arXiv:2602.12999v1 [math.DG] 13 Feb 2026

$C^{1,\alpha}$ 类子流形以及具有正 μ-可达半径的集合 ch

Vincent Borrelli[1],Jean-Baptiste Follet[1,2] 和 Boris Thibert[2]

2026年2月16日

[1] 里昂第一大学、法国国家科学研究中心、*Camille Jordan* 研究所，*F-69622* 维勒班，法国.[2] 格勒诺布尔-阿尔卑斯大学、法国国家科学研究中心、格勒诺布尔国立综合理工学院、*Jean Kuntzmann* 实验室，*38000* 格勒诺布尔，法国.

摘要

自 Herbert Federer 的开创性工作 [《美国数学会汇刊》1959] 以来，人们早已知道，$C^{1,1}$ 类子流形具有正可达半径。本文利用 2000 年代提出的 μ-可达半径概念，将这一性质推广到正则性较低的子流形。我们首先证明，欧几里得空间 $\mathbb{E}^n$ 中的每个紧致 C^1 子流形，对所有 $\mu < 1$均具有正 μ-可达半径。随后，我们证明，中间正则性 $C^{1,\alpha}$ 可对距离函数 d_M 到该子流形的广义梯度的范数 $\|\nabla \mathrm{d}_M\|$ 给出更定量的结果。更准确地说，若 $M \subset \mathbb{E}^n$ 是 $C^{1,\alpha}$类子流形，且 $\alpha < 1$，则存在一个常数$C > 0$使得

$$\forall p \in \mathbb{E}^n \setminus M, \quad 1 - \|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant C\ \mathrm{d}_M(p)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

最后，我们证明该估计中的指数 $2\alpha/(1-\alpha)$ 是最优的。

目录

1 引言 **2**

2 闭集的距离函数 42.1 投影、中轴与可达半径 .42.2 距离函数的广义梯度 .52.3 临界函数与 μ-可达半径 .6

3 关于 μ-可达半径的 C^1 子流形 73.1 定理 1.1 的证明.73.2 推论1.2 的证明 .10

4 临界函数 $C^{1,\alpha}$ 子流形 1 **0**
4.1 $C^{1,\alpha}$ 分析基础 .104.2 C 类子流形 $C^{1,\alpha}$ .164.3 定理 1.3 的证明.21

5 定理 1.3 中不等式的最优性 2 **4**
5.1 中轴的初步结果 .255.2 命题 5.1 的证明 .28

1 引言

维数为 n 的黎曼流形通常无法 C^2等距嵌入到维数为 $\mathbb{E}^{n+1}$ 的欧几里得空间 $n+1$中。例如，希尔伯特–埃菲莫夫定理断言，双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 无法进行任何 C^2 等距嵌入$\mathbb{E}^3$ [9]。类似地，基于曲率的论证表明，二维平坦环面$\mathbb{T}^2$ 无法进行任何 C^2 等距嵌入 $\mathbb{E}^3$。与此相反，Nash和Kuiper的 C^1 等距嵌入定理证明，当将正则性放宽到 C^1情形 [20, 14, 15]时，黎曼流形存在无穷多个等距嵌入。尽管有这些奠基性成果，对这类 C^1子流形的几何分析仍不完整，我们仍需进一步深入理解其外在几何。本文利用由Chazal、Cohen-Steiner和Lieutier于 2006 [2, 3], 提出的正 μ可达半径集的概念，研究 C^1 和 $C^{1,\,\alpha}$ 的 $\mathbb{E}^n$ 子流形；这一概念推广了Federer的正可达集经典概念。

正可达集及 $C^{1,\,1}$ 正则性。正可达集由 Herbert Federer 于 1959年 引入，旨在将曲率测度的概念推广到非光滑、非凸对象 [10]。一方面，这一概念使得在非正则对象上定义曲率成为可能；另一方面，它提供了一种工具——投影映射——用于比较 Hausdorff接近 的集合，从而得以建立稳定性结果。因此，它在几何的多个领域中发挥着核心作用，包括几何测度论和几何推断 [12, 7, 6]。更多详情请参阅 Thäle 的综述 [24]。

根据定义，E^{n} 中的闭集 K 若其可达半径严格大于 $r>0$，则对于每个距离 r 小于该值且满足 p 的点，只要它与 K 的距离小于该值，就在 K 上有唯一的最近点。这一概念与集合 K 的距离函数 $\mathrm{d}_K\colon \mathbb{E}^n\to\mathbb{R}$ 密切相关，并可据此定义 K 的 r-偏移集：

$$K^r=\{p\,|\,d_K(p)\leqslant r\}$$

也称为 K 的大小为 r.的管状邻域。Federer详细研究了函数d_K，并证明当 $r>0$ 足够小时，水平集$\mathrm{d}_K^{-1}(r)=\partial K^r$ 是一个 $C^{1,\,1}$,即类的余维一子流形，且具有Lipschitz法向量。

Federer还考虑了集合 K 为 $\mathbb{E}^n$的子流形的情形。他提到但未作详细说明：Lipschitz函数的图像具有正可达性，当且仅当它属于 $C^{1,\,1}$ [10, 备注4.20]类。这个结论并非显而易见，并在过去几十年间引发了多项研究。Lytchak于2005年证明，不带边界且具有正可达性的拓扑嵌入流形属于 $C^{1,\,1}$ [18]类。Scholtes于2013年针对与球面 [23]同胚的余维一子流形给出了另一种证明。Rataj和Zajíček也于2017年在流形为Lipschitz的严格假设下给出了证明。最近，Lieutier和Wintraecken于2024年采用基于同调的方法证明，闭子流形具有正可达性，当且仅当它局部是某个 $C^{1,\,1}$函数 [16]的图像。

正 μ可达集。正可达集存在两个主要局限。首先，尽管引入它们是为了将曲率测度推广到不规则对象，但它们并不涵盖三角剖分等简单的不规则结构。其次，它们对于豪斯多夫距离并不稳定。因此，它们并不直接适用于几何推断的框架；在这一框架中，目标是从豪斯多夫逼近中推断形状的几何性质 K。为克服这些局限，Chazal、Cohen-Steiner 和 Lieutier 于 2006 年引入了正 μ可达半径 [2, 3]集的概念。

μ可达半径的概念可以视为一种过滤可达性概念，它源自距离函数 d_K的梯度。该距离函数是 1-利普希茨函数，因此几乎处处可微。然而，它并非在整个空间 $\mathbb{E}^n$上都可微。可以证明，紧集 $K \subset \mathbb{E}^n$ 的可达半径可以定义为使距离函数 d_K 在 r偏移集 K^r 上可微的最大半径 r：

$$\operatorname{reach}(K) := \sup\{r \mid \mathrm{d}_K \text{ is differentiable on } K^r \setminus K\},$$

见第2节。2004年，Lieutier 将梯度映射 $\nabla \mathrm{d}_K$ 扩展到整个欧几里得空间，并定义了广义梯度 [17]。该广义梯度满足 $\|\nabla \mathrm{d}_K(p)\| \leqslant 1$，且当且仅当$\mathrm{d}_K$ 在 p处可微时等号成立。这一观察自然引出了可达半径的一个改进版本，即 μ的 K-可达半径，其中 $0 \leqslant \mu \leqslant 1$，其定义如下：

$$\operatorname{reach}_\mu(K) := \sup\{r \mid \forall p \in K^r,\ \|\nabla \mathrm{d}_K(p)\| \geqslant \mu \text{ on } K^r \setminus K\}.$$

正 μ-可达集类包含所有正可达集，也包括三角剖分等更不规则的对象。此外，它为几何推断领域提供了一种自然工具：针对正 μ-可达集 [4, 6]，已获得关于法向量和曲率测度的稳定性结果。

贡献。如上所述，Federer 建立了 $C^{1,1}$ 类子流形与具有正可达半径的子流形之间的联系。本文扩展 Federer 论断中的一个蕴含，并利用正 μ-可达集的概念，研究 C^1 和 $C^{1,\alpha}$ 子流形的几何性质，其中 $\mathbb{E}^n$。我们首先给出以下结果。

定理 1.1。设 M 是一个无 $\mathbb{E}^n$ 边界的 C^1 紧子流形。则对于任意 $\mu < 1$，M 都具有正的 μ-可达半径。

对于参数 μ，这一结果是最优的。事实上，任何具有正 μ-可达半径的流形 M，若满足 $\mu = 1$，则具有正可达半径，因此属于 $C^{1,1}$ 类。若紧致流形的维数为 0，则定理 1.1 显然成立，因为在这种情况下它具有正可达半径。下文中，均假设流形的维数大于 1。直接应用 [11, 5], 定理 1.1 可得到偏移集 $M^r := \mathrm{d}_M^{-1}([0, r])$ 的边界以及双重偏移集 $M^{r,t} := \mathrm{d}_L^{-1}([0, t])$ 的正则性结果，其中 $L = \mathbb{E}^n \setminus M^r$，如下述推论所述。

推论1.2。设 M 是一个无 $\mathbb{E}^n$ 边界的 C^1 紧子流形。则对于任意 $\mu < 1$ 以及任意 $0 < r <$ 可达半径$\mu(M)$，有：

- 集合 L 的可达半径大于 μr，其边界 $\partial L = \partial M^r$ 是一个利普希茨流形。

- 对于任意 $t \in]0,\ \mu r[$，双重偏移集 $\partial M^{r,\ t}$ 的边界属于 $C^{1,\ 1}$ 类，并且其可达半径满足 $\operatorname{reach}(\partial M^{r,\ t}) \geqslant \min(t, \mu r - t)$。

由于 Federer曲率测度在正可达集上定义良好，因此该推论表明，它们也可以定义在集合 $\mathrm{d}_M^{-1}([r, +\infty[)$ 上。此外，[6]，中建立的稳定性结果等表明，可以根据流形 M 的 Hausdorff逼近，估计水平集 $\mathrm{d}_M^{-1}(r)$ 上的 Federer曲率测度。例如，这种方法可用于研究上文提到的 C^1 等距嵌入的几何，其中每个 C^1 等距嵌入的子流形 M 都是光滑子流形序列 $(M_n)_{n \geqslant 0}$ 的极限。

定理 1.1 给出了一个非定量结果，表明广义梯度的范数 $\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|$ 在 p 趋近子流形 M 时趋于 1。考虑介于 C^1 和 $C^{1,1}$ 之间的中间正则性 $C^{1,\alpha}$ 时，可以得到一个更具定量性的结论，即水平集 d_M 上存在下界 $\|\nabla \mathrm{d}_M\|$。特别是，$\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|$ 收敛到 1 的速率取决于 $C^{1,\alpha}$ 正则性；如以下定理所述，随着 α 增大，这种收敛会加快。

定理 1.3。设 M 是一个 $C^{1,\,\alpha}$ 紧致子流形，嵌入于没有边界的 $\mathbb{E}^n$ 中，且满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。那么存在常数 $C > 0$，使得对所有 $p \in \mathbb{E}^n \setminus M$，

$$1 - \|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant C\ \mathrm{d}_M(p)^{2\alpha}\Big(1 - \|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2\Big)^{\alpha}.$$

特别地，

- 若 $\alpha < 1$，则对每个 $p \in \mathbb{E}^n \setminus M$

$$1 - \|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant C^{\frac{1}{1-\alpha}}\ \mathrm{d}_M(p)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}},$$

- 若 $\alpha = 1$，则对每个满足 $\mathrm{d}_M(p) < 1/\sqrt{C}$ 的 $p \in \mathbb{E}^n$，都有

$$\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\| = 1.$$

我们将在第 5 节证明，当 $\alpha \neq 1$ 时，定理 1.3 中的指数 $2\alpha/(1-\alpha)$ 是最优的。当 $\alpha = 1$ 时，我们还将重新得到这样的性质：$C^{1,\,1}$-子流形 M 具有正可达性，因此在 M 的某个邻域内，$\|\nabla \mathrm{d}_M(\cdot)\| = 1$。

本文结构如下：第 2 节回顾关于距离函数的经典结果，以及可达半径和 μ-可达半径的定义。第3 节用于证明定理 1.1。第 4 节回顾 $C^{1,\,\alpha}$ 类子流形的定义，并建立证明定理 1.3 所需的若干技术性结果，这些结果将在小节 4.3 中给出。最后，第5 节展示定理 1.3中指数的最优性。

2 到闭集的距离函数

闭子集 $K \subset \mathbb{E}^n$ 的距离函数 $\mathrm{d}_K\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ 对每个点 $p \in \mathbb{E}^n$ 定义如下

$$\mathrm{d}_K(p) := \inf_{q \in K} \|p - q\|.$$

本节回顾距离函数 d_K 的正则性，并介绍中轴、可达半径和 μ-可达半径的概念。可参阅 Herbert Federer 于 1959年 发表的开创性论文，该文引入了可达半径的概念，并研究了距离函数，以便将曲率测度的概念推广到非光滑、非凸对象 [10]。关于广义梯度和 μ-可达半径的概念，可参阅 [17, 2]。

2.1 投影、中轴与可达半径

设 $p \in \mathbb{E}^n$。我们称 p 在 K 上的投影为使 d_K 取到最小值的任意点，并用 $\Gamma_K(p)$ 表示 p 在 K 上的所有投影构成的集合，即

$$\Gamma_K(p) = \{q \in K \mid \mathrm{d}_K(p) = \|p - q\|\}.$$

由于 K 是 $\mathbb{E}^n$的闭子集，因此 $\Gamma_K(p) \neq \emptyset$。此外，由于 $\Gamma_K(p)$包含在以 p 为中心、半径为 $\mathrm{d}_K(p)$的球面内，因此它有界，进而紧致。特别地，存在两点 $q_1, q_2 \in \Gamma_K(p)$，使得它们实现了 $\Gamma_K(p)$的直径。

定义 2.1. $\mathscr{M}(K)$的中轴是 $\mathbb{E}^n$ 中至少在 K上有两个投影的点的集合，即

$$\mathscr{M}(K) := \{p \in \mathbb{E}^n \setminus K \mid \mathrm{Card}(\Gamma_K(p)) \geqslant 2\}.$$

中轴补集上的任意一点都有唯一的投影，因此可以定义投影映射

$$\pi_K : \mathbb{E}^n \setminus \mathscr{M}(K) \to K$$

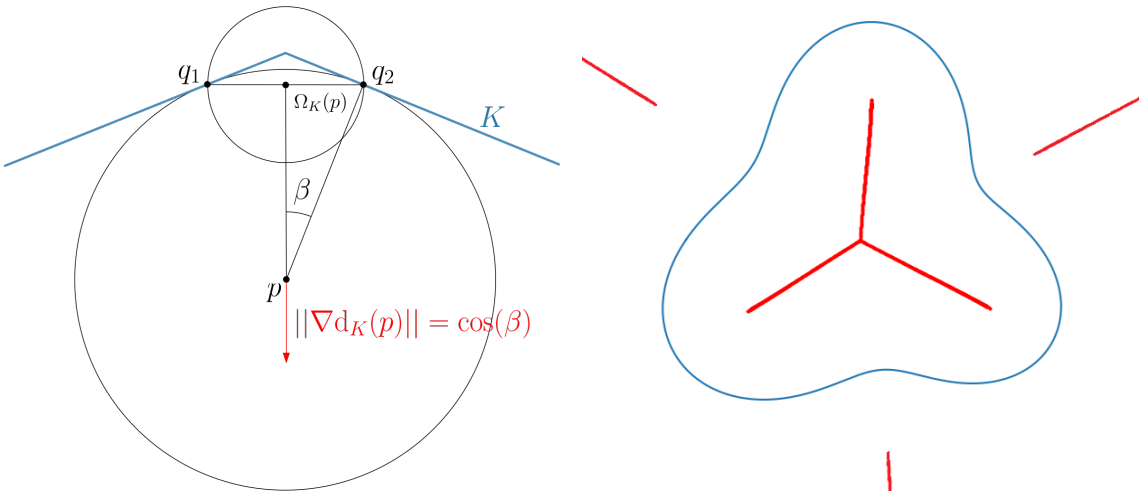
为 $\pi_K(p) = q$，其中 $\Gamma_K(p) = \{q\}$。我们用 $K^r = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \mathrm{d}_K(x) \leqslant r\}$表示 K 的 r-偏移集，并按以下方式定义可达半径:

定义 2.2. K 的可达半径是使 π_K 有定义的最大偏移集的半径，即

$$\mathrm{reach}(K) = \sup\{r \geqslant 0 \mid \pi_K \text{ is defined on } K^r\}.$$

2.2 距离函数的广义梯度

容易证明，闭集 $K \subset \mathbb{E}^n$ 的距离函数 d_K 是 1-利普希茨函数，因此根据拉德马赫定理，它几乎处处可微。以下命题表明，该函数在中轴的补集上可微。



(a) 点 p 处的广义梯度 $\nabla \mathrm{d}_K$

(b) 闭集 K (蓝色)及其中轴 $\mathscr{M}(K)$（红色）。

中轴 $\mathscr{M}(K)$，其中 $\Gamma_K(p) = \{q_1, q_2\}$

图 1：距离函数 d_K 的广义梯度。

命题 2.1. 设 K 是 $\mathbb{E}^n$ 的闭子集。那么对于任意 $p \in \mathbb{E}^n \setminus K$，以下断言等价

1. d_K 在 p 处可微，
2. 投影 π_K 定义于 p。

此外，对于任意 $p \in \mathbb{E}^n \setminus \mathscr{M}(K)$，都有

$$\nabla \mathrm{d}_K(p) = \frac{p - \pi_K(p)}{\|p - \pi_K(p)\|}.$$

一种距离函数广义梯度的概念d_K 也定义在中轴上 $\mathscr{M}(K)$ 由 André Lieutier 于 2004 [17] 提出。

定义 2.3. 设 K 是 $\mathbb{E}^n$的闭子集。d_K 在$p \in \mathbb{E}^n \setminus K$ 处的广义梯度定义为

$$\nabla \mathrm{d}_K(p) := \frac{p - \Omega_K(p)}{\mathrm{d}_K(p)}$$

其中 $\Omega_K(p)$是包含 $\Gamma_K(p)$的最小球的中心（见图 1）。

注意到，广义梯度 $\nabla \mathrm{d}_K$ 在 d_K 可微的点处与经典梯度一致。下文中，我们用 $\mathbb{B}_K(p)$ 表示包含$\Gamma_K(p)$ 的最小球，并用 $\mathscr{R}_K(p)$ 表示其半径。其边界球面记为 $\mathbb{S}_K(p)$。下述关系在后文中将会有用（见 [17]）。

命题 2.2. 设 K 为 $\mathbb{E}^n$ 的闭子集，并设 $p \in \mathbb{E}^n \setminus K$，则

$$\|\nabla \mathrm{d}_K(p)\| = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathscr{R}_K(p)}{\mathrm{d}_K(p)}\right)^2}.$$

注 2.1. 由广义梯度的定义可见，d_K 在点 $p \in \mathbb{E}^n \setminus K$ 处可微，当且仅当 $\|\nabla \mathrm{d}_K(p)\| = 1$。由此可将中轴重新表述为 d_K 不可微的点集，并将 K 的可达半径重新表述为

$$\mathrm{reach}(K) = \sup\{r \geqslant 0 \mid \forall p \in K^r \setminus K \ \|\nabla \mathrm{d}_K(p)\| = 1\}.$$

2.3 临界函数与 μ-可达半径

临界函数和 μ-可达半径的概念于 2006 年在几何推断的背景下提出，旨在获得稳定性结果 [2, 3]。正如备注2.1所述，可达半径对应于偏移集的大小，在该偏移集上，广义梯度的范数为 1。这启发我们定义可达半径的一种放宽版本，称为 μ-可达半径。

定义 2.4。 设 $\mu \leqslant 1$。闭集 $K \subset \mathbb{E}^n$ 的 μ-可达半径定义为:

$$\mathrm{reach}_\mu(K) := \sup\{r \mid \forall p \in K^r \ \|\nabla \mathrm{d}_K(p)\| \geqslant \mu \text{ on } K^r\}.$$

为了研究广义梯度的范数在趋近集合 K 时的变化情况，使用下文定义的临界函数会很方便。该函数通过考察距离函数的各个水平集，找出广义梯度的最小值。

定义 2.5。 闭集 $K \subset \mathbb{E}^n$ 的临界函数 $\chi_K :]0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ 是如下定义的实函数

$$\chi_K(d) := \inf_{p \in \partial K^d} ||\nabla \mathrm{d}_K(p)||$$

其中 $\partial K^d = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \mathrm{d}_K(x) = d\}$ 是 d 的 K 偏移集的边界。

Obvi而且，1-可达半径对应于可达半径，即我们有 $\mathrm{reach}_1(K) = \mathrm{reach}(K$).

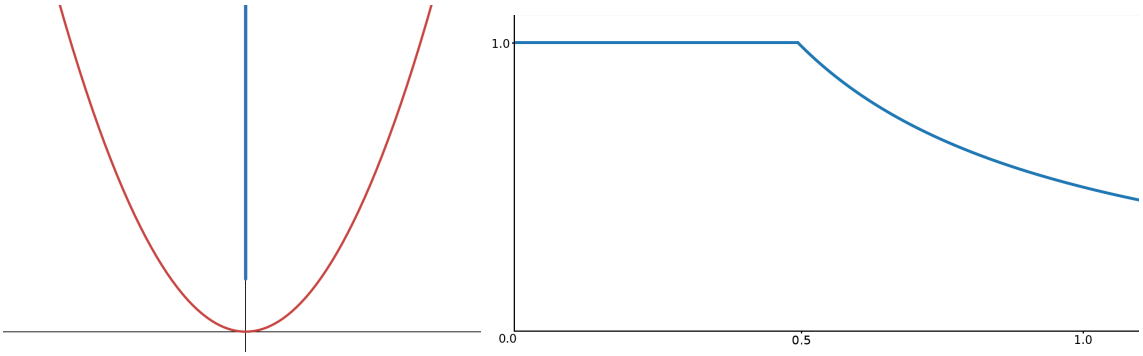


图2：左：抛物线 x^2 及其中轴（蓝色）。右：其临界函数的图像。由于 $\mathrm{reach}(K)$ $= \frac{1}{2}$，因此 $\chi(d) = 1$，其中 $d \leqslant \frac{1}{2}$。

3 关于 μ-可达半径与 C^1 子流形

回顾定理 1.1 指出，若 M 是一个紧致 C^1 子流形，且位于 $\mathbb{E}^n$ 中并且没有边界，则它对任意 μ 都具有正的 $\mu < 1$-可达半径。本节的目标是证明该定理及其推论。在此之前，我们先作两点说明。

定理 1.1 的紧致性假设定理 1.1 中的紧致性假设是必要的。事实上，对于任意 $\mu \in]0, 1[$, 我们都可以构造一条 C^1 曲线 M，它位于 $\mathbb{E}^2$ 中，并且对所有 $\mu' > \mu$，可达半径$\mu'(M) = 0$。构造思路是取一条振幅为 1、周期为 $T = 2\sqrt{(1/\mu^2) - 1}$ 的三角波，并将其顶点附近的邻域替换为圆弧；圆弧半径随着远离原点而减小，并在无穷远处趋于零，见图 3。

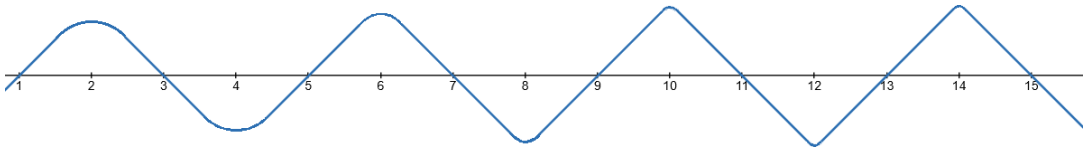


图3：一个非紧致 C^1 曲线的例子，其 μ-可达半径在 $\mu > \frac{1}{2}$ 时消失。

更精确地说，对于每个三角形，中轴是一条半直线，从四分之一圆的中心出发。在每个三角形内部的中轴部分上，广义梯度的范数等于 μ。然而，随着该三角形圆弧边的半径变小，中轴会越来越接近曲线。因此，中轴在极限处与曲线相切。所以，对于所有 $\mu' > \mu$，$\text{reach}_{\mu'}(M) = 0$。

定理的逆命题1.1。自然会想知道定理1.1的逆命题是否成立，也就是说，提出如下问题：如果 M 是一个紧致流形，且其 μ-可达半径对任意 $\mu < 1$均为正数，这是否意味着它属于 C^1 类？ 最近，对于任意 $\mu \in]0, 1[$,Antoine Commaret 构造了一个集合 K_μ，它的 μ-可达半径仍为正，却不可求 rectifiable，因此不属于 C^1 [8, pp 31 至 37]类。构造一个非紧致C^1 流形 K，使其对任意 μ的 $\mu < 1$ -可达半径均为正，这个问题仍未解决。

3.1 定理1.1的证明

在开始证明定理1.1之前，我们需要两个引理。

引理 3.1。设 M是一个 C^1子流形， $\mathbb{E}^n$且 $p \in \mathbb{E}^n \setminus M$。对于任意 $q \in \Gamma_M(p) \setminus \partial M$，连接 p 与 q 的直线在 q处垂直于 M 。

证明。 设 $t \in T_q M$ 是 q处 M 的任意切向量。由于 M 属于 C^1 类，且 q 属于 M的内部，因此存在 $\varepsilon > 0$和一条曲线 $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$，其属于 C^1类，满足$\gamma(0) = q$ 且 $\gamma'(0) = t$。由于 q 是 p的投影，映射 $f(x) := \|\gamma(x) - p\|^2$ 在 $x = 0$处取得最小值，这意味着

$$0 = f'(0) = 2\langle \gamma(0) - p | \gamma'(0) \rangle = \langle q - p | t \rangle,$$

因此结论成立。 □

注 3.1。 假设 $q \notin \partial M$ 是必要的。作为反例，考虑 $M := [0, 1] \times \{0\}$ 在 $\mathbb{E}^2$ 中，且 $p = (0, 2)$。于是 $q = (0, 1)$，因此连接 p 和 q 的直线不垂直于 M。

回顾一下，集合 $X \subset \mathbb{E}^n$ 的半径是包住 X 的最小球的半径，而 X 的直径是 X 中两点之间的最大距离。荣格定理[13],给出了半径与直径之间的如下不等式：

定理 3.2 (Jung1901)。 如果 X 是 $\mathbb{E}^n$ 的子集，那么

$$\sqrt{2\big(1+\frac{1}{n}\big)}\ \mathrm{Radius}(X) \leqslant \mathrm{Diam}(X)$$

引理 3.3. 设 K 是 $\mathbb{E}^n$的闭子集， $p \in \mathscr{M}(K)$ ，且 q_1 和 q_2 是p 在 K 上的两个投影，它们实现了 $\Gamma_K(p)$的直径。那么，广义梯度满足

$$\|\nabla \mathrm{d}_K(p)\|^2 \geqslant 1 - \frac{1-\langle n_1, n_2\rangle}{1+\frac{1}{n}},$$

其中 $n_1 := (p-q_1)/\|p-q_1\|$， $n_2 := (p-q_2)/\|p-q_2\|$。

注记 3.2. 设 β 是由 q_1、 p 和 q_2 所成的半角（见图 1）。从证明中可以看出，另有一种等价表述，在实际应用中可能更为方便

$$\|\nabla \mathrm{d}_K(p)\|^2 \geqslant 1 - \frac{2}{1+\frac{1}{n}}\ \sin^2(\beta).$$

证明。 根据命题 2.2，我们有

$$\|\nabla \mathrm{d}_K(p)\| = \sqrt{1-\left(\frac{\mathscr{R}_K(p)}{\mathrm{d}_K(p)}\right)^2}.$$

由荣格定理 3.2 以及 q_1 和 q_2 实现了 $\Gamma_K(p)$的直径这一事实，可得

$$\mathscr{R}_K(p) = \mathrm{Radius}(\Gamma_K(p)) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\big(1+\frac{1}{n}\big)}}\mathrm{Diam}\big(\Gamma_K(p)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\big(1+\frac{1}{n}\big)}}\|q_1-q_2\|,$$

thus

$$\|\nabla \mathrm{d}_K(p)\|^2 \geqslant 1 - \frac{\|q_1-q_2\|^2}{2\big(1+\frac{1}{n}\big)\ \mathrm{d}_K(p)^2}.$$

由于 $\mathsf{d}_K(p) = \|p-q_1\| = \|p-q_2\|$，可得

$$\|q_1-q_2\|^2 = \|(q_1-p)-(q_2-p)\|^2 = 2\mathrm{d}_K(p)^2\big(1-\langle n_1, n_2\rangle\big),$$

因此

$$\|\nabla \mathrm{d}_K(p)\|^2 \geqslant 1 - \frac{1-\langle n_1, n_2\rangle}{1+\frac{1}{n}}.$$

□

定理*1.1*的证明。 反证，假设存在 $\mu < 1$ 使得可达半径$\mu(M) > 0$。因此，存在一个点列 $(p_k)_k$ ，位于 M 的中轴上，使得

$$\mathrm{d}_M(p_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{and} \quad \|\nabla \mathrm{d}_M(p_k)\| \leqslant \mu.$$

由 M 的偏移集的紧性，我们可以假设点列 $(p_k)_k$ 收敛于极限 $p \in M$。对于任意 k，我们将 q_k^1 和 q_k^2 记为 p_k 的两个投影，它们实现了 $\Gamma_M(p_k)$ 的直径，并定义三个单位向量：

$$n_k^1 := \frac{p_k - q_k^1}{\|p_k - q_k^1\|}, \quad n_k^2 := \frac{p_k - q_k^2}{\|p_k - q_k^2\|} \quad \text{and} \quad t_k := \frac{q_k^2 - q_k^1}{\|q_k^2 - q_k^1\|}.$$

不妨取一个子列，使单位向量序列 n_k^1、 n_k^2 和 t_k收敛。我们分别用 n_1、 n_2 和 t 表示它们的极限。根据引理 3.1，我们知道

n_k^1 在点 q_k^1处垂直于 M，因此，由映射 $x \mapsto T_x M$的连续性以及标量积的连续性可知，n_1 在点 p处垂直于 M。类似地，我们有 n_2 在点 p处垂直于 M。由于 M 属于 C^1类，极限向量 t 属于切平面T_pM。

证明的最后部分如下：在步骤 1 中，我们证明三个向量n_1、 n_2 和 t 都包含在平面 Π 中。在步骤 2 中，我们证明 n_1 和 n_2 不共线。因此，由于 n_1和 n_2都与 T_pM正交，三个向量 n_1， n_2， t线性无关，这与步骤 1 矛盾。

步骤 1. 我们在此证明 n_1、 n_2 和 t 都包含在平面 Π中。首先要指出，当 k 足够大时， p_k、q_k^1 和 q_k^2 不共线。否则 $n_k^1 = t_k$，这将意味着在极限下 $n_1 = t$，并且由于 $t \in T_pM$，我们得到 $n_1 \in T_pM \cap N_pM = \{0\}$。这显然不成立，因为 $\|n_1\| = 1$。由此，当 k 足够大时，我们可以定义包含 p_k、 q_k^1 和 q_k^2 的唯一平面 Π_k （见图 4）。现在我们将 A_M 定义为所有.....的集合

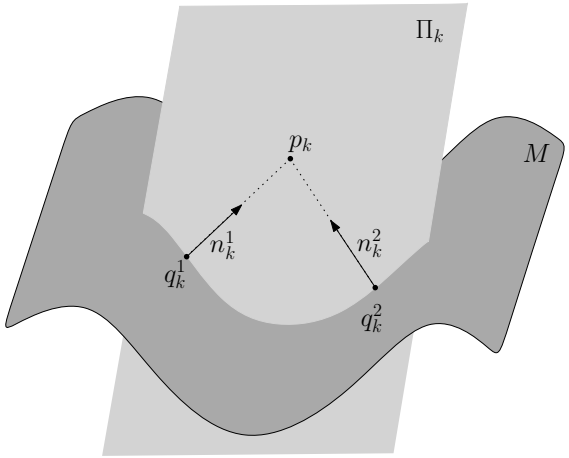


图 4：定理1.1的证明。

经过 M 中一点的仿射平面，并令

$$\begin{array}{rccc} f & : & M \times \mathrm{Gr}_2(\mathbb{E}^n) & \longrightarrow & A_M \\ & & (x, P) & \longmapsto & x + P \end{array}$$

其中，$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{E}^n)$ 是 $\mathbb{E}^n$ 中所有 2 维平面构成的格拉斯曼流形。映射 f 是满射且连续的；又由于 $M \times \mathrm{Gr}_2(\mathbb{E}^n)$ 是紧致的，我们得到 A_M 是紧致的。因此，由于这些 Π_k属于 A_M，经过取子列，平面序列（Π_k）$_k$ 收敛到一个包含 n_1、 n_2 和 t的平面$\Pi \in A_M$。

步骤 2. 根据引理 3.3，对每个 k

$$\mu^2 \geqslant \|\nabla \mathrm{d}_M(p_k)\|^2 \geqslant 1 - \frac{1 - \langle n_k^1, n_k^2 \rangle}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\langle n_k^1, n_k^2 \rangle + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}},$$

这意味着

$$\langle n_k^1 | n_k^2 \rangle \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mu^2 - \frac{1}{n} \leqslant \mu^2.$$

当 k 趋于无穷大时，我们得到 $\langle n_1 | n_2 \rangle \leqslant \mu^2 < 1$，因此 $n_1 \neq n_2$。

现在假设 $n_1 = -n_2$。这意味着，当 k 足够大时，三点 q_k^1、 p_k 和 q_k^2 将按此顺序几乎共线。因此，在极限情况下应有 $n_1 = -n_2 = t$。于是， $t \neq 0$ 在 p 处既是 M 的切向方向，又是其法向方向，这是不可能的。我们推 deduce that n_1 和 n_2 不共线，这与步骤 1 矛盾。□

3.2 推论的证明1.2

推论 1.2 的证明直接来自 [11] 和 [5] 中的两个结果。该结论最早在 [11, 定理 4.1] 中得到证明：如果 r 不是距离函数 d_M 的临界值，那么 M 的 r-偏移集的补集的闭包 $L = \mathbb{E}^n \setminus M^r$ 具有正可达性，且其边界 $\partial L = \partial M^r$ 是利普希茨流形。在 [11] 中，r 是临界值意味着广义梯度 $\nabla \mathrm{d}_M$ 在水平集 $\mathrm{d}_M^{-1}(r)$ 上为零；根据正 μ-可达半径假设，这在我们的情形中显然不成立。对于具有正 μ-可达半径的集合，[5, 定理 4.1] 给出了可达半径的明确下界，并证明该下界大于 μr。推论的第二点是 Federer 的结果的直接推论：具有正可达半径的水平集属于 $C^{1,1}$ 类。

4 $C^{1,\alpha}$ 子流形的临界函数

定理1.1 可以用临界函数重新表述为

$$\lim_{d \to 0} \chi_M(d) = 1.$$

因此，通过令 $\chi_M(0) = 1$，χ_M 可以在 0 处通过连续性延拓。临界函数是一个自然的对象，可用于衡量广义梯度趋近子流形时的收敛速度。本节的目标是证明定理 1.3，该定理指出，若 M 是一个 $C^{1,\alpha}$ 无边界的紧子流形，且 $\alpha \in [0,1]$，则存在常数 $C > 0$，使得对所有 $p \in \mathbb{E}^n \setminus M$，

$$1 - \|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant C\ \mathrm{d}_M(p)^{2\alpha} \Big(1 - \|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2\Big)^{\alpha}.$$

特别地，若 $\alpha < 1$，则对每个 $p \in \mathbb{E}^n \setminus M$

$$1 - \|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant C^{\frac{1}{1-\alpha}}\ \mathrm{d}_M(p)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

最后这个不等式也可以用临界函数重新表述；如下面的推论所述，临界函数给出了 χ_M 在 0 处的收敛速度。

推论 4.1。设 M 是一个 $C^{1,\alpha}$ 无边界的 E^n 中的紧子流形，且满足 $\alpha \in [0,1[$。那么存在常数 $C > 0$，使得对所有 $d \in \mathbb{R}_+$，

$$0 \leqslant 1 - \chi_M(d)^2 \leqslant C\ d^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

特别地，若

$$\frac{1}{3} < \alpha \leqslant 1$$

那么 χ_M 在零点可微，且 $\chi_M'(0) = 0$。

在第 5 节中，我们将通过一个例子证明这个不等式的最优性。

4.1 $C^{1,\alpha}$ 分析的基本事实

本节将重新探讨分析中与 $C^{1,\alpha}$ 正则性相关的若干经典结果，并补充后续分析所需的定量判据。为求完整，文中给出了证明；这些证明是在标准论证基础上的小幅至中等幅度变体。下文中，E 和 F 表示巴拿赫空间，而 U 表示 E的一个开子集。

定义 4.1。我们称 $f\colon X \subset E \to F$ 是 **α-赫尔德** 的，满足 $\alpha \in]0,1]$，存在一个常数 $C > 0$，使得对每个 $y, z \in X$

$$\|f(y) - f(z)\|_F \leqslant C \|y - z\|_E^{\alpha}.$$

定义 4.2。我们称 $f:\ U \to F$ 是 **局部 α-赫尔德**[1]，满足 $\alpha \in]0,1]$，如果每个$x \in U$都有一个邻域 V使得 $f|_V$是 α-赫尔德。

定义 4.3. 设 $g\colon U \to F$，若 g是**类 $C^{1,\alpha}$**的，且 $\alpha \in]0,1]$，则称之为具有此性质：若 g是 C^1类的，并且 $\mathrm{d}g\colon U \mapsto \mathscr{L}(E,F)$ 局部满足 α-赫尔德连续性。

以下结果可由 [1] 推出，但不包括对常数 C 和C'的控制。

引理 4.2. 设 $g:\ U \to F$ 是一个 C^1 函数，$\alpha \in [0,1]$，且 U 是一个凸开集。以下陈述等价

1. 存在 $C>0$，使得对所有 x、$y \in U$，

$$\|\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y\|_{\mathcal{L}} \leqslant C\|x-y\|_E^{\alpha},$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ 表示算子范数。

2. 存在 $C'>0$，使得对所有 x、$y \in U$，

$$\|f(y)-f(x)-\mathrm{d}f_x(y-x)\|_F \leqslant C'\|y-x\|_E^{1+\alpha}.$$

此外，我们有 $(1+\alpha)\,C \leqslant C' \leqslant 6C$。此外，蕴含关系 $(2) \implies (1)$ 不需要对 U 作凸性假设。

证明。我们假设存在 $C>0$，使得对所有 $x,y \in U$，

$$\|\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y\|_{\mathcal{L}} \leqslant C\|y-z\|_E^{\alpha}.$$

由于 U 是凸的，我们有

$$\begin{aligned} f(y)-f(x)-\mathrm{d}f_x(y-x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f\big(x+(y-x)t\big)\Big)\mathrm{d}t - \mathrm{d}f_x(y-x) \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}f_{x+t(y-x)}(y-x) - \mathrm{d}f_z(y-x)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Thus

$$\|f(y)-f(x)-\mathrm{d}f_x(y-x)\|_F \leqslant C\int_0^1 \|t(y-x)\|_E^{\alpha}\|y-x\|_E\,\mathrm{d}t = \frac{C}{1+\alpha}\|y-x\|_E^{1+\alpha}.$$

对于逆命题，我们现在假设存在 $C'>0$，使得对所有 $x,y \in U$，

$$\|f(y)-f(x)-\mathrm{d}f_x(y-x)\|_F \leqslant C'\|y-x\|_E^{1+\alpha}.$$

我们还有

$$\|f(x)-f(y)-\mathrm{d}f_y(x-y)\|_F \leqslant C'\|y-x\|_E^{1+\alpha}.$$

因此，利用三角不等式，我们得到

$$\|(\mathrm{d}f_x-\mathrm{d}f_y)(x-y)\|_F \leqslant 2C'\|y-x\|_E^{1+\alpha}.$$

令 h 为一个满足以下条件的单位向量：

$$\|\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y\|_{\mathcal{L}} = \|(\mathrm{d}f_x-\mathrm{d}f_y)(h)\|.$$

[1]对某些作者而言，这可以作为满足 α-赫尔德条件的定义，例如参见 [22,第 138 页至 143]的附录 B

由于 U 是开集，存在 $z \in U$ 使得 $h \coloneqq \frac{z-x}{\|z-x\|}$ 且 $\|z-x\| \leqslant \|y-x\|$。我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y)(x-z) &= \mathrm{d}f_x(x-z) - \mathrm{d}f_y(x-y) + \mathrm{d}f_y(z-y) \\ &= \big(f(z) - f(x) - \mathrm{d}f_x(z-x)\big) + \big(f(x) - f(y) - \mathrm{d}f_y(x-y)\big) \\ &\quad - \big(f(z) - f(y) - \mathrm{d}f_y(z-y)\big)\end{aligned}$$

因此，连续使用三次三角不等式

$$\|(\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y)(x-z)\|_F \leqslant C'\|z-x\|^{1+\alpha} + C'\|x-y\|^{1+\alpha} + C'\|z-y\|^{1+\alpha}.$$

由于函数 $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{1+\alpha}$ 是凸的，我们得到

$$\|\frac{1}{2}(z-y)\|^{1+\alpha} \leqslant \frac{1}{2}\|z-x\|^{1+\alpha} + \frac{1}{2}\|x-y\|^{1+\alpha}.$$

Thus

$$\|(\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y)(x-z)\|_F \leqslant (1+2^\alpha)C'\|z-x\|^{1+\alpha} + (1+2^\alpha)C'\|x-y\|^{1+\alpha} \leqslant 2(1+2^\alpha)C'\|x-y\|^{1+\alpha}$$

这就是原因

$$\|\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y\|_{\mathcal{L}} \leqslant 2(1+2^\alpha)C'\|x-y\|_E^\alpha \leqslant 6C'\|x-y\|_E^\alpha.$$

□

对于 $\mathbb{E}^n$中的任意 C^1 子流形 M，记 g 为由 $\mathbb{E}^n$的内积在 M 上诱导的度量。我们也用 d_g 表示由 g诱导的测地距离。

引理 4.3. 设 $M \subset \mathbb{E}^n$ 是一个带边界或不带边界的紧致 C^1 子流形，则存在 $\lambda_M > 0$ 使得

$$\forall (x,y) \in M \times M, \quad \mathrm{d}_g(x,y) \leqslant \lambda_M \|x-y\|.$$

证明。记 m 为 M的维数。设 $x \in M$。若 x 位于 M的内部，则存在 $\mathbb{R}^m$的一个开集 V_x、$\varepsilon_x > 0$ 以及一个 C^1-微分同胚 $\varphi_x \colon M \cap B(x, \varepsilon_x) \to V_x$。若 x 位于 M 的边界上，则 V_x 是半空间 $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_+$的一个开集。在这两种情况下，我们还可以进一步假设 V_x 是一个凸空间。

由于 M 是紧致的，我们可以找到 $\varepsilon > 0$ 和一个整数 $k \in \mathbb{N}$，使得有若干个形如 $M \cap B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ 的开集覆盖 M（请注意，半径为 $\frac{\varepsilon}{2}$）。接着，我们将上述的 C^1-微分同胚记为 φ_i φ_{x_i}。然后定义

$$C_1 = \max_{i \in \{1,\cdots,k\}} \|\mathrm{d}\varphi_i\|_{\mathcal{L}} \text{ and } C_2 = \max_{i \in \{1,\cdots,k\}} \big\|\mathrm{d}\varphi_i^{-1}\big\|_{\mathcal{L}}.$$

设 $x, y \in M$。根据 $\|x-y\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ 是否成立，我们分两种情况讨论。若 $\|x-y\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$，则存在 $i \in \{1, \cdots, k\}$ 使得 $x, y \in M \cap B(x_i, \varepsilon)$。事实上，存在一个球 $B(x_i, \varepsilon/2)$ 包含 x；又由于 $\|x-y\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$，球 $B(x_i, \varepsilon)$ 也包含 y。

我们接着定义一条路径 $\gamma \colon [0,1] \to M$，连接 x 和 y，如下所示

$$\gamma(t) = \varphi_i^{-1}\big((1-t)x' + ty'\big)$$

whe关于 $x' = \varphi_i(x)$ 和 $y' = \varphi_i(y)$。由于 V_i 是凸的，因此路径定义良好。我们有

$$\mathrm{d}_g(x,y) \leqslant \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t = \int_0^1 \|(\mathrm{d}\varphi_i^{-1})_{(1-t)x'+ty'} \cdot (y'-x')\|\mathrm{d}t \leqslant C_2\|y'-x'\|.$$

根据中值不等式，我们还有

$$\|y' - x'\| = \|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)\| \leqslant C_1\|y - x\|$$

因此，如果$\|x - y\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$，我们得到

$$\mathrm{d_g}(x, y) \leqslant C_1 C_2 \|x - y\|.$$

在另一种情形下，若 $\|x - y\| > \frac{\epsilon}{2}$,- 显然有

$$\mathrm{d_g}(x, y) \leqslant \mathrm{Diam}_g(M) \leqslant \frac{2\,\mathrm{Diam}_g(M)}{\varepsilon}\|x - y\|$$

其中 $\mathrm{Diam}_g(M) := \max_{x,\ y\in M} \mathrm{d_g}(x,\ y)$ 是有限的，因为 M是紧致的。总之，常数

$$\lambda_M = \max\left(C_1 C_2, \frac{2\,\mathrm{Diam}_g(M)}{\varepsilon}\right)$$

对这两种情形都适用。 □

下面的结果说明了引理(1) $\Longrightarrow$ (2)4.2中的蕴含关系在 U不一定是凸集的情形下仍然成立。

引理4.4。设 U 是 E^n 中的一个连通开集，使得 $M := U$ 是一个紧致连通的C^1 子流形，且 $f\colon U \to F$ 是一个 C^1 函数。若存在 $C > 0$ 使得对所有 $x, y \in U$，

$$\|\mathrm{d}f_x - \mathrm{d}f_y\|_{\mathcal{L}} \leqslant C\|x - y\|_{\mathbb{E}^n}^{\alpha},$$

那么对所有的 x、$y \in U$，

$$\|f(y) - f(x) - \mathrm{d}f_x(y - x)\|_F \leqslant \frac{C.\lambda_M}{1+\alpha}\|y - x\|_{\mathbb{E}^n}^{1+\alpha}$$

其中 λ_M 引理*4.3*中的常数。

证明。 M 是一个 C^1 流形，因此它局部是 C^1-路径连通的；但由于 M 是连通且紧致的，它是（整体） C^1-路径连通的。因此 U也同样如此。我们固定 x， $y \in U$和 γ：$[0, L] \to U$ 一条 C^1 路径，使得 $\gamma(0) = x$、 $\gamma(L) = y$，并且 γ 按弧长参数化。我们有

$$f(y) - f(x) - \mathrm{d}f_x(y - x) = \int_0^L \mathrm{d}f_{\gamma(t)}.\gamma'(t) - \mathrm{d}f_x.\gamma'(t)dt$$

因此，取范数并利用 f的假设，可得

$$\|f(y) - f(x) - \mathrm{d}f_x(y - x)\| \leqslant \int_0^L \left\|\mathrm{d}f_{\gamma(t)} - \mathrm{d}f_x\right\|_{\mathcal{L}} dt \leqslant C\int_0^L \|\gamma(t) - x\|^{\alpha}\mathrm{d}t.$$

然而，利用中值不等式

$$\int_0^L \|\gamma(t) - \gamma(0)\|^{\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^L t^{\alpha}\mathrm{d}t = \frac{L^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

根据 γ取值的下界，可得

$$\|f(y) - f(x) - \mathrm{d}f_x(y - x)\| \leqslant \frac{C}{1+\alpha}\mathrm{d_g}(x, y)^{1+\alpha}$$

因此，利用引理 4.3，我们得到

$$\|f(y) - f(x) - \mathrm{d}f_x(y - x)\| \leqslant \frac{C.\lambda_M}{1+\alpha}\|x - y\|^{1+\alpha}.$$

□

定义 4.4。 我们称 $f \in C^{1,\alpha}$ 为 **$C^{1,\alpha}$-微分同胚**，如果 f 有一个 $C^{1,\alpha}$ 逆映射。

反函数定理仍然适用于 $C^{1,\alpha}$ 映射（参见 [22, 第 141]页）。这里给出经典证明，因为稍后它将作为证明命题 4.7 的指引。

定理 4.5 （反函数定理）。设 $f\colon U \to F$ 为 C^{1}类, $^{\alpha}$ 满足 $\alpha \in [0,1]$，且设 $a \in U$。假设 $\mathrm{d}f_a$ 是 $\mathscr{L}(E,F)$ 的同构。那么存在一个开集 $V \subset U$，使得 $a \in V$，且 $f|_V$ 是其像集上的 $C^{1,\alpha}$-微分同胚。

证明。通过平移以及与 $(\mathrm{d}f_a)^{-1}$ 的复合，证明可归结为 $E = F$，$a = f(a) = 0$ 且 $\mathrm{d}f_0 = \mathrm{id}_E$ 的情形。令 $\varphi(x) := f(x) - x$，并对所有 $y \in E$，令 $T_y(x) := y - \varphi(x)$，使得方程 $y = f(x)$ 等价于 $T_y(x) = x$.。由于 $d\varphi_0 = 0$，在开球 $B(0, r)$ 上有 $\|d\varphi_x\|_{\mathcal{L}} < \frac{1}{2}$。利用中值不等式，对于所有$x_1, x_2 \in B(0, r)$，

$$\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

由以下事实

$$\|\varphi(x) - \varphi(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - 0\| \leqslant \frac{r}{2}$$

对每个 $x \in \overline{B(0,r)}$，根据三角不等式可推得

$$\|T_y(x)\| < \frac{r}{2} + \|y\|.$$

因此，对所有 $y \in B(0, \frac{r}{2})$，都有 $T_y\big(\overline{B(0,r)}\big) \subset \overline{B(0,r)}$。接着，我们对压缩映射 $T_y|_{B(0,r)}$ 应用巴拿赫不动点定理，其中对所有 $y \in B(0, \frac{r}{2})$，从而得到唯一 $x \in B(0,r)$ 的存在，使得 $f(x) = y$。我们定义 $V := f^{-1}\big(B(0, \frac{r}{2})\big)$，使得 $f|_V$ 是其像集上的双射，并用 g 表示其逆映射。设 $y_1, y_2 \in f(V)$ 且 $x_1, x_2 \in V$，使得 $f(x_1) = y_1$ 且 $f(x_2) = y_2$。我们有

$$g(y_2) - g(y_1) = x_2 - x_1 = T_{y_2}(x_2) - T_{y_1}(x_1) = y_2 - \varphi(x_2) - y_1 + \varphi(x_1).$$

由于 φ 是$_1$ $_2$-利普希茨的，我们得到

$$\|g(y_2) - g(y_1)\| \leqslant \|y_2 - y_1\| + \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| = \|y_2 - y_1\| + \frac{1}{2}\|g(y_2) - g(y_1)\|.$$

这表明映射 g 是 2-利普希茨的。

由于 f 属于 $C^{1,\alpha}$ 类，存在一个包含 0 的邻域 $V_0 \subset V$，使得 $\mathrm{d}f$ 是 α-赫尔德连续的。必要时缩小该邻域后，我们可以假设 V_0 是凸的。令 $x_1, x_2 \in V_0$, $y_1 = f(x_1)$ $y_2 = f(x_2)$,

$$y_2 - y_1 = \mathrm{d}f_{x_1}(x_2 - x_1) + R_{x_1}(x_2)$$

其中余项满足 $R_{x_1}(x_2) = O(\|x_2 - x_1\|^{1+\alpha})$，见引理 4.2。由于 $\mathrm{d}f_0$ 可逆，$\mathrm{d}f_x$ 在某个球 x 中的所有 $B(0, r')$上也可逆。我们将 r 替换为 $\min(r, r')$。复合映射 $(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}$，得到

$$g(y_2) - g(y_1) = x_2 - x_1 = (\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}(y_2 - y_1) - (\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2)\big). \tag{4.1}$$

由于 g 是 2-利普希茨的，因此我们有 $\|x_2 - x_1\| \leqslant 2\|y_2 - y_1\|$，从而

$$\begin{aligned}\frac{\|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2)\big)\|}{\|y_2 - y_1\|^{1+\alpha}} &\leqslant 2^{1+\alpha}\frac{\|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2)\big)\|}{\|x_2 - x_1\|^{1+\alpha}} \\ &\leqslant 2^{1+\alpha}\left\|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\left(\frac{R_{x_1}(x_2)}{\|x_2 - x_1\|^{1+\alpha}}\right)\right\| = O_{x_2 \to x_1}(1).\end{aligned}$$

由此可推得

$$(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2)\big) = O(\|y_2 - y_1\|^{1+\alpha}). \tag{4.2}$$

因此，由方程 (4.1)， g 可微，且 $\mathrm{d}^{g_{y_1}} = (\mathrm{d}f_{g(y_1)})^{-1}$. 由于 g 和 $\mathrm{d}f$ 连续， g 属于 C^1类。方程 (4.2) 和引理4.2 推出 g 属于 $C^{1,\alpha}$类。 □

引理 4.6. 设 V 是 E 中的一个开集，且 $f\colon V \to F$ 是其像集上的一个 C^1-微分同胚。设 $W \subset V$ 是某个 $a \in V$ 的凸邻域，使得 $\mathrm{d}f|_W$ 是 α-赫尔德的，赫尔德常数为 $\alpha \in [0,1]$，并且对所有 $x \in W$，

$$\big\|(\mathrm{d}f_x)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}} \leqslant 2\big\|(\mathrm{d}f_a)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}} \quad and \quad \big\|(\mathrm{d}f_a)^{-1}\circ \mathrm{d}f_x - id_E\big\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.3}$$

那么 $\mathrm{d}f^{-1}$ 在 $f(W)$ 上是 α-赫尔德连续的，且其赫尔德常数 C' 满足

$$C' \leqslant \frac{3.2^{3+\alpha}\big\|(\mathrm{d}f_a)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}}^{2+\alpha}}{1+\alpha}C$$

其中 C 是 $\mathrm{d}f|_W$ 的赫尔德常数。

˜证明。 考虑由下式定义的 $f\colon E \to E$

$$\tilde{f} = (\mathrm{d}f_a)^{-1}\circ t_{-f(a)}\circ f\circ t_a$$

˜ ˜其中 $t_v\colon x \mapsto x+v$。注意到 $f(0) = 0$ 且 $\mathrm{d}f_0 = \mathrm{id}_E$。显然

$$\tilde{f}^{-1} = t_{-a}\circ f^{-1}\circ t_{f(a)}\circ \mathrm{d}f_a$$

thus

$$f^{-1} = t_a\circ \tilde{f}^{-1}\circ (\mathrm{d}f_a)^{-1}\circ t_{-f(a)}.$$

现在，由于 f 属于 $C^{1,\,\alpha}$类，对所有 $x_1,\ x_2 \in W$，我们有

$$y_2 - y_1 = \mathrm{d}f_{x_1}(x_2 - x_1) + R_{x_1}(x_2 - x_1)$$

其中 $f(x_1) = y_1$ 且 $f(x_2) = y_2$。根据引理 4.2，我们有

$$\|R_{x_1}(x_2 - x_1)\| = \|f(x_2) - f(x_1) - \mathrm{d}f_{x_1}(x_2 - x_1)\| \leqslant 6C\|x_2 - x_1\|^{1+\alpha}.$$

用 $(df_{x_1})^{-1}$ 复合，得到

$$f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1) = x_2 - x_1 = (df_{x_1})^{-1}(y_2 - y_1) - (df_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2 - x_1)\big)$$

因此

$$\|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1) - (\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}(y_2 - y_1)\| = \|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2 - x_1)\big)\|.$$

剩下的工作是求右侧项的上界。我们有

$$\|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2 - x_1)\big)\| \leqslant \big\|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big\|_{\mathcal{L}}\|R(x_2 - x_1)\| \leqslant 6C\big\|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big\|_{\mathcal{L}}\|x_2 - x_1\|^{1+\alpha}.$$

利用关于 4.3 的第一个假设 W，我们得到

$$\|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2 - x_1)\big)\| \leqslant 12C\big\|(\mathrm{d}f_a)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}}\|x_2 - x_1\|^{1+\alpha}. \tag{4.4}$$

由于

$$\mathrm{d}\tilde{f} = (\mathrm{d}f_a)^{-1}\circ \mathrm{d}f,$$

(4.3) 的第二个假设指出，对所有 $x \in W$

$$\left\| \mathrm{d}\tilde{f}_x - id_E \right\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

现在，使用与定理 4.5 的证明中相同的论证， g 为 $\tilde{f}^{-1}$，我们推得 $\tilde{f}^{-1}$ 是 2-Lipschitz 的，因此 f^{-1} 在 $2\left\|(\mathrm{d}f_a)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}}$ 上是 Lipschitz 的。换言之 W

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant 2\left\|(\mathrm{d}f_a)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}} \|y_2 - y_1\|.$$

将此结果代入不等式（4.4），可得

$$\|(\mathrm{d}f_{x_1})^{-1}\big(R_{x_1}(x_2 - x_1)\big)\| \leqslant 3.2^{3+\alpha} C \left\|(\mathrm{d}f_a)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}}^{2+\alpha} \|y_2 - y_1\|^{1+\alpha}.$$

根据引理 4.2， α-赫尔德常数 C' 在 df^{-1} 上的 $f(W)$ 满足

$$C' \leqslant \frac{3.2^{3+\alpha} \left\|(\mathrm{d}f_a)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}}^{2+\alpha}}{1+\alpha} C.$$

□

4.2 C^1 类子流形，α

本节的目标是证明，对于 q 中的任意一点 $C^{1,\alpha}$ 子流形 M，存在一个映射 h_q，使得 M 在局部是 h_q 的图像。此外，对于 q_0 中的任意 M，存在一个开集 U，使得所有 α-赫尔德常数 dh_q 在 $q \in M \cap U$ 上的取值都有界。此结论将在命题 4.7 中陈述，稍后将在定理 1.3 的证明中用到。

定义 4.5. 巴拿赫空间 E 的子集 M 是一个 $\boldsymbol{C^{1,\alpha}}$ **子流形**，如果对所有 $p \in M$，都存在包含 p 的 E 的开集 $\mathcal{U}$，以及一个 $C^{1,\alpha}$-微分同胚 $\varphi : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset F \times G$，使得

$$\varphi(M \cap \mathcal{U}) = \mathcal{V} \times \{0\}$$

其中， $\mathcal{V}$ 是巴拿赫空间 F 的一个开子集， $\mathcal{W}$ 是巴拿赫空间 G 的一个开子集，且 $0 \in \mathcal{W}$。

注 4.1. 由反函数定理可知，子流形的所有经典局部刻画——即作为图像、作为淹没映射的零点集，以及作为参数化的像集——都有它们的 $C^{1,\alpha}$ 对应形式。

命题 4.7. 设 $\mathbb{E}^n$ 是 $C^{1,\alpha}$ 子流形，且 $q_0 \in M$。存在 q_0 的一个开邻域 $U \subset \mathbb{E}^n$以及 $K = K(U) > 0$，使得对所有 $q \in M \cap U$

(1) 存在一个开集 $V_q \subset T_qM$，使得 M 局部是一个 $C^{1,\alpha}$ 函数$h_q : V_q \subset T_qM \to N_qM$ 的图像，即

$$M \cap U = \big\{\big(x, h_q(x)\big) \mid x \in V_q \subset T_qM\big\},$$

(2) $\mathrm{d}(h_q)$ 在 U 上是 α-赫尔德连续的，且其赫尔德常数不超过 K。

证明。对于任意 $q \in M$，记 π_q^T为到 $T_qM + q$ 上的正交投影，记 π_q^N为到 $N_qM + q$上的正交投影。为了证明该命题，我们只需证明存在 $U \subset \mathbb{E}^n$ —— q_0 的一个开邻域，以及 $K > 0$，使得

(i) 对所有 $q \in M \cap U$， $\pi_q^T|_{M\cap U}$ 在其像集上是一个 $C^{1,\alpha}$-微分同胚，

(ii) 对所有 $q \in M \cap U$， $\mathrm{d}\big(\pi_q^T|_{M\cap U}\big)^{-1}$ 在 $M \cap U$ 上是 α-赫尔德连续的，且其赫尔德常数不超过 K。

事实上，若令 $h_q = \pi_q^N \circ \left(\pi_q^T\right)^{-1}$，我们便恰好得到 (1) 和 $V_q = \pi_q^T(M \cap U)$。然后，由于 $\|\mathrm{d}(\pi_q^N)\| \leqslant 1$，根据链式法则可知，$\mathrm{d}(h_q)$ 在 V_q 上是 α-赫尔德连续的，且其赫尔德常数不超过 K，因此 (2) 得证。

（证明i）和(ii) 将在接下来的五个步骤中完成。前四个步骤将通过模仿定理(i) 4.5 的证明，并添加参数 $q \in M$. 来证明$q_0 \in M$ 和 $\psi\colon\ V_0 \subset \mathbb{R}^m \to U_0 \cap M$ 一个 $C^{1,\,\alpha}$ 的参数化，使得 M 满足 $\psi(0) = q_0$，其中 U_0 （分别为 V_0）是 $\mathbb{E}^n$ （分别为 $\mathbb{R}^m$）的开集。我们还假设 U_0 足够小，使得 $\mathrm{d}\psi$ 和 $\mathrm{d}(\psi^{-1})$ 是 α-赫尔德的。我们用 C_ψ 和 $C_{\psi^{-1}}$ 表示它们在 U_0 （分别为 V_0）上的赫尔德常数。对所有 $q \in U_0$，我们定义

$$\begin{array}{rccc} f_q\ :\ V_0 \subset \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(\psi^{-1})_q \circ t_{-q} \circ \pi_q^T \circ \psi(x) \end{array}$$

满足 $t_{-q}\colon\ x \mapsto x - q$。我们还定义 $\varphi_q = f_q - id$，并且对所有 $y \in \mathbb{R}^m$，定义$T_{y,q}(x) = y - \varphi_q(x)$。于是得到，

$$y = f_q(x) \iff T_{y,q}(x) = x.$$

为了证明 $\pi_q^T|_M$ 在局部是双射，我们需要证明 f_q 是双射，而这被重新表述为关于$T_{y,q}$的不动点问题

步骤 1. 本步骤的目标是证明存在 $r > 0$，使得$T_{y,q}$ 在 $B(0,r)$上是1 2-利普希茨的，对每一个 $y \in \mathbb{R}^m$和 $q \in \psi\big(B(0,r)\big)$都成立。利用链式法则，对 $x \in V_0$我们有，

$$\mathrm{d}(\varphi_q)_x = \mathrm{d}(f_q)_x - id = \mathrm{d}(\psi^{-1})_q \circ \mathrm{d}\left(\pi_q^T\right) \circ \mathrm{d}\psi_x - id.$$

此外，由于 $\pi_q^T(q) = q$ 且$\mathrm{d}(\pi_q^T)_q|_{T_qM} = id_{T_qM}$，我们有

$$\mathrm{d}(f_q)_{\psi^{-1}(q)} = \mathrm{d}(\psi^{-1})_q \circ \mathrm{d}(t_{-q}) \circ \mathrm{d}\left(\pi_q^T\right) \circ \mathrm{d}\psi_{\psi^{-1}(q)} = \mathrm{d}(\psi^{-1})_q \circ \mathrm{d}\psi_{\psi^{-1}(q)} = id_{\mathbb{R}^m}$$

因此 $\|\mathrm{d}(\varphi_{q_0})_0\| = 0$。此外，我们知道，并且该映射

$$(x,q) \in V_0 \times M \cap U_0 \mapsto \|\mathrm{d}(\psi^{-1})_q \circ \mathrm{d}\left(\pi_q^T\right) \circ \mathrm{d}\psi_x - id\|$$

是连续的。因此，存在 $r > 0$，使得 $B(0,r) \subset V_0$，并且对所有$(x,q) \in B(0,r) \times \psi\big(B(0,r)\big)$，我们有

$$\|\mathrm{d}(\varphi_q)_x\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.5}$$

利用中值不等式，我们得到对于所有 $q \in \psi\big(B(0,r)\big)$ 和 $x_1, x_2 \in B(0,r)$,

$$\|\varphi_q(x_1) - \varphi_q(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

thus

$$\|T_{y,q}(x_1) - T_{y,q}(x_2)\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

步骤 2. 存在 $r' > 0$ 使得

$$M \cap B(q_0, r') \subset \psi\big(B(0, \frac{r}{8})\big)$$

并定义

$$U := B\Big(q_0, \frac{r'}{2}\Big).$$

我们固定 $q \in U \cap M$。我们的目标是证明，经过限制到一个选取恰当的集合后，π_q^T是到其像集上的双射。我们有

$$U \cap M \subset M \cap B(q_0, r') \subset \psi\big(B(0, \frac{r}{8})\big) \subset \psi\big(B(0,r)\big)$$

因此，对于 $q \in U \cap M$， $T_{y,q}$在 $B(0, r)$ 上是 12-利普希茨的。因此，对于 $T_{y,q}$成为压缩映射，我们只需证明 $T_{y,q}(\overline{B(0, \frac{r}{2})}) \subset B(0, \frac{r}{2})$。现在假设 $y \in B(0, \frac{r}{8})$，那么对于所有 $x \in \overline{B(0, \frac{r}{2})}$，我们有

$$\begin{aligned}\|\varphi_q(x)\| = \|\varphi_q(x) - \varphi_q(\psi^{-1}(q))\| &\leqslant \frac{1}{2}\|x - \psi^{-1}(q)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|\psi^{-1}(q)\| < \frac{r}{4} + \frac{r}{8} \leqslant \frac{3r}{8}\end{aligned}$$

因为 $q \in U \cap M \subset \psi(B(0, \frac{r}{8}))$。因此，我们得到

$$\|T_{y,q}(x)\| < \frac{3r}{8} + \|y\| < \frac{3r}{8} + \frac{r}{8} \leqslant \frac{r}{2}.$$

由于 $\overline{B(0, \frac{r}{2})}$ 是一个完备度量空间，我们可以对所有 $y \in B(0, \frac{r}{8})$ 应用$T_{y,q}|_{B(0,\frac{r}{2})}$的巴拿赫不动点定理。因此，对所有 $y \in B(0, \frac{r}{8})$，都存在唯一的 $x \in B(0, \frac{r}{2})$，使得 $f_q(x) = y$。因此，如果我们定义 $U_{q'} \subset \mathbb{R}^m$ 使得

$$U_q = (f_q)^{-1}(B(0, \frac{r}{8}))$$

那么 $f_q|_{U_q}$ 是其像集上的一个双射（因为 $B(0, \frac{r}{8})$）。由于 $\mathrm{d}(\psi^{-1})_q$ 且 ψ 是双射，因此对所有 $q \in U \cap M$，$\pi_q^T|_{\psi(U_q)}$ 是其像集上的一个双射。

步骤 3。这一步的目标是证明 (i)。我们首先证明，只需对 $r' > 0$ 作较小的选择，就有对所有 $q \in M \cap B(q_0, r')$

$$T_qM \cap B(0, r') \subset \mathrm{d}\psi_{\psi^{-1}(q)}\Big(B(0, \frac{r}{8})\Big). \tag{4.6}$$

事实上，由于 $x \mapsto \mathrm{d}\psi_{\psi^{-1}(x)}$的连续性，函数

$$\lambda : q \in \psi(B(0, \frac{r}{8})) \mapsto \sup_{\|v\|=1} \|\mathrm{d}\psi_{\psi^{-1}(q)}.v\|$$

是连续的。由于它定义在一个紧集上，因此存在最小值 λ_0。于是，对所有 $q \in \psi(B(0, \frac{r}{8}))$，都有

$$T_qM \cap B(0, \frac{\lambda_0 r}{8}) \subset T_qM \cap B(0, \frac{\lambda(q)\, r}{8}) \subset \mathrm{d}\psi_{\psi^{-1}(q)}\Big(B(0, \frac{r}{8})\Big).$$

因此，取 r' 为前述 r' 与 $\frac{\lambda_0 r}{8}$ 中的较小值，即得（4.6）。现在我们证明

$$U \cap M \subset \bigcap_{q \in M \cap B(q_0, \frac{r'}{4})} \psi(U_q).$$

设 $q \in B(q_0, \frac{r'}{2})$，由于 π_q^T 收缩距离，我们有

$$\pi_q^T\Big(B\Big(q_0, \frac{r'}{2}\Big)\Big) \subset B\Big(\pi_q^T(q_0), \frac{r'}{2}\Big)$$

and

$$\|\pi_q^T(q_0) - q\| \leqslant \|q_0 - q\| \leqslant \frac{r'}{2}$$

thus

$$t_{-q} \circ \pi_q^T\Big(B\Big(q_0, \frac{r'}{2}\Big)\Big) \subset B(0, r').$$

因此，

$$t_{-q}\circ\pi_q^T(U\cap M)\subset B(0,r')\cap T_qM.$$

根据方程 (4.6)，我们有

$$t_{-q}\circ\pi_q^T(U\cap M)\subset \mathrm{d}\psi_{\psi^{-1}(q)}\big(B(0,\frac{r}{8})\big).$$

H根据 f_q 的定义可知，我们有 than $(t_q\circ\pi_q^T)^{-1}\circ\mathrm{d}^{\psi_{\psi^{-1}(q)}}=\psi\circ(f_q)^{-1}$，因此

$$U\cap M\subset\psi\circ\big(f_q\big)^{-1}\Big(B\big(0,\frac{r}{8}\big)\Big)=\psi(U_q).$$

现在，根据步骤 2，对于所有 $q\in U\cap M$， $\pi_q^T|_U$ 在其像集 V 上是一个双射 $_q$.

步骤 4。 在这一步中，与定理 4.5 的证明类似，我们证明所有 $\pi_q^T|_{U\cap M}$ 都是其各自像集上的 $C^{1,\alpha}$-微分同胚。
固定 $q\in U\cap M$。首先，我们将证明 f_q^{-1} 是连续的。令 $y_1,y_2\in B(0,\frac{r}{8})$。那么存在 -$x_1$, $x_2\in U_q$，使得 $f_q(x_1)=y_1$ 且 $f_q(x_2)=y_2$。我们有

$$f_q^{-1}(y_2)-f_q^{-1}(y_1)=x_2-x_1=T_{y_2,q}(x_2)-T_{y_1,q}(x_1)=y_2-\varphi_q(x_2)-y_1+\varphi_q(x_1).$$

由于 φ_q 是1 2-Lipschitz，我们得到

$$\|f_q^{-1}(y_2)-f_q^{-1}(y_1)\|\leqslant\|y_2-y_1\|+\frac{1}{2}\|x_2-x_1\|=\|y_2-y_1\|+\frac{1}{2}\|f_q^{-1}(y_2)-f_q^{-1}(y_1)\|$$

thus

$$\|f_q^{-1}(y_2)-f_q^{-1}(y_1)\|\leqslant 2\|y_2-y_1\|.$$

这表明映射 f_q^{-1}是 2-Lipschitz，因此连续。

其次，我们将利用引理 4.2证明 f_q^{-1}属于 $C^{1,\alpha}$ 类。由于 $\mathrm{d}(f_{q_0})_0$可逆，且 $(q,x)\mapsto\mathrm{d}(f_q)_x$ 连续，我们可以设 r 足够小，使得对所有 $q\in U$ 和 $x\in U_q$，$\mathrm{d}(f_q)_x$ 均可逆。我们回顾一下，$\mathrm{d}\psi$ 和 $\mathrm{d}(\psi^{-1})$在$U\cap M$和 $\psi(U\cap M)$上均为 α-赫尔德连续。对所有 $q\in U\cap M$， $d\pi_q^T$均为 1-利普希茨连续，因此 $\mathrm{d}(f_q)$在 $W:=\psi^{-1}(U\cap M)$上是 α-赫尔德连续的。如有需要，缩小 U后，我们可以假设 W是凸的。固定$q\in U\cap M$，令 $x_1,x_2\in W$, $y_1=f_q(x_1)$ $y_2=f_q(x_2)$,

$$y_2-y_1=\mathrm{d}(f_q)_{x_1}(x_2-x_1)+R_{x_1}(x_2)$$

其中余项满足 $R_{x_1}(x_2)=O(\|x_2-x_1\|^{1+\alpha})$，参见引理 4.2。复合映射 $\big(\mathrm{d}(f_q)_{x_1}\big)^{-1}$，我们得到

$$(f_q)^{-1}(y_2)-(f_q)^{-1}(y_1)=x_2-x_1=\big(\mathrm{d}(f_q)_{x_1}\big)^{-1}(y_2-y_1)-\big(\mathrm{d}(f_q)_{x_1}\big)^{-1}\big(R_{x_1}(x_2)\big).\quad(4.7)$$

由于 $(f_q)^{-1}$ 是 2-利普希茨的，因此有 $\|x_2-x_1\|\leqslant 2\|y_2-y_1\|$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\|\big(\mathrm{d}(f_q)_{x_1}\big)^{-1}\big(R_{x_1}(x_2)\big)\|}{\|y_2-y_1\|^{1+\alpha}}&\leqslant 2^{1+\alpha}\frac{\|\big(\mathrm{d}(f_q)_{x_1}\big)^{-1}\big(R_{x_1}(x_2)\big)\|}{\|x_2-x_1\|^{1+\alpha}}\\&\leqslant 2^{1+\alpha}\left\|\big(\mathrm{d}(f_q)_{x_1}\big)^{-1}\left(\frac{R_{x_1}(x_2)}{\|x_2-x_1\|^{1+\alpha}}\right)\right\|=O_{x_2\to x_1}(1).\end{aligned}$$

我们由此推得

$$\big(\mathrm{d}(f_q)_{x_1}\big)^{-1}\big(R_{x_1}(x_2)\big)=O(\|y_2-y_1\|^{1+\alpha}).\quad(4.8)$$

因此，由方程（4.7），f_q^{-1}是可微的，且

$$\mathrm{d}\big((f_q)^{-1}\big)_{y_1} = \big(\mathrm{d}(f_q)_{(f_q)^{-1}(y_1)}\big)^{-1}.$$

由于 f_q^{-1}和 $\mathrm{d}(f_q)$ 连续， f_q^{-1}属于 C^1类。方程 (4.8) 和引理 4.2 表明 f_q^{-1}属于 $C^{1,\alpha}$类。对于所有 $q \in U$，我们回顾

$$(\pi_q^T)^{-1}|_{V_q} = \psi \circ f_q^{-1} \circ \mathrm{d}\big(\psi^{-1}\big)_q \circ t_{-q}|_{V_q}$$

其中 $V_q = \pi_q^T(U \cap M)$。因此，这些 $\pi_q^T|_{U\cap M}$ 是各自像集上的 $C^{1,\alpha}$-微分同胚。

步骤 5。 在最后这一步中，我们将证明命题的点 (ii)。记 C_ψ和 $C_{\psi^{-1}}$分别为 $\mathrm{d}\psi$ 和 $\mathrm{d}(\psi^{-1})$ 在 $U\cap M$ 和 $\psi(U\cap M)$ 上的 α-赫尔德常数。对于所有 $q \in U\cap M$，由于 $d\pi_q^T$ 是 1-利普希茨连续的，我们有 $\mathrm{d}(f_q)$ 在 $W = \psi^{-1}(U\cap M)$ 上是 α-赫尔德连续的，记其常数为 C_{f_q}。我们有

$$C_{f_q} \leqslant \|\mathrm{d}\psi_q\|_{\mathcal{L}}\, C_\psi \leqslant \big\|(\mathrm{d}\psi)_{|U}\big\|_{\mathcal{L}}\, C_\psi$$

其中右侧项有限，因为 U 有界。此外，对于所有 $q \in U\cap M$，由于$\mathrm{d}(f_q)_{\psi^{-1}(q)} = id_{\mathbb{R}^m}$ 并利用方程（4.5），我们对所有 $x \in W$

$$\|\mathrm{d}(f_q)_x - id_{\mathbb{R}^m}\|_{\mathcal{L}} = \|\mathrm{d}(\varphi_q)_x\|_{\mathcal{L}} \leqslant \frac{1}{2}$$

这恰好是引理4.3的条件（4.6 ）中的第一个不等式，在点 $\psi^{-1}(q)$以及开集 W上。此外，我们有

$$\Big\|\big(\mathrm{d}(f_q)_x\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}} - 1 \leqslant \Big\|\big(\mathrm{d}(f_q)_x\big)^{-1} - id_{\mathbb{R}^m}\Big\|_{\mathcal{L}} \leqslant \Big\|\big(\mathrm{d}(f_q)_x\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}} \|\mathrm{d}(f_q)_x - id_{\mathbb{R}^m}\|_{\mathcal{L}}$$

因此，利用前面的两个不等式，我们得到

$$\Big\|\big(\mathrm{d}(f_q)_x\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}} - 1 \leqslant \frac{1}{2}\Big\|\big(\mathrm{d}(f_q)_x\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}}$$

这意味着，对于所有 $x \in W$，

$$\Big\|\big(\mathrm{d}(f_q)_x\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}} \leqslant 2$$

这就是条件（4.3）中的第二个不等式。因此，我们可以将引理4.6 应用于f_q 在点 $\psi^{-1}(q)$ 以及凸开集 W 上。因此 $\mathrm{d}(f_q)^{-1}$ 是 α- 赫尔德连续于 $f_q(W') = \mathrm{d}\psi_q(V_q - q)$，且其常数 $C_{f_q^{-1}}$满足

$$C_{f_q^{-1}} \leqslant \frac{3.2^{3+\alpha}\Big\|\big(\mathrm{d}(f_q)_{\psi^{-1}(q)}\big)^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}}}{1+\alpha} C_{f_q} \leqslant \frac{3.2^{3+\alpha}}{1+\alpha}\,\big\|(\mathrm{d}\psi)_{|U}\big\|_{\mathcal{L}}\, C_\psi$$

因为 $\mathrm{d}(f_q)_{\psi^{-1}(q)} = id_{\mathbb{R}^m}$。我们回顾一下

$$(\pi_q^T)^{-1}|_{V_q} = \psi \circ f_q^{-1} \circ d\big(\psi^{-1}\big)_q \circ t_{-q}|_{V_q}$$

并且 $\mathrm{d}(\psi^{-1})$、 $d(f_q^{-1})$ 分别在 $\psi(U\cap M)$ 和 $f_q(W)$ 上是 α-赫尔德连续的。因此，$\mathrm{d}((\pi_q^T)^{-1})|_{U\cap M}$在 V_q 上是 α-赫尔德连续的，其赫尔德常数有一个与 q 无关的上界。

□

4.3 定理1.3的证明

为了证明定理1.3，我们需要以下结果。

引理4.8. 设 M 是 $\mathbb{E}^n$ 中的一个维数为 m 的 C^1 子流形，且 $p \in M$。存在$R > 0$，使得对所有 $0 < r \leqslant R$，$M \cap B(p,\ r)$ 都是带边界的 $\mathbb{E}^n$ C^1 子流形。

证明。 设 g 是映射 $x \mapsto \|x-p\|^2$在 M 上的限制。交集 $M \cap B(x,\ r)$是下水平集 $\{g(x) \leqslant r\}$. 众所周知，如果 r 是函数 C^1 fonction$g$的正则值，那么 $\{g(x) \leqslant r\}$ 是带边界 $g^{-1}(r)$的 C^1 子流形（见 [19], 引理3，第12页）。数 r 是正则值，当且仅当对所有 $x \in g^{-1}(r)$，都有：$\operatorname{rank} \mathrm{d} g_x = 1$。令$F$: $U \subset T_pM \to M \subset \mathbb{E}^n$，$u \mapsto F(u) = (u,\ f(u))$为 M 的一个局部笛卡尔参数化，使得 $F(0) = p$ 且$\mathrm{d} f_0 = 0$. 在这些坐标下，映射 g 及其梯度表示如下

$$g(u) = \|u\|^2 + \|f(u)\|^2 \quad \text{and} \quad \operatorname{grad} g(u) = 2u + 2[(Jac\, f)(u)]^T(f(u))$$

由于 f是 C^1，我们有 $f(u) = o(\|u\|)$，且 $\lim_{u\to 0}(Jac\, f)(u) = 0$。因此

$$2[(Jac\, f)(u)]^T(f(u)) = o(\|u\|).$$

这表明，当 $r > 0$ 足够小时，$\operatorname{grad} g(u) \neq 0$. 引理的陈述得证。

□

我们回顾一下，$M^d = \{x \in \mathbb{E}^n \mid \mathrm{d}_M(x) \leqslant d\}$。

命题 4.9. 设 M 是 E^n 的，$^{\alpha}$ 无边界的紧子流形。存在 $d > 0$和 $C > 0$，使得对于任意 $p \in \mathscr{M}(M) \cap M^d$以及 q_1和 q_2这两个 p 在 M 上的投影，它们实现了 $\Gamma_K(p)$ 的直径，则有

$$1 - \|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant C\,\|q_1 - q_2\|^{2\alpha}.$$

证明。 根据命题 4.7，由 M的紧性，存在 $R > 0$ 和 $K > 0$，使得若 q_1，$q_2 \in M$ 验证

$$\|q_1 - q_2\| < R$$

t因此，$M \cap B(q_1, R)$ 局部上是一个 $C^{1,\alpha}$ 函数的图像 $h : V \cap T_{q_1}M \to N_{q_1}M$ 即

$$M \cap B(q_1, R) = \big\{(x, h(x)) \mid x \in V \subset T_{q_1}M\big\} \quad \text{and} \quad \mathrm{d}h_{x_1} = 0$$

其中 $q_1 = (x_1, 0)$，且 V 是 $T_{q_1}M$ 的一个开集。此外，$\mathrm{d}h$ 在 V 上是 α-赫尔德的，且 $\mathrm{d}h$ 的 α-赫尔德常数小于 K。此外，当 R 足够小时，$M \cap B(q_1, R)$ 和 V 是弧连通集。

设 $p \in \mathscr{M}(M)$，并设 q_1 和 q_2 是 p 在 M 上的两个投影，它们实现了 $\Gamma_K(p)$ 的直径。我们有

$$\frac{1}{2}\|q_1 - q_2\| \leqslant \mathrm{d}_M(p).$$

因此，在证明的其余部分，我们将假设 $d_M(p) \leqslant d := \frac{R}{2}$。 –

令 h ：如上所述的 $V \subset T_{q_1}M \to N_{q_1}M$，并将 $q_1 = (x_1, 0)$ 和$q_2 = (x_2, h(x_2))$ 记作 $x_2 \in V$（见图5）。为证明我们的结果，我们需要建立三个不等式。映射 h 是一个 $C^{1,\alpha}$ 函数，且 $\mathrm{d}h$在 $V \subset T_{q_1}M$上是常数为 K的 α-赫尔德连续函数。利用引理 4.8，对于足够小的 R，$B(q_1, R) \cap M$ 是一个紧致连通的 C^1 子流形。由于 V是 $\pi_{q_1}^T$对 $B(q_1, R) \cap M$的像集，因此我们有

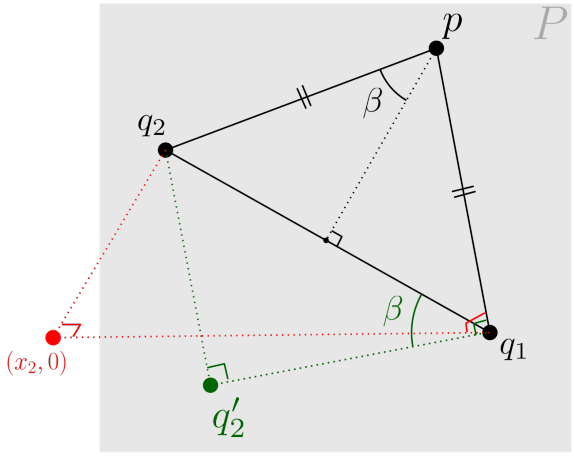


图5：证明的构造。

满足 $\overline{V}$ 是一个连通紧致的 C^1 子流形，且包含于 $\mathbb{E}^n$。若将引理 4.4应用于 $h|_V$，则有

$$\|(x_2,0)-q_2\| = \|h(x_2)\| = \|h(x_2)-h(x_1)-\mathrm{d}h_{x_1}.(x_2-x_1)\| \leqslant \frac{C_h\lambda_M}{1+\alpha}\|x_2-x_1\|^{1+\alpha}$$

因为 $h(x_1) = 0$ 且$\mathrm{d}h_{x_1} = 0$ 满足 λ_M 引理4.3 中 M的常数。因此，我们得到第一个不等式

$$\|(x_2,0)-q_2\| \leqslant K'\|(x_2,0)-q_1\|^{1+\alpha}. \tag{4.9}$$

其中 $K' = \frac{K\lambda_M}{1+\alpha}$。

其次，我们定义 $\mathscr{P}$ 包含 p、 q_1 和 q_2 的仿射平面，并将 q_2 在 pq_1 的正交方向上投影到 $\mathscr{P}$ 所得的正交投影记为 q_2'，其中 $\mathscr{P}$ 垂直于 $(x_2, 0)$（见图5）。我们注意到，由于 $(x_2, 0) - q_1 \in T_qM$ 且 $pq_1 \in N_{q_1}M$ （见引理 3.1 ），因此点 $(x_2, 0)$、 q_1 和 p 构成一个直角。于是，由于 q_2q_2' 是 $(x_2, 0) - q_2$的正交投影，我们得到第二个不等式

$$\|q_2'-q_2\| \leqslant \|(x_2,0)-q_2\|. \tag{4.10}$$

对于最后一个不等式，我们注意到 q_2'、 q_1 和 q_2 在 q_2' 处构成一个直角三角形，并且 $(x_2, 0)$、 q_1 和 q_2 也在 $(x_2, 0)$ 处构成一个直角三角形，因此利用勾股定理，我们得到

$$\|q_2-q_2'\|^2 + \|q_2'-q_1\|^2 = \|(x_2,0)-q_2\|^2 + \|(x_2,0)-q_1\|^2$$

因此，利用不等式（4.10），我们得到

$$\|(x_2,0)-q_1\| \leqslant \|q_2'-q_1\|. \tag{4.11}$$

综合不等式（4.9）、（4.10）和（4.11），我们有

$$\|q_2'-q_2\| \leqslant \|(x_2,0)-q_2\| \leqslant K'\|(x_2,0)-q_1\|^{1+\alpha} \leqslant K'\|q_2'-q_1\|^{1+\alpha}$$

但由于 $\|q_2'-q_1\| \leqslant \|q_2-q_1\|$，我们得到

$$\|q_2'-q_2\| \leqslant K\|q_2-q_1\|^{1+\alpha}.$$

现在，我们回顾一下， p、 q_1 和 q_2 构成一个等腰三角形，并将由 q_1、 p 和 q_2形成的半角记为$\beta \in [0, \frac{\pi}{2}[$。我们有

$$\sin(\beta) = \frac{\|q_2'-q_2\|}{\|q_1-q_2\|} \leqslant K'\|q_2-q_1\|^{\alpha}.$$

最后，由引理3.3，可得

$$1-\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant \frac{2}{1+\frac{1}{n}}\sin^2(\beta) \leqslant \underbrace{\frac{2(K')^2}{1+\frac{1}{n}}}_{C}\|q_1-q_2\|^{2\alpha}.$$

□

定理 *1.3* 的证明。 设 $p\in\mathbb{E}^n\setminus M$。不妨设 p 属于 M的中轴，否则结论显然成立。设 q_1 和 q_2 是实现 p 在 M上的投影点集合直径的两个投影。根据命题 4.9，存在$d_0>0$ 和 $C'>0$ （都仅依赖于 M），使得若 $\mathrm{d}_M(p)<d_0$，则

$$1-\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant C'\|q_1-q_2\|^{2\alpha}.$$

从现在起，假设 $\mathrm{d}_M(p)<d_0$。利用三角不等式

$$\|q_1-q_2\| \leqslant \|q_1-\Omega_M(p)\|+\|q_2-\Omega_M(p)\| \leqslant 2\,\mathscr{R}_M(p)$$

于是由命题2.2

$$\|q_1-q_2\|^2 \leqslant 4\,\mathscr{R}_M(p)^2 = 4d_M(p)^2\Big(1-||\nabla \mathrm{d}_M(p)||^2\Big).$$

因此，我们得到

$$1-\|\nabla d_M(p)\|^2 \leqslant 4^\alpha C'\,d_M(p)^{2\alpha}\Big(1-\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2\Big)^\alpha.$$

现在假设 $\mathrm{d}_M(p)\geqslant d_0$，由于 $\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|\leqslant 1$，可得

$$1-\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant \big(1-\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2\big)^\alpha.$$

于是令 $C=\max\big(4^\alpha C',\ \frac{1}{d_0^{2\alpha}}\big)$，则对所有 $p\in\mathbb{E}^n\setminus M$，

$$1-\|\nabla d_M(p)\|^2 \leqslant C\,d_M(p)^{2\alpha}\Big(1-\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2\Big)^\alpha.$$

特别地，如果 $\alpha<1$，则有

$$1-\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2 \leqslant C^{\frac{1}{1-\alpha}}\,\mathrm{d}_M(p)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}$$

并且如果 $\alpha=1$,

$$1-\|\nabla d_M(p)\|^2 \leqslant C\,d_M(p)^2\Big(1-\|\nabla \mathrm{d}_M(p)\|^2\Big).$$

每当 $\mathrm{d}_M(p)<\frac{1}{\sqrt{C}}$ 时，上述不等式成立的唯一可能条件是

$$1-\|\nabla d_M(p)\|^2=0.$$

□

推论 *4.1* 的证明。 取定理 1.3 中的下界，可得对所有 $d>0$

$$1-\chi_M(d)^2 \leqslant C\,d^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

我们知道 $\chi_M(0)=1$，并且 $0\leqslant 1-\chi_M(d)$，因此有

$$0\leqslant \big(1+\chi_M(d)\big)\frac{1-\chi_M(d)}{d} \leqslant C\,d^{\frac{3\alpha-1}{1-\alpha}}.$$

因此，当 d 趋于 0 时，我们得到所需的结果。 □

5 定理1.3中不等式的最优性

本节的目标是证明定理 1.3中出现的指数的最优性。为此，我们研究以下曲线族

$$\mathcal{C}_\alpha := \{(t, |t|^{1+\alpha}), t \in \mathbb{R}\},$$

其中 $\alpha \in (0,1)$。注意，每条曲线 $\mathcal{C}_\alpha$ 属于 $C^{1\text{类}\alpha}$，但不属于 $C^{1\text{类}\alpha'}$，对任意$\alpha' > \alpha$ 均如此。以下命题是主要结果，它指出定理1.3 中的指数对这些曲线是可达的。

命题 5.1. 设 $\alpha \in [0,1[$。曲线 $\mathcal{C}_\alpha$ 的临界函数 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足

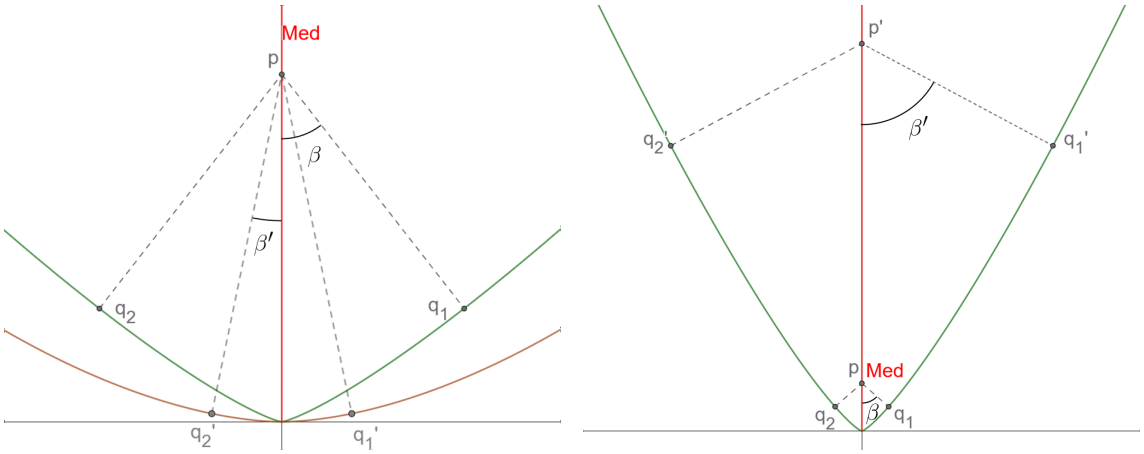
$$1 - \chi^2(d) \underset{d\to 0}{\sim} (1+\alpha)^{\frac{2}{1-\alpha}} d^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

注意，定理1.3适用于无边界的紧子流形。曲线$\mathcal{C}_\alpha$ 并不紧致。不过，我们可以将每条 $\mathcal{C}_\alpha$ 限制在任意区间 $[-a,a]$ 上，并用一条 C^2 类正则曲线连接其两个端点，从而构造出一个无边界的紧致1维流形，其临界函数与 $\mathcal{C}_\alpha$的临界函数相同。

几何解释。 给定一点 $p \in \mathscr{M}(\mathcal{C}_\alpha)$，下文将证明它只有两个投影 q_1，q_2 且这两个投影关于竖直轴对称。我们用 $\beta = \beta_p \in [0, \frac{\pi}{2}[$ 表示由 q_1、p 和 q_2 形成的半角。容易验证，该角与广义梯度之间满足以下公式

$$\|\nabla \mathrm{d}_{\mathcal{C}_\alpha}(p)\| = \cos\beta.$$

由于所有曲线 $\mathcal{C}_\alpha$ 都属于 C^1类，根据定理1.1，当 p 趋于 $\mathcal{C}_\alpha$时，角度 β趋于 0。命题 5.1 指出，对于这些曲线 $\mathcal{C}_\alpha$，α 越大，角度 β 趋于零的速度就越快。图6对此作了说明。



(a) 曲线 $\mathcal{C}_\alpha$（$\alpha = 5/4$ 为绿色，$\alpha = 7/4$为红色）。q_1、q_2（分别为 q_1'、q_2'）是 p在绿色（分别为红色）曲线上的投影。角度β 取决于曲线的正则性。

(b) 曲线 $\mathcal{C}_\alpha$ 及其 $\alpha = 5/4$（绿色）和中轴（红色）。当距离趋于 0 时，角度 β 趋于零。（请注意，与 (a) 相比，此处采用了缩小视图。）

图 6：不同的曲线 $\mathcal{C}_\alpha$ 及其中轴。

推论 5.2. 设 $\alpha \in [0,1[$。曲线 $\mathcal{C}_\alpha$ 的临界函数 $\chi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 0 处的导数满足

$$\chi'(d) \underset{d\to 0}{\sim} -\frac{\alpha(1+\alpha)^{\frac{2}{1-\alpha}}}{1-\alpha} d^{\frac{3\alpha-1}{1-\alpha}}.$$

注意，临界函数在零点处的导数具有一种非常特殊的行为，让人联想到分形对象的豪斯多夫维数。事实上，根据推论 5.2 可知，曲线 $\mathcal{C}_\alpha$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的临界函数 χ 满足

$$\chi'(0) = \begin{cases} -\infty & \text{if } \alpha < 1/3 \\ -C & \text{if } \alpha = 1/3 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

其中 $C = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3$。在图 7所示的数值实验中也可以观察到同样的行为。

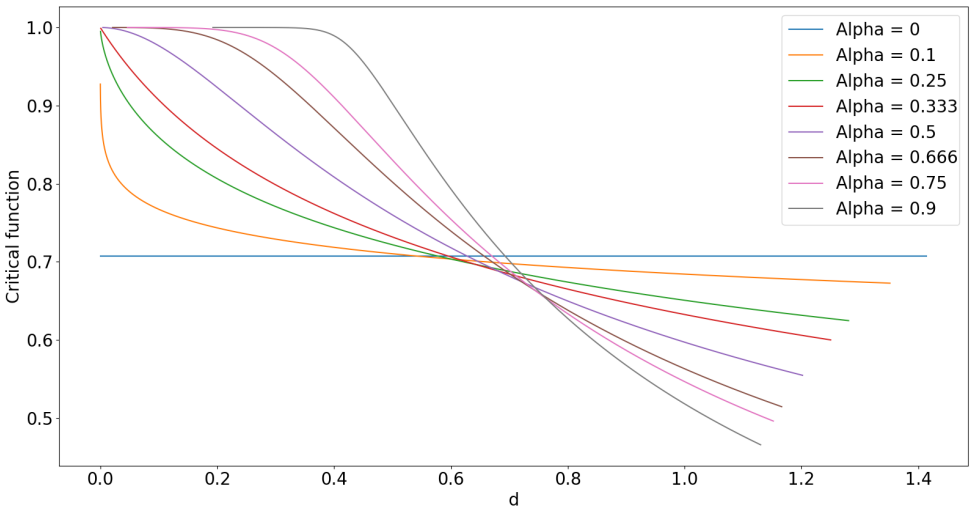


图 7：曲线 $\mathcal{C}_\alpha$ 的临界函数 χ 的图像的计算机模拟，针对 α 的不同取值。

本节末尾专门证明命题 5.1 以及推论 5. 2.

5.1 关于中轴的初步结果

引理 5.3. 设 f : $t \in I \to t^{1+\alpha}$ ，其中 $\alpha \in [0, 1[$ ，且 I 为 $\mathbb{R}_+^*$ 中的一个开区间。设$K =$图像(f) 则 $\mathscr{M}(K) = \emptyset$。

证明。 我们假设该结果不成立，即 $\mathscr{M}(K) \neq \emptyset$。因此存在 $p = (u, v) \in \mathscr{M}(K)$，且 $q_1 = (t_1, f(t_1))$、 $q_2 = (t_2, f(t_2))$ 是 p 到 K 上的两个投影，其中 $t_1 \neq t_2$。我们可以假设 $t_2 > t_1 > 0$。我们有 $\mathsf{d}_K(q_1) = \mathsf{d}_K(q_2)$，因此它满足

$$(t_1 - u)^2 + (f(t_1) - v)^2 = (t_2 - u)^2 + (f(t_2) - v)^2. \tag{5.12}$$

展开方程后，我们得到一个关于 u和 v的线性方程

$$2\big(t_1 - t_2\big)\, u + 2\big(f(t_1) - f(t_2)\big)\, v + \Big[t_2^2 - t_1^2 + (f^2(t_2) - f^2(t_1))\Big] = 0.$$

根据引理3.1，由于 $p - q_i$ 与$(1,\ f'(t_i))$正交，因此我们有

$$(t_1 - u) + f'(t_1)(f(t_1) - v) = 0 \quad \text{and} \quad (t_2 - u) + f'(t_2)(f(t_2) - v) = 0. \tag{5.13}$$

因此，$(1\ u\ v)^T$ 是以下 3 个方程组成的线性方程组的一个解：

$$\begin{pmatrix} (t_2^2 - t_1^2) + (f^2(t_2) - f^2(t_1)) & 2(t_1 - t_2) & 2(f(t_1) - f(t_2)) \\ -t_1 - f'(t_1) f(t_1) & 1 & f'(t_1) \\ -t_2 - f'(t_2) f(t_2) & 1 & f'(t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

为了使该系统有解，矩阵的行列式必须为零。沿第一行展开该行列式的表达式，可得

$$\begin{aligned}&-t_1^{2+3\alpha}.(1+\alpha)+t_1^{2+2\alpha}t_2^{\alpha}.(1+\alpha)(1+2\alpha)-t_1^{2+\alpha}.(1-\alpha)+t_1^{2}t_2^{\alpha}.(1+\alpha)-t_1^{1+2\alpha}t_2^{1+\alpha}.(1+\alpha)2\alpha\\&-t_1^{1+\alpha}.\big(t_2^{1+2\alpha}.(1+\alpha)2\alpha+t_2.2\alpha\big)-t_1t_2^{1+\alpha}.2\alpha+t_1^{\alpha}.\big((1+\alpha)t_2^{2}+(1+\alpha)(1+2\alpha)t_2^{2+2\alpha}\big)\\&\qquad-\big((1-\alpha)t_2^{2+\alpha}+(1+\alpha)t_2^{2+3\alpha}\big)=0.\end{aligned}$$

将相同幂与因子的项分组后，我们得到

$$\begin{aligned}&(1+\alpha)\Big[t_1^{2+2\alpha}t_2^{\alpha}+t_1^{\alpha}t_2^{2+2\alpha}-t_1^{2+3\alpha}-t_2^{2+3\alpha}\Big]+(1+\alpha)2\alpha\Big[t_1^{2+2\alpha}t_2^{\alpha}+t_1^{\alpha}t_2^{2+2\alpha}-t_1^{1+2\alpha}t_2^{1+\alpha}-t_1^{1+\alpha}t_2^{1+2\alpha}\Big]\\&\quad+(1+\alpha)\Big[t_1^{2}t_2^{\alpha}+t_1^{\alpha}t_2^{2}-t_1^{2+\alpha}-t_2^{2+\alpha}\Big]+2\alpha\Big[t_1^{1+\alpha}t_2+t_1t_2^{1+\alpha}-t_1^{2+\alpha}-t_2^{2+\alpha}\Big]=0\end{aligned}$$

提取公因子后，由此得到

$$\begin{aligned}&(1+\alpha)\left[\big(t_2^{2+2\alpha}-t_1^{2+2\alpha}\big)\big(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}\big)-2\alpha\big(t_1^{\alpha}t_2^{1+2\alpha}-t_1^{1+2\alpha}t_2^{\alpha}\big)\big(t_1-t_2\big)\right]\\&+(1+\alpha)\big(t_2^{2}-t_1^{2}\big)\big(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}\big)-2\alpha\big(t_2^{1+\alpha}-t_1^{1+\alpha}\big)\big(t_1-t_2\big)=0\end{aligned}$$

为完成该证明，只需验证对所有 $t_2>t_1$，下列两个不等式成立：

$$\begin{aligned}\big(t_2^{2+2\alpha}-t_1^{2+2\alpha}\big)\big(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\big)&>2\alpha\big(t_2^{1+2\alpha}t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}t_1^{1+2\alpha}\big)\big(t_2-t_1\big)\\(1+\alpha)\big(t_2^{2}-t_1^{2}\big)\big(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\big)&>2\alpha\big(t_2^{1+\alpha}-t_1^{1+\alpha}\big)\big(t_2-t_1\big)\end{aligned}$$

它们等价于

$$\begin{aligned}t_2^{1+2\alpha}-t_1^{1+2\alpha}&>\big(1+2\alpha\big)\Big(t_2^{1+\alpha}t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}t_1^{1+\alpha}\Big)\\(1+\alpha)\big(t_2+t_1\big)\big(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\big)&>2\alpha\left(t_2^{1+\alpha}-t_1^{1+\alpha}\right).\end{aligned}$$

这些不等式的证明见引理 5.4。 □

引理 5.4。 设 $\alpha\in[0,1[$ 且 $t_2>t_1\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}t_2^{1+2\alpha}-t_1^{1+2\alpha}&>\big(1+2\alpha\big)\Big(t_2^{1+\alpha}t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}t_1^{1+\alpha}\Big)\\(1+\alpha)\big(t_2+t_1\big)\big(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\big)&>2\alpha\left(t_2^{1+\alpha}-t_1^{1+\alpha}\right)\end{aligned}$$

证明。 对于第一个不等式，令 $x\in[t_1,\infty[$ 和

$$f(x):=x^{1+2\alpha}-t_1^{1+2\alpha}-(1+2\alpha)(x^{1+\alpha}t_1^{\alpha}-x^{\alpha}t_1^{1+\alpha}).$$

求导后，我们得到

$$f'(x)=(1+2\alpha)\,x^{2\alpha}-(1+\alpha)(1+2\alpha)\,x^{\alpha}t_1^{\alpha}+\alpha(1+2\alpha)\,\frac{t_1^{1+\alpha}}{x^{1-\alpha}}.$$

我们定义

$$g(x):=x^{1-\alpha}f'(x)=(1+2\alpha)\,x^{1+\alpha}-(1+\alpha)(1+2\alpha)\,xt_1^{\alpha}+\alpha(1+2\alpha)\,t_1^{1+\alpha}$$

并通过求导

$$g'(x)=(1+\alpha)(1+2\alpha)\big(x^{\alpha}-t_1^{\alpha}\big).$$

对于所有 $x>t_1$，我们有 $g'(x)>0$。因此 g' 是严格递增函数，并且由于$g(t_1)=0$，我们有 g在 $]t_1,+\infty[$ 上严格为正。 f' 也同理，因此 f在 $]t_1,+\infty[$ 上严格递增。由于 $f(t_1)=0$，$f(x)>0$ 对所有 $x>t_1$都成立。因此，第一个不等式成立。另一个不等式的证明类似。 □

利用引理 5.3，我们可以完全确定中轴。

引理 5.5。 对每个 $\alpha \in [0,1[$，曲线 $\mathcal{C}_\alpha$ 的中轴由下式给出

$$\mathscr{M}(\mathcal{C}_\alpha) = \{0\} \times \mathbb{R}_+^*.$$

此外，每个点 $p \in \mathscr{M}(\mathcal{C}_\alpha)$ 恰有两个投影 $q_1 \neq q_2$，它们关于轴 $x = 0$对称。

证明。设 $p = (u, v) \in \mathscr{M}(\mathcal{C}_\alpha)$ 和 $q_1 = (t_1, f(t_1))$、$q_2 = (t_2, f(t_2))$ 是p 在 K上的两个投影。由曲线的对称性以及引理 5.3，不妨设 $t_1 > 0$ 且$t_2 \leqslant 0$。

我们首先证明 $t_2 < 0$。假设 $t_2 = 0$，这意味着 $q_2 = (0,\ 0)$ 处的法向为竖直方向。因此 p 必须位于 $\{0\} \times \mathbb{R}_+^*$中，故 $u = 0$。由方程（5.13）和（5.12），可得

$$\begin{cases} t_1^2 + (f(t_1) - v)^2 = v^2 \\ t_1 + f'(t_1)(f(t_1) - v) = 0 \end{cases}$$

由于在 $\mathbb{R}_+^*$ 和 $t_1 > 0$ 上，$f(t) = t^{1+\alpha}$，我们得到

$$\begin{cases} t_1^2 + t_1^{2(1+\alpha)} - 2v\, t_1^{1+\alpha} = 0 \\ t_1 + (1+\alpha)\, t_1^{1+2\alpha} - (1+\alpha) v\, t_1^{\alpha} = 0 \end{cases},$$

计算后可得

$$0 < t_1^{2\alpha} = 1 - \frac{2}{1+\alpha} \leqslant 0$$

这意味着……，这显然矛盾。因此，我们有 $t_2 < 0$。
现在，我们要证明 $p = (u,\ v) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+^*$。首先假设 $u \neq 0$。由 f 的对称性，不妨设 $u > 0$。因此，我们有

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}_\alpha}(p) = \|p - q_2\| &= \sqrt{(t_2 - u)^2 + (f(t_2) - v)^2} \\ &> \sqrt{(-t_2 - u)^2 + (f(t_2) - v)^2} = \|(-t_2, f(-t_2)) - p\| \geqslant d_{\mathcal{C}_\alpha}(p), \end{aligned}$$

这与之矛盾。根据方程 (5.13)，我们有

$$t_1 + f'(t_1)\big(f(t_1) - v\big) = 0$$

因此，由于 $t_1 > 0,\ \ v > f(t_1) > 0$。我们已经证明 $(u,\ v) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+^*$。

对于逆命题，令 $p = (0,\ v) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+^*$。$p$ 的投影集 $\Gamma_{\mathcal{C}_\alpha}(p)$ 由下列函数的极小点给出

$$g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \|p - (t, f(t))\|^2 = t^2 + \big(t^{1+\alpha} - v\big)^2.$$

我们发现，g 的最小值在 $t_{min} > 0$ 和 $-t_{min}$ 处取得。更确切地说，我们有 $t_{min} = h^{-1}(v)$，其中

$$h : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1+\alpha} + t^{1+\alpha} \in \mathbb{R}_+$$

是一一映射。这意味着 $\Gamma_{\mathcal{C}_\alpha}(p)$ 包含两个点 $q_1 = (\{\mathrm{v4},\ f(t_{\min}))$ 和 $q_2 = (\{\mathrm{v10},\ f(-t_{\min}))$。因此 $p \in \mathscr{M}(\mathcal{C}_\alpha)$。 □

5.2 命题5.1 的证明

引理 5.6。 设 $\alpha \in [0,1[$。临界函数 $\chi:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 的图像由 $\mathcal{C}_\alpha$ 参数化为

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{d}(t) \\ \chi(\tilde{d}(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\left(1+\frac{1}{f'(t)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(f'(t)^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

其中 $f:\ t \in \mathbb{R} \to |t|^{1+\alpha}$。

证明。 由引理 5.5，对于每个 $p=(0,v) \in \mathscr{M}(\mathcal{C}_\alpha)$，有 $\Gamma_{\mathcal{C}_\alpha}(p)=\{q_1,q_2\}$，其中$t>0$，$q_1=(t,\ f(t)$ 且 $q_2=(-t,\ f(-t))$。于是得到

$$\Omega_{\mathcal{C}_\alpha}(p)=\frac{q_1+q_2}{2}=\big(0,f(t)\big).$$

令 $d=\mathrm{d}_{\mathcal{C}_\alpha}(p)$，得到

$$\|\nabla \mathrm{d}_{\mathcal{C}_\alpha}(p)\|^2=\frac{\|p-\Omega_{\mathcal{C}_\alpha}(p)\|^2}{d^2}=\frac{\big(v-f(t)\big)^2}{d^2}.$$

方程 (5.13) 和 (5.12) 给出

$$t+f'(t)\big(f(t)-v\big)=0 \quad \text{and} \quad d^2=t^2+\big(v-f(t)\big)^2$$

这意味着

$$d^2=t^2\left(1+\frac{1}{f'(t)^2}\right)$$

因此

$$\|\nabla \mathrm{d}_{\mathcal{C}_\alpha}(p)\|^2=\frac{\left(\frac{t}{f'(t)}\right)^2}{t^2+\left(\frac{t}{f'(t)}\right)^2}=\frac{1}{1+f'(t)^2}.$$

我们注意到，函数 $\tilde{d}:\ t \mapsto t^2\left(1+\frac{1}{f'(t)^2}\right)$ 严格单调，因此是从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$的双射。因此，对于任意 $d>0$，都存在唯一对应的 t 值，因而在中轴上有唯一的点。由此可得

$$\|\nabla \mathrm{d}_{\mathcal{C}_\alpha}(p)\|=\chi(d).$$

□

˜命题 5.1的证明。 我们将 d 视为关于 t 的函数，并记作 $d=d(t)$。由引理5.6 以及 f的表达式，我们推得

$$\tilde{d}(t)^2 \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{(1+\alpha)^2}\,t^{2(1-\alpha)} \quad \text{and} \quad 1-\chi^2\big(\tilde{d}(t)\big) \underset{t\to 0}{\sim} (1+\alpha)^2 t^{2\alpha}.$$

将 $\tilde{d}(t)$ 提升到 $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ 次幂，根据等价无穷小的运算法则可得

$$t^{2\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} (1+\alpha)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}\,\tilde{d}(t)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

接着，我们在 χ^2的表达式中进行替换:

$$1-\chi^2\big(\tilde{d}(t)\big) \underset{t\to 0}{\sim} (1+\alpha)^{\frac{2}{1-\alpha}}\,\tilde{d}(t)^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

˜由于当 t 趋于零时， d 的极限为零，因此我们还有

$$1-\chi^2(d) \underset{d\to 0}{\sim} (1+\alpha)^{\frac{2}{1-\alpha}} d^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}.$$

□

推论的证明 *5.2*。 根据引理 5.6，我们有

$$\begin{cases} \chi(d) = \left((1+\alpha)^2 t^{2\alpha}+1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ d^2 = t^2\left(1+\frac{1}{(1+\alpha)^2 t^{2\alpha}}\right). \end{cases}$$

于是固定 α ，并将 t 视为 d 的函数。我们还假设 $0<\alpha<1$。对第一个方程求导，得到

$$\chi'(d) = \frac{-\alpha(1+\alpha)^2}{(t^{2\alpha}(1+\alpha)^2+1)^{\frac{3}{2}}}.t'(d).\big(t(d)\big)^{2\alpha-1}.$$

对系统第二行取平方根，并进行相同的运算，得到

$$1 = t'(d)\left(\frac{1}{\big(t(d)\big)^{\alpha}}\sqrt{\big(t(d)\big)^{2\alpha}+\frac{1}{(1+\alpha)^2}} - \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\frac{1}{\big(t(d)\big)^{\alpha}\sqrt{\big(t(d)\big)^{2\alpha}+\frac{1}{(1+\alpha)^2}}}\right)$$

由于 $t(0)=0$，我们有

$$t'(d) \underset{d\to 0}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{1}{t(d)}\right)^{\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{(1+\alpha)^2}}-\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(1+\alpha)^2}}}\right)} \underset{d\to 0}{\sim} \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\big(t(d)\big)^{\alpha}.$$

现在，我们希望得到 t 关于 d 的一个等价式。利用第二个方程，我们得到

$$\frac{d^2}{\big(t(d)\big)^2}(1+\alpha)^2\big(t(d)\big)^{2\alpha} = (1+\alpha)^2\big(t(d)\big)^{2\alpha}+1$$

因此我们得到以下等价式

$$d \underset{d\to 0}{\sim} \frac{1}{(1+\alpha)}\big(t(d)\big)^{1-\alpha} \quad \text{et} \quad t(d) \underset{d\to 0}{\sim} \big((1+\alpha)d\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

最后，我们可以在零点找到一个与 χ' 等价的量

$$\chi'(d) \underset{d\to 0}{\sim} -\frac{\alpha(1+\alpha)^3}{1-\alpha}.\big(t(d)\big)^{3\alpha-1} \underset{d\to 0}{\sim} -\frac{\alpha(1+\alpha)^{3+\frac{3\alpha+1}{1-\alpha}}}{1-\alpha}.d^{\frac{3\alpha-1}{1-\alpha}} \underset{d\to 0}{\sim} -\frac{\alpha(1+\alpha)^{\frac{2}{1-\alpha}}}{1-\alpha}.d^{\frac{3\alpha-1}{1-\alpha}}.$$

□

参考文献

[1] PatrikAndersson. 点态 Hölder 正则性的刻画. 应用与计算调和分析, 4(4):429–443, 1997.

[2] Frédéric Chazal、David Cohen-Steiner 和 André Lieutier。《欧几里得空间中紧集的采样理论》。载于第二十二届计算几何年度研讨会论文集，第319–326页，2006。

[3] Frédéric Chazal、David Cohen-Steiner 和 André Lieutier。《欧几里得空间中紧集的采样理论》。《离散与计算几何》，41(3):461–479，2009年4月。[4] Frédéric Chazal、David Cohen-Steiner 和 André Lieutier。法锥逼近与偏移形状同痕。《计算几何》，42(6-7):566–581，2009。[5] Frédéric Chazal、David Cohen-Steiner、André Lieutier 和 Boris Thibert。利用双重偏移进行形状平滑。载于《2007年ACM实体与物理建模研讨会论文集》，第183–192页，2007。[6] Frédéric Chazal、David Cohen-Steiner、André Lieutier 和 Boris Thibert。曲率测度的稳定性。载于《计算机图形论坛》，第28卷，第1485–1496页。Wiley在线图书馆，2009。[7] David Cohen-Steiner 和 Jean-Marie Morvan。几何集的第二基本测度与曲率的局部逼近。《微分几何杂志》，74(3):363–394，2006。[8] Antoine Commaret。《持久几何》。博士论文，蔚蓝海岸大学，2024年12月。[9] N.V. Efimov。负曲率曲面上的奇点生成。《数学文集》，106(2):286–320，1964。[10] Herbert Federer。曲率测度。《美国数学会汇刊》，93(3):418–491，1959年。[11] Joseph Fu。欧几里得空间中的管状邻域。《杜克数学杂志》，52(4):1025–1046，1985。[12] Joseph HG Fu。割线逼近中的曲率收敛。《微分几何杂志》，37(1):177–190，1993。[13] Heinrich Jung。关于包含空间图形的最小球。《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志），1901(123):241–257，1901。[14] N. Kuiper。关于 C^1-等距嵌入。《数学探索》，17:545–555，1955。[15] N. Kuiper。关于 C^1-等距嵌入。II。《数学探索》，17:683–689，1955。[16] André Lieutier 和 Mathijs Wintraecken。正可达流形、可微性、切空间变化以及可达半径的取得。arXiv预印本 arXiv:2412.04906，2024。[17] André Lieutier。 $\mathbb{R}^n$ 中的任一开有界子集都与其中轴具有相同的同伦型。《计算机辅助设计》，36(11):1029–1046，2004。《实体建模理论与应用》。[18] Alexander Lytchak。近似凸子集。《几何学专论》，115(1):201–218，2005。[19] John Milnor。《从微分观点看拓扑学》。弗吉尼亚大学出版社，1965。[20] J. F. Nash。 C^1-等距嵌入。《数学年刊》，60(3):383–396，1954。[21] Jan Rataj 和 Luděk Zajíček。正可达集的结构。《数学新闻》，290(11-12):1806–1829，2017。

[22] D. Ruelle。《可微动力学与分岔理论基础》。Academic Press，1989年。[23] Sebastian Scholtes。关于正可达超曲面、交替Steiner公式和Hadwiger问题。*arXiv*预印本 *arXiv:1304.4179*，2013年。[24] Christoph Thäle。正可达集50年——综述。《数学及其应用综述》，3:123–165，2008年。