arXiv:2602.12868v1 [math.FA] 13 Feb 2026

Spencer 六标准差定理的复数类比与复 Banach–Mazur 距离

Tomasz Kobos 数学与计算机科学学院
雅盖隆大学（克拉科夫）Lojasiewicza6,
30-348Krakow,波兰 tomasz.kobos@uj.edu.pl

Marin Varivoda 理学院 - 数学系 萨格勒布大学Bijeničkacesta 30,10000 萨格勒布, 克罗地亚

mvarivod.math@pmf.hr

2026年2月16日

摘要

我们研究 Spencer 六标准差定理的一个复数类比。具体而言，我们提出如下猜想：对于任意维数 $n \geq 2$，给定向量 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$，满足对每个 $i = 1,\ldots,n$都有 $\|a_i\|_\infty \leq 1$，则存在一个向量 $x \in \mathbb{C}^n$，其所有坐标的模均为 1，且对每个 $i = 1,\ldots,n$都有 $|\langle x, a_i\rangle| \leq \sqrt{n}$。界 $\sqrt{n}$ 是紧的，任意复 Hadamard 矩阵的行向量都表明了这一点。此外，如果该猜想在维数 n 下成立，则意味着复数 ℓ_1^n 与 ℓ_∞^n 空间之间的 Banach–Mazur 距离等于 $\sqrt{n}$。我们证明该猜想在 $n = 2,3$ 时成立，从而也确立了这些维数下的$d_{BM}(\ell_1^n, \ell_\infty^n) = \sqrt{n}$。此外，我们还提出了一个关于复数 ℓ_p^n 空间之间 Banach–Mazur 距离的猜想，并验证了该猜想在 $n = 2$ 时成立。由此，我们完整确定了复数 ℓ_p^2 空间之间所有可能的 Banach–Mazur 距离。

1 引言

对于整数 $n \geq 1$ 以及域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，我们将配备范数 $\|\cdot\|_p$ 的空间$\mathbb{K}^n$ 记为 $\ell_p^n(\mathbb{K})$，其中 $\|\cdot\|_p$ 对 $x \in \mathbb{K}^n$ 的定义如下：

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

特别地，$\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 分别表示欧几里得范数和最大范数。$\ell_p^n(\mathbb{K})$的单位球记作 $\mathcal{B}_p^n(\mathbb{K})$。在上下文明确时，记号中将省略域 $\mathbb{K}$。对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，我们将其理解为 $\mathbb{K}^n$ 中的标准内积，该内积对 $x, y \in \mathbb{K}^n$ 定义如下：

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}.$$

特别地，对于 $x \in \mathbb{K}^n$，有 $\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$。对于赋范空间 X, Y和线性算子 $A: X \to Y$，我们用 $\|A\|_{X\to Y}$表示通常的算子范数。在 $X = \ell_p^n(\mathbb{K})$ 和 $Y = \ell_q^n(\mathbb{K})$ 的情形下，我们将 A的范数简记为 $\|A\|_{p\to q}$。Hadamard 矩阵是指一个 $n \times n$ 矩阵，其元素属于 $\mathbb{K}$ 且模为 1，列向量两两正交。对于实（或复）矩阵 A，我们用 A^*表示 A的转置（或共轭转置）。

著名的 Spencer 六标准差定理出自 1985 [11]，是组合偏差理论的基石，解决了集合系统和向量空间中如何平衡赋值的问题。对于集合 n 的任意一族子集A_1，……，A_n，该定理保证存在一种对集合 $S = \{1, \ldots, n\}$中元素进行二染色的方法 S，使得每个集合的偏差 A_i ——即两种颜色元素数量之差的绝对值——不超过 $6\sqrt{n}$。尽管 Spencer 的这一结果在组合学中备受推崇，但其原始形式更具几何意味，属于$\mathbb{R}^n$中的一大类向量平衡问题。原始结果如下。

定理 1.1 (Spencer 六标准差定理)。设 $n \geq 1$ 为整数，并设 a_1，……，$a_n \in \mathbb{R}^n$ 为向量，满足 $\|a_i\|_\infty \leq 1$ 对每个 $i = 1$，……，n均成立。那么，存在一个符号向量 $x \in \{-1, 1\}^n$，使得 $|\langle x,\ a_i\rangle| \leq 6\sqrt{n}$ 对每个$i = 1$，……，n均成立。

不等式右侧的最优常数尚不清楚，但 Spencer 最初的证明实际上给出了 5.32。Pesenti 和 Vladu [10] 最近将其改进为 3.675。另一方面，对于每个 n 存在$n \times n$ Hadamard 矩阵的维数，该常数都不能小于 1。事实上，若$a_1, \ldots,$ $a_n \in \mathbb{R}^n$ 是 Hadamard 矩阵的列向量，那么由 Parseval 恒等式可知，任意符号向量 $x \in \{-1, 1\}^n$ 都满足

$$|\langle x, a_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle x, a_n\rangle|^2 = n\|x\|_2^2 = n^2, \tag{1}$$

这表明至少存在一个指标 $1 \leq i \leq n$，使得 $|\langle x,a_i\rangle| \geq \sqrt{n}$。因此，对所有充分大的$n$都成立的估计式中，可能达到的最佳常数不能小于 1。

1989年，格卢斯金 [4] 独立地获得了一个类似的上界，该上界从凸几何和泛函分析的角度逐步逼近定理1.1 （另见

Banaszczyk [2]和 Giannopoulos 的论文 [3]，其中探讨了相关方法）。本文的主要目标是研究定理1.1的复数类比，以及它与复巴拿赫空间几何（尤其是 Banach–Mazur 距离）的联系。在我们的研究中，最优常数问题实际上发挥着核心作用。

定理 1.1 向复数情形的自然推广，是考虑满足 $\|a_i\|_\infty \le 1$ 的复向量 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^n$，其中最大范数为 $\|\cdot\|_\infty$，且 $\mathbb{C}^n$。Hajela 在 1992 [5] 中指出，即使仅依赖实向量 $x \in \{-1,1\}^n$，对于复向量也能得到相同的渐近界 $C\sqrt{n}$。这可以通过以显然的方式将 $\mathbb{C}^n$ 嵌入 $\mathbb{R}^{2n}$，并利用向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 及其嵌入 $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ 所满足的不等式 $\|\widetilde{x}\|_\infty \le \|x\|_\infty \le \sqrt{2}\|\widetilde{x}\|_\infty$，从定理 1.1 轻易推出。然而，在这种情况下，常数 C 的最优值甚至更加难以确定。另一方面，我们认为，对于将要讨论的 Spencer 定理的复数版本，每个维度下最佳常数的问题或许都有明确答案。具体而言，自然的做法是不仅考虑复向量 a_i，还允许向量 x 的坐标为模等于 1 的复数。模为 1 的复数称为幺模数；类似地，坐标均为幺模数的向量 $x \in \mathbb{C}^n$ 称为模为 1 的向量。这类向量有时也称为相位向量；这里的“幺模”一词不应与其在数学其他领域中的不同含义混淆。我们的主要猜想如下。

猜想 1.2。设 $n \ge 1$ 为一个整数，且 a_1、……、$a_n \in \mathbb{C}^n$ 为满足以下条件的向量：对于每个 $i = 1$、……、n，都有 $\|a_i\|_\infty \le 1$。那么，存在一个幺模向量 $x \in \mathbb{C}^n$，使得对于每个 $i = 1$、……、n，都有 $|\overline{\langle x,\ a_i\rangle}| \le \sqrt{n}$。

如前所述，猜想的关键在于每个维度 n下的最优界，而不仅仅是渐近估计。显然，在每个维度 n 中，右侧不可能小于 $\sqrt{n}$，因为我们可以针对作为某个 a_1、……、a_n的行向量的向量重复计算式（1），其中$n \times n$ 为复 Hadamard 矩阵。与实数情形不同，这种矩阵在每个维度都存在。因此，该猜想是紧的：每个复 Hadamard 矩阵都在这个极大极小问题中达到等号。值得注意的是，在三维情形下还存在其他等号情形——详见第 4 节。事实证明，对于 $n = 3$，达到等号的向量 a_1、a_2、a_3 不一定是幺模向量。

猜想1.2 类似于复向量几何中某些著名的未决问题，例如关于存在 n^2 条位于 $\mathbb{C}^n$中的等角直线的猜想，即关于对称信息完备正值算子测度存在性的 Zauner 猜想（例如参见 [8]），或每一维中复阿达玛矩阵的分类 n（例如参见[12]），后者因等号情形而与我们的猜想直接相关。这些问题与实数情形形成鲜明对比：在实数情形中，关于实数标量的答案远没有那么明确。这一差异似乎源于如下事实：模为1的实数标量只有两个，而在复数情形中，我们有一个丰富得多的集合——即复单位圆。复几何中另一个众所周知、且与猜想1.2风格极为相似的问题是复木板问题，由 Ball 在 2001 [1], 中解决，并有 Ortega 最近发表的一个简化证明 [9]。复数板问题是 Tarski 板问题在

空间 $\mathbb{C}^n$ （赋予欧几里得范数）中的一个版本。Ball 的结果指出，对任意向量 a_1，……， $a_N \in \mathbb{C}^n$，若其欧几里得范数为1，且对任意非负实数t_1，……， t_N，若满足 $\sum_{i=1}^N t_i^2 = 1$，则存在向量 $x \in \mathbb{C}^n$，使得 $\|x\|_2 = 1$ 以及$|\langle x, \ a_i\rangle| \geq t_i$对每一个 $1 \leq i \leq N$成立。因此，猜想1.2 寻求某些内积的同时最小化，而复木板问题则讨论它们的同时最大化。此外，这两个结果在所用范数方面也形成鲜明对比——在复木板问题中，欧几里得范数居于核心地位，而在猜想1.2 中则是最大范数。除了面貌相似之外，我们并不知道这两个问题之间有任何直接联系。

猜想 1.2的另一个动机，也是我们研究的重点，是它与复巴拿赫空间几何的联系。回顾一下，对于同一域 X 上的两个维数为 Y n 的赋范空间 $\mathbb{K}$，*Banach–Mazur* 距离$d_{BM}(X, \ Y)$ X与 Y定义为

$$d_{BM}(X,Y) = \inf \|A\|_{X\to Y} \cdot \|A^{-1}\|_{Y\to X},$$

其中，下确界取遍所有线性可逆算子 $A: X \to Y$。由紧致性可知，下确界由某个线性算子取得，而 Banach– Mazur 距离是赋范空间等价类集合上的乘法距离，这些空间的维数为 n，并将等距空间视为相同。Banach–Mazur 距离由 Banach 和 Mazur 于20世纪40年代引入，在泛函分析和巴拿赫空间几何中发挥着重要作用，因为它为两个巴拿赫空间在线性结构方面的“相似”程度提供了定量度量。关于其基本性质，读者可参阅 Tomczak-Jaegermann 专著 [13] 的第9章。尽管 Banach–Mazur 距离的概念很自然，但要精确确定该距离往往极具挑战。两个n维赋范空间之间的最大可能距离仅在 $\mathbb{K}$ 的 $n = 2$ 和 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$情形下已知，除此之外只有平凡情形 $n = 1$，这反映了这一难点。一般而言，最大距离的上界为 n，下界为 cn，其中 c是某个绝对常数（实数和复数情形均如此）。对于经典的实 ℓ_1^n 和 ℓ_∞^n 空间，该距离仅在 $n \leq 4$时已知。对于 $n = 2$，这些空间显然是等距的；但对于 $n = 3$ 和 $n = 4$，确定距离（分别为 9 5 和 2）并非易事，而且直到最近才得以完成（见 [7]）。一般而言，已知距离 $d_{BM}(\ell_1^n(\mathbb{R})$ $\ell_\infty^n(\mathbb{R}))$的渐近阶为$\sqrt{n}$，但其一般情形下的精确值仍未解决（见 [15] 及 [7]中的注 3.2）。正如我们将看到的，确定ℓ_1^n 与 ℓ_∞^n之间 Banach–Mazur 距离的问题若改在复数情形下考虑，则明显不同，而且可能在每个维数下都有明确答案。对于一般的ℓ_p^n 空间（其中 $1 \leq p \leq \infty$），当 p和 q位于 2 的同一侧，即 $1 \leq p, q \leq 2$或 $2 \leq p, q \leq \infty$时，精确距离 $d_{BM}($ $\ell_p^n, \ell_q^n)$很容易确定。此时有一个简单公式 $d_{BM}(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|}$。然而，当 p和 q位于 2 的不同侧时，例如 ℓ_1^n 和 ℓ_∞^n的情形，确定精确距离就困难得多。对于此类 p，q，已知距离的阶为 n^α, _其中 $\alpha =$max $\left\{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right|\right\}$，而 n^α 是复数情形下的精确上界。除前面提到的距离 $d_{BM}(\ell_1^n(\mathbb{R})$ $\ell_\infty^n(\mathbb{R}))$在 $n = 2$、3、4时的例子外，我们不知道还有其他情形下 Banach–Mazur 距离 $d_{BM}(\ell_p^n, \ell_q^n)$已 - - - -

已确定，当 p, q 位于 2的不同侧时。看来，在复数情形下，即使对于 $d_{BM}(\ell_1^n(\mathbb{C})$ $\ell_\infty^n(\mathbb{C}))$，该距离的值也尚未发表，因为这些空间并不等距，这与实数情形不同。猜想 1.2引出了关于这一距离的如下猜想。

猜想 1.3。 对于每个整数 $n \geq 1$，我们都有

$$d_{BM}(\ell_1^n(\mathbb{C}), \ell_\infty^n(\mathbb{C})) = \sqrt{n}. \tag{2}$$

这个猜想弱于猜想 1.2，也就是说，猜想 1.2 蕴含猜想 1.3。在复数情形下，每个维数 $n \geq 1$ 都有上界 $d_{BM}(\ell_1^n(\mathbb{C})\ \ell_\infty^n(\mathbb{C})) \leq \sqrt{n}$，这可由复 Hadamard 矩阵的存在性轻易推出（见引理 2.1）。因此，主要难点在于建立 Banach–Mazur 距离的下界。为了说明猜想 1.2 如何蕴含这个下界，假设 $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是一个线性算子，满足 $\|A\|_{1\to\infty} = 1$。若 e_i 表示标准单位基的第 i 个向量，则对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，都有 $\|A(e_i)\|_\infty \leq \|e_i\|_1 = 1$；这表明 A 的矩阵的每个元素的模至多为 1，因为 $A(e_1)\ldots\ldots, A(e_n)$ 是 A 的列向量。因此，若将 A 的行向量记为 $a_1, \ldots\ldots, a_n$，则对于每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，都有 $\|a_i\|_\infty \leq 1$；这表明向量 $a_1, \ldots\ldots, a_n$ 满足猜想 1.2 的假设。现在，若 $x \in \mathbb{C}^n$ 是一个满足 $|\langle x$、且对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$ 有 $a_i\rangle| \leq \sqrt{n}$ 的模为 1 的向量，那么对于其共轭向量 $x \in \mathbb{C}^n$，我们有

$$n = \|\overline{x}\|_1 = \|A^{-1}(A(\overline{x}))\|_1 = \left\|A^{-1}\left(\overline{\langle x, a_1\rangle}, \ldots \overline{\langle x, a_n\rangle}\right)\right\|_1$$

$$\leq \|A^{-1}\|_{\infty\to 1} \cdot \left\|\left(\overline{\langle x, a_1\rangle}, \ldots \overline{\langle x, a_n\rangle}\right)\right\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_{\infty\to 1} \cdot \sqrt{n},$$

从而得到所需的不等式 $\|A^{-1}\|_{\infty\to 1} \geq \sqrt{n}$。

我们还提出了一个更一般的猜想，涉及具有 p、且位于 2 两侧的 ℓ_p^n 空间的 Banach–Mazur 距离 q。

猜想 1.4。 对于每个整数 $n \geq 1$ 以及所有 $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$，我们有

$$d_{BM}(\ell_p^n(\mathbb{C}), \ell_q^n(\mathbb{C})) = n^\alpha, \tag{3}$$

其中 $\alpha =$最大值 $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right\}$。

如前所述，上界已知，且容易处理（见引理 2.1）。若能证实这一猜想，就可以确定任意可能的 $\ell_p^n(\mathbb{C})$ 与 $\ell_q^n(\mathbb{C})$之间的所有 p，q。

尽管猜想 1.2 和猜想 1.4 都蕴含猜想 1.3，但我们尚未发现任何直接的方法，能够从猜想1.2 或猜想 1.4推出猜想 1.3。此外，猜想 1.2 与猜想1.4之间似乎也不存在任何直接的推论关系。我们对这些猜想的贡献概括如下。

定理 1.5。 猜想 *1.2* 对 $n = 2$，3成立。特别地，猜想 *1.3* 对 $n = 2$，3也成立。猜想 *1.4* 对 $n = 2$成立。

尽管猜想1.2 的二维情形很直接，但关于 1.4中 ℓ_p^2 与 ℓ_q^2 之间距离的二维情形依赖于某种体积论证，而这种论证遗憾的是在更高维度下失效。这些结果将在第 3节介绍；前一节第2 节则包含关于复阿达玛矩阵，以及 ℓ_p^n 空间之间 Banach–Mazur 距离的一些初步观察。论文的主要工作见第4节，其中证明了猜想1.2的三维情形。与 $n = 2$相比，这一论证复杂得多；其核心思路是将问题表述为用某些称为环面体的形状覆盖二维环面的问题。为证明环面无法被覆盖，我们使用了一个基于三次单位根、包含 9 个点的可平移网格。事实证明，对于任意三个环面体的配置，都可以平移网格，使得这 9 个点中至少有一个未被覆盖，从而证明环面无法被覆盖。

2 复阿达玛矩阵的预备知识

在本节中，我们简要说明如何利用复 Hadamard 矩阵，在 3 所示条件下，推导复 ℓ_p^n 和 ℓ_q^n 空间之间 Banach–Mazur 距离的上界，其中 p 和 q 分别位于 2 的两侧。我们省略 p 和 q 位于 2同一侧的情形，因为这一情形众所周知，也无法体现实数标量与复数标量之间的任何实质区别。实数情形与复数情形的关键区别在于，对于每个 $n \times n$，都存在复 Hadamard 矩阵，而实阿达玛矩阵是否存在则取决于维数。一个经典的 $n \times n$ Hadamard 矩阵是 n维的离散傅里叶变换（*DFT*）矩阵 F_n，其定义为

$$(F_n)_{j,k} = \exp\left(2\pi i \frac{jk}{n}\right) \qquad \text{for} \qquad 1 \le j,k \le n$$

（通常会乘上一个 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 因子，使矩阵成为酉矩阵）。在复数维数为 $n = 2$、3、5时，每个复 Hadamard 矩阵都等价于离散傅里叶变换矩阵（允许对行和列进行置换，并乘以对角酉矩阵）。然而，在维数 $n = 4$的情形下，已经存在一族由一个参数构成的无穷多个两两不等价的复 Hadamard 矩阵。由于复 Hadamard 矩阵在量子信息论中十分重要，相关研究成果已相当丰富，但目前只有低维情形得到了完整分类（见 [12]）。要得到 3 中关于 $d_{BM}(\ell_p^n,\ \ell_q^n)$的上界，只需取 $1 \le q \le 2 \le p \le \infty$任意一个 Hadamard 矩阵即可。

以下引理并非新结果；例如，在 [13]的命题 37.6 中就出现了本质上相同的证明和同样的估计。尽管如此，我们认为，为求完整起见，仍值得回顾一下下面这个运用 Riesz-Thorin 插值定理的简短论证。

引理 2.1。 对于任意整数 $n \ge 1$ 以及所有 $1 \le q \le 2 \le p \le \infty$，有

$$d_{BM}(\ell_p^n(\mathbb{C}), \ell_q^n(\mathbb{C})) \le n^{\alpha},$$

其中 $\alpha =$最大值 $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right\}$。

证明。通过简单的对偶论证，不失一般性地假设 $\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\geq\frac{1}{q}-\frac{1}{2}$，即 $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$。事实上，我们有 $d_{BM}(\ell_p^n(\mathbb{C}),\ell_q^n(\mathbb{C}))=d_{BM}(\ell_{p^*}^n(\mathbb{C}),\ell_{q^*}^n(\mathbb{C}))$，其中 $p^*=\frac{p}{p-1}$ 和 $q^*=\frac{q}{q-1}$。因此，如果反向不等式成立，我们可以将 (p,q) 替换为一对 (q^*,p^*)，它满足 $1\leq q^*\leq 2\leq p^*\leq\infty$。

令 H 为任意复 $n\times n$ Hadamard 矩阵。注意，对于每个 $1\leq i\leq n$，都有 $\|H(e_i)\|_\infty=1$，因此 $\|H\|_{1\to\infty}\leq 1$。此外，$\|H\|_{2\to 2}=\sqrt{n}$，因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ 是酉矩阵。因此，取$\theta=\frac{2}{q^*}\in[0,1]$ 应用 Riesz-Thorin 插值定理，得到

$$\|H\|_{q\to q^*}\leq\|H\|_{1\to\infty}^{1-\theta}\cdot\|H\|_{2\to 2}^{\theta}=n^{\frac{\theta}{2}}=n^{\frac{1}{q^*}}=n^{1-\frac{1}{q}}.$$

因此，由于 $p\geq q^*$，可得

$$\|H\|_{q\to p}\leq\|H\|_{q\to q^*}\leq n^{1-\frac{1}{q}}.$$

为了给范数 $\|H^{-1}\|_{p\to q}$ 建立上界，我们将使用 Hölder 不等式推出的关于 ℓ_p 范数的标准估计。显然，由于矩阵 $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ 是酉矩阵，有$H^{-1}=\frac{1}{n}H^*$，因此矩阵 $\sqrt{n}H^{-1}$ 也是酉矩阵。于是，对于任意 $x\in\mathbb{C}^n$，有

$$\frac{\|H^{-1}x\|_q}{\|x\|_p}\leq\frac{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|H^{-1}x\|_2}{n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|x\|_2}=n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}},\tag{4}$$

这意味着 $\|H^{-1}\|_{p\to q}\leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$。综上，我们有

$$d_{BM}(\ell_p^n(\mathbb{C}),\ell_q^n(\mathbb{C}))\leq\|H\|_{q\to p}\cdot\|H^{-1}\|_{p\to q}\leq n^{1-\frac{1}{q}}\cdot n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}},$$

如所需。 □

上述证明同样适用于存在实 $n\times n$Hadamard 矩阵的实维数 n（猜想为 $n=1$、2 和 $n=4k$，其中 $k\in\mathbb{N}$）。在这种情况下，当 p和 q分别位于 2 的两侧时，同一上界 (3) 对 $d_{BM}(\ell_p^n(\mathbb{R}),\ell_q^n(\mathbb{R}))$ 仍然成立。然而，这个上界并非对所有 n都成立：由 [7]可知，$d_{BM}(\ell_1^3(\mathbb{R}),\ell_\infty^3(\mathbb{R}))=\frac{9}{5}>\sqrt{3}$。此外，并非所有实阿达玛矩阵都能得出相同的上界。例如，Hall [6] 确立了 16 阶 Hadamard矩阵有五个等价类（另见 [14, , 第 419–421] 页，其中描述了 Hall 发现的 5 个类）。回顾一下，若两个 Hadamard矩阵可通过置换行或列，并将行或列乘以 -1 相互得到，则称它们等价。通过计算机辅助计算可以验证，Hall 第一类、第二类和第三类矩阵（采用 [14]中的术语）给出的上界为 4，而 Hall 第四类、第五类矩阵则给出更精确的上界 $d_{BM}(\ell_1^{16}(\mathbb{R}),\ell_\infty^{16}(\mathbb{R}))\leq 3.5$。

在下面的注记中，我们指出，猜想 1.3若成立，将导出一个关于复 Hadamard 矩阵和幺模向量的有趣推论。

注记 2.2. 若猜想 1.3成立，即 $d_{BM}(\ell_1^n(\mathbb{C}),\ell_\infty^n(\mathbb{C}))=\sqrt{n}$，那么对于任意$n\times n$ 复 Hadamard 矩阵 H，都存在一个模为 1 的向量 $x\in\mathbb{C}^n$ 使得 $\frac{1}{\sqrt{n}}Hx$ 也是模为 1 的。这可由以下事实推出：在这种情况下，

引理2.1 中的估计必定是锐的，特别是，估计式 $\|H^{-1}\|_{\infty\to 1} \le \sqrt{n}$必须取等号，这意味着对于某个 4，式（ x）取等号。迖迫使 x 的所有元素具有相同的模 $c>0$，且 $H^{-1}x$的所有元素的模为$\sqrt{n}c$。由于 $nH^{-1}=H^*$ 是任意复 Hadamard 矩阵，故结论成立。

换言之，若上述断言对某个复数 $n\times n$ Hadamard 矩阵不成立，则猜想 1.3（从而猜想1.2 与 1.4）亦不成立。对于离散傅里叶变换矩阵，这样的模为 1 的向量 x 可以显式给出，并且该断言可通过涉及广义高斯和的直接计算加以验证。可以合理地认为，存在对该断言的直接证明（无需援引 Banach–Mazur 距离），且该证明适用于任意复数 $n\times n$ Hadamard 矩阵。

3 二维情形

本节中，我们证明这些猜想的二维情形。我们首先考虑猜想 1.2 在 $n=2$ 下的情形，此即 Spencer 定理的复数类比。尽管该证明较为直接，但它阐明了将在三维情形中得到显著推广的几何思想。

猜想 *1.2* 在 $n=2$ 下的证明。设 a_1、$a_2\in\mathbb{C}^2$ 满足 $\|a_1\|_\infty\le 1$ 且 $\|a_2\|_\infty\le$1。反设对每一个形如 $x=(1,e^{i\varphi})$（其中 $\varphi\in[0,2\pi)$）的模为 1 的向量,_不等式 $|\langle a_1$、$x\rangle|>\sqrt{2}$ 或 $|\langle a_2$、$x\rangle|>\sqrt{2}$中至少有一个成立。特别地，

$$|\langle a_1,x\rangle|^2>2\ge\|a_1\|_2^2.$$

因此，若我们写作 $a_1=(a,b)$，则

$$|a+be^{-i\varphi}|^2>|a|^2+|b|^2,$$

这等价地改写为 Re$(abe^{i\varphi})>0$。当 $\bar{a}=0$ 或 $b=0$时，这个不等式显然不可能成立。否则，它在 φ 中一个长度为 π 的开区间上成立，这对应于复单位圆上的一个开半圆。类似地，不等式 $|\langle a_2,\ x\rangle|>\sqrt{2}$ 也至多在复单位圆上的一个开半圆上成立。然而，单位圆不可能被两个开半圆的并集覆盖。这个矛盾完成了证明。□

本节余下部分将致力于证明 $n=2$ 的猜想 1.4，即确定 $\ell_p^2(\mathbb{C})$ 与 $\ell_q^2(\mathbb{C})$ 之间的精确 Banach–Mazur 距离，其中$1\le q\le 2\le p\le\infty$。据我们所知，即使是 $q=1,\ p=\infty$ 的情形，也尚未见诸文献。我们方法的关键在于体积论证。首先注意，对于任意 $n\ge 1$，确定 $\mathcal{B}_\infty^n(\mathbb{C})$ 内单位球 $\mathcal{B}_1^n(\mathbb{C})$ 的线性像的最大可能体积并不困难。事实上，这个最大体积是对所有满足 $\|A\|_{1\to\infty}\le 1$ 的线性算子 $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$，取 $|\det A|$ 的最大值。特别地，对于这样的 A，我们有 $\|A(e_i)\|_2\le\sqrt{n}\|A(e_i)\|_\infty\le 1$，对每个 $i=1,\dots,n$ 均成立。因此，由 Hadamard 不_等式可得 $|\det A|\le n^{\frac{n}{2}}$；对于任意复 Hadamard 矩阵，等号均成立。

如何确定 $\mathcal{B}_\infty^n(\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{B}_1^n(\mathbb{C})$ 内的最大体积副本，则远没有那么明确。实数情形会让人觉得，这些球的标准位置应该

离最大化体积相去甚远。但事实证明，在 $n = 2$ 的情形下，标准位置 $\frac{1}{2}\mathcal{B}_\infty^2(\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{C}_1^2(\mathbb{B})$ 实际上是最优的，也就是说，可能的最大体积等于 $1\ 4$。

引理 3.1. 对于任意复数 2×2 矩阵 A,

$$\|A\|_{\infty\to 1} \geq 2\sqrt{|\det A|}. \tag{5}$$

证明。令 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 表示某个 $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}$。我们考虑不等式

$$|a + be^{i\varphi}|^2 \geq |a|^2 + |b|^2$$

对于变量 $\varphi \in [0, 2\pi]$。与前一个证明类似，我们推得在这种情况下，φ 中存在一个长度至少为 π 的闭区间，使得该不等式成立（当 $a,\ b \neq 0$时，长度恰为 π ）。类似地，在 $\psi \in [0, 2\pi]$ 中存在一个长度至少为 π 的闭区间，使得 $|c + de^{i\psi}|^2 \geq |c|^2 + |d|^2$。由于圆上的任意两个闭半圆都相交，因此存在一个公共角 $\alpha \in [0, 2\pi]$ ，使得

$$|a + be^{i\alpha}| \geq \sqrt{|a|^2 + |b|^2} \quad \text{and} \quad |c + de^{i\alpha}| \geq \sqrt{|c|^2 + |d|^2}.$$

因此，现在我们可以估计

$$\begin{aligned} \|A\|_{\infty\to 1} &\geq |a + be^{i\alpha}| + |c + de^{i\alpha}| \\ &\geq \sqrt{|a|^2 + |b|^2} + \sqrt{|c|^2 + |d|^2} \\ &\geq 2\sqrt[4]{(|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2)} \\ &\geq 2\sqrt{|\det A|}, \end{aligned}$$

其中第二个估计由算术-几何平均不等式得出，最后一个估计则对 2×2 个矩阵使用 Hadamard 不等式得到。

□

有了前面的引理，我们现在可以证明1.4 关于$n = 2$的猜想。

关于*1.4* 的猜想的证明。按照引理2.1证明开头所用的同一对偶论证，不妨设 $\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$。记 $d = d_{BM}(\ell_p^2(\mathbb{C})\, \ell_q^2(\mathbb{C}))$。由引理2.1可知 $d \leq 2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$，因此只需证明反向不等式。设 $A\colon\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ 是一个满足以下条件的算子$\|A\|_{q\to p} = 1$, $\|A^{-1}\|_{p\to q} = d$ 并设 $a_1,\ a_2 \in \mathbb{C}^2$ 是 A的列。由 Hölder 不等式

$$1 \geq \|A(e_i)\|_p = \|a_i\|_p \geq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|a_i\|_2,$$

which 给出 $\|a_i\|_2 \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$，其中 $i = 1,\ 2$。因此，Hadamard 不等式给出

$$\sqrt{|\det A|} \leq \sqrt{\|a_1\|_2\|a_2\|_2} \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

从而 $\sqrt{|}$行列式$A^{-1}| \geq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$。因此，引理3.1应用于 A^{-1}得出$\|A^{-1}\|_{\infty\to 1} \geq 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}$。另一方面，根据关于该算子的假设

A 以及 ℓ_p 空间单位球之间的标准包含关系，可得

$$2^{-\frac{1}{p}} A^{-1}(\mathcal{B}_\infty^2) \subseteq A^{-1}(\mathcal{B}_p^2) \subseteq d\mathcal{B}_q^2 \subseteq d2^{1-\frac{1}{q}} \mathcal{B}_1^2,$$

因此

$$A^{-1}(\mathcal{B}_\infty^2) \subseteq d2^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \mathcal{B}_1^2.$$

因此

$$d \cdot 2^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \geq \|A^{-1}\|_{\infty\to 1} \geq 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}},$$

[1] [1]这可化简为 $d \geq 2^{q-2}$，证毕。

□

如果对所有 $\frac{1}{n}\mathcal{B}_\infty^n(\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{B}_1^n(\mathbb{C})$，标准位置都是体积最优的 $n \geq 2$，那么猜想 1.4 便可通过与 $n = 2$相同的论证得出。然而，在任何维数 $n \geq 3$下，这一点都不成立，如下述评注所示。

评注 3.2. 对于每个 $n \geq 3$，都存在一个复数 $n \times n$ 矩阵 A，使得

$$\|A\|_{\infty\to 1} < n\sqrt[n]{|\det A|}.$$

我们通过归纳法构造一个反例。在 $n = 3$的基础情形中，我们使用数值优化找到一个复数 3×3 矩阵，其 $|$ 行列式 $A_3| = 1$ 满足$\|A_3\|_{\infty\to 1} < 3$。所得矩阵为（四舍五入到小数点后 4 位）：

$$A_3 \approx \begin{bmatrix} -0.3857 - 0.5131i & 0.1795 - 0.5142i & 0.0675 - 0.5393i \\ -0.0179 - 0.6519i & -0.6798 + 0.2941i & 0.0611 + 0.1143i \\ -0.3182 - 0.2582i & 0.2765 - 0.2900i & -0.1519 + 0.8092i \end{bmatrix}.$$

数值计算得到 $\|A_3\|_{\infty\to 1} \approx 2.9978 < 3$。

现在假设，对于 $n \geq 3$，我们构造了一个复 $n \times n$ 矩阵 A_n，使得 $|\det A_n| = 1$ 且 $\|A_n\|_{\infty\to 1} < n$。令 A_{n+1} 为由 $(n+1) \times (n+1)$ 定义的矩阵

$$A_{n+1} := \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_n \end{array}\right].$$

对于任意向量 $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$，满足 $\|x\|_\infty \leq 1$，现在有

$$\|A_{n+1}x\|_1 = |x_0| + \|A_n(x_1, \ldots, x_n))\|_1 < 1 + n$$

whe这里我们使用了 $|x_0| \leq 1$和 $\|A_n\|_{\infty\to 1} < n$。因此 $\|A_{n+1}\|_{\infty\to 1} < n+1$，如所需 .

4 三维情形

本节我们证明猜想1.2 对于 $n = 3$。证明的主要思路如下。在二维情形（第3节）中，我们证明了，如果猜想不成立，那么单位圆就可以被两个开半圆的并集覆盖，这显然是不可能的。类似地，对于 $n = 3$，我们将证明，假设猜想不成立，就意味着二维环面，即两个圆的乘积，可以被三个环面集合覆盖，我们将其

称为环面体。因此，我们的主要目标将是证明这样的覆盖是不可能的。

将环面定义为 $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$, ，若 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^2$ 与 $(\theta_1', \theta_2') \in \mathbb{R}^2$ 满足 $\theta_1' = \theta_1 + 2k\pi$ 且 $\theta_2' = \theta_2 + 2l\pi$ 对某个 $k, l \in \mathbb{Z}$成立，则将点 (θ_1, θ_2) 与 (θ_1', θ_2') 视为相同。

定义 4.1。 设 $a \in \mathbb{C}^3$ 是满足 $\|a\|_\infty \leq 1$的向量。我们将以 a 为中心的环面体 定义为集合

$$B(a) = \left\{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T} : \left|\left\langle a, (1, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})\right\rangle\right| > \sqrt{3}\right\}.$$

将不等式改为弱不等式 ($\geq$) 所定义的类似集合称为闭环面体。若向量 a是幺模的，则 $B(a)$ 称为幺模环面体。

用上述术语，3维情形的猜想1.2 可重述如下：对于任意满足 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$ 的向量，$\|a_i\|_\infty \leq 1$以这些向量为中心的环面体的并集无法覆盖整个环面。换言之，我们有

$$\mathbb{T} \not\subseteq B(a_1) \cup B(a_2) \cup B(a_3).$$

注意，闭环面体可以覆盖环面——例如，当 a_1, a_2, a_3是一个 3×3 复 Hadamard 矩阵的行向量时，等式（1）成立，因此以 a_i 为中心的闭环面体覆盖了 $\mathbb{T}$。

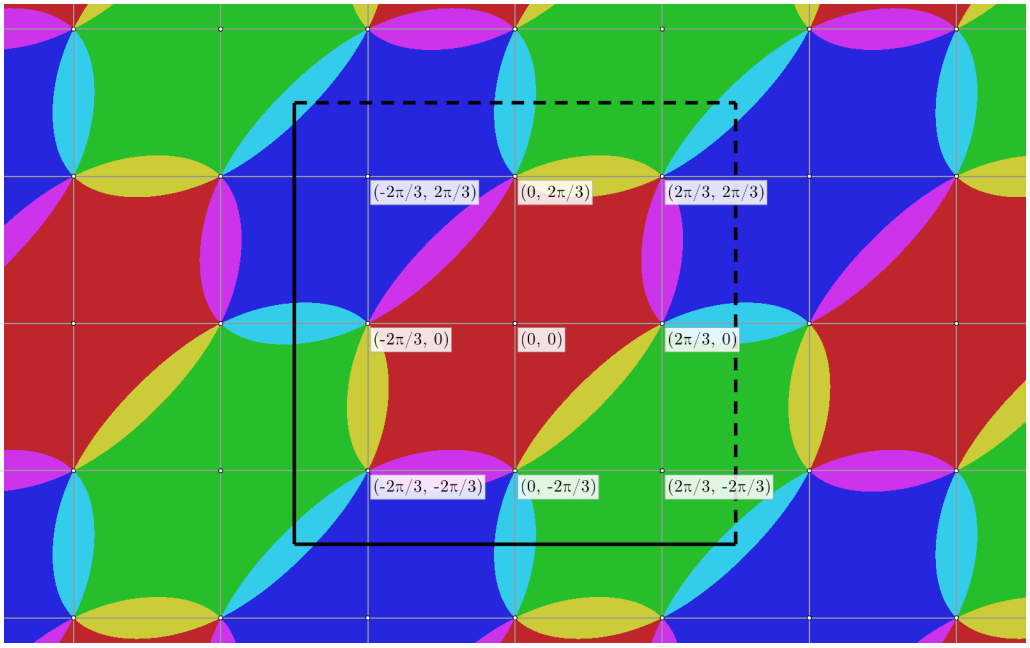
为了证明不可能用开环面体覆盖环面，我们引入一个由 9 个点组成的网格 $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{T}$，定义如下：

$$\mathcal{G} = \left\{\left[\left(\frac{2\pi}{3} \cdot j, \frac{2\pi}{3} \cdot k\right)\right] \ : \ j, k = -1, 0, 1\right\}. \tag{6}$$

由于环面是二维的，可以借助二维周期图像将所考虑的情形可视化。图1 展示了三个闭环面体对环面的覆盖，它们分别以标准离散傅里叶变换矩阵的行向量为中心，并以不同颜色表示。图中还展示了矩形网格 $\mathcal{G}$，其周期结构显而易见。

在9 个网格点 $\mathcal{G}$中，6 个点位于每个环面体的边界上。因此，如果假设环面体是开集，就会有一些网格点未被覆盖。这种可视化有一个微妙而不易察觉的特点，即隐藏的对称性。具体而言，整个情形关于垂直方向、水平方向以及对角线方向 $x = y$都完全对称，也就是说，这三个方向上的性质都相同。例如，考虑用单个环面体覆盖由 $\mathcal{G}$ 中的三个点构成的线段这一问题。平行于这三个方向的线段同样容易覆盖，甚至可以留有一定余量。作为示例，请看图2b，其中沿 $x = y$ 对角线方向的线段很容易被覆盖；图3 则展示了以这种方式覆盖的垂直方向线段。水平方向也同样如此。相比之下，平行于另一条对角线 $x = -y$、由三个网格点构成的线段，则不可能由单个环面体覆盖。这一区别可以这样解释：转换回 $\mathbb{C}^3$中向量的表述后，确定平行于对角线 $x = -y$ 的线段的三个网格点，对应于 $\mathbb{C}^3$的一组正交基。

图 1：网格 $\mathcal{G}$ 以及以离散傅里叶变换矩阵各行作为中心的三个闭环面体的可视化，它们覆盖了 $\mathbb{T}$。黑色矩形表示基本域 $[-\pi,\pi)^2$。



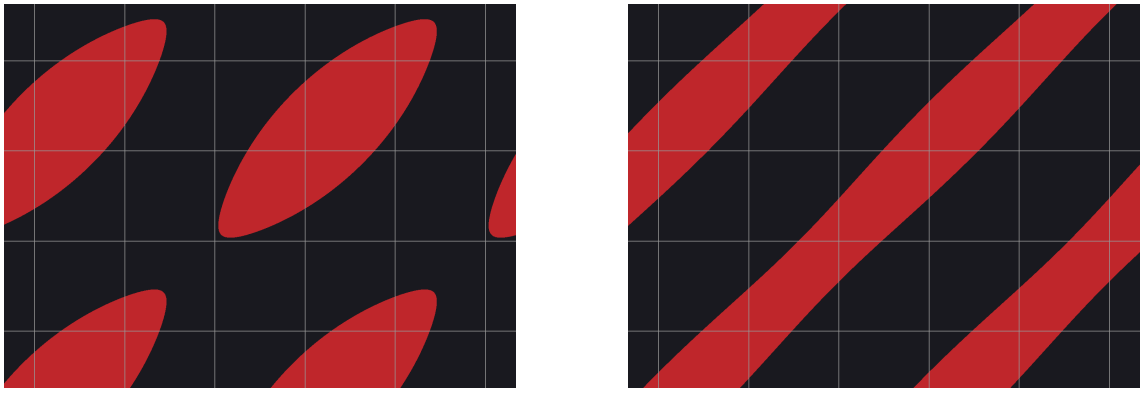
现在，我们将更详细地考察环面体可能具有的形状。显然，将中心的坐标 a 乘以模为 1 的复数，只会使环面体在环面上平移。因此，所有幺模环面体的形状完全相同，彼此之间只有平移之别。然而，非幺模环面体则可以呈现显著不同的形状。考虑一个向量 $a=(t,x,y)\in\mathbb{C}^3$，其中 $|x|=|y|=1$ 且 $|t|\in[0,1]$。当 $|t|=1$时，我们得到一个幺模环面体；而当 $|t|=0$ 时，环面体 $B(a)$会变成一条环绕环面的矩形带。取 $|t|$ 的中间值，会使幺模环面体连续变形为一条条带。当 $|t|$ 足够小时，环面体 $B(a)$不可缩（它环绕着环面）。图 2a 和图 2b 展示了相关示例。

不难猜到，带状闭托里克体也可以覆盖环面。图 3展示了一个使用三个竖直条带的例子。类似的覆盖也可以使用水平条带或平行于对角线的条带构造 $x=y$。

这对应于猜想 1.2 中 $n=3$ 的一个等号情形，其中向量 a_1、a_2、$a_3\in\mathbb{C}^3$不是幺模向量。具体来说，取 $a_j=(1,\omega^j,0)$ 作为 $j=1$、2、3，其中 $\omega=e^{\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 表示三次单位根。对于幺模向量 $x=(x_1,x_2,x_3)$，条件 $|\langle x,a_j\rangle|\geq\sqrt{3}$ 等价于

$$|x_1|^2+|x_2|^2+2\,\mathrm{Re}(x_1\overline{x_2}\omega^j)\geq 3,$$

或者仅 $\mathrm{Re}(x_1\overline{x_2}\omega^j)\geq\frac{1}{2}\sigma$ 满足条件 $|z|=1$ 且 $\mathrm{Re}(z)\geq\frac{1}{2}$的复数 z构成复单位圆上的一段弧，其角度测度为 $\frac{2}{3}\pi$。显然，单位圆上的任意点都可以旋转 $0°$、$120°$ 或 $240°$（这分别对应于乘以 1、ω 或 ω^2），从而落在这段弧上。因此，对于某个 $j\in\{1,2,3\}$，不等式 $|\langle x,a_j\rangle|\geq\sqrt{3}$ 将成立。



(a) $|t| = 0.36$ (b) $|t| = 0.05$

图2：不同 $|t|$ 值下环面体的比较。

现在可以问，当环面体的中心$a = (t, x, y)$有两个或更多坐标的模小于 1 时，环面体还可能有哪些形状。事实证明，这种情况可以不予考虑，因为此时环面体只会变小。下面的引理将证明这一点：每个环面体都包含于一个中心至多有一个坐标的模小于 1 的环面体中。

引理 4.2. 设 $a \in \mathbb{C}^3$ 是一个非零向量，满足 $\|a\|_\infty \le 1$。那么，存在一个向量 $v \in \mathbb{C}^3$，其模小于 1 的坐标至多有一个，并且满足 $B(a) \subseteq B(v)$。

证明。由于对于任意 $t > 1$，$B(a) \subseteq B(ta)$，我们可以假设 $\|a\|_\infty = 1$。因此，设 $a = (a_1, a_2, a_3)$，其中 $|a_1| \le |a_2| \le |a_3| = 1$。若 $a_2 = 0$，则同样有$a_1 = 0$，进而 $B(a) = \emptyset$，故无需证明。因此，设 $a_2 \neq 0$。我们将证明，所求向量 v（满足 $B(a) \subseteq B(v)$）可取为 $v = \left(a_1, \frac{a_2}{|a_2|}, a_3\right)$。这等价于证明，对于任意幺模$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$，都有

$$|\langle a, x\rangle| > \sqrt{3} \implies |\langle v, x\rangle| > \sqrt{3}.$$

对于 $i = 1, 2, 3$，$|a_2| = b \le 1$和 $\frac{a_2}{b} = u$，我们将 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 记作 $|x_i| = 1$。对于 $b = 1$，无需证明，因此我们可以假设 $b < 1$。现在定义函数 $f\colon [b, 1] \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(t) = \left|\langle (a_1, tu, a_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle\right|^2$$

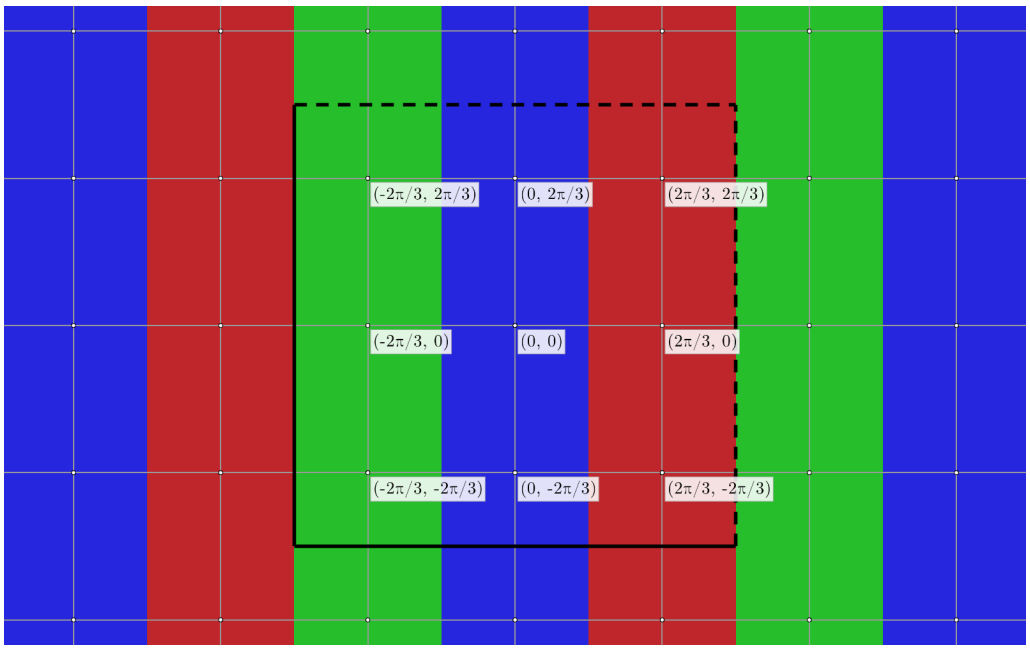
并假设 $f(b) > 3$。我们计算

$$f(t) = |a_1\overline{x_1} + tu\overline{x_2} + a_3\overline{x_3}|^2 = |a_1|^2 + |t|^2 + 1 + 2\,\mathrm{Re}\,(t\overline{a_1}x_1u\overline{x_2} + t\overline{a_3}x_3u\overline{x_2} + a_1\overline{x_1a_3}x_3)$$

$$= t^2 + 2At + \left(|a_1|^2 + 1 + 2\,\mathrm{Re}(a_1\overline{x_1a_3}x_3)\right),$$

其中 $A = \mathrm{Re}\,(a_1\overline{x_1}ux_2 + a_3\overline{x_3}ux_2)$。要证明 $f(1) > 3$，只需证明二次函数 f 在 $[b, 1]$ 上递增。由于 $f'(t) = 2(t + A)$，

图 3：用三个带状闭托里克体 $B(a_j)$ 覆盖环面，其中$a_j = (1,\ \omega^j,\ 0)$ 对于 $j = 1,\ 2,\ 3$。



这等价于 $b + A \geq 0$。反设 $b < -A$。那么，由于$|a_1| \leq b$ 且

$$|\operatorname{Re}(a_1\overline{x_1a_3}x_3)| \leq |a_1\overline{x_1a_3}x_3| = |a_1| \leq b < 1$$

我们有

$$f(b) = b^2 + 2Ab + \left(|a_1|^2 + 1 + 2\operatorname{Re}(a_1\overline{x_1a_3}x_3)\right) < b^2 - 2b^2 + b^2 + 1 + 2 = 3,$$

这与假设矛盾。因此，f 在 $[b, 1]$上是非递减的。由此可得，$f(1) > f(b) > 3$，正如所需。 □

在下一个引理中，我们开始将环面体与网格 $\mathcal{G}$ 联系起来。为了证明环面的覆盖不可能实现，我们有一个重要的自由度：网格可以在环面上任意平移，或者等价地，在保持 $\mathcal{G}$ 固定的同时，同时平移所有三个环面体。正如我们将要证明的，经过适当平移后，任意给定的环面体至多覆盖网格 $\mathcal{G}$ 中的一个点。

引理 4.3。 对于任意非零向量 $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$ 满足 $\|a\|_\infty \leq 1$，存在一个幺模向量 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$，使得对于 $v = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3) \in \mathbb{C}^3$，环面体 $B(v)$ 至多包含网格 $\mathcal{G}$ 中的一个点。

证明。 根据引理 4.2 我们可以假设 a 至多有一个坐标的模严格小于1。不失一般性，设 $|a_1| = b \leq |a_2| = |a_3| = 1$。我们将证明所需的向量 v可以取为 $v = (b, u, u)$，其中$u = \exp\left(i\left(\text{反余弦}\ \frac{b}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$。在这种情况下，我们将证明 $(0, 0)$ 是$\mathcal{G}$ 中唯一可能属于 $B(v)$的点。

对于固定的 k， $l \in \{0,1,2\}$ 我们有

$$\left|\left\langle (b,u,\overline{u}),(1,\omega^k,\omega^l)\right\rangle\right|^2 = b^2+2+2\,\mathrm{Re}\left(bu\omega^{-k}+bu\omega^l+u^2\omega^{-k}\omega^l\right).$$

因此，将 $-k$ 替换为 k后，我们需要证明的内容可简洁地重述为

$$b^2+2b\,\mathrm{Re}\left(u\left(\omega^k+\omega^l\right)\right)+2\,\mathrm{Re}\left(u^2\omega^k\omega^l\right)\le 1 \tag{7}$$

对于 k， $l \in \{0,1,2\}$ 且 $(k,\ l)\neq(0,\ 0)$。为此，我们将考虑几种不同的情况。

1. $(k,\ l)=(1,\ 2)$ 或 $(k,\ l)=(2,\ 1)$。于是 $\omega^k+\omega^l=-1$ 且 $\omega^k\omega^l=1$，因此所需的不等式 (7) 可写为

$$b^2-2b\,\mathrm{Re}(u)+2\,\mathrm{Re}(u^2)\le 1.$$

利用 u的定义、 $b\in[0,1]$ 这一事实以及一些标准的三角公式，我们得到

$$\begin{aligned} b^2-2b\,\mathrm{Re}(u)+2\,\mathrm{Re}(u^2) &= b^2-2b\cos\left(\arccos\frac{b}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(2\arccos\frac{b}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= b^2-2b\left(\frac{b}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}\right)+2\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2}-1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b^2-\frac{b^4}{4}}\right)\\ &= b^2-\frac{b^2}{2}-b\sqrt{3\left(1-\frac{b^2}{4}\right)}+\left(1-\frac{b^2}{2}\right)+\sqrt{3\left(b^2-\frac{b^4}{4}\right)}=1. \end{aligned}$$

因此，在这种情况下，对于所有$b\in[0,1]$，该表达式实际上都等于 **1**。

2. $(k,\ l)=(1,\ 0)$ 或 $(k,\ l)=(0,\ 1)$。于是 $\omega^k+\omega^l=1+\omega=-\omega^2$ 且 $\omega^k\omega^l=\omega$，因此不等式 (7) 可写为

$$b^2-2b\,\mathrm{Re}\left(u\omega^2\right)+2\,\mathrm{Re}\left(u^2\omega\right)\le 1.$$

与前一种情况类似地推理，我们得到

$$b^2-2b\cos\left(\arccos\frac{b}{2}+\pi\right)+2\cos\left(2\arccos\frac{b}{2}\right)=b^2+2b\left(\frac{b}{2}\right)+2\left(\frac{b^2}{2}-1\right)=3b^2-2,$$

由于 $b\in[0,1]$，因此其至多为 **1**。

3. $(k,\ l)=(2,\ 0)$ 或 $(k,\ l)=(0,\ 2)$。于是 $\omega^k+\omega^l=1+\omega^2=-\omega$ 且 $\omega^k\omega^l=\omega^2$，因此不等式 (7) 可写为

$$b^2-2b\,\mathrm{Re}\left(u\omega\right)+2\,\mathrm{Re}\left(u^2\omega^2\right)\le 1.$$

按照与之前类似的推理，我们得到

$$b^2-2b\cos\left(\arccos\frac{b}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(2\arccos\frac{b}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= b^2 - 2b\left(\frac{b}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2}-1\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b^2-\frac{b^4}{4}}\right)$$

$$= b^2 - \frac{b^2}{2} + b\sqrt{3\left(1-\frac{b^2}{4}\right)} - \frac{b^2}{2} + 1 - b\sqrt{3\left(1-\frac{b^2}{4}\right)} = 1,$$

因此，该表达式再次恒等于 **1**。

4. $(k,l) = (1,1)$. 于是（7）可改写为

$$b^2 + 4b\,\mathrm{Re}(u\omega) + 2\,\mathrm{Re}(u^2\omega^2) \le 1.$$

我们再次计算

$$b^2+4b\,\mathrm{Re}(u\omega)+2\,\mathrm{Re}(u^2\omega^2) = b^2+4b\cos\left(\arccos\frac{b}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(2\arccos\frac{b}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= b^2 + 4b\left(\frac{b}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2}-1\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{b^2-\frac{b^4}{4}}\right)$$

$$= \frac{3}{2}b^2 - 3b\sqrt{3\left(1-\frac{b^2}{4}\right)} + 1 = \frac{3}{2}b\left(b - \sqrt{12-3b^2}\right) + 1.$$

由于 $b \le 1 < 3 \le \sqrt{12-3b^2}$，这显然至多为 **1**。

5. $(k,l) = (2,2)$. 在这种情况下，（7）等价于

$$b^2 + 4b\,\mathrm{Re}(u\omega^2) + 2\,\mathrm{Re}(u^2\omega) \le 1.$$

重复与前述情形类似的计算，可得

$$b^2 + 4b\,\mathrm{Re}(u\omega^2) + 2\,\mathrm{Re}(u^2\omega) = b^2 + 4b\cos\left(\arccos\frac{b}{2}+\pi\right) + 2\cos\left(2\arccos\frac{b}{2}\right)$$

$$= b^2 + 4b\left(-\frac{b}{2}\right) + 2\left(\frac{b^2}{2}-1\right) = -2,$$

因此在这种情形下，我们最终得到一个恒等于 -2 的函数。

我们已经分析了所有可能的情形，即数对 (k,l) 的各种情况，因此证明完成。□

注意，采用前一个引理中的记号，环面体 $B(v)$包含由 $(k,l) = (1,1)$ 确定的格点，当且仅当 $b > 0$。因此，当 $b = 0$时，这个开环面体不包含任何格点。情形 $b = 0$ 对应于条带状环面体，其格点仅出现在条带的边界上（见图 3）。

引理 4.2 使我们可以假设，所考虑的环面体至多有一个坐标的模小于 1。为便于分类讨论，我们引入以下分类。

定义 4.4。 设 $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{C}^3$。我们称环面体 $B(a)$ 对于 $j\in\{1,2,3\}$ 属于类型 j，如果 $|a_j|=\min\{|a_1|,|a_2|,|a_3|\}$。

注意，幺模环面体同时属于全部三种类型，而我们考虑的其他环面体则只属于一种类型（因为我们总是假设至多有一个坐标的模小于 1）。

我们已经指出，条带状环面体可以覆盖沿三个基本方向——水平方向、垂直方向和 $x=y$——排列的三点线段。然而，在每条这样的直线上覆盖三个点，会迫使环面体属于某一种特定类型。具体而言，覆盖对角线方向的环面体必须属于类型 1，覆盖水平方向的环面体必须属于类型 2，而覆盖垂直方向的环面体必须属于类型 3。由于这里涉及对称性，只需证明水平方向的情形即可，我们将在下面的引理中证明这一点。

引理 4.5. 设 $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{C}^3$ 是一个向量，使得 $\|a\|_\infty\le 1$ 并且

$$\left\{(1,1,1),(1,\omega,1),\left(1,\omega^2,1\right)\right\}\subseteq B(a).$$

于是 $|a_2|<1$。

证明。 为导出矛盾，假设 $|a_2|=1$。根据假设，对于每个 $k\in\{0,1,2\}$，我们都有

$$3<\left|\left\langle a,\left(1,\omega^k,1\right)\right\rangle\right|^2=\left|a_1+a_2\omega^{-k}+a_3\right|^2=\left|z+a_2\omega^{-k}\right|^2=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{a_2}\omega^k)+1,$$

其中 $z=a_1+a_3$。由于复单位圆上的每个点都可以旋转 $0°$、$120°$或 $240°$，使其实部至多为 $-\frac{1}{2}$，因此存在某个$k\in\{0,1,2\}$，使得

$$\mathrm{Re}(z\overline{a_2}\omega^k)\le-\frac{1}{2}|z|\cdot|a_2|=-\frac{|z|}{2}.$$

对于这个 k，可得

$$3<|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{a_2}\omega^k)+1<|z|^2-|z|+1.$$

然而，根据三角不等式，我们有 $|z|=|a_1+a_3|\le 2$，并且对于任意 $t\in[0,2]$，都有 $t^2-t\le 2$。因此，假设 $|a_2|=1$ 会导致矛盾，所以$|a_2|<1$。 □

在证明猜想 1.2关于 $n=3$ 之前，我们还需要以下技术性的三角引理。

引理 4.6. 令 $b\in[0,1]$和 $r\in[-1,1]\setminus\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.则不存在角 $\gamma\in[0,2\pi)$ 使得 $x=$余弦γ和 $y=$余弦$(\gamma-120°)$ 符号相反，且同时满足以下两个不等式

$$4x^2+4brx+b^2>3\quad and\quad 4y^2+4bry+b^2>3.$$

证明。反设存在这样的角 γ。注意，若 (x,y) 对 r 适用，则 $(-x,-y)$ 对 $-r$ 适用（因为 $-x=$余弦$(\gamma+180^\circ)$ 和$-y=$余弦$(\gamma-120^\circ+180^\circ)$）。因此，不失一般性，我们可以假设 $r\geq\frac{1}{2}$。此外，我们还可以假设 $x\geq 0\geq y$。

解关于 x 和 y 的二次不等式，得到 $x>A$ 和 $y<B$，其中

$$A=\frac{-br+\sqrt{(r^2-1)b^2+3}}{2}\quad\text{and}\quad B=\frac{-br-\sqrt{(r^2-1)b^2+3}}{2}.$$

由于 $y\geq -1$，我们还必须有 $B\geq -1$，这等价于

$$br\leq\frac{b^2+1}{4}. \tag{8}$$

另一方面，条件 $A\geq\frac{1}{2}$ 很容易验证其等价于

$$br\leq\frac{2-b^2}{2}.$$

然而，这可由（8）推出，因为对于 $b\in[0,1]$，我们有 $\frac{b^2+1}{4}\leq\frac{2-b^2}{2}$。因此，我们得出 $A\geq\frac{1}{2}$。

由于 $x=$余弦$\,\gamma$ 且 $y=$余弦$(\gamma-120^\circ)$，不等式 $x>A$、$y<B$ 可等价地改写为

$$-\arccos A<\gamma<\arccos A$$

and

$$\gamma-\frac{2\pi}{3}\notin[-\arccos B,\arccos B].$$

由于 $A>B$ 且反余弦函数递减，我们有反余弦$\,A<$ 反余弦$\,B$。要与上述关于 γ的条件构成矛盾，只需证明

$$-\arccos A-\frac{2\pi}{3}\geq-\arccos B,$$

或者等价地，

$$\arccos B\geq\arccos A+\frac{2\pi}{3}.$$

注意，这个不等式的两边都属于 $[0,\pi]$：左边由反余弦的定义可知，右边则是因为 $A\geq\frac{1}{2}$ 意味着反余弦 $A\leq\frac{\pi}{3}$，因此反余弦 $A+\frac{2\pi}{3}\leq\pi$。由于余弦在 $[0,\pi]$ 上递减，所求不等式因此等价于

$$B=\cos(\arccos B)\leq\cos\left(\arccos A+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-A^2},$$

这可以改写为

$$\sqrt{3(1-A^2)}\leq -A-2B.$$

显然，两边均为非负数，因为 $A+B=-br\leq 0$ 和 $B\leq 0$。两边平方可得

$$3-3A^2\leq A^2+4AB+4B^2,$$

或者直接

$$3 \le 4(A^2 + AB + B^2).$$

我们计算

$$\begin{aligned} 4(A^2 + AB + B^2) &= 2\left(b^2r^2 + (r^2-1)b^2 + 3\right) + \left(b^2r^2 - ((r^2-1)b^2 + 3)\right) \\ &= 4b^2r^2 - b^2 + 3 = b^2(4r^2-1) + 3, \end{aligned}$$

根据假设，我们有 $4r^2 - 1 \ge 0$，其值确实至少为 3。证明至此完成。

□

我们现在可以进入证明的主要部分。

猜想 1.2 在 $n = 3$ 的证明。假设存在向量 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}^3$，满足 $\|a_i\|_\infty \le 1$（其中 $i = 1$ 为 2、3），并且对于任意模为 1 的向量 $x \in \mathbb{C}^3$，不等式 $|\langle a_i, x\rangle| > \sqrt{3}$ 至少对一个 $i \in \{1,2,3\}$ 成立。正如前文所述，这等价于 $\mathbb{T} \subseteq B(a_1) \cup B(a_2) \cup B(a_3)$。注意，这个条件是旋转不变的，也就是说，当每个向量 a_i 的第 j 个坐标乘以相同的数（其中 $j \in \{1,2,3\}$）时，一切都保持不变。因此，由引理 4.3 可知，我们可以假设环面体 $B(a_3)$ 至多覆盖 $\mathcal{G}$ 中的一个点。所以，我们的目标是证明并集 $B(a_1) \cup B(a_2)$ 不可能覆盖 $\mathcal{G}$中剩下的 8 个点。为此，我们将完整刻画 $\mathcal{G}$ 中所有可由单个环面体覆盖的四元子集。

设 $S \subseteq \mathcal{G}$ 是格点的一个子集。我们考虑以下变换 s:

1. 将每个 $(\theta_1, \theta_2) \in S$ 替换为 $\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{3}, \theta_2\right)$。2. 将每个 $(\theta_1, \theta_2) \in S$ 替换为 $\left(\theta_1, \theta_2 + \frac{2\pi}{3}\right)$。3. 将每个 $(\theta_1, \theta_2) \in S$ 替换为 (θ_2, θ_1)。4. 将每个 $(\theta_1, \theta_2) \in S$ 替换为 $(-\theta_1, -\theta_2)$。5. 将每个 $(\theta_1, \theta_2) \in S$ 替换为 $(-\theta_1, \theta_2 - \theta_1)$。6. 将每个 $(\theta_1, \theta_2) \in S$ 替换为 $(\theta_1 - \theta_2, -\theta_2)$。

我们注意到，若子集 $S' \subseteq \mathcal{G}$ 可由 $S \subseteq \mathcal{G}$ 经过有限次这些变换得到，则 S' 可被单个环面体覆盖，当且仅当 S 也可被单个环面体覆盖。事实上，变换 1 和 2 分别对应于将环面体中心的第一或第二个坐标乘以 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$。变换 3 交换第二个和第三个坐标，变换 4 则对应于对中心的所有坐标取复共轭。对于变换 5，我们有

$$\begin{aligned} \left|\left\langle (a_1, a_2, a_3), \left(1, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right)\right\rangle\right| &= \left|\left\langle (a_1, a_2, a_3), \left(e^{-i\theta_1}, 1, e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right)\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle (a_2, a_1, a_3), \left(1, e^{-i\theta_1}, e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right)\right\rangle\right|, \end{aligned}$$

这再次对应于交换中心的坐标。类似的论证也适用于变换 6，因此，所有变换都保持由单个环面体覆盖的性质。

显然， S' 可通过上述六种变换从 S 到达的关系，在所有 $\mathcal{G}$的四元素子集上定义了一个等价关系。在图4a–4d 中，我们列出了 $\binom{9}{4} = 126$ 的所有四元素子集 $\mathcal{G}$，并按该关系所导出的四个等价类进行分组。

我们声称，只有第 1 类中的子集才能由单个环面体覆盖。证明这一点便足以证明该猜想。事实上，注意到任意$\mathcal{G}$ 个元素的子集5 都包含一个4元子集，属于第 2 类、第3类或第4类。例如，考虑图4a 中出现的第一个 4 元子集（左下角的正方形）。可以手动验证，将该子集与网格中的任意一个点（共有 5 种选择）合并，得到的新 5 元子集都包含某个第 2、3 或 4 类的4元子集。因此，这个特定的第 1 类4元子集无法扩展为一个可覆盖的5元子集。由对称性可知，没有单个环面体能够覆盖5 个 $\mathcal{G}$。

现在我们说明如何利用这一观察完成证明。根据引理4.3，不妨假设环面体 $B(a_3)$ 至多覆盖$\mathcal{G}$中的一个点。因此，如果整个 $\mathcal{G}$ 由三个环面体覆盖，那么并集 $B(a_1) \cup B(a_2)$就必须覆盖至少8个点。由于两个环面体都不能覆盖5 个点，因此它们各自必须恰好覆盖4 个点（这意味着它们属于第 1 类），且这两组点必须互不相交。然而，手动检查即可发现，任意两个第 1 类子集至少有一个公共点。因此，不可能用两个环面体覆盖剩下的8 个点。

最容易排除的是第二类，其中每个子集都包含三个点，它们位于与对角线平行的直线 $x = -y$ 上。事实证明，这样的三点组甚至无法被单个环面体覆盖。事实上，这样的三点组对应于 $\mathbb{C}^3$ 的一个正交基，由模为 1 的向量 x_1、x_2、x_3 组成（例如，离散傅里叶变换矩阵 3×3 的行向量）。对于这样的 x_1、x_2、$x_3 \in \mathbb{C}^3$，Parseval 恒等式意味着，任何满足 $\|a\|_\infty \le 1$ 的向量 $a \in \mathbb{C}^3$ 都满足

$$|\langle a, x_1\rangle|^2 + |\langle a, x_2\rangle|^2 + |\langle a, x_3\rangle|^2 = 3\|a\|_2^2 \le 9,$$

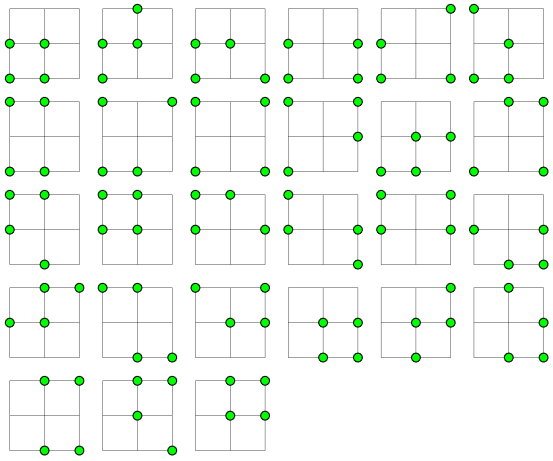
因此必然有 $|\langle a、\ x_i\rangle| \le \sqrt{3}$，其中某个 $i \in \{1,2,3\}$ 存在；也就是说，环面体 $B(a)$ 不包含 x_i。

剩下的两类需要付出更多努力，而且必须用到子集中的全部四个点。我们先讨论第 3 类，其特征是有三个点位于基本方向之一（水平、垂直或 $x = y$）上的同一条直线上。由于只需分析第 3 类的一个代表，我们不妨取一个包含三个点且它们位于同一条水平直线上的子集，例如，取形如 $(1,\ \omega^k,\ )$ 的点，其中 $k \in \{0,1,2\}$，以及点 $(1,\ \omega,\ \omega)$（见图 5）。

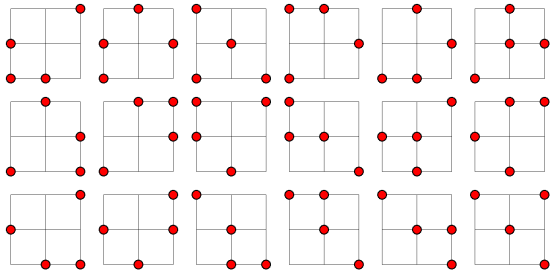
假设存在一个向量 $a \in \mathbb{C}^3$ with $\|a\|_\infty \le 1$，使得环面体$B(a)$包含这 4 个点。根据引理 4.2，我们可以假设 a 至多有一个坐标的模严格小于 1。引理 4.5 进一步说明，这只能是第二个坐标，即环面体 $B(a)$是类型 2。因此，对于某些 α、$\beta \in [0, 2\pi]$ 和 $b \in [0, 1)$，有$a = (e^{i\alpha}, b, e^{i\beta})$。对于 $k \in \{0,1,2\}$，我们有

$$\left|\left\langle (e^{i\alpha}, b, e^{i\beta}), (1, \omega^k, 1)\right\rangle\right|^2 = 2 + b^2 + 2b\,\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\omega^k + e^{-i\beta}\omega^{-k}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i(\alpha-\beta)}\right)$$

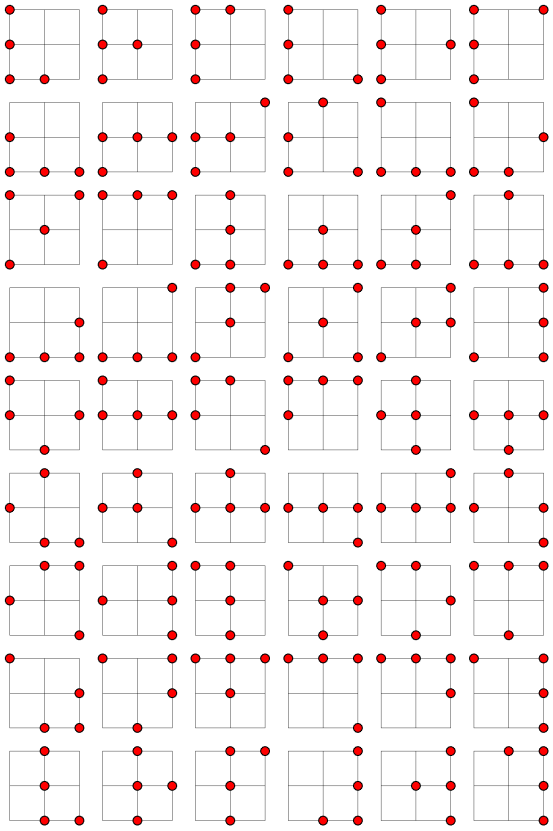
$$= 2 + b^2 + 2b\cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{3}\right) + 2b\cos\left(-\beta - \frac{2k\pi}{3}\right) + 2\cos(\alpha - \beta).$$



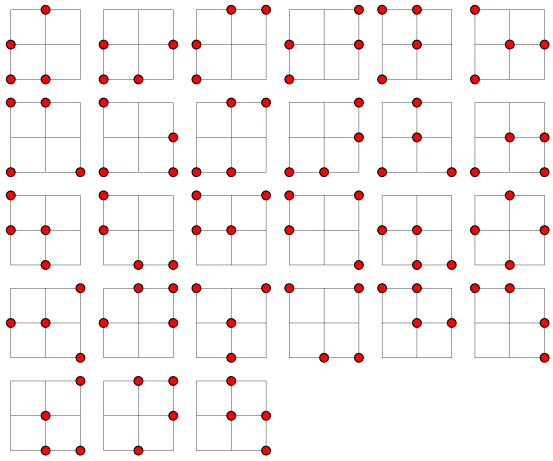
(a)**第 1 类**.



(b)**第 2 类**.



(c)**第3类**.



(d)**第4类**.

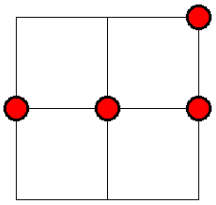
为简便起见，将 β 改为 $-\beta$ 后，我们得到以下需要满足的关于 $k \in \{0,1,2\}$的条件:

$$b\left(\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{3}\right)+\cos\left(\beta-\frac{2k\pi}{3}\right)\right)+\cos(\alpha+\beta)>\frac{1-b^2}{2}.$$

第四个点 $(1,\omega,\omega)$ 的条件类似地写作

$$b\left(\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta+\frac{2\pi}{3}\right)>\frac{1-b^2}{2}.$$

图 5：第3类的一个选定子集。



我们旨在从这些条件中导出矛盾。为此，我们先将它们改写为

1. $-2b$余弦 γ余弦 $\omega+$余弦$(2\gamma)>{}^{1-b^2}_{2}$，2. $2b$余弦 γ余弦$(\omega-60^\circ)+$余弦$(2\gamma)>{}^{1-b^2}_{2}$，3. $2b$余弦 γ余弦$(\omega+60^\circ)+$余弦$(2\gamma)>{}^{1-b^2}_{2}$，4. $2b$余弦$(\gamma-120^\circ)$余弦$(\omega+60^\circ)+$余弦$(2\gamma+120^\circ)>{}^{1-b^2}_{2}$，

其中 $\gamma={}^{\alpha+\beta}_{2}+\pi$和 $\omega={}^{\alpha-\beta}_{2}$。然后，利用余弦$(2\gamma)=2$余弦$^2\,\gamma-1$，我们可以进一步将所有内容改写为

1. $4x^2-4btx+b^2>3$,
2. $4x^2+4bzx+b^2>3$,
3. $4x^2+4bwx+b^2>3$,
4. $4y^2+4bwy+b^2>3$,

其中 $x=$余弦 γ、 $y=$余弦$(\gamma-120^\circ)$、 $t=$余弦 ω、 $z=$余弦$(\omega-60^\circ)$ 以及 $w=$余弦$(\omega+60^\circ)$。将 π 加到所有角上后，变量的符号会改变，而不等式保持不变。因此，不妨设 $x\geq 0$。显然，对于任意角 ω，都有

$$\min\{z,-t,w\}=\min\left\{\cos(\omega-60^\circ),\cos\left(\omega+180^\circ\right),\cos(\omega+60^\circ)\right\}\leq-\frac{1}{2}.$$

特别地，考虑到不等式 $1-3$，我们看到 x 必须满足二次不等式

$$4x^2-2bx+b^2-3>0, \tag{9}$$

由此得到

$$x>\frac{b+\sqrt{3(4-b^2)}}{4}, \tag{10}$$

由于 $x\geq 0$。现在，我们将考虑两种情况：如果 $y\geq 0$ 或 $y<0$。

我们首先假设 $y\geq 0$。由于 $w\leq 1$，由不等式 4 可知，y 满足

$$4y^2+4by+b^2-3>0,$$

由此得到 $y > \frac{-b+\sqrt{3}}{2}$。由不等式（10）很容易得出 $x > \frac{b+3}{4}$，因为$b \leq 1$。此外，由于 x 和 y 是相差 120°的两个角的余弦，很容易验证 $x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{4}$。综合以上所有事实可得估计

$$\frac{3}{4} = x^2 + xy + y^2 \geq \frac{1}{16}\left((b+3)^2 + 2(b+3)\left(-b+\sqrt{3}\right) + 4\left(-b+\sqrt{3}\right)^2\right),$$

可改写为

$$0 \geq 3\left(b^2 - 2b\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3}\right) = 3\left(\left(b-\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\right),$$

但这显然不成立，因此我们得到一个矛盾。

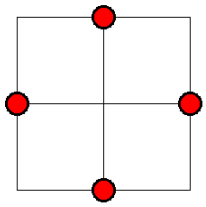
现在，假设 $y < 0$。首先再假设 $w \geq -\frac{1}{2}$。那么 y满足

$$4y^2 - 2by + b^2 - 3 > 0,$$

结合（9）可知，这与引理 4.6对 $r := -\frac{1}{2}$矛盾。在 $w < -\frac{1}{2}$的情况下，考虑由 4.6对 $r := w$成立的二次不等式 3 和 4，分别由 x 和 y 满足，可知这与引理矛盾。因此，Class 3的情况已经证明完毕。

接下来讨论 Class 4的情况。此类子集的特征是包含：沿三个基本方向（水平、垂直，$x = y$）各一条线段，沿对角线方向的两条线段 $x = -y$，以及沿某个基本方向的另一条线段。由于我们可以任意选取此类中的子集，不妨选取一个含有两条对角线方向线段的子集，这样水平和垂直方向便具有对称性。此类子集的一个例子是$\{(1,\omega,1),\ (1,\omega^2,\ 1),\ (1,\ 1,\ \omega),\ (1,\ 1,\ \omega^2)\}$（见图 6）。

图 6：第4类的一个所考察子集。



首先，假设我们处理的是一个类型 2 的环面体，即形如 $(e^{i\alpha},\ b,\ e^{i\beta})$ 的环面体。重复之前的类似计算，并在最后将 β 改为 $-\beta$，我们得到如下形式的不等式

$$b\left(\cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{3}\right) + \cos\left(\beta - \frac{2k\pi}{3}\right)\right) + \cos(\alpha+\beta) > \frac{1-b^2}{2},$$

and

$$b\left(\cos\alpha + \cos\left(\beta + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) + \cos\left(\alpha + \beta + \frac{2k\pi}{3}\right) > \frac{1-b^2}{2},$$

对于 $k \in \{1,2\}$，需要满足这些条件。注意，若考虑一个类型3的环面体，即形式为 $(e^{i\alpha},\ e^{i\beta},\ b)$ 的环面体，则最终会得到完全相同的

一组不等式，因此只需考虑类型 2。然而，类型 1 的环面体需要另行考察，稍后会对此进行讨论。我们先将这些不等式改写为

1. $2b$余弦 γ余弦 $(\omega+120°)$ $+$余弦(2γ) $>\frac{1-b^2}{2}$，
2. $2b$余弦 γ余弦 $(\omega+240°)$ $+$余弦(2γ) $>\frac{1-b^2}{2}$，
3. $2b$余弦$(\gamma+60°)$ 余弦 $(\omega-60°)$ $+$余弦$(2\gamma+120°)>\frac{1-b^2}{2}$，
4. $2b$余弦$(\gamma+120°)$ 余弦 $(\omega+240°)$ $+$余弦$(2\gamma+240°)$ $>\frac{1-b^2}{2}$，

其中 $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$且 $\omega=\frac{\alpha-\beta}{2}$。然后，利用余弦$(2\gamma)$ $=2$余弦$^2\gamma-1$，我们可以将其进一步重述为

1. $4x^2+4bwx+b^2>3$,
2. $4x^2+4btx+b^2>3$,
3. $4z^2-4bwz+b^2>3$,
4. $4y^2+4bty+b^2>3$,

其中 $x=$余弦γ， $y=$余弦$(\gamma+120°)$， $z=$余弦$(\gamma+60°)$， $t=$余弦$(\omega+240°)$， $w=$余弦$(\omega+120°)$。显然，将 π 加到所有角上之后，这些变量会改变符号，但不等式保持不变。因此，不失一般性，我们可以假设 $x\geq 0$。我们注意到，t 与 w 不能同时属于 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，因为存在相差 $120°$的角的余弦。我们首先假设 $t\notin(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。若 $y<0$，则由不等式2和4，对于 r立即得到与引理 4.6的矛盾：$=t$。因此，我们假设 $y\geq 0$。若 $t\leq-\frac{1}{2}$，则由不等式2和4，我们有

$$x>\frac{-b+\sqrt{3(4-b^2)}}{4}\quad\text{and}\quad y>\frac{-b+\sqrt{3(4-b^2)}}{4}.$$

然而，很容易验证，对于 $b\in[0,1]$，我们有

$$\frac{-b+\sqrt{3(4-b^2)}}{4}\geq\frac{1}{2}.$$

因此 x， $y>\frac{1}{2}$，但这显然不可能，因为 x 和 y 是相差 $120°$ 的两个角的余弦。

现在，假设 $t>\frac{1}{2}$.那么 $w<\frac{1}{2}$。此外，由于 x， $y\geq 0$我们还必须有 $z\geq 0$（因为 $z=$余弦$(\gamma+60°)$）。若$w\leq-\frac{1}{2}$，则对于4.6 ，我们得到与引理 $r:=w$ 结合不等式1 和3，与前一种情况类似，但应用于 x 和 $-z=$余弦$(\gamma-120°)$ ≤ 0。因此，假设$w>-\frac{1}{2}$。那么，按照之前的推理，我们得出

$$x>\frac{-b+\sqrt{3(4-b^2)}}{4}\geq\frac{1}{2}$$

and

$$-z > \frac{-b+\sqrt{3(4-b^2)}}{4} \geq \frac{1}{2},$$

这就产生了矛盾，因为 x 和 $-z$ 是两个相差 $120°$的角的余弦。至此，所考虑情形下的证明完成。

我们还需要考虑用类型 1 的环面体（即 $(b,\ e^{i\alpha},\ e^{i\beta})$ ）覆盖网格中同一子集的可能性。在这种情况下，假设所考虑的子集已被覆盖，按照前面的类似计算可得以下条件

$$b\left(\cos\left(\alpha+\frac{2k\pi}{3}\right)+\cos\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta+\frac{2k\pi}{3}\right)>\frac{1-b^2}{2},$$

and

$$b\left(\cos\alpha+\cos\left(\beta+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)+\cos\left(\alpha+\beta+\frac{2k\pi}{3}\right)>\frac{1-b^2}{2},$$

对于 $k\in\{1,2\}$ 必须成立。我们将其改写为

1. $2b\cos\gamma\cos\omega+\cos(2\gamma)>\frac{1-b^2}{2}$,
2. $2b\cos(\gamma-120°)\cos(\omega-120°)+\cos(2\gamma-240°)>\frac{1-b^2}{2}$,
3. $2b\cos\gamma\cos(\omega-120°)+\cos(2\gamma)>\frac{1-b^2}{2}$,
4. $2b\cos(\gamma-120°)\cos\omega+\cos(2\gamma-240°)>\frac{1-b^2}{2}$,

其中 $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}+60°$ 和 $\omega=\frac{\alpha-\beta}{2}+60°$。因此，由于 $\cos(2\gamma)=2\cos^2\gamma-1$，可得不等式组

1. $4x^2+4btx+b^2>3$,
2. $4x^2+4bwx+b^2>3$,
3. $4y^2+4bty+b^2>3$,
4. $4y^2+4bwy+b^2>3$,

其中 $x=$余弦 γ, $y=$余弦$(\gamma-120°)$, $t=$余弦 ω, $w=$余弦$(\omega-120°)$。与前面的情形一样，我们可以假设 $x\geq 0$。对于任意角 ω，有

$$\min\{t,w\}\leq\frac{1}{2}\quad\text{and}\quad\max\{t,w\}\geq-\frac{1}{2}.$$

x 和 y也同样成立：

$$\min\{x,y\}\leq\frac{1}{2}\quad\text{and}\quad\max\{x,y\}\geq-\frac{1}{2}.$$

特别是，考虑不等式 1 和 2，我们看到 x 必须满足不等式

$$x>\frac{-b+\sqrt{3(4-b^2)}}{4},\tag{11}$$

当 $x \geq 0$ 时。现在，我们将考虑两种情况： $y \geq 0$ 或 $y < 0$。
如果 $y \geq 0$，那么 y 也满足该不等式

$$y > \frac{-b + \sqrt{3(4-b^2)}}{4}.$$

然而，如前所述，对于 $b \in [0,1]$ ，我们有

$$\frac{-b + \sqrt{3(4-b^2)}}{4} \geq \frac{1}{2}.$$

由此可得 x， $y > \frac{1}{2}$，-但对于相差120°的角的余弦来说，这是不可能的。

现在假设 $y < 0$。由于 t， w 是相差120°的角的余弦，因此它们不可能同时处于区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$中。因此假设 $w \in [-1,1] \setminus \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。此时，由不等式 2和 4，对于 $r : = w$，可得出与引理 4.6矛盾。类似地，如果 $t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$，那么由不等式 1和 3，对于 $r : = t$，可得出与引理 4.6 矛盾。证明至此完成。

□

我们认为，要证明猜想（1.2）对于 $n \geq 4$ 成立将极具挑战性，即使是在较弱的版本中也是如此；在该版本中，假设向量 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ 均为幺模向量。在这一假设下，以向量 a_i 为中心的相应高维环面体也仅相差一个平移。然而，例如在维数 $n = 4$的情形下，存在一个由两两不等价的复阿达玛矩阵构成的单参数无穷族，其中每个矩阵都使（1.2）中的等号成立。因此，由于猜想中的界 $\sqrt{n}$ 是锐利的，任何针对 $n = 4$ 的证明都必须涵盖这个无穷族。我们不知道，是否如在 $n = 3$的情形下一样，也存在使等号成立的非幺模向量。更广泛地说，我们怀疑猜想 1.2 与 $\mathbb{C}^n$的几何有着深刻联系，尤其与 $n \times n$ 复阿达玛矩阵的分类有关。

参考文献

[1] K. Ball，复数板问题，《伦敦数学会会报》**33** （2001年），433—442。

[2] W.Banaszczyk， n维凸体的向量平衡与高斯测度，《随机结构与算法》**12**（1998），351–360。[3] A. Giannopoulos，关于一些向量平衡问题，《数学研究》**122**（1997），225–234。[4] E.D.Gluskin，正交平行六面体的极值性质及其在巴拿赫空间几何中的应用，《苏联数学文集》**64**（1989），85—96。[5] D.J. Hajela，关于低峰值信号功率（L_∞ 至 L_2 范数）比多项式以及*Kashin*和*Spencer*定理，《应用数学研究》，**87**（1992），81–94。

[6] M. Hall Jr., 《16阶Hadamard矩阵》，喷气推进实验室研究期刊**1** （1961），21–26。[7] T. Kobos, M. Varivoda, 《小维数中的Banach–Mazur距离》，《离散与计算几何》**74** （2025），399—427。[8] L.P. Hughston, S.M. Salamon, 《复射影平面上的点调查》，《数学进展》**286** （2016），1017–1052。[9]O. Ortega-Moreno, 《复数板问题再探》，《离散与计算几何》**71** （2024）683–687。[10] L. Pesenti, A. Vladu, 《通过正则化实现偏差最小化》，载于：2023年ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集（2023），1734–1758。[11] J. Spencer, 《六个标准差就足够》，《美国数学会汇刊》**289** （1985），679—706。[12] W. Tadej, K. Życzkowski, 《复阿达玛矩阵简明指南》，《开放系统与信息动力学》**13**（2006），133–177。[13]N. Tomczak-Jaegermann, 《Banach–Mazur距离与有限维算子理想》，《纯数学专著与综述》**38**，朗文科学技术出版社，哈洛（1989）。[14] W.D. Wallis, A.P. Street, J.S. Wallis, 《组合学：房间方阵、无和集、Hadamard矩阵》，数学讲义**292**，施普林格出版社，柏林，1972。[15] F. Xue, 《立方体与交叉多胞体之间的Banach–Mazur距离》，《数学不等式与应用》**21** （2018）931–943。