# 利用电子回旋辐射对彭宁阱中的带电粒子进行协同冷却

Jost Herkenhoff, * Jonathan Notter 和 Klaus Blaum
*Max-Planck-Institut für Kernphysik, Saupfercheckweg 1, 69117 Heidelberg, Germany*（日期：2026年2月16日）

我们提出了一种在彭宁阱中冷却任意带电粒子的新技术：利用储存在另一个宏观距离分隔的彭宁阱中的自冷却电子作为冷却介质。电子通过发射回旋辐射，主要衰减至其运动基态，从而使协同冷却的粒子种类的运动自由度达到极低温度，其量级处于个位数的量子数范围。这为在彭宁阱中开展基础物理检验开辟了令人振奋的新领域。本文既提供了概念性概述，也给出了所涉及冷却动力学的量子力学描述。该技术的首次实施目前正在马克斯·普朗克核物理研究所专门建设的ELCOTRAP实验中进行；该实验具备特殊设计，可实现快速迭代的技术开发周期。本文还将介绍其当前状态、调试阶段取得的初步结果及未来展望。

arXiv:2602.12898v1 [physics.atom-ph] 13 Feb 2026

## I. 引言

过去几十年间，实验原子、分子与光学（AMO）物理领域在控制和冷却单个粒子方面取得了显著进展，温度也因此持续趋于更低。涉及彭宁阱的精密实验也不例外，并已成为开展广泛物理研究的重要平台 [1], ，涵盖对量子电动力学的严格检验 [2] 、对电荷-宇称-时间反演对称性的检验 [3, 4], 、利用高电荷态离子研制新一代时间标准 [5, 6] ，以及寻找标准模型之外的新物理 [7–12]。然而，在许多彭宁阱实验中，可达到的精度仍受粒子温度限制：系统误差和统计误差的主要来源是场不完善性 [13] ，或相对论效应 [14]；如今实验精度已常规地超过 $10^{-10}$。这些取决于相空间体积的效应对轻粒子的影响尤为显著，因此，在轻离子 [15, 16] 或（反）质子 [17, 18] 测量中，降低粒子温度十分重要。此外，在利用连续斯特恩-盖拉赫效应（CSGE）的实验中，粒子温度会直接影响核磁矩 [19] 或电子磁矩 [20, 21] 的态探测；在近期一项将 CSGE 与激光光谱学相结合的测量中 [23] ，多普勒展宽也使粒子温度成为首要限制因素 [22],。

鉴于降低粒子温度的需求日益明显，我们提出一种新技术：利用电子的自然回旋辐射作为冷却机制，将任意带电粒子的运动自由度冷却至个位数的量子数。强磁场中电子的回旋本征运动与电磁场充分耦合，因此最终会与周围环境中的黑体光子达到热平衡；在低温彭宁阱实验中，环境温度通常冷却至 $\sim 4$K。与这种运动相关的平均运动量子数随后趋近于 $\bar{n} \approx 0.1$，这表明电子通常非常适合作为冷却介质。为了使任意目标粒子都能利用这一冷却过程，首先必须将电子的低温回旋运动耦合到电子的一种正交本征运动上，并使其频率与一系列目标粒子的频率精确匹配。此耦合通过在毫米波波段驱动边带跃迁来实现，这需要经过精心优化的彭宁阱设计。随后，将目标粒子存储在一个与之相隔宏观距离的独立彭宁阱中，并通过像电荷相互作用与充分冷却的电子耦合。这种协同耦合方式早在 1990 [24] 就由 Heinzen 和 Wineland 提出，近期，分别存储在两个独立彭宁阱中的离子已成功实现耦合，实验取得了进展 [25, 26], ，为我们提出的冷却技术铺平了道路。

这项技术的开发与首次实施是在专门设计的 ELCOTRAP（电子冷却离子阱）实验中进行的，该实验位于德国海德堡的马克斯·普朗克核物理研究所。实验架构经过专门优化，以支持迭代开发流程，使所提出的冷却技术的不同方面能够在后续实验阶段逐步接受测试。尽管该实验主要针对当前应用场景设计，但其灵活性也将为彭宁阱实验领域未来的技术发展提供有益工具。

本文首先从概念上概述所提出的冷却技术，随后给出详细的理论描述。最后介绍实验装置，并展示调试阶段取得的初步结果。

* jost.herkenhoff@mpi-hd.mpg.de

表 I. 不同粒子种类本征频率的比较。所列修正回旋频率（$\omega_+$）是在磁场强度为 7T 时计算得出的，而轴向频率（$\omega_z$）取自所列实验参考文献。通过调整阱深 $V_0$，电子的轴向频率可在很宽的范围内变化，从而可与各种目标粒子的修正回旋频率相匹配，如带下划线的条目所示。

| | $\omega_+/2\pi$ | $\omega_-/2\pi$ | $\omega_z/2\pi$ |
|---|---|---|---|
| 电子 | 197 吉赫 | 2 至 100 千赫 | 20 至 200 兆赫 |
| （反）质子 | 107兆赫 | 2千赫 | 675千赫 [18] |
| $^4He^{2+}$ | 54兆赫 | 2千赫 | 468千赫 [16] |
| $^{12}C^{6+}$ | 54兆赫 | 2千赫 | 525千赫 [15] |
| $^{40}Ar^{13+}$ | 35兆赫 | 6千赫 | 650千赫 [23] |
| $^{118}Sn^{49+}$ | 45兆赫 | 5千赫 | 650千赫 [27] |

## II. 实验基础

彭宁阱利用均匀磁场

$$\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z \,, \tag{1}$$

不失一般性，定义其沿 z 轴方向；为了将电荷为 $q$ 、质量为 $m$的粒子限制在圆轨道上，使其以角频率 $\omega_c = qB_0/m$ 绕垂直于 $\boldsymbol{e}_z$的方向运动。叠加一个静电势

$$\phi = -\frac{1}{2} C_2 V_0 \left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) \tag{2}$$

由电极堆产生，可将粒子限制在全部三个空间维度内。常数 $C_2$ 由电极几何结构决定，$V_0$ 为施加电压的幅值。粒子沿图 1a 所示的轨迹运动，该轨迹由频率为轴向 的简谐振荡组成

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2qC_2V_0}{m}} \tag{3}$$

沿磁力线运动，以及两个垂直于磁场、相互独立的振荡，其频率为

$$\omega_\pm = \frac{1}{2}(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}) \,, \tag{4}$$

分别称为修正回旋运动 ($\omega_+$)和磁控管运动 ($\omega_-$)。表 I 列出了不同粒子种类的典型本征频率，以供比较。

众所周知，加速的非相对论带电粒子会以与加速度平方成正比的速率向自由空间发射电磁辐射[28], ，这表明该现象主要与高频振荡的粒子有关。事实上，在彭宁阱中会产生显著辐射的唯一粒子是电子，其极快的修正回旋运动会产生所谓的回旋辐射，详见第 III A 节。这个过程会使电子的修正回旋运动衰减，而唯一能抵消这种衰减的，是从周围环境中吸收光子。若谨慎避免过多光子涌入，这种过程理想情况下就只受黑体背景影响，从而使电子热化至周围环境的温度。将彭宁阱冷却至 4 K 后，与电子修正回旋运动相关的平均运动量子数在热平衡时变为

$$\bar{n}_{+,\mathrm{e}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{+,\mathrm{e}}/k_\mathrm{B}T} - 1} \approx 0.1 \,, \tag{5}$$

其中，$n_{+,\mathrm{e}}$ 和$\omega_{+,\mathrm{e}}$ 中的下标用于将这些变量与目标粒子对应的同一组变量区分开来，后者以下标 p 标记。不幸的是，由于电子的修正回旋频率与目标粒子可能具有的最高本征频率之间存在 $\mathcal{O}(10^3)$ 不匹配，这种冷却效果良好的运动状态并不能轻易用于对任意粒子进行协同冷却，如表 I 所示。为弥合这一巨大的频率间隔，首先通过驱动运动边带 [29]，将电子的回旋运动耦合到其轴向运动。这会使两种模式之间以角频率 $\Omega_{\mathrm{sb}}$ 周期性地交换能量，这与众所周知的二能级系统中的拉比振荡类似。在此过程中，电子的修正回旋运动持续通过回旋辐射耗散能量，从而有效冷却轴向运动，直至 $\bar{n}_{z,\mathrm{e}} = \bar{n}_{+,\mathrm{e}} \approx 0.1$。将修正回旋运动与轴向运动进行边带耦合是一种常用技术，通常通过向彭宁阱的径向分裂电极施加射频驱动来实现，从而在阱中心产生分量与 $x\boldsymbol{e}_z$ 或 $z\boldsymbol{e}_x$ 成正比的电场。当粒子穿过空间变化的电场时，所施加的射频驱动会受到调制；驱动边带 $\omega_{\mathrm{sb}} = \omega_+ - \omega_z$ 时，这会引发两种运动之间的共振跃迁。对于所提出的冷却技术，电子的修正回旋运动通过 $\omega_{\mathrm{sb}}/2\pi \approx 196$ GHz 的边带驱动与其轴向运动耦合。由于这一频率极高，处于毫米波波段，采用分裂电极的实现方式已不可行，因为电极的阻抗匹配以及通过常规电缆进行信号传输几乎不可能实现。取而代之的是，将行波注入彭宁阱以产生所需的场梯度；彭宁阱由此有效地充当圆形波导，因此只要设计得当，就能非常有效地传输毫米波。

在典型彭宁阱参数下，电子的轴向频率可通过改变阱电极上的施加电压 $V_0$ ，从$\omega_{z,\mathrm{e}}/2\pi \approx 20$ 自由调谐至200MHz。这恰好覆盖了许多可能粒子种类的修正回旋频率范围，包括高电荷态离子、轻离子或

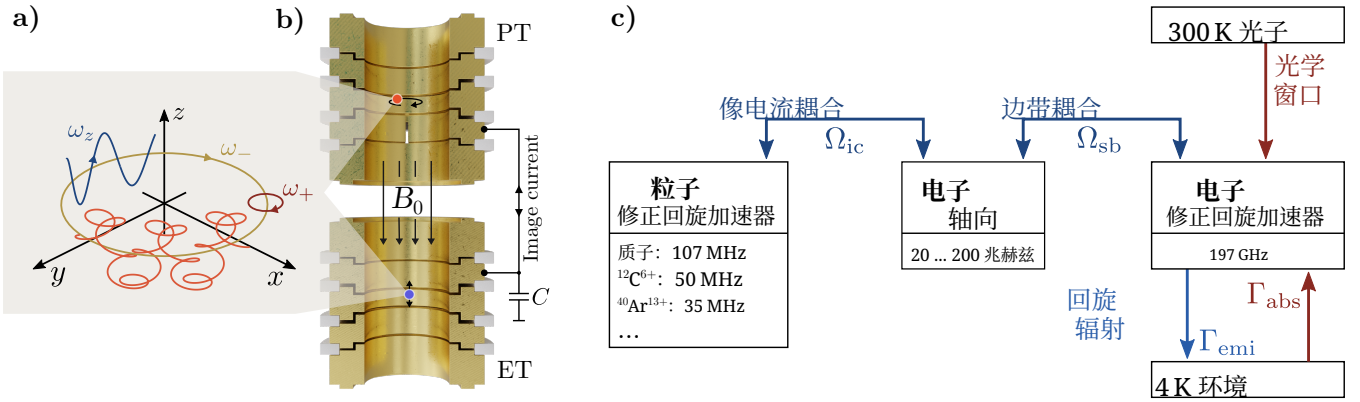


图1. 插图a) 以亮红色描绘了存储在彭宁阱中的带电粒子的完整轨迹，并将其分解后的各个本征运动以不同颜色分别绘出。图b) 描绘了存储在各自独立的彭宁阱中的粒子之间的耦合：粒子阱（PT）的一个径向分裂电极以像电荷的形式拾取目标粒子的修正回旋运动，并通过与电子阱（ET）的一个轴向偏置电极的电气连接，将其耦合到电子的轴向运动。图c) 给出了所涉及的三种本征运动之间完整冷却链的框图。对于每种运动，列出了磁场为7 T时的本征频率；对于电子的轴向运动，则针对典型彭宁阱参数以及不同的静电势阱深给出。红色/蓝色箭头表示冷却/加热通道，箭头方向则表示冷却过程中的主要能量流动方向。

质子和反质子，如表 I 所强调。这使得电子充分冷却的轴向运动能够精确匹配目标粒子的修正回旋运动，从而为实现协同冷却提供了可能。为此，将目标粒子存储在与电子阱相邻的独立彭宁阱中。目标粒子最初受热激发的修正回旋运动会在其阱电极内感应出镜像电荷，可通过将其中一个电极沿径向对半剖开来拾取。如图1b所示，用一根简单导线将其中一半与电子阱的轴向偏移电极电连接，即可实现对电子轴向运动的有效耦合。这种像电荷诱导的相互作用使粒子的修正回旋运动与电子的轴向运动之间以频率$\Omega_{ic}$发生周期性能量交换。这最终使粒子的修正回旋运动热化到由电子修正回旋运动所规定的相同低平均量子数$\bar{n}_{+,p} \approx 0.1$ 。耦合本征运动完整链路的框图如图1c所示。通过方程(5)评估与$\bar{n}_{+,p}$ 相关的温度，可知表 I 所列可能目标粒子的修正回旋运动温度范围为$T_{+,p} \approx 0.7$ 至2.2 mK。

这一结果为所提出的冷却技术提供了令人鼓舞的见解，并突显了其能力：除对少数特定离子种类进行直接激光冷却外，该技术还能将几乎任意范围的目标粒子冷却至彭宁阱中无法达到的温度。然而，前述简化描述忽略了所有寄生加热效应，而这些效应必然会导致冷却性能下降。因此，识别并尽可能减小潜在的加热通道至关重要；这些通道可能源于

室温黑体辐射的流入，或阱电子设备内部的电噪声。为降低任何残余加热效应的影响，必须优化冷却链，使其达到尽可能高的冷却速率。

另一个重要的实际考量是达到所需温度所需的时间。在大多数测量方案中，每记录一个数据点都需要冷却粒子，因此快速冷却有助于获取足够的统计数据。电阻冷却、缓冲气体冷却或直接激光冷却等传统技术的冷却时间，可以通过解析处理量化为粒子能量的指数衰减；而所提出的冷却技术则无法用如此直接的解析处理来描述。不过，为了量化该技术的冷却时间尺度，下一节将解析描述各个耦合机制，再通过数值模拟将它们结合起来，以探究完整的冷却动力学。

## III. 理论描述

通常采用经典方法处理彭宁阱，其依据往往是：在目前常规实现的粒子温度下，粒子的平均运动量子数 $\bar{n} = (\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1)^{-1}$ 超过 $10^3$ 。然而，由于所提出的冷却技术涉及 $\bar{n} < 1$ 的动力学，我们采用量子化形式体系推导该冷却方案的动力学。此外，回旋辐射的自发辐射本质上取决于真空涨落，因此需要对电磁场进行量子化描述。

粒子在彭宁

阱中的运动描述基于最小耦合哈密顿量 [30]

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}} - q\hat{\boldsymbol{A}}_0(\hat{\boldsymbol{r}})\right)^2 + q\hat{\phi}(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{6}$$

其中忽略了自旋自由度，因为在当前情况下它并不相关。磁矢势算符 $\hat{\boldsymbol{A}}_0 = -B_0/2(\hat{y}\boldsymbol{e}_x - \hat{x}\boldsymbol{e}_y)$ 重现了方程（1）中的磁场，并选取为满足 $\hat{}$ 库仑规范条件 [31] $\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0 = 0$ 且关于 $\boldsymbol{e}_z$具有旋转对称性。势算符 $\phi$ 由方程（2）给出，其中位置变量被替换为相应的算符。磁场引入的 $\hat{x}/\hat{y}$ 自由度之间的耦合通过正则变换消除，从而在变换后的相空间中得到三个相互独立的谐振子。随后，利用三组玻色产生算符和湮灭算符 $\hat{a}_i^\dagger$ 及 $\hat{a}_i$ ，可直接将该哈密顿量对角化；这些算符作用于各自的福克空间 $\mathcal{F}_i$，其中 $i \in \{+,-,z\}$ 表示经典离子阱理论中已知的经修正的回旋、磁控管运动和轴向自由度。这些算符满足对易关系 $[\hat{a}_i,\ \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$。最终，哈密顿量可写成简单形式 [32]

$$\begin{aligned}\frac{\hat{H}_0}{\hbar} = \omega_+\left(\hat{a}_+^\dagger\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\right) + \omega_z\left(\hat{a}_z^\dagger\hat{a}_z + \frac{1}{2}\right)\\ - \omega_-\left(\hat{a}_-^\dagger\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right),\end{aligned} \tag{7}$$

其中各模式的本征频率由方程(3)和(4)给出。

### A. 圆柱波导中的回旋辐射 uide

加速电子向自由空间辐射的总功率通常用拉莫尔公式 [28]进行经典计算。然而，彭宁阱与自由空间的不同之处在于，其导电电极对辐射场施加边界条件，从而改变电子的辐射动力学。下文将从第一性原理出发，通过计算电子修正回旋运动的各个激发与辐射场中光子之间的跃迁率，推导彭宁阱中的辐射速率。后者通过分解为圆柱波导的模式来建模，该波导与圆柱形开端盖彭宁阱十分相似。

该系统由 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_f + \hat{H}'$描述，其中$\hat{H}_0$ 表示方程（7）所定义的彭宁阱中电子的未扰动动力学，$\hat{H}_f$ 为辐射场的自由哈密顿量，$\hat{H}'$表示电子与场之间的相互作用。后者的推导从方程（6）所定义的最小耦合哈密顿量出发，并代入$\hat{\boldsymbol{A}}_0 \to \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}'$，从而引入辐射场的磁矢势$\hat{\boldsymbol{A}}'$。分离出$\hat{}$未扰动动力学 $H_0$ ，便得到相互作用哈密顿量

$$\hat{H}' = \frac{q^2}{2m}\left\{\hat{\boldsymbol{A}}_0, \hat{\boldsymbol{A}}'\right\} + \frac{q}{2m}\left\{\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{A}}'\right\} + \frac{q^2}{2m}\hat{\boldsymbol{A}}'^2, \tag{8}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示反对易子。与$\hat{\boldsymbol{A}}'^2$ 成正比的抗磁项在下文中予以忽略，因为场的振幅非常小。辐射场通过将其磁矢势表示为模式分解中的场算符来量子化，即 [33]

$$\hat{\boldsymbol{A}}'(\hat{\boldsymbol{r}}, t) = \sum_{s\sigma}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{s\sigma}\epsilon_0}}\left[\hat{a}_{s\sigma}(t)\boldsymbol{u}_{s\sigma}(\hat{\boldsymbol{r}}) + \text{H.c.}\right], \tag{9}$$

其中 H.c. 表示厄米共轭，$\boldsymbol{u}_{s\sigma}(\hat{\boldsymbol{r}})$ 是描述由 $s\sigma$ 索引、频率为 $\omega_{s\sigma}$ 的模式场分布的矢量值函数。算符$\hat{a}_{s\sigma}(t) = \hat{a}_{s\sigma}(0)e^{-i\omega_{s\sigma}t}$ 及其厄米共轭在相应模式中湮灭/产生一个光子，其中相对于 $\hat{H}_f = \sum_{s\sigma}\hbar\omega_{s\sigma}(\hat{a}_{s\sigma}\hat{a}_{s\sigma}^\dagger + \frac{1}{2})$ 的自由演化时间依赖性被显式吸收到算符中。

模式函数 $\boldsymbol{u}_{s\sigma}(\hat{\boldsymbol{r}})$ 由无限长、半径为 $\rho_0$ 、沿 $\boldsymbol{e}_z$ 的理想导电圆柱内时谐麦克斯韦方程的解得到，用以近似圆柱形彭宁阱。Kakazu and Kim [34] 发表了一种对圆柱腔场进行量子化的方法，其封闭的轴向边界导致驻波解，这些解可解释为无限长圆柱中两个反向传播行波的叠加。因此，在保留横向模式结构的同时，用行波因子 $\exp(-ik_z z)$ 替换沿纵向轴的离散驻波依赖关系，即可得到这些解

$$\psi_{s\sigma} = c_{s\sigma}J_m\left(\frac{\chi_{s\sigma}\rho}{\rho_0}\right)e^{i(\phi m - k_z z)} \tag{10}$$

对应于无限长圆柱在柱坐标 $\{\rho,\phi,z\}$ 下的标量亥姆霍兹方程。随后，通过标量解构造出两组正交的模式函数 $\boldsymbol{u}_{s\sigma}$，分别对应于相对于沿 $\boldsymbol{e}_z$ 的波传播为横磁（TM；$\sigma = 1$）或横电（TE；$\sigma = 2$）的模式:

$$\boldsymbol{u}_{s1} = \nabla\times\nabla\times\psi_{s1}\boldsymbol{e}_z \tag{11a}$$

$$\boldsymbol{u}_{s2} = \nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\psi_{s2}\boldsymbol{e}_z\,. \tag{11b}$$

解由复合模式指标 $s = (m,\ n,\ k_z)$ 标记，其中 $m \in \{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ 和 $n \in \{1,2,3,\dots\}$ 分别表示方位角和径向模式指标。纵向波数 $k_z$ 满足色散关系

$$k_z = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\omega_{s\sigma}^2 - \omega_{0,s\sigma}^2}\,, \tag{12}$$

这表明，给定模式的场在低于其截止频率 $\omega_{0,s\sigma} = \chi_{s\sigma}c/\rho_0$ 时会变为倏逝场。函数 $J_m$ 表示 $m$ 阶第一类贝塞尔函数，$\chi_{s1} := \chi_{mn1}$ 是 $J_m$ 的第 $n$ 个零点，而 $\chi_{s2} := \chi_{mn2}$ 是 $J_m$ 的导数的第 $n$ 个零点。常数

$$c_{s1} = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\rho_0\, c}{\omega_{s1}\chi_{s1}|J_{m+1}(\chi_{s1})|}\,, \tag{13a}$$

$$c_{s2} = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\rho_0}{\omega_{s2}\chi_{s2}\sqrt{J_m^2(\chi_{s2}) - J_{m+1}^2(\chi_{s2})}} \tag{13b}$$

其选取方式使自由场哈密顿量在圆柱段长度为 $L$、量子化体积任意取为 $V = \pi\rho_0^2 L$ 时归一化为单光子能量。量子化体积和长度并无物理意义，在跃迁率的最终计算中自然会消去。由于从驻波模式改为行波模式，归一化常数与 Kakazu and Kim [34] 中的结果相差一个因子 $\sqrt{2}$。

将方程 (10) 代入方程 (11)，模式函数可展开为

$$\boldsymbol{u}_{s1} = c_{s1}\left[-i\frac{\chi_{s1}k_z}{\rho_0}J_m'\left(\frac{\chi_{s1}\rho}{\rho_0}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{mk_z}{\rho}J_m\left(\frac{\chi_{s1}\rho}{\rho_0}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{\chi_{s1}^2}{\rho_0^2}J_m\left(\frac{\chi_{s1}\rho}{\rho_0}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right]e^{i(\phi m - k_z z)}\,, \tag{14a}$$

$$\boldsymbol{u}_{s2} = -\omega_{s2}c_{s2}\left[\frac{m}{\rho}J_m\left(\frac{\chi_{s2}\rho}{\rho_0}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + i\frac{\chi_{s2}}{\rho_0}J_m'\left(\frac{\chi_{s2}\rho}{\rho_0}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\right]e^{i(\phi m - k_z z)}\,. \tag{14b}$$

与场的径向长度尺度 $\rho_0/\chi_{s\sigma}$ 相比，电子波函数的空间范围很小，因此可将 $\boldsymbol{u}_{s\sigma}$ 在 $\rho = 0$ 附近展开至零阶，这与常用的偶极近似类似。在此极限下计算 $\boldsymbol{u}_{s\sigma}$ 可知，对于 $m \neq \pm 1$的模式，径向场分量为零，这表明这些模式不会与位于离子阱中心的电子的径向运动耦合。仅考虑相关的 $m = \pm 1$ 模式，并在 $\rho \to 0$ 处转换为笛卡尔坐标，可得

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{s1}\Big|_{m=\pm1} = \frac{c_{s1}\chi_{s1}k_z}{2\rho_0}(\pm i\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)e^{-ik_z z}\,, \tag{15a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{s2}\Big|_{m=\pm1} = \frac{c_{s2}\chi_{s2}k_z\omega_{s2}}{2\rho_0}(\pm i\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_x)e^{-ik_z z}\,. \tag{15b}$$

假设场模式与热库耦合，且其关联衰减速度远快于电子-场相互作用的时间尺度，则系统 [35] 可采用马尔可夫近似。随后，可使用费米黄金法则计算电子的修正回旋运动激发态与给定波导模式中的光子之间的跃迁率 [36]

$$\Gamma_{s\sigma} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\hat{H}'|i\rangle|^2\rho_{s\sigma}(E_f)\,, \tag{16}$$

其中，$|i\rangle$ 和 $|f\rangle$ 分别为初态和末态，$\rho_{s\sigma}(E_f)$ 是末态连续能谱中的态密度（DOS）。态密度由波导模式沿纵向波数 $k_z$ 的连续分布决定。对于单个波导模式，$k_z$ 内的态数至 $k_z + \mathrm{d}k_z$ 为 $\mathrm{d}N(k_z) = L/2\pi\,\mathrm{d}k$，其中 $L$ 是任意量子化长度。利用方程（12）中的色散关系，关于能量的态密度为

$$\rho_{s\sigma}(\omega_{s\sigma}) = \frac{\mathrm{d}N_{s\sigma}}{\mathrm{d}E_{s\sigma}} = \frac{\omega_{s\sigma}L}{\pi\hbar c\sqrt{\omega_{s\sigma}^2 - \omega_{0,s\sigma}^2}}\,. \tag{17}$$

计算从初态 $|n_+,\ n_{s\sigma}\rangle$ 到末态$|n_+ - 1,\ n_{s\sigma} + 1\rangle$（发射）或 $|n_+ + 1,\ n_{s\sigma} - 1\rangle$（吸收）的相关单光子跃迁矩阵元后发现，根据磁场方向，只有一种 $m = \pm 1$ 模式会对跃迁产生贡献。这是因为 $m$ 的符号决定了光子的偏振旋向；为守恒角动量，光子必须与修正回旋运动同向旋转。将此前定义的初态和末态代入方程 (16) 并展开矩阵元，再代入方程 (17)，即可得到单个波导模式中回旋光子的发射率和吸收率，形式如下：

$$\Gamma_{\mathrm{emi},s\sigma} = \gamma_{s\sigma}n_+(n_{s\sigma} + 1)\,, \tag{18a}$$

$$\Gamma_{\mathrm{abs},s\sigma} = \gamma_{s\sigma}n_{s\sigma}(n_+ + 1)\,, \tag{18b}$$

分别对应的速率常数为 $\gamma$

$$\gamma_{s1} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0\rho_0^2 m_e c}\frac{\sqrt{\omega_+^2 - \omega_{0,s1}^2}}{\omega_+ - \omega_-}\frac{1}{J_0^2(\chi_{s1})}\,, \tag{19a}$$

$$\gamma_{s2} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0\rho_0^2 m_e c}\frac{\omega_+^2}{(\omega_+ - \omega_-)\sqrt{\omega_+^2 - \omega_{0,s2}^2}} \cdot \frac{1}{J_1^2(\chi_{s2}) - J_0^2(\chi_{s2})}\,. \tag{19b}$$

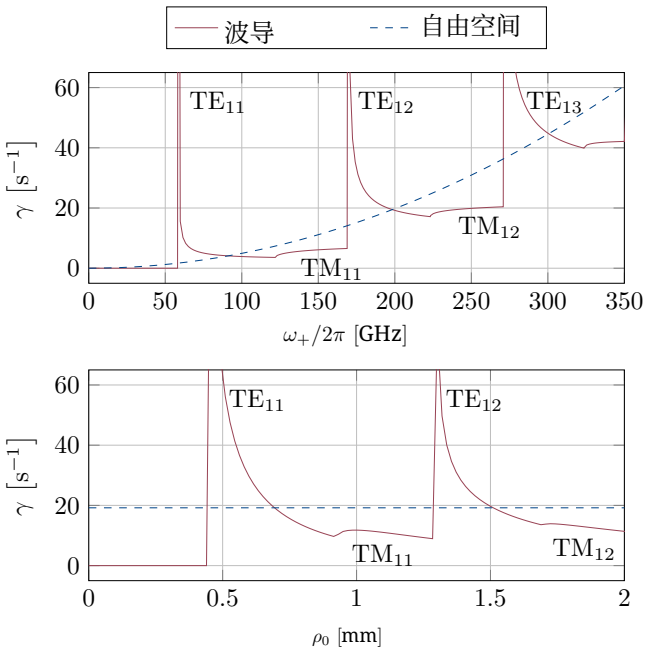


图 2. 圆形波导与自由空间中电子修正回旋运动激发态和光子之间单光子跃迁的速率对比。该速率通过对各个模式 $\gamma = \sum_{s\sigma} \gamma_{s\sigma}$ 求和计算得出，其中各个模式的贡献分别按以下约定标记：$\mathrm{TM}_{mn}$ 表示 $\sigma = 1$ 个横磁模式，$\mathrm{TE}_{mn}$ 表示 $\sigma = 2$ 个横电模式。上图显示固定波导半径 $\rho_0 = 1.5\,\mathrm{mm}$ 时频率对速率的影响；下图显示频率固定为 $\omega_+/2\pi = 197\,\mathrm{GHz}$、波导半径变化时的速率。实际情况下，模式截止频率 $\omega_{0,\,s\sigma}$ 处的奇点会因波导壁的损耗而“展宽”。

在模式截止频率附近，进入 $\sigma = 2$ 横电（TE）模式的辐射速率会发散，导致马尔可夫近似失效，因为此时耦合已不能再视为弱耦合。要准确描述这些区域，需要采用非微扰处理并考虑波导壁损耗；不过，在各奇点之间，本文的形式体系仍然适用。在截止频率以下，模式变为倏逝模式，方程（19）变为虚数，表明自发发射完全受到抑制。

总自发辐射率 $\gamma = \sum_{s\sigma} \gamma_{s\sigma}$ 通过对各个模式的贡献求和得到，并绘于图 2 中。我们将这些结果与自由空间中的回旋辐射率进行比较：对由 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}\alpha} = \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}\alpha} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}/\sqrt{V}$ 定义的平面波模式函数重复上述计算，其中 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ 是发射光子的波矢。对于用 $\alpha \in \{1, 2\}$ 表示的两个正交线偏振，偏振矢量 $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ 满足 $|\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}\alpha}| = 1$ 和 $\langle \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}\alpha},\ \boldsymbol{k} \rangle = 0$。随后利用方程（16）和自由空间态密度，计算进入无穷小立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 的自由空间跃迁率，

（16）以及自由空间态密度

$$\rho(E_f) = g_\alpha \frac{\omega_+^2 V}{\hbar (2\pi c)^3}\, \mathrm{d}\Omega\,, \tag{20}$$

其中 $g_\alpha = 2$ 表示两种可能的线性偏振。对整个立体角积分消去矩阵元对 $\boldsymbol{k}$ 的依赖，可得到总辐射率

$$\gamma_{\mathrm{free}} = \frac{\omega_+^3 q_e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3 m_e (\omega_+ - \omega_-)}\,. \tag{21}$$

为便于比较，图 2 绘出了这些结果。从图中可以看出，跃迁到波导模式总和中的速率大致遵循跃迁到自由空间时一般的二次频率关系。然而，波导局域态密度的变化会导致某些频率下的跃迁概率显著增强或受到抑制。这种效应在最低截止频率以下最为明显，此时跃迁会被完全抑制。由于可以通过改变波导半径 $\rho_0$ 自由调节截止频率，因此可以在一定范围内对辐射率进行“工程化”调控。

由于电子的修正回旋运动最终与场模式达到热平衡，细致平衡要求 $\bar{n}_+ = \bar{n}_{s\sigma}$。平均光子数遵循玻色-爱因斯坦统计

$$\bar{n}_{s\sigma} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{s\sigma}/k_{\mathrm{B}}T} - 1}\,, \tag{22}$$

由此得到 $\bar{n}_{s\sigma} = 0.1$，假设该场已完全热化至其低温环境的温度 $T \approx 4\mathrm{K}$。然而，注入边带驱动要求离子阱与一个位于室温环境中的毫米波源耦合，这会因注入的约翰逊–奈奎斯特噪声和相位噪声而提高该场的平均光子数。正如第 IV B 节将要介绍的，结合使用室温衰减器和低温衰减器可以限制光子流入，使有效场温度达到 $T_{\mathrm{eff}} \approx 8\,\mathrm{K}$，对应的平均光子数为 $\bar{n}_{s\sigma} = 0.4$。

### B. 边带耦合

边带耦合的理论描述采用半经典方法：对粒子运动进行量子化描述，同时将外加边带驱动视为经典场。哈密顿量为 $H = H_0 + H'$，其中 $H_0$ 定义于方程（7），相互作用哈密顿量 $H'$ 的形式如方程（8）所示。然而，方程（9）中定义的相互作用场算符 $\boldsymbol{A}'$ 现在通过代入 $\hat{a}_{s\sigma}(t) \to a_{s\sigma} e^{-i\omega_{s\sigma}t}$ 表示为经典场，其中 $a_{s\sigma}$ 是仅取决于注入该模式的功率的标量振幅。模式函数 $\boldsymbol{u}_{s\sigma}$ 由方程（14）给出，我们再次

只关注极限 $\rho \to 0$下不为零的 $m = \pm 1$ 模式，并在 $z = 0$ 附近展开至一阶。零阶项产生偶极激发算符，而一阶项则产生所需的耦合算符。边带驱动频率设为 $\omega_{s\sigma} = \omega_+ - \omega_z + \delta$，其中 $\delta$ 表示相对于理想边带频率的失谐。

暂时转到相互作用绘景中，其中由 $H_0$ 定义的自由演化被吸收到算符中，并假设失谐远小于跃迁频率（$\delta \ll \omega_+ - \omega_z$），则在通常的旋波近似下，可以忽略快速振荡的项。此时，单个波导模式的相互作用哈密顿量可简化为

$$\hat{H}'_{s\sigma} = \hbar \frac{\Omega_{s\sigma}}{2} \left( e^{i\omega_{s\sigma} t}\, \hat{a}_z^\dagger \hat{a}_+ + e^{-i\omega_{s\sigma} t}\, \hat{a}_z \hat{a}_+^\dagger \right), \tag{23}$$

其结构常见于量子光学领域，描述了两个模式之间周期性的人口数交换；在本例中，这两个模式分别是电子的修正回旋运动和轴向运动。耦合强度由拉比频率量化

$$\Omega_{s1} = a_{s1} \frac{q_e}{m_e} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0}} \frac{\omega_+ \chi_{s1} c_{s1}}{\rho_0 \sqrt{\omega_z(\omega_+ - \omega_-)}} \frac{k_{z,s1}^2}{\sqrt{\omega_{s1}}}, \tag{24a}$$

$$\Omega_{s2} = a_{s2} \frac{q_e}{m_e} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0}} \frac{\omega_+ \chi_{s2} c_{s2}}{\rho_0 \sqrt{\omega_z(\omega_+ - \omega_-)}} k_{z,s2} \sqrt{\omega_{s2}}, \tag{24b}$$

图 3 绘出了不同模式和波导半径下的拉比频率，突显出仔细选择模式和进行离子阱设计的必要性。耦合会使平均量子数 $\bar{n}_z(t)$ 与 $\bar{n}_+(t)$ 之间发生周期性交换，其时间演化为

$$\bar{n}_{+/z}(t) = \frac{\Omega^2}{\tilde{\Omega}^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{\Omega} t}{2}\right) \left[\bar{n}_{z/+}(0) - \bar{n}_{+/z}(0)\right] + \bar{n}_{+/z}(0), \tag{25}$$

广义拉比频率 $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ ac 用于计入失谐的影响。

为了得到耦合强度在实验上可测量的表达式，场振幅 $a_{s\sigma}$ 用注入该特定模式的功率 $P_{s\sigma}$ 表示。由于磁矢势和模式函数在 IIIA 节中已定义为按单个光子能量归一化，因此场振幅随 $a_{s\sigma} = \sqrt{n_{s\sigma}}$ 变化，其中 $n_{s\sigma}$ 是给定模式中的光子数。考虑长度为 $L$的一段波导，光子数为 $n = \Phi L / v_g$，其中 $\Phi = P/\hbar\omega$ 为入射光子通量，$v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k = c^2 k_z/\omega$ 为群速度。于是场振幅为

$$a_{s\sigma} = \sqrt{\frac{L P_{s\sigma}}{\hbar c^2 k_{z,s\sigma}}}. \tag{26}$$

代入方程（24）以计算边带耦合速率时，量子化长度 $L$ 会

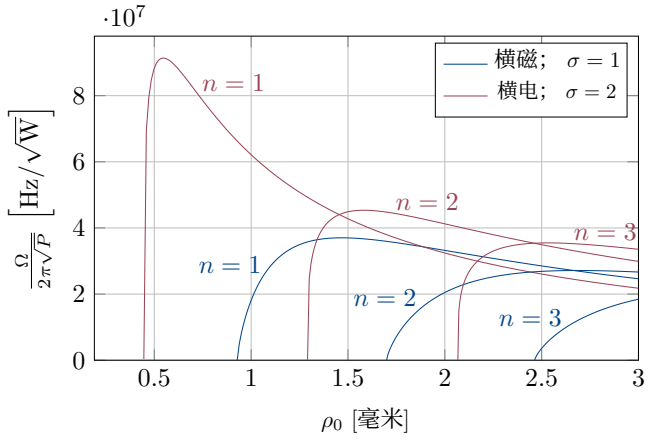


图 3. 电子在 $\omega_+/2\pi \approx 197$GHz 下的修正回旋运动与其轴向运动之间的耦合速率，
$\omega_z/2\pi \approx 50$MHz。通过驱动共振处（$\delta = 0$）的运动边带，利用半径各异（$\rho_0$）且模式指数不同（$n$ 和 $\sigma$）的圆形波导的各个模式来诱导跃迁。

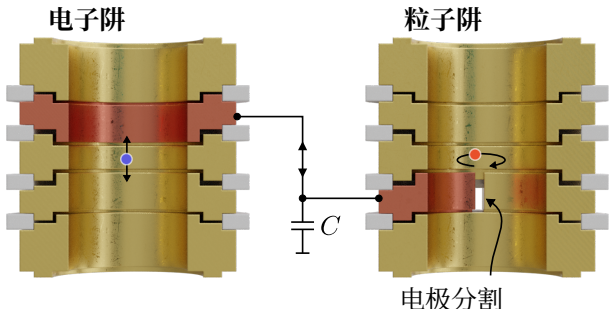


图4. 示意图展示了分别储存在两个独立彭宁阱中的电子和待研究粒子，它们通过红色标示的拾取电极之间的像电荷交换实现耦合。在电子阱中，采用轴向偏置拾取电极，以最大限度地提高对电子轴向运动的灵敏度；而在粒子阱中，则使用分裂电极的一半来实现与径向运动的耦合，如运动箭头所示。电容 $C$ 由电极的总寄生电容构成。

由于方程（13）中归一化常数$c_{s\sigma}$ 里的 $\sqrt{V}$ 项而消去。对波导半径 $\rho_0$的剩余依赖，以及不同模式的行为，见图 3；在设计阱几何结构和毫米波耦入时必须予以考虑。

### C. 像电荷耦合

置于彭宁阱内的带电粒子会改变局部静电场，导致阱电极上的表面电荷重新分布。将电子阱的一个特定电极与粒子阱的一个特定电极电连接，以下称为“拾取电极”，

可使表面电荷发生交换，从而使电子与目标粒子有效耦合。图 4 示意了这种耦合。为了推导相应的相互作用哈密顿量，我们从粒子与拾取电极之间的静电相互作用出发，并将格林互易定理 [37] 应用于双阱系统中两种对偶电荷分布构型：

在第一种配置中，电子和目标粒子分别放置在各自离子阱内的位置 $\boldsymbol{r}_\mathrm{e}$ 和 $\boldsymbol{r}_\mathrm{p}$。假设拾取电极不带电，并处于待确定的电势 $V$。其余电极固定在 0 V。第二种配置考虑相反的情况：假设电子和目标粒子均不带电，而拾取电极及其连接导线所带的净电荷总和为 $Q$。其余电极同样固定在 0 V。在此配置中，拾取电极在电子阱和粒子阱内分别产生静电势 $\tilde{}\mathrm{tials}\ \Phi_i(\boldsymbol{r}) = Q\phi_i(\boldsymbol{r})/C$。其中，$C$ 表示两个相连拾取电极及其连接导线的总电容，而 $\phi_i(\boldsymbol{r})$表示无量纲权重函数，用于描述相应电极产生的电势的空间分布。对于实际的电极几何形状，$\phi_i(\boldsymbol{r})$通常难以获得简洁的解析解，因此需通过数值方法计算。

结合这两种情况并应用格林互易定理，可得

$$V(\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{e}, \hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{p}) = \frac{1}{C}\left[q_\mathrm{e}\phi_\mathrm{e}(\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{e}) + q_\mathrm{p}\phi_\mathrm{p}(\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{p})\right], \tag{27}$$

它表示电子在 $\boldsymbol{r}_\mathrm{e}$ 处以及目标粒子在 $\boldsymbol{r}_\mathrm{p}$处产生的、作用于组合拾取电极上的静电势。这反过来又在粒子上产生反作用电势 $\Phi_i = V(\hat{}\boldsymbol{r}_\mathrm{e},\ \hat{}\boldsymbol{r}_\mathrm{p})\phi_i(\hat{}\boldsymbol{r}_i)$。

描述这种静电相互作用的哈密顿量可通过对整个空间的静电能量密度积分得到

$$\hat{H}' = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r}')\Phi(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}', \tag{28}$$

这可归结为计算粒子位置处的静电势：

$$\hat{H}' = \frac{1}{2}V(\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{e}, \hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{p})\Big[q_\mathrm{e}\phi_\mathrm{e}(\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{e}) + q_\mathrm{p}\phi_\mathrm{p}(\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{p})\Big]. \tag{29}$$

由于粒子运动的空间范围很小，权重函数 $\phi_i(\boldsymbol{r})$ 可以在各自离子阱中心附近表示为一阶泰勒展开。我们将展开限制在电势梯度最大的笛卡尔分量上，该分量对应于电极最敏感的方向。轴向偏置电极会产生较大的 $z$ 梯度，因此用于耦合电子阱中的轴向振荡；而径向分裂电极则用于耦合粒子阱中沿 $x$ 或 $y$ 方向的径向振荡分量。在此展开中，权重电势变为

$$\phi_\mathrm{e}(\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{e}) \approx \hat{z}_\mathrm{e}/D_\mathrm{e}\,, \qquad \phi_\mathrm{p}(\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{p}) \approx \hat{x}_\mathrm{p}/D_\mathrm{p}\,, \tag{30}$$

其中，展开系数 $D_i$ 仅取决于离子阱的几何结构，并通过有限元方法计算得到。$D_i$ 的典型值约为 1 至 10 mm。展开相互作用哈密顿量可得

$$\hat{H}' = \frac{1}{2C}\left[\frac{q_\mathrm{p}^2\hat{x}_\mathrm{p}^2}{D_\mathrm{p}^2} + \frac{q_\mathrm{e}^2\hat{z}_\mathrm{e}^2}{D_\mathrm{e}^2} + \frac{q_\mathrm{e}q_\mathrm{p}}{D_\mathrm{e}D_\mathrm{p}}\left(\hat{x}_\mathrm{p}\hat{z}_\mathrm{e} + \hat{z}_\mathrm{e}\hat{x}_\mathrm{p}\right)\right]. \tag{31}$$

$\hat{}z_e$ 和$\hat{}x_p$ 中的二次项会导致本征频率发生微小扰动，以下将忽略这些扰动。将位置坐标表示为各自福克基中的算符

$$\hat{z}_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{z,\mathrm{e}}m_\mathrm{e}}}\left(\hat{a}_{z,\mathrm{e}}^\dagger + \hat{a}_{z,\mathrm{e}}\right),$$

$$\hat{x}_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{1,\mathrm{p}}m_\mathrm{p}}}\left(\hat{a}_{+,\mathrm{p}}^\dagger + \hat{a}_{+,\mathrm{p}} + \hat{a}_{-+,\mathrm{p}}^\dagger + \hat{a}_{-,\mathrm{p}}\right)$$

并采用旋波近似，可得到哈密顿量

$$\hat{H}' = \hbar\frac{\Omega}{2}\left(\hat{a}_{z,\mathrm{e}}^\dagger\,\hat{a}_{+,\mathrm{p}} + \hat{a}_{z,\mathrm{e}}\,\hat{a}_{+,\mathrm{p}}^\dagger\right). \tag{32}$$

耦合强度可用拉比频率量化

$$\Omega = \frac{q_\mathrm{e}q_\mathrm{p}}{CD_\mathrm{e}D_\mathrm{p}\sqrt{\omega_{1,\mathrm{p}}\,\omega_{z,\mathrm{e}}}\sqrt{m_\mathrm{e}m_p}}, \tag{33}$$

它表示在零失谐 $\delta = \omega_{z,\mathrm{e}} - \omega_{+,\mathrm{p}} = 0$ 时，$\bar{n}_{z,\mathrm{e}}$ 与 $\bar{n}_{+,\mathrm{p}}$ 之间周期性交换的频率。代入电子与 $^{12}\mathrm{C}^{6+}$ 离子耦合的典型参数（$\omega_{1,\mathrm{p}} = \omega_{z,\mathrm{e}} = 54\,\mathrm{MHz}$、$D_\mathrm{e} = D_\mathrm{p} = 2.7$ mm 和 $C = 2.5\,\mathrm{pF}$），可得拉比频率 $\Omega \approx 2\pi \cdot 30$ mHz。非零失谐时，周期性交换以修正后的拉比频率 $\tilde{}\Omega^2 = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ 发生，且仅有 $\Omega^2/\tilde{}\Omega^2$ 的布居参与交换。因此，要实现足够的耦合，失谐 $\delta$ 必须与拉比频率相当或小于拉比频率。对于前述示例，这要求 $\omega_{z,\mathrm{e}}$ 与 $\omega_{+,\mathrm{p}}$之间的相对频率稳定性达到 $\sim 10^{-10}$，这给实验实现带来了重大挑战。

这一挑战是潘宁阱中大多数协同冷却方案固有的难题，并且已经通过多种方式得到解决 [25, 26, 38]。提高耦合速率的一种方法是将寄生电容与电感并联，从而部分抵消寄生电容 $C$ $L$ [25]。虽然这种技术能够大幅提高耦合速率，但也会导致加热，因为

约翰逊-奈奎斯特噪声会限制可实现的稳态温度，因此目前暂不考虑这一因素。提高耦合速率的另一种方法是增加参与耦合过程的冷却粒子数量；在当前语境中，这些粒子就是电子。由 $N$ 个电子组成的系综，其共同振荡模式表现得如同一个质量为 $N \cdot m_{\mathrm{e}}$ 、电荷为 $N \cdot q_{\mathrm{e}}$的单个粒子；代入方程（33）后，拉比频率$\Omega_N = \Omega\sqrt{N}$ 随之提高。使用 $N \cong 1000$ 个电子可将拉比频率提高至$\Omega_N \approx 1\mathrm{Hz}$，从而获得足够的冷却性能，详见第III D节。

然而，增加电子数量会产生相互间的库仑相互作用，从而形成具有丰富内部模态结构 [39, 40]的流体状（弱关联）非中性等离子体。磁阱磁场会使等离子体强烈磁化，导致沿磁力线平行和垂直方向的模式之间出现各向异性速度分布。由于存在多电子绝热不变量 [41], , 平行和垂直自由度（DOF）之间的能量均分速率极小。然而，各自由度内的等离子体模态仍可发生耦合；再加上囚禁势存在缺陷，可能导致质心模态加热。虽然在电子数为 $N = 1000$ [42] 时，这种效应预计并不显著，而且回旋辐射和边带耦合所提供的冷却效率相当高，能够轻易地重新冷却质心模态以及与之耦合的内部模态，但仍有必要尽量降低等离子体内部模态所经历的任何加热速率。囚禁势的不对称性所造成的拖曳，或与中性背景气体的碰撞，会导致等离子体加热并发生径向膨胀 [43], , 这可能引起质心模态的频移或展宽，从而损害冷却性能。尽管膨胀速率预计较低，尤其是在超高真空、强磁场和低电子密度 [44, 45],条件下，仍可采用旋转壁 [46] 或边带驱动 [42] 来径向压缩等离子体。

### D. 完整冷却链

在确定了支配各个耦合阶段动力学的独立哈密顿量后，我们现在将它们组合成一个统一模型。由于完全耦合的系统已无法解析求解，因此采用数值模拟来研究系统的动力学。

完整系统的幺正时间演化由前几节所述各个哈密顿量之和描述：

$$\hat{H} = \hat{H}_{0,\mathrm{e}} + \hat{H}_{0,\mathrm{p}} + \underbrace{\hat{H}_{\mathrm{sb}} + \hat{H}_{\mathrm{ic}}}_{\hat{H}_1} . \tag{34}$$

电子与目标粒子的自由演化由 $H_{0,\mathrm{e}}$ 和 $H_{0,\mathrm{p}}$ 给出，如方程 (7) 所定义。

$\hat{}$ 项 $H_{\mathrm{sb}}$ 和 $H_{\mathrm{ic}}$ 分别表示使用方程 (23) 中的哈密顿量进行的边带耦合，以及使用方程 (32) 中的哈密顿量进行的像电流相互作用。将这些耦合项合并为单个相互作用哈密顿量 $H_1$ ，并应用幺正变换 $U = e^{i\hat{H}_{0,\mathrm{e}}t/\hbar} e^{i\hat{H}_{0,\mathrm{p}}t/\hbar}$ ，得到

$$\begin{aligned} \hat{H}_{1,\mathrm{I}} = \hbar\frac{\Omega_{\mathrm{sb}}}{2}\left(e^{-i\delta_{\mathrm{sb}}t}\hat{a}^{\dagger}_{+,\mathrm{e}}\,\hat{a}_{z,\mathrm{e}} + \mathrm{H.c.}\right) \\ +\hbar\frac{\Omega_{\mathrm{ic}}}{2}\left(e^{-i\delta_{\mathrm{ic}}t}\hat{a}^{\dagger}_{z,\mathrm{e}}\,\hat{a}_{+,\mathrm{p}} + \mathrm{H.c.}\right) , \end{aligned} \tag{35}$$

该式描述了系统在相互作用绘景中的时间演化。复指数项分别表示边带耦合期间的静态失谐 $\delta_{\mathrm{sb}} = \omega_{\mathrm{sb}} + \omega_{z,\mathrm{e}} - \omega_{+,\mathrm{e}}$ （其中 $\omega_{\mathrm{sb}}$ 为注入的边带驱动频率），以及像电荷耦合期间的失谐 $\delta_{\mathrm{ic}} = \omega_{z,\mathrm{e}} - \omega_{+,\mathrm{p}}$。

电子的修正回旋运动与热化波导场中的光子相互作用所产生的非相干时间演化，采用蒙特卡罗波函数（MCWF）形式中的随机量子跳跃进行建模 [47]。在此框架中，时间演化分为对非厄米哈密顿量 $H_{\mathrm{MCWF}} = \hat{H}_{1,\mathrm{I}} - \frac{i\hbar}{2}\sum_i J_i^{\dagger}J_i$ 的相干积分，以及随机应用塌缩算符 $J_i$ 来描述非相干动力学。通过对大量此类随机量子轨迹取平均，可以重建系统密度矩阵的时间演化。在本例中，电子修正回旋运动的光子发射与吸收由以下塌缩算符描述

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{emi}} &= \sqrt{\gamma\,\bar{n}_{\mathrm{th}}}\;\hat{a}^{\dagger}_{+,\mathrm{e}} , \\ J_{\mathrm{abs}} &= \sqrt{\gamma\,(\bar{n}_{\mathrm{th}} + 1)}\;\hat{a}_{+,\mathrm{e}} , \end{aligned}$$

其中， $\bar{n}_{\mathrm{th}}$ 表示场中的平均热光子数， $\gamma$ 是方程（19）中定义的速率常数。

要对系统动力学进行真实模拟，必须将由电压或磁场随时间变化引起的粒子本征频率涨落纳入模型。虽然这些涨落最多只占粒子本征频率的 $10^{-7}$，因此在自由粒子哈密顿量中可以安全地忽略，但它们在耦合动力学中却会产生影响。涨落发生的时间尺度为秒级，因此可以通过在相互作用哈密顿量方程（35）中引入时变失谐 $\delta_{\mathrm{sb}}(t)$和 $\delta_{\mathrm{ic}}(t)$，并将其替换为下式，作绝热近似处理：

$$\delta_i\, t \to \int_{-\infty}^{t} \delta_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau . \tag{36}$$

在数值模拟中， $\delta_{\mathrm{sb}}(t)$ 和 $\delta_{\mathrm{ic}}(t)$ 是通过从

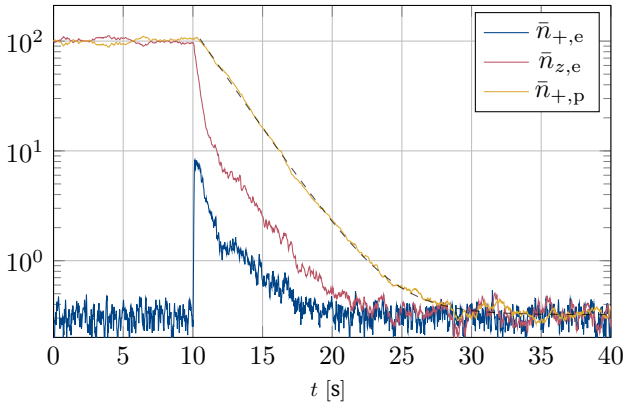


图 5. 数值模拟用于评估电子的修正回旋运动和轴向运动的平均量子数（$\bar{n}_{+,\,\mathrm{e}}$ 和 $\bar{n}_{z,\,\mathrm{e}}$），以及目标粒子的修正回旋运动的平均量子数（$\bar{n}_{+,\,\mathrm{p}}$）。模拟采用 $\Omega_{\mathrm{sb}} = 2\pi \cdot 3\,\mathrm{Hz}$ 的边带耦合速率和 $\sigma = 1\mathrm{Hz}$ 的失谐涨落。边带耦合最初处于禁用状态，并于 $t = 10\mathrm{s}$ 开启。虚线表示对目标粒子修正回旋运动轨迹进行指数拟合的结果，该拟合用于后续分析。

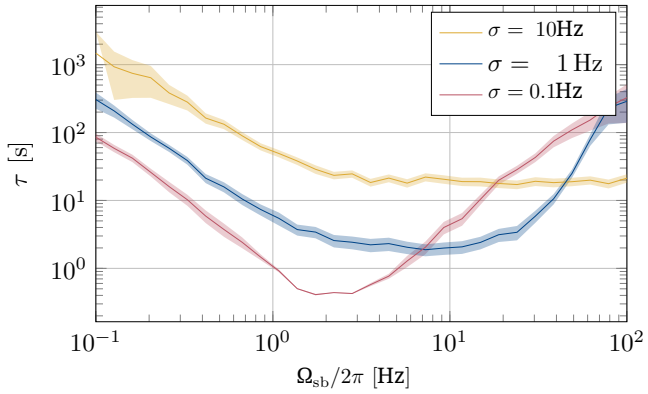


图 6. 不同失谐波动 $\sigma$ 和变化的边带耦合速率 $\Omega_{\mathrm{sb}}$ 下，$^{12}\mathrm{C}^{6+}$ 离子的平均修正回旋量子数的模拟指数衰减常数 $\tau$。每个数据点均通过对文中所述的 100 条模拟量子轨迹取平均后进行指数拟合得到。

方差为 $\sigma_{\mathrm{sb}}^2$ 和 $\sigma_{\mathrm{ic}}^2$ 的正态分布中采样，并将带宽限制为 1 Hz，为每条量子轨迹预先计算的。这种随机方法自然融入蒙特卡罗波函数形式，并且在模拟轨迹数量趋于无穷大时收敛。

数值模拟使用 QuTiP 框架 [48] 实现。一般模拟参数基于前文推导的理论框架以及实验边界条件，后者将在第 IV 节中详细说明。假设磁场强度为 $B_0 = 7\mathrm{T}$，阱半径为 $\rho_0 = 1.5\mathrm{mm}$，根据公式（19）计算得到回旋辐射速率为 $\gamma = 19\mathrm{s}^{-1}$。根据第 III A 节的结果，波导场中的平均热光子数为 $\bar{n}_{\mathrm{th}} = 0.4$。边带耦合速率 $\Omega_{\mathrm{sb}}$ 可通过调节注入的毫米波功率在较宽范围内进行实验调节，因此在模拟中将其视为可变参数。对于一个与 1000 个电子云耦合的 $^{12}\mathrm{C}^{6+}$ 离子，像电流耦合率 $\Omega_{\mathrm{ic}} = 2\pi \cdot 1\mathrm{Hz}$ 采用第 III C 节讨论所得的数值。假设失谐涨落主要源自电子轴向频率的不稳定性，因此将 $\delta_{\mathrm{sb}}(t)$ 和 $\delta_{\mathrm{ic}}(t)$近似视为相干，并采样相同的噪声向量，其方差为 $\sigma_{\mathrm{sb}}^2 = \sigma_{\mathrm{ic}}^2 =: \sigma^2$。

图 5 展示了一个示例结果，该结果取自 100 条模拟轨迹的平均值，其中绘制了期望值 $\bar{n}_{+,\,\mathrm{e}}$, $\bar{n}_{z,\,\mathrm{e}}$ 和 $\bar{n}_{+,\,\mathrm{p}}$ 随时间的变化。碳离子的修正回旋运动和电子的轴向运动均初始化为相干态，且 $\alpha = \sqrt{100}$。可以看出，离子修正回旋量子数的期望值近似呈指数衰减，并以此量化冷却速度，即通过指数拟合 $\bar{n}_{+,\,\mathrm{p}}(t) = e^{t/\tau} + \bar{n}_{\mathrm{th}}$得到的时间常数 $\tau$。尽管这种指数行为并非对所有耦合参数都普遍成立，但在所探测的参数空间内是非常好的近似。碳离子的修正回旋运动趋于热化，最终达到具有 $\bar{n}_{+,\,\mathrm{p}} = 0.4$的热密度矩阵；使用表 I 中的 $\omega_{+,\,\mathrm{p}} = 2\pi \cdot 54$ MHz 时，对应的温度为$T_{+,\,\mathrm{p}} \approx 2\,\mathrm{mK}$。推广到表 I 所列的粒子范围，热化后的量子数 0.4 在修正回旋运动中对应的温度为 1。3 至 4。0mK。

图 6 展示了不同失谐方差 $\sigma^2$ 和边带耦合强度 $\Omega_{\mathrm{sb}}$ 下的指数衰减常数 $\tau$。当失谐波动 $\sigma$ =较小（0.1 Hz）时，在 $\Omega_{\mathrm{sb}} \approx 2\pi \cdot 2\,\mathrm{Hz}$ 附近可实现最快冷却；该值对应于像电荷耦合速率 $\Omega_{\mathrm{ic}}$ 的两倍，并符合两个阻尼谐振子之间的临界耦合条件。将边带耦合速率提高到这一点以上，会因电子轴向运动过阻尼而降低冷却性能。失谐波动较大时，最佳工作点则向更大的边带耦合强度 $\Omega_{\mathrm{sb}}$ 移动。电子轴向运动的阻尼增强会使其线宽变宽，有助于容纳像电荷耦合期间更大的失谐摆幅。

## IV. ELCOTRAP实验

ELCOTRAP实验目前正在海德堡的马克斯·普朗克核物理研究所搭建，旨在测试所提出的冷却技术，并进一步作为通用测试平台，支持潘宁阱物理领域的后续技术开发。为此，该实验经过专门设计，以便

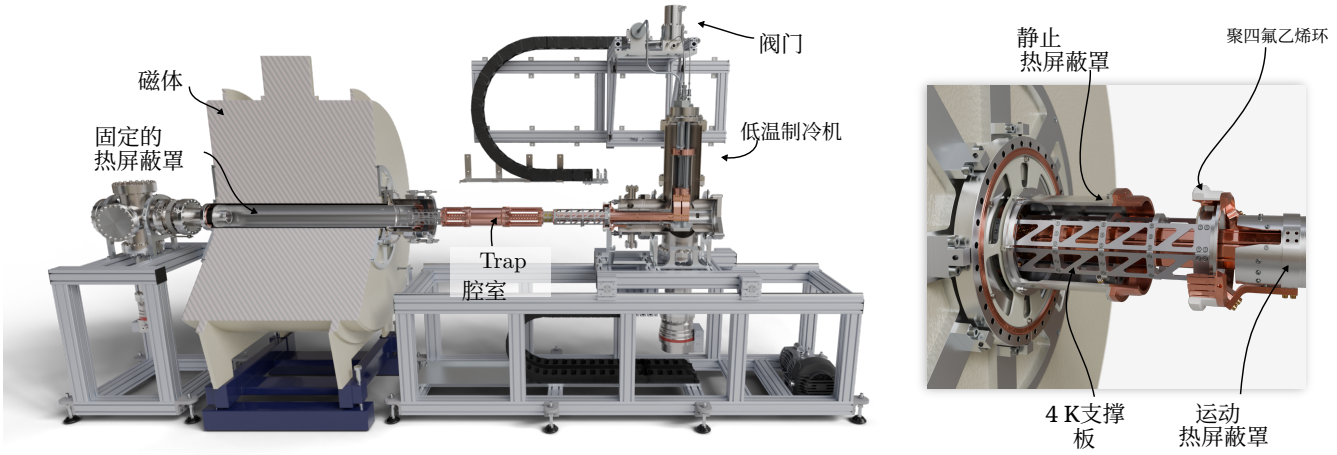


图 7. ELCOTRAP实验处于“拉出”状态时的示意图。插图显示了自作用机构：冷却后，该机构将制冷机侧热屏蔽罩与静止热屏连接起来。冷却过程中，聚四氟乙烯环收缩，从而建立热接触。

能够轻松、频繁地检修彭宁阱及其配套电子设备，从而加快开发迭代。图7展示了该实验的概况。实验的核心部件是超导磁体，磁场强度为7.05 T，其水平通孔便于布置实验装置，方便用户操作。在磁体中央区域一个长 170 $cm^3$ 的圆柱体积内，磁场的空间均匀性为 $\Delta B/B = 1.2 \times 10^{-7}$峰峰值。其时间稳定性指标为 $5 \times 10^{-8}h^{-1}$，如第四节A部分的结果所示，长期稳定性优于该指标。最近安装了一个压力稳定系统，用于稳定磁体的氮气和氦储罐压力，以进一步改善短期稳定性，但该系统尚未完全调试完成。磁体连接至氦回收系统，以便将蒸发的氦重新液化。

该潘宁阱装置采用闭循环低温制冷机冷却至接近 4 K，与采用液态低温制冷剂的替代方案相比，这显著简化了降温和升温过程。所采用的脉管制冷机提供两个冷却级：第一级在 48 K 时的制冷功率为 36 W，第二级在 4 K 时的制冷功率为 1.5 W。潘宁阱阱室位于磁体中心、磁场均匀性最高的区域，其与制冷机之间的高热导连接采用无氧高导热铜（OFHC）制成的铜条和柔性铜编织带，从而消除由热膨胀/收缩引起的错位影响。铜条排列成圆形，以便为注入毫米波提供笔直的轴向路径，具体内容将在第 IV B 节中介绍。内部低温装置完全由连接至制冷机第一级的热屏蔽罩包围，以减少黑体辐射带来的热负荷。热屏蔽罩采用铝制造，以减轻重量并降低成本并包覆 10 层超级绝热箔，以进一步降低辐射热负荷。低温装置置于真空腔内，由两台涡轮分子泵抽气，在室温下可达到$1\times10^{-8}$mbar 的极限压力，在低温运行期间可达到 $<1\times10^{-10}$ mbar。

ELCOTRAP实验的一个显著特点是，能够将低温装置的内级滑出磁体，从而直接接触阱室和低温电子设备。为此，如图 7 所示，装置右侧部分（包括低温制冷机、涡轮分子泵和内部低温装置）安装在导轨上。低温制冷机的阀门安装在一个独立的导轨式框架上，该框架固定在实验室墙壁上，以减少振动。热屏蔽罩分为两部分：一根留在磁体孔内的静止管，以及一个固定在低温制冷机上的组件。冷却时，图 7 所示的自作用机构会自动将两部分热连接起来：由多个柔性“指片”组成的铜环，通过柔性铜编织带与热屏蔽罩的制冷机侧相连；插入磁体孔时，铜环会自动与静止热屏管上的配合表面同轴对准。一个由聚四氟乙烯加工而成的环以过盈配合方式套在制冷机侧环上。由于冷却时聚四氟乙烯与铜之间存在较大的差异热收缩，该环会向内挤压柔性指片 [49] 。这就提供了热连接静止热屏所需的接触力。配合表面之间的接触还通过涂覆一层薄薄的$Apiezon\ N$ 低温润滑脂得到进一步改善。

内部低温装置通过钛板刚性固定在制冷机侧环上。这些钛板经过专门优化，具有较低的热导率和较高的机械刚度，从而为整个

内部低温装置提供了唯一固定的参考点。内部低温装置的“左端”径向自定心并抵靠在热屏蔽罩上的定位锥上，既能确保定位的重复性，又允许其沿轴向发生热收缩。打开实验装置时，“左端”会脱离定位锥，并通过两个小型钛轮继续沿热屏蔽罩移动。将低温插入件滑入或滑出磁体仅需 5 分钟，且一人即可完成。尽管结构具有灵活性，其机械结构仍经过设计，可最大限度地减少自重引起的挠曲；通过有限元仿真计算，阱室处的挠曲为 $< 200\mu m$。

经过最初 2 h 的抽气后，即可启动装置的降温过程；不到 24 h，阱室和热屏蔽罩的温度便分别达到 6.4 K 和 100 K 的稳态值。与低温冷却器规格所标示的 $\sim 48$K 相比，热屏蔽罩温度偏高，这是由于连接低温冷却器第一级与热屏蔽罩的铝管存在导热瓶颈。未来将以铜管替换这部分。预计这项升级也将有助于降低内部低温级的温度。通过两个级上的电阻加热器，可在 12 小时内将装置重新加热至室温；整个低温循环周期约为 1.5 天。

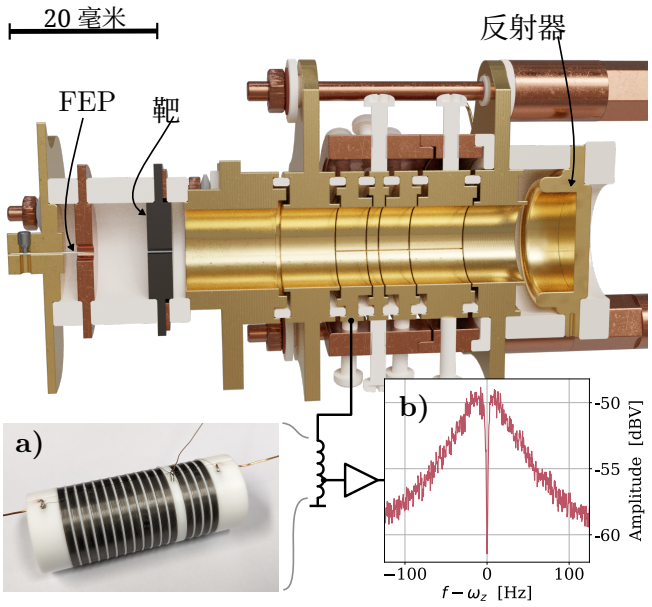


图 8. 第一阶段阱设计示意图，由一组镀金铜电极堆叠而成，内半径为 5 毫米。左侧的引出电极内设有一个场发射点（FEP），并与石墨靶共同构成电子束离子源的主要部分；右侧的反射电极则使离子源完整。正如正文所述，这种设计可直接在彭宁阱势中产生最高达裸电荷态的碳离子。一个电极与图 a）所示的超导电感相连，该电感与低温放大器共同构成粒子探测系统。由此得到的噪声谱见图 b），其中单个 $^{12}C^{6+}$ 离子的特征表现为 $\omega_z \approx 520$kHz 处的明显凹陷。

### A. 第一阶段：系统调试

在 ELCOTRAP实验的第一实验阶段，对整体装置进行了调试和测试。此阶段使用简单的彭宁阱电极堆栈来测试实验的整体基础设施，包括低温系统、粒子探测系统和阱势电压源。所用的圆柱形彭宁阱半径为 5 mm，由 5 个主要电极组成，其设计可消除最高至 6 阶的静电场非均匀性。阱设计包含一个基于 Alonso等人 [50],设计的集成式电子束离子源（电子束离子源），可在原位产生离子。在当前配置中，电子束离子源配备了石墨靶，可常规加载碳原子，直至其裸电荷态。电子束离子源还可用于加载电子；改变囚禁电压的极性后，电子便可被囚禁在同一个彭宁阱中。

阱组件安装在一个由无氧高导电铜加工而成的腔室内，该腔室可用铟垫片密封。铜管可用于对腔室抽气并在装入实验装置前将其“夹封”，从而在冷却过程中借助低温泵效应实现可达到的最佳真空条件。采用这一技术的实验报告了长达数年的粒子储存时间 [51]。在后续阶段，有意省略了夹封步骤，使阱室通过一个开口与隔离真空连通该开口直径为 5 mm。尽管预计这会使离子阱区域内的极限真空变差，但在数月的测量期间，仅观察到一次由残余气体原子碰撞造成的粒子损耗，因此这种方法在使用便利性与极限真空之间实现了值得采用的折中。

通过观察连接在两个阱电极之间的并联 RLC电路的噪声谱密度上粒子留下的独特印记，可以探测受限粒子 [52]：粒子的轴向运动通过阱电极中的像电荷与 RLC电路耦合，并在轴向频率附近一个非常窄的带宽内（通常只有几赫兹）有效短路电路的约翰逊-奈奎斯特噪声，从而产生图 8b 所示的凹陷形状。这种技术的信噪比（SNR）随电阻性贡献 $R$变化，该贡献完全源自寄生损耗，因此必须将其降至最低。由于电容性贡献 $C$由阱电极之间的互电容和自电容决定，因此优化信噪比的主要方法是尽量减少电感器 $L$中的损耗。对于 ELCOTRAP实验第一阶段，采用了绕制在挖空的聚四氟乙烯芯体上的螺旋电感，

该芯体由铌钛线绕制而成，并安装在铌钛外壳内，如图 8a 所示。RLC电路的热噪声由一台针对低温运行优化的砷化镓场效应晶体管放大器放大。

由于 RLC 检测电路的带宽较窄，必须通过改变囚禁势的深度$V_0$来调节轴向频率，使其达到共振频率，如方程（3）所示。囚禁电压由超稳定电压源 StaReP [53],提供；在数秒至数分钟的相关时间范围内，其相对电压波动低于 $10^{-7}$。通过在 4 K低温级设置 RC滤波器（时间常数为 $\tau \approx 10$秒），可将更快的波动和噪声降至最低。

### B. 第二阶段：边带耦合

ELCOTRAP实验的第二阶段旨在实现电子的回旋—轴向边带耦合，这需要采用特殊的阱设计，如图 9 所示。首要要求是，该离子阱能够以尽可能高的场振幅将毫米波注入阱内。为此，阱电极的设计形状类似圆形波导，使行波能够通过其中。正如第 III B 节所述，对于位于波导中心的电子，只有$m = \pm 1$ 模式能够提供边带耦合所需的场分布。因此，必须尽可能增大其中一种模式的注入功率，并防止转换为其他“无用”模式。为此，在满足可制造性要求的前提下，将阱电极的内半径尽可能减小至 1.5 mm，以限制可产生的不需要的模式分布数量，并实现最高交换速率，如图 3 所示。所有上游过渡段均采用平滑渐缩段设计，以降低模式转换的可能性。

边带耦合所需的毫米波在真空腔外产生：首先由信号发生器产生频率为 16.5 GHz 的基带信号，再通过商用倍频器将其转换为所需的 197.5 GHz 频率。随后将倍频后的信号放大至 10 分贝毫瓦，并可使用连接的可编程衰减器在 0 至 70 分贝的范围内进行衰减。当配置为以最大功率驱动电子的运动边带时，毫米波源产生的相位噪声

在偏移 $\sim 50$MHz 处，功率谱密度为 $S_n = -103$ dBm/Hz，这将使电子的修正回旋频率激发至温度 $T = S_{\mathrm{N}}/k_{\mathrm{B}}$。在室温（$T_{\mathrm{room}} \approx 290$K）和内部低温级（$T_{\mathrm{cryo}} \approx 4$K）处设置衰减器，以降低修正回旋运动所感受到的有效场温度，

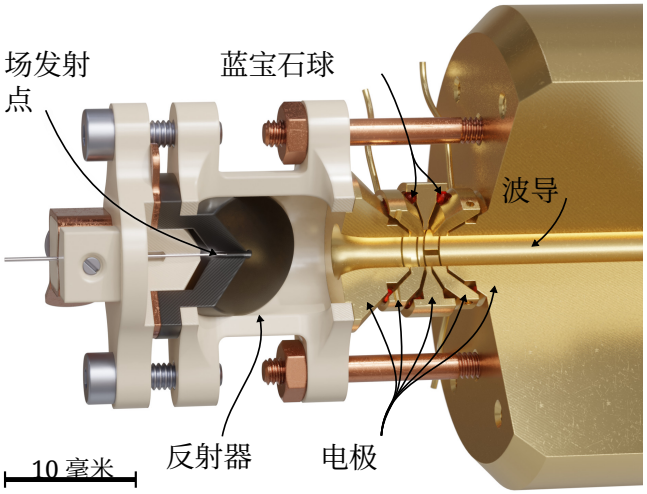


图9. 第二阶段阱设计的剖面图。离子阱本身由五个镀金铜电极组成，内半径为 $\rho_0 = 1.5$ 毫米，电极之间以直径为1毫米的蓝宝石球隔开。最右侧的电极兼作结构部件和波导，将毫米波传送至囚禁区域。毫米波通过最左侧电极中的指数喇叭天线离开离子阱，并由一个有损反射器部分吸收或散射到阱室中。

从而

$$T_{\mathrm{eff}} = \eta_{\mathrm{cryo}} \left[ \frac{S_{\mathrm{N}}}{k_{\mathrm{B}}} \eta_{\mathrm{room}} + T_{\mathrm{room}} \left(1 - \eta_{\mathrm{room}}\right) \right] + T_{\mathrm{cryo}} \left(1 - \eta_{\mathrm{cryo}}\right), \tag{37}$$

其中，$\eta_{\mathrm{room}}$ 和 $\eta_{\mathrm{cryo}}$ 分别是室温衰减器和低温衰减器的功率传输因子，它们与各自的损耗 $L_{\mathrm{dB}}$ 之间的关系为 $\eta = 10^{-L_{\mathrm{dB}}/10}$。我们的初步目标是实现 $T_{\mathrm{eff}} = 8\,$K的有效场温度，这需要57分贝的室温衰减和32分贝的低温衰减。

毫米波主要通过标准尺寸为WR5的空心矩形波导传输至离子阱，该波导仅允许基模横电$\mathrm{TE}_{01}$ 传播。然而，进入真空腔需要在波导中插入真空观察窗，这通过在观察窗两侧使用增益为25 dBi的喇叭天线实现。这种喇叭天线间过渡结构还提供热隔离，使真空侧喇叭天线可以直接安装在低温装置的4 K级上。为防止4 K级受到过度的辐射加热，在真空侧喇叭天线与真空观察窗之间放置了一片热锚定于热屏蔽罩的聚四氟乙烯透镜。台式测量表明，该过渡结构的损耗为10分贝，这会影响室温功率传输因子 $\eta_{\mathrm{room}}$。

一条由四段直线型 WR5波导段构成、长 1 米的传输线连接真空

侧喇叭天线与彭宁阱。测得该传输线会引入 12 分贝的损耗，而这正是所需的，因为它可作为低温衰减器的一部分，防止相位噪声和室温黑体光子进入离子阱。为达到计划的 32 分贝低温衰减，还在传输路径中额外安装了一个固定的 20 分贝衰减器。

进入阱室前，过渡段会将矩形 WR5 波导截面转换为圆形截面，使其与彭宁阱的内径相匹配。这种直径相对较大的波导不再是单模的，因此会允许不需要的模式传播。为避免功率损耗到这些模式中，采用电气长度足够长的渐变过渡段，以尽量减少模式转换。过渡段穿过阱室法兰上的开口，并直接拧接到彭宁阱的长端盖电极上。虽然这种直接连接会使阱真空通过中空波导与隔离真空连通，但其主要优点是无需在阱室内再设置一个喇叭间过渡段。ELCOTRAP 第一阶段的研究结果为这一设计选择提供了依据。

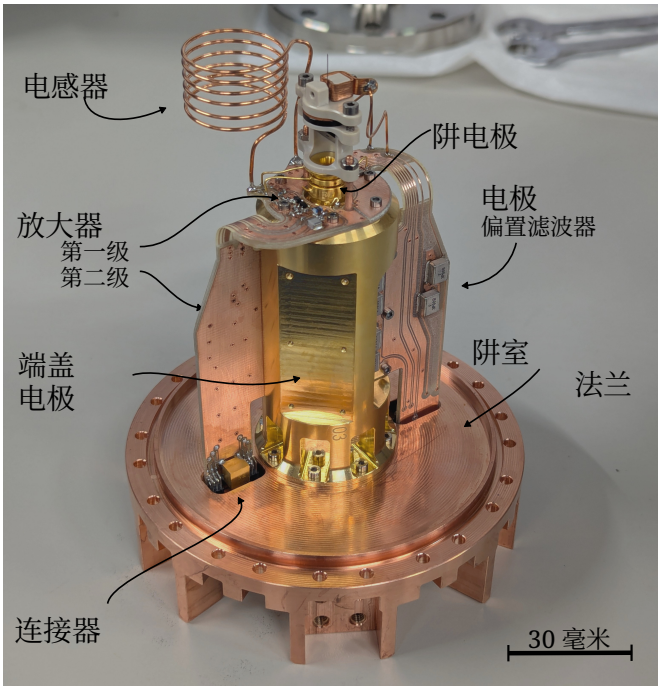


图 10. 组装完成的第二阶段阱照片。端盖电极直接安装在阱室法兰上，通过其内部波导将毫米波传输至囚禁区。两块半柔性电路板集成了与电极的电气连接、电极直流偏置滤波网络的部分组件以及低温放大器。作为探测系统一部分的螺旋电感被放置在靠近离子阱和放大器的位置，以尽量减少寄生效应。

计算得出，在离子阱中心接收到的横电$_{11}$模式功率为 $-79$分贝毫瓦，即 13 pW。根据公式（24b），这对应的边带耦合强度为 $\Omega_{\mathrm{sb}} \approx 2\pi \cdot 150\mathrm{Hz}$，足以达到图 6 中观察到的 10 至 100 Hz 最佳耦合强度。

毫米波穿过囚禁体积后，经由加工在最后一个电极上的指数形喇叭天线辐射到自由空间。该喇叭天线逐渐使波阻抗与自由空间的波阻抗相匹配，从而减少反射回离子阱的波，防止囚禁区内形成驻波，以免影响边带耦合速率。毫米波经由一个由碳纳米管填充聚醚醚酮材料加工而成的反射器，部分被吸收或散射到阱室中；该反射器与最后一个电极同轴放置于其旁边 [54]。该反射器还充当场发射点的引出电极；场发射点安装在反射器内，两者共同构成电子源。阱电极由无氧高导电铜加工而成，并镀金以防止氧化，因为氧化可能导致形成不良的静电斑块电势，或影响毫米波

传播。为能够施加经典射频驱动，对储存电子的磁控管运动进行边带冷却，其中一个电极沿径向分裂。彭宁阱电极本身的尺寸经过优化，使阱深和阱非谐性 [55]能够彼此正交调节。使用直径为 1 mm、偏离理想球体小于 1 µm 的蓝宝石球来分隔各个电极以及径向分裂电极的两半，从而实现极高的尺寸精度和可预测的温度特性。与当今最常用的蓝宝石环相比，

在彭宁阱中，使用球体可减少相邻电极之间的介电材料用量，从而有助于降低电极电容。

采用第 IV A 节所述的凹陷法，可无损检测电子的轴向运动。图 10 所示的螺旋螺线管由 6 匝直径为 1 mm 的无氧高导铜线绕制而成，为检测系统的 RLC电路提供电感。较少的匝数使线圈能够自支撑，从而最大限度地减少其附近的损耗材料。我们设计了一种新型低温放大器，严格要求使用易于采购的商用晶体管，因为我们所知的所有用于低温彭宁阱实验的放大器设计，都依赖于现已过时且难以采购的器件。在对多种晶体管进行表征后，选用了*Skyworks SKY65050-372LF* 高电子迁移率晶体管（HEMT），因其偏置电流需求相对较低，且在低温下具有良好的稳定性。该放大器采用共源共栅输入级，以尽可能降低寄生电容和反馈至输入端的信号；随后接入共源拓扑的第二级，以进一步提高总增益。两个放大器级之间的阻抗匹配，以及输出晶体管与

50 Ω 线路阻抗的匹配通过无源网络实现，这些网络还提供晶体管偏置。匹配网络经过调谐，可在整个工作温度范围内实现无条件稳定性。低温测量显示，在 54兆赫频率下，增益为 34 分贝，输入折算噪声密度为 0.48 nV $/\sqrt{\text{Hz}}$，同时功耗为 $< 2\text{mW}$。该放大器集成在图 10 所示的半柔性电路板上，使第一级能够靠近阱电极放置，以尽可能减少寄生效应。为保持磁场均匀性，仅使用专用非磁性元件。半柔性电路板还负责阱电极的电气布线、对电极偏置电源线路进行滤波，并通过开孔连接到位于阱室法兰另一侧的另一块电路板。

### C. 第三阶段：像电荷耦合

在第三个实验阶段，将实现电子与目标粒子之间的像电荷介导耦合，并将其与第二阶段测试的边带耦合相结合。这将完成完整的耦合链，并代表 ELCOTRAP 实验的最后一个开发步骤。离子阱装置的设计仍在进行中，并将根据第二阶段获得的结果和优化方案加以完善。该装置将设有两个独立的离子阱，分别用于储存电子和目标粒子。设计将经过高度优化，以增强两个离子阱之间的像电荷介导耦合；这主要通过尽量减小组合电极电容 $C$ 以及有效电极间距 $D_{\text{e}}$ 和 $D_{\text{p}}$来实现，如公式（33）所示。通过仔细优化电极几何形状，并采用与第二阶段相同的独立蓝宝石球来隔开电极，可将组合电极电容降至最低。有效电极间距主要通过缩小离子阱的整体尺寸来减小。此外，还可以将多个电极耦合成一个组合式虚拟拾取电极，以进一步减小有效电极间距。初步概念设计的有限元模拟表明，组合阱电容为 $C \approx 2.5\,\text{pF}$，且电子阱和粒子阱的有效电极间距均为 $D \approx 2.7\,\text{mm}$，是可以实现的。我们使用这些数值计算第.....节中的像电荷耦合速率。

分节 III C.

在两个阱之间传递像电荷所需的电气连接通过电容实现。这使得阱之间能够在 10 至 100 MHz 的频率下耦合，同时还允许对电极施加直流偏置。这里考虑了两种不同的阱布局，均如图 11 所示。在第一种设计方案中，电子阱相对于粒子阱横向错开，从而使布局更加紧凑，并简化与附加

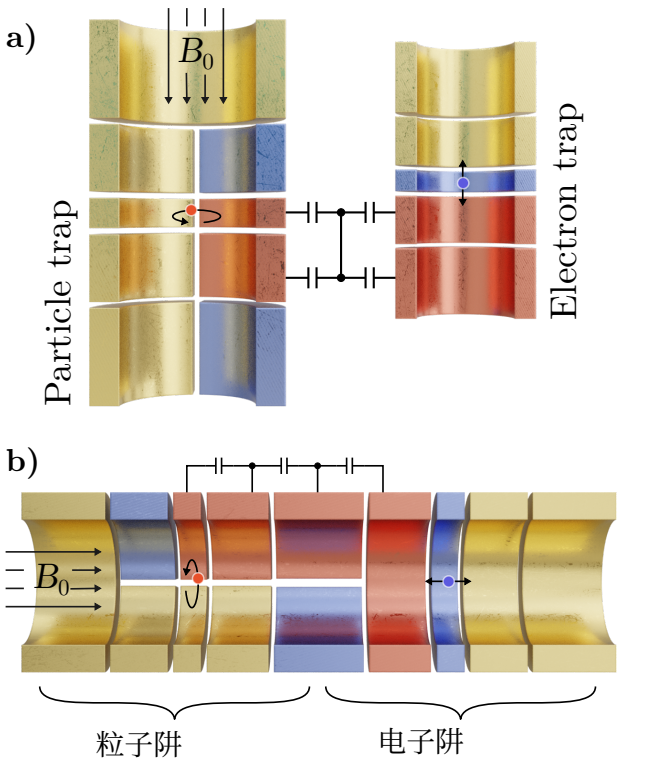


图 11. 两种通过像电荷实现阱间耦合的拓扑结构。图 a）展示了一种方案：电子阱与粒子阱在同一磁场中横向错开。多个拾取电极（红色）通过电容耦合，以减小每个阱的有效电极间距。蓝色电极与偏置电路特别隔离，使其在耦合频率下基本处于浮置状态，有助于降低电极寄生电容。图 b）展示了一种方案：两个阱同轴排列，并共用一个端盖电极。全电极与分裂电极组合后通过电容连接，从而有效耦合电子的轴向运动与目标粒子的修正回旋运动。

tional测量阱。磁体的均匀磁场区域足够大，可容纳偏移阱而不损害磁场均匀性。偏移电子阱将电子装载和毫米波注入与粒子阱以及任何可能同轴安装的测量阱解耦，从而减少干扰并简化实验配置。第二种方案采用两个阱的同轴对准，其中目标粒子和电子存储在同一电极堆叠的不同区域，并通过电容连接的电极段实现耦合。该方法可与常规彭宁阱实验中的堆叠阱无缝集成，且对径向空间的要求极小。这两种不同配置支持集成到多种彭宁阱架构中，以便在空间约束下最优地适应多样化的实验目标。

## V. 结论与展望

本工作提出了一种新方法，用于使约束在彭宁阱内的任意带电粒子达到超低温度。理论基础基于对该系统的量子力学描述而建立，其涵盖电子的修正回旋运动向圆柱形彭宁阱特定电磁场模式的辐射，以及不同运动模式之间由边带介导和像电流介导的耦合机制。对目标粒子时间演化的数值模拟给出$s$ 冷却时间常数为20至200 s，具体取决于实验参数。冷却时间主要受相对较弱的像电荷相互作用以及彭宁阱偏置电压电源涨落的限制。计算得到，多种高电荷态离子或（反）质子的修正回旋运动最终温度范围为1.3至4.0 mK。与最常用的电阻冷却技术相比——该技术在修正回旋运动中通常只能达到约1至500 K的温度——本方法为彭宁阱实验领域提供了一个有前景的机会。尽管近期利用激光冷却铍离子云实现协同冷却的进展追求的是在彭宁阱中达到超低温度这一相同目标 [25, 26], ，但使用电子而非铍离子、使用毫米波而非冷却激光的简便性带来了显著的实验优势。对这些互补方法的持续努力将有助于应对像电荷介导的协同冷却技术所固有的共同挑战，并为迈向彭宁阱中的毫开尔文温区铺平道路。

T所提出技术的首次实现　　特性

目前正在专用的 ELCOTRAP实验中分阶段逐步开展。第一阶段成功展示了系统的初步运行，包括低温循环、自制超稳定电压源、阱内离子装载和单粒子探测。第二阶段侧重于利用 197 吉赫的毫米波实现电子运动自由度的边带耦合。目前正在调试一套高度专业化的阱设计和毫米波传输路径，预计不久后将取得初步结果。第三阶段将通过在两个空间分离的阱之间建立像电荷耦合，集成完整的冷却链。最终这一步可将能量从目标粒子传递至充分冷却的电子云，最终使其达到目标超低温度。


## 致谢

我们感谢 Sven Sturm 提供宝贵意见和最初的想法，这些启发了本项目。我们也感谢他作为 LSYM实验 [56, 57], 的一部分，独立开展了关于正电子边带冷却的研究，为富有成效的讨论奠定了基础。本项目是马克斯·普朗克学会工作的一部分，并由其资助。此外，本项目还获得了德国研究联合会（DFG）项目资助，项目编号为 273811115——SFB 1225 ISOQUANT。本工作包含 J. Herkenhoff 博士论文的部分内容，该论文将提交至德国海德堡大学。


## 数据可用性

支持本文研究结果的数据已公开提供 [58]。


[1] K. Blaum、S. Eliseev 和 S. Sturm, 《利用彭宁阱中的高电荷态离子检验基础物理的展望》, Quantum Science and Technology **6**, 014002（2020）。[2] K. Blaum、H. Kracke、S. Kreim、A. Mooser、C. Mrozik、W. Quint、C. C. Rodegheri、B. Schabinger、S. Sturm、S. Ulmer、A. Wagner、J. Walz 和 G. Werth, 《彭宁阱中简单系统的 G 因子实验》, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **42**, 154021（2009年）。[3] G. Gabrielse, 《反质子质量测量》, International Journal of Mass Spectrometry **251**, 273（2006）。[4] C. Smorra、K. Blaum、L. Bojtar、M. Borchert、K. Franke、T. Higuchi、N. Leefer、H. Nagahama、Y. Matsuda、A. Mooser、M. Niemann、C. Ospelkaus、W. Quint、G. Schneider、S. Sellner、T. Tanaka、S. Van Gorp、J. Walz、Y. Yamazaki 和 S. Ulmer, 《BASE——重子—反重子对称性实验》, The European Physical Journal Special Topics **224**, 3055（2015）。

[5] M. G. Kozlov, M. S. Safronova, J. R. Crespo L´opez- Urrutia, 和 P. O. Schmidt, 《高电荷态离子：光学钟及其在基础物理中的应用》, Reviews of Modern Physics **90**, 045005 (2018)。[6] K. Kromer, C. Lyu, M. Door, P. Filianin, Z. Harman, J. Herkenhoff, P. Indelicato, C. H. Keitel, D. Lange, Y. N. Novikov, C. Schweiger, S. Eliseev, 和 K. Blaum, 《通过彭宁阱质谱法观测高电荷铅离子的低能亚稳电子态》, 《物理评论快报》**131**, 223002 (2023)。[7] J. C. Berengut, D. Budker, C. Delaunay, V. V. Flam- baum, C. Frugiuele, E. Fuchs, C. Grojean, R. Harnik, R. Ozeri, G. Perez, 和 Y. Soreq, 《利用同位素位移光谱学探测新的长程相互作用》, 《物理评论快报》**120**, 091801 (2018)。[8] A. Wilzewski, L. J. Spieß, M. Wehrheim, S. Chen, S. A. King, P. Micke, M. Filzinger, M. R. Steinel, N. Huntemann, E. Benkler, P. O. Schmidt, L. I. Huber, J. Flan- nery, R. Matt, M. Stadler, R. Oswald, F. Schmid,

D. Kienzler, J. Home, D. P. L. A. Craik, M. Door, S. Eliseev, P. Filianin, J. Herkenhoff, K. Kromer, K. Blaum, V. A. Yerokhin, I. A. Valuev, N. S. Oreshkina, C. Lyu, S. Banerjee, C. H. Keitel, Z. Harman, J. C. Berengut, A. Viatkina, J. Gilles, A. Surzhykov, M. K. Rosner, J. R. Crespo L´opez-Urrutia, J. Richter, A. Mariotti, 和 E. Fuchs, 《非线性钙元素金图对新玻色子和核性质的约束》, 《物理评论快报》**134**, 233002 (2025)。[9] L. Gastaldo, K. Blaum, K. Chrysalidis, T. D. Goodacre, A. Domula, M. Door, H. Dorrer, C. E. D¨ullmann, K. Eberhardt, S. Eliseev, C. Enss, A. Faessler, P. Fil- ianin, A. Fleischmann, D. Fonnesu, L. Gamer, R. Haas, C. Hassel, D. Hengstler, J. Jochum, K. Johnston, U. Keb- schull, S. Kempf, T. Kieck, U. K¨oster, S. Lahiri, M. Maiti, F. Mantegazzini, B. Marsh, P. Neroutsos, Y. N. Novikov, P. C. O. Ranitzsch, S. Rothe, A. Rischka, A. Saenz, O. Sander, F. Schneider, S. Scholl, R. X. Sch¨ussler, C. Schweiger, F. Simkovic, T. Stora, Z. Sz¨ucs, A. T¨urler, M. Veinhard, M. Weber, M. Wegner, K. Wendt, 和 K. Zuber, 《Ho电子俘获实验ECHo》, 《欧洲物理学杂志专题》**226**, 1623 (2017)。[10] H.-J. Kluge 和 Y. Novikov, 《中微子质量测定的新希望? （GSI的一次头脑风暴会议，达姆施塔特）》, 《核物理新闻》**17**, 36 2007( )。[11] S. A. Eliseev, Y. N. Novikov, 和 K. Blaum, 《利用高精度彭宁阱质谱法搜寻无中微子双电子俘获的共振增强》, 《物理学杂志G：核与粒子物理》**39**, 124003 (2012)。[12] M. Door, C.-H. Yeh, M. Heinz, F. Kirk, C. Lyu, T. Miyagi, J. C. Berengut, J. Biero´n, K. Blaum, L. S. Dreissen, S. Eliseev, P. Filianin, M. Filzinger, E. Fuchs, H. A. F¨urst, G. Gaigalas, Z. Harman, J. Herkenhoff, N. Huntemann, C. H. Keitel, K. Kromer, D. Lange, A. Rischka, C. Schweiger, A. Schwenk, N. Shimizu, 和 T. E. Mehlst¨aubler, 《利用镱同位素位移探测新玻色子和核结构》, 《物理评论快报》**134**, 063002 (2025)。[13] J. Ketter, T. Eronen, M. H¨ocker, S. Streubel, 和 K. Blaum, 《静态圆柱对称电磁缺陷引起的彭宁阱频移的一阶微扰计算》, International Journal of Mass Spectrometry **358**, 1 (2014)。[14] J. Ketter, T. Eronen, M. H¨ocker, M. Schuh, S. Streubel, 和 K. Blaum, 《理想彭宁阱中相对论频移的经典计算》, International Journal of Mass Spectrometry **361**, 34 (2014)。[15] F. Heiße, S. Rau, F. K¨ohler-Langes, W. Quint, G. Werth, S. Sturm, 和 K. Blaum, 《用于轻离子的高精度质谱仪》, 《物理评论A》**100**, 022518 (2019)。[16] S. Sasidharan, O. Bezrodnova, S. Rau, W. Quint, S. Sturm, 和 K. Blaum, 《氦-4的彭宁阱质量测量》, 《物理评论快报》**131**, 093201 (2023)。[17] S. Ulmer, C. Smorra, A. Mooser, K. Franke, H. Nagahama, G. Schneider, T. Higuchi, S. Van Gorp, K. Blaum, Y. Matsuda, W. Quint, J. Walz, 和 Y. Yamazaki, 《反质子与质子的荷质比高精度比较》, 《自然》**524**, 196 (2015)。[18] C. Smorra, S. Sellner, M. J. Borchert, J. A. Harring- ton, T. Higuchi, H. Nagahama, T. Tanaka, A. Mooser, G. Schneider, M. Bohman, K. Blaum, Y. Matsuda, C. Ospelkaus, W. Quint, J. Walz, Y. Yamazaki, 和 S. Ulmer, 《反质子磁矩的十亿分之一精度测量》, 《自然》**550**, 371 (2017)。[19] A. Schneider, A. Mooser, A. Rischka, K. Blaum, S. Ulmer, 和 J. Walz, 《用于高精度测量$^3$He核磁矩的新型彭宁阱设计》, 《物理学年鉴》**531**, 1800485 (2019)。[20] M. Vogel, 《电子的反常磁矩》, 《当代物理学》**50**, 437 (2009)。[21] S. Sturm, K. Blaum, I. Arapoglou, A. Egl, M. Hocker, S. Kraemer, T. Sailer, B. Tu, A. Weigel, R. Wolf, 和 J. C. López-Urrutia, 《ALPHATRAP实验》, 《欧洲物理学杂志专题》(2019)。[22] R. S. Van Dyck, P. B. Schwinberg, 和 H. G. Dehmelt, 《锗离子谱中的电子磁矩》, 载于*Atomic Physics 7*, D. Kleppner 和 F. M. Pipkin 编（施普林格美国，波士顿，MA，1981年），第340–372页。[23] A. Egl, I. Arapoglou, M. Hocker, K. König, T. Ratajczyk, T. Sailer, B. Tu, A. Weigel, K. Blaum, W. Nörtershäuser, 和 S. Sturm, 《连续斯特恩–盖拉赫效应用于彭宁阱中 Ar 13 +40 精细结构的激光光谱学》, 《物理评论快报》**123**, 123001 (2019)。[24] D. J. Heinzen 和 D. J. Wineland, 《激光冷却离子的射频振荡量子极限冷却与探测》, 《物理评论A》**42**, 2977 (1990)。[25] M. Bohman, V. Grunhofer, C. Smorra, M. Wiesinger, C. Will, M. J. Borchert, J. A. Devlin, S. Erlewein, M. Fleck, S. Gavranovic, J. Harrington, B. Latacz, A. Mooser, D. Popper, E. Wursten, K. Blaum, Y. Matsuda, C. Ospelkaus, W. Quint, J. Walz, 和 S. Ulmer, 《由LC电路介导的囚禁质子协同冷却》, 《自然》**596**, 514 (2021)。[26] B. Tu, F. Hahne, I. Arapoglou, A. Egl, F. Heiße, M. Hocker, C. König, J. Morgner, T. Sailer, A. Weigel, R. Wolf, 和 S. Sturm, 《用于协同激光冷却的槽路辅助耦合方法》, 《先进量子技术》**4**, 2100029 (2021)。[27] J. Morgner, B. Tu, C. M. König, T. Sailer, F. Heiße, H. Bekker, B. Sikora, C. Lyu, V. A. Yerokhin, Z. Harman, J. R. Crespo López-Urrutia, C. H. Keitel, S. Sturm, 和 K. Blaum, 《利用类氢锡对量子电动力学进行严格检验》, 《自然》**622**, 53 (2023)。[28] J. Larmor, 《LXIII. 论磁场对光谱的影响理论及运动离子的辐射》, 《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》**44**, 503 (1897年)。[29] E. A. Cornell, R. M. Weisskoff, K. R. Boyce, 和 D. E. Pritchard, 《彭宁阱中的模式耦合：π脉冲与经典避免交叉》, 《物理评论A》**41**, 312 1990( )。[30] Marlan O. Scully 和 M. S. Zubairy, *Quantum Optics*（剑桥大学出版社，剑桥，1997年）。[31] D. J. Griffiths, 《电动力学导论》, https://www.cambridge.org/highereducation/books/intro 到电动力学/3AB220820DBB628E5A43D52C4B01 (2017年)。[32] L. S. Brown 和 G. Gabrielse, Geonium 理论：彭宁阱中单个电子或离子的物理学, 《Reviews of Modern Physics》**58**, 233（1986）。[33] M. Orszag, *Quantum Optics*（Springer Science & Business Media, 2000）。

[34]K. Kakazu 和 Y. S. Kim，《圆柱形腔中的场量子化与自发辐射》，《理论物理进展》**96**，883（1996）。[35] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，*The Theory of Open Quantum Systems*（牛津大学出版社，牛津，2007）。[36] E. Fermi，*Nuclear Physics: A Course Given by Enrico Fermi at the University of Chicago*（芝加哥大学出版社，1950）。[37] B. Y.-K. Hu，利用格林互易定理求解边值静电学问题，《American Journal of Physics》**69**，1280（2001）。[38] C. Will、M. Bohman、T. Driscoll、M. Wiesinger、F. Abbass、M. J. Borchert、J. A. Devlin、S. Erlewein、M. Fleck、B. Latacz、R. Moller、A. Mooser、D. Popper、E. Wursten、K. Blaum、Y. Matsuda、C. Ospelkaus、W. Quint、J. Walz、C. Smorra 和 S. Ulmer，通过像电流耦合的分别俘获离子的协同冷却方案，《New Journal of Physics》**24**，033021（2022）。[39] D. H. E. Dubin，冷椭球形非中性等离子体中的静电流体模理论，《物理评论快报》**66**，2076（1991）。[40] J. J. Bollinger、D. J. Wineland 和 D. H. E. Dubin，非中性离子等离子体与晶体、激光冷却及原子钟，《等离子体物理》**1**，1403（1994）。[41] T. M. O'Neil 和 P. G. Hjorth，强磁化纯电子等离子体的碰撞动力学，《流体物理》**28**，3241（1985）。[42] C. S. Weimer、J. J. Bollinger、F. L. Moore 和 D. J. Wineland，作为彭宁阱实验诊断手段的静电模，《物理评论A》**49**，3842（1994）。[43] D. H. Dubin 和 T. M. O'neil，俘获的非中性等离子体、液体和晶体（热平衡态），《Reviews of Modern Physics》**71**，87（1999）。[44] J. H. Malmberg 和 C. F. Driscoll，纯电子等离子体的长期约束，《物理评论快报》**44**，654（1980）。[45] J. R. Danielson 和 C. M. Surko，单组分等离子体的转矩平衡高密度稳态，《物理评论快报》**94**，035001（2005）。[46] X.-P. Huang、J. J. Bollinger、T. B. Mitchell、W. M. Itano 和 D. H. E. Dubin，彭宁阱中强耦合离子等离子体整体旋转的精确控制，《等离子体物理》**5**，1656（1998）。[47] M. B. Plenio 和 P. L. Knight，量子光学中耗散动力学的量子跃迁方法，《Revie ws of Modern Physics》**70**，101（1998）。

[48]J. R. Johansson、P. D. Nation 和 F. Nori，《QuTiP 2：用于开放量子系统动力学的 Python 框架》，Computer Physics Communications **184**，1234（2013）。[49] J. Ekin，*Experimental Techniques for Low-Temperature Measurements: Cryostat Design, Material Properties and Superconductor Critical-Current Testing*（牛津大学出版社，牛津，2006）。[50] J. Alonso、K. Blaum、S. Djekic、H.-J. Kluge、W. Quint、B. Schabinger、S. Stahl、J. Verd´u、M. Vogel 和 G. Werth，《一种用于阱内产生高电荷态离子的微型电子束离子源》，Review of Scientific Instruments **77**，03A901（2006）。[51] S. Sellner、M. Besirli、M. Bohman、M. J. Borchert、J. Har- rington、T. Higuchi、A. Mooser、H. Nagahama、G. Schnei- der、C. Smorra、T. Tanaka、K. Blaum、Y. Matsuda、C. Ospelkaus、W. Quint、J. Walz、Y. Yamazaki 和 S. Ulmer，《直接测得的反质子寿命的改进上限》，New Journal of Physics **19**，083023（2017）。[52]D. J. Wineland 和 H. G. Dehmelt，《储存离子量热计原理》，Journal of Applied Physics **46**，919（1975）。[53] C. B¨ohm、S. Sturm、A. Rischka、A. D¨orr、S. Eliseev、M. Goncharov、M. H¨ocker、J. Ketter、F. K¨ohler、D. Marschall、J. Martin、D. Obieglo、J. Repp、C. Roux、R. X. Sch¨ussler、M. Steigleder、S. Streubel、T. Wag- ner、J. Westermann、V. Wieder、R. Zirpel、J. Melcher 和 K. Blaum，《用于精密彭宁阱实验的超稳定电压源》，Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment **828**，125（2016）。[54]导电聚醚醚酮（PEEK）—TECAPEEK ELS 纳米黑| Ensinger，https://www.ensingerplastics.com/en/shapes/peek-tecapeek-els-nano-black。[55] G. Gabrielse 和 F. C. Mackintosh，《具有正交化非谐性补偿的圆柱形彭宁阱》，International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes **57**，1（1984）。[56] P. Holzenkamp，*Design of a Microwave Cavity Penning Trap for the Lsym Experiment*，博士论文，Ruprecht-Karls-Universit¨at Heidelberg（2025）。[57] F. Raab，*Designing and Characterization of a Narrow Microwave Notch Filter for the LSYM Experiment in the 100 GHz Regime*，博士论文，Ruprecht-Karls-Universit¨at Heidelberg（2024）。[58] J. Herkenhoff、K. Blaum 和 J. Notter，《数据来自：利用电子回旋辐射对彭宁阱中的带电粒子进行协同冷却》（2025）。