arXiv:2602.12959v1 [cs.CC] 13 Feb 2026

带依赖关系的系统发育多样性核化与参数化的界限 *

NielsHoltgrefe 代尔夫特理工大学，代尔夫特，荷兰**JannikSchestag** 代尔夫特理工大学，代尔夫特，荷兰**Norbert Zeh** 达尔豪斯大学，哈利法克斯，加拿大

摘要

在最大化系统发育多样性问题中，给定一棵表示物种遗传亲缘关系的系统发育树，我们需要选出一个系统发育多样性最大的物种子集，通过保护工作使其免于灭绝，同时受预算约束限制，只能拯救 k 个物种。然而，这忽略了这样一点：如果不同时保护至少一部分捕食性物种赖以为食的猎物，保护捕食性物种便毫无意义。因此，在带依赖关系的系统发育多样性优化（ε-PDD）问题中，我们还给定一个表示物种间捕食者—猎物关系的食物网。目标是拯救一组系统发育多样性最大的 k 个物种，并确保每个获救物种至少有一种猎物也获救。即使系统发育树是星形图，该问题仍是NP困难的。

α-PDD 问题对 ε-PDD 作了调整，要求每个被保留物种的猎物中，至少有一定比例 α 也被保留。本文研究 α-PDD 的参数化复杂性。我们证明，该问题是 W[1]-难的；以解的大小 k、多样性阈值 D 或它们的补数为参数时，该问题属于 XP。以食物网的顶点覆盖数为参数时，α-PDD 是固定参数可解的（FPT）。衡量一个固定参数可解问题计算难度的关键指标，是能够获得的最小核的大小。我们证明，以到团的距离为参数时，1-PDD 存在线性核。本文的主要贡献是证明：即使系统发育树是星形图，α-PDD 以顶点覆盖数加多样性阈值 D 为参数时，也不存在多项式核。这也意味着，以食物网的一系列结构参数为参数时，α-PDD 同样不存在多项式核，例如到簇的距离、树宽、路宽、反馈顶点集等。

2012年 ACM学科分类 应用计算 → 计算生物学；计算理论 → 固定参数可解性

关键词与短语 系统发育多样性；食物网；结构参数化；算法下界

资助 *Niels Holtgrefe*：由荷兰研究理事会（NWO）资助，项目编号 OCENW.M.21.306。*Jannik Schestag*：由 NWO 资助，项目编号 OCENW.GROOT.2019.015，“面向机器学习及与机器学习协同的优化（OPTIMAL）”。
Norbert Zeh：研究得到加拿大自然科学与工程研究理事会发现基金资助，项目编号 RGPIN-2025-06235。

1 引言

人类正经历着生物学家日益称之为第六次大灭绝 [1, 6],的时期，物种正以前所未有的速度消失。除了生物多样性遭受的惨痛且直接的损失外，整个谱系的衰退还会损害生态稳定性以及生命本身的进化

* 本文已获接收，将于2026年4月在巴西弗洛里亚诺波利斯举行的第17届拉丁美洲理论计算机科学研讨会（LATIN 2026）上作口头报告。

潜力 [5]。鉴于用于保护所有物种的资源不足，自然保护工作者不得不确定优先次序：应保护哪些物种，才能最大限度地保全遗传与生态价值？系统发育多样性是进行此类优先排序的重要框架，系统发育多样性（PD） [10] 已成为生物多样性评估中的核心概念，例如，它是伦敦动物学会“EDGE of existence”计划的基础 [12], ，并影响了有关进化独特性和生态系统韧性的政策讨论 [34]。

给定所有物种的系统发育“生命之树”，任意物种子集的系统发育多样性定义为：从树根到该子集中各物种的路径上所有边的总长度。预计系统发育多样性较高的物种子集能够保留广泛的功能性状和遗传性状 [11, 18]。

给定一棵系统发育树，可以通过简单的贪心策略 [10, 23, 31]选出一组使系统发育多样性最大的 k 物种。这种算法可处理性与生物学相关性的结合，推动了相关问题的推广，旨在更忠实地模拟现实世界中的生态和时间约束 [14, 16, 20, 24]。这些变体涉及诸多因素，例如不同的保护成本 [20, 24]、空间受限的栖息地 [3]，或网状演化事件的存在 [4, 15, 32, 33, 35]。

然而，物种并非孤立存在：它们的存续往往依赖于猎物、宿主或互利共生伙伴。因此，若不维持足够的猎物种群，保护捕食者便毫无意义 [25]。这一认识促成了带依赖关系的系统发育多样性优化（ε-PDD）问题的提出 [22], 。该问题在经典模型中加入了一个（有向）生态网络，用以表示例如食物网相互作用，并规定一组可行的受保护物种中，每个得到保护的捕食者都至少有一种猎物。

在一个 ε-PDD 的解中，如果每个捕食者只保留一个猎物，那么单个物种灭绝就可能引发一连串灭绝，波及所有生存传递性地依赖于该物种的物种。此外，并非所有猎物对捕食者生存的贡献都相同。加权食物网于 [21, 28, 36] 被引入，作为能够支持更稳健解的模型，使每个捕食者可保留多个猎物。这催生了加权版本的 ε-PDD [26]，其规定每个被保留的捕食者至少有一定比例的猎物也得到保留。

ε-PDD 是 NP困难的 [13, 30]。因此，从参数化复杂性理论的角度研究 ε-PDD 及其加权变体颇有意义。该理论为分析问题的哪些方面导致其计算困难性 [7, 9] ，以及如何针对许多问题开发高效算法、克服其经典意义上的难解性，提供了一个框架。

我们的贡献。

我们通过分析带有食物网的系统发育多样性最大化问题中参数化算法和核化的局限，扩展了 [26] 的工作。具体而言，我们引入 α-PDD，要求任何被保留捕食者的猎物中，至少有 α 比例也被保留。这推广了先前研究的 1-PDD 和 $1/2$-PDD 问题 [17, 26]（针对 $\alpha = 1$ 和针对 $\alpha = 1/2$），以及 ε-PDD [22] （针对趋近于零的 α ）。在第 4 节中，我们证明，即使食物网是有向二部图，1-PDD 相对于多样性阈值 D 及其补参数 D 都是 W[1]-困难的。在第 5 节的主要结果中,我们证明，除非 NP $\not\subseteq$ coNP/poly，否则以顶点覆盖数加上 D 为参数时，1-PDD 不存在多项式核。这也意味着，针对其他结构参数也不存在多项式核，包括树宽、到（余）簇的距离等。在第 3 节中，对于任意固定的 $\alpha \in (0, 1]$, ，我们给出了从 ε-PDD 和 1-PDD 到α-PDD 的归约，从而使第 4 节和第 5 节的困难性结果可以推广到

α-PDD，对于任意常数 $\alpha \in (0,1]$。作为对这些不存在性结果的补充，我们证明，以食物网到团的距离为参数时，1-PDD 存在线性核。

2 预备知识

2.1 定义

图。

我们采用 [8] 中的标准图论术语。若有向图 $G = (V, E)$ 的每个顶点都只有出边或只有入边，则称其为有向二部图。给定一个边权为正的有向无环图 ω，抑制度为 2 的顶点 v（其关联边为 uv 和 vw）时，用一条边 uw 替换 v、uv 和 vw，该边的权重为 $\omega(uv) + \omega(vw)$。

系统发育树与系统发育多样性。

一棵带有边权重函数 $\omega\colon E \to \mathbb{N}_{>0}$ 的有向树（V，E），如果满足以下条件，则称为一棵（系统发育）X-树$\mathcal{T} = (V, E, \omega)$：（i）存在唯一一个入度为 0 的顶点，即根 ρ；（ii）每个叶的入度为 1，出度为 0；（iii）叶与集合 X 中的分类单元（例如物种）一一对应地标记；（iv）其余顶点的入度为 1，出度至少为 2。如果树中每个非根顶点都是叶，则称其为星形图。

对于系统发育 X-树$\mathcal{T}$和集合 $S \subseteq X$，从 ρ 到 S 中各叶的路径上的边集记为 $E_{\mathcal{T}}(S)$。S 的系统发育多样性 $PD_{\mathcal{T}}(S)$ 定义为

$$PD_{\mathcal{T}}(S) := \sum_{e \in E_{\mathcal{T}}(S)} \omega(e). \tag{1}$$

对于任意边 $e \in \mathcal{T}$，令 off(e) 为满足以下条件的叶 x 的集合：e 属于从$\mathcal{T}$的根到 x 的路径。接着，*Some-A-* 和*All-A-contractions* 分别是通过从$\mathcal{T}$中移除所有满足 off(e) $\cap A \neq \emptyset$ 和 off(e) $\subseteq A$ 的边 $e \in \mathcal{T}$，将所有入度为 0 的顶点合并为一个，并压缩所有度为 2 的顶点而得到的 $(X \setminus A)$- 树。

食物网。

定义在分类单元集合 X 上的食物网 $\mathcal{F} = (X, E_{\mathcal{F}})$ 是一个有向无环图，并带有可选的边权重函数 $\gamma\colon E_{\mathcal{F}} \to (0,1]$。若 $xy \in E$，则分类单元 x 是分类单元 y 的猎物，而 y 是 x 的捕食者。x 的猎物集合和捕食者集合分别记为 $N^{<}_{\mathcal{F}}(x)$ 和 $N^{>}_{\mathcal{F}}(x)$。如果上下文已明确食物网，则省略下标。没有猎物的分类单元是源点。在$\mathcal{F}$ 中可以到达分类单元 $x \in X$ 的分类单元集合记为 $X_{\leq x}$，而 $X_{\geq x}$ 是在$\mathcal{F}$中可从 x 到达的分类单元集合。

对于任意 $\alpha \in (0,1]$，若分类单元集合 $A \subseteq X$ 满足 α-可行，则称其为 $|A \cap N^{<}(x)| \geq \alpha \cdot |N^{<}(x)|$，对所有 $x \in A$ 均成立。若对每个非源点 $x \in A$，$A \cap N^{<}(x)$ 均非空，则称分类单元集合 $A \subseteq X$ 为 ε-可行。如果$\mathcal{F}$具有边权重 γ，则若对每个非源点 $v \in A$，$\sum_{uv \in E_{\mathcal{F}}:\ u \in A} \gamma(uv) \geq 1$，称分类单元集合 A 为 γ- 可行。

带依赖关系的系统发育多样性。

我们研究的主要问题如下：

带 α-依赖关系的系统发育多样性优化（α-PDD）	
输入	：一个系统发育 X树$\mathcal{T}$、一个定义在 X上的食物网$\mathcal{F}$ 以及整数 k 和 D。
问题	：是否存在一个 α-可行集合 $S \subseteq X$，使得 $\lvert S\rvert \leq k$ 和 $PD_{\mathcal{T}}(S) \geq D$?

4 α-PDD 的核化与参数化复杂性

在 ε-PDD问题中，我们转而询问是否存在一个 ε-可行集。在 ε-PDDs与 α-PDDs中， ε-PDD和 α-PDD的输入将$\mathcal{T}$限制为星形图。

加权 PDD
输入：一棵系统发育 X-树 $\mathcal{T}$，一个加权 食物网 $\mathcal{F}$，定义在 X 上，边权函数为 γ，以及整数 k 和 D。**问题**：是否存在一个 γ-可行集 $S \subseteq X$，使得 $|S| \leq k$ 且 $PD_{\mathcal{T}}(S) \geq D$?

注意， ε-PDD 和 α-PDD 是加权 PDD 的特例，其中对每个 $uv \in E$， $\gamma(uv)$ 分别等于 1 和 $(\alpha \cdot \deg^{-}(v))^{-1}$。

参数化复杂性。

我们从参数化的角度研究 ε-PDD 和 α-PDD。判定问题与某个字母表 Σ 上的形式语言之间存在自然双射。参数化语言是子集 $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$。对于序对 $(\sigma, k) \in L$， k称为该序对的参数。若存在算法 A，对任意输入 $(\sigma, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$判定 $(\sigma, k) \in L$是否成立，且运行时间为 $f(k) \cdot p(|\sigma|)$，其中 $f(\cdot)$ 为某个可计算函数， $p(\cdot)$ 为某个多项式，则称该参数化语言是固定参数可解（固定参数可解）。若存在算法 A，对任意输入 $(\sigma, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$判定 $(\sigma, k) \in L$是否成立，且运行时间至多为 $|\sigma|^{p(k)}$，其中 $p(\cdot)$ 为某个多项式，则称该参数化语言是分片多项式（XP）。每个固定参数可解的问题也都属于 XP。对于 $h \geq 1$， $W[h]$-难问题不太可能是固定参数可解的。关于参数化复杂性的更详细背景，参见 [7, 9] 。

从参数化语言 $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 到参数化语言 $Q \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 的压缩是一种算法 A：给定一对 $(\sigma, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$，构造另一对 $(\tau, \ell) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$，使得 $\ell \leq k$, $|\tau| \leq f(k)$，其中 $f(\cdot)$ 是某个可计算函数，并且 $(\sigma, k) \in P$当且仅当 $(\tau, \ell) \in Q$。此外，$\mathcal{A}$必须在关于 $|\sigma|$的多项式时间内完成这一构造。若 $P = Q$，则称$\mathcal{A}$ 为核化。若 $f(\cdot)$ 是多项式，则称$\mathcal{A}$ 为多项式压缩或核。

我们考虑的主要参数包括解的大小 k、多样性阈值 D、它们的补参数——物种损失 $k := |X| - k$ 和可接受的多样性损失 $D := PD_{\mathcal{T}}(X) - D$——、$F$的顶点覆盖数vc（即包含至少一条边的一个端点的最小顶点子集的大小），以及$\mathcal{F}$ 的到团的距离 d（即删除多少个顶点才能使$\mathcal{F}$ 成为一个团的最小数量）。

OR-交叉组合。

交叉组合 [7, 第 15] 章是证明某个参数化问题 Π 不具有多项式核的标准框架。某个字母表 Σ^* 上的多项式等价关系是一种等价关系 $\sim$，满足对于多项式 $p(\cdot)$和 $q(\cdot)$,

(i) $\sim$ 将 $\Sigma^{\leq n}$ 划分为 $p(n)$个等价类，对每个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$均如此；(ii) 判定 $\sigma_1 \sim \sigma_2$是否成立需要 $q(|\sigma_1| + |\sigma_2|)$时间，其中任意 σ_1， $\sigma_2 \in \Sigma^*$。如果存在某个定义在 Σ^* 上的多项式等价关系 $\sim$ 和一个算法$\mathcal{A}$，使得对于 Π_1中任意一组在 $\sim$下等价的实例$\mathcal{I}_1$，……，$\mathcal{I}_t$，算法能在$(\sum_{i=1}^{t} |\sigma_i|)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内构造 Π_2的一个输入$(\mathcal{I}\ k)$，使得判定问题 Π_1 （*OR*-）交叉组合到参数化判定问题 Π_2，则称该判定问题 Π_1 可（OR-）交叉组合到参数化判定问题 Π_2 。

(i) $k \leq p(\max\{|\sigma_1|, \ldots\ldots, |\sigma_t|\} + \log\ t)$，对于某个多项式 $p(\cdot)$，并且 (ii) $(\mathcal{I}\ k)$ 是 yes 的一个实例，当且仅当 $\mathcal{I}_i$ 是 yes 的一个实例，其中 $i \in [t]$ 为某个值。

▶ **定理 2.1** ([7，定理 15。9])。 如果某个 NP-困难问题 Π_1 交叉组合为一个参数化问题 Π_2，那么 Π_2 在假设NP $\not\subseteq$ 不包含于 coNP/poly的情况下，不存在多项式规模的核化。

2.2 相关工作

Moulton 等人 [22]定义了 ε-PDD，并在对输入作出各种假设的情况下提出了高效算法。Faller 等人 [13],证明了 ε-PDD 为 NP困难 [30] ，即使食物网是有向树也是如此。他们还证明，如果食物网是二分图，则 ε-PDDs 是 NP困难；如果食物网是有向树，则可在多项式时间内求解 [13]。当以解的大小加上系统发育树的高度作为参数时， ε-PDD 是固定参数可解；当以食物网的树宽作为参数时， ε-PDDs 是固定参数可解 [19]。

在 [26]， ε-PDD 得到了扩展，要求物种依赖于更大比例的猎物。对于食物网的许多结构参数，1-PDDs 是固定参数可解，而1/2-PDDs存在 XP 算法 [26]。在 [17], 中，人们将存活性与系统发育树上的系统发育多样性相结合，并给出了完整的复杂性二分。

2.3 初步观察

我们以两个观察结束本节。

▶ **观察 2.2**。 给定一个食物网 F 和一个集合 $S \subseteq X$，当且仅当对于每个 $x \in S$ 都有 $X_{\leq x} \subseteq S$ 时， S 在 F 中是1-可行的。

ε-PDD 在食物网为外向树的实例上仍然是 NP困难的——更准确地说，是在蜘蛛图上 [13]。已有研究指出，可以移除中心顶点，仅留下有向路径 [19]。结合 引理 3.2 （见 第 3 节），可得到以下结论。

▶ **观察 2.3**。 *α-PDD，即使食物网的有向无环割宽为 1，对于任意 $\alpha \in (0, 1]$，也仍然是* NP困难的。

因此，由于有向无环割宽是扫描宽度的上界，我们无法期望找到一种关于食物网扫描宽度 α-PDD的高效算法 [2]。

3 从1-PDDs 和 ε-PDDs 到 α-PDDs的归约

在本节中，对于任意固定的 1-PDDs 和 ε-PDDs ，我们给出α-PDDs的多项式时间归约，其中 $\alpha \in (0, 1]$。我们将在第 4 节和第 5 节中使用这些归约，将1-PDDs 和 ε-PDDs 的困难性结果推广到 α-PDDs。

▶ **引理 3.1**。 *任取 $\alpha \in (0, 1]$。给定一个 1-PDDs实例 $I = (T, F = (X, E_{\mathcal{F}}), k, D)$，其中 $|X| \geq k$，我们可以在时间 $O((n^2 + k)/\alpha)$内，计算出一个$' = (T', F' = (X', E_{\mathcal{F}'}), k', D')$ 的 α-PDDs 等价实例 $I(T', F' = (X', E_{\mathcal{F}'})), k', D')$ ，使得*

(i) $k' = k$ 和 $D' = D$, *(ii)* $X \subseteq X'$ 和 $F'[X] = F$, *(iii)* $PD_{\mathcal{T}}(\{x\}) = PD_{\mathcal{T}'}(\{x\})$，对每个 $x \in X$, *(iv)* $PD_{\mathcal{T}'}(\{x'\}) = 1$，对每个 $x' \in X' \setminus X$，以及 *(v)* F 中的源点也是 F' 中的源点。此外，我们可以选择以下属性之一由 F' 满足：

(a) 如果 F 是有向二部图，那么 F' 也是有向二部图。*(b)* 至多添加 $2\alpha^{-1}\cdot(k+\max_{x\in X}|N^{\leq}_{F}(x)|)$ 个新分类单元；如果 F 是二分图，那么 F' 也是二分图。

证明。我们定义两个实例 $\mathrm{I}_a=(\mathrm{T}_a,\mathrm{F}_a,k,D)$ 和 $\mathrm{I}_b=(\mathrm{T}_b,\mathrm{F}_b,k,D)$，它们分别满足条件 (i)–(v) 以及条件 (a) 或条件 (b)。当且仅当 I 是 1-PDDs 的是实例时，I_b 才是 α-PDDs 的是实例。对于 I_a，结论也成立，但要求 F 是有向二部图。

为了从 $\mathcal{I}$ 构造 $\mathcal{I}_a$，我们为每个顶点 $x\in X$ 添加一个由 $A_x:=\{y_1,\ldots,y_{a_x}\}$ 组成的集合，其中包含 $:()\cdot|N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)|\rfloor$ 个猎物；并在 $\mathcal{T}$ 中将每个节点 $y_i\in A_x$ 设为 ρ 的子节点，且满足 $\omega(\rho y_i)=1$。

为了从 $\mathcal{I}$ 构造 $\mathcal{I}_b$，我们添加两个集合 A_1 和 A_2，每个集合含有 $\lfloor\max_{x\in X}|N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)|\cdot\alpha^{-1}\rfloor$ 个分类单元；再添加两个集合 B_1 和 B_2，每个集合含有 $\lceil k\cdot\alpha^{-1}\rceil$ 个分类单元；并向 $\mathcal{F}$ 添加一条边 ba，其中 $i\in\{1,2\}$、$b\in B_i$ 和 $a\in A_i$。所有新分类单元 y 均作为根 ρ 的子节点，以 $\omega(\rho y)=1$ 的方式添加到 $\mathcal{T}$ 中。令 $X_1\cup X_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个二部划分。对于每个 $i\in\{1,2\}$ 和每个 $x\in X_i$，从 A_i 中任意选取 a_x 个分类单元作为 x 的猎物。

I_a 和 I_b 满足条件 (i)–(v)，I_a 满足条件 (a)，I_b 满足条件 (b)，且两个实例均可在 $O((n^2+k)/\alpha)$ 时间内构造。我们需要证明：I 是 1-PDDs 的一个是实例，当且仅当 I_b 是 α-PDDs的一个是实例；并且当 F 为有向二部时，对 I_a也同样成立。

首先，假设 S 是 I 上 1-PDDs 的一个解。那么 $PD_{\mathcal{T}_a}(S)=PD_{\mathcal{T}_b}(S)=PD_{\mathcal{T}}(S)\geq D$ 和 $|S|\leq k$。因此，要证明 S 是 I_a 和 I_b上 α-PDDs 的一个解，只需证明 S 在 F_a 和 F_b中是 α-可行的。为此，注意到对所有 $x\in S$，都有 $|S\cap N^{\leq}_{\mathcal{F}_a}(x)|=|S\cap N^{<}_{\mathrm{F}_b}(x)|=|S\cap N^{<}_{\mathrm{F}}(x)|=|N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)|$，因为 S在 F 中是 1-可行的。然而，$|N^{<}_{\mathrm{F}_a}(x)|=|N^{<}_{\mathrm{F}_b}(x)|=a_x+|N^{<}_{\mathrm{F}}(x)|\leq|N^{<}_{\mathrm{F}}(x)|/\alpha$。因此，对所有 $x\in S$，都有 $|S\cap N^{\leq}_{\mathcal{F}_a}(x)|=|S\cap N^{\leq}_{\mathcal{F}_b}(x)|\geq\alpha|N^{\leq}_{\mathcal{F}_a}(x)|=\alpha|N^{<}_{\mathrm{F}_b}(x)|$，也就是说，$S$在 I_a和 I_b中均为 α-可行的。

接下来，假设 S 是 I_b 上 α-PDDs 的一个解。注意，在 A_i 中保存任意一个顶点，都至少需要在 B_i 中保存 k 个顶点，对任意 $i\in\{1,2\}$ 均如此。因此，$S\cap(A_1\cup A_2)=\emptyset$。由于对所有 $x\in X$，$N^{\leq}_{\mathcal{F}_b}(x)\cap(B_1\cup B_2)=\emptyset$，这意味着对所有 $x\in X$，$N^{<}_{\mathrm{F}_b}(x)\cap S\subseteq X$。特别地，对所有 $x\in X$，$N^{\leq}_{\mathcal{F}_b}(x)\cap S=N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)\cap S$。因此，对所有 $x\in X\cap S$，我们有$|N^{<}_{\mathrm{F}}(x)\cap S|=|N^{<}_{\mathrm{F}_b}(x)\cap S|\geq\alpha|N^{<}_{\mathrm{F}_b}(x)|>|N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)|-1$，也就是说，$X\cap S$ 在 F 中是 1-可行的。任何满足以下条件的子集 $Y\subseteq X$：F 中与 Y 相 incident 的每条边，其尾端都在 Y 中，显然都是 1-可行的。我们称这样的集合为 F 中的源集。因此，若我们选取集合 $Y\subseteq X$，使得 $S':=(X\cap S)\cup Y$ 的大小为 $|S'|=k$，那么 S' 是两个 1-可行集的并集，因此也为 1-可行集。此外，由于每个顶点 $y\in S\setminus X$ 都满足 $\omega(\rho y)=1$，且对所有 $x\in X$，$\omega(\rho x)\geq1$，我们有$PD_{\mathcal{T}}(S')\geq PD_{\mathcal{T}_b}(S)\geq D$。这表明 I 是 1-PDDs 的一个是实例。

最后，假设 S 是 I_a 上 α-PDDs 的一个解，且 F 是有向二部图。那么，与上一段一样，对于每个顶点 $x\in X\cap S$，$|N^{<}_{\mathrm{F}_a}(x)\cap S|>|N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)|-1$。因此，集合 $S'':=(X\cap S)\cup\bigcup_{x\in X\cap S}N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)$ 是 F 中大小为 $|S''|\leq|S|$的 1-可行集。我们再次可以在 F 中构造一个大小为 $|S'|=k$ 的 1-可行集 S'，方法是定义 $S':=S''\cup Y$，其中 Y 是 F 中满足 $|S''\cup Y|=k$ 的一个源集。与上一段一样，这保证了 $|S'|\geq|S|$，因此 $PD_{\mathcal{T}}(S')\geq PD_{\mathcal{T}_a}(S)\geq D$，因为每个顶点 $y\in S\setminus X$ 都满足 $\omega(\rho y)=1$，且对所有 $x\in X$，$\omega(\rho x)\geq1$。这表明 I 是 1-PDDs 的是实例。◀

在引理 3.1中，我们确保所得实例的解的大小 k 和多样性阈值 D 保持不变，但 k 和 D 增加了。下面从 ε-PDDs 进行的归约确保 D 保持不变。

▶**引理 3.2**。任取 $\alpha \in (0, 1)$。给定一个 ε-*PDDs* 实例 $I = (T, F = (X, E_{\mathcal{F}}) k, D)$，在 $O(n^2 \cdot \alpha/(1-\alpha))$ 时间内，我们可以计算出一个等价实例 $I' = (T', F' = (X', E_{\mathcal{F}'})) k', D')$，它是 α-*PDDs*，满足

(i) $D' := PD_{\mathcal{T}'}(X') - D' = D$, *(ii)* $X \subseteq X'$ 和 $F'[X] = F$, *(iii)* $PD_{\mathcal{T}}(\{x\}) = PD_{\mathcal{T}'}(\{x\})$，对每个 $x \in X$，*(iv)* $PD_{\mathcal{T}'}(\{x'\}) = 2\max_{x \in X} PD_{\mathcal{T}}(\{x\})$，对每个 $x' \in X' \setminus X$，*(v)* F 中的源点也是 F' 中的源点，*(vi)* 分类单元 $x \in X' \setminus X$ 是 F' 中的源点，并且 *(vii)* 若 F 是有向二部图，则 F' 也是有向二部图。

证明。为构造 I′，我们针对每个 $x \in X$，将一个集合 $A_x := \{y_1, \ldots, y_{a_x}\}$ 中的 $a_x := \lceil |N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)| \cdot \alpha/(1-\alpha) \rceil - 1$ 个分类单元添加为 x 的猎物。这样可以确保，除非 x 是 F 的源点，否则有 $a_x < \alpha |N^{\leq}_{\mathcal{F}'}(x)| \leq a_x + 1$。我们通过将每个 $y_i \in A_x$ 设为 ρ 的子节点，并定义 $\omega(\rho y_i) = 2m$，从 T 得到 T′，其中 $m := \max_{x \in X} PD_{\mathcal{T}}(\{x\})$。令 $A := \sum_{x \in X} a_x$, $k' := k + A$，且 $D' := 2D + 2m \cdot A$。这就定义了一个 α-PDDs 的实例 $I' := (T', F', k', D')$。

$\mathcal{I}'$ 满足条件 (i)–(vii)，且$\mathcal{I}'$ 可以在$\mathcal{O}(n^2 \cdot \alpha/(1-\alpha))$ 时间内构造——对于任意常数 α，这就是$\mathcal{O}(n^2)$。接下来需要证明：$\mathcal{I}$ 是ε-PDDs 的一个是实例，当且仅当$\mathcal{I}'$ 是 α-PDDs的一个是实例。

首先，假设 S 是$\mathcal{I}$上 ε-PDDs 的一个解。然后，我们定义 $S' := S \cup \bigcup_{x \in X} A_x$。这保证了$PD_{\mathcal{T}'}(S') = PD_{\mathcal{T}}(S) + 2mA \geq D + 2mA = D'$ 和 $|S'| = |S| + A \leq k'$。因此，为了证明 S' 是$\mathcal{I}'$上 α-PDDs 的一个解，我们必须证明 S' 在$\mathcal{F}'$中是 α-可行的。这是因为所有 $y \in \bigcup_{x \in X} A_x$ 都是$\mathcal{F}'$ 中的源点，并且对于所有 $x \in X$，我们有

$$|S' \cap N^{\leq}_{\mathcal{F}'}(x)| = |S \cap N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)| + a_x \geq 1 + a_x \geq \alpha |N^{\leq}_{\mathcal{F}'}(x)|.$$

现在，假设 S 是 α-PDDs 在$\mathcal{I}'$上的一个解。由于 $\bigcup_{x \in X} A_x$ 中的分类单元都是源点且具有最大多样性，我们可以假设 $\bigcup_{x \in X} A_x \subseteq S$。现在令 $S' := S \cap X$。那么 $|S'| = |S| - A \leq k$和 $PD_{\mathcal{T}}(S') = PD_{\mathcal{T}'}(S) - 2mA \geq D$。我们需要证明 S' 在$\mathcal{F}$中是ε-可行的。因此，考虑 S'的任意非源点顶点 x。由于 S 在$\mathcal{F}'$中是 α-可行的，我们有

$$|S \cap N^{\leq}_{\mathcal{F}'}(x)| \geq \alpha |N^{\leq}_{\mathcal{F}'}(x)| > a_x.$$

由于$|N^{<}{}_{\mathcal{F}}(x) \setminus N^{\leq}_{\mathcal{F}}(x)| = a_x$，这意味着$|S' \cap N^{<}{}_{\mathcal{F}}(x)| = |S \cap N^{<}{}_{\mathcal{F}}(x)| > 0$，也就是说，$S'$在$\mathcal{F}$中是 ε-可行的。◀

4 按解大小和多样性参数化

在本节中，我们证明，当以 k、D、k 或 D 为参数时，加权 PDD 属于 XP；而对于每个 $\alpha \in (0, 1]$，α-PDDs 都是 W[1]-困难的。这些困难性结果对于有向二部食物网也成立。

回顾一下，若一个加权 PDD实例存在一个解，则必然存在一个大小恰为 k 的解 [26]。因此，只需在给定实例加权 PDD 的$\mathcal{I}$ 的 X 所有大小为 k的子集中搜索解。由于这样的子集有 $\binom{|X|}{k}$ 个，且测试任一此类子集$\mathcal{O}(n+m)$ 时间即可判断其是否 $S \subseteq X$ 为 γ-可行，以及其多样性是否至少为 D，因此可得：

▶**观察 4.1**。当以 k 或 k 为参数时，加权 *PDD* 属于XP 。

该结果可推广至 ε-PDD，也可推广至 α-PDD，对每个 $\alpha \in (0, 1]$ 均成立。由于 $k \leq D$和 $k \leq D$，观察 4.1 对于更大的参数 D 和 D也成立。本节余下部分将证明 W[1]-难的 α-PDDs：

▶ **定理 4.2**。 *α-PDDs，对于任意 $\alpha \in (0,1]$，，当以 D 为参数时是 W[1]-难的，即使食物网是有向二部，且系统发育树中的最大边权为 2。*

这一结果颇为出人意料，因为 ε-PDDs 以 D [19]为参数时是固定参数可解的。回忆一下，在 ε-PDD中，要拯救一个非源物种，至少需要拯救一只猎物。这等价于将 α 选为食物网最大入度的倒数。因此，像在 α-PDDs中那样，将 α 固定为常数，会影响该问题的复杂性。

证明。给定一对（G, k），其中 $G = (V, E)$是一个无向图，且 $k \in \mathbb{N}$，团问题询问 G 是否有一个大小为 k的团。给定这样一个团问题实例（G, k），我们据此构造一个 1-PDD′ = (T′, F′, k', D')实例 I，使得 $D' = k^2$，并且（G, k）是团的一个是实例，当且仅当 I′ 是 1-PDDs的一个是实例。由于团问题关于 k [7]是 W[1]-困难的，这表明 1-PDDs 关于 D是 W[1]-困难的。对于任意 $\alpha \in (0,1]$，， α-PDDs 关于 D的 W[1]-困难性随后由引理 3.1a 得出。

给定一个团的实例 I = ($G = (V, E)$ k)，我们定义如下 1-PDD 实例 I′s：将 G 的每条边 e 细分为两条边。令 v_e 为引入的顶点，令 V_E 为通过细分 G 的所有边而引入的全部顶点组成的集合，并令 G' 为所得的图。我们通过将 G' 的所有边指向 V_E 中的顶点，定义食物网 F′。我们定义一棵根为 ρ 的星形树 T′，其中 $\omega(\rho v) := 1$，对所有 $v \in V$ 均成立；且 $\omega(\rho v_e) := 2$，对所有 $v_e \in V_E$ 均成立。最后，令 I′ := (T′, F′, k', D') 为一个 1-PDD 实例s，其中 $k' := \binom{k}{2} + k$ 且 $D' := 2\binom{k}{2} + k = k^2$。显然，可以在多项式时间内由 I 构造出 I′。我们需要证明，当且仅当 I′ 是是实例时，I 也是是实例。

首先，假设 S 是 G中的一个大小为 k 的团。那么 $G[S]$ 包含 $\binom{k}{2}$ 条边。因此，在 $\mathcal{I}'$ 中，包含 S 中的顶点以及与 $G[S]$ 中的边相关联的顶点的集合 S' 大小为 k'。该集合的多样性为 D'。集合 S' 在 $\mathcal{F}'$ 中是 1-可行的，因为 $G[S]$中每条边的两个端点都在 S中。

现在，假设 S 是 $\mathcal{I}'$上 1-PDDs 的一个解。如果 S 包含来自 V的 ℓ 个顶点，那么它至多包含来自 V_E的 $\binom{\ell}{2}$ 个顶点。因此，由于 $PD_{\mathcal{T}}(S) \geq D'$， S包含 V中的 k 个顶点以及来自 V_E的 $\binom{k}{2}$ 个顶点。这意味着 $S \cap V$ 是来自 G 的一个大小为 k 的团。◀

接下来，我们证明，对于任意 $\alpha \in (0,1]$，， α-PDDs在以补参数 D为参数时也是 W[1]-困难的。

▶ **定理4.3**。 *α-PDDs，对于任意 $\alpha \in (0,1]$，，当以 D 为参数时是 W[1]-难的，即使食物网是有向二部，且系统发育树中的最大边权为 2。*

证明。由于以 D [19]为参数时， ε-PDDs 是 W[1]-难的，因此引理 3.2 证明了对于所有 $\alpha \in (0, 1)$ 的情形均成立。还需证明 $\alpha = 1$ 的情形，即 1-PDDs。与定理 4.2 的证明类似，我们从团问题归约。这里，我们从团问题的实例 I = ($G = (V, E)$ k) 构造出的 1-PDDs 实例 I′ = (T′, F′, k', D') 满足$D = O(k^2)$。因此，由于团问题关于 k是 W[1]-难的，1-PDDs 关于 D是 W[1]-难的。—

为了从$\mathcal{I}$得到$\mathcal{I}'$，我们定义图 G'、顶点 v_e、所有边 $e \in E$以及集合 V_E，其定义与定理 4.2的证明中相同。与定理 4.2的证明不同，我们通过将 G' 的所有边都朝向 V，从 G' 构造$\mathcal{F}'$。我们定义一棵根为 ρ的星形树$\mathcal{T}'$，并设 $\omega(\rho v) = 2$，对所有 $v \in V$均如此；且 $\omega(\rho v_e) = 1$，对所有 $v_e \in V_E$均如此。于是$\mathcal{I}' := (\mathcal{T}', G', k', D')$，其中 $k' = |V| + |V_E| - \binom{k}{2} - k$ $D' = 2|V| + |V_E| - \binom{k}{2} - 2k$ $k' =$ 且 。特别地，( ) 且(( )) $|V\ G'| - k' = \binom{k}{2} + k$ $D' = PD_{\mathcal{T}}\ V\ G' - D' = \binom{k}{2} + 2k$ — 。 —

可以在多项式时间内构造实例$\mathcal{I}'$ 。接下来需要证明，$\mathcal{I}$ 是团问题的是实例，当且仅当$\mathcal{I}'$ 是 1-PDDs的是实例。

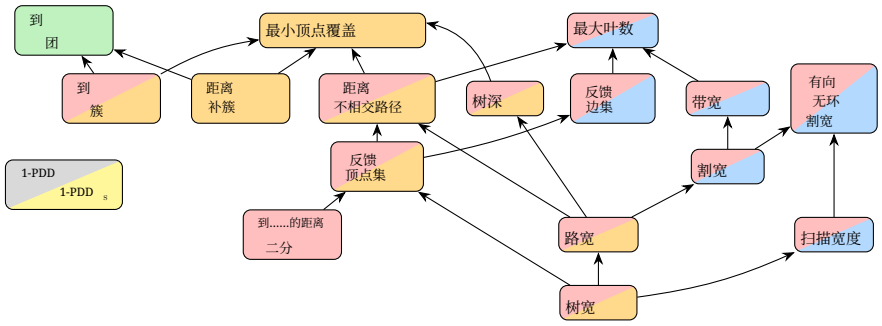

图1 食物网的结构参数与求解1-PDD （左上）和1-PDD$_s$ （右下）的复杂性之间的关系。如果问题在 p 取常数值时为NP困难，则参数 p标记为红色（）。如果问题关于 p是固定参数可解的，则 p 标记为橙色（）、绿色（）或蓝色（）。绿色表示该问题具有多项式核，橙色表示没有多项式核，蓝色表示核化问题尚未解决。参数 p_1p_2之间的边 p_1 和 p_2 表示在每个图中，参数 p_1 都可以由 p_2的某个函数所界定。关于图参数层级结构的更深入讨论可见 [29]。

首先，假设 S 是 G中一个大小为 k 的团。那么 $G[S]$ 包含 $\binom{k}{2}$ 条边。令集合 S' 包含除 S 中的顶点以及与 $G[S]$中的边相关联的顶点之外的所有顶点。那么 S' 的大小为 k'，多样性为 D'。 V_E 中的所有顶点都是源点，并且每个满足 $N^{\leq}_{\mathcal{F}'}(v) \not\subseteq S'$ 的顶点 $v \in V$ 都在 S 中。因此， S' 是 1-可行的。

现在，假设 S 是$_s$ 上1-PDD的一个解$\mathcal{I}'$。对于每个不属于 S的顶点 $v_e \in V_E$， e 的两个端点都不在 S中。因此，如果 V_E 中有 $\binom{\ell}{2}$ 个顶点不属于 S，那么 V中至少有 ℓ 个顶点不属于 S。于是，由于 $|S| \leq |V|+|V_E|-\binom{k}{2}-k$ 但$PD_{\mathcal{T}'}(S) \geq 2|V| + |V_E| - \binom{k}{2} - 2k$， S 恰好遗漏了 V中的 k 个顶点以及 V_E中的 $\binom{k}{2}$ 个顶点，从而表示 G 中连接 $V \setminus S$内顶点的所有边。因此， $V \setminus S$ 是 G中大小为 k 的团。◀

5 核

虽然对于任意 $\alpha \in (0, 1]$, ，rw-PDD（ ε-PDD 和 α-PDD 的一般化）关于顶点覆盖数 vc [26], 是固定参数可解的，但我们在本节证明，假设 NP $\not\subseteq$ coNP/poly，则对于任意 $\alpha \in (0, 1]$,， α-PDD$_s$在以 vc $+D$为参数时不具有多项式核，即使是在二分食物网上也是如此。对于 ε-PDD$_s$ [19]，这一结果已为人所知。[1]此外，我们证明，1-PDD 关于食物网到团的距离存在一个核。这一结果能否推广到 α-PDD 仍是一个开放问题。事实上，即使是在团上，$1/2$-PDD 能否在多项式时间内求解也尚不清楚 [26]。图1展示了这些结果及其影响。

5.1 关于顶点覆盖数不存在多项式核

以下是本文的主要结果。

▶ **定理 5.1**。 *α-PDD$_s$ 在以* vc $+D$（即食物网的顶点覆盖数加多样性阈值）为参数时，不存在多项式规模的核，即使食物网是二分图也如此，除非 NP $\subseteq$coNP/poly。

[1] 在 [19], 中只陈述了 ε-PDD$_s$ 不存在关于 D的多项式核，但仔细考察后会发现，较大的参数vc $+D$ 也被排除。

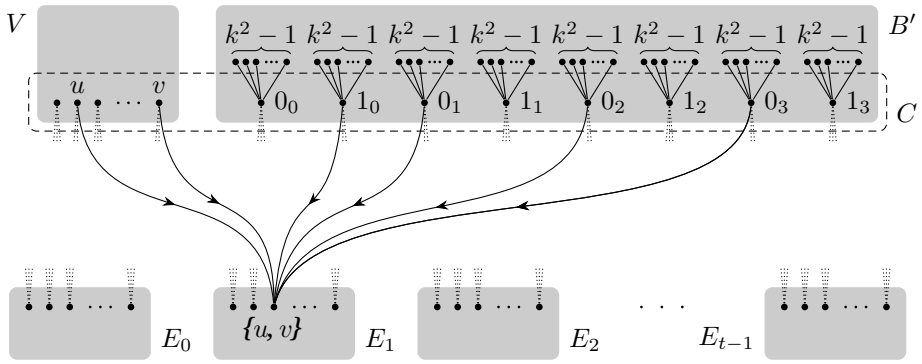

图2 从 $t \in \{9,\ldots,16\}$ 团实例到 1-PDD 的交叉组合。如图所示，对于一个顶点 $\{u,v\} \in E_1$，每个顶点 $\{x,y\} \in E_i$（对于 $i \in [t-1]_0$）都有来自相应边的端点 $x,y \in V$ 的入边，以及来自 $0_0, 1_0, \ldots, 0_{\log t}, 1_{\log t}$ 中用于编码索引 i 的那些顶点的入边。

证明。 我们从 团 到 1-PDDs 进行 OR-交叉组合，以证明1-PDDs的上述结果。随后应用 $\alpha \in (0,1]$ 引理 3.1b即可推出所有。

作为多项式等价关系，我们将两个团实例（$G_1 = (V_1, E_1)$ k_1）和（$G_2 = (V_2, E_2)$ k_2）视为等价，当且仅当 $|V_1| = |V_2|$ 和 $k_1 = k_2$。通过对顶点重新命名，我们可以假设等价实例满足 $V_1 = V_2$。

给定 Clique 的一组 $\mathfrak{I} := \{(G_i = (V,\ E_i)\ k) \mid i \in [t-1]_0\}$ 个等价实例，令 $n := \max_{i\in[t-1]_0} |G_i|$ 且 $N := \sum_{i\in[t-1]_0} |G_i|$。我们根据这组实例构造如下 1-PDD 实例$\mathcal{I}' = (\mathcal{T}',\ \mathcal{F}',\ k',\ D')$:

F′ 的顶点集包含 V 中的顶点、每条边 $e \in E := E_0 \uplus \cdots \uplus E_{t-1}$ 对应的一个顶点，以及一组 B 个特殊顶点 00、10、…、$0_{\ell-1}, 1_{\ell-1}$，其中 $\ell = \lceil \log\ t \rceil$。每个这样的顶点 $b_i \in B$ 都有一组 B_{b_i} 个猎物，且这些猎物不与任何其他顶点相连。令 $B' := B \cup \bigcup_{v\in B} B_v$。对于每条边 $e = \{u,v\} \in E_b$，令 $b_{\ell-1}b_{\ell-2}\cdots b_0$ 为 b 的二进制表示。于是，在 F′ 中，令顶点 e 的猎物为 u、$v \in V$ 和 b_0、…、$b_{\ell-1} \in B$。（图2展示了一个示例。）

令$\mathcal{T}'$ 为一个以 ρ 为根的星形图，对每个 $e \in E$，设 $\omega(\rho e) = 2$，并对每个$v \in V \cup B'$，设 $\omega(\rho v)$，再令 $k' := k^2 \cdot (\ell+1) - \binom{k}{2}$ 以及 $D' := k^2 \cdot (\ell+1)$。至此，$\mathcal{I}'$ 的定义完成。

从 $\mathfrak{I}$ 构造$\mathcal{I}'$ 的过程可在关于 N 的多项式时间内完成。$\mathcal{F}'$ 是二分图，其二部划分为 $V \cup B$ 和 $E \cup \bigcup_{v\in B} B_v$。由于 $D' \in O(k^2 \log t) \subseteq O(n^2 \log t)$，且 $C := V \cup B$ 是 $\mathcal{F}'$ 的一个大小为 $O(n + \log t)$ 的顶点覆盖，要证明该构造构成从 Clique 到以 vc $+D'$为参数的 1-PDDs 的 OR-交叉组合，尚需证明存在一个图 $G_b, b \in [t-1]_0$，当且仅当$\mathcal{I}'$ 是 1-PDDs的是实例时，该图包含一个大小为 k 的团。

首先，假设 S 是 G_b中大小为 k 的团。然后令 $S' \subseteq V$(F′) 为一个集合，其中包含 S中的所有顶点、 S中顶点之间的边所对应的 E_b 中的所有顶点，以及 $\bigcup_{i=0}^{\ell-1} \{b_i\} \cup B_{b_i}$中的所有顶点，其中 $b_{\ell-1}b_{\ell-2}\cdots b_0$是 b的二进制表示。集合 S'是 1-可行的，因为 $V \cup \bigcup_{i=0}^{\ell-1} B_{b_i}$ 中的所有顶点都是源点；对于每个 $b_i \in S'$， B_{b_i}中的所有顶点都属于 S'；并且对于每个 $\{u,v\} \in E_b \cap S'$，都有 $u, v, b_0, \ldots, b_{\ell-1} \in S'$。 S'的大小为 $\binom{k}{2} + k + k^2\ell = k^2(\ell+1) - \binom{k}{2} = k'$，其多样性为 $2\binom{k}{2} + k + k^2\ell = k^2(\ell+1) = D'$。因此， S' 是 I′上的 1-PDDs 的一个解。

接下来，假设 S 是 1-PDDs 在 $\mathcal{I}'$上的一个解。由于 $D' > k'$、 S 和 E 相交。因此，$|S \cap B| \geq \ell$，因为 E 中的每个顶点在 B中都有 ℓ 个猎物。另一方面， S 还包含

对于每个顶点 $v \in S \cap B$， B_v中的所有顶点。因此， S 至少包含 $k^2 \cdot |S \cap B|$ 个分类单元。由于 $|S| \leq k' < k^2(\ell+1)$，这表明 $|S \cap B| = \ell$。由于 S 包含 E中的顶点，存在一个指标 $b \in [t-1]_0$，使得 S 和 E_b 相交。因此， $S \cap B$ 中的 ℓ 个顶点必定是 b的二进制编码 $b_{\ell-1}b_{\ell-2}\cdots b_0$，并且我们有 $S \cap E = S \cap E_b$。现在，令 S' 为 S 和 $V \cup E_b$ 的交集。那么， S' 的大小为 $k^2\ell \leq \binom{k}{2} + k$，其多样性 $PD_{\mathcal{T}'}(S) - k^2\ell \geq 2\binom{k}{2} + k$。因此， $|S' \cap E_b| \geq \binom{k}{2}$ 且 $|S' \cap V| \leq k$。然而，对于每条边 $\{u, v\} \in S' \cap E_b$， S'都包含两个顶点 u和 v。因此，约束 $|S'| \leq \binom{k}{2} + k$、$|S' \cap E_b| \geq \binom{k}{2}$ $|S' \cap V| \leq k$ $|S' \cap E_b| = \binom{k}{2}$ $|S' \cap V| = k$ 以及蕴含 和 。所以，$G_b[S' \cap V]$是一个大小为 k的团，因为 $S' \cap E_b$包含 $S' \cap V$中 k个顶点之间的 $\binom{k}{2}$ 条边。因此，$(G_b, k) \in \mathfrak{I}$ 是团问题的一个是实例。◀

5.2 到团的距离的核

本节中，我们将证明，当以食物网到团的距离 d 作为参数时，1-PDD 存在一个核。

▶ **定理 5.2.** 给定一个 *1-PDD* 实例 $I = (T, F\ k, D)$ 以及一个集合 $Z \subseteq X$，使得 $F - Z$ 是一个团，则我们可以在 $O(n+m)$ 时间内，计算出一个等价的 *1-PDD* 实例，其中至多有 $2 \cdot |Z|$ 个分类单元。

证明。 我们使用两条归约规则，每条规则各应用一次，以构造归约后的实例$\mathcal{I}'$，它由$\mathcal{I}$得到。这些规则见图 3。

由于 $F[X \setminus Z]$ 是一个无环团，因此它具有唯一的拓扑序 τ。对于任意 $x \in X \setminus Z$，都有 $\{y \in X \setminus Z \mid \tau(y) \leq \tau(x)\} \subseteq X_{\leq x}$。根据观察 2.2，I 上 1-PDD 的任何包含 x 的解 S 也必须包含 $X_{\leq x}$。因此，没有任何满足 $\tau(x) \geq k+1$ 的顶点 $x \in X \setminus Z$能成为此类解的一部分，集合 $X_{\geq x}$中的任何顶点也不行。此外，若 z是 $X \setminus Z$中满足 $\tau(z) = k+1$的顶点，则对于任意满足 $\tau(x) \geq k+1$ 的顶点 $x \in X \setminus Z$，都有 $x \in X_{\geq z}$，因而 $X_{\geq x} \subseteq X_{\geq z}$。由此得到第一条归约规则：

▶ **归约规则 1。** 如果 $z \in X \setminus Z$满足 $\tau(z) = k+1$，则从 F 中移除 $X_{\geq z}$ 内的所有顶点，并将 T 替换为 T 的全-$X_{\geq z}$-收缩。

若 $I' = (T', F', k, D)$ 是对 I 应用此规则后得到的实例，那么我们刚刚已经观察到，此规则从 F 中移除的顶点都不可能属于 F 中的 1-可行集 S。因此， S 在 F' 中也 1-可行。反过来，对于 F' 中的每个顶点 x，F 中所有能够到达 x 的顶点都在 F' 中。因此，F' 中的任何 1-可行集在 F 中也都是 1-可行集。这表明 F 和 F' 具有相同的 1-可行集。由于 T' 是 T 的全-$X_{\geq z}$-收缩，F' 中顶点的任意子集 S 都满足 $PD_{\mathcal{T}}(S) = PD_{\mathcal{T}'}(S)$。因此，I 是一个是实例，当且仅当 I' 是。这证明规则 1 是安全的。

现在考虑任意解 S 对于 1-带依赖的系统发育多样性 在 $\mathcal{I}$ 上。我们可以假设 $|S| = k$ [26]。由于 $|S \cap Z| \leq |Z|$，我们有 $|S \cap (X \setminus Z)| \geq k - |Z|$。因此，前 $k - |Z|$ 个顶点在 τ 中必须属于 S。这引出了第二条归约规则：

▶ **归约规则 2.** 若 $x \in X \setminus Z$满足 $\tau(x) = k - |Z|$，则从 F 中删除 $X_{\leq x}$ 中的所有顶点，将 T 替换为 T 的某个-$X_{\leq x}$-收缩，将 k 减少 $|X_{\leq x}|$，并将 D 减少 $PD_{\mathcal{T}}(X_{\leq x})$。

令 $I' = (T', F', k', D')$ 为对 I 应用规则 2 后得到的实例。我们观察到，I 上 1-PDD 的任意解 S 都必须包含 x，因此也包含 $X_{\leq x}$ 中的所有顶点。因此，若 $S' := S \setminus X_{\leq x}$，则 $|S'| \leq k - |X_{\leq x}| = k'$，且 S' 在 F 中是 1-可行的。由于 T' 是 T 的某个-$X_{\leq x}$-收缩，我们有 $PD_{\mathcal{T}'}(S') = PD_{\mathcal{T}}(S) - PD_{\mathcal{T}}(X_{\leq x}) \geq D'$。因此， S' 是 I' 上 1-PDD 的一个解。

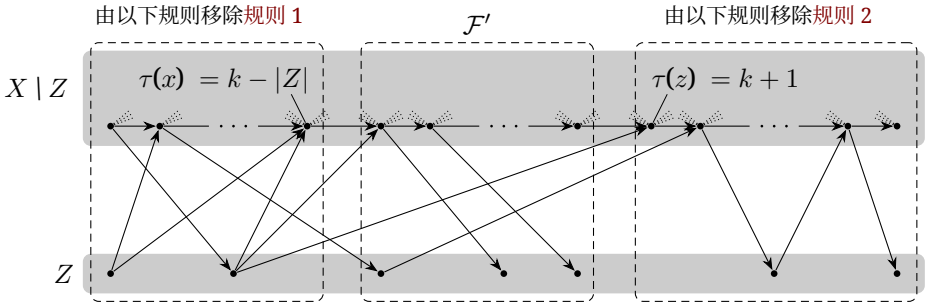

图 3 定理 定理 5.2中所用归约规则的示意图。

反过来，若 S' 是 I′ 上 1-PDD 的一个解，则 $S := S' \cup X_{\leq x}$ 满足 $|S| \leq |S'| + |X_{\leq x}| \leq k$，且 $PD_{\mathcal{T}}(S) = PD_{\mathcal{T}}'(S') + PD_{\mathcal{T}}(X_{\leq x}) \geq D$。对于每个顶点 $z \in S$，$X_{\leq z}$ 中的每个顶点要么属于 S'（若它属于 F′），要么属于 $X_{\leq x}$（若它不属于 F′）。因此，S 是 I 上 1-PDD 的一个解。这证明 I 是一个是实例，当且仅当 I′ 是一个是实例；也就是说，规则 2 是安全的。

通过分别应用一次规则 1 和规则 2，我们从 I 得到所需的实例 I′。这些归约可在 $O(n + m)$ 时间内完成，因为所需的操作仅包括：计算 $F[X \setminus Z]$ 的拓扑序 τ，找出满足 $\tau(z) = k+1$ 和 $\tau(x) = k - |Z|$ 的顶点 z 和 x，然后从 F 中移除 $X_{\geq z}$ 和 $X_{\leq x}$ 中的顶点，同时统计这些顶点并相应调整 k 和 D。由于我们已经证明规则 1 和规则 2 是安全的，因此 I 是一个是实例，当且仅当 I′ 是一个是实例。因此，为了完成定理的证明，我们需要证明 F′ 至多有 $2 \cdot |Z|$ 个顶点。然而，F′ 只包含 $X \setminus Z$ 中满足 $k - |Z| < \tau(y) \leq k$ 的顶点 y。这样的顶点恰好有 $|Z|$ 个。此外，F′ 至多包含 Z 中的所有顶点。这额外增加了 $|Z|$ 个顶点，因此 F′ 至多有 $2 \cdot |Z|$ 个顶点。◀

6 讨论

本文研究了这样一个问题：在满足每个被保留物种的猎物中至少有 α 比例也被保留的约束下，保留 k 个系统发育多样性最大的物种。此前已有研究考察了 $\alpha \in \{1/2, 1\}$ 的情形，而本文允许任意取值 $\alpha \in (0, 1]$。

我们的主要贡献包括：针对以解的大小 [1]为参数的 α-PDDs、多样性阈值 k以及它们的补问题，给出了 W D-困难性结果；此外还证明了 α-PDDs相对于 D 与食物网的顶点覆盖数之和不存在多项式核。这意味着，相对于图1所示的一系列食物网结构参数，α-PDDs 也不存在多项式核。综合来看，这些结果相当全面地描绘了 α-PDDs的参数化复杂性图景。

最值得关注的开放问题是，α-PDDs 是否存在一个以食物网的扫描宽度为参数的多项式核，或者至少是否存在一个以其有向无环割宽为参数的多项式核。这些问题在图1中标记为开放问题。

我们关于 α-PDDs 的困难性结果，是通过从 1-PDDs 和 ε-PDDs进行归约得到的。一个自然的问题是：对于食物网的哪些结构参数，α-PDDs 比 1-PDDs 或 ε-PDDs更难求解？例如，相对于食物网的树宽，$1/2$-PDDs 是 W[1]-困难的 [27], ，而对于同一参数，ε-PDDs [19] 和 1-PDDs [26]属于固定参数可解。

参考文献

1 Anthony D. Barnosky、Nicholas Matzke、Susumu Tomiya 等人。地球是否已经进入第六次大灭绝？《自然》，471(7336):51–57，2011年。 doi:10.1038/nature09678。 2 Vincent Berry、Celine Scornavacca 和 Mathias Weller。扫描系统发育网络是 NP困难的。载于第46届计算机科学理论与实践当前趋势国际会议（SOFSEM 2020）论文集，第519–530页。施普林格，2020年。doi:10.1007/978-3-030-38919-2_42。 3 Magnus Bordewich 和 Charles Semple。具有多样性特征损失和任意分裂系统的预算化自然保护区选择。《数学生物学杂志》，64(1):69–85，2012年。doi:10.1007/s00285-011-0405-9。 4 Magnus Bordewich、Charles Semple 和 Kristina Wicke。系统发育网络上系统发育多样性优化变体的复杂性。《理论计算机科学》，917:66–80，2022年。 doi:10.1016/j.tcs.2022.03.012。 5 Bradley J. Cardinale、J. Emmett Duffy、Andrew Gonzalez 等人。生物多样性丧失及其对人类的影响。《自然》，486(7401):59–67，2012年。 doi:10.1038/nature11148。 6 Robert H. Cowie、Philippe Bouchet 和 Benoît Fontaine。第六次大灭绝：事实、虚构还是推测？《生物学评论》，97(2):640–663，2022年。 doi:10.1111/brv.12816。 7 Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。施普林格，2015年。doi:10.1007/978-3-319-21275-3。 8 Reinhard Diestel。《图论》，第173卷。Springer Nature，2025年。 doi:10.1007/978-3-662-70107-2。 9 Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。《参数化复杂性基础》。计算机科学丛书。施普林格，2013年。 doi:10.1007/978-1-4471-5559-1。 10 Daniel P. Faith。保护评估与系统发育多样性。《生物保护》，61(1):1–10，1992年。 doi:10.1016/0006-3207(92)91201-3。 11 Daniel P. Faith。PD系统发育多样性框架：将进化历史与特征多样性联系起来以保护生物多样性。《生物多样性保护与系统发育系统学：在灭绝危机中守护我们的进化遗产》，第39–56页，2016年。 doi:10.1007/978-3-319-22461-9_3。 12 Daniel P. Faith。EDGE of existence 与系统发育多样性。《动物保护》，22:537–538，2019年。 doi:10.1111/acv.12552。 13 Beáta Faller、Charles Semple 和 Dominic Welsh。在生态约束下优化系统发育多样性。《组合学年刊》，15(2):255–266，2011年。 doi:10.1007/s00026-011-0093-6。 14 Klaas Hartmann 和 Mike Steel。在生物多样性保护中最大化系统发育多样性：诺亚方舟问题的贪心解。《系统生物学》，55(4):644–651，2006年。doi:10.1080/10635150600873876。 15 Mark Jones 和 Jannik Schestag。如何最大化系统发育多样性？面向网络的参数化方法。载于第18届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2023）论文集，第30:1–30:12页。Schloss-Dagstuhl-Leibniz Zentrum für Informatik，2023年。 doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2023.30。 16 Mark Jones 和 Jannik Schestag。在时间压力下最大化系统发育多样性：面向未来灭绝的规划。arXiv 预印本 arXiv:2403.14217，2024年。 arXiv:2403.14217。 17 Mark Jones 和 Jannik Schestag。具有生态依赖关系的网络多样性参数化算法。载于第20届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2025）论文集，第11:1–11:21页。Schloss-Dagstuhl-Leibniz Zentrum für Informatik，2025年。 doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2025.11。 18 K. Praveen Karanth、Srishti Gautam、Kunal Arekar 和 B. Divya。系统发育多样性作为生物多样性衡量指标：利弊。《孟买自然历史学会杂志》，116:53–61，2019年。 doi:10.17087/jbnhs/2019/v116/120848。

14 核化与参数化复杂度： α-PDD

19 Christian Komusiewicz 和 Jannik Schestag。《生态约束下的系统发育多样性最大化：一项参数化复杂性研究》。载于第44届 IARCS 软件技术与理论计算机科学基础年会（FSTTCS 2024）论文集，第28:1–28:18页。Schloss-Dagstuhl-Leibniz Zentrum für Informatik，2024年。doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2024.28。20 Christian Komusiewicz 和 Jannik Schestag。《广义诺亚方舟问题的多变量复杂性分析》。《离散应用数学》，382：137–154，2025年。 doi:10.1016/j.dam.2025.11.037。21 Erez Lieberman、Christoph Hauert 和 Martin A. Nowak。图上的进化动力学。《自然》，433(7023)：312–316，2005年。 doi:10.1038/nature03204。22 Vincent Moulton、Charles Semple 和 Mike Steel。约束条件下的系统发育多样性优化。《理论生物学杂志》，246(1)：186–194，2007年。 doi:10.1016/j.jtbi.2006.12.021。23 Fabio Pardi 和 Nick Goldman。比较基因组学的物种选择：贪心算法奏效。《公共科学图书馆 · 遗传学》，1，2005年。 doi:10.1371/journal.pgen.0010071。24 Fabio Pardi 和 Nick Goldman。面向系统发育多样性最大化的资源感知型分类单元选择。《系统生物学》，56(3)：431–444，2007年。doi:10.1080/10635150701411279。25 Stuart L. Pimm。食物网。施普林格，1982年。doi:10.1007/978-94-009-5925-5_1。26 Jannik Schestag。加权食物网使系统发育多样性的计算难度大幅增加。载于第51届计算机科学理论与实践最新趋势国际会议（SOFSEM 2026）论文集。施普林格，2026年。 arXiv:2510.05911。27 Jannik Schestag 和 Norbert Zeh。首个关于节点扫描宽度可固定参数求解、但关于树宽不可固定参数求解的已知问题。2026年。 arXiv:2602.06903。28 Marco Scotti、János Podani 和 Ferenc Jordán。生态网络中的加权、尺度依赖性与间接效应：一项比较研究。《生态复杂性》，4(3)：148–159，2007年。doi:10.1016/j.ecocom.2007.05.002。29 Manuel Sorge、Mathias Weller、Florent Foucaud、Ondřej Such`y、Pascal Ochem、Martin Vatshelle 和 Gerhard J. Woeginger。图参数层级。网址： https://manyu.pro/assets/parameter-hierarchy.pdf，2020年。30 Andreas Spillner、Binh T. Nguyen 和 Vincent Moulton。分裂系统的系统发育多样性计算。《IEEE/ACM计算生物学与生物信息学汇刊》，5(2)：235–244，2008年。 doi:10.1109/tcbb.2007.70260。31 Mike Steel。系统发育多样性与贪心算法。《系统生物学》，54(4)：527–529，2005年。 doi:10.1080/10635150590947023。32 Leo van Iersel、Mark Jones、Jannik Schestag、Celine Scornavacca 和 Mathias Weller。以网状化数及更广泛参数化的系统发育网络多样性。载于第22届 RECOMB 比较基因组学国际研讨会（RECOMB-CG 2025）论文集，第107–130页。施普林格，2025年。doi:10.1007/978-3-031-94928-9_7。33 Leo van Iersel、Jannik Schestag、Mark Jones、Celine Scornavacca 和 Mathias Weller。网络的平均树系统发育多样性。载于第25届生物信息学算法国际研讨会（WABI 2025）论文集，第14:1–14:21页。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik，2025年。 doi:10.4230/LIPIcs.WABI.2025.15。34 Mark Vellend、William K. Cornwell、Karen Magnuson-Ford 和 Arne Ø. Mooers。系统发育生物多样性的测量。《生物多样性：测量与评估前沿》，14：194–207，2011年。35 Kristina Wicke 和 Mareike Fischer。系统发育网络上的系统发育多样性与生物多样性指数。《数学生物科学》，298：80–90，2018年。doi:10.1016/j.mbs.2018.02.005。36 Ruijing Yang、Minquan Feng、Zimeng Liu、Xuyan Wang 和 Zili Qu。基于稳定同位素的定量网络视角下关键种分析。《生态复杂性》，59：101092，2024年。 doi:10.1016/j.ecocom.2024.101092。