arXiv:2602.12821v1 [math.OC] 13 Feb 2026

凸函数的逐点上确界的次微分及最优性条件的显式数据依赖刻画

StephanieCaro[1†] andAbderrahimHantoute[3*†]1理学院，精确与自然科学研究所，阿图罗·普拉特大学，伊基克，智利。2*数学系，阿利坎特大学，阿利坎特，西班牙。

通讯作者。电子邮箱：hantoute@ua.es；贡献作者：stcaro@unap.cl；
†这些作者对本项工作作出了同等贡献。

我们建立了凸函数上确界的次微分的显式数据依赖刻画和对称刻画，直接以基础数据函数的形式表述。在我们的方法中，活跃函数和非活跃函数都通过其次微分作出同等贡献，从而无需引入先前研究中出现的额外几何构造，例如上确界的定义域。应用于无限凸优化时，可得到尖锐的 Karush–Kuhn–Tucker 和弗里茨–约翰最优性条件；这些条件完全以目标函数和约束函数表示，并清晰地区分（几乎）活跃约束与非活跃约束的作用。

关键词：凸函数的上确界、次微分、定义域的法锥、最优性条件

美国数学学会学科分类：46N10, 52A41,90C25

1 引言

用底层数据函数来描述逐点上确界的变分性质和次微分，是优化与变分分析中的一个基本问题，无论从理论角度还是应用角度皆是如此。这个问题自然出现在许多经典主题中，例如对偶理论、极小极大原理，以及为具有有限或无限多个约束的优化问题推导最优性条件。

。这一问题的研究可追溯至凸分析发展的早期， [1, 7, 15, 23–25, 27],此后，近期研究仍持续对此给予广泛关注，包括 [13, 14, 16–18, 20, 26]。关于这一领域的最新进展，另可参阅 [3, 6] 。关于凸分析的基本结果与上确界函数的变分行为之间联系的全面论述，见 [4]。

上确界运算在经典微分学中没有真正对应的概念：即使是两个可微函数的逐点上确界（例如 $\mathbb{R}$ 上的绝对值），通常也不可微。然而，在非光滑分析中，可以通过广义微分对其进行严格处理，包括凸情形下的 Fenchel 次微分（如 [13, 14], ），以及更一般的非光滑次微分，例如 [19, 20, 22] 中所研究的那些。

上确界的次微分在很大程度上取决于参考点处活跃或近乎活跃的数据函数。早期结果（例如 [15, 24,25], ）由于对上确界施加了连续性假设，只涉及这些近乎活跃的函数。放宽这些假设后，非活跃函数也会产生影响，通常通过上确界有效定义域（有限维截面）的法锥体现出来（例如 [13, 14, 16, 17]），从而得到非对称公式。

一个自然的问题是，是否可能对次微分进行对称刻画，使活跃函数和非活跃函数通过各自的次微分作出同等贡献，从而无需借助上确界的定义域等额外几何工具，而这类工具在数值计算中可能难以处理。在紧致连续框架下， [5] （ [12]中对此进行了部分扩展）研究了这一问题，并给出了对非活跃函数的贡献进行适当加权的显式描述。本文的主要目标是直接以底层数据函数为依据，对次微分给出精确且具有实际应用价值的对称刻画，从而将 [5] 的结果扩展到紧致连续框架之外。

形式上，设 $f_t : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $t \in T$, 是定义在局部凸空间 X. 上的任意一族下半连续凸函数。我们证明，对于每个 x 属于 f 的定义域$\operatorname{dom} f$，逐点上确界 ∂f 的次微分 $f := \sup_{t\in T} f_t$ 都能完全且仅通过数据函数的ε-次微分刻画如下（定理12）：

$$\partial f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\operatorname{co}}\left(A_\varepsilon(x) + \varepsilon(B_{\varepsilon,\alpha}(x) \cup C_\varepsilon(x) \cup \{\theta\})\right),$$

其中

- $A_\varepsilon(x) := \bigcup_{t\in T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon f_t(x)$ represents the ε-active data functions f_t at x, that is, those with indices in $T_\varepsilon(x) := \{t \in T : f_t(x) \geq f(x) - \varepsilon\}$;
- $B_{\varepsilon,\alpha}(x) := \bigcup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x)$ ，其中 $\mathcal{P} := \{t \in T : f_t$ 是正则的$\}$, 表示非-ε-活跃数据函数 f_t 在 x处的贡献，这些函数受到以下惩罚：

上述公式中的因子 $\varepsilon > 0$；

- $C_\varepsilon(x) := \bigcup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^{\varepsilon}_{\text{定义域 } f_t}(x)$ 考虑了次微分为空的非适定函数，但它们仍可能对 $\partial f(x)$ 有所贡献。

上述参数 $\alpha_t > 0$ 是适当选取的权重（见定理12）。当所有函数 f_t 均为正则函数时，项$C_\varepsilon(x)$ 为零。上述表示涵盖了此前已知的大多数关于 $\partial f(x)$ 的公式。例如，在条件 $\operatorname{cl} f = \sup_{t\in T} \operatorname{cl} f_t$, 下，它涵盖了 [13, 定理 4] 给出的通用公式，该条件将 f 与 f_t 的闭包联系起来，

$$\partial f(x) = \bigcap_{L\in\mathcal{F}(x),\ \varepsilon>0} \overline{\operatorname{co}} \left(\bigcup_{t\in T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon f_t(x) + \mathrm{N}_{L\cap \operatorname{dom} f}(x) \right), \tag{1}$$

其中 $\mathcal{F}(x)$ 表示包含 x的有限维线性子空间族。事实上，我们的方法建立在这一最新刻画的基础上，从而得到一个关于$\operatorname{dom} f$. 的法锥的新表示。将第一个公式应用于无限凸优化，可得出紧确的 Karush–Kuhn–Tucker 和 Fritz–John 最优性条件。这些条件仅用目标函数和约束函数表示，并清楚地区分 ε-活跃约束与非ε-活跃约束的作用。

本文组织如下。第2 节介绍本文所用的记号并给出预备结果。第3 节致力于刻画有效定义域$\operatorname{dom} f$的法锥；主要结果见定理9。第4节的定理12给出了对 $\partial f(x)$ 所需的刻画。第5节基于前面得到的刻画，推导无限凸优化的最优性条件。最后，第6 节在附加连续性假设下，给出了 $\partial f(x)$ 的主要刻画的若干变体。

2 记号与预备知识

我们考虑一个实（分离）局部凸空间 X （简称 lcs），其拓扑对偶记为 X^*. 。 X^* 上的拓扑可以是与由双线性形式$(x^*, x) \in X^* \times X \mapsto \langle x^*, x\rangle := x^*(x)$. 所关联的对偶对$(X, X^*)$相容的任意拓扑。此类拓扑的典型例子包括弱*拓扑（$w^*$），以及当 X 为自反巴拿赫空间时的范数拓扑。在 X 和 X^*, 中，零向量均记为 θ. 。 θ 的闭凸平衡邻域族（称为 θ-邻域) 记为 $\mathcal{N}$。

我们采用记号 $\mathbb{R} := \overline{\mathbb{R}} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，并约定 $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$, $0.(+\infty) := +\infty$, $0.(-\infty) := 0$, $\sum_{t\in\emptyset} = 0$, $\cup_\emptyset \emptyset = \emptyset$。令 $\mathbb{R}_+^{(T)} := \{\lambda : T \to \mathbb{R}_+ : \operatorname{supp}\lambda \text{ finite}\}$，其中 $\operatorname{supp}\lambda := \{t \in T : \lambda(t) \neq 0\}$，并定义 $\Delta(T) := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} : \sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda} \lambda(t) = 1\}$. 。特别地， m-典范单纯形为 $\Delta_m := \Delta(\{1, \cdots, m\})$ $m \geq 1$.

给定 $A, B \subset X$，它们的闵可夫斯基和为 $A+B:=\{a+b:\ a\in A,\ b\in B\}$，约定 $A+\emptyset=\emptyset+A=\emptyset$。对于 $\Lambda\subset\mathbb{R}$，记作 $\Lambda A:=\{\lambda a:\ \lambda\in\Lambda,\ a\in A\}$(其中 $\Lambda\emptyset=\emptyset A=\emptyset$)。 A 的凸包、锥凸包、线性张成、内部、闭包、负对偶锥和正交子空间分别记为 $\mathrm{co}(A)$、$\mathrm{cone}(A)$、$\mathrm{span}(A)$、$\mathrm{int}(A)$、$\mathrm{cl}(A)$（或 $\overline{A}$）、 A^- 和 $A^\perp$。由双极定理可得 $A^{--}:=(A^-)^-=\mathrm{cone}(A)$。非空闭凸集 A 的衰退锥为 $[A]_\infty:=\cap_{t>0}t(A-a)$，其中 $a\in A$ 任意。按照约定，令 $[\emptyset]_\infty=\{\theta\}$。因此，对于任意一族闭凸集 $A_i\subset X,\ i\in I$，有 $[A_i]_\infty=[\mathrm{co}(A_i\cup\{\theta\})]_\infty\subset\mathrm{co}(A_i\cup\{\theta\})$，从而

$$\cap_{i\in I}[A_i]_\infty=\cap_{i\in I}[A_i\cup\{\theta\}]_\infty=[\cap_{i\in I}(A_i\cup\{\theta\})]_\infty=[\cap_{i\in I}A_i]_\infty. \tag{2}$$

对于每个凸集 A 和每个闭线性子空间 $L\subset X$，我们有

$$[\mathrm{cl}(A+L)]_\infty=[\mathrm{cl}(A+L)]_\infty+L. \tag{3}$$

若 $A\subset X^*$ 非空且 $x\in X$，则结合 [4, 练习 10] 和 [4, 方程 2.23] 可得

$$\bigcap_{L\in\mathcal{F}(x),\ L\subset L_0}\left[\overline{\mathrm{co}}(A+L^\perp)\right]_\infty=\left[\overline{\mathrm{co}}(A)\right]_\infty, \tag{4}$$

对于任意 $L_0\in\mathcal{F}(x):=\{L\subset X:\ L$ 是一个有限维线性子空间，且满足 $x\in L\}$。

给定一个函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$，我们分别用 $\mathrm{dom}\,f$和 $\mathrm{epi}\ f$表示其（有效）定义域和上图集。若 $\mathrm{dom}\ f\neq\emptyset$ 且对于所有 $x\in X$， $f(x)>-\infty$，则称 f为正则。给定 $c\in\mathbb{R}$，令 $[f\le c]:=\{x\in X:\ f(x)\le c\}$ 且 $[f<c]:=\{x\in X:f(x)<c\}$. f的闭包是函数 $\mathrm{cl}\ f$（或 $\overline{f}$），其上图集为 $\mathrm{cl}(\mathrm{epi}\ f)$；若 f 满足 $f=f..$，则称其为下半连续函数（简称 lsc）。定义在 X 上的正则下半连续凸函数类记作 $\Gamma_0(X)$。对于集合 $A\subset X^*$（或 X），其支撑函数为

$$\sigma_A:=\sup_{a\in A}\langle a,\cdot\rangle.$$

A的示性函数定义为

$$\mathrm{I}_A(a):=0 \text{ if } a\in A, \text{ and } \mathrm{I}_A(a):=+\infty \text{ if not.}$$

我们采用约定 $\sigma_\emptyset\equiv-\infty$ 和 $\mathrm{I}_\emptyset\equiv+\infty$.

若 $A\subset X$是非空集，则 $\mathrm{cl}(\mathrm{dom}\ \sigma_A)=([\mathrm{co}(A)]_\infty)^-$.若 $B\subset X$是另一个非空集，则有

$$\mathrm{dom}(\max(\sigma_A,\sigma_B))=\mathrm{dom}(\sigma_{A+B})=\mathrm{dom}\,\sigma_{A\cup B}=\mathrm{dom}\,\sigma_A\cap\mathrm{dom}\,\sigma_B,$$

因此（见 [4, 练习 30]）

$$([\overline{\mathrm{co}}\,(A+B)]_\infty)^-=([\overline{\mathrm{co}}\,(A\cup B)]_\infty)^-\subset([\overline{\mathrm{co}}\,(A)]_\infty)^-\cap([\overline{\mathrm{co}}\,(B)]_\infty)^-. \tag{5}$$

更一般地，若 C 是一个非空有界集合 $C\subset X$，则对每个 $\gamma>0$

$$([\overline{\mathrm{co}}\,(A\cup B)]_\infty)^-=([\overline{\mathrm{co}}\,(A\cup\gamma B\cup C)]_\infty)^-=([\overline{\mathrm{co}}\,(A+\gamma B+C)]_\infty)^-. \tag{6}$$

给定 $\varepsilon \geq 0$， f： $X \to \mathbb{R}$ 在 $x \in X$ 处的 ε-次微分为

$$\partial_\varepsilon f(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon, \text{ for all } y \in X\},$$

当 $x \in f^{-1}(\mathbb{R})$，且 $\partial_\varepsilon f(x) := \emptyset$ 否则。 f在 x处的（精确）次微分为$\partial f(x) := \partial_0 f(x)$ $= \cap_{\varepsilon>0}\partial_\varepsilon f(x)$。 此外，我们有

$$\partial_\varepsilon f(x) \subset \partial_\varepsilon \bar{f}(x) = \partial_{\varepsilon + f(x) - \bar{f}(x)} f(x), \tag{7}$$

因此，条件 $\partial_\varepsilon f(x) \neq \emptyset$蕴含 $f(x) \geq f(x) - \varepsilon$.若 f： $X \to \mathbb{R}$是定义域非空且具有非正常闭包的凸函数，则（例如参见 [3,引理 2。20]）

$$\mathrm{cl}(f^+) = (\mathrm{cl}\, f)^+ = \mathrm{I}_{\mathrm{dom}(\mathrm{cl}\, f)}, \tag{8}$$

其中 $f^+ := \max\{f, 0\}$ 表示 f.的正部。因此，若 f还下半连续，则 定义域 $f =$cl(定义域 f)，且对每个 $x \in$定义域 f， $u \in X$且 $\varepsilon > 0$,

$$(f^+)'_\varepsilon(x; u) = (\mathrm{I}_{\mathrm{dom}\, f})'_\varepsilon(x; u) = \sigma_{\partial_\varepsilon \mathrm{I}_{\mathrm{dom}\, f}(x)}(u), \tag{9}$$

其中 $g'_\varepsilon(x;\ u) := \inf_{s>0} \frac{g(x+su)-g(x)+\varepsilon}{s}$表示函数 g 在 X. 上定义的 ε-方向导数。此外，在后一种情况下，对每个 $x \in$ 定义域f， $\alpha \in \mathbb{R}$ 且$\varepsilon \geq 0$ （见 [4, 推论 5.1.9]）

$$\partial_\varepsilon(\max\{f, \alpha\})(x) = \partial_\varepsilon(\mathrm{I}_{\mathrm{dom}\, f} + \alpha)(x) = \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f}(x), \tag{10}$$

其中，$\mathrm{N}^\varepsilon_A(x) := \partial_\varepsilon \mathrm{I}_A(x)$ 是 $A \subset X$ 在 $x \in X$处的 ε法集；特别地，$\mathrm{N}_A(x) := \mathrm{N}^0_A(x)$ 是 $A \subset X$ 在 x处的法锥。注意，当 $x \in A$.时，$\mathrm{N}^\varepsilon_A(x) = \mathrm{N}^\varepsilon_{\bar{A}}(x)$。因此，由于对于定义在$X$上的任意函数 f，均有 cl(dom f) =cl(dom f)，可得

$$\mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, \bar{f}}(x), \quad \text{for all } x \in \mathrm{dom}\, f \text{ and } \varepsilon \geq 0.$$

下文将使用以下两个技术引理。

引理 1 设 $f_t : X \to \mathbb{R}$, $t \in \overline{T}$, 为下半连续凸函数，且令 $A \subset X$ 为凸集。固定 $\varepsilon > 0$. 。则，对于所有满足 $t \in \mathcal{P} := \{t \in T$ 的 $\delta > 0$ 和 $\beta_t > 0$， f_t 是正则},

$$A_\delta := \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{0<\alpha_t\leq\delta\beta_t,\ t\in\mathcal{P}} \partial_\varepsilon\left(\alpha_t f_t\right)(x) \cup A\right)\right]_\infty \subset \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in\mathcal{P}} \partial_\varepsilon\left(\beta_t f_t\right)(x) \cup A\right)\right]_\infty. \tag{11}$$

因此，对于任意标量 α_t， $\beta_t > 0$ ($t \in \mathcal{P}$)，只要 $\sup_{t\in\mathcal{P}} \alpha_t\beta_t^{-1} < +\infty$ 且 $\sup_{t\in\mathcal{P}} \alpha_t^{-1}\beta_t < +\infty$，就有

$$\left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in\mathcal{P}} \partial_\varepsilon\left(\alpha_t f_t\right)(x) \cup A\right)\right]_\infty = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in\mathcal{P}} \partial_\varepsilon\left(\beta_t f_t\right)(x) \cup A\right)\right]_\infty. \tag{12}$$

证明。 为证明（11），我们首先注意到 A_δ 关于 $\delta > 0$.单调不减。因此，不失一般性，我们可以假设 $\delta \geq 1$。对于每个 $t \in \mathcal{P}$ 和 $0 < \alpha_t \leq \beta_t$,

令 $\lambda_t := \alpha_t/(2\delta\beta_t)\,(\in\,]0,\ 1/2])$ 和 $g_t := \beta_t f_t$. 由于集合 $\partial_\varepsilon\,(2\lambda_t\delta g_t)(x)$ 和$\partial_\varepsilon\,(2(1-\lambda_t)\delta g_t)(x)$ 非空，（5）蕴含

$$\begin{aligned} A_\delta &\subset \left[\overline{\mathrm{co}}\,(\cup_{0<\lambda_t\le 1}\,(\partial_\varepsilon\,(2\lambda_t\delta g_t)\,(x)\cup\partial_\varepsilon\,(2(1-\lambda_t)\delta g_t)\,(x))\cup A)\right]_\infty \\ &= \left[\overline{\mathrm{co}}\,(\cup_{0<\lambda_t\le 1}\,(\partial_\varepsilon\,(2\lambda_t\delta g_t)\,(x)+\partial_\varepsilon\,(2(1-\lambda_t)\delta g_t)\,(x))\cup A)\right]_\infty \\ &\subset \left[\overline{\mathrm{co}}\,(\cup_{t\in\mathcal{P}}\partial_{2\varepsilon}\,(2\delta g_t)\,(x)\cup A)\right]_\infty \\ &= \left[\overline{\mathrm{co}}\,\left(\cup_{t\in\mathcal{P}}2\delta\partial_{\varepsilon/\delta}g_t(x)\cup A\right)\right]_\infty \subset \left[\overline{\mathrm{co}}\,(\cup_{t\in\mathcal{P}}\partial_\varepsilon g_t(x)\cup A)\right]_\infty, \end{aligned}$$

从而证明了（11）。

为建立（12），定义 $M_1 := $ 上确界$_{t\in\mathcal{P}}\,\alpha_t\beta_t^{-1}$以及 $M_2 := $ 上确界$_{t\in\mathcal{P}}\,\alpha_t^{-1}\beta_t$，从而$M_1$，$M_2>0$ 并且 $\alpha_t\le M_1\beta_t\le M_1M_2\alpha_t$ 对所有 $t\in\mathcal{P}$成立。因此（12）直接由（11）得到。 ■

引理 2 假设对所有 $t\in T$均有 $f_t\in\Gamma_0(X)$，并记 $f:=$ 上确界$_{t\in T}\,f_t$. 固定 $\varepsilon>0$，$x\in$ f $L\in\mathcal{F}$ x $f_t\subset L$ g_t 定义域，以及（）使得定义域，对所有 $t\in T$. 成立。令表示将 f_t限制于 L. 的限制。则 $A:=\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon f_t(x)\neq\emptyset$，$B:=\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon g_t(x)\neq\emptyset$，并且有

$$[\overline{\mathrm{co}}(B)]_\infty \subset \left\{x^*_{|L} : x^*\in[\overline{\mathrm{co}}(A)]_\infty\right\}. \tag{13}$$

证明。取 $y^*\in[\mathrm{co}(B)]_\infty$ 和 $x_0^*\in A$，并将 x_0^* 在 L 上的限制记为$y_0^*:=x_{0|L}^*\,(\in B$，见练习 55(i)]，由 [4, ）。选取一个 θ-邻域 $U\subset(X^*,w^*)$，使得$\tilde{}\,U:=\{u^*_{|L}:u^*\in U\}$是 L^*中的一个 θ-邻域（见第 31]页 [4,）。接下来，根据延拓定理，存在 $x^*\in X^*$使得 $y^*=x^*_{|L}$，因此，对任意 $\gamma>0.$，$y_0^*+\gamma y^*\in\mathrm{co}B\subset\tilde{}\,\mathrm{co}\,B+U$。再由练习 $\tilde{}$ 55] $z^*\in$ A $u^*\in U$(i)，可得某个 co 以及使得 $\tilde{}\,y_0^*+\gamma y^*=z^*_{|L}+u^*_{|L}\in z^*_{|L}+U.$。因此，

$$x_0^*+\gamma x^*\in z^*+u^*+L^\perp\subset\mathrm{co}\left(A+L^\perp\right)+U.$$

此外，由于 dom $f_t\subset L$，我们有 $\partial_\varepsilon f_t(x)+L^\perp=\partial_\varepsilon f_t(x)+\partial\mathrm{I}_L(x)\subset\partial_\varepsilon(f_t+\mathrm{I}_L)(x)=\partial_\varepsilon f_t$ (x)。因此，对所有 $\gamma>0$，$x_0^*+\gamma x^*\in\mathrm{co}\,A+U$，而 U的任意性意味着 $x_0^*+\gamma x^*\in\mathrm{co}A.$。因此，$x^*\in[\mathrm{co}A]_\infty$. ■

3 定义域法锥的刻画

本节旨在刻画上确界函数的（有效）定义域的法锥

$$f:=\sup_{t\in T}f_t,$$

其中假设每个 $f_t:X\to\mathbb{R}$，$t\in T$，都是凸的。公式 $\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\,f}(x)$ 将依赖于在 x 处活跃的函数的-次微分，以及非-活跃函数的次微分；后者将以适当的权重参与其中。非适定函数也很重要，因为它们通过-法集 $N^\varepsilon_{\mathrm{dom}\,f_t}(x)$作出贡献。

我们首先引入一族权重参数，用于惩罚在给定名义点 ε 处非 $x\in\mathrm{dom}\,f$-活跃的约束

定义 1 设 $f_t: X \to \mathbb{R}_\infty, t \in T$, 为凸函数，并记 $f := \sup_{t\in T} f_t$。对于 $x \in \operatorname{dom} f$ 和 $\varepsilon > 0,$，我们将 x 处非-ε-活跃指标的惩罚权重定义为

$$\rho_{t,\varepsilon} := \frac{-\varepsilon}{2f_t(x) - 2f(x) + \varepsilon} \text{ if } t \in T \setminus T_\varepsilon(x),\ \rho_{t,\varepsilon} := 1 \text{ if } t \in T_\varepsilon(x), \tag{14}$$

w这里 $T_\varepsilon(x)$是由 x 给定的 ε-活跃约束集合 出的

$$T_\varepsilon(x) := \{t \in T : f_t(x) \geq f(x) - \varepsilon\}. \tag{15}$$

为避免可能的混淆，我们有时将$\rho_{t,\ \varepsilon}$ 记作$\rho_{t,\ \varepsilon,\ x}$，以强调其对参考点 x.的依赖

下一个引理阐明了上文引入的权重$\rho_{t,\ \varepsilon,\ x}$ 的作用，表明它们确保量$\rho_{t,\ \varepsilon} f_t(x)$ 关于 $t \in T$.一致地有下界

引理 3 设 $f_t: X \to \mathbb{R}_\infty,\ t \in T,$ 为凸函数，且 $f := \sup_{t\in T} f_t$。取定 $x \in$ 定义域 f 和$\varepsilon > 0.$。则每个$\rho_{t,\ \varepsilon}$ 均定义良好，并且对所有 $t \in T,$

$$0 < \rho_{t,\varepsilon} = \varepsilon(\max\{2f(x) - 2f_t(x) - \varepsilon, \varepsilon\})^{-1} \leq 1, \tag{16}$$

$$\min\{f(x), 0\} \leq \rho_{t,\varepsilon} f(x) \leq \rho_{t,\varepsilon} f_t(x) + \varepsilon. \tag{17}$$

特别地，对所有 $\delta > 0$ 和 $t \in T_{\varepsilon+\delta}(x)$,

$$\varepsilon/(\varepsilon + 2\delta) \leq \rho_{t,\varepsilon} \leq 1. \tag{18}$$

证明。记为 $\rho_t := \rho_{t,\varepsilon \cdot}$。将每个函数 f_t 替换为 $f_t - f(x)$ 后，不失一般性，我们可以假设 $f(x) = 0.$。关系式 (16) 由以下事实可得：$t \in T \setminus T_\varepsilon(x)$ 等价于 $-2f_t(x) - \varepsilon > -f_t(x) > \varepsilon$。此外，给定任意 $\delta > 0$ 和 $t \in T_{\varepsilon+\delta}(x) \setminus T_\varepsilon(x)$，有 $\frac{\varepsilon}{\rho_t} = -2f_t(x) - \varepsilon \leq 2\delta + \varepsilon$，因此 $\rho_t \geq \varepsilon/(2\delta + \varepsilon)$。于是，对于所有 $t \in T_\varepsilon(x)$，(18) 成立，因为 $\rho_t = 1 \geq \varepsilon/(2\delta + \varepsilon)$。最后，若 $t \in T \setminus T_\varepsilon(x)$，则

$$\rho_t f_t(x) = -\varepsilon \frac{-f_t(x)}{-2f_t(x) - \varepsilon} = -\varepsilon \frac{-f_t(x)}{(-f_t(x) - \varepsilon) - f_t(x)} \geq -\varepsilon \frac{-f_t(x)}{-f_t(x)} = -\varepsilon,$$

且（17）成立。因此，证明完毕，因为（17）对于 $t \in T_\varepsilon$（x）（其中$\rho_t = 1$）显然成立。

■

下一个引理描述了权重 $\rho_{t,\ \varepsilon}$ 的某些性质，这些性质将在后文中用到。

引理 4 设 $f_t: X \to \mathbb{R}_\infty,\ t \in T,$ 为凸函数，并令 $f := \sup_{t\in T} f_t$. Fix$x \in f^{-1}(\mathbb{R})$。

(*i*) 设 $\varepsilon > 0$ 满足 $T \setminus T_\varepsilon(x) \neq \emptyset,$ 并定义 $f_0 := \sup_{t\in T\setminus T_{\varepsilon(x)}} f_t$ 和 $\tilde{\rho}_{t,\ \varepsilon} :=\varepsilon(\max\{2f_0(x) - 2f_t(x) - \varepsilon,\ \varepsilon\})^{-1},\ t \in T.$ 那么

$$1 \leq \inf_{t\in T} \frac{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon}}{\rho_{t,\varepsilon}} \leq \sup_{t\in T} \frac{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon}}{\rho_{t,\varepsilon}} < +\infty.$$

(*ii*) 对于 $i=1,\ 2$，设 $\varepsilon_i>0$ 满足 $T\setminus T_{\varepsilon_i(x)}\neq\emptyset$，并定义 $f_i:=\sup_{t\in T\setminus T_{\varepsilon_i(x)}} f_t$ 和 $\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_i}:=\varepsilon(\max\{2f_i(x)-2f_t(x)-\varepsilon_i,\ \varepsilon_i\})^{-1},\ \ t\in T$. 那么

$$\sup_{t\in T}\frac{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_1}}{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_2}}<+\infty,$$

且集合族 $B_\varepsilon:=\mathrm{co}(\cup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(\bar{x})}\partial_\varepsilon(\tilde{\rho}_{t,\varepsilon}f_t)(x))$ $\varepsilon>0$, 随 $\varepsilon\downarrow 0$. 单调不减

证明。 (*i*) 由于 $f\geq f_0$ 且

$$\frac{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon}}{\rho_{t,\varepsilon}}=\frac{\max\{2f(x)-2f_t(x)-\varepsilon,\varepsilon\}}{\max\{2f_0(x)-2f_t(x)-\varepsilon,\varepsilon\}},\ \text{for all } t\in T, \tag{19}$$

由此可得 $\inf_{t\in T}\frac{\rho_t}{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon}}\geq 1.$ 接下来，选取充分大的 $M_0>2(\varepsilon-f(x))$，使得对于每个满足 $|M|\geq M_0$ 的实数 M，都有 $\frac{\max\{2f(x)-M-\varepsilon,\varepsilon\}}{\max\{2f_0(x)-M-\varepsilon,\varepsilon\}}\leq 2.$ 若 $t\in T$ 满足 $-2f_t(x)\geq M_0$. 则由 (19) 得到 $\frac{\rho_t}{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon}}\leq 2.$ 否则，$-2f_t(\theta)<M_0$，且有 $\frac{\rho_t}{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon}}\leq\frac{\max\{2f(x)+M_0-\varepsilon,\varepsilon\}}{\max\{2f_0(x)-2f_t(x)-\varepsilon,\varepsilon\}}\leq\frac{2f(x)+M_0-\varepsilon}{\varepsilon}$，从而证明了 $\sup_{t\in T}\frac{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon}}{\rho_{t,\varepsilon}}<+\infty.$

(*ii*) 选取充分大的 $M_1>2(\varepsilon_2-\max_{i=1,2}f_i(x))$，使得对于每个满足 $|M|\geq M_1$, 的实数M，都有 $\frac{\max\{2f_2(x)-M-\varepsilon_2,\varepsilon_2\}}{\max\{2f_1(x)-M-\varepsilon_1,\varepsilon_1\}}\leq 2+\varepsilon_2/\varepsilon_1$. 若 $t\in T$满足$-2f_t(x)\geq M_1$, 则

$$\frac{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_1}}{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_2}}=\frac{\varepsilon_1\max\{2f_2(x)-2f_t(x)-\varepsilon_2,\varepsilon_2\}}{\varepsilon_2\max\{2f_2(x)-2f_t(x)-\varepsilon_1,\varepsilon_1\}}\leq 2+\varepsilon_2/\varepsilon_1.$$

否则，$-2f_t(\theta)<M_1$，并且有

$$\frac{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_1}}{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_2}}\leq\frac{\max\{2f_2(x)+M_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2\}}{\max\{2f_1(x)-2f_t(x)-\varepsilon_1,\varepsilon_1\}}\leq\frac{2f_2(x)+M_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

从而证明了 $\sup_{t\in T}\frac{\rho_t}{\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_2}}<+\infty.$

现在假设 $\varepsilon_1\leq\varepsilon_2$. 由前述结论可知，存在 $r_1,\ r_2>0$ 使得 $\varepsilon_1\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_2}\leq r_1\varepsilon_2\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_1}\leq r_1r_2\varepsilon_1\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_2}$, 对所有 $t\in T$. 因此，应用引理 1 可得

$$[B_{\varepsilon_2}]_\infty=\left[\bigcup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_{\varepsilon_2}(x)}\partial_{\varepsilon_2}(\tilde{\rho}_{t,\varepsilon_1}f_t)(x)\right]_\infty\subset[B_{\varepsilon_1}]_\infty,$$

其中，在最后一个包含关系中，我们用到了这样一个简单事实：$\mathcal{P}\setminus T_{\varepsilon_2}(x)\subset\mathcal{P}\setminus T_{\varepsilon_1}(x)$。■

以下引理是定理 6 证明所需的。其作用是控制进入上确界的次微分的约束数量，使其相对于底层（有限维）子空间的维数而言保持适当。

引理 5 给定 $f_1,\cdots,f_m\in\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$，其中 $m>n+1$，以及 $f:=\max_{1\leq i\leq m}f_i$, 对于每个$x\in$ 定义域 f 和 $\varepsilon>0$，我们都有

$$\partial_\varepsilon f(x)\subset\{\partial_\varepsilon f_\lambda(x):\lambda\in\Delta_m,\ f_\lambda(x)\geq f(x)-\varepsilon,\ |\mathrm{supp}\,\lambda|\leq n+1\}, \tag{20}$$

其中 $|\operatorname{supp}\ \lambda|$ 表示 $\operatorname{supp}\ \lambda$ 的基数，且 $f_\lambda := \sum_{i\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_i f_i$。

证明。 首先，假设 $\theta \in \partial_\varepsilon f(x)$。根据 [9, 定理 1]（另见 [3,推论 5]），存在 $\lambda \in \Delta_m$ 满足 $|\operatorname{supp}\lambda| \le n+1$，使得

$$f(x) \le \inf_{\mathbb{R}^n} f + \varepsilon = \inf_{\mathbb{R}^n} f_\lambda + \varepsilon.$$

因此，$f_\lambda(x) \le f(x) \le \inf_{\mathbb{R}^n} f_\lambda + \varepsilon \le f_\lambda(x) + \varepsilon$，由此可推得 $\theta \in \partial_\varepsilon f_\lambda(x)$，其中 $f_\lambda(x) \ge f(x) - \varepsilon$.更一般地，给定 $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$，我们考虑函数$g_i := f_i - \langle x^*, \cdot\rangle \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ $i = 1, \cdots, m$，以及 $g := \max_{1\le i\le m} g_i$。那么 $\theta \in \partial_\varepsilon g(x)$，上述论证可得一个

$\lambda \in \Delta_m$ | $\lambda| \le n+1$ $\sum_{i\in}$ $_\lambda \lambda_i g_i\ x\ \ge$，使得 supp , supp ( ) ( ) $g\ x\ -\varepsilon$ $\theta \in \partial_\varepsilon \sum_{i\in}$ $_\lambda \lambda_i g_i\ \ x\ = \partial_\varepsilon f_\lambda\ x\ - x^*.$ λ $f_\lambda\ x$ and (supp)( ) ( ) 等价地，满足 ( ) $\ge$
$f\ x\ -\varepsilon$ $x^* \in \partial_\varepsilon f_\lambda\ x$, 20 ■ ( ) and ( )，这表明 ( ) 成立。

下面的结果给出了在所有函数$\operatorname{dom} f$N$x(x)$均属于 f_t 的情况下，法锥 $\Gamma_0(X)$的一个刻画。稍后将以推论的形式给出该结果的更一般版本。请记住，权重$\rho_{t,\ \varepsilon,\ x}$ 在（14）中定义。

定理 6 设 $f_t\colon X \to \mathbb{R}_\infty$, $t \in T$, 是正则下半连续凸函数，并记 $f := \sup_{t\in T} f_t$. 那么，对于每个 $x \in$ 定义域 f，都有

$$\mathrm{N}_{\operatorname{dom} f}(x) = \left[\overline{\operatorname{co}}\left(\bigcup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x)\right)\right]_\infty, \tag{21}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$ 及任意 $\alpha_t \ge \rho_{t,\varepsilon}$，使得 $\sup_{t\in T}\alpha_t < +\infty$ 且 $\inf_{t\in T}\alpha_t f_t(x) > -\infty$.因此，

$$\mathrm{N}_{\operatorname{dom} f}(x) = \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\operatorname{co}}\left(\bigcup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\varepsilon\alpha_t f_t)(x)\right), \tag{22}$$

前提是后一集合非空；否则，$\mathrm{N}^{\operatorname{dom} f}(x) = \{\theta\}$.

注 1（证明之前）更准确地说，正如证明中所示，（⊂在（21）中的包含关系“$\inf_{t\in T}\alpha_t f_t(x) > -\infty$”无需假设条件；事实上，只有反向包含关系才需要这一最后的假设。

证明。固定 $x \in$ 定义域 f和 $\varepsilon > 0$。由于每个 f_t 都是正则的，我们有 $f(x) \in \mathbb{R}$, 并且不失一般性地假设 $f(x) = 0$. 。我们将证明分为五个步骤。在步骤 1-3 中，我们在参数 α_t 满足 $\alpha_t \ge \rho_{t,\varepsilon}$ 和 $\sup_{t\in T}\alpha_t < +\infty$. 的假设下，证明式 (21) 中的包含“⊂”。附加条件 $\inf_{t\in T}\alpha_t f_t(x) > -\infty$ 仅在步骤 4 中施加，我们将在该步骤证明式 (21) 中的包含“⊃”。最后，步骤 5 给出了式 (22) 的证明。

步骤 1. 在这第一步中，我们假设 X 是（有限） n维的。根据 [12, 定理 7], , 对于任意固定的指标 $t_0 \in T_{\varepsilon/2}(x)$，我们有

$$\mathrm{N}_{\operatorname{dom} f}(x) = \left[\overline{\operatorname{co}}\left(\cup_{J\in\mathcal{T}}\partial_{\varepsilon/2} f_J(x)\right)\right]_\infty, \tag{23}$$

其中 $\mathcal{T}:=\{J\subset T:\ t_0\in J,\ |J|<+\infty\}$ 和 $f_J:=\max_{t\in J} f_t,\ J\in\mathcal{T}$. 更确切地说，对于每个固定的 $J:=\{t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_{m-1}\}\in\mathcal{T}$ 且满足 $m\geq n+1$，我们有 $f_J(x)\geq f_{t_0}(x)\geq -\varepsilon/2$. 此外，若设 $f_\lambda:=\sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_t f_t$，则应用引理 5 可得

$$\partial_{\frac{\varepsilon}{2}} f_J(x)\subset\bigcup_{\substack{\lambda\in\Delta_m\\ \operatorname{supp}\lambda\subset J}}\left\{\partial_{\frac{\varepsilon}{2}} f_\lambda(x): f_\lambda(x)\geq f_J(x)-\frac{\varepsilon}{2}\geq-\varepsilon,\ \ |\operatorname{supp}\lambda|\leq n+1\right\}. \quad (24)$$

现在我们断言，任意一个 $\lambda\in\Delta_m$ 出现在（24）中的都满足

$$\lambda_t\leq 2\alpha_t,\ \text{for all } t\in\operatorname{supp}\lambda, \quad (25)$$

其中 $\alpha_t\geq\rho_{t,\ \varepsilon}$ 满足 $\sup_{t\in T}\alpha_t<+\infty$. 为证明这一断言，我们考虑集合 $J_\varepsilon:=\{t\in\operatorname{supp}\lambda:\ f_t(x)\geq-\varepsilon\}$，该集合非空；否则，$f_\lambda(x)<-\varepsilon$，这与（$\lambda$ 中的选择相矛盾 24）。注意到

$$\sum_{t\in J_\varepsilon}\lambda_t(f_t(x)+\varepsilon/2)+\sum_{t\in(\operatorname{supp}\lambda)\setminus J_\varepsilon}\lambda_t(f_t(x)+\varepsilon/2)=f_\lambda(x)+\varepsilon/2\geq-\varepsilon/2, \quad (26)$$

并且，由于 $-\varepsilon\leq f_t(x)\leq f(x)=0$ 对每个 $t\in J_\varepsilon$,

$$\varepsilon/2\geq(\varepsilon/2)\sum_{t\in J_\varepsilon}\lambda_t\geq\sum_{t\in J_\varepsilon}\lambda_t(f_t(x)+\varepsilon/2)\geq-(\varepsilon/2)\sum_{t\in J_\varepsilon}\lambda_t. \quad (27)$$

因此，结合（26）和（27）可得

$$\sum_{t\in(\operatorname{supp}\lambda)\setminus J_\varepsilon}\lambda_t(f_t(x)+\varepsilon/2)\geq-(\varepsilon/2)-\sum_{t\in J_\varepsilon}\lambda_t(f_t(x)+\varepsilon)\geq-\varepsilon.$$

同时，每个指标 $t\in(\operatorname{supp}\lambda)\setminus J_\varepsilon$ 属于 $T\setminus T_\varepsilon(x)$ 并满足 $\lambda_t(f_t(x)+\varepsilon/2)<0$. 那么（27）进一步推出

$$\lambda_t(f_t(x)+\varepsilon/2)\geq\sum_{s\in(\operatorname{supp}\lambda)\setminus J_\varepsilon}\lambda_s(f_s(x)+\varepsilon/2)\geq-\varepsilon$$

并且，因此，

$$\lambda_t\leq\frac{-\varepsilon}{f_t(x)+\varepsilon/2}=\frac{-2\varepsilon}{2f_t(x)+\varepsilon}=2\rho_{t,\varepsilon}\leq 2\alpha_t.$$

因此，结论（25）得证，对于所有 $t\in J_\varepsilon(\subset T_\varepsilon(x))$。

步骤 2。现在，我们将 Hiriart-Urruty 与 Phelps 定理（参见 [4, 命题 4.1。16]）应用于函数 $f_t\in\Gamma_0(X)$，这些函数定义在 X（假设维数为 n）上。对于每个 $J\in\mathcal{T}$，结合（24）和（25）可得

$$\begin{aligned}\partial_{\frac{\varepsilon}{2}} f_J(x)&\subset\bigcup_{\substack{\lambda\in\Delta_m\\ \operatorname{supp}\lambda\subset J}}\left\{\sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda}\partial_{\varepsilon/2}(\lambda_t f_t)(x):|\operatorname{supp}\lambda|\leq n+1,\ \lambda_t\leq 2\alpha_t\right\}+\varepsilon\mathbb{B}_{X^*}\\ &\subset\varepsilon\mathbb{B}_{X^*}+(n+1)\operatorname{co}\{\cup_{t\in\operatorname{supp}\lambda,\ \lambda\in\Delta_m,\lambda\subset J}\{\partial_{\varepsilon/2}(\lambda_t f_t)(x):\\ &\qquad |\text{支撑 }\lambda|\leq n+1,\ \lambda_t\leq 2\alpha_t\}\}\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{B}_{X^*}$ 表示该（n维）对偶空间 X^* 的 X单位球。因此，利用 [4, (3.52), 第 80]，（23）式可简化为

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) &= \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{J\in\mathcal{T}}\partial_{\varepsilon/2} f_J(x)\right)\right]_\infty = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{J\in\mathcal{T}}(n+1)^{-1}\partial_{\varepsilon/2} f_J(x)\right)\right]_\infty \\ &\subset \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{0<\lambda_t\le 2\alpha_t}\partial_\varepsilon\left(\lambda_t f_t\right)(x) + \varepsilon\mathbb{B}_{X^*}\right)\right]_\infty = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{0<\lambda_t\le 2\alpha_t}\partial_\varepsilon\left(\lambda_t f_t\right)(x)\right)\right]_\infty,\end{aligned}$$

和引理1可推出包含关系“$\subset$”（见式（21）。

步骤 3。为证明当 X 为无限维时，式（21）中的包含关系“$\subset$”仍成立，我们选取一个（弱星） θ-邻域 $U \subset X^*$，并选择 $L \in \mathcal{F}(x)$ 使得 $L^\perp \subset U$。令 $g_t \in \Gamma_0(L)$ $t \in T$ 表示 $f_t + \mathrm{I}_L$ 在有限维空间 L 上的限制，并记 $g := \sup_{t\in T} g_t = f + \mathrm{I}_L$。由于 $x \in L$，族 $\{f_t, t \in T\}$ 和 $\{g_t, t \in T\}$ 定义了相同的 ε-积极集 $T_\varepsilon(x)$ 以及相同的数值 $\rho_{t,\varepsilon}$ （见式（14））。于是，由于式（21）中的包含关系“$\subset$”对族$\{g_t, t \in T\}$成立，我们得到 $\mathrm{N}^{\mathrm{dom}\, g}(x) \subset \left[\mathrm{co}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\alpha_t g_t)(\bar{x})\right)\right]_\infty$. 此外，已知 $\mathrm{N}^{\mathrm{dom}\, g}(x) = \{x^*_{|L} \in L^* : x^* \in \mathrm{N}^{L\cap\mathrm{dom}\, f}(x)\}$（见 [4, 练习 55(i)]），并且

$$\left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\alpha_t g_t)(x)\right)\right]_\infty \subset \left\{x^*_{|L} : x^* \in \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\alpha_t f_t + \mathrm{I}_L)(x)\right)\right]_\infty\right\},$$

由引理 2，我们得出

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{L\cap\mathrm{dom}\, f}(x) &\subset \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\alpha_t f_t + \mathrm{I}_L)(x)\right)\right]_\infty + L^\perp \\ &\subset \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x) + L^\perp\right)\right]_\infty + L^\perp \\ &\subset \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x) + L^\perp\right)\right]_\infty,\end{aligned}$$

其中，第二个和第三个包含关系分别由 [4, 命题 4.1。16] 和（3）得出。因此，对所有有限维子空间 $L' \supset L$取交集后，我们得到

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) \subset \cap_{L'\supset L}\mathrm{N}_{L'\cap\mathrm{dom}\, f}(x) \subset \cap_{L'\supset L}\left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x) + L^\perp\right)\right]_\infty.$$

最后，（$\subset$21）中的包含关系“4”由（）可得。

步骤 4. 为证明（21）中的包含“$\supset$”，固定 $\varepsilon > 0$，并令 α 如定理陈述所述。选取 $t_0 \in T$，并取 $x_0^* \in \partial_\varepsilon(\alpha_{t_0} f_{t_0})(x)$（其非空，因为 $f_t \in \Gamma_0(X)$ 且 $\alpha_{t_0} > 0$）。给定（21）右侧中的 x^* 以及 $\beta > 0$，我们找到网 $(k_j)_j \subset \mathbb{N}$、$(\lambda_{j,1}, \cdots, \lambda_{j,k_j})_j \subset \Delta_{k_j}$、$(t_{j,1}, \cdots, t_{j,k_j})_j \subset T$，以及元素 $x^*_{j,i} \in \partial_\varepsilon(\alpha_{t_{j,i}} f_{t_{j,i}})(x)$，分别对应 $i = 1, \cdots, k_j$，使得 $x_0^* + \beta x^* = \lim_j(\lambda_{j,1}x^*_{j,1} + \cdots + \lambda_{j,k_j}x^*_{j,k_j})$。固定 $y \in$ 定义域 f ($\subset$ 定义域 f_t)。由于 $\sup_{t\in T}\alpha_t$ 有限且 $\inf_{t\in T}\alpha_t f_t(x) > -\infty$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle x_0^* + \beta x^*, y - x\rangle &= \lim_j \langle \lambda_{j,1}x^*_{j,1} + \cdots + \lambda_{j,k_j}x^*_{j,k_j}, y - x\rangle \\ &\le \limsup_j \textstyle\sum_{i=1}^{k_j}\lambda_{j,i}\left(\alpha_{t_{j,i}} f_{t_{j,i}}(y) - \alpha_{t_{j,i}} f_{t_{j,i}}(x) + \varepsilon\right) \\ &\le \limsup_j \textstyle\sum_{i=1}^{k_j}\lambda_{j,i}\left(\alpha_{t_{j,i}} f^+(y) - \alpha_{t_{j,i}} f_{t_{j,i}}(x) + \varepsilon\right)\end{aligned}$$

$$\leq (\sup_{t\in T}\alpha_t) f^+(y) - \inf_{t\in T}\alpha_t f_t(x) + \varepsilon.$$

因此，将上述不等式除以 β 并令 $\beta \to +\infty$，得到 $\langle x^*,\ y-x\rangle \leq 0$，对所有 $y\in$定义域 $f=$定义域 f^+，这证明了 $x^* \in \mathrm{N}^{\mathrm{dom}\, f}$（$x$）。定理的证明至此完成。

步骤 5. 令 $A_\varepsilon := \mathrm{co}\,(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon(\varepsilon\alpha_t f_t)(x))$ $\varepsilon>0$. 由于 $\lambda A_\varepsilon = A_{\lambda\varepsilon}$ 对所有 ε，$\lambda>0$，因此可得 $\{\theta\}\cup(\cap_{\varepsilon>0}A_\varepsilon)$ 是一个非空闭锥。因此，结合引理 1 和（2），对（$\varepsilon>0$ 中的 21）取交，得到

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \cap_{\varepsilon>0}\left[A_\varepsilon \cup \{\theta\}\right]_\infty = \left[\{\theta\}\cup\cap_{\varepsilon>0}A_\varepsilon\right]_\infty = \{\theta\}\cup(\cap_{\varepsilon>0}A_\varepsilon),$$

从而证明了（22）。 ■

以下推论给出了定理 6 的一个典型例子，它描述了闭凸集的无限交的法锥，且不要求任何内点条件。涉及精确法锥而非ε-法集的表示，通常需要额外的内点条件和闭包型对偶条件（例如参见 [2, 8]）。该结果的有限维版本可见 [10, 命题 3。1]。以下结果也可由后续章节中的推论 13 推出。

推论 7 设 $C_t\subset X, t\in T,$ 为闭凸集，并记 $C:=\cap_{t\in T}C_t$。那么，对每个 $x\in C,$

$$\mathrm{N}_C(x) = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{t\in T}\mathrm{N}^\varepsilon_{C_t}(x)\right)\right]_\infty, \text{ for every } \varepsilon>0, \tag{28}$$

因此，

$$\mathrm{N}_C(x) = \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{t\in T}\mathrm{N}^\varepsilon_{C_t}(x)\right).$$

特别地，若 C_t 另外还是线性子空间，则 $C^\perp =$线性张成 $\left(\cup_{t\in T}C_t^\perp\right)$。 ——

证明。 第一个等式由将定理 6应用于族 $\{f_t := \mathrm{I}_{C_t}, t\in T\}$. 接下来，由于 $\theta\in \mathrm{N}^\varepsilon_{C_t}(x)$ 对所有 $t\in T$ 及所有 $\varepsilon>0$, 对 ($\varepsilon>0$ 在 (28) 中取交集，再结合 (2)，得到

$$\mathrm{N}_C(x) = \cap_{\varepsilon>0}\left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\mathrm{N}^\varepsilon_{C_t}(x)\right)\right]_\infty = \left[\cap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\mathrm{N}^\varepsilon_{C_t}(x)\right)\right]_\infty.$$

因此，第二个结论可由以下事实推出：$\cap_{\varepsilon>0}\mathrm{co}\left(\cup_{t\in T}\mathrm{N}^\varepsilon_{C_t}(x)\right)$ 是一个闭凸锥，因为对所有 $\lambda>0$，$\lambda\mathrm{N}^\varepsilon_{C_t}(x) = \mathrm{N}^{\lambda\varepsilon}_{C_t}(x)$, 。 ■

当下确界 $_{t\in T}\, f_t(x) > -\infty$的情形涵盖了 T 为有限值的情况，并导出法锥的一个简单刻画。更准确地说，我们有：

推论 8 设 $f, f_t: X \to \mathbb{R}_\infty$, $t \in T$，如定理 6所述。那么，对每个 $x \in$ 定义域 f，都有

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) \subset \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{t\in T} \partial_\varepsilon f_t(x)\right)\right]_\infty, \text{ for all } \varepsilon > 0.$$

此外，如果 下确界$_{t\in T} f_t(x) > -\infty$，则 （21）和（22）在 $\alpha_t = 1$ 下成立，对所有 $t \in T$.

证明。 应用定理 6 和注记 1 ，取 $\alpha_t = 1, \quad t \in T.$ ■

上述推论中的包含关系仍可能具有独立的意义，尤其是在推导必要的最优性条件方面。然而，权重 α_t 对于获得法锥的精确表示是必不可少的，因为反向包含一般可能不成立，如下面的一维例子所示。

例 1 考虑如下定义的（仿射）函数 $f_t \in \Gamma_0(\mathbb{R})$

$$f_t(x) := tx - t, \ t \in T := \mathbb{R}_+, \text{ and } f := \sup_{t\in T} f_t = \mathrm{I}_{]-\infty,1]}.$$

于是 $f(1) = f(0) = 0$，且 dom $f =]-\infty, \ 1]$. 给定 $\varepsilon > 0$ 和 $x \le 1$，我们有 $T_\varepsilon(0) = [0, \varepsilon]$, $\partial_\varepsilon f_t(x) = \{t\}$ 对所有 $t \ge 0$ 均成立，因此

$$\left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\ge 0}\partial_\varepsilon f_t(0)\right)\right]_\infty = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\ge 0}\partial_\varepsilon f_t(1)\right)\right]_\infty = \mathbb{R}_+.$$

同时，我们有

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(1) = \mathbb{R}_+ = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\ge 0}\partial_\varepsilon f_t(1)\right)\right]_\infty, \ \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(0) = \{0\} \subsetneq \mathbb{R}_+ \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\ge 0}\partial_\varepsilon f_t(0)\right)\right]_\infty,$$

并且，定理 21）中的（6 在 $\alpha_t = 1, t \in T,$ 处适用， $x = 1$ 但在 $x = 0.$ 处不适用。事实上，我们有

$$\inf_{t\in T} f_t(1) = 0(> -\infty) \quad \text{and} \quad \inf_{t\in T} f_t(0) = \inf_{t\ge 0}(-t) = -\infty;$$

也就是说，参数 $\alpha_t \equiv 1$ 在 6 处满足定理 $x = 1,$ 但在 $x = 0.$处不满足要求

要通过定理 $\mathrm{N}^{\mathrm{dom}\, f}(0)$ 得到 6的精确表示，我们需要考虑（$\rho_{t,\varepsilon,0}$）中定义的参数 14。实际上，在当前情形下，我们有 $\rho_{t,\varepsilon,0} = \varepsilon(\max\{2t - \varepsilon, \varepsilon\})^{-1}$ ，推论 10 为

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(0) = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{t\le\varepsilon} \partial_\varepsilon f_t(0) \cup \bigcup_{t>\varepsilon} \partial_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon t}{2t-\varepsilon} f_t\right)(0)\right)\right]_\infty \tag{29}$$

$$= \left[\overline{\mathrm{co}}\left([0,\varepsilon] \cup \bigcup_{t>\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon t}{2t-\varepsilon}\right\}\right)\right]_\infty. \tag{30}$$

因此，由于集合 $\left\{\cup_{t>\varepsilon}\varepsilon t(2t-\varepsilon)^{-1}\right\}$有界，我们可以推出 $\mathrm{N}^{\mathrm{dom}\, f}(0) = \{0\}$.

定理 6 在仿射情形下形式更为简单，以下两个例子对此作了说明。

例 2 考虑函数

$$f := \sup_{t\in T} f_t := \langle a_t, \cdot\rangle - b_t, \ a_t \in X^*, \ b_t \in \mathbb{R},$$

其中 T 是任意集合。固定 $x \in$ 定义域 f。将（21）应用于 $\alpha_t = \rho_{t,\varepsilon} =_{\varepsilon}$ 最大值$\{2f(x) - 2\langle a_t, x\rangle + 2b_t - \varepsilon, \varepsilon\}$ 对所有 $t \in T$（见（14））， 我们得到

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \left[\overline{\mathrm{co}}\left\{\rho_{\varepsilon,t} a_t : t \in T\right\}\right]_\infty, \text{ for every } \varepsilon > 0,$$

当 22成立时，蕴含

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \{\theta\} \cup (\cap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}\left\{\varepsilon\rho_{\varepsilon,t} a_t : t \in T\right\}).$$

特别是，只要 $\inf_{t\in T}(\langle a_t, x\rangle - b_t) > -\infty$, 推论 8 就可推出

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\{a_t\}\right)\right]_\infty = \{\theta\} \cup (\cap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T}\{\varepsilon a_t\}\right)).$$

例 3 考虑非空集 $A \subset X^*$. 的支撑函数 σ_A 给定 $x \in$ 定义域 σ_A,定理6 可得

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, \sigma_A}(x) = \left[\overline{\mathrm{co}}\left\{\rho_{\varepsilon,t} a : a \in A\right\}\right]_\infty, \text{ for every } \varepsilon > 0, \tag{31}$$

其中 $\rho_{\varepsilon,t} :=$ $\frac{\varepsilon}{\max\{2\sigma_A(x) - \langle 2a, x\rangle - \varepsilon, \varepsilon\}}$. 此外，若 $\sigma_A(-x) < +\infty$, 则

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, \sigma_A}(x) = \left[\overline{\mathrm{co}}(A)\right]_\infty.$$

注意到，根据双极定理，(31) 等价于

$$\mathrm{cl}\left(\mathbb{R}_+(\mathrm{dom}\, \sigma_A - x)\right) = \left(\left[\overline{\mathrm{co}}\left\{\rho_{\varepsilon,t} a : a \in A\right\}\right]_\infty\right)^-,$$

对于 $x = \theta$, 这可简化为经典恒等式 cl(定义域 σ_A) $= ([\mathrm{co}\,(A)]_\infty)^-$ (参见，即 [4, (3.52)，第 80] 页)。

接下来，我们将定理 6推广到更一般的情形，其中

$$\mathcal{P} := \{t \in T : f_t \text{ is proper}\} \subsetneq T,$$

从而允许其中一些（下半连续凸）函数 f_t 为非正常函数。这一推广源于这样一个事实：在实际问题中，定理 6 中的下半连续性假设$^-$ $^-$可以由闭包条件 $f = \sup_{t\in T} f_t$ 取代（见 [4]）。然而，在无限维情形下，这种改写可能会产生不再是正则函数的凸下半连续$^-$函数 f_t，即使原来的 f_t是正则函数。

下述结果的证明主要依赖定理 6，它表明，非正常函数对于刻画 $\mathrm{N}^{\mathrm{dom}\, f}(x)$， 仍然具有重要意义，因为它们通过其（有效）定义域发挥作用。

定理 9 给定下半连续凸函数 $f_t : X \to \mathbb{R}$, $t \in T$, 以及 $\overline{f} := \sup_{t\in T} f_t$, 对于任意$x \in$ 定义域 f，有

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\left(\bigcup_{t\in\mathcal{P}} \partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)\right)\right)\right]_\infty,$$

对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\alpha_t \geq \rho_{t,\varepsilon}$ $(t \in \mathcal{P})$ 使得 $\sup_{t\in\mathcal{P}} \alpha_t < +\infty$ 和 $\inf_{t\in\mathcal{P}} \alpha_t f_t(x) > -\infty$ ($\rho_{t,\varepsilon,x}$ 在 (14) 中有定义。因此，

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}\left(\left(\bigcup_{t\in\mathcal{P}} \partial_\varepsilon(\varepsilon\alpha_t f_t)(x)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)\right)\right),$$

前提是后一个集合非空；否则，$\mathrm{N}^{\mathrm{dom}\, f}(x) = \{\theta\}$.

证明。固定 $x \in$ 定义域 $f, \varepsilon > 0$ 并令 α_t 如定理陈述所述。首先假设 $f(x) > -\infty$. 定义函数 $g_t \in \Gamma_0(X)$ 如下：若$t \in \mathcal{P}$，则为 $g_t := f_t$ ；若 $t \in T \setminus \mathcal{P}$，则为 $g_t :=$ $\max\{f_t, f(x) - \varepsilon\}$，并记 $g := \sup_{t\in T} g_t$. 根据下半连续性假设， f 与 g 在 x 的某个邻域内重合，因此，$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, g}(x)$。此外，我们有

$$\frac{-\varepsilon}{2g_t(x) - 2g(x) + \varepsilon} = \frac{-\varepsilon}{2f_t(x) - 2f(x) + \varepsilon} = \rho_{t,\varepsilon}, \text{ for all } t \in \mathcal{P} \setminus T_\varepsilon(x).$$

此外，由于对所有 $t \in T \setminus \mathcal{P}$， $f_t(x) = -\infty$，因此有：$\{t \in T : \ g(x) \geq g_t(x) - \varepsilon\} = T_\varepsilon(x) \cup (T \setminus \mathcal{P})$。此外，由 (10) 可得，对所有 $t \in T \setminus \mathcal{P}.$， $\partial_\varepsilon g_t(x) = \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)$。令 $\alpha_t := 1$ （$t \in T \setminus \mathcal{P}$），于是 $\inf_{t\in T}(\alpha_t g_t)(x) \in \mathbb{R}$。因此，将定理 6 应用于各个 g_t，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, g}(x) &= \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T} \partial_\varepsilon(\alpha_t g_t)(x)\right)\right]_\infty \\
&= \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in\mathcal{P}} \partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x) \cup \cup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \partial_\varepsilon g_t(x)\right)\right]_\infty \\
&= \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in\mathcal{P}} \partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x) \cup \cup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)\right)\right]_\infty,
\end{aligned}$$

由此得到第一个断言。第二个公式则可由第一个公式推得，推导方法与定理证明中的步骤 5 相同6。

现在，假设 $f(x) = -\infty$. 那么 $\mathcal{P} = \emptyset$ 且 $f_t(x) = -\infty$，对所有 $t \in T$. 均成立。考虑下半连续凸函数族 $\{f_t, t \in T, f_0\}$，其中 $f_0 \equiv 1$ （假设 $0 \notin T$）。那么 $\sup_{t\in T\cup\{0\}} f_t(x) = 1 \in \mathbb{R}$。将前述论证应用于函数 $h := \sup_{t\in T\cup\{0\}} f_t$，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, h}(x) &= \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\partial_\varepsilon f_0(x) \cup \left(\cup_{t\in T} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)\right)\right)\right]_\infty \\
&= \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)\right)\right]_\infty = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)\right)\right]_\infty,
\end{aligned}$$

从而得到第一个断言。第二个公式的推导与证明的第一部分类似。

■

定理 6 中对法锥的刻画揭示了以下两者之间的不对称关系：位于 ε处的活跃函数 x 与非活跃函数ε；事实上，只有后者会受到权重的惩罚 $\rho_{t,\ \varepsilon}$ 这些权重在（14）中引入。

推论 10 给定下半连续凸函数 $f_t : X \to \mathbb{R}, \quad t \in T$，定义 $f := \sup_{t\in T} f_t$。那么，对于每个 $x \in$ 定义域 f,

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\left(\bigcup_{t\in T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon(\beta_t f_t)(x)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon \partial_\varepsilon(\beta_t \rho_{t,\varepsilon} f_t)(x)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)\right)\right)\right]_\infty,$$

对于任意 $\varepsilon > 0$、任意满足 $\eta_\varepsilon \downarrow 0$ 的正数，以及任意满足 $0 < \inf_{t\in T} \beta_t \leq \sup_{t\in T} \beta_t < +\infty.$ 的正标量族 $(\beta_t)_{t\in T}$

证明。 由引理 3，权重 $\rho_{t,\ \varepsilon}\ (\in]0,\ 1])$ 满足 $\inf_{t\in T}\rho_{t,\ \varepsilon}f_t(x)\ > -\infty$. 接下来只需对所有 6 应用定理 $\alpha_t = \rho_{t,\ \varepsilon}$ 其中 $t \in T$. 系数 η_ε及 β_t的使用由式（6）和引理 1分别保证。 ■

定理 9 中出现的参数 α_t 可以通过适当修改某些函数 f_t 予以消除，而不改变法锥 $\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)$。在下面的推论中，我们将函数 f_t 替换为适用于 $t \in \mathcal{P}\backslash T_\varepsilon(x)$ 的

$$f_{t,\varepsilon} := \max\{f_t, f(x) - \varepsilon\}. \tag{32}$$

这些新函数保证 下确界$_{t\in\mathcal{P}\backslash T_\varepsilon(x)}\ f_{t,\varepsilon}(x)\ > -\infty$, 同时保持 f. 的定义域不变。此外，根据 [4, 推论 5.1.9], 集合 $\partial_\varepsilon f_{t,\varepsilon}(x)$ 可借助 f_t 表示为

$$\partial_\varepsilon f_{t,\varepsilon}(x) = \bigcup_{\lambda\in]0,1]} \lambda\partial_{\varepsilon_\lambda} f_t(x) \cup \mathrm{N}^{\varepsilon}_{\mathrm{dom}\, f_t}(x),$$

其中 $\varepsilon_\lambda := \lambda^{-1}\varepsilon + f_t(x)\ - f(x)\ + \varepsilon$.

推论 11 设函数 $f_t:\ X\ \to\ \mathbb{R},\ t\ \in\ T$, 为凸且下半连续，并记 $f := \sup_{t\in T} f_t$. 设 $x \in$ 定义域 f. 那么，对每个 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\left(\bigcup_{t\in T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon f_t(x)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in\mathcal{P}\backslash T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon f_{t,\varepsilon}(x)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in T\backslash\mathcal{P}} \mathrm{N}^{\varepsilon}_{\mathrm{dom}\, f_t}(x)\right)\right)\right]_\infty .$$

证明。 取定 $x \in$定义域 f和 $\varepsilon > 0$.。首先，假设 $f(x)\ \in \mathbb{R}$。考虑凸函数 $g, g_t:$ $X \to \mathbb{R}, t \in T$, 定义如下

$$g_t := f_t \text{ if } t \in T_\varepsilon(x) \cup (T \setminus \mathcal{P}),\ g_t := f_{t,\varepsilon} \text{ if } t \in \mathcal{P}\backslash T_\varepsilon(x),\ g := \sup_{t\in T} g_t.$$

注意到，对于所有 $t \in \mathcal{P}$, $g_t \in \Gamma_0(X)$, 且 $\inf_{t\in\mathcal{P}} g_t(x)\ \geq f(x)\ - \varepsilon > -\infty$.。此外，由于 f 是下半连续的，且 $f(x)\ \in \mathbb{R}$, 函数 f 和 g 在x的某个邻域内重合，这意味着 $\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)\ = \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, g}(x)$。因此，对由 $\{g_t, t \in T\}$ 构成且满足 $\alpha_t = 1$、 $t \in \mathcal{P}$. 的族应用定理 9，即可得出结论。

如果 $f(x)\ = -\infty$, 那么，按照定理9的证明中的方法进行推导，并取由 $\{f_t, t \in T, f_0\}$ 构成且满足 $f_0 \equiv 1$. 的族，即可得出结论。 ■

第6节还将进一步刻画法锥，并在上确界函数在某点连续时给出法锥的精细公式。

4 上确界函数的次微分

本节前文关于法锥的结果在此用于刻画上确界函数的次微分集 $\partial f(x)$

$$f := \sup_{t\in T} f_t,$$

其中 $\{f_t\colon X \to \overline{\mathbb{R}},\ t \in T\}$ 是定义在局部凸空间上的任意凸函数族X。众所周知的 $\partial f(x)$ 刻画（例如参见 [1, 13, 14, 17]以及近期出版的著作 [4]）表明，在构造 $\partial f(x)$ 时，起主导作用的是由 $x \in$ 定义域 f 处的 - 活跃指标集索引的函数，

$$T_\varepsilon(x) := \{t \in \mathcal{P} : f_t(x) \geq f(x) - \varepsilon\},\ \varepsilon > 0,$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示正则函数的集合。我们的分析进一步表明，其余的正则函数也会通过由权重 $\rho_{t,\,\varepsilon}$ 定义于（14）中的适当惩罚项发挥作用，

$$\rho_{t,\varepsilon} := \frac{-\varepsilon}{2f_t(x) - 2f(x) + \varepsilon},\ t \in \mathcal{P} \setminus T_\varepsilon(x) \text{ and } \rho_{t,\varepsilon} := 1 \text{ for } t \in T_\varepsilon(x).$$

另一方面，非正常函数通过其对应的 ε-法锥集合参与 ∂f（x）的刻画。下述定理给出了上确界函数 f的次微分的完整刻画，并强调了以下组成部分：

$$A_\varepsilon(x) := \bigcup_{t \in T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon f_t(x),\ B_{\varepsilon,\alpha}(x) := \bigcup_{t \in \mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x),\ C_\varepsilon(x) := \bigcup_{t \in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x). \tag{33}$$

请注意，权重 $\rho_{t,\,\varepsilon}$ 提供了下文所用参数 α_t 的一个示例；参见引理 3。

定理 12 令 $f_t : X \to \mathbb{R}$、$t \in T$为凸且下半连续，并记 $f := \sup_{t\in T} f_t$. 那么，对于每个 $x \in$ 定义域 f，都有

$$\partial f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}\,(A_\varepsilon(x) + \varepsilon(B_{\varepsilon,\alpha}(x) \cup C_\varepsilon(x) \cup \{\theta\}))\,, \tag{34}$$

对于任意 $\alpha_t \geq \rho_{t,\,\varepsilon}$ ($t \in \mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)$)，满足 $\sup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \alpha_t < +\infty$ 且 $\inf_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \alpha_t f_t(x) > -\infty$。

注 2（证明之前）如证明中所示，式（⊂”在（34）中的包含关系无需$\inf_{t\in T} \alpha_t f_t(x) > -\infty$; 后者仅在反向包含关系中才是必要的。此外，根据引理 1，如果将34）中的 α_t ($t \in \mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)$替换为任意标量倍数 $\beta_t\alpha_t$，且满足 $0 < \inf_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \beta_t$ 以及 $\sup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \beta_t < +\infty$.

证明。固定 $x \in$定义域 f. 在整个证明过程中，我们不妨假设 $f(x) \in \mathbb{R}$; 否则，将有 $f_t(x) = f(x) = -\infty$对所有 $t \in T$，且所有集合 $\partial f(x)$ 和 $A_\varepsilon(x)$,$\varepsilon > 0$，均为空。在这种情况下，式（34）显然成立。此外，将每个 f_t替换为 $f_t - f(x)$之后，不失一般性，我们还可假设 $f(x) = 0$.

我们先在非平凡情形下证明 (⊂34) 中的“”，其中 $\partial f(x) \neq \emptyset$.固定 $\varepsilon > 0$，并令 α 如定理陈述所述。取一个 θ-邻域$U \in \mathcal{N}$，并选取 $L \in \mathcal{F}(x)$ 使得 $L^\perp \subset U$. 然后，将定理 9 应用于

族 $\{f_t,\, t\in T;\ \mathrm{I}_L\}$，我们得到

$$\mathrm{N}_{L\cap \mathrm{dom}\, f}(x)\subset \left[\overline{\mathrm{co}}\left(A_\varepsilon(x)\cup L^\perp\cup\left(B_{\varepsilon,\alpha}(x)\cup C_\varepsilon(x)\cup\{\theta\}\right)\right)\right]_\infty,$$

或者等价地，由于（6），

$$\mathrm{N}_{L\cap \mathrm{dom}\, f}(x)\subset \left[\overline{\mathrm{co}}\left(A_\varepsilon(x)+L^\perp+\varepsilon\left(B_{\varepsilon,\alpha}(x)\cup C_\varepsilon(x)\cup\{\theta\}\right)\right)\right]_\infty. \tag{35}$$

注意，$T_\varepsilon(x)\neq\emptyset$ 以及 $A_\varepsilon(x)\neq\emptyset$，因为 $f_t\in\Gamma_0(X)$ 对所有 $t\in T_\varepsilon(x)$ 均成立。因此，结合（35）和（1），

$$\begin{aligned}\partial f(x)&\subset \overline{\mathrm{co}}\left(A_\varepsilon(x)+\mathrm{N}_{L\cap \mathrm{dom}\, f}(x)\right)\\ &\subset \overline{\mathrm{co}}\left(A_\varepsilon(x)+\left[\overline{\mathrm{co}}\left(A_\varepsilon(x)+\varepsilon(B_{\varepsilon,\alpha}(x)\cup C_\varepsilon(x)\cup\{\theta\})+L^\perp\right)\right]_\infty\right)\\ &\subset \overline{\mathrm{co}}\left(A_\varepsilon(x)+\varepsilon(B_{\varepsilon,\alpha}(x)\cup C_\varepsilon(x)\cup\{\theta\})+L^\perp\ \right)\\ &\subset \mathrm{co}\left(A_\varepsilon(x)+\varepsilon(B_{\varepsilon,\alpha}(x)\cup C_\varepsilon(x)\cup\{\theta\})\right)+2U,\end{aligned}$$

并且（$\subset$"在（34）中的结论可通过先对 $U\in\mathcal{N}$ 取交，再对 $\varepsilon>0$.取交得到

为证明反向包含，我们固定 $y\in$ 定义域 $f(\subset\cap_{t\in T}$定义域 $f_t)$ 和 $\varepsilon>0$.于是 $\sigma_{C_\varepsilon}(x)(y-x)\leq\varepsilon$, $\sigma_{A_\varepsilon(x)}(y-x)\leq$上确界$_{t\in T_\varepsilon(x)}(f_t(y)-f_t(x)+\varepsilon)\leq f(y)-f(x)+2\varepsilon$, 并且

$$\sigma_{B_{\varepsilon,\alpha}(x)}(y-x)\leq \sup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}(\alpha_t f_t(y)-\alpha_t f_t(x)+\varepsilon)\leq (M_1 f^+(y)-M_2\alpha_t f_t(x)+\varepsilon)^+,$$

其中 $M_1:=$上确界$_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}\ \alpha_t$ 以及 $M_2:=$下确界$_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}\ \alpha_t f_t(x)$。最后，若 E 是（34）的右端，则我们得到

$$\sigma_E(y-x)\leq f(y)-f(x)+\max\{\varepsilon(M_1 f^+(y)-M_2 f_t(x)+\varepsilon)^+,\varepsilon^2\}+2\varepsilon,$$

而包含"$\supset$"在（34）中成立，只要 $\varepsilon\downarrow 0$. ■

我们将 Brøndsted 公式推广至有限个对象的情形；该公式最初在 [1] 中得到证明。[11，命题 6 也证明了（36）的一个有限维变体，前提是 f_t 连续。此处我们不采用定理 9 中的下半连续性要求 $\bar{}$ $\bar{}$，而改用以下闭包条件 $f=$上确界$_{t\in T}f_t$.。当 f_t 下半连续时，该条件自然成立；但在其他一些值得注意的情形下也成立，例如上确界函数 f 在某点连续时（见 [13，推论 9][23]）。

$\bar{}$**推论 13** 给定凸函数 f_t，$t\in T$，以及 $f:=\sup_{t\in T}f_t$，我们假设 $f=\sup_{t\in T}\bar{f}_t$。若 $x\in X$ 满足 $\bar{f}_t(x)=f(x)\in\mathbb{R}$，对所有 $t\in T$，则

$$\partial f(x)=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{t\in T}\partial_\varepsilon f_t(x)\right). \tag{36}$$

证明。 首先，我们有 $\partial_\varepsilon f_t(x) \subset \partial_\varepsilon f(x)$，对所有 $t \in T$ 和 $\varepsilon > 0$，因此

$$\cap_{\varepsilon>0}\overline{\text{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon f_t(x)\right) \subset \cap_{\varepsilon>0}\partial_\varepsilon f(x) = \partial f(x).$$

因此，(36) 中的包含关系“⊃”成立。为证明反向包含关系，我们可以假设 that $\partial f(x) \neq \emptyset$; 否则，(36) 显然成立。这意味着 $\partial f(x) = \partial f(x)$。由于 $f_t(x) = f(x) \geq f_t(x)$，可得 $\partial_\varepsilon f_t(x) = \partial_\varepsilon f_t(x)$，对所有 $t \in T$ 以及 $\varepsilon > 0$.均成立。因此，对由正则、下半连续凸函数 $\{f_t, t \in T\}$构成的函数族应用定理 12，即可得到结论，

$$\partial f(x) = \partial \bar{f}(x) = \cap_{\varepsilon>0}\overline{\text{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon \bar{f}_t(x) + \{\theta\}\right) = \cap_{\varepsilon>0}\overline{\text{co}}\left(\cup_{t\in T}\partial_\varepsilon f_t(x)\right).$$

■

我们通过一个例子说明定理 12在仿射情形下的应用。上确界函数在某一点连续的情形将在例5中考察。

例 4 给定一个非空集 T，我们考虑函数

$$f := \sup_{t\in T}\{\langle a_t, \cdot\rangle - b_t\},\ a_t \in X^*,\ b_t \in \mathbb{R}.$$

然后，结合定理 12 和引理 3，对所有 $x \in f^{-1}(0)$ 我们得到

其中 $B_\varepsilon(x) := \left\{ \begin{matrix} \partial f(x) = \cap_{\varepsilon>0}\overline{\text{co}}(\{a_t : \langle a_t, x\rangle - b_t \geq -\varepsilon\} + \varepsilon(B_\varepsilon(x) \cup \{0\})), \\ \frac{\varepsilon a_t}{2b_t - 2\langle a_t,\ x\rangle - \varepsilon} : \langle a_t,\ x\rangle - b_t < -\varepsilon \end{matrix} \right\}.$

更多改进将在第 6 节中介绍：定理16 讨论上确界函数 f 在某一点连续的情形，而推论 18关注所谓的紧致连续情形。

5 最优性条件

本节中，我们将为以下凸无限凸规划推导一般的最优性条件。该规划定义在局部凸空间 X 中：

$$(\text{P})\ \inf\ f_0(x)\ \text{s. t.}\ f_t(x) \leq 0,\ t \in T,$$

其中，假设每个 $f_t : \overline{X} \to \mathbb{R}, t \in T \cup \{0\}$ $(T \neq \emptyset,\ \ 0 \notin T)$ 都是凸且下半连续的。假设 (P) 具有有限最优值 $v(\text{P})$，并记

$$f := \sup_{t\in T} f_t.$$

对(P) 最优性条件的分析取决于如何对约束进行惩罚。本文基于所谓的性能函数<style id='5'max$\{f_0 - v(\text{P})\ \ f_t,$

$t \in T\}$. 接下来，我们将在 Slater条件下给出问题(P)的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 型最优性条件

$$[f := \sup_{t\in T} f_t < 0] \cap \operatorname{dom} f_0 \neq \emptyset.$$

下面的条件分别针对 ε-活跃、非 ε-活跃和非正规约束进行明确表述，并分别表示为 $\varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon(x) := \bigcup_{t\in T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon f_t(x),\ \mathcal{B}_\varepsilon(x) := \bigcup_{t\in T\setminus T_\varepsilon(x)} \varepsilon\partial_\varepsilon(\rho_{t,\varepsilon} f_t)(x),$$

and

$$C_\varepsilon(x) := \bigcup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^\varepsilon_{\operatorname{dom} f_t}(x),$$

其中 $\mathcal{P} = \{t \in T:\ f_t$ 是正则的$\}$, $T_\varepsilon(x) = \{t \in \mathcal{P}:\ f_t(x) \geq f(x) - \varepsilon\}$ 且 $\rho_{t,\varepsilon}$ 其定义同（14）。随后，该定理将 [4,定理 8.26],中相应的结果推广到了紧致连续情形。

定理14 设 f_0 和 f_t, $t \in T$, 为凸下半连续函数，满足 $v(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}$，并记 $f := \sup_{t\in T} f_t$. 假设:

(*i*) f_0 或 f 在另一个函数的定义域中的某一点处连续，并且
(*ii*) Slater条件成立。

可行点 x是问题（P）的最优解，当且仅当:
(*a*) 当 $f(x) < 0$,

$$0 \in \partial f_0(x) + \left[\overline{\operatorname{co}}\left(A_\varepsilon(x) \cup \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cup C_\varepsilon(x)\right)\right]_\infty, \text{ for all } \varepsilon > 0, \tag{37}$$

(*b*) when $f(x) = 0$, either (37) holds, or the exists some $\lambda > 0$ such that

$$0 \in \lambda\partial f_0(x) + \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\operatorname{co}}\left(A_\varepsilon(x) + \varepsilon(\mathcal{B}_\varepsilon(x) \cup C_\varepsilon(x) \cup \{\theta\})\right). \tag{38}$$

证明。假设 x是 (P) 的最优解，并令 $g := \max\{f_0 - v(\mathrm{P})\ f\}$. 于是$g(x) = 0$ 且 $\theta \in \partial g(x)$。当 $f(x) < 0$时， [4, 推论 6.5.3] 推出 $\theta \in \partial g(x) = \partial f_0(x) + \mathrm{N}_{\operatorname{dom} f}(x)$, 由定理 6（取 $\alpha_t = \rho_{t,\varepsilon}$）可得 (37)。当 $f(x) = 0$时， [4,推论 6.5.3] 给出

$$\theta \in \partial g(x) = \operatorname{co}\{\partial f_0(x), \partial f(x)\} + \mathrm{N}_{\operatorname{dom} f_0}(x) + \mathrm{N}_{\operatorname{dom} f}(x),$$

并且可能出现三种情况：若 $\theta \in \partial f_0(x) + \mathrm{N}_{\operatorname{dom} f}(x)$, 则属于上述情形，(37) 成立。若 $\theta \in \partial f(x) + \mathrm{N}_{\operatorname{dom} f_0}(x)$, 则会得到矛盾：$0 = f(x) \leq f(x_0) < 0$对每个 Slater点 $x_0 \in$ 定义域 f_0.。若存在某个 $\lambda > 0$使得 $\theta \in \lambda\partial f_0(x) + \partial f(x)$, 则由定理 12 可得 (38)。

给定条件充分性的证明沿用定理6证明中步骤 4 的相同论证，同时还使用引理 17) 中的 (3。 ■

我们将定理 14 应用于无限线性优化问题的特例:

$$(\mathtt{PL})\ \inf \langle c, x\rangle \text{ s. t. } \langle a_t, x\rangle \leq b_t,\ t \in T,$$

其中 $c,\ a_t \in X^*,\ t \in T$. 设 $x \in X$ 是可行点 x，对于 (PL)。在 Slater条件下，定理 14 和例 4得出以下结果，其中记作$f := \sup_{t\in T}(\langle a_t,\ \cdot\rangle - b_t)$ 以及 $T_\varepsilon(x) := \{t \in T:\ \langle a_t,\ x\rangle - b_t \geq f(x)\ - \varepsilon\}$.

推论15 x是（PL）的最优解，当且仅当：（
$a)$ when $f(x) < 0$,

$$-c \in \left[\overline{\mathrm{co}}\left(\frac{\varepsilon a_t}{\max\{2f(x) - 2(\langle a_t, x\rangle - b_t) - \varepsilon, \varepsilon\}} : t \in T\right)\right]_\infty,\ \text{for all } \varepsilon > 0, \tag{39}$$

（b）当 f（x）$= 0$，要么（39）成立，要么存在某个 $\lambda > 0$ 使得

$$-\lambda c \in \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}\left(\{a_t : t \in T_\varepsilon(x)\} + \left\{\frac{-\varepsilon^2 a_t}{2(\langle a_t, x\rangle - b_t) - 2f(x) + \varepsilon} \cup \{\theta\} : t \notin T_\varepsilon(x)\right\}\right).$$

6 增强结构框架

本节汇集了前述刻画的若干改进，假设上确界函数

$$f := \sup_{t\in T} f_t$$

在某一点连续，或者底层框架属于所谓的紧致连续情形。假设 f_t 是定义在局部凸空间 X 上的凸下半连续函数。

我们首先重新考察上确界函数 $f:=$ 上确界$_{t\in T}\, f_t$ 在某一点连续时法锥的刻画，该点不必是名义点。在这种情况下，法锥具有更简单的表示，并清晰地分为三个部分，突显了名义点 $x \in$ 定义域 f，处 ε-活跃函数与非 ε-活跃函数所起的不对称作用，这可通过以下集合体现：

$$A_\varepsilon(x) := \bigcup_{t\in T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon f_t(x),\ B_{\varepsilon,\alpha}(x) := \bigcup_{t\in \mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x),\ \varepsilon > 0, \tag{40}$$

其中 $\alpha = \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}_+$，$\mathcal{P} = \{t \in T:\ f_t$ 是正则的$\}$ 且 $T_\varepsilon(x) = \{t \in \mathcal{P}:\ f_t(x) \geq f(x)\ - \varepsilon\}$. 与之前一样，非正常函数仍出现在我们的刻画中，具体表现为集合

$$C_\varepsilon(x) := \bigcup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} \mathrm{N}^\varepsilon_{\mathrm{dom}\, f_t}(x),\ \varepsilon > 0. \tag{41}$$

回顾一下，权重 $\rho_\varepsilon \in [0,1]^{\mathcal{P}}$ 定义为 $\rho_{t,\ \varepsilon} :=\ = \varepsilon(\max\{2f(x)\ - 2f_t(x)\ -\varepsilon,\ \varepsilon\})^{-1}$, $t \in \mathcal{P}$ (参见 (14))。

定理 16 设 $f_t :\ X \to \mathbb{R},\ \ t \in T,$ 为下半连续凸函数，且 $f := \sup_{t\in T} f_t$ 在定义域 f. 中的某处连续。于是，对每个 $x \in f^{-1}(\mathbb{R})$，都有

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = [A_\varepsilon(x)]_\infty + [B_{\varepsilon,\alpha}(x)]_\infty + [C_\varepsilon(x)]_\infty, \tag{42}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$ 和任意 $\alpha = \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{T\ (\varepsilon)^x}_+$，使得 $\alpha_t \geq \rho_{t,\ \varepsilon}$，$\sup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} \alpha_t < +\infty$ 和 $\inf_{t\in\mathcal{P}\setminus\ T_\varepsilon(\ x)}\ \alpha_t f_t(x)\ > -\infty$。因此，

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \left[\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}(A_\varepsilon(x))\right]_\infty + \left(\bigcap_{\delta>0} \mathrm{cl}\left(\bigcup_{0<\varepsilon<\delta} [\overline{\mathrm{co}}(B_{\varepsilon,\alpha}(x))]_\infty\right)\right) + \{\theta\} \cup \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}(C_\varepsilon(x)), \tag{43}$$

其中 $\alpha = \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}_+$ 如上所述。

证明。 固定 $x \in f^{-1}(\mathbb{R})$ 和 $\varepsilon > 0$。我们定义凸函数

$$f_\varepsilon := \sup_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)} f_t,\ g_\varepsilon := \sup_{t\in T_\varepsilon(x)} f_t,\ \text{and } h := \sup_{t\in T\setminus\mathcal{P}} f_t,$$

为方便记号，我们记

$$A_\varepsilon := \overline{\mathrm{co}}(A_\varepsilon(x)),\ C_\varepsilon := \overline{\mathrm{co}}(C_\varepsilon(x)),\ \text{and } B_{\varepsilon,\alpha} := \overline{\mathrm{co}}(B_{\varepsilon,\alpha}(x)) \text{ for } \alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}_+.$$

由于 定义域 f =定义域 f_ε∩定义域 g_ε∩定义域 h 且 f在某一点连续，应用莫罗-罗克菲勒定理（例如， [4,命题 4.1。16]）并结合定理 6可得

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f_\varepsilon}(x) + \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, g_\varepsilon}(x) + \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, h}(x) = [B_{\varepsilon,\tilde\rho_\varepsilon}]_\infty + [A_\varepsilon]_\infty + [C_\varepsilon(x)]_\infty, \quad (44)$$

其中 $\tilde\rho_\varepsilon := (\tilde\rho_{t,\ \varepsilon}) \in]0,\ 1]^{\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}$ 表示与上确界函数相关联的权重 f_ε，其定义为

$$\tilde\rho_{t,\varepsilon} := \varepsilon(\max\{2f_\varepsilon(x) - 2f_t(x) - \varepsilon, \varepsilon\})^{-1},\ t \in \mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x). \quad (45)$$

设 $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}_+$ 如定理陈述所示。若 $\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x) = \emptyset$，则$[B_{\varepsilon,\tilde\rho_\varepsilon}]_\infty = [B_{\varepsilon,\alpha}]_\infty = \{\theta\}$，由此可得（42）成立，因为（44）成立。否则，$\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x) \neq \emptyset$，由引理 4(*i*) 可得某个 $M \geq 1$，使得 $\rho_{t,\ \varepsilon} \leq \tilde\rho_{t,\ \varepsilon} \leq M\rho_{t,\ \varepsilon} \leq M\alpha_t$ 对所有$t \in \mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)$均成立。基于此，引理 1 和定理 6 推出

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f_\varepsilon}(x) = [B_{\varepsilon,\tilde\rho_\varepsilon}]_\infty = [B_{\varepsilon,\rho_\varepsilon}]_\infty = [B_{\varepsilon,\alpha}(x)]_\infty, \quad (46)$$

并且（42）可由（44）得出。

为证明（43），我们从关系式（44）出发，

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) = [A_\varepsilon]_\infty + [C_\varepsilon]_\infty + [B_{\varepsilon,\tilde\rho_\varepsilon}]_\infty,\ \text{for all } \varepsilon > 0, \quad (47)$$

其中，$\tilde\rho_\varepsilon$:=$(\tilde\rho_{t,\varepsilon})_{t\in\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}$在（45）中定义。显然，族$([A_\varepsilon]_\infty)_{\varepsilon>0}$和$([C_\varepsilon]_\infty)_{\varepsilon>0}$ 关于 $\varepsilon \downarrow 0$. 均为非递增。同时，引理 4(*ii*)保证族$([B_{\varepsilon,\tilde\rho_\varepsilon}]_\infty)_{\varepsilon>0}$ 关于 $\varepsilon \downarrow 0$为非递减。因此，利用（47）中的支撑函数，然后取 $\varepsilon \downarrow 0$ 时的上极限，我们得到

$$\sigma_{\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)} = \inf_{\varepsilon>0} \sigma_{[A_\varepsilon]_\infty} + \inf_{\varepsilon>0} \sigma_{[C_\varepsilon]_\infty} + \inf_{\delta>0} \sup_{0<\varepsilon<\delta} \sigma_{[B_{\varepsilon,\tilde\rho_\varepsilon}]_\infty}. \quad (48)$$

由于 定义域 $f \subset [\sigma_{\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)}(\cdot - x) \leq 0]$ 且 f在其定义域的内部连续，因此（凸）函数 $\sigma_{\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)}(\cdot - x)$ 在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f)$上也连续。此外，由于右侧出现的三个下确界函数都出现在式（48）中

是凸且非负的，因此它们受 $\sigma_{\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)}$ 支配，因此在 $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ f) - x (\neq \emptyset)$上也连 续。因此，应用 [4, 命题 2.2。11], (48) 可得

$$\sigma_{\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)} = \mathrm{cl}(\inf_{\varepsilon>0} \sigma_{[A_\varepsilon]_\infty}) + \mathrm{cl}(\inf_{\varepsilon>0} \sigma_{[C_\varepsilon]_\infty}) + \mathrm{cl}(\inf_{\delta>0} \sigma_{\cup_{0<\varepsilon<\delta}[B_{\varepsilon,\tilde{\rho}_\varepsilon}]_\infty}).$$

此外，由于最后三个下确界函数也都是正则（非负）的，根据 [4,命题 3.2.8(ii)] ，我们得出

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)} &= \sigma_{\cap_{\varepsilon>0}[A_\varepsilon]_\infty} + \sigma_{\cap_{\varepsilon>0}[C_\varepsilon]_\infty} + \sigma_{\cap_{\delta>0}\,\mathrm{cl}(\cup_{0<\varepsilon<\delta}[B_{\varepsilon,\tilde{\rho}_\varepsilon}]_\infty)} \\ &= \sigma_{[\cap_{\varepsilon>0}A_\varepsilon]_\infty} + \sigma_{[\cap_{\varepsilon>0}C_\varepsilon]_\infty} + \sigma_{\cap_{\delta>0}\,\mathrm{cl}(\cup_{0<\varepsilon<\delta}[B_{\varepsilon,\tilde{\rho}_\varepsilon}]_\infty)}, \end{aligned} \tag{49}$$

其中在最后一个等式中，我们使用了（2）。按照上述方法推理，我们注意到，等式（49）右侧出现的三个支撑函数均为凸、正则且非负，并且被 $\sigma_{\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)}$ ·所支配。由此，它们在（非空）集合 int(定义域 f) $- x$上也连续。在（49）中再次应用 Moreau-Rockafellar 定理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) &= \partial\sigma_{\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)}(\theta) \\ &= \partial\sigma_{[\cap_{\varepsilon>0}A_\varepsilon]_\infty}(\theta) + \partial\sigma_{[\cap_{\varepsilon>0}C_\varepsilon]_\infty}(\theta) + \partial\sigma_{\cap_{\delta>0}\,\mathrm{cl}(\cup_{0<\varepsilon<\delta}[B_{\varepsilon,\tilde{\rho}_\varepsilon}]_\infty)}(\theta) \\ &= [\cap_{\varepsilon>0}A_\varepsilon]_\infty + [\cap_{\varepsilon>0}C_\varepsilon]_\infty + \cap_{\delta>0}\,\mathrm{cl}\,(\cup_{0<\varepsilon<\delta}[B_{\tilde{\varepsilon},\tilde{\rho}_\varepsilon}]_\infty)\,. \end{aligned}$$

由缩放性质 $\lambda C_\varepsilon = C_{\lambda\varepsilon}$ 对所有 $\lambda > 0$均成立，可知 $[\cap_{\varepsilon>0}C_\varepsilon]_\infty = \{\theta\} \cup (\cap_{\varepsilon>0}C_\varepsilon)$。因此，由上述等式以及 $[B_{\tilde{\varepsilon},\tilde{\rho}_\varepsilon}]_\infty = [B_{\varepsilon,\alpha}]_\infty$ 这一事实（见 46），可得（43）。■

关于上确界函数的连续性假设，可以简化其次微分的刻画。例如，如果 f 在名义点 $x \in$ 定义域 f, 处连续，那么 ([24, 25]; 另见 [4])

$$\partial f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{t\in T_\varepsilon(x)} \partial_\varepsilon f_t(x)\right),$$

因此，在这种情况下，法锥 $\mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x)$ 化简为 $\{\theta\}$，且只有 ε-活跃的数据函数会起作用。下文将放宽这一连续性条件，仅要求 f 在 dom f. 的某一点连续。在这种情况下，按（40）和（41）的定义，集合 $A_\varepsilon(x)$ B_ε、$\alpha(x)$ 和 $C_\varepsilon(x)$ 将发挥作用。系数 ρ_t, $_\varepsilon$ 定义见（14）。

定理 17 设 $f_t : X \to \mathbb{R}$, $t \in \overline{T}$, 为凸且下半连续，并假设 $f := \sup_{t\in T} f_t$ 在某点连续。那么，对于每个 $x \in$ 定义域 f,

$$\begin{aligned}\partial f(x) = \left(\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}(A_\varepsilon(x))\right) + \left(\bigcap_{\delta>0} \mathrm{cl}\left(\bigcup_{0<\varepsilon<\delta} [\overline{\mathrm{co}}(B_{\varepsilon,\alpha}(x))]_\infty\right)\right) \\ + \left(\{\theta\} \cup \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}}(C_\varepsilon(x))\right),\end{aligned}$$

对于任意满足 $\alpha_t \geq \rho_{t,\,\varepsilon}$ 的 $\alpha = \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}\setminus T_\varepsilon(x)}$，且 $\sup_t \alpha_t$ 和 $\inf_t \alpha_t f_t(x)$ 均为有限值。

证明。固定 $x \in$ 定义域 f. 根据 [11, 13], 我们有

$$\partial f(x) = \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) + \cap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}\left(\cup_{t\in T_\varepsilon(x)}\partial_\varepsilon f_t(x)\right).$$

因此，应用定理16即可得到结论。 ■

下面的推论讨论紧致连续框架，假设 T 是紧致的，并且对于每个 $z \in$ 定义域 f, 映射 $t \mapsto f_t(z)$ 在 T. 上上半连续。回顾一下，$\rho_{t,\,\varepsilon}$ 定义于 (14)，且 $T(x)$:
$= \{t \in T : f_t(x) = f(x)\}$, $x \in f^{-1}(\mathbb{R})$。

推论 18 设 $f_t : X \to \mathbb{R}$, $t \in \overline{T}$, 为凸下半连续函数，并记 $f := \sup_{t\in T} f_t$. 在紧致连续框架下，对每个 $x \in f^{-1}(\mathbb{R})$，我们有

$$\partial f(x) = \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}\left(\tilde{A}_\varepsilon(x) + \varepsilon(\tilde{B}_{\varepsilon,\alpha}(x) \cup C_\varepsilon(x) \cup \{\theta\})\right),$$

其中 $C_\varepsilon(x)$ 定义于 (41),

$$\tilde{A}_\varepsilon(x) := \bigcup_{t\in T(x)}\partial_\varepsilon f_t(x) \text{ and } \tilde{B}_{\varepsilon,\alpha}(x) := \bigcup_{t\in\mathcal{P}\setminus T(x)} \partial_\varepsilon(\alpha_t f_t)(x),$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{P}\setminus T(x)}$ 满足 $\alpha_t \geq \rho_{t,\,\varepsilon}$, $\sup_t \alpha_t < +\infty$ 且 $\inf_t \alpha_t f_t(x) > -\infty$. 此外，若$f$ 在某点连续，则

$$\partial f(x) = \left(\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}\left(\tilde{A}_\varepsilon(x)\right)\right) + \left(\bigcap_{\delta>0}\mathrm{cl}\left(\bigcup_{0<\varepsilon<\delta}[\overline{\mathrm{co}}(\tilde{B}_{\varepsilon,\alpha}(x))]_\infty\right)\right) + \left(\{\theta\} \cup \bigcap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}(C_\varepsilon(x))\right).$$

证明。 第一个结论的证明与定理 12的证明类似，基于刻画（[11, 13]）

$$\partial f(x) = \cap_{\varepsilon>0, L\in\mathcal{F}(x)}\overline{\mathrm{co}}\left(\tilde{A}_\varepsilon(x) + \mathrm{N}_{L\cap\mathrm{dom}\, f}(x)\right).$$

在附加连续性假设下，我们有

$$\partial f(x) = \mathrm{N}_{\mathrm{dom}\, f}(x) + \cap_{\varepsilon>0}\overline{\mathrm{co}}\left(\tilde{A}_\varepsilon(x)\right),$$

第二个结论的证明与定理17中的证明类似。 ■

我们将定理 17应用于仿射情形。

例 5 给定一个非空集 T，我们考虑函数

$$f := \sup_{t\in T}\{\langle a_t, \cdot\rangle - b_t\},\ a_t \in X^*,\ b_t \in \mathbb{R}.$$

假设 f 在某一点连续。那么，根据定理 17，对于所有 $x \in f^{-1}(0)$ 我们有

$$\partial f(x) = (\cap_{\varepsilon>0}\mathrm{co}(\{\overline{a_t} : \langle a_t, x\rangle - b_t \geq -\varepsilon\})) + \cap_{\delta>0}\,\mathrm{cl}\,(\cup_{0<\varepsilon<\delta}[\mathrm{co}(B_\varepsilon(x))]_\infty)。$$

其中 $B_\varepsilon(x) := \left\{\varepsilon(2b_t - 2\langle a_t, x\rangle - \varepsilon)^{-1}a_t : \langle a_t, x\rangle - b_t < -\varepsilon\right\}$.

7 结语

本文建立了一个全面且明确的框架，用于刻画凸函数逐点上确界的次微分，并直接以底层数据函数表示。通过对 ε 活跃函数与非 ε 活跃函数一视同仁，本文提出的刻画统一并扩展了以往结果，同时避免了繁琐的几何构造。具体而言，该框架给出了精确的 Karush–Kuhn–Tucker 和 Fritz–John 无限凸优化最优性条件，并清楚地区分了 ε 活跃约束与非 ε 活跃约束的作用。

参考文献

[1] Brøndsted, A.，《两个凸函数上确界的次微分》，《斯堪的纳维亚数学》31（1972）225—230。[2] Burachik, R., Jeyakumar, V.，《法锥交公式的一个简单闭包条件》，《美国数学会会刊》133（2004），第1741–1748页。[3] Caro, S.，《半无限优化中的离散化约简及上确界函数的次微分演算》。智利大学，（2023）。博士论文：*https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/198949*。[4] Correa, R., Hantoute, A., López, M.A.，凸分析与优化基础：上确界函数方法，施普林格，Cham，（2023）。[5] Correa, R., Hantoute, A., López, M.A.，《上确界函数定义域的法锥的另一种表示及次微分演算》，《集值分析》29（2021）683–699。[6] Correa, R., Hantoute, A., López, M.A.，《通过指标集紧化求上确界的次微分》，《越南数学杂志》48（2020）569–588。[7]Danskin, J.M.，最大–最小理论及其在武器分配问题中的应用，施普林格，纽约，（1967）。[8] Dinh, N., Goberna, M.A., López, M.A.，《从线性系统到凸系统：相容性、法尔卡什引理及其应用》，《凸分析杂志》13（2006），113–133。[9] Drezner, Z.，《关于极小极大优化问题》，《数学规划》22（1982）227–230。

[10] Hantoute, A., 《下半连续凸函数上确界的次微分集与锥包交性质》, TOP, 14（2006）355–374。[11] Hantoute, A., López, M.A., 《任意凸函数族上确界的次微分集的完全刻画》, 《凸分析杂志》15（2008）831–858。[12] Hantoute, A., López, M.A., 《通过有限和与上确界重新探讨上确界的次微分》, 《优化理论与应用杂志》193（2022）81–106。[13] Hantoute, A., López, M.A., Zălinescu, C., 《凸分析中的次微分演算规则：基于逐点上确界函数的统一方法》, 《SIAM优化杂志》19（2008）863–882。[14] Ioffe, A.D., 《关于逐点上确界的次微分的注记》, TOP 20（2012）, 第456–466页。[15] Ioffe, A.D., Levin, V.L., 《凸函数的次微分》, 《莫斯科数学会会刊》26（1972）3–73（俄文）。[16] Li, Ch., Ng, K.F., 《凸分析中上确界函数的次微分演算规则》, 《SIAM优化杂志》21（2011）782–797。[17] López, M.A., Volle, M., 《松弛极小化问题最优解集的一个公式：次微分演算的应用》, 《凸分析杂志》17（2010）1057–1075。[18]López, M.A., Volle, M., 《任意扩展实值函数族上确界的次微分》, RACSAM 105（2011）3–21。[19] Mordukhovich, B.S., 变分分析与广义微分I、II, 施普林格出版社, 柏林, （2006）。[20] Mordukhovich, B.S., Nghia, T.T.A., 《非凸上确界函数的次微分及其在具有利普希茨数据的半无限规划与无限规划中的应用》, 《SIAM优化杂志》23（2013）406–431。[21]Pérez-Aros, P., 《上确界函数的共轭函数与次微分公式》, 《优化理论与应用杂志》180（2019）397–427。[22] Pérez-Aros, P., 《任意函数族上确界的次微分公式》, 《SIAM优化杂志》29（2019）1714–1743。[23] Rockafellar, R.T., 凸分析, 《普林斯顿数学丛书》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州（1970）。

[24] Valadier, M., 上界及凸函数连续和的次微分，巴黎科学院会议记录 A-B辑 268（1969）A39–A42。[25] Volle, M., 凸函数上包络的次微分，巴黎科学院会议记录数学辑 I 317（1993）845–849。[26] Volle, M., 关于凸函数上包络的次微分，越南数学学报 19（1994）137–148。[27]Zălinescu, C., 一般向量空间中的凸分析，世界科学出版公司，里弗埃奇（2002）。