arXiv:2602.12857v1 [math.AT] 13 Feb 2026

关于某些小覆盖的等变三角剖分

RAJU KUMAR GUPTA 和 SOUMEN SARKAR

Abstract. 本文研究小覆盖的 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分的若干性质。我们证明，任意小覆盖的 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分都会自然诱导出轨道空间的一个三角剖分。随后，我们显式构造了$\mathbb{Z}_2^3$的极小 $\mathbb{RP}^3$-等变三角剖分，它包含 11 个顶点，并证明这是 $\mathbb{Z}_2^3$的唯一一个具有 11 个顶点的 $\mathbb{RP}^3$ -等变三角剖分。对于有限群 G，我们给出一种方法，可根据流形各自的 G-等变三角剖分，构造其连通和的一些 G-等变三角剖分。特别地，我们构造了一个 $\mathbb{Z}_2^3$的 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ -等变三角剖分，含有 17 个顶点，是目前已知的最佳结果。对 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 的这一三角剖分给出了另一个极小 g-向量，改进了 Lutz 在 [19]中的一项结果。此外，我们证明， $\mathbb{Z}_2^4$的一个 $\mathbb{RP}^4$-等变三角剖分至少需要 18 个顶点。

1. Introduction

拓扑学与组合学之间丰富的相互作用带来了许多有价值的发现，加深了我们对这两个领域的理解。流形的三角剖分通过将复杂空间分解为称为单纯形的更简单构件，凸显了这种联系。这种方法既支持理论研究，也适用于计算应用。几十年来，研究人员一直致力于构造新的三角剖分，并考察拓扑空间的组合特征，参见 [9],[14]。三角剖分的规模问题已获得重要的实际意义。若拓扑空间 M 的一个三角剖分 X 满足：对于 M 的任意其他三角剖分 Y，都有 $f_0(X) \leq f_0(Y)$，则称其为极小三角剖分，其中 f_0 表示顶点的数量。研究三角剖分中的顶点数和面总数，并明确构造最小三角剖分，是很有意义的。在射影空间方面，构造新的三角剖分（可能具有最少的顶点）一直是该领域的研究课题之一。

$\mathbb{RP}^2$ 的最小三角剖分由6个顶点构成，且是唯一的， [16]。Walkup 构造了 $\mathbb{RP}^3$ 的一个由11个顶点构成的最小三角剖分，参见[22]。1999年，Lutz [18] 构造了 $\mathbb{RP}^4$ 的一个由16个顶点构成的三角剖分，并证明它是 $\mathbb{RP}^4$的一个最小三角剖分。在 [3], ，Balagopalan 以不同方式构造了 $\mathbb{RP}^4$ 的3个三角剖分，但最终它们都与 Lutz 的三角剖分相同。

猜想1.1。 [18] $\mathbb{RP}^4$ 的最小三角剖分由16个顶点构成，且是唯一的。

除了探究小覆盖的等变三角剖分外，本文的主要动机之一是研究具有 16 个顶点的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^4$ 。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 57Q15,52B12, 05E45.

Key words and phrases. 等变三角剖分、群作用、小覆盖。

然而，我们发现不存在顶点数不超过 17 的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^4$ （参见定理6.4）。

Arnoux 与 Marin（[2]）给出了 n维实射影空间 $\mathbb{RP}^n$的三角剖分的顶点数下界 $(n+1)$（$n+2)$ 2。但该下界对 $n \geq 4$无法实现。K¨uhnel 构造了 $\mathbb{RP}^n$ 的一系列具有 $2^{n+1}-1$ 个顶点的组合三角剖分，参见 [15]。对所有 $n \geq 3$，存在 $\mathbb{RP}^n$ 的具有 2^n+n+1 个顶点的三角剖分，参见 [8, 定理 3.24] 以及 [17, 命题 4.3]。最近， [21], 中出现了新进展，作者构造了 d 维实射影空间 $\mathbb{RP}^d$ 的一个三角剖分族，对每个 $d \geq 1$至多具有 $\Theta\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{d+1}\right)$ 个顶点。在 [1], 中，作者构造了 $\mathbb{RP}^n$的一个三角剖分，至多具有 $e^{\left(\frac{1}{2}+o_{(1)}\right)\sqrt{n\log n}}$个顶点。 $\mathbb{RP}^n$ 对于 $n \geq 5$ 的最小三角剖分的构造仍然未知。

小覆盖由 Davis-Januszkiewicz 在开创性论文 [10] 中引入，作为实射影空间的一种推广。简言之， n 维小覆盖是一个 n 维光滑流形，带有 $\mathbb{Z}_2^n$ 的局部标准作用，且其轨道空间是一个简单多面体。Illman 在 [12] 中的结果表明，小覆盖存在一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分。 [8, 引理 3.6] 给出了这一结论的显式证明。

受 Davis-Januszkiewicz [10] 和 Illman [12], 的工作启发，我们提出以下问题。

问题 1.2。 在等变同构意义下， n 维小覆盖的极小 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分是什么?

问题 1.3。 每个 n 维小覆盖 N 上的 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分，是否都会诱导出 Q 的一个三角剖分，其中轨道空间为 Q ?

在 [8], 中，作者回答了小覆盖维数为 2 时的这些问题。最近， [11] 利用等变覆盖类型给出了等变三角剖分顶点数的一个下界。本文在所有维数下回答问题 1.3 （见定理 4.3）。我们明确构造了 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分$\mathbb{RP}^3$ ，它有 11 个顶点，并证明该三角剖分是唯一的。我们还构造了一个 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ ，它有 17 个顶点，是目前已知的最佳结果。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们回顾流形三角剖分和小覆盖的定义及一些基本结果。

在第3节中，我们介绍关于 n-球面的等变三角剖分的一些结果，并刻画具有 $2n+2$ 个顶点的 n-球面的等变三角剖分，证明此类三角剖分必定是八面体球面的三角剖分。

在第4节中，我们首先证明，小覆盖的任意 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分都会自然地在其轨道空间上诱导出一个三角剖分。接着，我们考察与 $\mathbb{RP}^n$相关的一些现象。这些结果为 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^n$提供了一些条件。随后，我们从一个 3-单形构造出一个具有 11 个顶点的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^3$ {style id='23'>，并证明它是具有 11 个顶点的唯一三角剖分。

在第5节中，对于有限群 G，我们提出了一种构造方法，可从两个流形 M 和 N 的 G-等变三角剖分构造它们的连通和的 G-等变三角剖分。利用该方法，我们给出了一个 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分的例子，其对象为 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$。

最后，在第6节中，我们研究 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分，其中 $\mathbb{RP}^4$ 的顶点数至多为 17，并证明不存在这样的三角剖分。

2. Preliminaries

我们根据 [20]回顾流形三角剖分的一些基本定义。张成一个维数为 n 的子空间的紧凸多面体称为 n-胞腔。 标准基的凸包 $\mathbb{R}^{n+1}$ 称为 标准 n-单形，记作 Δ^n。本文中， n-单形指 n 中的一个 $\mathbb{R}^m$ 维子集 $m \in \mathbb{N}$，其中某个 n- 单形作为带角流形与标准 n- 单形仿射微分同胚。

定义 2.1。 A胞腔复形 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有限个胞腔的集合，其中某个 $n \in \mathbb{N}$满足以下条件：(i) 若 σ 是 τ和 $\tau \in X$的面，则 $\sigma \in X$；(ii) 若 σ， $\tau \in X$ 则 $\sigma \cap \tau$ 是 σ 和 τ的公共面。若胞腔复形 X 中的每个 $\sigma \in X$ 都是单形，则称其为单纯的 。

我们用 $u_1u_2\cdots u_k$表示顶点为 $\{u_1,\ldots,u_k\}$ 的单形 σ。在全文中，我们用 Δ^n表示由向量 $\{e_0,e_1,\ldots,e_n\}$ 生成的标准 n-单形，其中 e_0 是原点， $\{e_1,\ldots,e_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$的标准基。单纯复形 X 的顶点集记作 $V(X)$。 d维单纯复形 X 的 f-向量是一个 $(d+2)$ 元组 $(f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_d)$，满足 $f_{-1}=1$；对于所有 $0 \le i \le d$， f_i表示其中 i维单形的数量。对于 d维有限单纯复形 K， $g_2(K)$定义为 $g_2 := f_1-(d+1)f_0+\binom{d+2}{2}$。 g_2 是众所周知的组合不变量之一，其起源可追溯至 Walkup [22]，他证明了对于任意闭连通三维三角剖分流形 K， $g_2(K)\ge 0$。Barnette [4, 5, 6] 证明，若 K 是单纯（$d+1$）多胞体的边界复形，或更一般地，是连通 d-流形的三角剖分，则 $g_2(K)\ge 0$。关于流形和正规伪流形的 g_2，更多结果请参见 [7]。

设 X 为一个单纯复形，且 $\sigma \in X$。 X 中面 σ 的链环定义为$\{\tau \in X:\ \sigma\star\tau \in X$ 且 $\sigma\cap\tau=\emptyset\}$，并记为链环$(\sigma,X)$。面 σ 的星形定义为 $\{\sigma\star$链环$(\sigma,X)\}$，并记为st(σ,X)。若 X是一个单纯复形，则$|X| := \bigcup_{\sigma\in X}\sigma$ 是一个紧致多面体，称为 X的几何载体。对于 X中的每一个面 σ， $d(\sigma,X)$（或者，若已指定 X，则为 $d(\sigma)$）表示链环(σ)中顶点的个数。对于两个顶点 x 与 y，$(x,y]$ 表示半开半闭边 xy，其中 $y\in(x,y]$，但 $x\notin(x,y]$。用(x,y)表示开边 xy，其中 x， $y\notin(x,y)$。对于集合 S，我们将 S 的基数定义为 S 中元素的个数，并记为基数(S)。面 $\sigma\in X$ 的维数为基数$(V(\sigma))-1$，而 X的维数定义为 X中诸单形的最大维数。拓扑空间 N 的三角剖分 X 称为极小的，如果对于拓扑空间 N的所有三角剖分 Y，均有 $f_0(X)\le f_0(Y)$。

定义 2.2. 若 X、 Y 是两个单纯复形，则从 X 到 Y 的单纯同构是一个双射 $\eta: X\to Y$，满足 $\eta(\sigma)$ 是 Y 的一个 k-面，当且仅当 σ 是 X 的一个 k-面。

我们回顾等变三角剖分的定义。这是对 [12]第2节中给出的定义所作的细微修改。

定义 2.3. 设 G是一个有限群。 G-空间N 的一个 *G-equivariant triangulation* 是 N 的一个三角剖分 X ，满足：若

$$\sigma = u_1 \cdots u_k \in X, \text{ then } \mu(\sigma) = \mu(u_1) \cdots \mu(u_k) \in X$$

对所有 $\mu \in G$，其中 μ 被视为与 μ 在 $N \cong |X|$上的作用相对应的同胚。

推论 2.4。 若 X 是一个 G-等变三角剖分，定义在一个 n-流形 M上。那么 G 是 $Aut(X)$ 的子群。

本节余下部分将遵循 [10]，回顾一些关于小覆盖的基础知识。设 N是一个 n维光滑流形，且 ρ: $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是标准作用。一个n维简单多面体是一个 n维凸多面体，其中每个顶点都是 n个余维一面的交。

定义 2.5。 ([10]) 设 η: $\mathbb{Z}_2^n \times N \to N$是一个群作用。那么，若满足以下条件，则称 η为局部标准。

(1) 每个 $y \in N$ 都有一个 $\mathbb{Z}_2^n$-不变开邻域 U_y，即 $\eta(\mathbb{Z}_2^n \times U_y) = U_y$。(2) 存在一个微分同胚 ψ: $U_y \to V$，其中 V是 $\mathbb{Z}_2^n$-不变的（即 $\rho(\mathbb{Z}_2^n \times V) = V$）开子集，且包含于 $\mathbb{R}^n$中。(3) 存在一个同构 δ_y: $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$，使得对所有 $(t, x) \in \mathbb{Z}_2^n \times U_y$，都有 $\psi(\eta(t, x)) = \rho(\delta_y(t)\ \psi(x))$。

定义 2.6. [10] 若闭 n维流形 N 上存在一个有效的 $\mathbb{Z}_2^n$作用，使得该作用是局部标准作用，且其轨道空间具有简单多面体的结构，则称 N 为小覆盖。

例 2.7. 设 Q_n为点 $\{\pm e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$的凸包，其中$e_1$，……， e_n是 $\mathbb{R}^n$的标准基。在 Q_n上定义等价关系 $\sim$：当且仅当 $x \in \partial Q_n$时， $x \sim -x$。实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 是商空间 $Q_n/\sim$。我们用等价类 $[x_1$表示 $\mathbb{RP}^n$中的点： $\cdots$： $x_n]$，其中（x_1，……， x_n） $\in Q_n$。 $\mathbb{R}^n$上的标准作用 ρ诱导出作用 ρ_p： $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$。注意，此作用是局部标准的，且其轨道空间是一个 n单形 Δ^n。因此， $\mathbb{RP}^n$ 是一个小覆盖。注意，在不动点处对两个 $\mathbb{RP}^n$作等变连通和，所得空间仍是小覆盖。

注记 2.8. 根据 [10]，的命题 1.8，任意 Δ^n 上的小覆盖都与具有标准 $\mathbb{Z}_2^n$ 作用的 $\mathbb{RP}^n$ 弱等变同胚。

定义 2.9. 设 $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ 是 $\mathbb{Z}_2^n$ 的标准生成元。设

$$X_i := \{[x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{RP}^n : x_i = 0 \text{ in } Q_n\} \text{ for } i = 1, \ldots, n,$$

and

$$X_0 := \{[x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{RP}^n : (x_1, \ldots, x_n) \in \partial Q_n\}.$$

那么， X_0，X_1，……， X_{n-1}和 X_n是由子群（$\mu_1 + \cdots + \mu_n$）、（μ_1）……，（μ_{n-1}）和（μ_n）分别固定的 $\mathbb{RP}^n$的余维一子流形。

设 π： $\mathbb{RP}^n \to \Delta^n$为 $\mathbb{RP}^n$上标准 $\mathbb{Z}_2^n$作用的轨道映射。设 F_i为 Δ^n中不包含顶点 e_i的（$n-1$）维面，其中 $i=0$，……， n。那么，对于 $i=0$，……， n，有 F_i： $=\pi$（X_i）。因此，存在一个赋值

$$F_0 \to \mu_1 + \cdots + \mu_n := \xi_0 \text{ and } F_i \to \mu_i := \xi_i \text{ for } i = 1, \ldots, n.$$

这个赋值称为 $\mathbb{Z}_2$-特征函数，定义在 Δ^n 上，而 ξ_i 称为与面 F_i对应的 $\mathbb{Z}_2$-特征向量。

命题 2.10。 [8, 引理 3。6] 存在一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分，定义在一个 n维小覆盖上，该小覆盖覆盖简单多面体 Q，其有 $2^n + f_{n-1}2^{n-1} + \cdots + 2f_1 + f_0$个顶点，其中 f_j 是 j维面 Q的数量。

3. Equivariant triangulation of $\mathbb{S}^n$

本节中，我们给出一些关于球面等变三角剖分的结果，并刻画具有 $2n+2$ 个顶点的 n-球面的等变三角剖分。

现在，我们讨论 $\mathbb{Z}_2^{n+1}$在 $\mathbb{S}^n$上的自然作用。我们考虑

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

并且 $\mathbb{Z}_2^{n+1}$:$= \{-1, 1\}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 对于 $n \geq 0$。群 $\mathbb{Z}_2^{n+1}$通过以下方式作用于 $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(t_1, \ldots, t_{n+1}) \times (x_1, \ldots, x_{n+1}) \to (t_1 x_1, \ldots, t_{n+1} x_{n+1}). \tag{3.1}$$

这是一个有效光滑作用，称为标准作用，记作

$$\rho\colon \mathbb{Z}_2^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}.$$

球面 $\mathbb{S}^n$ 在此作用下保持不变。轨道空间 $S^n/\mathbb{Z}_2^{n+1}$是

$$\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq x_1, \ldots, 0 \leq x_{n+1} \text{ and } x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

它作为带角流形仿射微分同胚于 n-单形 Δ^n。本节中，我们考察 $\mathbb{Z}_2^{n+1}$在 $\mathbb{S}^n$上的这一作用。

引理 3.1. 设 X 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分，其中 $n \geq 2$为某个值。则基数$(V(X))$为偶数，且基数 $(V(X)) \geq 2n$

证明。设 $\sigma \in X$是一个$(n-1)$-单形，且 σ的顶点集为 $\{u_1, \ldots, u_n\}$。考虑$\mu = (-1, \ldots, -1) \in \mathbb{Z}_2^n$。假设对于某些 i、 $j \in \{1, \ldots, n\}$和 $i \neq j$， $\mu(u_i) = u_j$。设 $u_i u_j$ 和 $\mu(u_i u_j)$是相同的边，则$u_i u_j$ 必经过原点，因此 X也经过原点。由于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分不经过原点，$u_i u_j$ 和 $\mu(u_i u_j)$是 X中的两条不同边。另一方面， μ^2 是$\mathbb{Z}_2^n$中的恒等变换。这意味着 $u_i = \mu(u_j)$和 $u_i u_j \cap \mu(u_i u_j) = \{u_i, u_j\}$，从而导致矛盾。因此，对任意 $i = 1, \ldots, n$，都有 $\mu(u_i) \notin \{u_1, \ldots, u_n\}$。由于对于 $i \neq j$有 $u_i \neq u_j$，对于 $i \neq j$， $\mu(u_i) \neq \mu(u_j)$。这证明了 Card$(V(X)) \geq 2n$。

此外， X 是一个等变三角剖分，并且对于每个 $x \in X$，轨道 $\mathbb{Z}_2^n x$ 的基数都是偶数，而轨道在 V（X）上诱导出一个划分。因此，Card$(V$（X）$)$是偶数。

□

引理 3.2. 设 X 是 $\mathbb{S}^n$的一个$\mathbb{Z}_2^{n+1}$-等变三角剖分。如果 X中存在一个顶点 v， 其恰好有 k $(3 \leq k \leq n+1)$个非零坐标，则 X中至少有 $2^{k-1}(2^k - k - 1)$条缺失边。

证明。 不失一般性，假设 v 的前 k 个坐标非零。设$v = (v_1, v_2, \ldots, v_k, 0, 0, \ldots, 0)$。

通过 $\mathbb{Z}_2^{n+1}$ 对顶点 v 的群作用，我们得到 X 中的 2^k 个顶点，其前 k 个坐标非零，其余坐标为零。令 V 表示所有这类顶点的集合。

设 x、$y \in V$ 是两个顶点，它们的坐标符号至少在两个位置上不同。假设 $x(i) = -y(i)$，且 $x(j) = -y(j)$。设 xy 是 X 中的一条边。我们考虑群元素 $\mu \in \mathbb{Z}_2^{n+1}$，其满足对于 $k \neq i$，$\mu(i) = -1$ 且 $\mu(k) = 1$。对 xy 施加 μ 的作用后，我们得到一条连接两个顶点 p 和 q 的边，其中对于所有 $k \neq i$，$p(i) = -x(i)$，$p(k) = x(k)$；并且对于所有 $k \neq i$，$q(i) = -y(i)$，$q(k) = y(k)$。

Let

$$xy = \{(\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_i(t), \ldots, \psi_j(t), \ldots, \psi_k(t), 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n : t \in [0, 1]\}.$$

Then

$$pq = \{(\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, -\psi_i(t), \ldots, \psi_j(t), \ldots, \psi_k(t), 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n : t \in [0, 1]\}.$$

由于 $\psi_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是单射且连续的，且 $\psi_i(0) = x(i)$、$\psi_i(1) = -x(i)$，因此存在唯一的 $t' \in (0, 1)$，使得 $\psi_i(t') = 0$。这意味着

$$(\psi_1(t'), \psi_2(t'), \ldots, \psi_{i-1}(t'), 0, \psi_{i+1}(t'), \ldots, \psi_j(t'), \ldots, \psi_k(t'), 0, \ldots, 0) \in xy \cap pq.$$

这是一个矛盾，因为 $\{x, y\} \cap \{p, q\} = \emptyset$，因此 $xy \cap pq$ 在 X 中必须为空。

类似地，如果 pq 是一条边，那么利用满足 $\epsilon(j) = -1$ 且 $\epsilon(k) = 1$ 的群元素 $\epsilon \in \mathbb{Z}_2^{n+1}$（其中 $k \neq j$），我们发现 $\epsilon(pq) = xy$。因此，边 xy 和 pq 必须是 X 中的缺失边。

这意味着， V 中的每个顶点只能与 V 中那些坐标符号恰好在一个位置上不同的顶点相连。因此，每个顶点在 V 中至多能与 k 个顶点相连。于是，V 的顶点之间至多有 $k2^{k-1}$ 条边。因此，在 X 中至少有 $\binom{2^k}{2} - k2^{k-1} = 2^{k-1}(2^k - k - 1)$ 条缺失边。□

引理 3.3. 固定 $n \geq 2$。不存在具有 2^{n+1}个顶点的 $\mathbb{S}^n$ 的 $\mathbb{Z}_2^{n+1}$-等变三角剖分，其中有一个顶点$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ 满足 $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ 均非零。

证明。设 X 是一个$\mathbb{Z}_2^{n+1}$-等变三角剖分， $\mathbb{S}^n$ 具有 2^{n+1} 个顶点，且（x_1，x_2，……，x_{n+1}）$\in V$（X）并且 x_1，x_2，……，x_{n+1}均非零。由引理3.2，X 至少有 2^n（$2^{n+1} - n - 2$）条缺失边。因此，边数至多为（$n + 1$）2^n。由于

$g_2(X) \geq 0$, $f_1(X) \geq (n+1) f_0(X) - \binom{n+2}{2}$。现在，我们有

$$\begin{aligned}(n+1)f_0(X) - \binom{n+2}{2} \leq f_1(X) \leq &(n+1)2^n \\ (n+1)2^{n+1} - \binom{n+2}{2} \leq &(n+1)2^n \\ 2^n((n+1)2-1) \leq &\binom{n+2}{2} \\ 2^n(2n+1) \leq &\binom{n+2}{2}.\end{aligned}$$

最后一个不等式对 $n \geq 2$ 不成立。因此， X 不存在。 □

命题 3.4. 设 X 是一个 $\mathbb{Z}_2^{n+1}$-等变三角剖分，其剖分对象为 n-球面，并满足链环 $(u, K) =$ 链环 (v, K) 且 $\mu(\mathrm{st}\,(u, K)) \cong \mathrm{st}\,(v, K)$，其中 $u, v \in V(X)$ 和 $\mu \in \mathbb{Z}_2^{n+1}$。那么有 $X =$ 链环 $(u, X) \star \{u, v\}$。

引理 3.5. 设 X 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分，其中 $n \geq 2$。若基数$(V(X)) = 2n$，则对于任意顶点 $x \in V(X)$， x 至多有两个坐标非零。此外， $V(X)$ 的选择数为 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$。

证明。 固定 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，使得对于每个顶点 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in V(X)$，都有 $x_i = 0$。我们断言，对于每个 $y \in |X|$，都有 $y_i = 0$。反之，假设存在 $z \in |X|$，使得 $z_i \neq 0$。那么必定存在一个单形 $\sigma \in X$，使得 $z \in |\sigma|$。但是， σ 的所有顶点的第 i 个坐标都为零。由于 σ 的顶点仿射无关，它们位于超平面 $x_i = 0$ 中。因此， $|\sigma|$ 中的任何点的第 i 个坐标也必须为零，这与 $z_i \neq 0$ 矛盾。因此， $|X| \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$，这是不可能的。故对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，存在一个顶点 $v \in X$，使得 $v_i \neq 0$。

现在，考虑一个有 $k \geq 3$ 个非零坐标、 $n-k$ 个坐标为零的顶点 $u \in V(X)$。不失一般性，假设对于 $1 \leq i \leq k$， $u_i \neq 0$；对于$k+1 \leq j \leq n$， $u_j = 0$。通过 $\mathbb{Z}_2^n$ 在 u 上的作用，我们得到 X 中的 2^k 个顶点。

另一方面，对于每个 $k+1 \leq j \leq n$，都存在一个顶点 v，使得 $v_j \neq 0$。同样，通过 $\mathbb{Z}_2^n$ 对这些顶点的作用，我们在 X 中至少得到 $2(n-k)$ 个顶点。因此，如果 $k \geq 3$，则 X 至少有 $2^k + 2(n-k)$ 个 $> 2n$ 顶点，这就产生了矛盾。因此，对于每个顶点 $x \in X$， x 至多有两个非零坐标。

从上文可以看出， $V(X)$ 的取法数与仅用 2 和 4 对 $2n$ 作分拆的数目相同。设分拆中使用的 4 的个数为 k。每个 4 对总和贡献 4，因此剩余部分 $2n-4k$ 必须由 2 来凑。于是，所用的 2 的个数为 $m = \frac{2n-4k}{2} = n - 2k.$。由于 $m \geq 0$，我们有 $n - 2k \geq 0$，这意味着 $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$。此外，根据定义， $k \geq 0$。因此， $\overline{k}$ 可以取从 0 到 $\lfloor n/2 \rfloor$ 的所有整数值。对于 k 的每一种取值，都恰有一个相应的分拆，其中包含 k 个 4 和 $n-2k$ 个 2。因此，仅用 2 和 4 对 $2n$ 作分拆的总数为

$$\lfloor n/2 \rfloor + 1.$$

□

定理 3.6. 设 X 是某个 $n \geq 2$的 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分。若基数$(V(X)) = 2n$，则 X 是一个八面体球面。

证明. 我们通过对 n应用归纳法来证明该结论。首先假设 $n = 2$。那么X 有四个顶点，组成两对对踵顶点。由于对踵顶点之间不能有边，且它必须是一个圈，因此结论成立。

设该结论对 $n = 1, 2, \ldots, m-1$成立。设 X 是 $\mathbb{Z}_2^m$-等变三角剖分$\mathbb{S}^{m-1}$，其具有 $2m$ 个顶点，且 $m \geq 3$。由引理 3.5可知，对于任意 $x \in V(X)$，向量 x至多有两个非零坐标。

令 $\{\{u^1, v^1\}, \ldots, \{u^k, v^k\}\}$ 为 $V(X)$ 中恰有一个非零坐标的顶点所组成的对径点对的集合。则 $V(X)$ 中必有 $2m - 2k$ 个恰有两个非零坐标的顶点。设存在一个顶点 $u^1 \in X$，使得对于某个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 有 $u_i^1 \neq 0$，且对于所有 $j \neq i$ 都有 $u_j^1 = 0$。定义 $v^1 = -u^1$。则 $v^1 \in V(X)$，其中 $v_i^1 = -u_i^1 \neq 0$，且对于所有 $j \neq i$ 都有 $v_j^1 = 0$。

我们断言 $\mathrm{lk}(u^1, X) = \mathrm{lk}(v^1, X)$。

注意 $u^1 v^1 \notin X$。令 σ 为 $\mathrm{lk}(u^1, X)$ 中的一个 k-单形，其中 $k \geq 1$。选取一个群元素 $\mu \in \mathbb{Z}_2^n$，使得对所有 $j \neq i$，$\mu_i = -1$ 且 $\mu_j = 1$。于是 $\mu(\sigma \star u^1) = \sigma \star v^1$。因此，$\sigma$ 是 $\mathrm{lk}(v^1, X)$ 中的一个 k-单形，从而 $\mathrm{lk}(u^1, X) \subseteq \mathrm{lk}(v^1, X)$。类似地，$\mathrm{lk}(v^1, X) \subseteq \mathrm{lk}(u^1, X)$。因此，$\mathrm{lk}(u^1, X) = \mathrm{lk}(v^1, X)$，这就证明了我们的断言。由命题 3.4，$X = \mathrm{lk}(u^1) \star \{u^1, v^1\}$，其中 $\mathrm{lk}(u^1, X)$ 是 $\mathbb{Z}_2^{m-1}$-等变三角剖分的 $\mathbb{S}^{m-2}$。因此，由归纳假设，$\mathrm{lk}(u^1, X)$ 是一个八面体（$m-2$）-球面，因而 X是一个八面体（$m-1$）-球面。

现在，我们假设 X 的所有顶点都恰有两个非零坐标。现在，设$x^1 \in V(X)$是一个恰有两个非零坐标的顶点。假设对于某个 i，$x_i^1, x_j^1 \neq 0$，并且对于所有 $l \neq i$，$j \in \{1, 2, \ldots, m\}$和 $x_l^1 = 0$。设 $x^2 = -x^1$是 X中的对踵顶点。定义 x^3, x^4，使得 $x_i^3 = x_i^1$，$x_j^3 = -x_j^1$，且 $x_l^3 = 0$，并且 $x_i^4 = -x_i^1$,$x_j^4 = x_j^1$，且对于所有 $l \neq i$，$x_l^4 = 0$，j。于是，$x^3, x^4 \in V(X)$，它们构成一对对踵顶点。顶点集 $V(X) \setminus \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ 恰好包含 $m-2$ 对对踵顶点，而x^1, X的链环中的一个极大单形含有 $m-1$ 个顶点。因此，x^1 必须在 X中与 x^3 或 x^4 相连。假设 $x^1 x^3 \in X$。

我们断言 $x^1 x^4 \in X$。设 γ 是链环 (x^1, X) 中包含 x^3 的一个极大单形。那么，$(m-3)$-单形 $\gamma \setminus \{x^3\}$ 恰由 $m-2$ 个顶点组成，每个顶点对应于 $V(X) \setminus \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ 中其余对径点对之一。由于 $\gamma \setminus \{x^3\}$ 必须与链环 (x^1, X) 中的两个顶点相连，因此只有 x^3 和 x^4 这两种可能。于是，$x^1 x^4 \in X$。这就证明了该断言。类似地，$x^2 x^3, x^2 x^4 \in X$。

考 虑群元素 $\mu' \in \mathbb{Z}_2^n$，使得对所有 $l \neq i,$，$\mu_i' = \mu_j' = -1$ 和 $\mu_l' = 1$。 j.

设 β 是 $\mathrm{lk}(x^1, X)$ 中的一个极大单形。那么 β 必定包含 x^3 或 x^4。假设 β 包含 x^3，则 $\beta = \beta' \star x^3$，其中 β' 是 $\mathrm{lk}(x^1, X)$ 中的某个单形。由于 β' 也必须与 $\mathrm{lk}(x^1, X)$ 中的 x^4 相连，因此我们有 $\mu'(\beta' \star x^4 \star x^1) = \beta' \star x^3 \star x^2$。于是，$\beta \in \mathrm{lk}(x^2, X)$。类似地，$\mathrm{lk}(x^1, X)$ 中每个包含 x^4 的极大单形 α 也属于 $\mathrm{lk}(x^2, X)$。因此，$\mathrm{lk}(x^1, X) \subseteq \mathrm{lk}(x^2, X)$。由对称性，$\mathrm{lk}(x^2, X) \subseteq \mathrm{lk}(x^1, X)$，所以 $\mathrm{lk}(x^1, X) = \mathrm{lk}(x^2, X)$。因此，由命题 3.4，$X = \mathrm{lk}(x^1, X) \star \{x^1, x^2\}$，其中 $\mathrm{lk}(x^1, X)$ 是 $\mathbb{S}^{m-2}$ 的一个恰有 $2m-2$ 个顶点的 $\mathbb{Z}_2^{m-1}$-等变三角剖分。于是，根据归纳假设，$\mathrm{lk}(x^1, X)$ 是一个八面体 $(m-2)$-球面。因此，X 是一个八面体 $(m-1)$-球面。□

推论 3.7。 设 X 是 $\mathbb{S}^3$ 的一个有8个顶点的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分。那么，顶点集 $V(X)$ 唯一可能的形式（除坐标置换外）是以下形式之一，其中 a、b、c、$d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 固定。

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad V(X) = \{(\pm a, \pm b, 0, 0),\ (0, 0, \pm c, \pm d)\} \subset \mathbb{S}^3.\\
&(II) \quad V(X) = \{(\pm a, \pm b, 0, 0),\ (0, 0, \pm 1, 0),\ (0, 0, 0, \pm 1)\} \subset \mathbb{S}^3.\\
&(III) \quad V(X) = \{(\pm 1, 0, 0, 0),\ (0, \pm 1, 0, 0),\ (0, 0, \pm 1, 0),\ (0, 0, 0, \pm 1)\}.
\end{aligned}
$$

证明。 证明由引理3.5 和定理3.6得出。 □

注 3.8。 设 X 是 $\mathbb{Z}_2^n$ 的一个等变三角剖分。那么，X 的悬挂是 $\mathbb{S}^n$ 的一个等变三角剖分。这为从给定的 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个等变三角剖分构造 $\mathbb{S}^n$ 的等变三角剖分提供了一种方法。

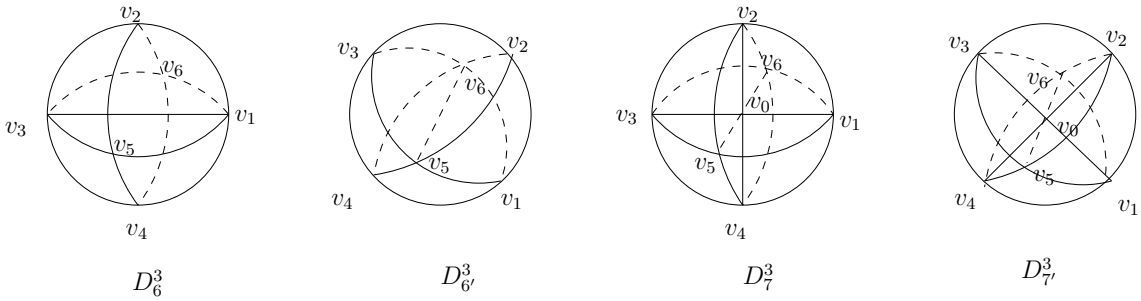


FIGURE 1. $\mathbb{Z}_2^3$ 的等变三角剖分，含有 6 个和 7 个顶点。

例 3.9。 我们考虑三维圆盘

$$\mathbb{D}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

我们讨论所有具有顶点 ≤ 7 的 $\mathbb{D}^3$ 的 $\mathbb{Z}_2^3$ 等变三角剖分。设 μ_1、μ_2、μ_3 是 $\mathbb{Z}_2^3$ 的标准生成元。也就是说，对于 $i = 1$，2，3，μ_i 沿平面 $\{x_i = 0\}$ 对 $\mathbb{D}^3$ 的作用是反射。设 $\mathbb{D}^3$ 是 $\mathbb{Z}_2^3$ 的一个等变三角剖分。那么 $\mathbb{S}^2$ 是 $\mathbb{Z}_2^3$ 的一个等变三角剖分。因此，根据引理 3.1，Y 至少含有 6 个顶点。

设 Y含有 6 个顶点。那么 (0, 0, 0) 不可能是 Y的顶点。设 $u_1u_2u_3u_4 \subset D^3$ 是 Y中的一个 3-单形，且 (0, 0, 0) $\in |u_1u_2u_3u_4|$。由于 Y是等变的，(0, 0, 0) 不可能属于 $u_1u_2u_3u_4$ 中某个面 F的内部，且 $\dim(F) \geq 2$。因此，(0, 0, 0) 属于某条边的内部，记为 u_1u_2。那么，对于 $i = 1$，μ_i (u_1u_2)是 Y中的一条边，其中 2、3。如果 u_1和 u_2 不在坐标轴上，那么对于 $1 \leq i \leq 3$，μ_i(u_1u_2)将是另一条边，并且 $\mu_i(u_1u_2) \cap u_1u_2 =$ (0, 0, 0)。这意味着 (0, 0, 0) 是 Y中的一个顶点，这就产生了矛盾。因此，u_1和 u_2 必须属于某个 $i \in \{1, 2, 3\}$对应的坐标轴 $\{x_i\}$。由于 Y是 $\mathbb{Z}_2^3$-等变的，若 u_1和 u_2 属于坐标轴 x_i，则 u_3、$u_4 \in Y \cap \{x_i = 0\}$。

设 Y包含 7 个顶点。那么 (0，0，0) $\in V(Y)$，而所有其他顶点都属于 ∂Y。设 $u =$ (a，b，c) $\neq$ (0，0，0) 是 Y 的一个顶点。显然，至少有一个 a，b 和 c 必须为零。

基于这些事实，我们在图3中给出了 $\mathbb{D}^3$ 上具有 6 个和 7 个顶点的所有可能的 $\mathbb{Z}_2^3$ 等变三角剖分。我们分别用 D_6^3、$D_{6'}^3$、D_7^3 和 $D_{7'}^3$ 表示这些三角剖分。

4. Equivariant triangulation of a class of small covers

本节首先证明，小覆盖的任意等变三角剖分都会在相应的轨道空间上诱导出一个三角剖分。然后，我们为研究 $\mathbb{RP}^n$ 的等变三角剖分建立一些有用的引理。最后，我们给出一个构造 $\mathbb{RP}^3$ 上具有 11 个顶点的等变三角剖分的例子，并证明它是唯一的、具有 11 个顶点的极小等变三角剖分。

引理 4.1. 设 σ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个 n-单形，且 μ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中超平面 H 上的一个反射，使得 $\mu(\sigma) = \sigma$。那么 H 恰好包含 σ 的 $n-1$ 个顶点。此外，存在两个 n-单形 σ_1 和 σ_1'，使得 $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_1'$ 且 $\mu(\sigma_1) = \sigma_1'$。

证明。不失一般性，我们假设 σ 是标准的 n-单形。由于 σ 是一个 n-单形，$\mu(\sigma) = \sigma$ 且 H 是 $\mathbb{R}^{n+1}$中的一个超平面，H所含顶点数不会超过 $n-1$。因此，当 $n = 1$时，结论成立，2（见图 2）。

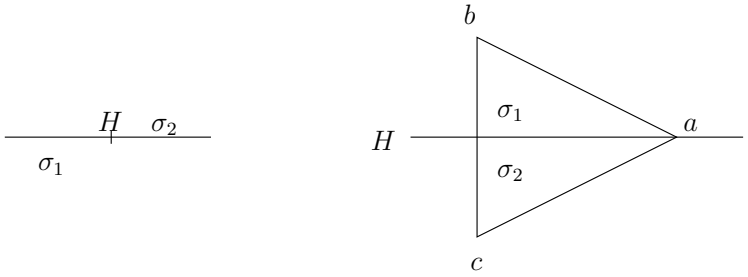


Figure 2. 沿超平面的反射。

设 $n > 2$ 和 $\sigma = u_1 \cdots u_{n+1}$。假设 H 中包含的 σ 的顶点少于 $n-1$ 个。不失一般性，我们假设 H 不包含 σ 的顶点 $\{u_1, \ldots, u_k\}$。于是 $k \geq 3$。由于对于所有 $i = 1$、.....、k，$\mu(u_i) \neq u_i$，k 是偶数，因此可得 $k \geq 4$。设 $H_>$ 和 $H_<$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 H 的开半空间。那么，$\{u_1, \ldots, u_k\}$ 的一半顶点属于 $H_>$。设 σ 的顶点 u_{i_1}、.....、u_{i_l} 对某个 $l \geq 2$ 属于 $H_>$。由于 $u_{i_1}u_{i_l}$ 是 σ 中的一条边，且 μ 是一次反射，因此 $u_{i_1}u_{i_l}$ 的 μ 是 $H_<$ 中 σ 的一条边。于是，$u_{i_1}u_{i_l}$ 和 $u_{i_1}u_{i_l}$ 的 μ 构成一个二维仿射子空间。这与 σ 是一个 n-单形这一事实矛盾。这证明 H 恰好包含 σ 的 $n-1$ 个顶点。

设 $\tau = \sigma \cap H_>$、$\tau' = \sigma \cap H_<$、$\sigma_1 = \tau$ 和 $\sigma_1' = \overline{\tau}'$，其中 τ 和 $\overline{\tau}'$ 分别表示 τ 和 τ' 的闭包。那么，σ_1 和 σ_1' 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维单形，且 $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_1'$ 和 $\mu(\sigma_1) = \sigma_1'$。□

引理 4.2. 设 $\Delta^k \subset \mathbb{R}^m$ 是一个 k 单形，使得原点属于 Δ^k 的内部，并且对于 $x_i = 0$ 上的每个 i 次反射 μ_i，$\mu_i(\Delta^k) = \Delta^k$。那么 $k = 1$，且 $|\Delta^k|$ 是某条轴的子集。

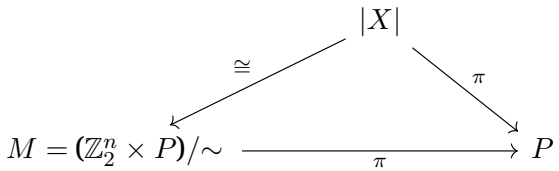
证明。若 $v \in V(\Delta^k)$，则 $-v \in V(\Delta^k)$，且 $v(-v)$ 是 Δ^k 的一条边。假设 $k > 1$。那么，Δ^k 中有两条形如 $v(-v)$ 的边交于原点。因此，原点是 Δ^k 的一个顶点，矛盾。故对于某个 $v \in \mathbb{R}^m$，$\Delta^k = v(-v)$。

假设 v 有 $\ell > 1$个非零坐标。那么，$\{\mu_i(v) : i = 1, \ldots, \ell\}$ 的凸包是一个 ℓ维立方体。因此，它不可能是 Δ的一个面。由此，Δ 的每个顶点只能有

一个非零坐标，因为原点不是 Δ^k的顶点。因此， $\Delta^k = v(-v)$ 是某个 eaxis 的子集。□

定理 4.3。设 M 是一个 n 维小覆盖。设 X 是 M 的一个 $\mathbb{Z}_2^n$ 等变三角剖分，且 π: $|X| \to P$ 是轨道映射，其中 P 是一个简单多面体。则集合 $\{\pi(\sigma)$: $\sigma \in X$ 以及 维数 $\sigma = n\}$ 给出了多面体 P 的一个三角剖分。

证明。设 M 是这个 n 维小覆盖，且 X 是 M 的一个 $\mathbb{Z}_2^n$ 等变三角剖分。那么， $|X|$ 的轨道空间是一个多面体 P。因此，我们有如下图表。



设 $\mu \in \mathbb{Z}_2^n$。定义 $P_\mu := \{[\mu, p]_\sim \in |X|: p \in P\}$。于是 $P_\mu \cong P$ 是带角流形。设 σ 是 X 中的一个单形。由于 X 是 M 的一个 $\mathbb{Z}_2^n$–等变三角剖分，存在 $\mu \in \mathbb{Z}_2^n$ 使得 $|\sigma| \cap P_\mu \neq \emptyset$。这意味着 $|\mu^{-1}(|\sigma|) \cap P_{\mathbf{0}} \neq \emptyset$，其中 $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}_2^n$ 是单位元。对于每个 $p \in P_{\mathbf{0}}$，存在唯一的单形 $\tau_p \in X$，使得 $|\tau_p|$ 的相对内部包含 p。定义 $X_{\mathbf{0}} = \{\tau_p: p \in P_{\mathbf{0}} \neq \emptyset\}$。注意到

$\bigcup_{\mu \in \mathbb{Z}_2^n} \mu(X_{\mathbf{0}}) = \{\mu(\tau) : \tau \in X_{\mathbf{0}}\} = X$, and $P_{\mathbf{0}} \subseteq |X_{\mathbf{0}}|$.

断言。如果 $\tau \in X_{\mathbf{0}}$ 是一个单形，那么 $|\tau| \cap P_{\mathbf{0}}$ 也是一个单形。

如果 $|\tau| \subset P_{\mathbf{0}}$，则得证。否则， $|\tau|$的相对内部中存在一些不属于 $P_{\mathbf{0}}$的点。令F_{i_1} 为 $P_{\mathbf{0}}$ 的一个面，使得F_{i_1} 包含 $|\tau|$的某个内点。于是，$\xi_{i_1}(\tau) = \tau$。然后，根据引理 4.1，存在单形 τ_1和 τ_1'，使得 $\xi_{i_1}(\tau_1) = \tau_1'$, $|\tau| = |\tau_1| \cup |\tau_1'|$，并且 $\pi(|\tau|) = \pi(|\tau_1|)$。

现在，如果 $|\tau_1| \subset P_{\mathbf{0}}$，则得证。否则， $|\tau_1|$ 的相对内部中存在一些不属于 $P_{\mathbf{0}}$的点。令 F_{i_2} 为 $P_{\mathbf{0}}$ 的一个面，使得 F_{i_2} 包含 $|\tau_1|$的某个内点。于是，$\xi_{i_2}(\tau_1) = \tau_{1}$。然后，根据引理 4.1，存在单形 τ_2 和 τ_2'，使得 $\xi_{i_2}(\tau_2) = \tau_2'$, $|\tau_1| = |\tau_2| \cup |\tau_2'|$，并且 $\pi(|\tau|) = \pi(|\tau_1|) = \pi(|\tau_2|)$。如此进行下去，经过有限步后，我们得到单形 $\tau, \tau_1, \ldots, \tau_k$，使得 $\pi(|\tau|) = \pi(|\tau_1|) = \cdots = \pi(|\tau_k|) = |\tau_k|$。

接下来，考虑集合 $\{\tau_k$ 及其所有面：对于某个 $\tau \in X_{\mathbf{0}}\}$， $|\tau_k| = \pi(|\tau|)$。由于π 是轨道映射，因此对于任意 σ， $\sigma' \in X$， $\pi(\sigma) \cap \pi(\sigma') = \pi(\sigma \cap \sigma')$。于是，集合$\{\tau_k$ 及其所有面：对于某个 $\tau \in X_{\mathbf{0}}\}$， $|\tau_k| = \pi(|\tau|)$，构成一个单纯复形，其几何载体与 P同胚。□

引理 4.4。设 M 是一个 n维小覆盖，且 X 是 M的一个 $\mathbb{Z}_2^n$等变三角剖分。设 π: $|X| \to P$为轨道映射，其中 P是一个简单多面体。则$f_0(X) \geq 2n$。

证明。设 $e \in P$ 为一个顶点。那么 $\pi^{-1}(e) \subseteq |X|$ 是不动顶点的集合。定义$D_e = \{\sigma \in X: e \in |\sigma|\}$. 那么 D_e 是一个经过三角剖分的 $(n-1)$-球，其边界 ∂D_e 是

一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分 $\mathbb{S}^{n-1}$。由引理 3.1， ∂D_e 至少包含 $2n$ 个顶点，因此 X 至少有 $2n$ 个顶点。□

引理 4.5. 设 X 是 $\mathbb{RP}^n$ 的一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分。若 $e_0, \ldots, e_n$ 是 $|X|$ 的不动点，则 基数$(V(X) \setminus \{e_i : i = 0, \ldots, n\})$ 是偶数。

证明. 设 $A = V(X) \setminus \{e_i : i = 0, \ldots, n\}$ 和 $u \in A$。由于 $\mathbb{Z}_2^n$ 在 $\mathbb{RP}^n$ 上的作用是标准的， u 的各向同性群同构于某个 $0 < k \leq n$ 的 $\mathbb{Z}_2^k$ 。因此，集合 $\{\mu u : \mu \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 的基数是偶数。由于 X 是一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分，$\{\mu u : \mu \in \mathbb{Z}_2^n$ 和 $u \in A\} = A$ ，且集合 $\{\mu u : \mu \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 构成 A 的一个划分。因此 A 包含偶数个顶点。□

引理 4.6. 设记号与定义 2.9中的相同。设 X 是 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^n$，且 σ 是 n中的一个单形 X，满足 $e_i \in |\sigma|$ 对某个 $i \in \{0, \ldots, n\}$成立。那么 $V(\sigma) \cap X_i$ 为空。

证明。首先，假设 e_i 是 σ 的一个顶点，且 $V(\sigma) \cap X_i \neq$ ，其中 $u \in V(\sigma) \cap X_i$。现在，我们断言 $e_i u$和 $\xi_i(e_i u)$ 是 X中的两条不同的边，其中 ξ_i 是 $\mathbb{Z}_2$ 特征向量（见定义 2.9）。假设 $\xi_i(ue_i) = ue_i$。由于 ξ_i 仅固定集合 $X_i \cup \{e_i\}$，$\xi_i(e_i) = e_i$， $\xi_i(u) = u$。这意味着，对所有 $x \in (u, e_i)$，都有 $\xi_i(x) = x$ 。因此， $[u, e_i) \subseteq X_i$。所以， $\pi(ue_i)$ 是 Δ^n 中的一个非连通子集，而 ue_i 在 X中是连通的。这是矛盾。因此， $e_i u$ 和 $\xi_i(e_i u)$ 是 X 中的两条不同的边，且 $e_i u \cap \xi_i(e_i u)$ $=\{e_i, u\}$ 在 X中。这是矛盾。

设 e_i 是带有 $k > 1$ 的 σ 的 k 维面的 τ 的内部点。由于 e_i 是一个不动点，对于任意 $\mu \in \mathbb{Z}_2^n$，要么 $\mu(\tau) = \tau$ 是 τ 的真面，要么 $\mu(\tau) \cap \tau$ 是 τ 的真面。由于 e_i 是 τ 的内部点，对于任意 $\mu \in \mathbb{Z}_2^n$， $\mu(\tau) \cap \tau$ 不是 τ 的真面。因此，对于所有 $\mu \in \mathbb{Z}_2^n$， $\mu(\tau) = \tau$。于是，$\partial\tau$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变的（$k-1$）维单纯球面。利用引理 3.1，如果 $k > 1.$，则 $\mathsf{Card}(V(\partial\tau))$ $\geq 2k > k+1$。因此， e_i 不可能属于带有 $\dim(\tau) \geq 2$ 的 σ 的面 τ 的内部。于是， e_i 属于一条边的内部，即 $u_k u_l$ 的内部，其中 σ。

如果 $u_k = u$，那么由于 e_i 是 uu_l 的内点， $\xi_i(u_l) = u_l$。在这种情况下， $uu_l \setminus e_i \subseteq X_i$。于是， $\pi(uu_l)$ 是 Δ^n 的非连通子集，这就产生了矛盾。因此， $u_k \neq u$ ，类似地， $u_l \neq u$。由于 X 是 $\mathbb{Z}_2^n$-等变的，且 e_i 是边 $u_k u_l$ 的内点，我们有两种选择： $\xi_i(u_k) = u_l$ 或 $\xi_i(u_k) = u_k$。根据上述论证，$\xi_i(u_k) = u_k$ 不可能。因此， $\xi_i(u_k) = u_l$。此外，对于某个 $\{i_1, \ldots, i_{n-1}\} \subset \{0, \ldots, \hat{i}, \ldots, n\}$，我们有 $u_k u_l \subset X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_{n-1}}$。这意味着 $\xi_i(uu_k) = uu_l$。我们有$\xi_i(u_k e_i) = e_i u_l$。因此，存在一条线段，记作 L ，位于 u 和 e_i 之间，使得 ξ_i 是沿着 L 的反射，且 $\xi_i(L) = L$。由此可得， $\xi_i(ue_i) = ue_i$ ，其中 $\xi_i(u) = u$ ，且$\xi_i(e_i) = e_i$。这意味着 $[u, e_i) \subseteq X_i$。因此， $\pi(ue_i)$ $= \pi(L)$ 是非连通的。这是一个矛盾。因此， $V(\sigma) \cap X_i$ 为空。□

引理 *4.7.* 设记号与定义 *2.9* 中的相同。设 X 是 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分，且对于满足 $i < j$ 的某些 i、 $j \in \{0, \ldots, n\}$， 交集 $V(X) \cap \pi^{-1}((e_i, e_j))$ 为空。那么当 $n > 2$ 时，存在一个包含 $e_i e_j$ 的二维面 $F \subset \Delta^n$，使得 $V(X) \cap \pi^{-1}(F \setminus V(F))$ 非空。

证明。我们假设 $\mathbb{Z}_2^n$-作用在 $\mathbb{RP}^n$ 上是标准的，并且 $(i,\ j) = (0,\ 1)$。令

$$D_0 = \{\sigma \in X : e_0 \in |\sigma|\}.$$

由引理 4.6，$V(D_0) \cap X_0$ 为空。令 $n > 2$。我们注意到，$|D_0| \cap \pi^{-1}([e_0, e_1])$ 是一条曲线段，记作 u_0u_1，其上有点 u_0 和 u_1 和 $u_0, u_1 \in |\partial D_0|$。注意，根据假设，$u_0$ 和 u_1不能属于 $V(X)$。因此，存在一个维数最小的 k-单形 $\sigma \in \partial D_0$，使得 u_0 属于 $|\sigma|$ 和 $k > 0$的内部。

线段 u_0u_1 由 μ_2、.....、μ_n固定，其中 $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ 是 $\mathbb{Z}_2^n$的标准生成元。由于 ∂D_0 是 $\mathbb{Z}_2^n$- 等变的，$\mu_i(\sigma)$ 也是 ∂D_0 中的一个 k- 单形，并且对于 $i = 2$、.....、n，$\mu_i(\sigma) = \sigma$。我们可以应用引理 4.2（差一个等变同胚），得到 σ 是 X中的一条边，并且对于包含 e_0e_1的二维面 F，$V(\sigma) \cap \pi^{-1}(F \setminus V(F))$ 非空。

□

注 4.8. 设 X 是 $\mathbb{RP}^n$ 的一个 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分，且 $x \in V(X)$。若 $\pi(x) = y$ 属于 Δ^n 的一个 k 维面的相对内部，则 $\pi^{-1}(y) = \{\mu(x) \colon \ \mu \in \mathbb{Z}_2^n\} \subset V(X)$，且 $\mathrm{Card}(\{\mu(x) \colon \ \mu \in \mathbb{Z}_2^n\}) = 2^k$。

令 $C(x_1, \ldots, x_m)$ 表示一个长度为 m 的圈，其顶点集为 $\{x_1, \ldots, x_m\}$。令 $B_{x_1,\ldots,x_m}(p;\ q)$ 表示一个双锥，其底顶点为 $x_1, \ldots, x_m$，顶点为 p 和 q。

定义 4.9. 设 K 是一个三角剖分的三维流形，且 w 是 K 的一个顶点。假设 w 在 K 中的链环由 $\mathrm{lk}(w, K) = B_{x_1,\ldots,x_m}(p;\ q)$, 给出，其中顶点为 $x_1, \ldots, x_m, p, q \in K$，且 $pq \notin K$。定义 $K' = \big(K \setminus \{\alpha \in K \colon \ w \in \alpha\}\big) \cup \{\, pq \star C(x_1, \ldots, x_m) \,\}$.。于是 $|K'| \cong |K|$，我们称 K' 是由 K 在 $\mathrm{st}(w, K)$ 处经一次 重新三角剖分 得到的，其顶点为 p 和 q。

例4.10. 在本例中，我们构造一个具有 11 个顶点的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^3$。考虑 $\mathbb{R}^3$中的交叉多胞体 P^3。然后，通过识别 P^3边界上的对跖点，可以得到 $\mathbb{RP}^3$。令 $B_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in P^3 \colon \ x_3 \geq 0\}$，且 $B_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in P^3 \colon \ x_3 \leq 0\}$。我们可以看到 $P^3 = B_1 \cup B_2$。令$V(B_1) = \{1, 2, -1, -2, 3\}$，且 $V(B_2) = \{1, 2, -1, 2, -3\}$。我们构造 B_1 和 B_2的三角剖分，见图3。利用 B_1 和 B_2的三角剖分，我们得到 $\mathbb{RP}^3$的一个三角剖分，记作 K，它有 16 个顶点。以下是 K的 3-单形。

$$158a, 15af, 18ae, 167c, 16ce, 17cf, 158c, 15cf, 18ce, 167a, 17af, 16ae, 256b, 25bf, 26be, 278d,$$

$$27df, 28de, 256d, 25df, 26de, 278b, 27bf, 28be, 3abg, 3bcg, 3cdg, 3adg, 3abh, 3bch, 3cdh, 3adh,$$

$$456g, 467g, 478g, 458g, 456h, 467h, 478h, 458h, 56bg, 67cg, 78dg, 58ag, 56dh, 67ah, 78bh, 58ch,$$

$$5abf, 5abg, 6bce, 6bcg, 7cdf, 8ade, 5cdf, 5cdh, 6ade, 6adh, 7abf, 8bce, 7cdg, 7abh, 8adg, 8bch.$$

注意，K 是 $\mathbb{RP}^3$的 $\mathbb{Z}_2^3$等变三角剖分，其中作用由以下方式确定:

$$\begin{aligned} &\mu_1(5) = 6,\ \mu_1(7) = 8,\ \mu_1(e) = f,\ \mu_1(a) = c,\ \mu_2(5) = 8,\ \mu_2(6) = 7,\\ &\mu_2(e) = f, \mu_2(b) = d,\ \mu_3(a) = c, \text{and } \mu_3(b) = d, \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中，μ_1、μ_2、μ_3 是 $\mathbb{Z}_2^3$ 的标准生成元。K 的自同构群为$\mathbb{Z}_8 \colon (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$，其中“: ”表示半直积。上述群有一个同构于 $\mathbb{Z}_2^3$ 的子群。

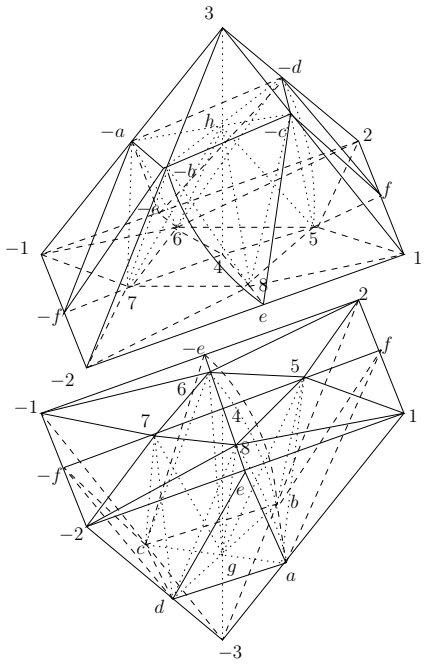


FIGURE 3. B_1 和 B_2的三角剖分。

在这个三角剖分中，st（e）和 st（f）如图 4 所示。我们可以观察到映射

$$x : \mathrm{st}\,(e, K) \to \mathrm{st}\,(f, K)$$

对于任意 $\mu \in \mathbb{Z}_2^3$，都是单纯同构。

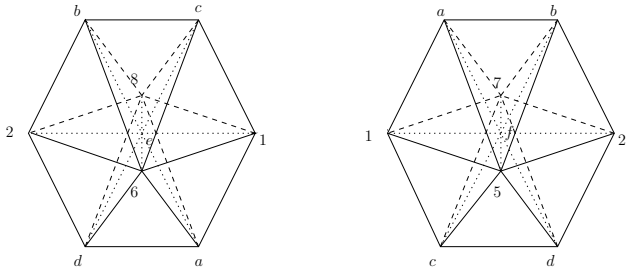


FIGURE 4. st $(e,\ K)$ 和 st $(f,\ K)$ 分别。

现在，我们在 K处以顶点 6、8 对 st $(e,\ K)$ 进行重新三角剖分，并以顶点 5、7 对 st $(f,\ K)$ 进行重新三角剖分。我们得到一个新三角剖分，记作 K' $\mathbb{RP}^3$ 的三角剖分，它有 14 个顶点。K' 上的作用由 K 上的作用推出。因此，K' 是 $\mathbb{RP}^3$的一个 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分。K' 的自同构群是 $\mathbb{Z}_2 \times S_4$，其中 S_4 是置换群。K' 的 3-单形为:

$$158a,\ 157a,\ 168a,\ 167c,\ 168c,\ 158c,\ 157c,\ 167a,\ 256b,\ 257b,\ 268b,\ 278d,\ 257d,\ 268d,$$
$$256d,278b,\ 3abg,\ 3bcg,\ 3cdg,\ 3adg,\ 3abh,\ 3bch,\ 3cdh,\ 3adh,\ 456g,\ 467g,\ 478g,\ 458g,\ 456h,$$
$$467h,478h,\ 458h,\ 56bg,\ 67cg,\ 78dg,\ 58ag,\ 57ab,\ 57cd,\ 56dh,\ 68ad,\ 68bc,\ 67ah,\ 78bh,\ 58ch,$$
$$5abg,5cdh,\ 6bcg,\ 6adh,\ 7cdg,\ 7abh,\ 8adg,\ 8bch.$$

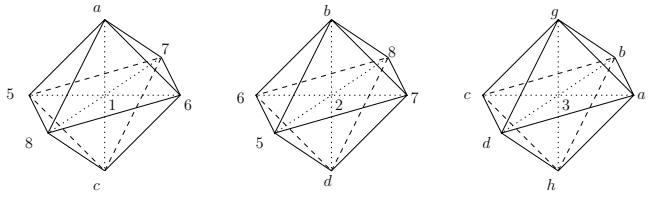


FIGURE 5. st（1）、st（2）和 st（3）。

在这个14顶点三角剖分中，顶点1、2和3的星见图5。在此情况下，可以观察到映射 μ: st（i） $\to$st（i）是一个单纯同构，适用于$i \in \{1,2,3\}$ 以及任意 $\mu \in \mathbb{Z}_2^3$。换言之，1、2和3是 K'中的不动点。现在，我们在 K'处对st（i， K）进行重新三角剖分，并相应地添加顶点，以得到 $i \in \{1,2,3\}$。我们得到一个新三角剖分，记作 K''，它属于 $\mathbb{RP}^3$。 K''上的群作用直接由 K'上的群作用推出。 K'' 的自同构群为 $\mathbb{Z}_2 \times S_4$。

K'' 的 3-单形为:

$$57ac, 68ac, 67ac, 58ac, 56bd, 57bd, 68bd, 78bd, abgh, bcgh, cdgh, adgh, 456g, 467g, 478g, 458g,$$
$$456h, 467h, 478h, 458h, 56bg, 67cg, 78dg, 58ag, 57ab, 57cd, 56dh, 68ad, 68bc, 67ah, 78bh, 58ch,$$
$$5abg, 5cdh, 6bcg, 6adh, 7cdg, 7abh, 8adg, 8bch.$$

因此，我们构造了一个具有 11 个顶点的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^3$。

注4.11。 由于 $\mathbb{RP}^3$ 的最小三角剖分包含11个顶点，因此 $\mathbb{RP}^3$ 在例 4.10 中构造的11顶点三角剖分是最小的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分。

定理4.12。 </style}存在唯一的 -等变三角剖分，其顶点数为11 。

证明。 设 X 是 $\mathbb{RP}^3$ 的一个具有11个顶点的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分。令 $\pi: |X| \to \Delta^3$为 $|X|$ 上 $\mathbb{Z}_2^3$作用的轨道映射，其中 Δ^3 是顶点为e_0、.....、 e_3的标准3-单形，且 F_i是不包含顶点 e_i的余维一面，其中 $i = 0$、.....、3。令$X_i = \pi^{-1}(F_i)$，其中 $i = 0$、.....、3。

Let

$$D_i = \{\sigma \in X : e_i \in |\sigma|\} \text{ for } i = 0, \ldots, 3.$$

因此， D_i 与 $\mathbb{D}^3$ 等变同胚，且对于 $i = 0$、.....、3，边界 ∂D_i 是 X的子复形，并且 $\mathbb{S}^2$具有 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分。因此，根据引理 3.1，Card($V(\partial D_i)$)为偶数，且对于 $i = 0$、.....、3，Card($V(\partial D_i)$) ≥ 6。另一方面，根据引理 4.5， $S := V(X) \setminus \{e_0, \ldots, e_3\}$ 中的顶点数为偶数。因此， X至少包含一个不动顶点，且 X 不可能包含2个或4个不动顶点。现在，我们有如下断言。

断言 4.13。 X 不包含三个固定顶点。

假设 X 包含三个固定顶点，即 e_0、 e_1、 e_2。因此，基数(S) $= 8$。令$S = \{x_1, \ldots, x_8\}$。令 $A = |X| \setminus \cup_{i=0}^3 X_i$和 $x_i \in A$，其中 $i \in \{1, \ldots, 8\}$。于是$S = \{\mu x_i : \mu \in \mathbb{Z}_2^3\}$。那么，对于包含 Δ^3的边 e_0e_3 的任意真面 F， $V(X) \cap \pi^{-1}(F \setminus V(F))$为空。这与引理 4.7矛盾。因此， $V(X) \cap A$ 为空，并且对于 $i = 1$，.....，8， $\pi(x_i) \in \cup_{j=0}^3 F_j \setminus \{e_0, \ldots, e_3\}$。

如果基数($V(\partial D_0)$) $= 10$，那么 e_1、 $e_2 \in V(\partial D_0)$，这与引理 4.6矛盾。因此， $6 \leq$基数($V(\partial D_0)$) ≤ 8。对于任意 $x \in V(\partial D_0)$， $\pi(x)$要么位于边 e_0e_i的内部，要么位于面$e_0e_ie_j$上，其中 i、 $j \in \{1,2,3\}$。现在，根据注 4.8，我们知道，如果对于任意$x \in V(\partial D_0)$， $\pi(x)$位于某条边 e_0e_i 的内部，其中 $i \in \{1,2,3\}$ 属于 Δ^3，那么这会为 X_k 贡献两个顶点，并且 X_l，其中 k、 $l \in \{1,2,3\} \setminus \{i\}$。如果 $x \in V(\partial D_0)$和$\pi(x)$位于某个面$e_0e_ie_j$ 上，其中 i、 $j \in \{1,2,3\}$ 属于 Δ^3，那么这会为 X_l 贡献四个顶点，其中 $l \in \{1,2,3\} \setminus \{i,j\}$。

根据上述观察，在以下两种情况中的任一种：基数($V(\partial D_0)$) $= 6$ 或基数($V(\partial D_0)$) $=8$，我们可知存在一个 X_j，其中至少包含 6 个顶点。这意味着基数($V(\partial D_j)$) ≤ 5。这是一个矛盾。这就证明了断言4.13。

因此， X恰好包含一个不动顶点，记作 e_i，其中 $i \in \{0,1,2,3\}$。所以基数(S) $=10$。令 $S = \{y_1, \ldots, y_{10}\}$。令 $y_j \in A$，其中 $j \in \{1, \ldots, 10\}$。那么 $\{\mu y_j : \mu \in \mathbb{Z}_2^3\} \subset S$ 且基数($(S - \{\mu y_j : \mu \in \mathbb{Z}_2^3\})$) $= 2$. 因此， $\pi(S \setminus \{\mu y_j : \mu \in \mathbb{Z}_2^3\})$是 Δ^3的一条边（记作 e_ke_l）的内点。所以，对于 Δ^3 中包含边 e_pe_q 的任意真面F， $V(X) \cap \pi^{-1}(F \setminus V(F))$为空，其中，基数($\{e_k, e_l\} \cap \{e_p, e_q\}$) ≤ 1。这与引理 4.7 矛盾。因此， $V(X) \cap A$ 为空，且对于 $j = 1$，有 $\pi(y_j) \in \cup_{k=0}^{3} F_k \setminus \{e_0, \ldots, e_3\}$， ....., 10。

假设 Card($V(\partial D_i)$) ≥ 8。那么又存在一个 X_j，对于某个 $j \in \{0, \ldots, 3\} \setminus \{i\}$，它至少包含 6 个顶点。这意味着 Card($V(\partial D_j)$) ≤ 4。这是一个矛盾。因此，Card($V(\partial D_i)$) $= 6$。

从以上讨论可知， X 在 X中恰有一个度为六的不动顶点。因此， X 中至少有四个顶点，其度为 ≤ 9。这意味着$f_1(X) \leq 51$。在 [19], 中，已证明 $\mathbb{RP}^3$ 存在一个具有 (f_0， f_1) $=$ (11， 51) 的唯一三角剖分，并且 $\mathbb{RP}^3$ 不存在具有 $f_1 < 51$的三角剖分。因此，我们推得存在一个唯一的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^3$ ，其有 11 个顶点。□

5. Equivariant Triangulation of Connected Sums

本节给出一种构造两个流形的连通和的等变三角剖分的方法。此外，我们给出一个在 17 个顶点上的 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 的等变三角剖分。已知 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 的最小三角剖分使用 15 个顶点。

单纯复形的 子复形 是由单形组成、且自身也构成单纯复形的子集。若 K 是一个单纯复形，且 $S \subseteq V(K)$ 是一个子集，则 Ind$_K$(S) $=\{\sigma \in K : V(\sigma) \subseteq S\}$ 称为在顶点集 S 上由 K 诱导的 诱导子复形。

定义 5.1. 设 K、 L 分别是 n-流形 M 和 N 的三角剖分。设 u 和 v 分别是 K 和 L 中的两个顶点，使得 lk (u, K) 和 lk(v, L) 组合等价，且 Ind$_K$(V(lk (u, K))) $=$lk (u, K)。假设 ψ: lk (u, K) $\to$lk (v, L) 是一个同构。定义 ast(u, K) $= \{\sigma \in K : u \notin \sigma\}$ 以及 ast(v, L) $= \{\gamma \in L : v \notin \gamma\}$ ，分别为 u 在 K 中和 v 在 L 中的反星。现在，我们将广义星连通和 $K\#_\psi L$ 定义为：按照映射 ψ，将 ast(u, K) 的面与 ast(v, L) 的面粘合后得到的单纯复形。

这个广义星连通和是 [定义 1。2, [13]] 中给出的星连通和的广义版本。注意， $K\#_\psi L$ 是 $M\#N$ 的三角剖分。

引理 5.2. 设 K, L 是一个 n-流形 M 的两个三角剖分。若 链环 (u, K) 和 链环 (v, L) 组合等价，且 Ind$_K$(V(链环 (u, K))) $=$链环 (u, K)。假设 ψ:

链环 $(u,\ K)\ \to$链环 $(v,\ L)$ 是该同构。那么 $g_2(K\#_\psi L)\ = g_2(K)+g_2(L)-f_1$(链环 $(u,\ K)$) $+(n-1)f_0$(链环 $(u,\ K)$) $-\frac{(n+1)(n-2)}{2}$。

证明。 根据 $K\#_\psi L$的定义，我们有如下结论。

- $f_0(K\#_\psi L) = f_0(K) + f_0(L) - f_0(\mathrm{lk}\,(u,K)) - 2.$
- $f_1(K\#_\psi L) = f_1(K) + f_1(L) - 2f_0(\mathrm{lk}\,(u,K)) - f_1(\mathrm{lk}\,(u,K)).$

因此，

$$\begin{aligned} g_2(K\#_\psi L) =& f_1(K\#_\psi L) - (n+1)f_0(K\#_\psi L) + \binom{n+2}{2} \\ =& f_1(K) + f_1(L) - 2f_0(\mathrm{lk}\,(u,K)) - f_1(\mathrm{lk}\,(u,K)) \\ & - (n+1)(f_0(K) + f_0(L) - f_0(\mathrm{lk}\,(u,K) - 2) + \binom{n+2}{2} \\ =& f_1(K) - (n+1)f_0(K) + \binom{n+2}{2} + f_1(L) - (n+1)f_0(L) + \binom{n+2}{2} \\ & + (n-1)f_0(\mathrm{lk}\,(u,K)) - f_1(\mathrm{lk}\,(u,K)) + 2(n+1) - \binom{n+2}{2} \\ =& g_2(K) + g_2(L) - f_1(\mathrm{lk}\,(u,K)) + (n-1)f_0(\mathrm{lk}\,(u,K)) - \frac{(n+1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

□

推论 *5.3.* 设 K、L 是 *3*-流形 M 的两个三角剖分。设 *lk (u, K)* 与 *lk (v, L)* 组合等价，并且 $Ind_K(V(lk\,(u,K)))\ =$*lk (u, K)*。假设 ψ*: lk (u, K)* $\to$*lk(v, L)* 是该同构。那么 $g_2($*K*$\#_\psi$*L)* $=$ *g*$_2$*(K)* $+$ *g*$_2$*(L)* $-f_0$*(lk (u, K))* $+4$.

证明。 由于 lk $(u.K)$ 是一个三角剖分的 2-球面， $f_1(\mathrm{lk}\,(u,K)) = 3f_0(\mathrm{lk}\,(u,K)) - 6$。现在，结论由引理 5.2得出。□

定理 5.4。 </style}流形#$\mathbb{RP}^3$ 至少有三个不同的极小 g-向量。

证明。 在 [定理 28, [19]], 作者证明了，对于 g，至少存在两个极小 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$: $g=(13,34)$ 和 $g=(10,36)$。这里，我们给出 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$的一个三角剖分，其 g-向量为 $g=(12,35)$。

考虑在例 K' 中得到的 14 顶点三角剖分 4.10。我们注意到 $\mathrm{Ind}_K(V$(链环 (3) $K'))\ =$链环 $(3,K')$。现在，考虑例 K''中给出的 $\mathbb{RP}^3$ 具有 11 个顶点的极小等变三角剖分 4.10。则链环 $(4,K'')$ 与链环 $(3,K')$ 同构。

现在，利用广义星连通和，我们通过根据 ast$(3,K')$ 与 ast$(4,K'')$ 之间的同构将二者识别起来，构造三角剖分 $K'\#K''$。 $K'\#K''$ 是 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 的一个具有 17 个顶点的三角剖分，其 f-向量为 $(17,93,150,75)$。 $K'\#K''$ 的 g-向量为 $g=(12,35)$。□

定理 5.5。设 K、L 分别是某个有限群 G 作用下的 n-流形 M 和 N 的 G-等变三角剖分。设 $u \in K$ 和 $v \in L$ 是群作用下的不动顶点。设 K 和 L 满足以下条件：

- 存在一个组合等构 $\psi : \mathrm{lk}(u, K) \to \mathrm{lk}(v, L)$ 使得 $\psi(\mu(x)) = \mu(\psi(x))$ 对于所有 $\mu \in G$ 和 $x \in \mathrm{lk}(u, K)$,
- $\mathrm{Ind}_K(V(\mathrm{lk}(u, K))) = \mathrm{lk}(u, K)$，并且 $\mathrm{Ind}_L(V(\mathrm{lk}(v, L))) = \mathrm{lk}(v, L)$。

那么 $K\#_\psi L$ 是 $M\#N$ 的一个 G-等变三角剖分。

证明。注意到 $K\#_\psi L$ 是连通和 $M\#N$ 的一个三角剖分。还需证明此三角剖分是 G-等变的。设 $\mu \in G$ 任意。

设 σ 是某个 $k \le n$ 对应的 $K\#_\psi L$ 中的一个 k-单形。令 $S \subseteq V(K\#_\psi L)$ 表示由 $\mathrm{lk}(u, K)$ 和 $\mathrm{lk}(v, L)$ 中顶点粘合后得到的顶点集合；也就是说，对于每个 $z \in S$，存在 $x \in \mathrm{lk}(u, K)$ 和 $y \in \mathrm{lk}(v, L)$，使得 z 是 x 与 y 粘合后的像。

情形 1. 假设 $V(\sigma) \cap S = \emptyset$。那么，要么是 $\sigma \subseteq K \setminus \mathrm{st}(u, K)$，要么是 $\sigma \subseteq L \setminus \mathrm{st}(v, L)$。由于 K 和 L 都是 G-等变的，$\mu(\sigma)$ 也是 $K\#_\psi L$ 中的一个 k-单形。

情形 2. 假设 $V(\sigma) \cap S \neq \emptyset$。如果 $V(\sigma) \subset S$，那么 σ 是一个单形的粘合，例如，将来自 $\mathrm{lk}(u, K)$ 的单形 σ' 与来自 $\mathrm{lk}(v, L)$ 的单形 σ'' 粘合。因此，$\mu(\sigma)$ 是 $K\#_\psi L$ 中的一个单形，它由将来自 $\mathrm{lk}(u, K)$ 的单形 $\mu(\sigma')$ 与来自 $\mathrm{lk}(v, L)$ 的单形 $\mu(\sigma'')$ 粘合而成。

现在，考虑 $V(\sigma) \not\subset S$。那么，$\sigma = \sigma' \star \sigma''$，其中 σ' 和 σ'' 是两个单形，并且 $V(\sigma) \cap S = V(\sigma'')$。

那么，对应于 $V(\sigma'')$，存在子集 $S_1 \subseteq V(\mathrm{lk}(u, K))$ 和 $S_2 \subseteq V(\mathrm{lk}(v, L))$，使得 S_1 的顶点通过 ψ 与 S_2 的顶点粘合。令 $\tau = \mathrm{Ind}_K(S_1)$ 和 $\tau' = \mathrm{Ind}_L(S_2)$ 分别为 $\mathrm{lk}(u, K)$ 和 $\mathrm{lk}(v, L)$ 中的单形。粘合 $\tau \overset{\psi}{\sim} \tau'$ 在 $K\#_\psi L$ 中形成 σ''。由于 $\mathrm{lk}(u, K)$ 和 $\mathrm{lk}(v, L)$ 是 G-等变的，$\mu(\tau)$ 和 $\mu(\tau')$ 分别是 $\mathrm{lk}(u, K)$ 和 $\mathrm{lk}(v, L)$ 中的单形，而它们的粘合给出了 $K\#_\psi L$ 中的单形 $\mu(\sigma'')$。

另一方面，要么 $\sigma' \subseteq K \setminus \mathrm{st}(u, K)$，要么 $\sigma' \subseteq L \setminus \mathrm{st}(v, L)$。因此，$\mu(\sigma')$ 是 $K\#_\psi L$ 中的一个单形。因此，连接 $\mu(\sigma') \star \mu(\sigma'')$ 是 $K\#_\psi L$ 中的一个 k-单形。

因此，在这两种情况下，$\mu(\sigma)$ 是 $K\#_\psi L$ 的一个单形。因此，$K\#_\psi L$ 是 G-等变的。 □

例5.6。我们考虑在例 K' 4.10 $\mathbb{RP}^3$ 中构造的14顶点三角剖分。于是，我们有

$$V(K') = \{1, 2, 3, \ldots, 8\} \cup \{a, b, c, d, g, h\}.$$

注意，$\mathrm{Ind}_K(V(\text{链环}(3, K))) = \text{链环}(3, K)$。现在，再取一份 K'，记为 L'，其顶点集为

$$V(L') = \{1', 2', 3', \ldots, 8'\} \cup \{a', b', c', d', g', h'\}.$$

同理，我们有 $\mathrm{Ind}_{K'}(V(\text{链环}(3', K'))) = \text{链环}(3', K')$。两个三角剖分 K' 和 L' 都是 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分，且属于 $\mathbb{RP}^3$。

存在一个组合等构 ψ：$\mathrm{lk}(3, K) \to \mathrm{lk}(3', L')$，由 $\psi(x) = x'$ 对每个 $x \in \mathrm{lk}(3, K)$ 定义。此外，对于所有 $x \in \mathrm{lk}(3, K)$，有 $\mu(\psi(x)) = \psi(\mu(x))$。因此，根据定理 5.5，连通和 $K'\#_\psi L'$ 是一个 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分，剖分对象为 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$，具有 20

个顶点。此外，我们观察到，1、2、4 是 $K'\#_\psi L'$ 中的不动点，并且 lk (1, $K'\#_\psi L'$) $=B_{\{5,8,7,6\}}(a;\ c)$、lk (2, $K'\#_\psi L'$) $= B_{\{5,7,8,6\}}(b;\ d)$ 以及 lk (4, $K'\#_\psi L'$) $= B_{\{a,b,c,d\}}(g;\ h)$。因此，我们可以移除这些不动点并对 $K'\#_\psi L'$ 进行重新三角剖分，从而得到一个具有 17 个顶点的新的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分，剖分对象为 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 。该三角剖分与定理 5.4 中的相同。

注 5.7. 设 N 是 $\mathbb{RP}^3$ 的一个三角剖分。那么，由 [19]，可得以下下界： $g_2(N) \geq 17$ 当 $f_0(N) = 11$ 时， $g_2(N) \geq 22$ 当 $f_0(N) = 12$ 时， $g_2(N) \geq 21$ 当 $f_0(N) = 13$ 时， $g_2(N) \geq 23$ 当 $f_0(N) = 14$ 时， $g_2(N) \geq 22$ 当 $f_0(N) = 15$ 时， $g_2(N) \geq 19$ 当 $f_0(N) = 16$ 时，以及 $g_2(N) \geq 17$ 当 $f_0(N) = 17$ 时。

设 M 是一个 3-流形。用 $(f_0(M);\ d(M))$ 表示 M 的一个可容许对，也就是说，存在 M 的一个三角剖分 K ，它有 M 个顶点 f_0，以及一个顶点 $u \in K$ ，使得 f_0(链环 $(u,\ K)) = d(M)$ 且 Ind_K (V(链环 $(u,\ K))) =$链环 $(u,\ K)$。

引理 5.8. $(f_0(\mathbb{RP}^3);\ d(\mathbb{RP}^3)) \notin \{(11;\ 6),\ (11;\ 8),\ (11;\ 10),\ (12;6),\ (12;\ 8),\ (12;\ 10),\ (13;\ 8),\ (13;\ 10),\ (13;\ 12),\ (14;10),\ (14;12),\ (15;\ 12),\ (15;\ 14),\ (16;14),\ (17;16)\}$.

证明。设 $(f_0; d)$ 是 $\mathbb{RP}^3$ 的一个可容许对。那么存在 $\mathbb{RP}^3$ 的一个三角剖分 K，使得 f_0 $(K) = f_0$，并且存在一个顶点 $u \in K$，满足 f_0(链环 $(u, K)) = d$，且 Ind_K(V(链环 $(u,$ $K))) =$链环 (u, K)。由于除了 f_1(链环 $(u, K))$ 边之外，Ind_K(V(链环 $(u, K))$) 中没有边，因此 K 中至少有 $\binom{d}{2} - f_1$(链环 $(u, K)) = \binom{d}{2} - 3f_0$(链环 $(u, K)) + 6$ 条缺失边。此外，还有 $f_0 - d - 1$ 条缺失边。因此， $f_1(K) \leq \binom{f_0}{2} - \left(\binom{d}{2} - 3f_0\text{(链环 }(u,\ K)) + 6\right) - (f_0 - d - 1)$。这意味着 $f_1(K) \leq \frac{f_0(f_0-3)}{2} - \frac{d(d-9)}{2} - 5$。

因此， $g_2(K) = f_1(K) - 4f_0(K) + 10 \leq \frac{f_0(f_0-3)}{2} - \frac{d(d-9)}{2} - 5 - 4f_0 + 10$。这进一步简化为 $g_2(K) \leq \frac{f_0(f_0-11)}{2} - \frac{d(d-9)}{2} + 5$。

我们发现，对于 $\{(11;\ 6),(11;\ 8),\ (11;10),\ (12;\ 8),\ (12;\ 10),(13;\ 10),\ (13;12),\ (14;10),\ (14;\ 12),(15;\ 14),\ (16;14),\ (17;16)\}$ 中 $\mathbb{RP}^3$ 的所有可容许情形， $g_2(K) < 17$，这与注 5.7 矛盾。此外，在 (12, 6) 和 (15, 12) 的情形下，我们在这两种情况下都得到 $g_2 \leq 17$ ，这再次与注 5.7 矛盾。

唯一剩下的情形是 (13; 8)。在这种情况下， $g_2 \leq 22$，对于任意顶点 $x \in$lk (u, K)，我们有 lk $(x) \cap$ lk $(u) -$ lk $(ux) = \emptyset$。因此，我们可以收缩边 $ux \in K$。选取一个顶点 $y \in$ lk (u, K)，其度至少为 4。然后，通过收缩边 $uy \in K$ 得到的$\mathbb{RP}^3$ 的新三角剖分的 g_2 至少减少 1，且不超过 21。这意味着存在一个具有 12 个顶点且$g_2 \leq 21$的 $\mathbb{RP}^3$ 三角剖分，这与注 5.7 矛盾。□

定理 5.9. 不存在 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 上至多16 个顶点，且可通过定理 *5.5*从两个 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^3$得到。

证明。设 K 和 L 是 $\mathbb{RP}^3$ 的两个 $\mathbb{Z}_2^3$ 等变三角剖分，其不动顶点分别为 u 和 v。假设 Ind_K(V(lk $(u,$ $K))) =$lk $(u,$ $K)$，且 $\mathrm{Ind}_L(V(\text{lk }(v,\ L))) =$lk $(v,\ L)$，并且存在一个同构 ψ: lk $(u,\ K)$ $\to$ lk $(v,\ L)$。

情形 (i)： 假设 $K\#_\psi L$ 是 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 的一个 $\mathbb{Z}_2^3$ 等变三角剖分，包含 15 个顶点。

由于 lk (u) 是 2-球面的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分，因此 $d(u)$ 必为偶数，且 $d(u) = d(v)$。若 $d(u) \geq 16$，则 $f_0(K)$ $f_0(L) \geq 17$。这将意味着 $f_0(K\#_\psi L) = f_0(K)+f_0(L)-d(u) - 2 \geq 16$，与之矛盾。因此， $d(u)$ 的可能取值为 6,8, 10, 12, 或 14。

对于 $d(u) \in 6, 8, 10, 12, 14$， 令 $(f_0(K)$ $f_0(L))^{d(u)}$ 表示对应于度$d(u) = d(v)$ 的数对。由于 $f_0(K) + f_0(L) - d(u) - 2 = f_0(K\#_\psi L) = 15$，对 $d(u)$ 的每个取值进行分析，可得以下可能性: $(11, 12)_6, (12, 13)_8, (11, 14)_8, (11, 16)_{10}, (12, 15)_{10}$,$(13, 14)_{10}, (13, 16)_{12}, (14, 15)_{12}, (15, 16)_{14}$。这些可能性意味着数对 $(f_0(\mathbb{RP}^3); d(\mathbb{RP}^3)) \in \{(11; 6), (11; 8), (11; 10), (12; 8), (12; 10), (13; 10), (13; 12), (14; 12), (15; 14)\}$ 是可容许的，这与引理 5.8 矛盾。

情况 (ii)： 假设 $K\#_\psi L$ 是一个定义在 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 上、具有 16 个顶点的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分。

若 $d(u) \geq 17$，则 $f_0(K)$ $f_0(L) \geq 18$。这将意味着 $f_0(K\#_\psi L) = f_0(K) + f_0(L) - d(u) - 2 \geq 17$，与之矛盾。因此， $d(u)$ 的可能取值为 6，8，10，12，14，或 16。

由于 $f_0(K)+f_0(L)-d(u)-2 = f_0(K\#_\psi L) = 16$，对 $d(u)$ 的每个取值进行分析，可得以下可能性: $(11, 13)_6, (12,12)_6, (11,15)_8, (12,14)_8, (13,13)_8, (11,17)_{10}, (12,16)_{10}$,$(13, 15)_{10}, (14,14)_{10}$, $(13,17)_{12}, (14,16)_{12}, (15,15)_{12}, (15,17)_{14}, (16,16)_{14}, (17,17)_{16}$。这些可能性意味着以下数对是可接受的: $(f_0(\mathbb{RP}^3); d(\mathbb{RP}^3)) \in \{(11;6), (11;8), (11; 10), (12; 6),(12; 8), (12;10), (13;8), (13; 10),(13; 12), (14;10), (14;12), (15; 12),(15; 14), (16;14), (17; 16)\}$，这与引理 5.8 矛盾。□

问题5.10. 是否存在一个对 $\mathbb{RP}^3\#\mathbb{RP}^3$ 的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分，其顶点数为15 或16 个?

6. Equivariant Triangulation on $\mathbb{RP}^4$

本节研究顶点数不超过 17 的 $\mathbb{RP}^4$ 的等变三角剖分。注意， $\mathbb{RP}^4$ 的任何三角剖分都至少包含 16 个顶点。

引理 6.1. 设 X 是具有少于 *18* 个顶点的 $\mathbb{RP}^4$ 的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分。设 $\pi : |X| \to \Delta^4$ 是轨道映射。 Δ^4中不存在维数大于或等于三的面，其内部包含一点 x，使得 $\pi^{-1}(x) \cap V(X) \neq \emptyset$。

证明。 设 Δ^4 的顶点集为 $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$。假设 Δ^4的内部包含一点 x，使得 $\pi^{-1}(x)$ 包含一个顶点，例如 X 中的 x'。那么 x' 的四个坐标都必须非零。由于 $\mathbb{Z}_2^4$ 作用于 $x' \in V(X)$， X中至少有 16 个顶点的所有坐标都非零。

定义 $D_i = \{\sigma \in X : e_i \in |\sigma|\}$ 对于 $0 \leq i \leq 4$。那么每个 D_i 都是一个4维球，且 ∂D_i 是 X 的一个子复形，它构成了3-球面的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分。由于 X 至多包含17个顶点， ∂D_i 必定包含某个 $\mu \in \mathbb{Z}_2^4$的 $\mu(x')$。这意味着 ∂D_i 包含一个四个坐标均非零的顶点。由于 ∂D_i是3-球面的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分， ∂D_i 必须至少包含16个所有坐标均非零的顶点。另一方面， ∂D_i 包含偶数个顶点，Card$(V(\partial D_i)) = 16$。由引理 3.3可知，这是不可能的。

现在，我们考虑 Δ^4的一个三维面的内部，设为 τ，其中包含一个点 y，使得 $\pi^{-1}(y)$在 X 中包含一个顶点。不失一般性，假设$V(\tau) = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$。设 $z \in \pi^{-1}(y)$是 X中的一个顶点。那么 z的三个坐标必须非零。由于 $\mathbb{Z}_2^4$ 作用于 X的顶点， X 中至少有8个恰有三个非零坐标的顶点。

若对某个 $0 \le j \le 3$ 有 $V(\partial D_j) = \pi^{-1}(y)$，则 ∂D_j 是一个具有 8 个顶点的 $\mathbb{Z}_2^3$-等变三角剖分，其每个顶点都有三个非零坐标。这与推论 3.7 矛盾。因此，对每个 $0 \le j \le 3$，基数$(V(\partial D_j)) \ge 10$。由于 X 至多包含 17 个顶点，基数 $(V(\partial D_4)) \ge 8$，并且由引理 4.6， $V(\partial D_4) \cap \pi^{-1}(\tau) = \emptyset$，我们有基数$(V(\partial D_4))$ =8。若 ∂D_4 属于推论 3.7 的类型 (II) 或 (III)，则存在一个 $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ 使得基数$(V(\partial D_k)) = 10$。由引理 3.2， ∂D_k 至少包含 16 条缺失边。因此，$f_1(\partial D_k) \le 29$。由于 ∂D_k 是一个具有 10 个顶点的三角剖分的三维球面，我们有 $g_2(\partial D_k) \ge 0$，即 $4f_0(\partial D_k) - 10 \le f_1(\partial D_k)$。由此可得 $30 \le f_1(\partial D_k)$，矛盾。

因此， ∂D_4 必定属于推论 3.7（I）中的类型。这意味着 $\pi（V（\partial D_4））= \{a, b\}$，其中 a 和 b 位于 Δ^4 中两个互补三角形的内部，这两个三角形都包含顶点 e_4。不失一般性，假设 a 位于 $e_0e_1e_4$ 的内部，而 b属于 $e_2e_3e_4$的内部，使得 $\pi^{-1}（a）$ 和 $\pi^{-1}（b）$ 各自为 $V（\partial D_4）$ 贡献四个顶点。由于对每个 $0 \le j \le 3$，Card（$V（\partial D_j）$）≥ 10，我们得出 $\pi^{-1}（a）$ 为 ∂D_0 贡献四个顶点，并为 ∂D_1贡献相同的四个顶点。类似地， $\pi^{-1}（b）$ 为 ∂D_2 和 ∂D_3各贡献四个顶点。因此，对每个 $0 \le j \le 3$，Card（$V（\partial D_j）$）$= 12$。令 $V（\partial D_0）= S \cup T$，其中 S 包含全部 8 个具有三个非零坐标的顶点，而T 包含四个仅有两个非零坐标的顶点。

现在，根据引理 3.2， $z \in S$ 只能与 S 中恰好有一个坐标不同的顶点相连。因此， z 在 S 中至多可与三个顶点相邻，在 T中至多可与四个顶点相邻。设 p、 q、 $r \in S$是 z在 S 中的可能相邻顶点。假设p 在 ∂D_0中与 z相邻。那么，lk $(p,$ lk $(z, \partial D_0))$ 是一个长度至少为三的圈。由于q 和 r 分别与 p 在两个坐标上不同，它们不能在 ∂D_0中与 p相连。因此，lk $(p,$ lk $(z, \partial D_0))$ 将是一个由 T中的顶点组成的圈。这是不可能的，因为T 在 ∂D_0中包含两对对跖顶点。因此， z 不能在 ∂D_0中与 p、 q或 r 相连。另一方面，由于 T 在 ∂D_0中包含两对对跖顶点，可能性 V(lk $(z, \partial D_0)) = T$ 也被排除了。因此，Card$(V(\partial D_0)) = 12$ 是不可能的，从而 ∂D_4 不可能是类型 Corollary 3.7 (I)。 consequently， Δ^4 不存在这样的三维面，其内部包含一个点 x，使得 $\pi^{-1}(x)$包含三角剖分 X中的一个顶点。□

注 6.2. 前一个引理描述了一个顶点数不超过 17 的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分的顶点分布，并指出这些顶点可能来自 Δ^4 的三角形或边的内部。

引理 6.3. 设 X 是 $\mathbb{RP}^4$ 的一个 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分。若 $f_0(X) \le 17$，则对于 Δ^4 中的任意3维单形 σ， $\pi^{-1}(\sigma)$ 至多包含9 个顶点。此外，对于 $x \in V(\Delta^4) \setminus V(\sigma)$，$Card(V(\partial D_x)) = 8$。

证明。 反之，假设对于某个 3-单形 σ， $\pi^{-1}(\sigma)$ 在 Δ^4 中含有 10 个或更多顶点。由引理 4.6，我们得到 $V(\pi^{-1}(\sigma)) \cap V(\partial D_{V(\Delta^4 \setminus \sigma)}) = \emptyset$，且基数$(V(\partial D_{V(\Delta^4 \setminus \sigma)})) \ge 8$。因此，基数$(V(X))$ $\ge$基数$(V(\pi^{-1}(\sigma)) \cup V(\partial D_{V(\Delta^4 \setminus \sigma)})) \ge$

18，这与基数$(V(X)) \leq 17$ 的假设矛盾。因此，对于每个 3-单形 σ， $\pi^{-1}(\sigma)$ 在 Δ^4 中含有 9 个或更少的顶点。

由引理 3.1，对于 $x \in V(\Delta^4) \setminus V(\sigma)$，基数$(V(\partial D_x))$ 为偶数，且基数$(V(\partial D_x)) \geq 8$。若基数$(V(\partial D_x)) \geq 10$，则基数 $(V(\pi^{-1}(\sigma)) \cup V(\partial D_x)) \geq 18$，这再次与基数 $(V(X)) \leq 17$ 这一假设相矛盾。因此，基数$(V(\partial D_x)) = 8$。□

在余下部分，我们沿用引理6.1 证明中的记号。由 D_i 的定义可见， ∂D_i 对每个 i均不含不动顶点。因此，

$$\bigcup_{i \in \{0,1,2,3,4\}} V(\partial D_i) \subseteq V(X) \setminus \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}.$$

由引理4.5可得，基数 $\left(\bigcup_{i \in \{0,1,2,3,4\}} V(\partial D_i)\right)$ 为偶数。

此外，对于每个顶点 $x \in \partial D_i$， $0 \leq i \leq 4$， $\pi(x)$ 位于包含顶点 e_i 的三角形或包含该顶点的边 e_i 的内部 Δ^4中。由引理 4.6，我们知道

$$V\left(\pi^{-1}(e_i e_j e_k e_l)\right) \cap V\left(\partial D_{V(\Delta^4) \setminus \{e_i, e_j, e_k, e_l\}}\right) = \emptyset$$

对于某些互不相同的 i、 j、 k、 $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$。因此，Card$(V(X))$ 至少等于 $\partial D_{V(\Delta^4) \setminus \{e_i, e_j, e_k, e_l\}}$ 中的顶点数与由 3-单形 $e_i e_j e_k e_l$ 的边和三角形的内部产生的顶点数之和。

定理 6.4。 不存在至多具有17个顶点的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^4$ *s.*

证明。设 X 是具有 16 个顶点的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^4$。由引理 4.5， $R = V(X) \setminus \{e_0, \ldots, e_4\}$ 中的顶点数为偶数。首先，假设 $V(X)$ 不包含任何不动顶点。对于每个 $i \in \{0, \ldots, 4\}$， $V(\partial D_i) \subseteq V(X)$，并由引理 3.1，Card$(V(\partial D_i)) \geq 8$。此外，对于所有 $i \in \{0, \ldots, 4\}$， $e_i \notin \partial D_i$。这意味着 $\bigcup_{i=0}^{4}(V(\partial D_i)) = R$。

情形 1： 假设对于某个 $i \in \{0, \ldots, 4\}$，Card$(V(\partial D_i)) \geq 14$。

如果 Card$(V(\partial D_j)) = 8$ 对于某个 $j \neq i$，那么根据推论 3.7， $\pi(V(\partial D_j))$ 属于以下某种构型:

(i) 包含顶点 v_j 的 Δ^4 的四条边的内部。(ii) 包含 v_j 的两条边的内部，以及 Δ^4 中包含 v_j 的一个互补三角形。(iii) Δ^4 中包含 v_j 的两个互补三角形的内部。

然而，由于 Card$(V(\partial D_j) \cap V(\partial D_i)) \geq 6$， $V(\partial D_j)$ 至少有 6 个顶点必须来自 Δ^4 中包含 $v_i v_j$ 的某些面的内部。根据上述构型，这是不可能的。因此，我们得出结论：Card$(V(\partial D_j)) \geq 10$。

现在，由于对所有 $j \neq i$ 都有 Card$(V(\partial D_j) \cap V(\partial D_i)) \geq 8$，鸽巢原理推出，对于某些互不相同的 i、 k、 l、 $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$，有$V(\partial D_i) \cap V(\partial D_k) \cap V(\partial D_l) \cap V(\partial D_m) \neq \emptyset$。这意味着，在 Δ^4 中有一个单形的内部存在一点 z，该单形包含顶点e_i、 e_k、 e_l、 e_m，且 $\pi^{-1}(z) \subseteq V(\partial D_i)$。这与引理 6.1 矛盾。因此，不存在满足 Card$(V(\partial D_i)) \geq 14$ 的$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$。

情形 2： 假设对于某个 $i \in \{0, 1, \ldots, 4\}$，Card$(V(\partial D_i)) = 12$。

根据引理 $\pi(V(\partial D_i))$ 中的点要么位于三角形的内部，要么位于边的内部。 6.1，。对于三角形内部的每个点 $x \in \pi(V(\partial D_i))$， $\pi^{-1}(x)$ 由 ∂D_i中的四个顶点组成；对于边内部的每个点 $x \in \pi(V(\partial D_i))$， $\pi^{-1}(x)$ 由 ∂D_i中的两个顶点组成。

如果存在一个顶点属于以下四个或更多集合 $V(\partial D_j)$，其中 $j \in \{0,\dots,4\}$，那么存在一个内点 x 位于某个 3-单形 σ 中，使得 $\pi^{-1}(x)$ 包含 X的一个顶点。这与引理 6.1 矛盾。因此， X 中的每个顶点（不动顶点除外）至多属于以下三个集合 $V(\partial D_j)$，其中 $j \in \{0,\dots,4\}$。

因此，顶点的总重数至多为 $16 \times 3 = 48$。于是，$\sum_{j\in\{0,1,2,3,4\}}$基数$(V(\partial D_j)) \le 48$。这意味着 $\sum_{j\neq i}$ 基数$(V(\partial D_j)) \le 36$。

令 j，k，l，m 表示 $\{0,1,2,3,4\} \setminus \{i\}$ 中其余的四个元素。由于对于每个 $s \neq i$，Card$(V(\partial D_s)) \ge 8$ 且为偶数，因此可能的元组 (Card$(V(\partial D_j))$，Card$(V(\partial D_k))$，Card$(V(\partial D_l))$，Card$(V(\partial D_m))$) 为 (8，8，8，8)、(8，8，8，10)、(8，8，8，12) 或 (8，8，10，10)。

注意，对于前三种可能性，存在某个 $s \in \{j,k,l\}$ 使得$V(\partial D_s)$ 与 $V(\partial D_i)$ 相交于多于四个顶点，或者对于 $s \in \{j,k,l,m\}$，$V(\partial D_s)$ 中存在一个公共顶点，这分别与推论 3.7 或引理 6.1矛盾。因此，只剩下唯一可能的情形 (8，8，10，10)。

由此可知， $V(\partial D_j)$ 和 $V(\partial D_k)$ 各自恰好与 $V(\partial D_i)$ 相交于四个顶点，而 $V(\partial D_j)$ 和 $V(\partial D_k)$ 彼此恰好相交于来自 $V(X) \setminus V(\partial D_i)$ 的四个顶点。这意味着，三角形$e_je_ke_s$ 在 Δ^4 中的内部为某个 $s \in \{l,m\}$ 的 $V(\partial D_j)$ 和 $V(\partial D_k)$ 各贡献四个顶点。

由推论 3.7，对于某个 $t \in \{l,m\} \setminus \{s\}$，三角形 $e_je_ie_t$ 和 $e_ke_ie_t$的内部各自分别为 $V(\partial D_j)$ 和 $V(\partial D_k)$ 贡献四个顶点。由于 $V(\partial D_t)$ 包含 10 个顶点，因此存在一个 $p \neq t$，使得 e_pe_t 的内部至少为$V(\partial D_t)$贡献两个顶点。若 $p = i$、$p = j$或 $p = k$成立，则 3-单形 $e_je_ke_ie_t$ 至少为 $V(X)$贡献 10 个顶点。这与引理 6.3 矛盾。因此， e_te_s 的内部必须至少为 $V(\partial D_t)$贡献两个顶点。由引理 4.6， $V(\pi^{-1}(e_je_ke_se_t)) \cap V(\partial D_i) = \emptyset$，且 $\bigcup_{r=0}^{4} \partial D_r$ 至多包含 16 个顶点，因此 Card$(V(\partial D_i)) \le 10$。这是一个矛盾。

情形 3： 假设对于某个 $i \in \{0,1,\dots,4\}$，Card$(V(\partial D_i)) = 10$。

若 Card$(V(\partial D_j)) = 10$ 对所有 $j \in \{0,1,2,3,4\}$成立，那么某个顶点必属于至少四个集合 $V(\partial D_j)$，这与引理 6.1 矛盾。因此，存在 $s \neq i$ 使得 Card$(V(\partial D_s)) = 8$。由于 Card$(V(\partial D_j)) = 10$， ∂D_j 的顶点分布为以下情形之一：

> (i) 八个顶点来自在 Δ^4 中包含 e_j 的三角形的内部，另有两个顶点来自在 Δ^4中包含e_j 的边的内部。(ii) 四个顶点来自包含 e_j 的三角形的内部，其余 6 个顶点来自在 Δ^4中包含e_j 的边的内部。

子情况(i)： 假设 $V(\partial D_i)$ 的八个顶点来自 Δ^4 中三角形的内部。

假设这两个三角形都属于一个四面体 σ，其中有 $V(\sigma) = \{e_i,e_j,e_k,e_l\}$。如果对 $V(\partial D_i)$ 有贡献的两个三角形相同，记作 $e_ie_je_k$，那么该四面体

$e_ie_je_ke_m$ 对于某个 $m \notin \{i,j,k,l\}$ 将会为 $V(X$贡献超过九个顶点，这与引理6.3矛盾。因此， σ中有两个不同的三角形，记作 $e_ie_je_k$ 和 $e_ie_je_l$，它们各自为 $V(\partial D_i$贡献四个顶点。

那么， $V(\partial D_i)$的其余两个顶点必定来自边e_ie_m的内部，其中 $m \notin \{i,j,k,l\}$。由于 $V(\pi^{-1}(e_ie_je_ke_l)) \cap V(\partial D_m) = \emptyset$，根据引理 3.1，基数$(V(\partial D_m)) = 8$，而边 e_ie_m 的内部也为$V(\partial D_m)$贡献两个顶点。因此， ∂D_m 必定属于推论 3.7 (II)或(III)这一类型。若 ∂D_m 属于推论 3.7 (III)这一类型，则e_me_j、 e_me_k和 e_me_l 的内部各自为 $V(\partial D_m)$贡献两个顶点，因此四面体$e_ie_je_ke_m$ 将为 $V(X)$贡献至少十个顶点，这就造成了矛盾。现在，假设 ∂D_m 属于推论 3.7 (II)这一类型。那么就会出现以下情形。

- 设边e_je_m 的内部与三角形 $e_ke_le_m$ 的内部分别向 ∂D_m贡献两个和四个顶点。由于 R 至多包含16个顶点，并且面$e_ie_je_k$、$e_ie_je_l$、 $e_ke_le_m$、 e_ie_m、e_je_m 的内部向X贡献这16个顶点， ∂D_k 以及 ∂D_l 均包含8个顶点，且属于推论 3.7 的类型（I）。另一方面，若 ∂D_j 包含8个顶点，则其顶点来自面$e_ie_je_k$ 与$e_ie_je_l$ 的内部，而这两个面并非包含e_j的互补面。因此， ∂D_j 包含10个顶点。现在，由于 ∂D_k 的顶点来自 $e_ie_je_k$ 与 $e_ke_le_m$的内部，不失一般性，假设 ∂D_k的顶点集为 $\{(\pm a, \pm b, 0, 0), (0, 0, \pm c, \pm d)$，其中$a$、 b、 c、 d为某些非零实数。现在，由于 $e_ke_le_m$的同一内点向∂D_l贡献顶点， $\{(0, 0, \pm c, \pm d)\} \subset V(\partial D_l)$。因此， ∂D_l的另外四个顶点必须属于类型 $\{(\pm e, \pm f, 0, 0)\}$，其中 e、 f为某些非零数，并且对应于面$e_ie_je_l$。由于 ∂D_i 的顶点来自面$e_ie_je_k$、$e_ie_je_l$以及 e_ie_m的内部，$\{(\pm a, \pm b, 0, 0), (\pm e, \pm f, 0, 0)\} \subset V(\partial D_i)$。 ∂D_i 的另外两个顶点来自边 e_ie_m的内部，因此这两个顶点必须是对跖的，并且恰好包含一个非零坐标。因此，对于由 e_ie_m产生的两个顶点的任何选择， $V(\partial D_i)$的所有顶点都包含一个零坐标，这是不可能的。

- 如果边 e_ke_m （分别为 e_le_m）的内部和三角形 $e_je_le_m$ （分别为 $e_je_ke_m$）的内部分别为 ∂D_m贡献两个和四个顶点，那么 3-单形 $e_ie_je_le_m$ （分别为 $e_ie_je_ke_m$）至少为 V（X）贡献 10 个顶点。这种情况不可能发生。

现在，考虑那两个内部为 ∂D_i 贡献 8 个顶点的三角形来自两个不同的四面体的情形。那么这两个三角形都必须是包含 e_i 的互补三角形。设$e_ie_je_k$ 和 $e_ie_le_m$ 的内部为 ∂D_i贡献 8 个顶点。不失一般性，假设 ∂D_i 的另外两个顶点来自边 e_ie_j的内部。由于 2-单形 $e_ie_je_k$ 为V（X）至少贡献 6 个顶点， $e_ie_le_m$ 的内部必须分别为 ∂D_l 和 ∂D_m 贡献四个顶点。若∂D_m 属于推论 3.7（II）中的类型，则e_je_m、 e_ke_m 的内部为 ∂D_m贡献其余四个顶点。于是，3-单形 $e_ie_je_ke_m$ 为 V（X）至少贡献 10 个顶点，这就产生了矛盾。现在，假设 ∂D_m 属于推论 3.7（I）中的类型。那么其余四个顶点来自$e_je_ke_m$的内部。于是，3-单形$e_ie_je_ke_m$ 再次为 X至少贡献 10 个顶点。这是矛盾。因此，这种子情况不可能成立。

子情况（ii）： 假设只有一个三角形，例如$e_ie_je_k$，为$V(\partial D_i$贡献四个顶点。设 e_l、e_m 是 $\mathbb{D}^4$的其余顶点。若$V(\partial D_i$的其余六个顶点来自 $e_ie_je_ke_l$ 或 $e_ie_je_ke_m$内的边或三角形，则根据引理 6.3，$V(X)$ 将有超过九个顶点，这就产生了矛盾。因此，这些顶点中至多两个可以来自包含 $e_ie_je_k$ 的边 e_i。

假设 e_ie_j 贡献两个这样的顶点。那么根据引理 3.1，边 e_ie_l 和 e_ie_m 也分别向 $V(\partial D_i)$贡献两个顶点。现在，由于 3-单形 $e_ie_je_ke_l$ 至少向 X贡献 8 个顶点，基数 Card$(V(\partial D_m)) = 8$，而 e_ie_m 的内部必须向 ∂D_m贡献 2 个顶点。如果 ∂D_m 属于推论 3.7 (III)中的类型，那么 e_me_j、e_me_k和 e_me_l 的内部各自向 $V(\partial D_m)$贡献两个顶点，从而迫使 $e_ie_je_ke_m$ 向 X贡献至少十个顶点，再次产生矛盾。假设 ∂D_m 属于推论 3.7 (II)中的类型。那么对于 ∂D_m 在 Δ^4中的任意顶点分布，$e_ie_je_ke_m$ 都会向 X贡献至少 10 个顶点，矛盾。

最后，如果$e_ie_je_k$ 中没有包含 e_i 的边为 $V(\partial D_i)$贡献顶点，那么剩下的六个顶点必定来自 e_ie_l 和 e_ie_m的内部。如果 e_ie_l 或e_ie_m 的内部贡献了 6 个顶点，那么$e_ie_je_ke_l$ 或$e_ie_je_ke_m$ 就会为X贡献至少 10 个顶点，这与此矛盾。因此，我们假设四个顶点来自 e_ie_l 的内部，两个顶点来自 e_ie_m。由于 3-单形$e_ie_je_ke_l$ 为 X贡献至少 8 个顶点，∂D_m 的类型为推论 3.7(II)或(III)。如果其类型为推论 3.7 (III)，那么$e_ie_je_ke_m$ 会为 X贡献 10 个顶点，这与此矛盾。假设∂D_m 的类型为推论 3.7 (II)。那么对于 ∂D_m顶点的任意分配，$e_ie_je_ke_m$、$e_ie_je_le_m$ 或 $e_ie_ke_le_m$ 都会为 X贡献至少 10 个顶点，这与此矛盾。

因此，所有可能的构型都会导致矛盾。

情形 4： 假设 Card$(V(\partial D_i)) = 8$ for $i = 0, \ldots, 4$。

固定一个 $i \in \{0, \ldots, 4\}$。那么，如推论 3.7 所述，∂D_i 的三角剖分有 3 种可能。如果 ∂D_i 的顶点集属于推论 3.7 (III) 类型，其中某个$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$满足此条件，那么 $\pi(V(\partial D_i))$ 属于包含顶点 e_i的 Δ^4 的边的内部，因此每条边的内部都为 $V(\partial D_i)$贡献两个顶点。现在，如果 ∂D_x 的顶点集对所有 $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$ 都属于推论 3.7 III 类型，那么 Δ^4 每条边的内部集都会为 $V(X)$贡献两个顶点，于是 X 至少有 20 个顶点。这就产生了矛盾。设对于某个 $j \neq i$，$e_je_le_m$ 为 ∂D_j贡献四个顶点。如果 $i \in \{l, m\}$，那么对于某个$p \in \{l, m\} \setminus \{i\}$ 和 $q \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j, p\}$，$e_ie_je_pe_q$ 会为 $V(X)$贡献至少 10 个顶点。这就产生了矛盾。如果 $i \notin \{l, m\}$，那么单形$e_ie_je_le_m$ 会为 $V(X)$贡献至少 10 个顶点。这就产生了矛盾。这意味着，对于任意 $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$，$\partial D_x$都不可能属于推论 3.7 (I) 或 (II) 类型。

假设 ∂D_x 对所有 $x \in \{0, \ldots, 4\}$ 的顶点集属于推论3.7 (I)中的某种类型。设对于某个 $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$，2-单形$e_ie_je_k$和 $e_ie_le_m$ 的内部 Δ^4 为 $V(\partial D_i$贡献了 8 个顶点，其中 j、k、l和 m是 $\{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$中的互不相同的数。现在，我们有以下几种情况。

- 的内部 $e_ie_je_k$ 不会为.....贡献相同的四个顶点 ∂D_i 到 ∂D_j。因此，.....的内部 $e_je_le_m$ 也不会为.....贡献任何顶点 $V(\partial D_j)$。设.....的内部 $e_je_ke_l$ 和 $e_je_ie_m$ 为.....贡献这 8 个顶点 ∂D_j。那么，.....的 16 个顶点 $V(X$来自面 $e_ie_je_k$、$e_ie_le_m$、$e_je_ke_l$ 和 $e_ie_je_m$的内部。接着由推论 3.7可知，.....的内部 $e_ie_le_m$和 $e_ie_je_m$ 不能

为 ∂D_m 贡献这 8 个顶点，因为它们不是包含 e_m的互补三角形。因此，这种情况不可能发生。同样，如果$e_je_ie_l$ 和 $e_je_ke_m$ 的内部为 ∂D_j贡献这 8 个顶点，这种情况也不可能发生。

- $e_ie_je_k$ 的内部为 ∂D_j 贡献相同的四个顶点到 ∂D_j ，然后$e_je_le_m$ 的内部也为 V贡献四个顶点（∂D_j）。因此，对于V（∂D_l），贡献的三角形必须是$e_je_le_m$ 和 $e_le_ie_k$。接着注意到， V（X）的 16 个顶点来自$e_ie_je_k$、 $e_ie_le_m$、 $e_je_le_m$和$e_le_ie_k$的内部。由此可知， $e_ie_le_m$和$e_je_le_m$ 的内部无法为 ∂D_m 贡献 8 个顶点，因为它们不是包含 e_m的互补三角形。

假设对于某个 $i \in \{0,\ldots,4\}$， ∂D_i的顶点集属于推论 3.7（II）中的类型。那么，在 Δ^4 中存在一个 2-单形，例如$e_ie_je_k$ ，其内部为V（∂D_i）贡献 4 个顶点；还存在两条边，例如 e_ie_l 和 e_ie_m ，其内部分别为 V（∂D_i）贡献两个顶点，其中 $l \neq m$和 l、 $m \notin \{j,k\}$。由于 ∂D_j的顶点集不可能属于推论 3.7（III）中的类型，因此它属于推论 3.7（I）或（II）中的类型。

子情况(i)：假设 ∂D_j 的顶点集属于推论 3.7 （II）中的类型，那么我们有以下可能性：

- $e_ie_je_k$ 的内部并未向 ∂D_j贡献与 ∂D_i 相同的四个顶点。如果$e_je_ie_l$（分别是$e_je_ke_l$）、e_je_k （分别是e_je_i）以及e_je_m 的内部向 ∂D_j贡献了8个顶点，那么3-单形$e_ie_je_ke_l$ 就会向 V（X）贡献至少10个顶点。这就产生了矛盾。

  如果$e_je_ie_m$ （分别是$e_je_ke_m$）、e_je_i （分别是e_je_k）以及e_je_l 的内部向 ∂D_j贡献了8个顶点，那么3-单形$e_ie_je_ke_m$ 就会向 V（X）贡献至少10个顶点。这就产生了矛盾。

  如果$e_je_le_m$ 、 e_je_i 和e_je_k 的内部向 ∂D_j贡献了8个顶点，那么3-单形$e_ie_je_ke_l$ 就会向 V（X）贡献至少10个顶点。这就产生了矛盾。

- $e_ie_je_k$ 的内部向 ∂D_j 贡献与 ∂D_i 相同的四个顶点，随后e_je_l 与e_je_m 的边的内部各自向 ∂D_j贡献两个顶点。在这种情况下，3-单形$e_ie_je_me_l$ 至少向 V（X）贡献8个顶点。由于 V（π^1（$e_ie_je_le_m$））$\cap V$（∂D_k）$= \emptyset$，$e_ie_je_k$ 的内部必须向 V（∂D_k）贡献4个顶点。现在， V（∂D_k）的另外四个顶点要么来自三角形 $e_ke_le_m$ 内部，要么来自边 e_ke_l 与 e_ke_m的内部。在后一种情况下，3-单形$e_ie_je_ke_l$ 至少向 V（X）贡献10个顶点。这是一个矛盾。因此， $e_ke_le_m$ 与$e_ie_je_k$ 的内部向 V（∂D_k）贡献这8个顶点。现在， X 的16个顶点来自面$e_ie_je_k$、 e_ie_l、 e_ie_m、 e_je_l、 e_je_m、 $e_ke_le_m$的内部。因此，面e_ie_m、 e_je_m、 $e_ke_le_m$ 的内部必须向 ∂D_m贡献这8个顶点。此外，面 e_ie_l、 e_je_l、 $e_ke_le_m$ 的内部向 ∂D_l贡献这8个顶点。

子情况（ii）：假设 ∂D_j 的顶点集属于推论3.7(I)中的类型。那么，我们有以下几种可能：

- 如果$e_ie_je_k$ 的内部没有向 ∂D_j贡献 ∂D_i 的同样四个顶点，那么$e_je_le_m$ 的内部也不会向 ∂D_j 贡献这四个顶点。如果$e_je_ie_l$（分别是$e_je_ke_l$）的内部，以及$e_je_ke_m$ （分别是$e_je_ie_m$）的内部贡献了

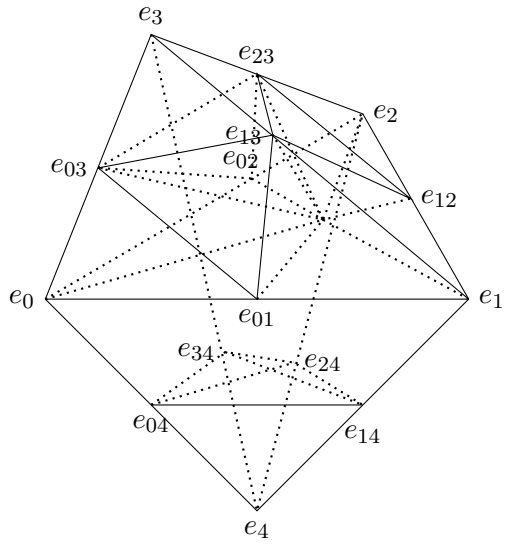


FIGURE 6. Δ^4上的三角剖分的一部分。

8 个顶点给 ∂D_j，那么 3-单形$e_ie_je_ke_l$ （分别是$e_ie_je_ke_m$）会向 V（X）至少贡献 10 个顶点。这是一个矛盾。

- 如果$e_ie_je_k$ 的内部向 ∂D_j贡献 ∂D_i 的同样四个顶点，那么$e_je_le_m$ 的内部就向 ∂D_j 贡献这四个顶点。如果∂D_k 的顶点集属于推论 3.7（II）中的类型，那么我们可以遵循上面子情况(i)中的相同步骤。因此，我们考虑 ∂D_k 的顶点集属于推论 3.7中的类型（I）。由于 3-单形 $e_ie_je_le_m$ 至少向 V（X）贡献8个顶点，$e_ie_je_k$必须向 ∂D_k 贡献 ∂D_i 的同样四个顶点。因此，$e_ke_le_m$ 的内部向 V（∂D_k）贡献另外四个顶点。于是，V（X）的16个顶点来自面 $e_ie_je_k$、$e_je_le_m$、 $e_ke_le_m$、 e_ie_l和 e_ie_m的内部。然而，内部可能向 ∂D_l 贡献8个顶点的面只有$e_je_le_m$、 $e_ke_le_m$和 e_ie_l。注意， V（∂D_l）不可能属于推论 3.7中给出的任何类型。

因此，根据上述对情况（1）至（4）的讨论，只有一种可能： X 的 16 个顶点分别来自单形 $e_ie_je_k$、 e_ie_l、 e_ie_m、 $e_ke_le_m$、 e_je_l 和 e_je_m 的内部。

不失一般性，我们将 i 替换为 1，将 k 替换为 0，将 j 替换为 2，将 l 替换为 3，并将 m 替换为 4。于是， ∂D_0 具有推论 3.7（I）中的等变三角剖分，并且有 8 个顶点，记为 $\{u_1,\dots,u_8\}$，使得 π（$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$）是 Δ^4的一个三角形（记为 $e_0e_1e_2$）内部的一点，而 π（$\{u_5,u_6,u_7,u_8\}$）是 Δ^4的一个三角形（记为 $e_0e_3e_4$）内部的一点。此时， ∂D_1、 ∂D_2、 ∂D_3 和∂D_4 的 8 顶点等变三角剖分如推论 3.7（II）所示。在这种情况下，我们将考察 Δ^4 上的诱导三角剖分（见定理 4.3）。图6给出了Δ^4上该三角剖分的一些面。对于 i、 j、 $k\in\{0,\dots,4\}$， 令e_{ij} （分别为e_{ijk}）表示 Δ^4中单形e_ie_j （分别为$e_ie_je_k$）的重心。 $F_0=$上的诱导三角剖分 $\mathrm{Ind}_{\Delta^4}(\{e_1,e_2,e_3,e_4\})$ 包含图 7 所示的面。假设 e_{12} 和 e_{34}之间有一条边，记为 $e_{12}e_{34}$。那么，$(-1,-1,0,0)(e_{12}e_{34})=(-e_{12})e_{34}$ 也是 X中的一条边。这就导致矛盾，因为 $e_{12}=-e_{12}$ 在 $\mathbb{RP}^4$中。类似地可得， e_{14} 和 e_{23}之间也不可能有边。

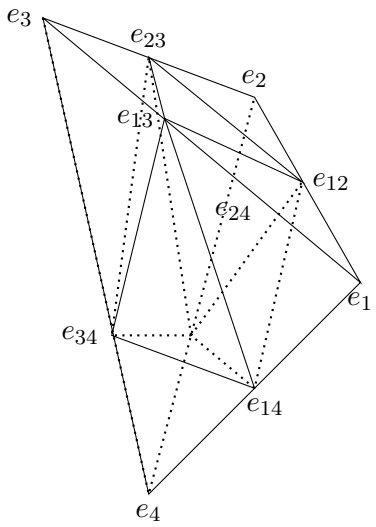


FIGURE 7. F_0上的一个三角剖分。

现在，为了得到 Δ^4的诱导三角剖分，我们需要有边从 e_{012} 连到 e_{03}，e_{23}，e_{24}中的每一个顶点，或者从 e_{134} 连到顶点 e_{02}，e_{13}，e_{23}中的每一个。然而，与上文类似，顶点 e_{23}、e_{012}、e_{34}、e_{034}和 e_{23}之间不可能有边。注意，四面体 $e_{13}e_{14}e_{012}e_{034}$ 是 X中的一个单形。因此，它是两个 4- 单形的一个面。这两个单形的另一个顶点应来自 $\{e_{24}, e_{34}, e_{12}, e_{23}\}$。现在，$e_{13}e_{14}e_{012}e_{034}e_{24}$不可能是一个 4-单形，因为 $e_{13}e_{24}$ 不是 X中的一条边。类似地，$e_{13}e_{14}e_{012}e_{034}e_{34}$、$e_{13}e_{14}e_{012}e_{034}e_{12}$和 $e_{13}e_{14}e_{012}e_{034}e_{23}$ 也不可能是一个 4-单形 Δ^4。因此，$\mathbb{R}P^4$不存在 16 顶点的 $\mathbb{Z}_2^4$-等变三角剖分。

若 Y 是 $\mathbb{R}P^4$的一个具有 17 个顶点的等变三角剖分，那么 Y 中的一个顶点必须是不动顶点（见引理4.5），设为 e_0。在 $V(Y) \setminus \{e_0\}$ 中，顶点的情形与上文 X 的情形相同。因此，通过类似的论证，Y 不可能存在。□

定理6.4 提出了以下问题。

问题 6.5。 是否存在一个 $\mathbb{Z}_2^4$等变三角剖分，使得 $\mathbb{RP}^4$ 具有18 个顶点？

命题2.10 给出了 $\mathbb{R}P^n$的某个等变三角剖分。然而，顶点数量非常庞大。因此，自然会提出以下问题。

问题 6.6. 固定 $n \geq 4$。 $\mathbb{Z}_2^n$-等变三角剖分 $\mathbb{RP}^n$ 所需的顶点极小数量是多少？

致谢。 第一作者感谢 Subhajit Ghosh 通过 Inspire Faculty Fellow 研究基金（IFA-23-MA 198）提供支持，并感谢印度理工学院马德拉斯分校提供研究所博士后奖学金。作者感谢 Basudeb Datta、Mainak Poddar 和 Sonia Balagopalan 提供的宝贵意见。第二作者感谢韩国科学技术院、太平洋数学科学研究所和里贾纳大学提供的经费支持。

References

[1] K. Adiprasito、S. Avvakumov 和 R. Karasev：

$\mathbb{RP}^n$ *Combi-* 的

natorica 42 1 1

次指数规模三角剖分。 , ( ), 第 -8 页，2022。[2] P. Arnoux 和 A. Marin：从复晶体学的视角看复射影平面的 K¨uhnel 三角剖分，第二部分。九州大学理学部纪要 A 辑 45，167–244（1991）。[3] S. Balagopalan，《关于 $\mathbb{RP}^4$ 的一个顶点极小三角剖分》， *The Electronic Journal of Combinatorics*，24，第 1 期，2017。[4] D. Barnette，《凸多胞体下界猜想的证明》， *Pacific J. Math.* **46** （1973），349–354。[5] D. Barnette，《流形的图定理》， *Israel J. Math.* **16**（1973），62–72。[6] D. Barnette，《简单多面体的最少顶点数》， *Israel J. Math.* **10** （1971），121–125。[7] B. Basak、R.K. Gupta、S. Sarkar，《至多具有两个奇点的正规三维伪流形的刻画》， *Discrete Math.* 346 （2023），第 12 期，论文编号 113588，共 15 页。[8] B. Basak 和 S. Sarkar：《具有最少顶点的若干小覆盖的等变和平衡三角剖分》。J. Ramanujan Math. Soc. 30（2015），第 1 期，29–50。[9] A. Bj¨orner 和 F. H. Lutz，《单纯流形、双星翻转及 Poincar´é 同调 3-球面的一个 16 顶点三角剖分》， *Experimental Mathematics*，9(2)，第 275–289 页，2000。[10] M. W. Davis 和 T. Januszkiewicz：《凸多胞体、考克斯特轨形与环面作用》，Duke Math. J. 62（1991），第 2 期，417–451。[11] D. Govc、W. Marzantowicz 和 P. Pave˘si´c，《等变覆盖类型与等变三角剖分中的顶点数》，

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics，第 1–32 页，2024。[12] S. Illman：《有限群作用下 G-流形的光滑等变三角剖分》，Math. Ann. 233（1978），199–220。[13] D. Kalmanovich、E. Nevo 和 G. Sorcar，《关于无平方旗复形四维流形》。 *Discrete Comput Geom*，2025。[14] W. K

¨ 3 4 *Journal of*

Combinatorial Theory Series A 35 2 173 184, 1983

uhnel 和 G. Lassmann，《具有少量顶点的唯一 -邻接 -流形》，，， （），第 - 页。[15] W. K¨uhnel，《库默尔簇的极小三角剖分》。Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 57，7–20（1986）。[16] W. K¨uhnel 和 T. F. Banchoff：《九顶点复射影平面》，Math. Intell. 5，第 3 期，11–22（1983）。[17] W. K¨uhnel 和 J. Spreer：《球面的霍普夫三角剖分与射影空间的平衡三角剖分》，arXiv，2023。[18] F. H. Lutz：《顶点数较少的三角剖分流形：组合流形》。可见于 arXiv:math/0506372v1，2005。[19] F. H. Lutz、T. Sulanke 和 E. Swartz：3-流形的 f-向量。 *Electron. J. Combin.*，第 16 卷，第 2 期（2009）。[20] C. P. Rourke 和 B. J. Sanderson： *Introduction to piecewise-linear topology*。数学及其边缘领域成果丛书，第 69 卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，1972。[21] L. Venturello、H. Zheng，《 $\mathbb{RP}^d$ 的一个新三角剖分族》， *Combinatorica*，41，127–146（2021）。[22] D. W. Walkup：《三维和四维流形的下界猜想》，Acta Math. 125（1970），75–107。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai-600036, India.

Email address: rajukrg3217@gmail.com

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai-600036, India.

Email address: soumen@iitm.ac.in