同的维数，且在 $\mathbb{F}_p^\times / (\mathbb{F}_p^\times)^2$中具有相同的行列式。等价地，它们等距，当且仅当它们具有相同的维数，且行列式的勒让德符号相同。

证明。设 b 是一个定义在维数为 n 的 $\mathbb{F}_p$–向量空间V 上的非奇异对称双线性形式。取一组基，并令 M 为格拉姆矩阵，于是 M 是对称矩阵，且 $\det(M) \neq 0$。在特征为 $\neq 2$ 的域上，标准的格拉姆 – 施密特论证可将 b 对角化：存在 $S \in GL_n(\mathbb{F}_p)$，使得

$S^{\mathsf{T}}MS = \mathrm{diag}(a_1, \ldots\ldots, a_n)$，其中 $a_i \in \mathbb{F}_p^{\times}$。将第 i 个基向量乘以$u_i \in \mathbb{F}_p^{\times}$会使 a_i 按 u_i^2 缩放，因此每个 a_i 仅在平方数意义下定义良好。所以任意对角型都等距于

$$\langle 1, \ldots, 1, \delta \rangle, \qquad \delta \in \mathbb{F}_p^{\times}/(\mathbb{F}_p^{\times})^2,$$

其中 $\delta \equiv a_1 \cdots a_n \bmod (\mathbb{F}_p^{\times})^2$ 是行列式类。这表明存在一种仅取决于 (n, δ) 的标准形，并且 (n, δ) 是完全不变量。勒让德符号可以判定 δ。□

从 $\mathbb{F}_p$–形式 $B_{p,k}$ 到完整的 p–主部分链接配对，是链接配对经典分类的一部分。对于奇素数，这一结果可追溯至 Seifert 和 Wall，并被 Kawauchi–Kojima 的完备系统所涵盖 [30, 16]。

定理 3.10 (奇素数主部分完备性)。 设 (G, λ) 是一个链接配对，并固定一个奇素数 p。那么， p–主部分$(G_{(p)}, \lambda_{(p)})$ 的等距类由不变量集 $\{(n_{p,k}, x_{p,k})\}_{k \geq 1}$确定。

证明。根据 Wall 的齐次分解定理， p–主部分链接配对[30], $(G_{(p)}, \lambda_{(p)})$可分解为指数为 p^k 的齐次直和项的正交直和。每个齐次直和项都由一个矩阵表示，该矩阵模 p 约化后是一个定义在$\mathbb{F}_p$–向量空间上的非奇异对称形式，其维数为 $n_{p,k}$；这恰好是 $B_{p,k}$ 所编码的形式。根据引理 3.9，其等距类由 $(n_{p,k}, x_{p,k})$ 确定。对 k 取正交和，即可重构完整的 p–主部分等距类。□

3.6. **素数 2：类型与高斯和不变量**。 2-主理论更为微妙，因为特征 2 下的对称双线性形式不能仅由行列式分类。2-主链接配对的完整代数分类归功于 Kawauchi–Kojima [16]；Miranda [20]则用 Wall 的生成元给出了一个特别明确的标准形。

固定 $p = 2$ 以及一个层 $k \geq 1$，其指标集为 $I_{2,\ k}$。令 C_k 为整数矩阵

$$C_k \ = \ 2^k \cdot P^{(2)}[I_{2,k}, I_{2,k}] \in M_{n_{2,k}}(\mathbb{Z}),$$

其中 $P^{(2)}$ 如引理 3.6所述。将 C_k 模 2 化，得到一个定义在 $\mathbb{F}_2$上的对称矩阵。

定义 3.11。 2^k–层为 *A* 型，当且仅当 C_k 至少有一个奇数对角元；等价地，C_k 模 2 后是非交错的。若 C_k 的所有对角元均为偶数，则该层为 *E* 型；等价地， C_k 模 2 后是交错的（即对角元全为零）。

对于 A 型层，行列式仅在模平方意义下有意义。对于 $k \geq 3$，$(\mathbb{Z}/2^k)^{\times}$ 中的每个平方数模 8 都同余于 1，因此行列式平方类由 $\det(C_k)$ 模 8 检出。对于 $k = 2$，则由模 4 检出。对于 $k = 1$，只有一个非交错类，因此我们不记录行列式。

定义 3.12。 假设 2^k 层为 A 型。定义

$$\delta_{2,k} \;=\; \begin{cases} \det(C_k) \bmod 4 \in \{1,3\}, & k=2,\\ \det(C_k) \bmod 8 \in \{1,3,5,7\}, & k \geq 3, \end{cases}$$

并且对于 $k=1$，我们设 $\delta_{2,\,1} = *$（无参数）。

E 型层具有一个额外的不变量，可由归一化高斯和提取。这与 Turaev 和 Deloup 在低维拓扑与拓扑量子场论中研究二次精化和高斯和时所涉及的思想脉络相同 [29, 8, 7]。

定义 3.13。 假设 2^k–层为 E 型。令 H_k 为商群

$$H_k \;=\; G_{(2)}/G_{(2)}[2^k],$$

其中 $G_{(2)}[2^k] = \{x \in G_{(2)} \mid 2^k x = 0\}$。定义函数

$$q_k \colon H_k \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad q_k([x]) \;=\; 2^{k-1}\,\lambda(x,x).$$

那么归一化高斯和为

$$\Gamma_k(\lambda) \;=\; |H_k|^{-1/2} \sum_{z \in H_k} \exp\big(2\pi i\, q_k(z)\big) \;\in\; \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

由于该层属于 E 型，$\Gamma_k(\lambda)$ 是一个八次单位根。我们记作

$$\Gamma_k(\lambda) \;=\; \exp\!\left(\frac{\pi i}{4} u_{2,k}\right) \qquad \text{for a uniquely determined } u_{2,k} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

引理 3.14. *对于 E 型层，元素 $u_{2,k} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 是链接配对的一个等距不变量。*

证明。 q_k 的构造是内在的：它只取决于 λ 和典范子群 $G_{(2)}[2^k]$。若 $f\colon (G,\lambda) \to (G',\lambda')$ 是一个等距，则 f 将 $G_{(2)}[2^k]$ 映为 $G'_{(2)}[2^k]$，且对所有 $z \in H_k$ 都满足 $q'_k(f(z)) = q_k(z)$。因此，高斯和（3.5）相等。从八次单位根中提取 $u_{2,k}$ 是唯一的。□

Kawauchi–Kojima 证明，上述不变量（按层组织）构成了 2-主链接配对 [16] 的完备系统；Miranda 给出了与这些不变量相容的具体标准形 [20]。

3.7. 典范不变量与标记化 Canon(A)。 现在，我们将逐素数、逐层的不变量组装成该配对 $(b_1(A),\ \mathrm{Tor}(G(A))\ \lambda_A)$ 的单一典范描述。

定义 3.15。 设 A 是一个对称整数矩阵。记

$$G(A) = \operatorname{coker}(A : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n), \qquad b_1(A) := \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} \ker(A) = \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}}\big(G(A)/\operatorname{Tor}(G(A))\big).$$

令 λ_A 表示 $\mathrm{Tor}(G(A))$ 上的典范非奇异挠链接配对：若 $\det(A) \neq 0$，则该配对为 (3.1)；若 $\det(A) = 0$，则它是备注 2.5中的配对。

定义 $\mathrm{Canon}(A)$ 为以下有序不变量组：

(1) 自由秩 $b_1(A)$；(2) 挠元 Tor(|(G))A 的阶；(3) 由史密斯标准形 (3.2) 得到的 Tor(|(d_1)) 的不变因子 ($d_r, \ldots, G$)，其中 A按非递减顺序排列（因此 Tor($d_i > 1$ (|))GA）；(4) 对每个素数 | =Tor($\prod_i d_i$(p | |))G，按递增顺序排列，列出按递增顺序排列的非平凡层 A，其中每一层记录为：

- 若 p 为奇数：三元组（k，$n_{p,\ k}$，$x_{p,\ k}$），见定义 3.8；
- 若 $p = 2$：三元组（k，$n_{2,\ k}$，型），其型为 $\in$ {A，E}，并连同 $\delta_{2,\ k}$ 若型为 = A（定义 3.12），或 $u_{2,\ k}$ 若型为 = E（定义 3.13）。

命题 3.16. 元组Canon(A) 仅依赖于 $b_1(A)$ 以及挠链接配对 (Tor($G(A)$) λ_A) 的等距类。特别地，它在 A 的整数合同与 ± 1 稳定化下不变。

证明。 由引理 3.2 与3.3，整数合同与稳定化不改变 $b_1(A)$，也不改变 (Tor($G(A)$) λ_A) 的等距类（注 2.5处理奇异情形）。Canon(A) 的各分量提取自$b_1(A)$ 及该等距类：挠阶与不变因子是底层挠群的不变量，而层不变量按构造为等距不变量（引理3.9 与3.14，连同定理 3.10 以及 [16] 以保证在 $p = 2$ 处的完备性）。 □

定理 3.17 （典范不变量的完备性）。设 A、A' 是对称整数矩阵。那么

$$\mathrm{Canon}(A) = \mathrm{Canon}(A') \iff \big(b_1(A) = b_1(A')\big) \ and \ \big(\mathrm{Tor}(G(A)), \lambda_A\big) \cong \big(\mathrm{Tor}(G(A')), \lambda_{A'}\big).$$

证明。若 (b_1(A)，Tor(G(A)) λ_A) $\cong$ (b_1(A')，Tor(G(A')),

$lambda_{A'}$)，则定义 3.15 中出现的所有不变量都相同，因此 Canon(A) =Canon(A')。

反过来，设 Canon(A) = Canon(A')。那么特别地，b_1(A) =b_1(A')，且不变因子相同，因此 Tor(G(A)) $\cong$ Tor(G(A')) 作为有限阿贝尔群同构。对每个素数 p，p 层数据相等意味着相应的 p 主挠元链接配对具有相同的完整不变量体系：对于奇数 p，这是定理 3.10；对于 $p = 2$，则是 Kawauchi–Kojima 的完备性定理，它以定义 3.11–3.13 中的不变量表示（参见 [16] 和 Miranda 标准形 [20]）。因此

$$\big(\mathrm{Tor}(G(A))_{(p)}, \lambda_A|_{\mathrm{Tor}(G(A))_{(p)}}\big) \cong \big(\mathrm{Tor}(G(A'))_{(p)}, \lambda_{A'}|_{\mathrm{Tor}(G(A'))_{(p)}}\big)$$

对每个 p。根据引理3.5，整体挠联结是其主分量的正交和，因此每个素数部分上的等距可组合成一个等距 $\big(\mathrm{Tor}(G(A))\lambda_A\big) \cong \big(\mathrm{Tor}(G(A'))\,\lambda_{A'}\big)$。 □

注记 3.18（令牌编码）。 通常，使用我们记作 Tok(A) 的紧凑有序列表来记录同一不变量 Canon(A) 会很方便。

形式上，Tok(*A*) 由整数 $b_1(A)$ 以及一个按素数排序的符号列表组成，该列表记录了每个素数 p 和每个非平凡层 k中恰好出现在定义 3.15中的层数据（按 p 递增顺序排列，再按 k递增顺序排列）。因此，Tok(*A*) 不包含 Canon(*A*) 以外的任何信息，特别是

$$\mathrm{Tok}(A) = \mathrm{Tok}(A') \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Canon}(A) = \mathrm{Canon}(A').$$

之后提到“标记”时，应将其理解为用于逐素数记录的一种记号工具，而非额外的数学结构。

注 3.19（自由秩）。若 det(*A*) $= 0$，则 $G(A) =$ coker(*A*) 有一个秩为 $b_1(A)$的自由直和项。挠子群 Tor($G(A)$) 带有注 2.5 中的典范挠链接配对 λ_A，因此步骤 A 的层不变量可直接应用于 $\big(\mathrm{Tor}(G(A))\ \lambda_A\big)$。特别地，定义 3.15 通过记录 $b_1(A)$以及挠不变量，使 Canon(*A*) 成为适用于任意对称 A 的统一标记包。

4. Local classification I: Type A (cyclic) tokens

本节将步骤 A 中用到的最简单局部基本构件单独提出：定义在循环群 p 上的非奇异对称链接形式。分类本身是经典结果，可由有限阿贝尔群上的连结理论推出（见 Wall [30] 和 Kawauchi–Kojima [16]）。我们的目的不是要在最一般的情形下重新证明这一分类，而是

(i) 在循环情形中一次性确定约定（以确保后续的识别明确无歧义），并且

(ii) 为每个循环等距类提取一个典范的素数局部标签，并在每个平方类中选定一个典范代表元。之后我们将把这一刚性化结果用于步骤 B 的典范矩阵字典。

4.1. 将循环链接视为分数。 在本节中，$n \geq 1$ 是整数，且 $C_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。我们将 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 视为加法群。

定义 4.1（链接形式与非奇异性）。有限阿贝尔群 G 上的（挠元）链接形式是一个对称双线性配对

$$\lambda : G \times G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

如果伴随同态是非奇异

$$\mathrm{ad}_\lambda : G \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \qquad x \longmapsto (y \mapsto \lambda(x, y))$$

是一个同构。若存在群同构 $\phi\colon G \to G'$，使得对所有x，$\lambda'(\phi(x)\ \phi(y)) = \lambda(x, y)$，则称两个链接配对 (G, λ) 和 (G', λ')等距。

定义 4.2（模型配对 $\langle a/n\rangle$）。 对于 $a \in \mathbb{Z}$, 定义一个对称双线性配对

$$\langle a/n\rangle : C_n \times C_n \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

by

$$\langle a/n\rangle(\overline{x},\overline{y}) \equiv \frac{a\,xy}{n} \pmod{\mathbb{Z}}, \qquad x, y \in \mathbb{Z},$$

其中 $\bar{x}$ 表示 C_n 中 x 的类。

引理 4.3（每个循环群链接都是 $\langle a/n\rangle$）。 设 λ： $C_n \times C_n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是任意的对称双线性配对，并设 g： $= 1 \in C_n$。则存在一个整数 a，使得

$$\lambda(g,g) \equiv \frac{a}{n} \pmod{\mathbb{Z}},$$

对于所有 x、 $y \in \mathbb{Z}$ ，都有

$$\lambda(\overline{x},\overline{y}) = \lambda(xg, yg) \equiv \frac{a\,xy}{n} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

特别地， $\lambda = \langle a/n\rangle$。

证明。 由于 $ng = 0$ 属于 C_n 且 λ 是双线性的，因此有

$$0 = \lambda(ng, g) = n\,\lambda(g,g) \quad \text{in } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

等价地， $n\,\lambda(g,\ g) \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$。取 $a \in \mathbb{Z}$ 满足 $n\,\lambda(g,\ g) = a$，其中 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; 这等价于 $\lambda(g,\ g) \equiv a/n$ (模 $\mathbb{Z}$)。于是由双线性可得

$$\lambda(xg, yg) = xy\,\lambda(g,g) \equiv xy\,\frac{a}{n} \pmod{\mathbb{Z}},$$

如所声称。 □

引理 4.4（非奇异性等价于最大公约数$(a, n) = 1$）。 C_n 上的配对 $\langle a/n\rangle$ 是非奇异的，当且仅当 最大公约数$(a, n) = 1$。

证明。 考虑伴随映射 $\mathsf{ad} = \mathsf{ad}_{\langle a/n\rangle}$。由于 C_n 是由$g = 1$生成的循环群，同态 $\overline{\mathsf{ad}}$ 是内射的（因此是同构，因为$|C_n| = |\operatorname{Hom}(C_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})| = n$），当且仅当 $\mathsf{ad}(g)$ 的阶为 n。现在 $\mathsf{ad}(g)$ 是由 $C_n \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 确定的同态

$$\mathrm{ad}(g)(g) = \langle a/n\rangle(g,g) = a/n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

a/n 在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中的阶等于 n/最大公约数$(a,\ n)$: 事实上， $m \cdot (a/n) \in \mathbb{Z}$ 当且仅当 $n \mid ma$，这等价于 m 是 n/最大公约数$(a,\ n)$的倍数。因此， $\mathsf{ad}(g)$ 的阶为 n 当且仅当 n/最大公约数$(a,\ n) = n$，即最大公约数$(a,\ n) = 1$。□

4.2. **等距分类与平方类**。

命题 4.5 (等距类是模平方的单位)。 设 $n \geq 2$，并令 a、 $b \in \mathbb{Z}$ 满足 最大公约数$(a,$ $n) =$最大公约数$(b,\ n) = 1$。那么， C_n 上的非奇异链接 $\langle a/n\rangle$ 和 $\langle b/n\rangle$ 等距，当且仅当

$$b \equiv u^2 a \pmod{n} \quad \textit{for some } u \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}.$$

等价地， a/b是$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$中的一个平方数。

证明。 每个自同构 $\phi\colon C_n \to C_n$ 都是由一个单位 $\phi(g) = ug$ 进行乘法得到的，其中 $u \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 唯一。令 ϕ_u 表示乘以 u 的映射。那么

$$(\phi_u^* \langle a/n \rangle)(g,g) = \langle a/n \rangle(\phi_u(g), \phi_u(g)) = \langle a/n \rangle(ug, ug) = u^2 \langle a/n \rangle(g,g) \equiv \frac{u^2 a}{n} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

由于循环群上的双线性形式由其在 (g,g) 上的取值确定（引理 4.3），我们得出 $\phi_u^* \langle a/n \rangle = \langle (u^2 a)/n \rangle$。因此，$\langle a/n \rangle$ 与 $\langle b/n \rangle$ 等距，当且仅当存在单位 $b \equiv u^2 a \pmod{n}$ 满足 u，如所述。□

定义4.6 (平方类集合)。 定义平方类集合

$$\mathcal{C}(n) := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \big/ \left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right)^2.$$

根据命题 4.5，C_n 上的非退化对称循环链接的等距类与 $\mathcal{C}(n)$ 通过 $[a] \mapsto \langle a/n \rangle$ 构成双射。

备注 4.7（与一般分类的关系）。 上述平方类描述是有限阿贝尔群上非奇异对称配对代数分类的循环群特例；这一分类至少可追溯至 Wall [30]，并由 Kawauchi– Kojima 在 3 维流形背景下加以研究 [16]。在我们的框架中，循环群 p–初等类将作为典范不变量的A 型 局部成分（见下文定义4.15）。

4.3. 素数局部化。

我们的典范不变量由各素数处的局部数据组装而成。为确保完备性，我们记录支撑p–初等分解的基本正交性。

引理4.8 （不同素数间的正交性）。 设 λ 是有限阿贝尔群 G上的双线性配对。若 $x \in G$ 的阶为 p的幂，且 $y \in G$的阶为 q的幂，其中 $p \neq q$，则 $\lambda(x,\ y) = 0$ 属于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

证明。 设 $p^k x = 0$ 和 $q^\ell y = 0$。由双线性可得，

$$p^k\, \lambda(x,y) = \lambda(p^k x, y) = 0, \qquad q^\ell\, \lambda(x,y) = \lambda(x, q^\ell y) = 0.$$

因此，$\lambda(x,\ y)$ 的加法阶同时整除 p^k 和 q^ℓ。由于最大公约数$(p^k,\ q^\ell)$ 为 $= 1$，$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中阶整除 1 的唯一元素是 0。因此，$\lambda(x,\ y)$ 为 $= 0$。□

推论4.9 (平方类按素数分解)。 设 $n = \prod_p p^{k_p}$ 为素因数分解。则中国剩余定理诱导出一个典范的双射

$$\mathcal{C}(n) \;\cong\; \prod_{p \mid n} \mathcal{C}(p^{k_p}).$$

证明。 中国剩余定理给出 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \prod_{p|n} (\mathbb{Z}/p^{k_p}\mathbb{Z})^\times$。对平方子群取商（它们在此乘积分解下相对应），即可得到所述双射。□

4.4. 奇素数：两个平方类。 现在我们为奇素数明确写出 $\mathcal{C}(p^k)$。

引理 4.10（模 p^k 的平方可从模 p）。设 p 是奇素数，且 $k \geq 1$。单位 $u \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ 是模 p^k 的平方数，当且仅当其约化 $u \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ 是模 p的平方数。

证明。若 $u \equiv v^2 \pmod{p^k}$，则$\bar{u} \equiv \bar{v}^2 \pmod{p}$，因此"仅当"方向显然成立。

反过来，设 $u \equiv v^2 \pmod{p}$，其中 v 不能被 p整除。我们归纳地构造 v_m，使得

$$v_m^2 \equiv u \pmod{p^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, k).$$

对于 $m = 1$，我们可以取 $v_1 \equiv v \pmod{p}$。假设对于某个$1 \leq m < k$，有 $v_m^2 \equiv u \pmod{p^m}$。记

$$v_m^2 = u + c\,p^m$$

其中 c为整数。我们要寻找 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $v_{m+1} := v_m + t\,p^m$ 满足 $v_{m+1}^2 \equiv u \pmod{p^{m+1}}$。计算

$$v_{m+1}^2 = (v_m + tp^m)^2 = v_m^2 + 2v_m tp^m + t^2p^{2m}.$$

模 p^{m+1}下，项 t^2p^{2m}消失，因为当 $m \geq 1$时，$2m \geq m+1$。因此

$$v_{m+1}^2 \equiv u + (c + 2v_m t)p^m \pmod{p^{m+1}}.$$

因此我们需要 $c + 2v_m t \equiv 0 \pmod{p}$。由于 p是奇数，且 v_m是模p的单位，元素 $2v_m$ 在模 p下可逆，因此我们可以选取

$$t \equiv -c\,(2v_m)^{-1} \pmod{p}.$$

作此选择后，$v_{m+1}^2 \equiv u \pmod{p^{m+1}}$。迭代至 $m = k$，便可得到 u模 p^k下的一个平方根。□

命题 4.11 (奇素数循环 A 型类**)**。设 p 为奇素数，且 $k \geq 1$。则 $\mathcal{C}(p^k)$ 恰有两个元素。等价地，在 C_{p^k}上恰有两个非奇异对称配对的等距类。

证明。由引理 4.10，$(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ 中的元素是模 p^k 平方数，当且仅当它是模 p平方数。单位群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ 恰有两个平方类（二次剩余和非剩余），所以 $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$也恰有两个平方类。因此，商群 $\mathcal{C}(p^k)$ 的阶为 2。□

4.5. 关于 2-主循环情形。 循环 2-幂情形呈现出熟悉的"模 8"细化。

引理 4.12（奇数平方模 8 同余于 1）。若 x 为奇数，则 $x^2 \equiv 1$（模 8）。

证明。令 $x = 2m + 1$。于是 $x^2 = 4m(m + 1) + 1$。由于 $m(m + 1)$ 是偶数，$4m(m + 1)$ 可被 8 整除，因此 $x^2 \equiv 1$（模 8）。□

引理 4.13（模 8 同余于 1 的单位是平方数）。设 $k \geq 3$。若$u \in (\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^\times$ 满足 $u \equiv 1$ (模 8)，则 u 是模 2^k的平方数。

证明。 我们对 $m = 3,\ 4,\ \ldots,\ k$ 进行归纳，构造一个奇整数 x_m 使得

$$x_m^2 \equiv u \pmod{2^m}.$$

对于 $m = 3$，假设 $u \equiv 1$ （模 8）使我们可以取 $x_3 = 1$。

假设对某个 $3 \le m < k$，有 $x_m^2 \equiv u$ （模 2^m）。对某个整数 c，写作 $x_m^2 = u + c\,2^m$。考虑 $x'_m := x_m + 2^{m-1}$。于是

$$(x'_m)^2 = x_m^2 + 2^m x_m + 2^{2m-2}.$$

由于 x_m 是奇数，我们有 $2^m x_m \equiv 2^m$ （模 2^{m+1}）。此外，当 $m \ge 3$ 时，2^{2m-2} 可被 2^{m+1} 整除。因此

$$(x_m + 2^{m-1})^2 \equiv x_m^2 + 2^m \pmod{2^{m+1}}.$$

因此，通过选择 $x_{m+1} = x_m$ 或 $x_{m+1} = x_m + 2^{m-1}$，我们可以使 $x_{m+1}^2 \equiv u$ (模 2^{m+1})。归纳法至此完成。□

命题 4.14 (2 的幂次平方类)。平方类集合 $\mathcal{C}(2^k)$ 如下：

(1) 若 $k = 1$，则 $\mathcal{C}(2)$ 是平凡的。*(2)* 若 $k = 2$，则 $\mathcal{C}(4)$ 有两个元素，分别由 1 和 3表示。*(3)* 若 $k \ge 3$，则 $\mathcal{C}(2^k)$ 有四个元素，由剩余类表示

$$1,\ 3,\ 5,\ 7 \pmod 8.$$

s

等价地，两个奇单位 a、b 在模2^k 意义下属于同一个平方类，当且仅当 $a \equiv b$ (模 8)。

证明。 对于 $k = 1$，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times$ 是平凡的。

对于 $k = 2$，$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{1, 3\}$ 且 $1^2 \equiv 3^2 \equiv 1$ (模 4)，因此平方子群为 $\{1\}$，商群有两个类。

假设 $k \ge 3$。根据引理4.12，每个平方单位都与 1 模 8 合同。反过来，根据引理4.13，每个与 1 模 8 合同的单位都是平方数。因此，$(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^\times$ 中的平方子群恰好是同余类$1 + 8\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$。因此，对该子群取商可由模 8 约化来判定，且它有四个陪集，分别由 1、3、5、7 (模 8) 表示。最终的等价判据 $a \equiv b$ (模 8) 正是指 a/b 属于平方子群。□

4.6. A 型标记与典范代表。现在，我们将前述分类记录为步骤 A 所用的具体素数局部数据。这里的“标记”一词仅指我们之后会将这些局部不变量作为典范输出的一部分进行编码；从数学上说，在循环群 p–主情形下，它只是一个完备的等距不变量。

定义 4.15 (A 型（循环）标记)。设 p 为素数，且 $k \ge 1$。设λ 是循环群 C_{p^k}上的非奇异对称链接形式。取一个生成元 g，并记

$$\lambda(g, g) \equiv \frac{a}{p^k} \pmod{\mathbb{Z}} \qquad \text{with } a \in \mathbb{Z},\ \gcd(a, p) = 1.$$

(C_{p^k}, λ) 的A 型标记 是数据

$$\mathrm{Tok}_A(\lambda) := (p, k, \delta),$$

其中，局部平方标签 δ 定义如下。

(1) 若 p 为奇数，若 a 是模 p 的平方数，则设 $\delta = +$，否则设 $\delta = -$。(2) 若 $p = 2$ 且 $k = 1$，则设 $\delta = +$（唯一的剩余类）。(3) 若 $p = 2$ 且 $k = 2$，则设 $\delta \in \{1, 3\}$ 为 a（模 4）。(4) 若 $p = 2$ 且 $k \geq 3$，则设 $\delta \in \{1, 3, 5, 7\}$ 为 a（模 8）。

引理 4.16 (Tok 的良定义性$_A$)**.** 记号 $\mathrm{Tok}_A(\lambda)$ 与生成元 g 的选择以及整数代表元 a无关。

证明。 若将 a 替换为 $a + p^k m$，则 a/p^k 在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中不变。因此， δ仅取决于 a 模 p^k的剩余类，故与 a的选择无关。

若 g' 是另一个生成元，则 $g' = ug$ 对某个单位 $u \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$。由双线性可得，

$$\lambda(g', g') = \lambda(ug, ug) = u^2\, \lambda(g, g) \equiv \frac{u^2 a}{p^k} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

因此 a 被替换为 $u^2 a$。在奇素数情形中，模 p 的平方性在乘以 u^2后保持不变。在 2-主情形中，命题4.14表明，平方类在乘以平方单位后保持不变，因此模 4 的剩余类（若 $k = 2$）或模 8 的剩余类（若 $k \geq 3$）不变。因此 $\mathrm{Tok}_A(\lambda)$ 定义良好。□

定理 4.17 (A 型标记的完备性)。 设 p 是素数， $k \geq 1$，且 λ, λ'是 C_{p^k}上的非奇异对称配对。那么(C_{p^k}, λ)与(C_{p^k}, λ') 等距，当且仅当

$$\mathrm{Tok}_A(\lambda) = \mathrm{Tok}_A(\lambda').$$

证明。取生成元 g, g'，并写作 $\lambda(g, g) \equiv a/p^k$ 以及 $\lambda'(g', g') \equiv b/p^k$，其中 $\gcd(a, p) = \gcd(b, p) = 1$。由命题 4.5，两个链接配对等距，当且仅当对某个单位 u有 $b \equiv u^2 a$ (模 p^k)，也就是说，当且仅当 a 和 b在 $\mathcal{C}(p^k)$ 中表示相同的平方类。对于奇数 p，命题 4.11 将$\mathcal{C}(p^k)$ 与两个标记对应起来，它们记录了 a 是否为模 p的二次剩余。对于 $p = 2$，命题 4.14 将 $\mathcal{C}(2^k)$ 与定义 4.15 中出现的剩余类标记对应起来。因此，标记相等等价于平方类相等，进而等价于等距。□

注 4.18（典范平方类代表元）。 为便于后续使用（尤其是为了在步骤 B 中构造典范矩阵），我们不妨预先为每个平方类固定一个首选代表元。

对于奇数 p，令

$$\varepsilon_p := \min\{\, m \geq 2 \mid m \text{ is a quadratic nonresidue mod } p \,\},$$

并将 $\mathcal{C}(p^k)$ 中的两个类表示为 1 和 ε_p。由引理 4.10， ε_p对每个 p^k 模 $k \geq 1$ 都仍是非平方数。

对于 $p = 2$，命题 4.14 中的代表元已经是典范的。我们强调，这并非额外的不变量，而是同一平方类数据的一种标准形选择。

例 4.19（小规模实例）。对于 $p = 5$ 和 $k = 1$，二次剩余为 $\{1, 4\}$，非剩余为 $\{2, 3\}$。因此，C_5 上的两个等距类具有标记 $(5,1,+)$ 和 $(5,1,-)$，例如分别由 $\langle 1/5\rangle$ 和 $\langle 2/5\rangle$ 表示。

对于 $k = 3$，群 C_8 有四个类 $\langle 1/8\rangle$，$\langle 3/8\rangle$，$\langle 5/8\rangle$，$\langle 7/8\rangle$，由 $\delta \equiv a$（模 8）区分。

5. Local Classification II: Type E (Hyperbolic) tokens and 2-primary refinements

5.1. 层形式、特征元以及在 $p = 2$ 处的 A/E $p = 2$ 二分法。

设 $(G,\ \lambda)$ 是一个配备了非奇异对称链接配对的有限阿贝尔群

$$\lambda\colon G \times G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad \lambda(x, y) = \lambda(y, x),$$

也就是说，伴随映射 $G \to \mathrm{Hom}(G,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，$x \mapsto (y \mapsto \lambda(x,\ y))$ 是一个同构。照例，λ 分解为按素数取正交直和。本节重点讨论 2-主分量 $(G_{(2)},\ \lambda_{(2)})$。为方便记号，本小节中用 $(G,\ \lambda)$ 表示一个 2-主链接配对。

沿用 Wall 和 Kawauchi–Kojima 的做法，我们采用标准的 2-幂挠元滤过

$$G_k \ :=\ \{x \in G \mid 2^k x = 0\}, \qquad k \geq 0,$$

其中 $G_0 = 0$。对于 $k \geq 1$，我们构造指数为 *1* 的分次分量

$$P_k(G) \ :=\ G_k \big/ \big(G_{k-1} + 2G_{k+1}\big). \tag{5.1}$$

该商群典范地构成一个 $\mathbb{F}_2$-向量空间：若 $x \in G_k$，则 $2x \in G_{k-1}$，因此 $2x$ 的像在（5.1）中为零。

链接配对在每一层上诱导出一个关于 $\mathbb{F}_2$ 的对称双线性形式。

定义 5.1（层形式）。对于 $k \geq 1$，定义

$$b_k\colon P_k(G) \times P_k(G) \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

by

$$b_k(\bar{x}, \bar{y}) \ :=\ \big(2^k\, \lambda(x, y)\big) \bmod 2,$$

其中 $x \in G_k$、$y \in G_k$ 是 $\bar{x},\ \bar{y} \in P_k(G)$ 的提升。

引理 5.2. 形式 b_k 在定义 *5.1* 中定义良好、对称且$\mathbb{F}_2$–双线性。若进一步 $(G,\ \lambda)$ 非奇异，则 b_k 对每个 $k \geq 1$ 都非奇异。

证明。我们首先验证该公式定义良好。若 $y \in G_k$，则特征 $\lambda(-, y)$: $G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的阶整除 2^k，因此

$$2^k\lambda(z, y) \in \mathbb{Z} \qquad \text{for all } z \in G. \tag{5.2}$$

特别地，$2^k\lambda(x, y) \in \mathbb{Z}$，因此模 2 约化有定义。

为证明第一变量的良定义性，将 x 替换为另一个代表元 $x' = x + u + 2v$，满足 $u \in G_{k-1}$ 和 $v \in G_{k+1}$。于是

$$2^k\lambda(x', y) = 2^k\lambda(x, y) + 2^k\lambda(u, y) + 2^k\lambda(2v, y).$$

由于 $u \in G_{k-1}$，特征 $\lambda(u, -)$ 的阶整除 2^{k-1}，因此 $2^{k-1}\lambda(u, y) \in \mathbb{Z}$，所以 $2^k\lambda(u, y) = 2 \cdot (2^{k-1}\lambda(u, y))$ 是偶整数。对于涉及 的项，由双线性以及（5.2）可得

$$2^k\lambda(2v, y) = 2^{k+1}\lambda(v, y) = 2 \cdot \big(2^k\lambda(v, y)\big),$$

并且 $2^k\lambda(v, y) \in \mathbb{Z}$，因为 $y \in G_k$。因此 $2^k\lambda(2v, y)$ 也是偶数。于是 $2^k\lambda(x', y) \equiv 2^k\lambda(x, y)$（模 2），且第一变量是良定义的。对第二变量也可作相同论证。对称性和双线性直接继承自 λ。

现在假设 λ 是非奇异的，并令 $\bar{x} \in P_k(G)$ 满足 $b_k(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ 对所有 $\bar{y} \in P_k(G)$ 都成立。取一个代表元 $x \in G_k$。该假设意味着，对于所有 $y \in G_k$，整数 $2^k\lambda(x, y)$ 都是偶数，等价地

$$2^{k-1}\lambda(x, y) \in \mathbb{Z} \qquad \text{for all } y \in G_k. \tag{5.3}$$

由双线性可知，(5.3) 表明 $\lambda(2^{k-1}x, y) \in \mathbb{Z}$ 对所有 $y \in G_k$ 都成立，即$2^{k-1}x$ 属于湮灭子

$$G_k^\perp := \{z \in G \mid \lambda(z, G_k) = 0\}.$$

我们断言

$$G_k^\perp = 2^k G. \tag{5.4}$$

事实上，若 $z = 2^k w$，则对所有 $y \in G_k$ 都有 $\lambda(z, y) = \lambda(w, 2^k y) = 0$，因此 $2^k G \subseteq G_k^\perp$。反过来，若 $z \in G_k^\perp$，则特征 $\chi := \lambda(z, -)$ 在 G_k 上消失，因而属于限制映射 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(G_k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的核。该核的阶为 $|\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})|/|\mathrm{Hom}(G_k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})| = |G|/|G_k|$。另一方面，对任意 $\psi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，特征$2^k\psi$ 在 G_k 上消失，因为当 $2^k y = 0$ 时，$(2^k\psi)(y) = \psi(2^k y) = 0$。因此$2^k\,\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 包含于该核。由于 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是有限 2-群，其 2^k 阶挠元典范地同构于 $\mathrm{Hom}(G_k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，因此像 $2^k\,\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的阶也为 $|G|/|G_k|$。所以该核恰为 $2^k\,\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。应用伴随同构 ad_λ: $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，得到 $G_k^\perp = 2^k G$，从而证明 (5.4)。

因此 $2^{k-1}x \in 2^k G$，所以存在 $w \in G$，使得 $2^{k-1}x = 2^k w$，即 $2^{k-1}(x - 2w) = 0$。因此 $x - 2w \in G_{k-1}$，所以 $x \in G_{k-1} + 2G$。最后，由于 $x \in G_k$，我们有

$$0 = 2^k x = 2^{k+1}w + 2^k(x - 2w) = 2^{k+1}w,$$

因为 $x-2w \in G_{k-1}$ 意味着 $2^k(x-2w) = 0$。因此 $w \in G_{k+1}$，所以 $x \in G_{k-1} + 2G_{k+1}$，这意味着 $\bar{x} = 0$ 在 $P_k(G)$ 中。□

在 $\mathbb{F}_2$中，非奇异对称双线性形式分为两种性质截然不同的类型：交错与非交错。这种二分与基的选取无关，并且可以用层形式的特征元清晰地表达（参见 [16,§1]）。

定义 5.3（特征元）。设 (V, b) 是一个有限维$\mathbb{F}_2$–向量空间，并配备了一个非奇异对称双线性形式。函数 $q\colon V \to \mathbb{F}_2$, $q(v) := b(v,v)$ 是 $\mathbb{F}_2$–线性的。特征元$c(b) \in V$是满足下式的唯一元素

$$b\big(c(b), v\big) = q(v) = b(v,v) \qquad \text{for all } v \in V.$$

对于一个 2–主链接配对 (G, λ)，我们记 $c_k(G,\lambda) := c(b_k) \in P_k(G)$。

引理 5.4. 对于 b 上的任意双线性形式 $\mathbb{F}_2$，映射 $q(v) = b(v,v)$ 是$\mathbb{F}_2$–线性的。此外，b 是交错的（即对所有 v，都有 $b(v,v) = 0$），当且仅当$c(b) = 0$。

证明。对于 $u, v \in V$，由双线性可得

$$q(u+v) = b(u+v, u+v) = b(u,u) + b(u,v) + b(v,u) + b(v,v).$$

由于 b 是对称的且 $\mathrm{char}(\mathbb{F}_2) = 2$，我们有 $b(u,v)+b(v,u) = 2b(u,v) = 0$，因此 $q(u+v) = q(u) + q(v)$。此外，对于 $\alpha \in \mathbb{F}_2$，$q(\alpha v) = \alpha^2 q(v) = \alpha q(v)$，所以 q是线性的。

如果 $c(b) = 0$，那么对于所有 v，$b(v,v) = b(c(b)\ v) = 0$，所以 b是交错的。反过来，如果 b 是交错的，那么 $q = 0$，且定义方程 $b(c(b)\ v) = 0$对所有 v 都成立；由 b的非奇异性可得 $c(b) = 0$。□

定义 5.5（在 $p = 2$处比较 Type A 与 Type E）。设 (G, λ) 为 2-primary，且设 $k \geq 1$。我们称第 k 层为$Type\ E$，如果 $c_k(G,\lambda) = 0$；等价地，如果 b_k 是交错的。否则，我们称其为$Type\ A$。

这一术语的由来是下述标准形：Type E 层具有典范的双曲（辛）基，而 Type A 层具有标准正交基。

5.2. 在 $\mathbb{F}_2$ 上的标准形与双曲型标记。我们记录 $\mathbb{F}_2$ 上非奇异对称双线性形式的完整分类，并给出一种便于后续作出典范选择的证明。

命题 5.6（交错情形：辛标准形）。设 (V, b) 是 $\mathbb{F}_2$ 上的非退化对称双线性空间。若 b 是交错的，则维数$_{\mathbb{F}_2} V$ 为偶数，且存在一组基

$$e_1, f_1, \dots, e_m, f_m \qquad (m = \tfrac{1}{2}\dim V)$$

使得

$$b(e_i, e_j) = b(f_i, f_j) = 0, \qquad b(e_i, f_j) = \delta_{ij}.$$

等价地， b 的格拉姆矩阵是 m 个双曲矩阵 $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 的直和。

证明。由于 b 是非奇异的， $V \neq 0$ 意味着存在 v、 $w \in V$ ，使得$b(v,w) = 1$。由于 b是交错的， $b(v,v) = b(w,w) = 0$，而 $U = \langle v$、 $w\rangle$ 的张成空间具有格拉姆矩阵 H。特别地， U 是非奇异的，因此$V = U \oplus U^{\perp}$和 b在 $U^{\perp}$上限制为一个非奇异交错形式。事实上，如果 $x \in U^{\perp}$满足对所有 $y \in U^{\perp}$都有 $b(x,y) = 0$，那么 $b(x, \cdot) = 0$在整个 V上成立（因为还有 $b(x,U) = 0$），故由非奇异性可得 $x = 0$。

对dim V进行归纳，在 $U^{\perp}$上得到一组辛基；添上(v, w)即可得到所需的基。特别地，$\dim V = 2m$ 为偶数。□

命题 5.7 （非交错情形：标准正交标准形）。 设（V, b）是 $\mathbb{F}_2$ 上的非退化对称双线性空间。若 b 是非交错的，则存在一组基 $v_1, \ldots, v_n$ （其中 $n =$维数 V），使得

$$b(v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

等价地， b 的格拉姆矩阵是单位矩阵 I_n。

证明。 由于 b 是非交错的，存在 $v_1 \in V$，使得 $b(v_1, v_1) = 1$。令

$$W := \{x \in V \mid b(v_1, x) = 0\}.$$

于是 W 是一个余维一子空间，并且 $v_1 \notin W$ ，因为 $b(v_1, v_1) = 1$。因此 $V = \langle v_1\rangle \oplus W$。我们断言 $b|_W$ 是非奇异的：若 $x \in W$ 满足对所有 $y \in W$都有$b(x, y) = 0$，则同样有 $b(x, v_1) = b(v_1, x) = 0$，因此 $b(x, \cdot) = 0$ 在V 上成立，从而 $x = 0$。

现在对 $(W, b|_W)$ 使用归纳法，得到 W 的标准正交基 $v_2, \ldots, v_n$。于是， V 的标准正交基为 $v_1, \ldots, v_n$ 。□

在典范 2-主标准形中，命题 5.6是 类型 E （双曲）块的代数来源。

定义 5.8 （双曲链接块）。 对于 $k \geq 1$，记 $\mathrm{E}(2^k)$ 为 $(\mathbb{Z}/2^k) \oplus (\mathbb{Z}/2^k)$ 上的 2-primary 链接配对，其格拉姆矩阵为

$$\frac{1}{2^k}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们将 $\mathrm{E}(2^k)$ 称为层级为 2^k 的双曲（类型 E）块。

5.3. **2 处类型** A 层的**行列式细化**。类型 A层对应于 b_k 上的非交错形式 $P_k(G)$。在 $\mathbb{F}_2$ 上，根据命题 I_n ，层形式已被刚性地确定为5.7。然而，对于链接配对，必须追踪该层如何在分母 2^k处实现。这正是行列式平方类作为一种方便的典范细化发挥作用之处。

我们解释齐次情形下的不变量，这正是我们的典范模式所记录的情形。设 $G \cong (\mathbb{Z}/2^k)^n$ ，并记

配对 λ 在某个 $\mathbb{Z}/2^k$–基下由一个格拉姆矩阵表示

$$\Lambda = \frac{1}{2^k} C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \qquad C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}),$$

其中 C 在模 2^k 意义下定义良好，且在 $\mathbb{Z}/2^k$ 上可逆（等价地，$\det(C)$ 是奇数）。

引理 5.9（行列式平方类定义良好）。设 $k \geq 2$，并设 $C, C' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ 是两个整格拉格姆矩阵，它们分别相对于两个不同的 $\mathbb{Z}/2^k$–基表示 $(\mathbb{Z}/2^k)^n$ 上的同一链接配对。那么，对于某个奇单位 u，$\det(C') \equiv \det(C) \cdot u^2 \pmod{2^k}$。特别地，$\det(C)$ 在 $(\mathbb{Z}/2^k)^\times/((\mathbb{Z}/2^k)^\times)^2$ 中的类是一个等距不变量。

证明。一次 $\mathbb{Z}/2^k$–基变换由某个 $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/2^k)$ 给出，而格拉姆矩阵在合同变换下变为：$C' \equiv U^T C U \pmod{2^k}$。取行列式得

$$\det(C') \equiv \det(C)\,\det(U)^2 \pmod{2^k}.$$

由于 $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/2^k)$，$\det(U)$ 是模 2^k 的奇单位，从而该断言在 $u = \det(U)$ 下成立。□

为使这一细化显式化，识别奇单位的平方类是有用的。

引理 5.10（模 2^k的平方）。对于 $k = 2$，$(\mathbb{Z}/4)^\times$ 中的每个平方都同余于 1（模 4）。对于 $k \geq 3$，$(\mathbb{Z}/2^k)^\times$ 中的每个平方都同余于1（模 8），并且约化映射

$$(\mathbb{Z}/2^k)^\times/((\mathbb{Z}/2^k)^\times)^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}/8)^\times = \{1,3,5,7\}$$

是一个双射。

证明。对于 $k = 2$，$(\mathbb{Z}/4)^\times = \{1,3\}$ 与 $3^2 \equiv 1$（模 4）。

对于 $k \geq 3$，将一个奇整数写成 $u = 1 + 2a$。则

$$u^2 = (1+2a)^2 = 1 + 4a(1+a) \equiv 1 \pmod{8},$$

因此，每个平方数模 8 都同余于 1。反过来，如果 $u \equiv 1$（模 8），标准提升表明 u 模 2^k存在平方根；一种显式方法是逐步求解 $(1+2x)^2 \equiv u$（模 2^k），其中 k，利用 $(1+2x)^2 \equiv 1 + 4x$（模 8），并在每一步通过调整 x模 2^{k-2}来修正。（例如，参见 [26,第 V 章 §1]，了解局部域中单位群的一般结构。）因此，平方子群恰好是模 8 同余于 1 的同余类。

最后，如果 $u \equiv v$（模 8），那么 $uv^{-1} \equiv 1$（模 8），所以 uv^{-1} 是一个平方数；因此，u 和 v 定义相同的平方类。$\{1,3,5,7\}$中的不同剩余类对应不同的平方类，故得出所述双射。□

定义 5.11（A型的行列式精化）。设 (G, λ) 是 2–主的，并假设第 k 层是 A 型，且具有 $k \geq 2$。选择挠元部分的一个齐次分裂，将相应的

格拉姆矩阵表示为上文的 $\Lambda = \frac{1}{2^k} C$。我们将行列式精化 $\det_k(G, \lambda)$ 定义为

$$\det(C) \bmod 4 \quad (k = 2), \qquad \text{or} \qquad \det(C) \bmod 8 \quad (k \geq 3),$$

视为 $(\mathbb{Z}/4)^\times$ 或 $(\mathbb{Z}/8)^\times$中的一个元素。

根据引理 5.9 和引理 5.10，$\det_k(G, \lambda)$ 与选择无关。这是我们的典范模式中为 Type A 层记录的细化；它是在后续阶段构造典范对角代表元时保留所需奇单位数据的实用方法。

5.4. **Type E 层的高斯和精化。** Type E 层（即$c_k(G, \lambda) = 0$）存在一种二次精化，其高斯和给出一个取值于 $\mathbb{Z}/8$的数值不变量。这是链接配对 [16, §2] 的 2-主分类中的经典内容，并且与布朗不变量以及二次高斯和 [8]中出现的相位密切相关。

固定 $k \geq 1$。考虑商群

$$H_k(G) := G/G_k,$$

它恰好保留 G 中指数严格大于 2^k的部分。当 $c_k(G, \lambda) = 0$ 时，我们可以在 $H_k(G)$上构造一个二次函数。

命题 5.12（关于 H_k上的二次精化G）。假设 $c_k(G, \lambda) = 0$（等价地，第 k 层为 *Type* E）。定义

$$q_k \colon H_k(G) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad q_k(\bar{x}) := 2^{k-1}\lambda(x, x),$$

其中，$\bar{x}$ 是 $x \in G$ 模 G_k所得的类。于是，q_k 定义良好并满足 s

$$q_k(\bar{x} + \bar{y}) - q_k(\bar{x}) - q_k(\bar{y}) = 2^k \lambda(x, y) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{5.5}$$

对所有 $\bar{x}$、$\bar{y} \in H_k(G)$。

证明。令 $x' \equiv x$（模 G_k），于是 $x' = x + u$且 $u \in G_k$。由双线性和对称性，

$$\lambda(x', x') = \lambda(x, x) + 2\lambda(x, u) + \lambda(u, u).$$

两边乘以 2^{k-1}，得到

$$2^{k-1}\lambda(x', x') = 2^{k-1}\lambda(x, x) + 2^k\lambda(x, u) + 2^{k-1}\lambda(u, u).$$

由于 $u \in G_k$，特征 $y \mapsto \lambda(u, y)$的阶整除 2^k，因此 $2^k\lambda(x, u) \in \mathbb{Z}$。为说明 $2^{k-1}\lambda(u, u) \in \mathbb{Z}$，注意到 $u \in G_k$决定了 $\bar{u} \in P_k(G)$，并且

$$b_k(\bar{u}, \bar{u}) = (2^k\lambda(u, u)) \bmod 2.$$

由于 $c_k(G, \lambda) = 0$，根据引理 5.4，b_k是交错形式，因此 $b_k(\bar{u}, \bar{u}) = 0$。于是 $2^k\lambda(u, u)$是偶整数，即 $\lambda(u, u) \in \frac{1}{2^{k-1}}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$，且 $2^{k-1}\lambda(u, u) \in \mathbb{Z}$。因此，$q_k(\bar{x})$ 与提升 x 的选择无关。

最后，对于由 x、$y \in G$ 表示的 $\bar{x}, \bar{y} \in H_k(G)$，我们计算$q_k(\bar{x}+\bar{y}) - q_k(\bar{x}) - q_k(\bar{y}) = 2^{k-1}\big(\lambda(x+y, x+y) - \lambda(x, x) - \lambda(y, y)\big) = 2^k\lambda(x, y)$，其结果为（5.5）。 □

定义 5.13（归一化高斯和与 u_k–不变量）。设$c_k(G,\ \lambda)\ =0$，并令 q_k 如命题 5.12中所述。定义（复）高斯和

$$\mathrm{GS}_k(G,\lambda)\ :=\ \sum_{\bar{x}\in H_k(G)} \exp\bigl(2\pi i\, q_k(\bar{x})\bigr).$$

Set

$$\gamma_k(G,\lambda)\ :=\ |H_k(G)|^{-1/2}\,\mathrm{GS}_k(G,\lambda)\in\mathbb{C}.$$

根据 [16, 推论 2.1]（另见 [8, §2]），$\gamma_k(G,\ \lambda)$ 是一个八次单位根。我们将 $u_k(G,\ \lambda)\in\mathbb{Z}/8$ 定义为

$$\gamma_k(G,\lambda)=\exp\Bigl(\frac{\pi i}{4}\,u_k(G,\lambda)\Bigr).$$

若 $c_k(G,\ \lambda)\neq 0$（类型 A），则按约定定义 $u_k(G,\ \lambda)\ =\infty$。

我们记录以下三条稍后会反复用到的基本性质：不变性、可加性，以及在双曲块上的取值。

引理 5.14（等距不变性）。若 $f\colon(G,\lambda)\ \to(G',\lambda')$ 是 *2–primary* 链接配对的一个等距映射，则对每个 $k\geq 1$，$c_k(G,\lambda)\ =0$ 成立当且仅当 $c_k(G',\lambda')\ =0$成立；此时 $u_k(G,\lambda)\ =u_k(G',\lambda')$。

证明。等距映射 f 保持滤过 G_k，并诱导一个同构$P_k(G)\ \cong P_k(G')$，将 b_k 映到 b'_k。因此，b_k 是交错的当且仅当 b'_k 是交错的，即 $c_k=0$ 当且仅当 $c'_k=0$。

假设 $c_k=0$。那么 f 也诱导一个同构 $H_k(G)=G/G_k\cong G'/G'_k=H_k(G')$。对于由 $x\in G$表示的 $\bar{x}\in H_k(G)$，我们有

$$q'_k(f(\bar{x}))=2^{k-1}\lambda'(f(x),f(x))=2^{k-1}\lambda(x,x)=q_k(\bar{x}),$$

因此高斯和逐项相等，从而 u_k 也相等。 □

引理 5.15（可加性）。设 (G,λ) 和 (G',λ') 是2–*primary* 链接配对，并考虑它们的正交和。若 $c_k(G,\lambda)\ =c_k(G',\lambda')\ =0$，则 $c_k(G\oplus G',\lambda\oplus\lambda')\ =0$ 以及

$$u_k(G\oplus G',\lambda\oplus\lambda')\equiv u_k(G,\lambda)+u_k(G',\lambda')\pmod 8.$$

证明。在层级上，$P_k(G\oplus G')\ \cong P_k(G)\ \oplus P_k(G')$，且 b_k 分裂为正交和；交替性在正交和下得以保持，因此$c_k=0$ 对于该和成立。

假设两个直和项上均有 $c_k=0$，则有 $H_k(G\oplus G')\ \cong H_k(G)\ \oplus H_k(G')$，并且二次函数 q_k 相加。因此高斯和可分解为乘积：

$$\mathrm{GS}_k(G\oplus G')=\mathrm{GS}_k(G)\cdot\mathrm{GS}_k(G'),$$

并且按 $|H_k|^{-1/2}$ 进行的归一化也是可乘的。因此 γ_k 相乘，相应的指数模 8 相加。□

引理 5.16（双曲块的相位是平凡的）。对于 E（2）在 $(\mathbb{Z}/2)^2$（定义 *5.8*，其中 $k=1$），有 u_1（E（2））$\equiv 0$（模 8）。

证明。设 $G=(\mathbb{Z}/2)^2$ 的格拉姆矩阵为 $\Lambda=\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$。于是 $G_1=G$，因此 $H_1(G)=G/G_1$ 是平凡群，高斯和只包含一项，其值等于 1。因此 $\gamma_1=1=\exp(\pi i\cdot 0/4)$，所以 $u_1\equiv 0$。□

5.5. **总结：Type E 及其细化如何纳入典范模式**。对于奇素数，局部规范化由层形式行列式的平方类决定，如 Wall 对角化和 Kawauchi–Kojima 不变量所示 [30, 16]。在素数 2 处，情况分为以下两类：

(1) 第 k 层形式 b_k 是交错的，当且仅当其特征元 c_k 为零；这就是 Type E（定义 5.5），而指数一约化 $P_k(G)$ 存在辛基（命题 5.6），故称为“双曲”。在这种情况下，高斯和相位$u_k\in\mathbb{Z}/8$（定义 5.13）是可定义且可加的（引理 5.15）。(2) 若 $c_k\neq 0$（Type A），则指数一约化是非交错的，且层形式必为 $\mathbb{F}_2$ 上的正交归一形式（命题 5.7）。要在分母 2^k处构造典范代表，必须保留行列式平方类。按照引理 5.10，我们将其记录为$k=2$ 的 det mod4 和 $k\geq 3$ 的 det mod8（定义 5.11）。

特别地，A/E 二分性与高斯精化（在可用时）一起恢复了 Kawauchi–Kojima a_k 的 2-主不变量[16, 推论 2.1、定理 4.1]，，而行列式精化则在奇型层的对角实现中提供了一个典范选择。这正是步骤 A 的典范输出中以类型 E 块（双曲）和 2-主精化形式打包的信息。

6. The TQFT dictionary: realizing tokens as TMF-modules

步骤 A 为任意对称整数手术矩阵 A 关联一个典范令牌包 $T=\mathrm{Canon}(A)\in\mathrm{Tok}$，其中编码自由秩 $b_1(A)$ 以及挠链接配对的等距类（$\mathrm{Tor}(G(A))$ λ_A），其中$G(A)=$余核(A)。本节旨在将这一边界标签转化为 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$ 中的一个典范对象，并使其与 Gukov–Krushkal–Meier–Pei 的 TMF 值 $(3+1)$–维拓扑量子场论 [12]相容。

具体而言，GKMP 理论将一个具有 $\partial W=M$ 的单连通边界 4-流形 W 赋予一个对象

$$Z_{\mathrm{TMF}}(M;W)\;:=\;L_{b(W)}\big[3b_+(W)-2b_-(W)\big]\in\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}),$$

并证明其等价类仅取决于边界 M，但一般并非在典范等价意义下如此（见 [12, §7.2]）。这里$b(W)$ 表示 $H_2(W;\mathbb{Z})$ 上的交形式，而 $L_{b(W)}$ 是 §5] 中与整对称双线性形式 $b(W)$ 相关联的 TMF 模。对我们而言，关键在于 L_b 仅取决于 b的稳定 同构类，因此我们可以将手术矩阵 A 替换为任意稳定合同代表。我们利用这一灵活性来选取一个典范的 代表元

矩阵 $B(T)$ 仅取决于令牌包 T，并将由此得到的输出打包为一个显式实现函子

$$\mathcal{R} : \mathrm{Tok} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}).$$

6.1. **实现函子 $\mathcal{R}$。**

判别式数据。 令 $B \in M_n(\mathbb{Z})$ 为一个对称整矩阵，并令$G_B :=$ 余核$(B : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n)$。 如果 $\det(B) \neq 0$，那么 G_B 是有限的，且诱导出的非奇异链接配对为

$$\lambda_B([x],[y]) \;:=\; x^{\mathsf{T}} B^{-1} y \mod \mathbb{Z} \qquad (x, y \in \mathbb{Z}^n).$$

如果 $\det(B) = 0$，那么 G_B 具有秩为

$$b_1(B) \;:=\; \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}} \ker(B) \;=\; \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\big(G_B / \operatorname{Tor}(G_B)\big),$$

且挠子群 $\operatorname{Tor}(G_B)$ 带有一个典范的非奇异链接配对 $\lambda_B : \operatorname{Tor}(G_B) \times \operatorname{Tor}(G_B) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，如备注 2.5所述。（等价地，可以分离出自由直和项，并将（2.1）应用于一个非奇异分块；参见 [16, §1]。）

由令牌包得到的典范矩阵。回忆一下，令牌包 $T \in \mathrm{Tok}$ 编码了一对的等距类

$$\big(\operatorname{Tor}(G_T), \lambda_T\big) \qquad \text{together with an integer } b_1(T) \geq 0,$$

其中 $\operatorname{Tor}(G_T)$ 是一个有限阿贝尔群，而 λ_T 是一个非奇异链接配对。在附录 D 中，我们为每个本原局部令牌 τ固定了一个具体的对称整矩阵 $B(\tau)$，用以表示相应的局部链接形式（并固定了分块直和的排序约定）。对于一般的令牌包 T，我们通过以下分块直和定义其关联的典范矩阵

$$B(T) \;:=\; (0)^{\oplus b_1(T)} \;\oplus\; \bigoplus_{\tau \in T} B(\tau), \tag{6.1}$$

其中 (0) 表示 1×1 零矩阵，且对 $\tau \in T$的直和按 Tok 定义中规定的先按素数、再按层级排序进行。

根据构造，

$$b_1\big(B(T)\big) = b_1(T) \qquad \text{and} \qquad \big(\operatorname{Tor}(G_{B(T)}), \lambda_{B(T)}\big) \cong \big(\operatorname{Tor}(G_T), \lambda_T\big).$$

定义 $\mathcal{R}$。 定义实现函子

$$\mathcal{R}(T) \;:=\; L_{B(T)}\big[\,3b_+\big(B(T)\big) - 2b_-\big(B(T)\big)\,\big] \;\in\; \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}), \tag{6.2}$$

其中，$b_\pm(B)$ 表示 $B \otimes \mathbb{R}$ 的正/负特征值数量（零值既不计入 b_+，也不计入 b_-）。这种归一化正是由 GKMP 态空间公式所决定的。

为将 $\mathcal{R}(\mathrm{Canon}(A))$ 与 $Z_{\mathrm{TMF}}(M(A))$ 等同，尚需的输入是一个代数陈述：整对称矩阵的稳定合同类由不变量 (b_1, λ) 决定。

稳定合同由 (b_1, λ)分类。 我们提炼出所使用的精确形式。

定义 6.1（Kirby 稳定合同）。 若存在整数 r、 s、 r'、 $s' \geq 0$ 以及一个幺模矩阵 P，使得两个对称整矩阵A和 A'满足

$$P^{\mathsf{T}}\big(A \oplus I_r \oplus (-I_s)\big)P \;=\; A' \oplus I_{r'} \oplus (-I_{s'}).$$

等价地， A 可以通过有限次整数合同变换（柄滑动）以及爆破和收缩操作（添加和删除 ± 1直和项）变换为 A'。

命题 6.2（链接矩阵的稳定分类）。 设 A、 A' 为对称整矩阵。以下条件等价：

（*a*） A和 A' 按照定义*6.1*的意义是 ***Kirby*** 稳定合同的。（*b*）有 b_1（A）$= b_1$（A'），且存在一个挠链接配对之间的等距

$$\big(\mathrm{Tor}(G(A)), \lambda_A\big) \;\cong\; \big(\mathrm{Tor}(G(A')), \lambda_{A'}\big).$$

证明。（a）$\Rightarrow$（b）。整数合同变换通过同构ϕ_P（$[x]$） $= [P^{\mathsf{T}}x]$ 保持余核 coker(A)（参见命题 2.4（1））， 且挠配对保持不变。此外， rk ker(A) 是一个合同不变量。对于 ± 1 稳定化， 有

$$G(A \oplus (\pm 1)) \cong G(A) \oplus \mathrm{coker}(\pm 1) \cong G(A),$$

因此 b_1 且挠链接配对保持不变。

(b)$\Rightarrow$(a)。设 $b = b_1(A) = b_1(A')$。根据幺模合同，我们可以像注 2.5 中那样分出核，并将 A 和 A' 替换为分块形式$0^{\oplus b} \oplus A_{\mathrm{red}}$ 和 $0^{\oplus b} \oplus A'_{\mathrm{red}}$，其中 det($A_{\mathrm{red}}$)、det($A'_{\mathrm{red}}$) $\neq 0$。由于幺模合同属于 Kirby 稳定合同的生成元，只需处理非奇异块。在 Tor coker(A) $\cong$coker(A_{red}) 和 Tor coker(A') $\cong$ coker(A'_{red}) 的同一对应下，配对 λ_A 和 $\lambda_{A'}$ 与由 A_{red} 和 A'_{red}确定的整格所关联的判别配对一致。

在这个非奇异情形下，蕴含关系 (b)$\Rightarrow$(a) 正是关于柄滑动和爆破的链接矩阵稳定分类：两个对称链接矩阵能够通过一系列幺模合同和 ± 1 稳定化相互转换，当且仅当它们诱导出等距的挠链接配对。Murakami–Ohtsuki–Okada 在 [31, 命题 2.4]中证明了这一点。（对于倾向于纯代数表述的读者，可以将挠链形式重新表述为整格的判别配对；例如参见 Milnor–Husemoller [23] 或 Nikulin [24]。）

由于每个对称整矩阵都可以作为 S^3 中某个带框架链环的链接矩阵出现，因此所引命题适用于当前的代数表述。□

命题 6.2 正是下面字典定理原始证明中缺失的精确输入：它将对“稳定

分类”的非正式援引提升为一个自包含的陈述，并明确给出稳定合同关系的生成元。

6.2. **将** $Z_{\mathrm{TMF}}(M)$ **识别为** $\mathcal{R}(\mathrm{Canon}(A))$。

定理 6.3 (Token 实现与 GKMP 状态空间一致)。 设A 为一个对称整数手术矩阵，且 $M = M(A)$ 为由 A 给出的定向闭3维流形。令 $T := \mathrm{Canon}(A) \in \mathrm{Tok}$。则在$\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$中存在一个等价

$$Z_{\mathrm{TMF}}(M) \;\simeq\; \mathcal{R}(T).$$

特别是，复合赋值

$$A \;\longmapsto\; T = \mathrm{Canon}(A) \;\longmapsto\; \mathcal{R}(T)$$

在 *Kirby* 变换（柄滑动和 ± 1 爆破/爆破消去）下保持不变。

证明。 令 $W(A)$ 表示交矩阵为 A 且边界为 M的单连通 2-手柄体。根据 GKMP 态空间的定义 [12, §7],

$$Z_{\mathrm{TMF}}(M) \;\simeq\; Z_{\mathrm{TMF}}(M; W(A)) \;=\; L_A\big[\,3b_+(A) - 2b_-(A)\,\big].$$

另一方面，根据步骤 A 的构造，令牌包 T =Canon(A) 精确记录了这一对数据：$b_1(A)$，$(\mathrm{Tor}(G(A))\ \lambda_A)$。典范矩阵 $B(T)$ 在（6.1）中定义，且满足

$$b_1\big(B(T)\big) = b_1(A), \qquad \big(\mathrm{Tor}(G_{B(T)}), \lambda_{B(T)}\big) \cong \big(\mathrm{Tor}(G(A)), \lambda_A\big).$$

因此，命题 6.2 表明 A 和 $B(T)$ 在 Kirby 稳定合同意义下等价。GKMP 构造恰好在以下这些操作下保持稳定：

- 整数合同对应于改变 $H_2(W;\mathbb{Z})$ 的基，因此不会改变双线性形式的同构类，并使L_b 在等价意义下保持不变；
- ± 1 稳定化通过 [12, 引理 5.7], 中所述的移位改变 L_b ，而归一化 $L_b[\,3b_+ - 2b_-\,]$ 在这种稳定化下保持不变。

沿着从 A 到 $B(T)$ 的稳定合同链进行传递，因而得到

$$L_A\big[\,3b_+(A) - 2b_-(A)\,\big] \;\simeq\; L_{B(T)}\big[\,3b_+(B(T)) - 2b_-(B(T))\,\big] \;=\; \mathcal{R}(T),$$

这就是所需的识别。Kirby 不变性随之成立，因为步骤 A 按构造具有 Kirby 不变性，而稳定合同实现了 Kirby 变换对矩阵产生的代数效应。□

备注 6.4（双曲块的模形式／几何解读）。 2×2双曲矩阵 $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 在 2–初交替部分（即我们的 Type E 标记）中扮演着特殊角色。在 GKMP 构造中，双曲直和项与万有椭圆曲线的几何，以及庞加莱线丛在傅里叶–村井型变换下的行为密切相关（参见 [12, §5]）。就我们而言，实际结果是，Type E部分在下文的组装公式中具有一种尤为简洁的张量积描述。

6.3. **组装公式**。 一个 tokenpackage T 典范地分解为其自由部分及其 p–主部分：

$$T \;=\; \big(b_1(T),\; T_{(2)},\; T_{(3)},\dots\big),$$

其中，每个 $T_{(p)}$ 都是素数 p 处本原局部标记的多重集。由于$B(T)$ 被定义为矩阵 $B(\tau)$ 的分块直和，实现 $\mathcal{R}(T)$ 具有逐素数张量分解。

定理 6.5 （从令牌包组装）。 对于任意令牌包$T \in \mathrm{Tok}$ ，在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$ 中存在典范等价

$$\mathcal{R}(T) \;\simeq\; Z_{\mathrm{TMF}}(S^2\times S^1)^{\otimes b_1(T)} \otimes \bigotimes_{p} \bigotimes_{\tau\in T_{(p)}} \mathcal{R}(\tau),$$

其中 $\mathcal{R}$（τ） 是一个本原局部令牌的实现，并且张量积取在对称幺半范畴 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$ 中。

证明。 根据定义（6.1）， B（T）是一个分块对角和

$$B(T) \;=\; (0)^{\oplus b_1(T)} \;\oplus\; \bigoplus_{p} \bigoplus_{\tau\in T_{(p)}} B(\tau).$$

GKMP 构造关于形式的正交直和是对称幺半的：存在典范等价 $L_{b\oplus b'} \simeq L_b \otimes L_{b'}$ ，并且归一化位移在 $b_\pm$ 中是可加的。将其反复应用于上述 $B(T)$ 的分解，得到

$$L_{B(T)}\big[\,3b_+(B(T)) - 2b_-(B(T))\,\big] \;\simeq\; L_{(0)}^{\otimes b_1(T)} \otimes \bigotimes_{p} \bigotimes_{\tau\in T_{(p)}} L_{B(\tau)}[\cdots].$$

最后， $L_{(0)}[0] \simeq Z_{\mathrm{TMF}}(S^2\times S^1)$ 由 $S^2\times S^1$ (参见 [12, §7]) 的态空间 GKMP 计算得出，而剩余的张量因子按定义恰为$\mathcal{R}(\tau)$（见6.2）。□

注6.6（典范标记为何重要）。定理6.5 应与定理 6.3一并理解。一个闭三维流形有许多 Kirby 等价手术表示，因此有许多不同的矩阵表示同一个（b_1, λ）。典范令牌包 $T = \mathrm{Canon}(A)$ 为边界标签提供了内在坐标系，而 $B(T)$ 则提供了一个优选稳定代表矩阵。这种刚性在之后比较态空间之间的协边映射时很有用：它使我们能够将关于函子性的疑问归结为在一组固定局部生成元上的验证。

7. Hopf elements η and ν

§6 的实现定理将GKMP TMF 态空间与配边映射用显式代数模型加以表达。在最简单的秩一情形中，所得公式涉及稳定茎中的经典霍普夫元素。本节的目的是在我们的归一化

约定下，确定该理论在两个基本闭 4 维流形上的取值，并记录随后将用到的所得结构常数。

我们用 $\eta \in \pi_1\mathbb{S}$ 和 $\nu \in \pi_3\mathbb{S}$ 表示通常所说的霍普夫元，并用相同的符号表示它们在单位映射 $\mathbb{S} \to$ 下在 π_*TMF 中的像。

定理 7.1。 在 TMF 值 *GKMP* 理论中（采用 *§2* 中固定的归一化约定），有

$$Z_{\mathrm{TMF}}(\mathbb{CP}^2) \;=\; \pm\nu \;\in\; \pi_3\mathrm{TMF},$$

并且，假设 [12, 问题 7。14]，

$$Z_{\mathrm{TMF}}(S^2 \times S^2) \;=\; \eta \;\in\; \pi_1\mathrm{TMF}.$$

对于 ν 的符号歧义，由注记 *7.12*中的约定消除。

证明。 第一个恒等式在§7.1中证明。对于 $\mathbb{CP}^2$， Z_{TMF}($\mathbb{CP}^2$与稳定类 $\Sigma\alpha$ 的 GKMP识别在推论7.11中回顾，而稳定同伦识别 $\Sigma\alpha = \pm\nu$ 在定理 7.10中证明。结合这两者即可得到第二个恒等式。 □

7.1. 在 $S^2\times S^2$ 上的取值及元素 η。 我们通过将 $S^2 \times S^2$ 沿 $S^2 \times S^1$分解为两个基本协边，并在秩一 $b_1 > 0$ 态空间的显式分裂中计算所得的复合，来计算 Z_{TMF}($S^2\times S^2$)。这是首次将 η 作为真正的结构常数出现。

根据 [12], ，有一个反变模 $L^{(0)}$ （自然地附属于出射边界 $S^2 \times S^1$）和一个协变模 L(0)（附属于入射边界），二者由典范等价联系起来。我们以计算 Z_{TMF}($S^2 \times S^2$)所需的形式记录该分裂及相关结构映射。

引理 7.2 （零块的分裂与基变换）。 存在TMF–模等价

$$L^{(0)} \;\simeq\; \mathrm{TMF} \;\oplus\; \mathrm{TMF}[1], \qquad L(0) \;\simeq\; \mathrm{TMF} \;\oplus\; \mathrm{TMF}[-1],$$

以及一个等价

$$\Phi\colon L^{(0)} \xrightarrow{\;\simeq\;} L(0)[1]$$

在上述同一化以及显然的重新排序 $L(0)[1] \simeq$TMF$[1] \oplus$TMF下，该等价由一个矩阵给出

$$\Phi \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \eta \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon \in \{\pm 1\}. \tag{7.1}$$

证明。 这正是 [12, Proposition 6.13] 中构造的秩一 $b_1 > 0$ 分裂和比较映射；所展示的矩阵就是其中确定的显式形式。（由于 $2\eta = 0$ 在 π_1TMF 中，符号 ε 在后续应用中不会起作用。） □

由将 2-手柄附着限制到单位截面所诱导的映射 e: $S^2 \times S^1 \to S^2 \times S^1$ 给出一个协边映射 e^*: $L^{(0)} \to \mathrm{TMF}$，并且存在一个与 0-框架手柄滑动相对应的典范稳定自等价 A: $L^{(0)} \to L^{(0)}$。以下显式公式摘自 [12, Example 8。1]。

引理 7.3 (单位截面与 η–矩阵)。 在分裂 $L^{(0)} \simeq \mathrm{TMF} \oplus \mathrm{TMF}[1]$ 来自引理 7.2的条件下，映射 e^*: $L^{(0)} \to \mathrm{TMF}$ 对应于行向量

$$e^* \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \eta \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

证明。 这是限制映射 e^* 的识别，见 [12, 例 8。1], 用引理 7.2的分裂表示为 □

引理 7.4 (典范自等价)。 在分裂 $L^{(0)} \simeq \mathrm{TMF} \oplus \mathrm{TMF}[1]$, 下，稳定自等价 A: $L^{(0)} \to L^{(0)}$ 由下式给出

$$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & \eta \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon \in \{\pm 1\}. \tag{7.3}$$

证明。 这是例 8. [12, 中所述典范自同构的显式形式。1]同样，符号 ε 对最终的标量计算无关紧要，因为 $-\eta = \eta$。 □

定理 7.5 ($S^2 \times S^2$ 检测 η)。 假设 [12, 问题 7。14], 则 $S^2 \times S^2$ 的 TMF–不变量为

$$Z_{\mathrm{TMF}}(S^2 \times S^2) \;=\; \eta \;\in\; \pi_1 \mathrm{TMF}.$$

证明。 假设 [12, 问题 7.14]。考虑将$S^2 \times S^2$标准分解为沿着 $S^2 \times S^1$拼接的两个 2-手柄协边之并，对应于两个分量均带 0 系数的霍普夫链结基尔比图。将这些协边记为

$$W_0 : \varnothing \longrightarrow S^2 \times S^1, \qquad W_1 : S^2 \times S^1 \longrightarrow \varnothing.$$

于是，根据函子性， $Z_{\mathrm{TMF}}(S^2 \times S^2)$ 是以下映射的复合

$$\mathrm{TMF} \xrightarrow{Z_{\mathrm{TMF}}(W_0)} L^{(0)} \xrightarrow{Z_{\mathrm{TMF}}(W_1)} \mathrm{TMF}.$$

协边映射 $Z_{\mathrm{TMF}}(W_1$在[12, 例 8。1], 中的典范同一下，等于映射的复合 $e^* \circ A$: $L^{(0)} \to \mathrm{TMF}$。利用引理 7.3 和 7.4，我们在分裂 $L^{(0)} \simeq \mathrm{TMF} \oplus \mathrm{TMF}[1]$ 中计算:

$$Z_{\mathrm{TMF}}(W_1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \eta \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \varepsilon & \eta\varepsilon + \eta\varepsilon \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

因为 $2\eta = 0$。

类似地， $Z_{\mathrm{TMF}}(W_0)$ 在 [12, 例 8.1] 中被识别为 e^* 的 TMF–线性对偶（等价地说，是单位截面映射的伴随映射）。在该分裂下，它是列向量

$$Z_{\mathrm{TMF}}(W_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \eta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此，标量 $Z_{\mathrm{TMF}}(S^2 \times S^2) = Z_{\mathrm{TMF}}(W_1) \circ Z_{\mathrm{TMF}}(W_0)$ 为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon\,\eta = \eta,$$

如所声称的（再次利用 $-\eta = \eta$）。 □

7.2. 约化转移与元素 ν。 现在我们转向 $\mathbb{CP}^2$。在 GKMP 理论中，$\mathbb{CP}^2$ 的不变量源自普适 S^1–丛的约化 S^1–转移，而所得的稳定类是 Hopf 元素 ν。我们首先回顾转移的描述，然后给出该稳定同伦类的自洽识别。

令 $\gamma \to \mathbb{CP}^\infty$ 为典范复线丛，并令 $\mathrm{Th}(-\gamma)$ 表示虚丛 $-\gamma$ 的 Thom 谱。按照一种常见约定，可以写作 $\mathbb{CP}^\infty_{-1} := \Sigma^{-1}\mathrm{Th}(-\gamma)$，从而 $\Sigma\mathbb{CP}^\infty_{-1} \simeq \mathrm{Th}(-\gamma)$。下文中，我们直接使用 Thom 谱 $\mathrm{Th}(-\gamma)$，以避免悬挂记录，并使特征类计算更加透明。

引理 7.6（传递的余纤维）。 存在一个谱的余纤维序列

$$\mathrm{Th}(-\gamma) \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty_+ \xrightarrow{\tau} S^{-1},$$

其中 τ 是约化稳定 S^1–传递。

证明。 这是对万有主 S^1–丛 $S^\infty \to \mathbb{CP}^\infty$的 Becker–Gottlieb 转移之余纤维的经典描述：转移的纤维（等价地，悬挂后即为余纤维）是伴随复直线丛的负丛的 Thom 谱。关于等变情形的现代处理见 [13]；另见 [12, 例 8。4]其中给出了 GKMP 理论中所用的特例，以及 [5, 命题 A。11]其中对这一 Thom 类识别作了明确说明。本文只用到余纤维序列的存在性以及 Thom 类的识别，如下文计算所示。 □

限制到 $\mathbb{CP}^2$–骨架，再进一步限制到 $\mathbb{CP}^1 = S^2$，得到一个稳定映射

$$\alpha\colon S^2 = \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{i} \mathbb{CP}^\infty \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty_+ \xrightarrow{\tau} S^{-1}. \tag{7.4}$$

悬挂一次得到 $f := \Sigma\alpha\colon S^3 \to S^0$，因此得到 $\pi_3\mathbb{S}$ 中的一个元素，并由单位得到 $\pi_3\mathrm{TMF}$ 中的一个元素。

7.2.1. 将 $\Sigma\alpha$ 识别为 *Hopf* 元素 ν。 我们通过上同调刻画来识别 $f = \Sigma\alpha$：其余纤维在素数 2 和 3 处的 4 次上都支持非平凡的初级运算。

设 C_f 是 f的余纤维。那么 C_f 是一个具有位于 0 次和 4 次胞腔的双胞腔谱：

$$S^0 \longrightarrow C_f \longrightarrow S^4.$$

用 $\iota \in \tilde{H}^0(C_f;\,\mathbb{F}_p)$ 表示与底胞腔对偶的类，用 $\kappa \in \tilde{H}^4(C_f;\,\mathbb{F}_p)$ 表示与顶胞腔对偶的类。

引理 7.7 （1–线上的检测）。 设 p 是一个素数。若对 $p=2$有 $\mathrm{Sq}^4(\iota) = \kappa \neq 0$，或对 $p=3$有 $\mathcal{P}^1(\iota) = \kappa \neq 0$，则 f 在 $\pi_3\mathbb{S}$ 中的类由素数 p处 *Adams* 滤过 *1* 上的 $\mathrm{Ext}^{1,4}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$ 的生成元检测。

证明。 这是 $\mathcal{A}_p$–模结构 $H^*(C_f;\mathbb{F}_p)$ 与分类该短正合序列的扩张类之间的标准对应

$$0 \to \Sigma^4\mathbb{F}_p \to \tilde{H}^*(C_f;\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p \to 0$$

关于 $\mathcal{A}_p$–模。扩张类属于 $\mathrm{Ext}^{1,4}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$，且恰好是检测 f的 Adams E_2–类；例如参见 [21, 第 7] 章或 [25, 第 2]章。在我们的双胞情形中，当且仅当 ι 上的相关主运算消失时，扩张才是平凡的；等价地，$\mathrm{Sq}^4(\iota)$（分别地，$\mathcal{P}^1(\iota)$）等于顶类 κ。 □

因此，只需证明 Sq^4 和 $\mathcal{P}^1$ 在 ι 的余纤维中（相差一个单位）非平凡作用。我们通过将 C_f 与引理 7.6中的 Thom 谱 $\mathrm{Th}(-\gamma)$ 联系起来来证明这一点。 f

引理 7.8 (Sq^4 非平凡)。 在 $\tilde{H}^*(C_f;\mathbb{F}_2)$ 中，有 $\mathrm{Sq}^4(\iota) = \kappa \neq 0$。

证明。 由引理 7.6，约化转移 τ的纤维（因此，悬挂后其余纤维）是 Thom 谱 $\mathrm{Th}(-\gamma)$。令 $u \in H^{-2}(\mathrm{Th}(-\gamma);\mathbb{F}_2)$ 表示 Thom 类，并令 $x \in H^2(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{F}_2)$ 表示 $c_1(\gamma)$ 的约化。在 Thom 同构下，

$$H^*(\mathrm{Th}(-\gamma);\mathbb{F}_2) \;\cong\; \mathbb{F}_2[x]\cdot u, \qquad |x|=2,\ |u|=-2.$$

Steenrod 平方运算的 Thom 恒等式给出

$$\mathrm{Sq}(u) \;=\; w(-\gamma)\,u,$$

其中 $w(-\gamma)$ 是虚丛 $-\gamma$ 的总 Stiefel–Whitney 类。由于复直线丛有 $w(\gamma) = 1+x$，我们有 $w(-\gamma) = w(\gamma)^{-1} = (1+x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots$ 属于 $\mathbb{F}_2[x]$，因此

$$\mathrm{Sq}^4(u) \;=\; x^2u \;\neq\; 0 \;\in H^2(\mathrm{Th}(-\gamma);\mathbb{F}_2). \tag{7.5}$$

现在将转移构造限制在 $\mathbb{CP}^2$–骨架上，并构造相应的有限 Thom 谱 $\mathrm{Th}(-\gamma|_{\mathbb{CP}^2})$。元素 x^2u在此截断中仍然存在（它对应于顶胞腔）。此外，(7.4) 中的映射 α 是转移在 $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$上的限制，而余纤维 C_f 同构于 $\mathrm{Th}(-\gamma|_{\mathbb{CP}^2})$ 的两胞腔子商，其胞腔分别对应于 u 和 x^2u （这正是 [12, 例 8.4] 中使用的底胞腔提取；另见 [5, §A.2]）。在此同构下，ι 对应于 u 的像（移至 0 次），而 κ 对应于 x^2u 的像（移至 4 次）。因此，等式 (7.5) 可下降为 $\mathrm{Sq}^4(\iota) = \kappa \neq 0$ 属于 $\tilde{H}^*(C_f;\mathbb{F}_2)$。□

引理 7.9 ($\mathcal{P}^1$ 是非平凡的)。 在 $\tilde{H}^*(C_f;\mathbb{F}_3)$ 中有 $\mathcal{P}^1(\iota) = \kappa \neq 0$。

证明。 设 $u \in H^{-2}(\mathrm{Th}(-\gamma);\mathbb{F}_3)$ 为 Thom 类，并设 $x \in H^2(\mathbb{CP}^\infty;\,\mathbb{F}_3)$ 为 $c_1(\gamma)$ 的约化。同样 $H^*(\mathrm{Th}(-\gamma);\mathbb{F}_3) \cong \mathbb{F}_3[x]\cdot u$。对于奇素数 p，Thom 类上的约化幂运算满足一个如下形式的 Thom 恒等式

$$\mathcal{P}(u) \;=\; v(-\gamma)\,u,$$

其中 $v(-\gamma)$ 是模 p 吴类 $-\gamma$；对于复直线丛，有$v(-\gamma) = 1 + x^{p-1} + x^{2(p-1)} + \cdots$(参见例如 [22, §14])。在 $p=3$ 这意味着

$$\mathcal{P}^1(u) \;=\; x^2u \;\neq\; 0 \;\in H^2(\mathrm{Th}(-\gamma);\mathbb{F}_3).$$

如引理 7.8 的证明中所述，类 x^2u 在 $\mathbb{CP}^2$–骨架上存留，并映到 κ 的顶维生成元 $\tilde{H}^4(C_f;\;\mathbb{F}_3)$，而 u 映到底维生成元 ι。因此 $\mathcal{P}^1(\iota) = \kappa \neq 0$。 □

定理 7.10 ($\Sigma\alpha$的识别)。 稳定类 $f = \Sigma\alpha \in \pi_3\mathbb{S}$ 等于$\pm\nu$。等价地，它在 $\pi_3\mathrm{TMF}$ 中的像为 $\pm\nu \in \pi_3\mathrm{TMF}$。

证明。 根据引理 7.8 和7.9，由引理 7.7可知，类 f 在素数 2 和 3 处的亚当斯谱序列的 1–线被检测到。在 $p=2$处，$\mathrm{Ext}^{1,4}_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2\{h_2\}$ 和 h_2 检测到 $\nu \in \pi_3\mathbb{S}$的 2–主分量；在 $p=3$处，$\mathrm{Ext}^{1,4}_{\mathcal{A}_3}(\mathbb{F}_3,\mathbb{F}_3) \cong \mathbb{F}_3\{b_0\}$ 和 b_0 检测到 ν 的 3–主分量（见 [25, 第 2]章）。由于 $\pi_3\mathbb{S} \cong \mathbb{Z}/24$，这已经意味着

$$f \;=\; u\,\nu \qquad \text{for some unit } u \in (\mathbb{Z}/24)^\times. \tag{7.6}$$

为确定单位 u，我们计算复 Adams e–不变量。

回想一下，Adams 利用复 K–理论和稳定映射 [2, §11]的余纤维定义了一个同态 $e\colon\ \pi_{2n-1}\mathbb{S} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。在次数 3 时，该不变量在 J–同态的像上是内射的，事实上有

$$e(\nu) = \pm\frac{1}{24} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{7.7}$$

现在，我们根据约化转移的托姆描述计算 $e(f)$。

令 $x = c_1(\gamma) \in H^2(\mathbb{CP}^\infty;\;\mathbb{Z})$，并令 $e_K(\gamma) = 1 - [\gamma^{-1}] \in K^0(\mathbb{CP}^\infty)$ 表示 K– 理论欧拉类。在陈特征下，有 $\mathrm{ch}\big(e_K(\gamma)\big) = 1 - e^{-x}$。引理 7.6 的余纤维序列将约化转移与该欧拉类逆矩阵的连接映射对应起来。更具体地，限制到 $\mathbb{CP}^2$–骨架并使用 Thom 识别，可以将余纤维 C_f 视为 $\mathbb{CP}^2$ 上 Thom 谱的一个双胞胎商群，因此 $K^0(C_f)$ 中定义 e–不变量的扩张类，在 Thom 同构下对应于类 $e_K(\gamma)^{-1} \in K^0(\mathbb{CP}^2,\mathbb{CP}^1)$。经过陈特征并识别 $H^4(\mathbb{CP}^2,\mathbb{CP}^1;\;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\cdot x^2$后，Adams 的构造在此情形下归结为提取幂级数 $x/(1-e^{-x})$ 中的 4 次项系数；见 [2, §11]。利用伯努利展开

$$\frac{x}{1-e^{-x}} \;=\; 1 + \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2!}x^2 + \cdots \qquad \text{with } B_2 = \frac{1}{6},$$

我们发现， $\mathbb{CP}^2$ 上的 4 次项贡献为 $\frac{B_2}{2!}\ x^2 = \frac{1}{12}x^2$。–Adams–对 J–同态像上复 e–不变量的计算表明，在 3 次情形下，该系数给出

$$e(f) = \pm\frac{B_2}{4} = \pm\frac{1}{24} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{7.8}$$

比较（7.8）与（7.7），并利用 e 是一个同态，我们得出（ u ）中的单位 u 在（7.6）中满足 $u \equiv \pm 1$ （模 24）。因此 $f = \pm\nu$。

最后，沿单位 $\mathbb{S} \to$ TMF 映射，将 f 送至 π_3TMF 中的 $\pm\nu$ ，从而完成此识别。□

推论 7.11 ($\mathbb{CP}^2$ 检测 ν)。 $\mathbb{CP}^2$ 的 TMF 不变量为

$$Z_{\mathrm{TMF}}(\mathbb{CP}^2) \ = \ \pm\nu \ \in \ \pi_3\mathrm{TMF}.$$

更确切地说，在 [12, 例 8.4]，中的识别下，映射$Z_{\mathrm{TMF}}(\mathbb{CP}^2)$ 是来自 $\Sigma\alpha$ 的稳定同伦类在 π_3TMF 中的像，(7.4)。

证明。 将 $Z_{\mathrm{TMF}}(\mathbb{CP}^2)$ 识别为约化转移 τ 的 TMF 线性扩张（因而也识别为 $\Sigma\alpha$ 的类），正是基于 [12, 例 8.4], 中对比 U(1)–等变 TMF 与转移映射的内容；这一理论在 [13]中建立；另见 [5, §A.2] ，其中对本文所用的转移作了自成一体的介绍。定理7.10 进而将 $\Sigma\alpha$ 识别为 $\pm\nu$，推论由此得证。□

注 7.12（固定 ν 的符号）。 若要消除 $\pm$ 的歧义，可以 通过规定 的符号来定义 $\nu \in \pi_3$TMF，使得复合映射（7.4）满足 $\Sigma\alpha = +\nu$。按照此约定，推论 7.11 表述为 Z_{TMF}（$\mathbb{CP}^2$） $=\nu$。

注 7.13（归一化与后续应用）。 上述恒等式确定了秩一部分字典中的剩余选择：元素 η 是控制零块比较映射（7.1）的结构常数，而 ν 是控制 $\mathbb{CP}^2$ 传递描述的稳定类。后续各节中凡是用到显式秩一公式之处，都会默认使用这些对应关系。

8. Rank-one duality

本节单独讨论 [12]的TMF取值理论中基本秩一构件的“时间反演”对偶现象。具体而言， $\mathbb{Z}$ 上的秩一整形式（n）给出一个典范的TMF 模 $L(n)$（经移位规范化），并且我们证明 $L(-n)$是 $L(n)$的移位TMF-线性对偶。我们还在第一个非平凡情形 $n = 2$中，借助 ν–锥给出完全显式的描述，并精确说明可能出现的唯一歧义（一个整体符号，即乘以$\pm 1 \in \pi_0(\mathrm{TMF})^\times$）。

8.1. **对偶、移位与正合三角。**回顾对于 $M \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$，我们记

$$M^{\vee} \;:=\; \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{TMF}}(M, \mathrm{TMF})$$

对于 TMF-线性对偶。我们将反复用到，$(-)^{\vee}$ 是正合的，并将余纤维三角映到（旋转后的）余纤维三角。

引理 8.1. 对于任意TMF–模 M 以及任意整数 d，存在一个典范等价

$$(M[d])^{\vee} \;\simeq\; M^{\vee}[-d] \qquad in\ \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}).$$

证明。这是内部 Hom 与悬挂通常具有的相容性。事实上，根据移位函子的定义伴随关系，我们有自然等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{TMF}}(M[d],\ \mathrm{TMF}) \;\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{TMF}}\big(M,\ \mathrm{TMF}[-d]\big) \;\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{TMF}}(M,\ \mathrm{TMF})[-d],$$

这正是所声称的等价。 □

引理 8.2（三角形的对偶）。设

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \tag{8.1}$$

是$\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$中的一个余纤维三角。那么存在一个典范关联的余纤维三角

$$(A[1])^{\vee} \xrightarrow{h^{\vee}} C^{\vee} \xrightarrow{g^{\vee}} B^{\vee} \xrightarrow{f^{\vee}} A^{\vee}. \tag{8.2}$$

证明。应用正合反变函子 $(-)^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{TMF}}(-, \mathrm{TMF})$ 于余纤维序列（8.1）。在任意稳定范畴中，对余纤维序列应用内部 Hom 函子会得到一个纤维序列；而在稳定范畴中，每个纤维序列都可以典范地旋转为一个余纤维三角。具体而言，取对偶得到一个纤维序列

$$A^{\vee} \xleftarrow{f^{\vee}} B^{\vee} \xleftarrow{g^{\vee}} C^{\vee} \xleftarrow{h^{\vee}} (A[1])^{\vee}.$$

旋转这个纤维序列，得到余纤维三角（8.2）。 □

8.2. **ν-锥模型及 $n = 2$ 的情形。**令 $\nu \in \pi_3(\mathbb{S})$ 表示稳定霍普夫元（依照 [1] 的定义），并令 $\nu \in \pi_3(\mathrm{TMF})$ 表示它在单位映射 $\mathbb{S} \to \mathrm{TMF}$ 下的像。记

$$C_{\nu} \;:=\; \mathrm{cofib}\big(\nu : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^0\big) \tag{8.3}$$

对于 ν–锥（一个带有余纤维序列 $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^0 \to C_{\nu} \to \mathbb{S}^4$ 的有限谱）。

引理 8.3（ν–锥的自对偶性）。存在一个谱等价

$$C_{\nu}^{\vee} \;\simeq\; C_{\nu}[-4], \tag{8.4}$$

其中 $(-)^{\vee} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{S}}(-, \mathbb{S}^0)$ 表示斯潘尼尔–怀特海德对偶。此等价在底胞腔上相差乘以 -1 唯一确定（等价地，相差 $\pi_0(\mathbb{S})^{\times} = \{\pm 1\}$ 的作用）。

证明。 从定义余纤维序列出发

$$\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\nu} \mathbb{S}^0 \longrightarrow C_\nu \longrightarrow \mathbb{S}^4.$$

对偶化得到一个余纤维序列

$$(\mathbb{S}^4)^\vee \longrightarrow C_\nu^\vee \longrightarrow (\mathbb{S}^0)^\vee \xrightarrow{\nu^\vee} (\mathbb{S}^3)^\vee.$$

利用典范同一（$\mathbb{S}^m$）$^\vee \simeq \mathbb{S}^{-m}$，可得

$$\mathbb{S}^{-4} \longrightarrow C_\nu^\vee \longrightarrow \mathbb{S}^0 \xrightarrow{\nu^\vee} \mathbb{S}^{-3}.$$

在标准同一 $\mathbb{S}^{-3} \simeq \Sigma^{-3}\mathbb{S}^0$ 和 $\mathbb{S}^3 \simeq \Sigma^3\mathbb{S}^0$下，映射 $\nu^\vee$表示与 $\pm\nu$相同的稳定同伦类；符号仅取决于将球面与其对偶相识别时所采用的约定。因此， $C_\nu^\vee$（相差一个典范的悬挂 -4）是 $\pm\nu$的余纤维。由于 cofib(ν) $\simeq$ cofib($-\nu$（通过由 -1给出的 $\mathbb{S}^3$ 的自映射），我们得出 $C_\nu^\vee \simeq C_\nu[-4]$。

最后，任意两个这样的同一相差一个与底胞腔 $\mathbb{S}^0 \subset C_\nu$的自同构复合的后复合，因此相差 $\pi_0(\mathbb{S})^\times = \{\pm 1\}$中的一个元素。□

注8.4（“整体符号”的由来）。(8.4)中的唯一不确定性，是基环的单位群对所选的、将可对偶对象与其对偶的某个移位相识别的同一所施加的作用。与 TMF 作 smash 积后，同一现象表现为 $\pi_0(\mathrm{TMF})^\times = \{\pm 1\}$对任意所选等价 $L(2)^\vee \simeq L(2)[4]$ 的作用（见下文命题 8.5 ）。这正是 [12, §6，注 67] 中所记录的“相差一个符号”的不确定性。若希望采用严格的归一化，只需在一个检验案例中固定该等价（例如要求其与锥模型 (8.6)相容）；此后所有同一都由函子性唯一确定。

现在我们专门讨论第一个非平凡的秩一生成元。在 GKMP 构造中，秩一整形式 (2) 决定了一个特定的 TMF 模 $L(2)$，它具有一个余纤维三角（参见 [12, §5.6 和 §6.2]）

$$\mathrm{TMF}[-1] \xrightarrow{\nu} \mathrm{TMF}[-4] \xrightarrow{i_2} L(2) \xrightarrow{p_2} \mathrm{TMF}, \tag{8.5}$$

其中第一个映射是乘以该类的映射 $\nu \in \pi_3$(TMF)。等价地，(8.5) 将 $L(2)$ 识别为一个 TMF 线性 ν余锥：

$$L(2) \;\simeq\; \mathrm{TMF} \wedge C_\nu[-4]. \tag{8.6}$$

命题 8.5 ($n = 2$ 情形下的自对偶)。 存在一个TMF模等价

$$L(2)^\vee \;\simeq\; L(2)[4],$$

在乘以 $\pm 1 \in \pi_0(\mathrm{TMF})^\times$的意义下典范。并且，在此识别下， i_2 和 p_2 在(8.5)中的对偶映射满足

$$p_2^\vee \;=\; i_2[4] \qquad and \qquad i_2^\vee \;=\; p_2[4],$$

再次存在同样的整体符号歧义，如注*8.4*中所述。

证明。利用锥模型（8.6）以及 C_ν 是一个有限谱这一事实，我们计算得：

$$L(2)^\vee \;=\; \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{TMF}}\big(\mathrm{TMF}\wedge C_\nu[-4],\,\mathrm{TMF}\big) \;\simeq\; \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{S}}\big(C_\nu[-4],\,\mathrm{TMF}\big).$$

由于 C_ν 作为谱是可对偶的，$\mathbf{Hom}_{\mathbb{S}}(C_\nu,\ \underline{\mathrm{TMF}}) \simeq \mathrm{TMF}\wedge C_\nu^\vee$，并由引理8.1 可得

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{S}}\big(C_\nu[-4],\,\mathrm{TMF}\big) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{S}}(C_\nu,\mathrm{TMF})[4] \simeq (\mathrm{TMF}\wedge C_\nu^\vee)[4].$$

最后，引理 8.3 给出 $C_\nu^\vee \simeq C_\nu[-4]$，因此

$$(\mathrm{TMF}\wedge C_\nu^\vee)[4] \;\simeq\; (\mathrm{TMF}\wedge C_\nu[-4])[4] \;\simeq\; L(2)[4],$$

这就证明了所声称的自对偶性。

关于 i_2 和 p_2的陈述，应用引理 8.2 于余纤维三角（8.5）。所得的对偶三角具有如下形式

$$\mathrm{TMF} \xrightarrow{p_2^\vee} L(2)^\vee \xrightarrow{i_2^\vee} \mathrm{TMF}[4] \longrightarrow \mathrm{TMF}[1].$$

在刚建立的识别 $L(2)^\vee \simeq L(2)[4]$ 下，这个三角与原三角（8.4）平移 $[4]$ 后的形式一致（仅差注记8.5所述的整体单位模糊性），并且识别 $p_2^\vee = i_2[4]$ 和 $i_2^\vee = p_2[4]$由此得出。 □

8.3. 格罗滕迪克对偶与一般的秩一时间反演。 令$\pi:\ \mathcal{E}\to\mathcal{M}_{ell}$ 为带有单位截面$e:\ \mathcal{M}_{ell}\to\mathcal{E}$的泛谱椭圆曲线，并将 $\mathcal{O}^{\mathrm{top}}_{\mathcal{E}}$ 记为谱代数几何中的结构层。对于 $n\in\mathbb{Z}$，令

$$\mathcal{L}_n \;:=\; \mathcal{O}^{\mathrm{top}}_{\mathcal{E}}(ne), \qquad \text{so that} \qquad \mathcal{L}_n^\vee \;\simeq\; \mathcal{L}_{-n}.$$

沿用 [12, §5.6], ，我们使用归一化秩一模

$$L(n) \;:=\; \Gamma\big(\mathcal{L}_n\big)[-2n] \;\in\; \mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}}), \tag{8.7}$$

其中，Γ 表示 $\mathcal{M}_{ell}$ 上的导出全局截面（因此 $\Gamma(\mathcal{O}^{\mathrm{top}}_{\mathcal{M}_{ell}})\simeq\mathrm{TMF}$）。由于 $\mathcal{M}_{ell}$的 0– 仿射性，全局截面函子是对称幺半的，并且保持对偶；参见 [19] 以及 [12, §6]中的讨论。

定理 8.6（秩一时间反演对偶）。 对于每个整数 n，存在 TMF–模之间的等价

$$L(-n) \;\simeq\; L(n)^\vee[1].$$

该等价可以选取得关于 n 具有函子性，并且在乘以单位 $\pm1\in\pi_0(\mathrm{TMF})^\times$的意义下典范地定义良好。

证明。 记 $M_n:=\pi_*\mathcal{L}_n\in$ 拟凝聚层范畴$(\mathcal{M}_{ell},\ \mathcal{O}^{\mathrm{top}})$。根据定义以及导出全局截面的投影公式，

$$L(n) \;\simeq\; \Gamma(M_n)[-2n].$$

由于导出全局截面对完美对象保持对偶（由 [19]），引理8.1 给出

$$L(n)^\vee \;\simeq\; \Gamma(M_n)^\vee[2n] \;\simeq\; \Gamma(M_n^\vee)[2n].$$

现在，对谱情形中相对维数为 1 的适当光滑态射 π 应用格罗滕迪克对偶（其内容见 [12, 式 (6.5)]；另见 [18]）。将其特化到 π 和线丛 $\mathcal{L}_n$，可得一个等价

$$(\pi_*\mathcal{L}_n)^\vee \;\simeq\; \pi_*(\mathcal{L}_n^\vee)[-1] \;\simeq\; \pi_*(\mathcal{L}_{-n})[-1]. \tag{8.8}$$

因此

$$L(n)^\vee \;\simeq\; \Gamma\big(\pi_*\mathcal{L}_{-n}\big)[-1][2n] \;\simeq\; \Gamma(\mathcal{L}_{-n})[2n-1].$$

采用归一化（8.7）来处理 $-n$，

$$L(-n)[-1] \;=\; \Gamma(\mathcal{L}_{-n})[2n][-1] \;=\; \Gamma(\mathcal{L}_{-n})[2n-1],$$

因此我们得出 $L(n)^\vee \simeq L(-n)[-1]$，等价地，$L(-n) \simeq L(n)^\vee[1]$。

最后，“相差一个符号”的歧义是内在的：格罗滕迪克对偶中的对偶等价仅在相差 π_0(TMF) 中单位的乘法意义下才是典范的，因此在此处相差 ± 1；参见 [12, §6，备注 6。7]。固定一种归一化（例如，要求与命题 8.5在 $n = 2$时相容）即可全局消除这种歧义。□

Appendix A. Odd primes: canonical words and completeness of the layer invariant

本附录给出§3中所用的奇数主代数。设 p 为奇素数，且 λ: $G \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是有限阿贝尔 p群 G上的非奇异对称链接配对。我们证明，相应的层形式（$P_k(G)\ b_k$）决定（G, λ）的等距类，并固定一个分解为秩一循环块的典范正交分解。分类本身是经典结果（Wall [30], Kawauchi–Kojima [16]；另见 Deloup [9]），但我们以循环块和齐次层的语言给出一个自成一体的论证，从而将后文所用的典范选择完全明确地展示出来。在正文中，这个典范分解记作一个典范字 $N_p(\lambda)$，因此也就是典范不变量 Canon(A)的奇数主分量。

在全文中，p 表示一个奇素数，G 表示一个有限阿贝尔 p群。我们用 $\nu_p(\cdot)$表示 $\mathbb{Q}$上的 p进赋值。给定 $x \in G$，我们用 $o(x)$表示其阶。

A.1. 奇数 p的对角分裂。我们回顾一下，在有限阿贝尔 p 群 G 上的链接配对是指一个双线性映射 λ: $G \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，它是对称且非奇异的（其伴随映射 $G \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是一个同构）。

引理 A.1（奇数 p的对角分裂）。设 p 为奇数，且 λ 是有限阿贝尔 p–群 G上的非奇异对称链接配对。那么（G, λ）正交分裂为循环配对的直和

$$(G, \lambda) \;\cong\; \bigoplus_{i=1}^{m} \Big(\mathbb{Z}/p^{k_i}\mathbb{Z},\ \frac{u_i}{p^{k_i}}\Big),$$

其中 $k_i \geq 1$ 和 $u_i \in (\mathbb{Z}/p^{k_i}\mathbb{Z})^{\times}$。

证明。 我们对 $|G|$ 使用归纳法。若 $G = 0$，则无须证明。取最大阶为 o 的 $x \in G$，即 $x = p^k$。由于 λ 是非奇异的，存在 $y \in G$ 使得 $\nu_p(\lambda(x, y)) = -k$，等价地，$p^k\lambda(x, y) \in \mathbb{Z}$ 不能被 p 整除。

我们声称，将 y 替换为 $y + tx$，其中 t 是适当的整数后，可以假设 $\nu_p(\lambda(y, y)) = -k$ 也成立。在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中写为

$$\lambda(y + tx,\, y + tx) = \lambda(y, y) + 2t\,\lambda(x, y) + t^2\lambda(x, x).$$

乘以 p^k 并模 p 化简，得到一个二次多项式

$$f(t) \;:=\; p^k\lambda(y, y) \;+\; 2t \cdot p^k\lambda(x, y) \;+\; t^2 \cdot p^k\lambda(x, x) \;\in\; \mathbb{F}_p.$$

这里，按构造有 $p^k\lambda(x, y) \not\equiv 0 \pmod p$；又因为 $2 \in \mathbb{F}_p^{\times}$ p 为奇数，所以 $f(t)$ 不是零多项式。因此存在 $t \in \mathbb{Z}$，使得 $f(t) \neq 0$属于 $\mathbb{F}_p$。对于 $z := y + tx$，于是有 $p^k\lambda(z, z) \in \mathbb{Z}$ 不能被 p 整除，所以 $\nu_p(\lambda(z, z)) = -k$。特别地，$o(z) = p^k$。

令 $H := \langle z\rangle \subseteq G$，并设 $H^{\perp} := \{g \in G \mid \lambda(g, H) = 0\}$。我们首先证明 $H \cap H^{\perp} = 0$。若 $az \in H^{\perp}$，则 $0 = \lambda(az, z) = a\,\lambda(z, z)$。由于 $\lambda(z, z)$ 的分母恰为 p^k，这就推出 $p^k \mid a$，进而得到 $az = 0$。

接下来，我们证明 $G = H \oplus H^{\perp}$ 作为群成立。考虑伴随同构 $\mathrm{ad}_\lambda\colon G \to \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。子群 $H^{\perp}$ 是限制映射 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的核，因此在 ad_λ 下对应于 H 的湮灭子。由于 H 是循环群，且 $\lambda|_{H\times H}$ 是非奇异的（因为 $H \cap H^{\perp} = 0$），限制映射 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是满射，因此我们得到一个正合列

$$0 \longrightarrow H^{\perp} \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

计算阶可得 $|G| = |H^{\perp}| \cdot |H|$，结合 $H \cap H^{\perp} = 0$，我们得出 $G = H \oplus H^{\perp}$。根据定义，该分解是关于 $H^{\perp}$ 的正交分解。

最后，$\lambda|_{H^{\perp}}$ 再次是非奇异的（它与非奇异直和项的正交补上的诱导配对相对应）。根据归纳法，$(H^{\perp}, \lambda|_{H^{\perp}})$ 可分解为循环配对的正交直和，再添上循环直和项 $(H, \lambda|_{H\times H})$，即可完成证明。

对于以 z 为生成元的循环群 $H \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$，值 $\lambda(z, z)$ 具有形式 u/p^k，其中 $u \in (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^{\times}$；这就是所声称的标准形。$\square$

A.2. **层形式及其不变量**。 现在我们将引理 A.1 的循环分解与层形式（用于步骤 A）联系起来。对于奇素数，正确的层商是出现在 Wall 理论中的齐次层商；它是商群 $G_k/(G_{k-1} + 2G_{k+1})$ 的奇素数类比，而该商群在附录 B 中用于 $p = 2$。

定义 A.2 (奇素数层)。 设 p 为奇数，G 为有限阿贝尔 p群，且 λ 是定义在 G 上的非奇异对称链接配对。

对于 $k \geq 1$，定义

$$G_k := \{x \in G \mid p^k x = 0\}, \qquad \text{and set } G_0 := 0.$$

定义第 k 层商

$$P_k(G) := G_k \big/ \big(G_{k-1} + p\, G_{k+1}\big).$$

对于 $\bar{x}$，$\bar{y} \in P_k(G)$ 由 x，$y \in G_k$ 表示，定义层形式

$$b_k(\bar{x}, \bar{y}) := p^k \lambda(x, y) \mod p \in \mathbb{F}_p. \tag{A.1}$$

引理 A.3. 双线性形式 b_k 在 (A.1) 上是定义良好且非奇异的 $\mathbb{F}_p$。

证明。良定义性。首先假设 $x \in G_{k-1}$ 和 $y \in G_k$。则 $p^{k-1}x = 0$，因此 $p^{k-1}\lambda(x, y) = \lambda(p^{k-1}x, y) = 0$ 属于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。因此 $\lambda(x, y) \in \frac{1}{p^{k-1}}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$，乘以 p^k 得 $p^k\lambda(x, y) \in p\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$，即 $p^k\lambda(x, y) \equiv 0$ (模 p)。这表明，将提升改变一个 G_{k-1} 中的元素不会影响 b_k。

接下来假设 $x = pz$，其中 $z \in G_{k+1}$ 和 $y \in G_k$。则

$$p^k\lambda(x, y) = p^k\lambda(pz, y) = p^k\lambda(z, py).$$

由于 $py \in G_{k-1}$，前一段表明 $p^k\lambda(z, py) \equiv 0$ (模 p)。因此，加入 pG_{k+1} 中的一个元素也不会改变 b_k。同样的论证适用于第二变量，所以 b_k 在商群 $P_k(G) = G_k/(G_{k-1} + pG_{k+1})$ 上定义良好。

非奇异性。设 $\bar{x} \in P_k(G)$，并选取一个代表元 $x \in G_k$。假设对所有 $\bar{y} \in P_k(G)$，都有 $b_k(\bar{x}, \bar{y}) = 0$。等价地，对所有 $y \in G_k$，都有 $p^k\lambda(x, y) \equiv 0$ (模 p)，因此

$$p^{k-1}\lambda(x, y) = 0 \qquad \text{for all } y \in G_k.$$

由双线性可知，这等价于对所有 $y \in G_k$，都有 $\lambda(p^{k-1}x, y) = 0$，即 $p^{k-1}x \in (G_k)^\perp$。我们断言，对于有限 p–群上的非奇异链接配对，

$$(G_k)^\perp = p^k G. \tag{A.2}$$

事实上，若 $x = p^k z$ 则 $\lambda(x, G_k) = \lambda(z, p^k G_k) = 0$，因此 $p^k G \subseteq (G_k)^\perp$。反过来，考虑由乘以 p^k 所诱导的正合列，$0 \to G_k \to G \xrightarrow{p^k} p^k G \to 0$。对其应用 $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$（由于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射的，该函子是正合的），可知 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 中 G_k 的湮灭子的阶为 $|p^k G|$。在伴随同构 $G \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 下，该湮灭子对应于 $(G_k)^\perp$。由于我们已有 $p^k G \subseteq (G_k)^\perp$，且这两个群的有限阶相同，故它们相等，从而证明了 (A.2)。

利用 (A.2)，条件 $p^{k-1}x \in (G_k)^\perp$ 意味着 $p^{k-1}x = p^k z$ 存在某个 $z \in G$。于是 $p^{k-1}(x - pz) = 0$，因此 $x - pz \in G_{k-1}$。此外，由于 $x \in G_k$ 我们有

$$0 = p^k x = p^k(x - pz) + p^{k+1}z,$$

且第一项为零，因为 $x - pz \in G_{k-1}$。因此 $p^{k+1}z = 0$，所以 $z \in G_{k+1}$。我们得出 $x \in G_{k-1} + pG_{k+1}$，因此 $\bar{x} = 0$ 属于 $P_k(G)$。由此可知，b_k 的根基平凡，且为非奇异。□

A.3. **奇素数主部分标准形与完备性**。我们回顾一下奇数 p 上 $\mathbb{F}_p$ (p) 中非奇异对称双线性形式 b 的两个不变量：其维数 $\dim_{\mathbb{F}_p} b$ ，以及其在 $\mathbb{F}_p^\times/(\mathbb{F}_p^\times)^2$ 中的判别式类。我们用 $\chi(\cdot)$ 表示 $\mathbb{F}_p^\times$ 上的二次特征（勒让德符号）。

定义 A.4 （奇素数主部分层不变量）。设 p 为奇数，且 (G,λ) 是一个非奇异对称的 p–主链接配对。对每个 $k\ge 1$ ，令 b_k为 $P_k(G)$ 上的层形式。令

$$n_{p,k}(\lambda) \;:=\; \dim_{\mathbb{F}_p} P_k(G), \qquad x_{p,k}(\lambda) \;:=\; \chi\big(\det(b_k)\big)\in\{\pm 1\}.$$

引理 A.5。设 $H=\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ 配有配对 $\langle u/p^k\rangle$ （即 $\lambda(1,1)=u/p^k$，其中 $u\in(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ ）。则对于 $j\neq k$，有 $P_j(H)=0$ ；并且 $P_k(H)\cong\mathbb{F}_p$ ，其中 $b_k(1,1)=u$ 模 p。特别地，$n_{p,k}=1$ 以及 $x_{p,k}=\chi(u)$。

证明。令 g 为 H的一个生成元。对于 $j\ge 1$ ，有 $H_j=\langle p^{k-j}g\rangle$ （若 $j\le k$）以及 $H_j=H$ （若 $j\ge k$）。若 $j<k$，则 $pH_{j+1}=H_j$，因此 $H_{j-1}+pH_{j+1}=H_j$，从而 $P_j(H)=0$。若 $j>k$，则 $H_j=H_{j-1}=H$，因此同样有 $P_j(H)=0$。对于 $j=k$，有 $H_k=H$ 、 $H_{k-1}=pH$ 和 $pH_{k+1}=pH$，因此

$$P_k(H)=H/(H_{k-1}+pH_{k+1}) \;=\; H/pH \;\cong\; \mathbb{F}_p,$$

生成元为 g 的像。由于 $\lambda(g,\,g)=u/p^k$，我们得到

$$b_k(\bar g,\bar g)=p^k\lambda(g,g)\bmod p = u \bmod p,$$

其余结论随之得出。 □

定义 A.6 （奇素数主部分典范词）。设 p 为奇数。记 $\mathcal{M}_p$ 为由以下符号生成的交换幺半群

$$\mathsf{A}\big(p^k,\varepsilon\big)\qquad (k\ge 1,\ \varepsilon\in\{\pm1\}),$$

仅受交换律约束，并将 $\mathsf{A}(p^k,\ \varepsilon)$ 解释为循环配对 $\langle u/p^k\rangle$ 的等距类，其中 $\chi(u)=\varepsilon$。对于 G 上的非奇异对称 p–主部分链接配对 λ，定义

$$N_p(\lambda) \;:=\; \prod_{k\ge 1}\mathsf{A}\big(p^k,+1\big)^{a_{p,k}(\lambda)}\,\mathsf{A}\big(p^k,-1\big)^{b_{p,k}(\lambda)} \;\in\; \mathcal{M}_p, \tag{A.3}$$

其中指数 $a_{p,\,k}(\lambda)b_{p,\,k}(\lambda)\ge 0$ 由下式确定

$$a_{p,k}(\lambda)+b_{p,k}(\lambda)=n_{p,k}(\lambda),\qquad (-1)^{b_{p,k}(\lambda)}=x_{p,k}(\lambda).$$

定理 A.7 （奇素数主部分完备性）。设 p 为奇数，且 λ、λ' 为非奇异对称的 p–主部分链接配对。那么，$(G,\lambda)\ \cong\ (G',\lambda')$ 当且仅当

$$n_{p,k}(\lambda)=n_{p,k}(\lambda')\ \textit{and}\ x_{p,k}(\lambda)=x_{p,k}(\lambda')\quad \textit{for all } k\ge 1.$$

等价地，$N_p(\lambda)=N_p(\lambda')$ 在 $\mathcal{M}_p$ 中。

证明。 根据引理 A.1，我们可以写成

$$(G,\lambda) \;\cong\; \bigoplus_{i=1}^{m}\Big(\mathbb{Z}/p^{k_i}\mathbb{Z},\ \frac{u_i}{p^{k_i}}\Big).$$

对于固定的 k，层商 $P_k(G)$ 及其形式 b_k 按指数为 p^k 的直和项分解为正交直和。根据引理 A.5，每个阶为 p^k 的循环直和项都会在 $P_k(G)$ 中贡献一个 1 维直和项，并在该直线上贡献标量 $u_i \bmod p$；而指数为 $\neq p^k$ 的直和项对 $P_k(G)$ 没有贡献。因此，$n_{p,\,k}$ 是阶为 p^k 的循环直和项的数量，并且

$$x_{p,k} = \chi(\det(b_k)) = \prod_{k_i=k} \chi(u_i) = (-1)^{b_{p,k}},$$

这正是定义A.6中的奇偶约束。这表明，循环块的多重集（模去平方类 $\chi(u_i)$）决定了层不变量。

反过来，给定 $(n_{p,k},x_{p,k})$，(A.3) 中 $N_p(\lambda)$ 的定义指定了对每个 k，阶为 p^k 且满足 $\chi(u) = +1$ 以及满足$\chi(u) = -1$的循环块数量。对这些循环块取正交和，即可得到具有所给层不变量的配对。根据循环分解引理，每个 p–主配对都等距于这样的正交和，因此层不变量是完备的。 □

A.4. 从层矩阵恢复典范字。尽管层形式 b_k 是内在定义的，记录一个显式的坐标描述仍然有用。在应用中，人们常常从一个对称整表示矩阵（例如手术矩阵）出发，并过渡到 G的一个史密斯基，其中 λ 由一个有理对称矩阵 P表示。我们说明如何从 P 提取在 $P_k(G)$上表示b_k 的矩阵$B_{p,\,k}$，从而如何恢复(A.3)中定义的不变量$(n_{p,k},x_{p,k})$以及典范字 $N_p(\lambda)$。记录这一点只是为了强调：一旦§3的约定被固定，Canon(A)的奇数主分量就可以有效地由一个表示矩阵计算出来。

假设 G 以史密斯标准形给出：

$$G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z}, \qquad 1 \le e_1 \le \cdots \le e_r.$$

设 $x_1,\dots,x_r$ 为相应的生成元，并设 $P = (p_{ij})$为有理配对矩阵

$$p_{ij} = \lambda(x_i,x_j) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad \nu_p(p_{ij}) \ge -\min(e_i,e_j).$$

固定 $k \ge 1$，并令 $I_{p,\,k} := \{i \mid e_i = k\}$。那么 $\{x_i\}_{i\in I_{p,\,k}}$ 的像构成层商 $P_k(G) = G_k/(G_{k-1}+pG_{k+1})$ 的一组基，且 $P_k(G) \cong \mathbb{F}_p^{\,|I_{p,\,k}|}$。

层形式 b_k 在这组基下由以下矩阵表示

$$B_{p,k} \;:=\; \big(p^k p_{ij} \bmod p\big)_{i,j\in I_{p,k}} \;\in M_{|I_{p,k}|}(\mathbb{F}_p). \tag{A.4}$$

事实上，对于 $i,\ j \in I_{p,\,k}$，我们有 $x_i,\ x_j \in G_k$ 以及

$$b_k([x_i],[x_j]) \;=\; p^k\lambda(x_i,x_j) \bmod p \;=\; p^k p_{ij} \bmod p.$$

因此 $n_{p,\,k}(\lambda) = |I_{p,\,k}|$ 以及 $x_{p,\,k}(\lambda) = \chi(\det B_{p,\,k})$。

注 A.8（从（$n_{p,\,k}$，$x_{p,\,k}$）到典范字）。给定不变量（$n_{p,\,k}$，$x_{p,\,k}$）$_{k\ge 1}$，令

$b_{p,\,k}:=\dfrac{1-x_{p,\,k}}{2}^{\,k}\in\{0,1\}$ 若 $n_{p,\,k}=1$，$\dfrac{b_{p,\,k}}{N_p}\equiv\dfrac{1-x_{p,\,k}}{2}^{\,k}$（一般而言模 2），并定义 $a_{p,\,k}:=n_{p,\,k}-b_{p,\,k}$。则 $N_p(\lambda)$ 是乘积（A.3）。

Appendix B. 2-primary refinements: characteristic elements, determinant classes, and Gauss sums

本附录汇集了第 5节中用于定义和分析有限 2-群上非奇异对称链接配对之典范不变量的 2-主代数。更确切地说，我们研究层商 $P_k(G)$ 及其诱导的 $\mathbb{F}_2$–双线性形式 b_k、由此产生的 Type E 和 Type A 层的二分法、Type A中的行列式精化，以及二次修正 q_k，其归一化高斯和给出 Type u_k 中的不变量 E。2-主链接形式的底层分类是经典的；例如，参见 Wall [30] 和 Kawauchi–Kojima [16, §2]。

B.1. 层商与诱导的双线性形式。 设 (G,λ) 是一个有限阿贝尔 2-群，并赋有一个非奇异对称双线性配对

$$\lambda : G\times G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

对 $k\ge 1$，令

$$G_k := \{x\in G \mid 2^k x = 0\}$$

并定义层商

$$P_k(G) \;:=\; G_k \Big/ \big(G_{k-1} + 2G_{k+1}\big), \tag{B.1}$$

它是一个 $\mathbb{F}_2$–向量空间。

命题 B.1 (层形式的良定义性与非奇异性)。对每个 $k\ge 1$，存在一个定义良好的对称双线性形式

$$b_k \;:\; P_k(G)\times P_k(G) \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

由.....给出

$$b_k(\bar{x},\bar{y}) \;:=\; 2^k\lambda(x,y) \mod 2 \qquad (x,y\in G_k),$$

其中 $\bar{x},\bar{y}$ 表示 $P_k(G)$中的像。此外，b_k 是非奇异的。

证明。 我们首先证明其良定义性。若 $x' = x + u + 2v$ 满足 $u \in G_{k-1}$ 且 $v \in G_{k+1}$，则

$$2^k\lambda(x', y) - 2^k\lambda(x, y) = 2^k\lambda(u, y) + 2^{k+1}\lambda(v, y).$$

由于 $2^{k-1}u = 0$，我们有 $2^{k-1}\lambda(u, y) = \lambda(u, 2^{k-1}y) = 0$ 属于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，因此 $2^k\lambda(u, y) \in 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$。同理，$2^{k+1}\lambda(v, y) = 2 \cdot 2^k\lambda(v, y) \in 2\mathbb{Z}$。因此$2^k\lambda(x', y) \equiv 2^k\lambda(x, y)$（模 2 ），而对第二变量作同样的论证可知 b_k 定义良好。

为证明非奇异性，考虑伴随同态

$$\mathrm{ad}_\lambda : G \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \qquad \mathrm{ad}_\lambda(z)(y) = \lambda(z, y),$$

由 λ 的非奇异性可知，它是一个同构。令 $G_k^\perp = \{z \in G \mid \lambda(z, G_k) = 0\}$。我们断言

$$G_k^\perp = 2^k G. \tag{B.2}$$

事实上，若 $z = 2^k w$，则对于 $y \in G_k$，我们有 $\lambda(z, y) = \lambda(w, 2^k y) = 0$。反过来，$G$ 上乘以 2^k 的核恰为 G_k，因此

$$|2^k G| = \frac{|G|}{|G_k|}.$$

另一方面，对于有限群上的任意非奇异配对，都有

$$|G_k^\perp| = \frac{|G|}{|G_k|},$$

因为 $G_k^\perp$是 G_k 在同构 $G \cong \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 下的湮灭子。因此 $2^k G \subseteq G_k^\perp$，且这两个子群的基数相同，从而证明了（B.2）。

现在假设 $\bar{x} \in P_k(G)$ 满足对所有 $\bar{y}$ 都有 $b_k(\bar{x}, \bar{y}) = 0$。那么，对所有 $y \in G_k$，$2^k\lambda(x, y) \in 2\mathbb{Z}$，因此，对所有 $y \in G_k$，$\lambda(2^{k-1}x, y) = 0$。由（B.2）可得 $2^{k-1}x \in G_k^\perp = 2^k G$，所以 $x \in G_{k-1} + 2G$。模 $G_{k-1} + 2G_{k+1}$ 化简可得 $\bar{x} = 0$ 属于 $P_k(G)$，从而证明了非奇异性。□

定义 B.2 （特征元）。 对于每个 $k \geq 1$，映射

$$P_k(G) \longrightarrow \mathbb{F}_2, \qquad \bar{x} \longmapsto b_k(\bar{x}, \bar{x})$$

是 $\mathbb{F}_2$–线性的。由于 b_k 是非奇异的，存在唯一的元素

$$c_k(G, \lambda) \in P_k(G)$$

使得

$$b_k(\bar{x}, \bar{x}) = b_k(\bar{x}, c_k(G, \lambda)) \qquad \text{for all } \bar{x} \in P_k(G). \tag{B.3}$$

我们称 $c_k(G, \lambda)$为层形式的特征元 。

引理 B.3. 以下各项等价:

(i) $c_k(G, \lambda) = 0$;
(ii) b_k *is alternating, i.e.* $b_k(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ *for all* $\bar{x} \in P_k(G)$.

证明。 由（B.3）立即得出。 □

定义 B.4 （ E 型层和 A 型层）。 若 $c_k(G,\ \lambda) = 0$ （等价地， b_k 是交错的），则称第 k 层为 E 型；否则称为 A型。

B.2. **在 $\mathbb{F}_2$ 上的标准形。** 由此得到第 E 型与第 A 型层之间的二分，这些层用于第 5 节。

定义 B.5 （双曲平面）。 令 H 表示带有交错形式的秩为2 $\mathbb{F}_2$的向量空间

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

在标准基下。我们称 (H, b) 为双曲平面。

命题 B.6 (交替情形)。 设(V, b) 是一个带有非奇异交错双线性形式的有限维 $\mathbb{F}_2$–向量空间。那么维数$_{\mathbb{F}_2} V$ 为偶数，并且存在一组辛基

$$e_1, f_1, \ldots, e_m, f_m$$

使得 $b(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ ，且所有其他配对均为零。特别地，

$$(V, b) \ \cong \ H^{\oplus m}.$$

证明。 这是一个标准结果。取 $0 \neq e_1 \in V$；由非奇异性可知，存在 f_1使得 $b(e_1, f_1) = 1$。那么 $U = \langle e_1, f_1 \rangle$ 是一个双曲平面，并且 $V = U \oplus U^{\perp}$。反复进行即可得到所需的分解；只有当 $\dim V$ 为偶数时，这一过程才会终止。□

命题 B.7 (非交替情形)。 设(V, b) 是一个有限维$\mathbb{F}_2$–向量空间，带有一个非交错的非奇异对称双线性形式。那么存在一组标准正交基 $e_1, \ldots, e_n$ ，使得

$$b(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

证明。 由于 b 是非交错的，存在 v 使得 $b(v, v) = 1$。于是$V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$ ，且 $b|_{\langle v \rangle^{\perp}}$ 仍然是非奇异对称的。反复进行即可得到标准正交基。 □

推论 B.8 (偶数维类型 E 层)。 如果第 k 层属于类型 E，那么 维数$_{\mathbb{F}_2} P_k(G)$ 是偶数。

证明。 根据命题 B.6，非奇异交错形式只存在于偶数维空间中。 □

B.3. **A 2-进数行列式精化，适用于类型 A.** 在类型 A的各层中， $\mathbb{F}_2$–形式 b_k 是非交错的，因此由其维数决定。要对 2-主链接形式进行分类，还需要额外的 2-进行列式精化，下面对此加以说明。

定义 B.9（类型 A 层的行列式精化）. 假设第 k 层属于类型 A。选取 $(P_k(G), b_k)$ 的标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$，并选取 e_i 的提升 $x_i \in G_k$。令

$$C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}, \qquad c_{ij} := 2^k \lambda(x_i, x_j) \in \frac{1}{2^k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

那么， C 是一个对称矩阵，其对角线元素为奇数，非对角线元素为整数。定义

$$\det_k(G,\lambda) \;:=\; \det(C) \mod (\mathbb{Z}_2^\times)^2 \;\in\; \mathbb{Z}_2^\times/(\mathbb{Z}_2^\times)^2 \;\cong\; \{\pm 1, \pm 5\}. \tag{B.4}$$

引理 B.10. 对于 $u \in \mathbb{Z}_2^\times$， $\mathbb{Z}_2^\times/(\mathbb{Z}_2^\times)^2$ 中 u 的平方类由 u 模 8 决定。此外，典范同一 $\mathbb{Z}_2^\times/(\mathbb{Z}_2^\times)^2 \cong \{\pm 1, \pm 5\}$ 由下式给出

$$u \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8 \quad\Longleftrightarrow\quad [u] = 1, -1, 5, -5.$$

证明。 这是标准结论；例如参见 [26, 第 IV 章，§2]。 □

引理 B.11. 设 $k \ge 3$。那么 $(\mathbb{Z}/2^k)^\times/((\mathbb{Z}/2^k)^\times)^2$ 与 $\mathbb{Z}_2^\times/(\mathbb{Z}_2^\times)^2$，典范同一，且单位的平方类由其模 8 的约化决定。

证明。 对于 $k \ge 3$，约化映射 $(\mathbb{Z}/2^k)^\times \to (\mathbb{Z}/8)^\times$ 是满射，其核是由平方生成的 pro-2 群。因此，平方类由模 8 决定，并且随着 k 增大而稳定。□

注记 B.12。 定义（B.4）与标准正交基和提升的选取无关。事实上，改变提升会使 C 增加一个对角线为偶数的整对称矩阵，从而使 $\det(C)$ 改变一个 $\mathbb{Z}_2^\times$中的平方数。改变标准正交基则相当于通过 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ 中的一个元素进行合同变换，这同样会使 $\det(C)$ 改变一个平方数。

B.4. 二次修正 q_k。 对于 Type E 层，交错形式 b_k 并不能确定 2-primary 链接配对。缺失的信息由二次修正编码。

令 $H_k(G) := G/G_k$（即商去阶整除 2^k 的元素所得的商群）。注意， $H_k(G)$ 仍是一个有限 2-群。

引理 B.13。 对于 $x \in G$， 量 $2^k\lambda(x,x) \bmod 2$ 仅取决于 x 在 $H_k(G)$ 中的像，并定义了一个同态

$$q : H_k(G) \longrightarrow \mathbb{F}_2.$$

此外，当且仅当第 k 层属于 E 型时， q 才消失。

证明。 如果 $x' = x + u$ 满足 $u \in G_k$，那么

$$2^k\lambda(x',x') - 2^k\lambda(x,x) = 2^{k+1}\lambda(x,u) + 2^k\lambda(u,u).$$

第一项属于 $2\mathbb{Z}$。对于第二项，注意 $2^k\lambda(u,\ u)$ 模 2 约化为 $b_k(\bar{u},\ \bar{u})$，并且对所有 $\bar{u}$ 都为零，当且仅当该层是 Type E（引理 B.3）。因此，在 Type E 中，右侧属于 $2\mathbb{Z}$ ，而

模 2 约化与提升无关。由极化恒等式可得线性性

$$2^k\lambda(x+y,x+y)\equiv 2^k\lambda(x,x)+2^k\lambda(y,y)\pmod 2$$

当 b_k 是交错的。 □

命题 B.14 (q_k**的良定义性)**。假设第 k 层为类型 E。定义

$$q_k : H_k(G)\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\qquad q_k([x]) := 2^{k-1}\lambda(x,x),$$

其中 $[x]$ 是 $H_k(G)$中的像。那么 q_k 定义良好，且其极化满足

$$q_k([x+y])-q_k([x])-q_k([y]) = 2^k\lambda(x,y)\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

证明。若 $x'=x+u$ 且 $u\in G_k$，则

$$2^{k-1}\lambda(x',x')-2^{k-1}\lambda(x,x)=2^k\lambda(x,u)+2^{k-1}\lambda(u,u).$$

由于 u 的阶整除 2^k，因此在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中有 $2^k\lambda(x,u) = \lambda(x,2^ku) = 0$。此外，当该层为类型 E时， $2^{k-1}\lambda(u,u)$ 是整数：事实上

$$2^k\lambda(u,u)\bmod 2 = b_k(\bar u,\bar u)=0$$

因此 $2^k\lambda(u,u)\in 2\mathbb{Z}$，于是 $2^{k-1}\lambda(u,u)\in\mathbb{Z}$。因此 q_k 定义良好。

对于极化，

$$2^{k-1}\lambda(x+y,x+y)-2^{k-1}\lambda(x,x)-2^{k-1}\lambda(y,y)=2^k\lambda(x,y),$$

由双线性可知，这在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中成立。 □

B.5. 类型 E **的高斯和**。假设 k次层为类型 E，因此q_k 有定义。定义高斯和

$$\Gamma_k(G,\lambda) := \sum_{x\in H_k(G)}\exp\bigl(2\pi i\, q_k(x)\bigr)\in\mathbb{C}.$$

由于 q_k 是二次型，其极化由 λ诱导，经典的二次高斯和求值给出 $|\Gamma_k(G,\lambda)| = \sqrt{|H_k(G)|}$，且 $\Gamma_k(G,\lambda)/\sqrt{|H_k(G)|}$是一个八次单位根。因此我们定义

$$\widetilde{\Gamma}_k(G,\lambda) := \frac{\Gamma_k(G,\lambda)}{\sqrt{|H_k(G)|}}\in\mu_8,\qquad u_k(G,\lambda) := \widetilde{\Gamma}_k(G,\lambda).$$

这是链接形式 2-主分类中出现的高斯和不变量；参见 [16,§2] 和 [8,§2]。

B.6. **与 Kawauchi–Kojima 不变量的比较**。上文介绍的不变量是对 2-主链环配对分类中所用经典不变量的重新整理。

命题 B.15（与经典不变量一致）。 设 (G, λ) 是一个有限的 2–初级链接配对。

(i) 对于每个 $k \geq 1$，层配对的等距类$(P_k(G)\ b_k)$ 与 *Kawauchi–Kojima* 意义下第 k 个齐次分量的模2 约化一致，因此确定相应的 *Witt* 类不变量。(ii) 对于每个 *Type* A 层，行列式精化 $\det_k(G, \lambda) \in \{\pm 1, \pm 5\}$恢复相应齐次型的 2–进单位平方类（ Δ_k–不变量）。(iii) 对于每个 *Type* E 层，归一化高斯和 $u_k(G, \lambda) \in \mu_8$ 与分类中使用的高斯不变量一致。

因此，不变量集 $\{(P_k(G)\ b_k), \det_k, u_k\}_{k\geq 1}$ 是确定(G, λ)等距类的完备不变量。

证明。第 (i) 项与第 (ii) 项由本文所用的层过滤与 Kawauchi–Kojima 不变量之间的比较得出；见 [16, §2]与 [16, 推论 2。1]。关于 (iii)，剩余的 2-准素歧义借助于二次修正与归一化高斯和的表述在 [8, §2]中予以说明。最后的断言成立，因为所引用的分类结果是完备的。 □

注记 B.16（有效性）。 给定 λ 的一个由对称整数矩阵给出的表示（等价地，一个手术矩阵 A），可以计算层过滤 G_k，选取 Smith 基与显式提升，并在这些提升上对 λ、 b_k 与q_k 求值，从而得到上述不变量。我们记录这一点，仅是为了表明典范不变量 Canon(A) 可由一个表示有效计算；除定义中已明确作出的那些选择外，其他地方不再使用任何辅助选择。

Appendix C. Worked examples and consistency checks

本附录通过手工验证步骤 A 输出 Tok(A)，给出了若干计算示例。这些示例也被用作配套实现的回归测试，但此处记录的计算独立于任何软件栈。它们还具体说明了如何利用 Wall 和 Kawauchi–Kojima 的局部分类结果（以及针对 2-群的标准细化），将挠链形式（$G(A)$ λ_A）的等距类转换为典范令牌包 Tok(A)。参见 [30, 16, 9]。

C.1. **一般方案：从矩阵到标记**。 设 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ 是对称的，且 $\det(A) \neq 0$。回顾（3.1）中的

$$G(A) := \operatorname{coker}(A) = \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n, \qquad \lambda_A(\bar{x}, \bar{y}) = x^{\mathsf{T}} A^{-1} y \bmod \mathbb{Z},$$

A	Tok(A)
(1)	$b_1 = 0$
(3)	$b_1 = 0;\ \ p = 3,\ k = 1,\ n = 1,\ x = 1$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$b_1 = 0;\ \ p = 3,\ k = 1,\ n = 2,\ x = -1$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$b_1 = 2$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$b_1 = 0;\ \ p = 2,\ \ k = 1,\ \ n = 2,$ 类型 $= A,$ 行列式 $= 1$

TABLE 1. 一组用于检验步骤 A 一致性的演算示例。

其中 A^{-1} 是在 $\mathbb{Q}$上计算的，而 $x, y \in \mathbb{Z}^n$ 是代表元。 A 的史密斯标准形决定了 $G(A)$ 的抽象群结构，尤其是其 p–初等分解。当 $G(A)$ 是一个 p–群时， λ_A 的等距类由局部不变量决定：对于奇数 p ，可以化为齐次层的直和，并记录每个指数 p^k下，诱导出的非退化对称形式在 $\mathbb{F}_p$ [30, 16]上的维数 $n_{p,k}$ 和判别式平方类 $x_{p,k} \in \{\pm 1\}$。对于 $p = 2$，分类需要通过区分两种基本维特类型（按我们的记法为类型 A 与类型 E ）来进行细化；在偶数情形下，还需一个取值于八次单位根的高斯和不变量（在我们的模式中编码为整数$u \in \mathbb{Z}/8$ ） [16, 9]。典范标记列表 Tok(A) 正是对这些局部不变量按素数和指数排序后进行的确定性封装。

下文将针对表 1 中的每个矩阵，显式计算 ($G(A)$ λ_A) 及相应的局部不变量。

C.2. **平凡示例**。

命题 C.1. 对于 $A = [1]$，群 $G(A)$ 是平凡的，而 $\mathrm{Tok}(A)$包含无素数块。

证明。 映射 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z}$ 是同构，因此余核(A) $= 0$。所以配对λ_A 是空泛的，而 Tok(A) 仅记录 $b_1(A) = 0$ ， 不含任何素数数据。□

C.3. **奇素数例子**。

命题 C.2。 设 $A = [3]$。则 $G(A) \cong \mathbb{Z}/3$ ， 其生成元为 $g = 1$，并且

$$\lambda_A(g, g) \equiv \frac{1}{3} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

因此，唯一的奇准素层是 $(p, k) = (3,1)$ ，其不变量为$(n_{3,1}, x_{3,1}) = (1, +1)$，如表 *1* 所示。

证明。 我们有余核$([3]) \cong \mathbb{Z}/3$，由 $g = 1$生成。由于 $\bar{A}^{-1} = [1/3]$，式 (3.1) 给出

$$\lambda_A(g,g) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \equiv \frac{1}{3} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

对于奇数 $p = 3$ 和指数 3^1，， $k = 1$ 层为 $V_1 \cong \mathbb{F}_3$ （维数为 $n_{3,\ 1} = 1$）。乘以 $p^k = 3$ 可将 V_1 上的诱导形式 b_1 与 $\mathbb{F}_3$上的 1×1 矩阵 $[1]$ 对应起来，因此 $\det(b_1) = 1$，从而 $x_{3,\ 1} = \chi(1) = +1$。□

命题 C.3。设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $G(A) \cong (\mathbb{Z}/3)^2$，并且在基 $g_i = e_i$下，配对表示为

$$\big(\lambda_A(g_i,g_j)\big) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

在 $(p,k) = (3,1)$ 处的奇素数主部分层不变量为 $(n_{3,\ 1},\ x_{3,\ 1}) = (2,\ -1)$。

证明。 我们首先计算该群。行列式为 $\det(A) = -9$，因此$|G(A)| = 9$。由于 A 的所有元素的最大公约数为 3，第一个史密斯不变量为 $d_1 = 3$。对于 2×2 矩阵，史密斯不变量的乘积等于$|\det(A)|$，因此 $d_2 = |\det(A)|/d_1 = 3$。于是 $G(A) \cong \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$。

接下来计算配对。直接相乘可得

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，在基 $g_i = e_i$ 中有 $\bar{\ }$

$$\lambda_A(g_i,g_j) \equiv (A^{-1})_{ij} \equiv \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

最后计算判别式类。由于该群是指数为 3 的初等阿贝尔群，整个 3-主部分都位于 $k = 1$ 层。将配对乘以 3，得到诱导的 $\mathbb{F}_3$ 值形式

$$b_1 = 3 \cdot \big(\lambda_A(g_i,g_j)\big) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_3).$$

其行列式为 $\det(b_1) = -1 \equiv 2 \in \mathbb{F}_3^\times$。由于 2 在 $\mathbb{F}_3^\times = \{1,2\}$ 中不是平方数，我们有 $x_{3,\ 1} = \chi(2) = -1$，如所述。□

C.4. **循环群 2-主示例**。

命题 C.4. 设 $A = [4]$。则 $G(A) \cong \mathbb{Z}/4$，其生成元为 $g = 1$，且 $\bar{\ }$

$$\lambda_A(g,g) \equiv \frac{1}{4} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

这会在 $k = 2$ 处贡献一个单独的 *Type* A 2*–primary* 层，其奇分子为 $a \equiv 1$ (模 4)。

证明。我们有 $G(A) = \operatorname{coker}([4]) \cong \mathbb{Z}/4$，由 $g = 1$ 生成。由于 $A^{-1} = [1/4]$，

$$\lambda_A(g,g) = 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \equiv \frac{1}{4} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

该群是指数为 2^2, 的循环群，因此它只贡献一个 $k = 2$ 层，其中 $n = 1$。对于循环 2-群，其等距类由表达式 a 中的奇分子 $\langle a/2^k \rangle$ [30, 16]决定；当 $k = 2$ 时，这给出两个类 $\langle 1/4 \rangle$ 和 $\langle 3/4 \rangle$。这里 $a = 1$，如所述。□

命题 C.5。设 $A = [-4]$。则 $G(A) \cong \mathbb{Z}/4$，其生成元为 $g = 1$，且

$$\lambda_A(g,g) \equiv -\frac{1}{4} \equiv \frac{3}{4} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

这在 $k = 2$ 处贡献一个单独的 *Type* A 2–主层，其奇分子为$a \equiv 3$ (模 4)。

证明。如上，$G(A) \cong \mathbb{Z}/4$，其生成元为 $g = 1$。现在 $A^{-1} = [-1/4]$，因此

$$\lambda_A(g,g) \equiv -\frac{1}{4} \equiv \frac{3}{4} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

这是循环型 $\langle 3/4 \rangle$，因此 $a = 3$。□

命题 C.6。令 $A = [8]$。则 $G(A) \cong \mathbb{Z}/8$，生成元为 $g = 1$，且

$$\lambda_A(g,g) \equiv \frac{1}{8} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

这贡献了一个位于 $k = 3$、奇分子为$a \equiv 1$（模 8）的单一 *Type* A 2–*primary* 层。

证明。我们有 $G(A) \cong \mathbb{Z}/8$ 和 $A^{-1} = [1/8]$，所以 $\lambda_A(g,g) \equiv 1/8$。在我们的细化中，循环群 2–primary 层记作 Type A，其奇分子为 $a \in (\mathbb{Z}/2^k)^\times$；在 $k = 3$ 处，单位群为 $\{1,3,5,7\}$，并且每个值都给出一个不同的等距类，因为奇数平方在模 8 [30, 16]意义下是 $\equiv 1$。因此$a = 1$。□

C.5。双曲 2–primary 示例与高斯和。

命题 C.7。设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么 $G(A) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ 并且在基 $g_i = e_i$ 下，配对由下式表示

$$\big(\lambda_A(g_i,g_j)\big) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这个配对是偶配对（我们分类中的 E 型），归一化高斯和等于 1，因此 $u \equiv 0$（模 8）。

证明。 行列式为 $\det(A) = -4$，因此 $|G(A)| = 4$。 A 所有元素的最大公约数为 2，因此第一个史密斯不变量为 $d_1 = 2$ ，第二个为$d_2 = |\det(A)|/d_1 = 2$。于是 $G(A) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$。

接下来计算逆矩阵：

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，在生成元 $g_i = e_i$ 中我们得到

$$\lambda_A(g_1, g_1) = 0, \quad \lambda_A(g_2, g_2) = 0, \quad \lambda_A(g_1, g_2) = \lambda_A(g_2, g_1) = \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

特别地， $\lambda_A(x, x) = 0$ 对所有 $x \in G(A)$ ，因此该形式在指数 2 层上是交错的。这正是 2-主分类的 E 层中的 $k = 1$ Type [16, 9]行为。

要计算高斯和不变量，选择二次精化q： $G(A) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 定义在以下四个元素上：

$$q(0) = 0, \qquad q(g_1) = 0, \qquad q(g_2) = 0, \qquad q(g_1 + g_2) = \frac{1}{2}.$$

直接检查可知，对于所有 $x, y \in G(A)$,

$$q(x + y) - q(x) - q(y) \equiv \lambda_A(x, y) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

归一化高斯和为

$$\Gamma(q) := \frac{1}{|G(A)|^{1/2}} \sum_{x \in G(A)} \exp\big(2\pi i\, q(x)\big) = \frac{1}{2}\big(1 + 1 + 1 + (-1)\big) = 1,$$

所以 $u \equiv 0$ （模 8）。 □

C.6. **混合素数示例。**

命题 *C.8.* 设 $A = diag(4, 3)$。则 $G(A) \cong \mathbb{Z}/12$ ，且链接型正交分解为其 2-主部分和 3-主部分，即$\langle 1/4\rangle \oplus \langle 1/3\rangle$。因此，*Tok(A)* 由一个位于 $k = 2$、具有 $a = 1$ 的 *Type* A 2–主块，以及一个位于 (p, k)、具有 $= (3, 1)$ 和 $(n_3, 1, x_3, 1) = (1, +1)$ 的单个奇素数主块构成，如表 *1* 所示。

证明。 由于 A 是对角的，我们有

$$G(A) = \operatorname{coker}(\operatorname{diag}(4, 3)) \cong \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/3.$$

由于 gcd(4，3) $= 1$，此群是一个阶为 12 的循环群。

逆矩阵为

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\Big(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\Big).$$

设 $G(A)$ 中的 $g_2 = e_1$ （阶为 4）和 $g_3 = e_2$ （阶为 3）。那么

$$\lambda_A(g_2, g_2) \equiv \frac{1}{4}, \qquad \lambda_A(g_3, g_3) \equiv \frac{1}{3}, \qquad \lambda_A(g_2, g_3) = 0.$$

因此（G（A） λ_A）是以下循环群 2-主形式的正交直和$\langle 1/4\rangle$ 以及循环群 3-主形式 $\langle 1/3\rangle$。所断言的 token 数据由命题C.2 和命题C.4得出。 □

C.7. **一个互补的 2-主秩二例子。** 尽管它未列于表 1中，我们在此记录命题C.7的对角伴例，因为这是区分 (A 型与 E 型的最小例子，定义在 $(\mathbb{Z}/2)^2$ 上的 $k=1$ 层中。

命题 C.9。 令 $A=\operatorname{diag}(2,2)$。则 $G(A) \cong (\mathbb{Z}/2)^2$，并且在基 $g_i=e_i$ 中，

$$\big(\lambda_A(g_i,g_j)\big)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

此配对在 $k=1$ 层中属于 *Type* A *(*奇数*)*。

证明。 我们有 $\det(A)=4$，显然 $\operatorname{coker}(A)\cong \mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$。此外$A^{-1}=\operatorname{diag}(1/2,\ 1/2)$，因此

$$\lambda_A(g_1,g_1)\equiv\frac{1}{2},\qquad \lambda_A(g_2,g_2)\equiv\frac{1}{2},\qquad \lambda_A(g_1,g_2)=0.$$

特别地，$\lambda_A(g_1,\ g_1)\neq 0$，所以该形式在指数 2 层上不是交错的。这正是 2-主分类中 Type A 的行为，见$k=1$ [16, 9]。 □

Appendix D. Dictionary from tokens to matrices

本附录记录了步骤 B 中使用的具体对称整矩阵，用于将挠链接配对的（局部）令牌描述转化为一个明确的矩阵代表元。来自 Topology 的唯一输入是以下标准事实：如果 B 是一个满足 $\det(B)\neq 0$的对称整矩阵，那么挠群 $G=\operatorname{coker}(B)$ 带有一个非退化对称链接配对

$$\lambda_B([x],[y]) \;=\; x^{\mathsf{T}}B^{-1}y\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \tag{D.1}$$

其中 $x,\ y\in\mathbb{Z}^n$ 提升 $\operatorname{coker}(B)$ 中的类（参见（3.1））。

D.1. 通过希尔布鲁赫–荣格连分数构造循环块。 设$m>q>0$ 为互素整数。将（负）希尔布鲁赫–荣格连分数展开写作

$$\frac{m}{q} \;=\; [a_1,\dots,a_r] \;:=\; a_1-\cfrac{1}{a_2-\cfrac{1}{\ddots-\cfrac{1}{a_r}}},\qquad a_i\geq 2.$$

（例如，可以计算 $a_1=\lceil m/q\rceil$ 并迭代欧几里得算法。）

定义相应的线性配管矩阵

$$C(m,q) := \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{r-1} & 1 \\ 0 & & & 1 & a_r \end{pmatrix}.$$

引理 D.1（循环表示矩阵）。使用上述记号：

(1) $\det C(m,q) = m$，因此 $\operatorname{coker}(C(m,q)) \cong \mathbb{Z}/m$。

(2) 若 $e_1 \in \mathbb{Z}^r$ 表示第一个标准基向量，则

$$\lambda_{C(m,q)}([e_1],[e_1]) = (C(m,q)^{-1})_{11} = \frac{q}{m} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

特别地，$C(m,q)$ 给出了 $\mathbb{Z}/m$ 上的循环配对 $\langle q/m \rangle$。

证明。行列式恒等式 $\det C(m,q) = m$ 是线性配管中的标准结果，可通过对 r 归纳并利用三对角行列式的递推关系来证明；连分数恒等式保证该行列式等于 m。

对于第二个断言，求解 $C(m,q)\,v = e_1$ 关于 $\mathbb{Q}$。根据克拉默法则，$v_1 = (\det C_{11})/(\det C)$，其中 C_{11} 是删去第 1 行和第 1 列后得到的子式。同样的行列式递推关系表明 $\det C_{11} = q$，因此 $(C^{-1})_{11} = v_1 = q/m$。方程 (D.1) 随即给出 $\lambda_{C(m,q)}([e_1],[e_1]) = q/m$。
□

D.2. **奇素数：Wall 生成元**。固定一个奇素数 p，并选取一个非平方类 $\epsilon_p \in (\mathbb{F}_p^\times)/(\mathbb{F}_p^\times)^2$，，该类由整数 $\epsilon_p \in \{2,\dots,p-1\}$表示。

对于 $k \geq 1$，我们定义表示阶为 p^k的两种循环链接形式的矩阵：

$$B\big(\mathsf{A}(p^k,+)\big) := (p^k), \qquad B\big(\mathsf{A}(p^k,-)\big) := C(p^k,\epsilon_p).$$

根据引理 D.1，余核$(B(\mathsf{A}(p^k,+))) \cong \mathbb{Z}/p^k$，其中 $\lambda(1,1) = 1/p^k$；而余核$(B(\mathsf{A}(p^k,-))) \cong \mathbb{Z}/p^k$，其中 $\lambda(1,1) = \epsilon_p/p^k$，它实现了非平方类。这些是奇数 p [30]对应的两个 Wall 生成元。

D.3. **素数2：Miranda 生成元**。对于 $k \geq 1$ 以及一个奇整数q（视为模 2^k），令

$$B\big(\mathsf{A}(2^k,q)\big) := C(2^k,q),$$

使得余核$(B(\mathsf{A}(2^k,q))) \cong \mathbb{Z}/2^k$且 $\lambda(1,1) = q/2^k$根据引理 D.1。对于$k \geq 3$四个平方类分别对应于 $q \equiv 1$、3、5、7（模 8）（参见 [20]）。

偶型（E 型）2-主生成元由以下矩阵表示（参见 [20, §1]）：2×2

$$B\big(\mathsf{E}(2^k)\big) := \begin{pmatrix} 0 & 2^k \\ 2^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad B\big(\mathsf{F}(2^k)\big) := \begin{pmatrix} 0 & 2^k \\ 2^k & 2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

两者的行列式均为 -2^{2k}，因此表示 2-主群。它们的逆矩阵为

$$B(\mathsf{E}(2^k))^{-1} = \frac{1}{2^k}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B(\mathsf{F}(2^k))^{-1} = \frac{1}{2^k}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

因此，诱导的指数一层形式是交错的（E 型）。此外，Miranda 证明，相应的高斯不变量满足 $u_{k-1}(\mathsf{E}(2^k)) = 0$ 且 $u_{k-1}(\mathsf{F}(2^k)) = 4$ 对于 $k \geq 2$ [20, 引理 2。3]。

D.4. 组装与移位。 给定一个令牌包 T，我们通过将其局部令牌所对应的矩阵作块直和（奇素数部分通过 $\mathsf{A}(p^k, \pm)$，2-主部分通过 $\mathsf{A}(2^k, q)$、$\mathsf{E}(2^k)$ 和 $\mathsf{F}(2^k)$），然后附加一个大小为 $b_1(T)$ 的零块以编码自由秩，得到 $B(T)$：

$$B(T) := \bigoplus_{\tau \in T} B(\tau) \quad \oplus \quad (0)^{\oplus b_1(T)}.$$

根据构造，余核 $(B(T))_{\mathrm{tors}}$ 及其配对(D.1)与 T 所编码的判别配对等距。

对于归一化，我们采用分次移位

$$\mathrm{sh}(B) := 3\,b_+(B) - 2\,b_-(B),$$

其中，$b_\pm(B)$ 是 $B \otimes \mathcal{R}$ 的正特征值数（负特征值数）。

引理 D.2（归一化模的稳定化不变性）。设 B 是一个对称整矩阵。则存在等价关系

$$\mathcal{L}(B \oplus (1)) \simeq \mathcal{L}(B), \qquad \mathcal{L}(B \oplus (-1)) \simeq \mathcal{L}(B)$$

在 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{TMF}})$ 中。

证明。根据定义，$\mathcal{L}(B) = L_B[\mathrm{sh}(B)]$。GKMP 证明了未归一化模满足典范等价 $L_{B\oplus(1)} \simeq L_B[-3]$ 以及 $L_{B\oplus(-1)} \simeq L_B[2]$（见 [12, 引理 5.7]）。另一方面，通过 (1) 进行稳定化会使 b_+ 增加 1，而保持 b_- 不变，因此 $\mathrm{sh}(B \oplus (1)) = \mathrm{sh}(B) + 3$。类似地，$\mathrm{sh}(B \oplus (-1)) = \mathrm{sh}(B) - 2$。综合以上结果，

$$\mathcal{L}(B \oplus (1)) = L_{B\oplus(1)}[\mathrm{sh}(B) + 3] \simeq L_B[-3][\mathrm{sh}(B) + 3] = \mathcal{L}(B)$$

同样的计算给出 $\mathcal{L}(B \oplus (-1)) \simeq \mathcal{L}(B)$。 □

命题 D.3（实现的正确性）。设 A 为对称整矩阵。则 A 稳定同余于 $B(\mathrm{Tok}(A))$（若 A 奇异，则附加一个大小为 $b_1(A)$ 的零块）。因此，

$$\mathcal{R}(\mathrm{Tok}(A)) \simeq \mathcal{L}(A).$$

证明。根据构造，$\mathrm{Tok}(A)$ 记录了 $b_1(A)$ 以及挠链接配对 $\mathrm{Disc}(A)$ 的等距类。组装得到的矩阵 $B(\mathrm{Tok}(A))$ 具有相同的自由秩，且给出的挠链接配对与 $\mathrm{Disc}(A)$ 等距。因此，稳定分类定理（命题6.2）表明 A 与 $B(\mathrm{Tok}(A))$ 稳定合同。应用引理 D.2，即可得到相关稳定化 TMF 模之间所述的等价。 □

References

[1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, 《数学年刊》（第 2 辑）72（1960），第 1 期，20–104。doi:10.2307/1970147。[2] J. F. Adams, *On the groups $J(X)$—IV*, Topology 5（1966），第 1 期，21–71。doi:10.1016/0040-9383(66)90004-8。[3] M. Ando、M. J. Hopkins 和 N. P. Strickland, *Elliptic spectra the Witten , , 《数学发 genus and the theorem of the cube* **146** 2001 3, 595 687 明》（），第 – 期。doi:10.1007/s002220100175。[4] M. F. Atiyah, *Topological quantum field theories*, 高等科学研究所数学出版物 ´Etudes Sci. 68（1988），175–186。doi:10.1007/BF02698547。[5] T. Bauer 和 L. Meier, *Topological Jacobi Forms*, 预印本（2025），doi:10.48550/arXiv.2508.08010。[6] J. C. Becker 和 D. H. Gottlieb, *The transfer map and fiber bundles*, Topology 14（1975），第 1 期，1–12。doi:10.1016/0040-9383(75)90029-4。[7] G. W. Brumfiel 和 J. W. Morgan, *Quadratic functions the index modulo 8 and , , , a $\mathbb{Z}/4$-Hirzebruch formula* **12** 1973 2, 105 122 10 1016 0040 Topology（），第 – 期。doi: . / - 9383(73)90001-3。[8] F. Deloup, *Linking forms, reciprocity for Gauss sums and invariants of 3-manifolds*, 《美国数学会汇刊》351（1999），第 5 期，1895–1918。doi:10.1090/S0002-9947-99-02304-1。[9] F. Deloup, *Le monoïde des enlacements et les facteurs orthogonaux des groupes abéliens finis* **5** 2005 419 442 10 2140 2005 5 419 , Algebr. Geom. Topol.（），–。doi: . /agt. . . . [10] D. S. Freed, *The cobordism hypothesis* **50** 2013 1, , 《美国数学 57 92 10 1090 0273 0979 2012 01393 9 会通报》（新辑）（），第 – 期。doi: . /S - - - - 。[11] D. S. Freed, *Classical Chern–Simons theory. Part 1*, Adv. Math. 113 2, 237 1995 303 10 1006 1995 1039（），第 – 期。doi: . /aima. . . [12] S. Gukov、V. Krushkal、L. Meier 和 D. Pei, *A new approach to (3+1)dimensional TQFTs via topological modular forms* 2025 2509 12402 , 预印本（），arXiv: . . doi:10.48550/arXiv.2509.12402。[13] D. Gepner 和 L. Meier, *On equivariant topological modular forms*, Compos. Math. 159（2023），第 12 期，2638–2693。doi:10.1112/S0010437X23007509。[14] R. E. Gompf 和 A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, 数学研究生丛书，第 20 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999。[15] M. Hovey、J. H. Palmieri 和 N. P. Strickland, *Axiomatic stable homotopy theory*, Mem. Amer. Math. Soc. 128（1997），第 610 号。doi:10.1090/memo/0610。[16] A. Kawauchi 和 S. Kojima, *Algebraic classification of linking pairings on 3-manifolds*, Math. Ann. 253（1980），第 1 期，29–42。doi:10.1007/BF01457818。[17] R. Kirby, *A calculus for framed links in S^3*, 《数学发明》45（1978），第 1 期，35–56。doi:10.1007/BF01406222。[18] J. Lurie, *Spectral Algebraic Geometry*, 预印本，见 https://www.math.ias. edu/~ lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。[19] A. Mathew 和 L. Meier, *Affineness and chromatic homotopy theory*, J. Topol. 8（2015），第 2 期，476–528。doi:10.1112/jtopol/jtv005。[20] R. Miranda, *Nondegenerate symmetric bilinear forms on finite abelian 2-groups*, 《美国数学会汇刊》284（1984），第 2 期，535–542。doi:10.1090/S0002-9947-1984-0743731-1。[21] R. E. Mosher 和 M. C. Tangora, *Cohomology Operations and Applications in Homo topy Theory* 1968 , Harper & Row, 。[22] J. W. Milnor 和 J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, 《数学年刊研究丛书》，第 76 号，普林斯顿大学出版社，1974。[23] J. Milnor 和 D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, 数学及其边缘领域丛书（第二辑），第 73 卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1973。doi:10.1007/978-3-642-88330-9。

[24] V. V. Nikulin, 《整对称双线性形式及其若干应用》, *Math.* ( ), 第 – 期。doi: . / *USSR-Izv.* **14** 1980 1, 103 167 10 1070 1980 014 01 001060 IM V N ABEH 。[25] D. C. Ravenel, *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres*, 纯粹与应用数学, Academic Press, 1986。[26] J.-P. Serre, *Local Fields*, Graduate Texts in Mathematics, 第67卷, Springer, 1979。doi:10.1007/978-1-4757-5673-9。[27] E. H. Spanier 和 J. H. C. Whitehead, *Duality in homotopy theory*, Mathematika 2 (1955), 56–80。doi:10.1112/S002557930000070X。[28] A. Meurer、C. P. Smith、M. Paprocki、O. ˇCert´ık、S. B. Kirpichev、M. Rocklin、A. Kumar、S. Ivanov、J. K. Moore、S. Singh、T. Rathnayake、S. Vig、B. E. Granger、R. P. Muller、F. Bonazzi、H. Gupta、S. Vats、F. Johansson、F. Pedregosa、M. J. Curry、A. R. Terrel、ˇS. Rouˇcka、A. Saboo、I. Fernando、S. Kulal、R. Cimrman 和 A. Scopatz, *SymPy: symbolic computing in Python*, PeerJ Comput. Sci. 3 (2017), e103。doi:10.7717/peerj-cs.103。[29] V. G. Turaev, *Cohomology rings linking forms and invariants of spin structures in three-dimensional manifolds* , Math. USSR-Sb. ( ), **48** 1984 1, 65 79 第 – 期。doi:10.1070/SM1984v048n01ABEH002662。[30] C. T. C. Wall, *Quadratic forms on finite groups, and related topics*, Topology 2 (1963), 第4期, 281–298。doi:10.1016/0040-9383(63)90012-0。[31] H. Murakami、T. Ohtsuki 和 M. Okada, *Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links* , Osaka J. Math. ( ), **29** 1992 第3期, 545 572–。参见 https://www.i-repository.net/contents/osakacu/sugaku/111F0000002-02903-11.pdf。

Tsinghua University, Beijing, China
Email address: lirl23@mails.tsinghua.edu.cn