arXiv:2602.13011v1 [math.AG] 13 Feb 2026

样条签名簇

Carlos Am´endola* Felix Lotter† Leonard Schmitz*

摘要

样条是通过分段光滑路径对离散数据进行插值的核心对象。它们的迭代积分签名是一个由张量组成的无限集合，几乎可以唯一地刻画路径。我们研究该集合的截断，这些截断定义了从参数空间到张量空间的代数映射。

我们证明，这些映射的像由矩阵-张量作用的轨道给出。此外，通过取扎里斯基闭包，我们定义并研究样条签名张量簇。我们依托符号计算，在若干实例中确定了这些张量簇的维数和次数。

着眼于学习，构造具有给定签名张量的路径这一问题可转化为研究签名映射的纤维。我们采用计算方法确定其基数，并重点考察其对不同样条类别的依赖关系。通过具体实例，我们发现，根据路径的给定签名张量重构样条，能够得到与原始路径十分接近的近似。

1 引言

Chen [9], 引入了路径签名，它在粗糙路径理论 [19, 15]中发挥着关键作用。此后，路径签名在不同领域中的应用不断拓展，包括金融 [13], 机器学习[10] 和拓扑数据分析 [11]。在[2], 中，人们开启了路径签名与代数几何之间的具体联系，研究了与特殊路径族相关的签名簇，尤其关注分段线性路径和多项式路径。这一视角在研究如何从路径的签名张量中学习路径这一问题时，证明了尤为有用 [23]。

在本工作中，我们通过考察分段多项式路径以及由其产生样条的光滑版本，将上述两个路径族加以推广。参数样条是离散数据插值的核心对象，其应用涵盖计算机辅助几何设计、计算机图形学、信号处理、数值模拟，以及工程和物理学中的数据近似 [1, 21]。

我们研究分段多项式路径的签名张量簇，并按照 [23]中的定义构造字典和 核心张量 。我们还研究所得簇的维数、次数和方程。我们在 MACAULAY2 [16]和 OSCAR [22, 14], 中进行显式符号计算，并使用 HomotopyContinuation.jl [7]进行数值计算。特别是，我们使用签名软件包 [3, 24]。

致谢

作者感谢德国研究联合会（DFG）通过 CRC/TRR 388“粗糙分析、随机动力学及相关领域”项目 A04（项目编号：516748464）提供的资助。

*柏林工业大学，柏林，德国
†MPI MiS，莱比锡，德国

2 样条及其签名张量

所有样条都是分段多项式路径的特例。本文中，我们假设分段多项式路径按如下方式给出：

定义 2.1。 分段多项式路径 是一个连续映射 $X\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$，满足对于适当的$\ell$以及所有 $0 \le i \le \ell - 1$，限制映射 $X|_{[i\ell, i+1\ell]}$是多项式。我们称图像 X 上的点 $(i\ell, X(i\ell))$为控制点。

请注意，本文将分段多项式路径的控制点限制为在时间上等距。稍后我们将看到，依据在控制点处施加的正则性类型，这样做不会造成一般性的损失。采用这一假设的一个优点是，每条分段多项式路径都可以简单地写成若干多项式路径的拼接

$$X = X^{[1]} \sqcup \ldots \sqcup X^{[\ell]}$$

：$X[i]\colon [0, \frac{1}{\ell}] \to \mathbb{R}^d$ 定义在同一区间上。回想一下，路径 $Y\colon [0, t_1] \to \mathbb{R}^d$ 与 $Z\colon [0, t_2] \to \mathbb{R}^d$ 的拼接是唯一的映射，记作 $Y \sqcup Z\colon [0, t_1 + t_2] \to \mathbb{R}^d$，它在 $[0, t_1]$, 上与 Y 一致，并在 $[t_1, t_1 + t_2]$上与 $Y(t_1) - Z(0) + Z$ 一致。

为引入路径的签名，我们固定一个截断级别 k，并考虑截断张量代数

$$T^{\le k}(\mathbb{R}^d) := \bigoplus_{j=0}^{k} (\mathbb{R}^d)^{\otimes j} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus (\mathbb{R}^d)^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$$

作为我们的$(d^{k+1} - 1)/(d - 1)$维环境空间。该空间是 $\mathbb{R}^d$ 上 j 阶张量的直和。

定义 2.2。 对于分段多项式路径 X，其 k 阶截断（迭代积分）签名 $\sigma^{\le k}(X)$是一个直和

$$\sigma^{\le k}(X) := \sigma^{(0)}(X) \oplus \cdots \oplus \sigma^{(k)}(X) \in T^{\le k}(\mathbb{R}^d)$$

由签名张量 $\sigma_{(j)}(X) \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes j}$ 构成，其分量对应于

$$(\sigma^{(j)}(X))_{i_1 \ldots i_j} := \int_0^1 \int_0^{t_j} \cdots \int_0^{t_2} \dot{X}_{i_1}(t_1) \ldots \dot{X}_{i_j}(t_j)\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_j$$

$1 \le i_1, \ldots\ldots, i_j \le d$。这里，$\dot{X}$ 表示 X 的微分，并令 $\sigma_{(0)}(X) := 1$。

签名 $\sigma^{\le k}(X)$ 属于自由 k 步幂零李群

$$\mathcal{G}^{\le k}(\mathbb{R}^2) \subseteq T^{\le k}(\mathbb{R}^d),$$

例如，参见 [15, 定理 7.30]。群乘法由张量积 $\otimes$导出，并且与路径拼接相容，即

$$\sigma^{\le k}(X \sqcup Y) = \sigma^{\le k}(X) \cdot \sigma^{\le k}(Y) \tag{1}$$

对于任意 X 和Y。这称为陈恒等式 [15, 定理 7.11]。

陈恒等式蕴含分段多项式路径的以下有用性质：

命题 2.3。 任意分段多项式路径 $X = X^{[1]} \sqcup \ldots \sqcup X^{[\ell]}$ 的签名都是由定义 $X^{[1]}, \ldots, X^{[\ell]}$的多项式的系数构成的代数式。

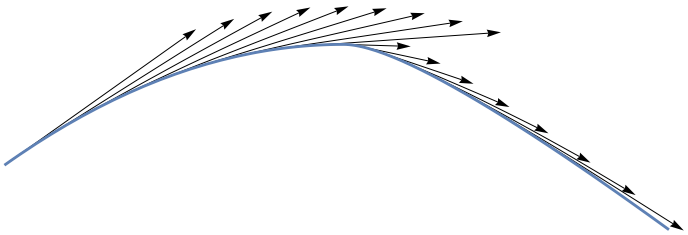


图1：一个正则性为 1 的几何$(2, 2)$样条

我们将在第4节给出证明。

一般的分段多项式路径可视为正则性为0 的样条。若要定义更高正则性的样条，我们需要在控制点处引入光滑性约束。这些光滑性约束应如何设定取决于具体情境。我们将区分两种正则性，其术语的灵感来源于 [5,第 63 页-64]。

定义 2.4（几何样条与参数样条）。设

$$X^{[1]}, \dots, X^{[\ell]} : [0, \tfrac{1}{\ell}] \to \mathbb{R}^d$$

为多项式路径。对于$r \in \mathbb{N}$，若分段多项式路径$X = X^{[1]} \sqcup \cdots \sqcup X^{[\ell]}$ 满足以下条件，则称其为正则性为r 的几何样条：对于所有 $1 \le i \le \ell - 1$ 和 $1 \le s \le r$，

$$\rho_{i,s} \frac{\mathrm{d}X^{[i]}}{\mathrm{d}t^s}\left(\frac{1}{\ell}\right) = \frac{\mathrm{d}X^{[i+1]}}{\mathrm{d}t^s}(0) \tag{2}$$

对于某些 $\rho_{i,s} > 0$。若 (2) 对所有i 以及 $\rho_{i,s} = 1$ 均成立，则称其为正则性为r 的参数样条。 s.

注意，对于$r = 0$，条件 (2) 为空。

注记 2.5. 正则性r 的参数样条，是指坐标为 C^r-函数的几何样条。这个概念非常强调参数化。图1展示了一个非参数样条的几何样条：在控制点处，切向量彼此平行，但其大小不连续。

例2.6. 路径$(2t, 4t) \sqcup (4t, 8t)$，其两个子路径均定义在 $[0, \frac{1}{2}]$, 上，并非参数样条，尽管它只是定义在 $[0, 1]$上的线性路径$(3t, 6t)$ 的重新参数化。注意，这两条路径都是正则性 1 的几何样条。

将 $\mathrm{Comp}_{\ge r}(M)$ 记为由$M \in \mathbb{N}$ 的合成所组成的集合，其中每个分量都大于或等于r，即所有满足$m_i \ge r$ 的 $m = (m_1, \dots, m_\ell)$，且$m_1 + \cdots + m_\ell = M$。我们称 ℓ 为合成m的长度 。如果$r = 1$，我们也写作 $\mathrm{Comp}(M)$。

对于$m \in \mathrm{Comp}_{\ge r}(M)$，如果$X$ 是正则性为r的几何/参数样条，并且对每个i，定理2.4中定义 $X^{[i]}$ 的多项式次数小于等于m_i，我们就称X 为正则性为 r 的几何/参数 m-样条。

例2.7. 路径 $(t, t^2) \sqcup (-t, -t)$ 是一个正则性 0 的几何（兼参数）(2, 1)-样条，但不具备任何更高的正则性。路径 $(t, t^2) \sqcup (t, 2t - t^2)$ 是一个正则性 1 的参数 (2, 2)-样条。路径 (2t, 4t) $\sqcup$ (4t, 8t) 是一个正则性 1 的几何 (1, 1)-样条。它的重新参数化 (3t, 6t) 是一个具有任意正则性的几何（兼参数）(1)-样条。

3 签名簇

回顾一下，任意路径 X 的截断签名 $\sigma^{\leq k}(X)$ 都是自由的k步幂零李群 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$中的一个元素。这是洗牌关系 [2,Theorem 4.10]所定义的$T^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$的一个仿射代数子簇。

根据陈–肖定理 [15, 定理 7.28], $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$ 中的每个元素都可以表示为某条分段线性路径 X的签名 $\sigma^{\leq k}(X)$ 。特别地，一般分段多项式路径的签名不存在代数关系。然而，将范围限制在参数样条或几何样条的子类上时，我们会得到 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$的有趣子簇。

定义 3.1. 设d、k、$M \in \mathbb{N}$、$r \in \mathbb{N}$和$m \in \mathrm{Comp}^{\geq r}(M)$。与$d$、$k$、$m$和$r$相关联的几何样条的签名簇是（在 $\mathbb{C}$ 上的）扎里斯基闭包，

$$\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m} := \overline{\{\sigma^{\leq k}(X) \mid X \in \mathcal{X}\}} \subseteq T^{\leq k}(\mathbb{C}^d),$$

其中 $\mathcal{X}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中正则性为r 的几何m次样条的集合。类似地，我们定义参数样条的签名簇

$$\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m} \subseteq \mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}$$

方法是将 $\mathcal{X}$限制为正则性为r的参数m次样条子集。

按照应用代数几何中的惯例，我们在 $\mathbb{C}$ 上定义所有的簇。我们将在定理 4.11 中看到，集合 $\{\sigma^{\leq k}(X) \mid X \in \mathcal{X}\}$ 是实仿射空间之间某个多项式映射的像；特别地，根据塔斯基–塞登伯格定理，它是一个半代数集。可以将签名簇视为该集合的代数近似。

注记 3.2。 视上下文而定，我们可能会将 $\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}$ 和 $\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m}$ 视为嵌入到 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$ 或 $T^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$ 中。事实上，通过如下选择自由坐标，也可以将簇 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$ 识别为仿射空间：

有序字母表上的一个（非空）字符串，如果在字典序中严格小于它的所有右子词，就称为 *Lyndon* 词 。例如，122 是字母表 $\{1,2\}$ 上的 Lyndon 词，而 212 不是，因为 $212 > 12$。现在，对于 $x \in T^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$ 以及长度为 $\leq k$、取自 $\{1,\ldots\ldots,\ \mathrm{d}\}$ 的 Lyndon 词 w，令 x_w 表示与 x 相应的坐标。于是，x_w 构成 $T^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$ 上的自由坐标；例如参见 [2, 定理 4.10]。我们将取 $\mathbb{C}[x_w \mid w$ 为长度 $\leq k]$ 的 Lyndon 词，它们构成 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$ 的坐标环，其中每个生成元的次数取为相应字的长度。

例 3.3. 簇 $\mathcal{P}^1_{2,\leq 3,(2,1)}$ 是 5 维环境空间 $\mathcal{G}^{\leq 3}(\mathbb{R}^2)$中的一个超曲面。其方程为

$$960x_{112}x_2 + 960x_{122}x_1 - 612x_{12}^2 - 348x_{12}x_1x_2 + 7x_1^2x_2^2 = 0.$$

作为张量代数中的一个元素，这个关系具有如下形式

$$28(2211 + 1122) + 292(1221 + 2112) - 320(1212 + 2121).$$

命题 3.4. $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$ 的分次坐标环中，$\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}$ 和 $\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m}$ 的理想是齐次的。

证明。设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中正则性为 r 的参数化 m-样条的集合，I 是 $\mathbb{C}[\mathrm{x}_w \mid$ 中由长度为 $\leq \mathrm{k}]$ 的 Lyndon w 的 $\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}$ 生成的理想。若 $\mathrm{X} \in \mathcal{X}$，则对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，缩放后的路径 $\lambda\mathrm{X}$ 也如此。根据等变性，$\sigma_w(\lambda\mathrm{X}) = \lambda^{\ell}(\mathrm{w})\sigma_w(\mathrm{X})$，其中 $\ell(\mathrm{w})$ 是 w 的长度。现在取 $\mathrm{f} \in \mathrm{I}$，并将 f 写成其齐次部分之和：$= \mathrm{f}_1 + \ldots + \mathrm{f}_k$。设 $\mathrm{S} := \sigma^{\leq}\mathrm{k}(\mathrm{X})$，其中 $\mathrm{X} \in \mathcal{X}$ 是一条路径。由上可知，对所有 λ，$\sum_i \lambda^i \mathrm{f}_i(\mathrm{S}) = 0$。但这迫使 $\mathrm{f}_i(\mathrm{S}) = 0$，因此对所有 i，$\mathrm{f}_i \in \mathrm{I}$。同样的论证也适用于几何 m-样条。 □

备注 3.5。 取簇 $\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}$ 在该投影下的 Zariski 像

$$T^{\leq k}(\mathbb{C}^d) \to (\mathbb{C}^d)^{\otimes k},$$

我们得到固定层级签名张量的簇 $\mathcal{S}^r_{d,k,m} \subseteq \mathcal{P}^r_{d,k,m}$ 。特别地，$r = 0$的情形包含了在 [2,Equation (37)]中引入的分段线性路径和多项式路径的签名簇。由于上述投影是有限映射，因此它保持维数不变，见 [2, Theorem 6.1]。环境空间 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$ 在该投影下的像是 [2,Equation 30]中的通用簇 。

截断签名的簇（而非固定层级签名）也被用于路径恢复任务 [4, Section 6], ，以利用定义重心的李群结构。

样条的签名簇定义了簇 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$的高度结构化滤过。根据定义，对于每个$m \in \mathrm{Comp}_{\geq r}(M)$ ，我们都有一个包含关系网格:

$$\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m} \subseteq \mathcal{P}^{r-1}_{d,\leq k,m} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}^1_{d,\leq k,m} \subseteq \mathcal{P}^0_{d,\leq k,m}$$

$$\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m} \subseteq \mathcal{S}^{r-1}_{d,\leq k,m} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{S}^1_{d,\leq k,m} \subseteq \mathcal{S}^0_{d,\leq k,m}$$

此外，注意对于自然数向量m 和m' ，我们有

$$\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m} \subseteq \mathcal{S}^r_{d,\leq k,m'} \tag{3}$$

if $\ell(m) \leq \ell(m')$ ，并且存在$i_1 < \ldots < i^{\ell_m}$ ，使得$m_j \leq m'_{ij}$ 对每个 $1 \leq j \leq \ell(m)$均成立。

命题 3.6。 $\mathcal{P}^r_{d、\leq k、m}$ 和 $\mathcal{S}^r_{d、\leq k、m}$ 这些簇是不可约的。对于每个 d、k 和 r，都存在某个 $N \in \mathbb{N}$使得

$$\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m} = \mathcal{S}^r_{d,\leq k,m} = \mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$$

对于所有 $m \in \mathrm{Comp}_{\geq r+1}(N)$ 满足 $\sum_{i=1}^{\ell(m)} m_i \geq N$。

证明。 第一条结论成立，是因为根据下文的定理 4.8，这两个簇都可以表示为一个不可约参数空间在多项式映射下的像。

由于对于任意 m，我们有 $\mathcal{P}^0_{d,\leq k,(m_i)} \subseteq \mathcal{P}^r_{d,\leq k,m}$，因此第二条结论显然对长度不超过某个 $\ell \in \mathbb{N}$ 的所有 m 都成立。根据 [2, 定理 5.6] ，存在某个 N′ 使得 $\mathcal{P}^0_{d,\leq k,(N')} = \mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$，所以我们可以取 $N = \ell \cdot N'$。剩下要证明的是，存在某个 L，使得当$\ell(m) \geq L$ 时，$\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m} = \mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$。

我们定义一个半洗牌同态（例如参见 [12, 第 3 节1]） $\phi : T(\mathbb{R}^d) \to T(\mathbb{R}^d)$ ，将字母 i 映射为 id^r。我们声称这是一个单射。事实上，假设存在某个字的线性组合$\sum_i \lambda_i w_i$ 映射为 0。现在很容易看出（例如通过归纳法），在 $\phi(i_1 \ldots i_n)$ 中出现的字里，恰有一个字的字母$i_1, \ldots, i_n$ 出现在z^r 这些指标处，其中$z \in \mathbb{N}$，该字由i/d^r 这些字串接而成，其中 $1 \leq j \leq n$。这意味着 $\sum_i \lambda_i w_i = 0$本身已为零，从而证明了这一主张。

由于它是单射， ϕ 诱导出一个映射 $\mathcal{G}^{\leq k\cdot(r+1)}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$ ，其像是扎里斯基稠密的。根据 Chen-Chow [15, 定理 7，28], 存在某个L' ，使得对于每个$x \in \mathcal{G}^{\leq k\cdot(r+1)}(\mathbb{R}^d)$，都存在一条分段线性路径 X ，它有L' 条线段，并且

$$x = \sigma^{\leq k\cdot(r+1)}(X).$$

根据 [12, 定理 3.9] ，对于任意字 w,

$$\sigma(X)_{\phi(w)} = \sigma(Y)_w$$

其中，Y 是满足 $Y_i(s) := \sigma(X|_{[0,s]})_{id\ldots d}$ 的路径。通过重新参数化，我们可以假设 X 的第 d 个坐标恰好由时间变量 t 给出。于是，Y 是一个正则性为 r 的参数样条，由 L′ 个次数为 r + 1 的片段组成。这表明，$\mathcal{G}^{\leq k\cdot(r+1)}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$ 的扎里斯基稠密像包含于 $\mathcal{P}^r\,d,\leq k,(r+1,\ldots,r+1)$ 中，因此我们可以取 L = L′。 □

命题 3.7。对于所有 $m = (m_1, \ldots, m_\ell) \in \mathrm{Comp}_{\geq r}(M)$，

(i) $\mathcal{S}^r\,d,\leq k,(m_1,m_2,\ldots,m_\ell) \cong \mathcal{S}^r\,d,\leq k,(m_\ell,\ldots,m_2,m_1)$，以及
(ii) $\mathcal{P}^r\,d,\leq k,(m_1,\ldots,m_\ell) = \mathcal{P}^r\,d,\leq k,(m_1,\ldots,m_i,m_i,m_{i+2},\ldots,m_\ell)$，如果 $m_i = m_{i+1} = r$。

证明。对于每个 m-样条 X，我们有

$$\sigma^{\leq k}(X)_{i_1\ldots i_k} = (-1)^k\sigma^{\leq k}(\overleftarrow{X})_{i_k\ldots i_1}$$

其中，X 是经过时间反演后由X得到的$(m_\ell, \ldots, m_1)$-样条；参见 [15, 命题 7.12]因此，(i) 通过相应地置换签名项即可得到。

对于 (ii)，我们注意到，参数样条的空间在重新参数化意义下，与 $(m_1, \ldots, m_i, m_{i+2}, \ldots, m_\ell)$-样条的空间重合，只要 $m_i = m_{i+1} = r$。这里我们使用了这样一个事实：具有（参数）正则性 r 且多项式部分次数为 r的分段多项式路径本身已经是多项式。签名在重新参数化下保持不变；参见 [15, 命题 7.10]因此，参数样条的像，特别是相对于长度为 ℓ 的 m 的扎里斯基闭包，以及长度为 $\ell - 1$ 的 $(m_1, \ldots, m_i, m_{i+2}, \ldots, m_\ell)$ 的扎里斯基闭包，彼此重合。 □

注记 3.8。定理 3.7 中的性质 (ii) 对几何样条并不成立，参见表2：簇 $\mathcal{S}^2_{3,\leq 3,(2,2)}$ 的维数为 7，而 $\mathcal{S}^2_{3,\leq 3,(2)} = \mathcal{S}^0_{3,\leq 3,(2)}$ 的维数为 6，见 [2,表 3]。

4 字典与核心张量

在 [23], 中引入了 $\mathbb{R}^d$ 中一类路径的字典 这一概念。它是 $\mathbb{R}^M$ 中的一条固定路径 ψ（空间维数可以更高或更低），使得该类中的任意路径都可以表示为 ψ 的线性变换，

$$A \circ \psi : [0,1] \to \mathbb{R}^d, t \mapsto A \cdot \psi(t)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{d\times M}$。其思路是，利用签名的等变性，我们可以将该类路径的所有签名张量表示为核心张量 $\sigma(k)(\psi)$ 在矩阵作用下的像，见下文 (5)。

在本节中，我们证明具有给定正则性 $r \geq 0$的参数化m-样条具有字典。更一般地，我们将看到，几何m-样条具有代数参数化的字典。 F

or a detail关于字典和核心张量的简要介绍，请读者参阅 [23, 第 2] .

例 4.1. 矩曲线 Mom : $[0,1] \to \mathbb{R}^M$，定义如下：

$$\mathsf{Mom}^M(t) := (t, t^2, \ldots, t^M)$$

对所有 $t \in [0,1]$，它都是次数为 M 的多项式路径的字典。

我们回顾张量上的一个重要概念：合同变换。对于张量 $C \in (\mathbb{R}^M)^{\otimes k}$ 和矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d\times M}$，矩阵-张量合同变换 $A * C \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ 是一个 k 阶张量，其元素为

$$(A * C)_{i_1\ldots i_k} := \sum_{\alpha_1=1}^{M} \cdots \sum_{\alpha_k=1}^{M} A_{i_1\alpha_1} \ldots A_{i_k\alpha_k} C_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \tag{4}$$

对于每个 $1 \le i_1, \ldots, i_k \le d$。当 M 远小于 d 时，分解 $A * C$ 称为*Tucker*格式。矩阵-张量合同在张量上定义了一种作用。它自然地扩展到张量序列

$$* : \mathbb{R}^{d\times M} \times T^{\le k}(\mathbb{R}^M) \to T^{\le k}(\mathbb{R}^d)$$

其中，我们将作用 (4) 同时应用于每个分次分量。由于积分是线性的，很容易看出（例如 [23, 引理 2.1]），签名具有等变性，即

$$\sigma^{\le k}(A \circ X) = A * \sigma^{\le k}(X), \tag{5}$$

对于所有X： $[0,1] \to \mathbb{R}^M$ 以及$A \in \mathbb{R}^{d\times M}$。

现在，我们为正则性 0 的m-样条类定义一个字典。这将得到一个核心张量，其矩阵合同轨道将描述任意d下的簇 $\mathcal{S}^0_{d,\le k,m}$。

定义 4.2. 对于每个长度为 ℓ 的$m \in \mathrm{Comp}(M)$，我们定义分段单项式路径

$$\mathsf{PwMom}^m := \begin{pmatrix} \mathsf{Mom}^{m_1} \\ 0_{m_2+\cdots+m_\ell} \end{pmatrix} \sqcup \begin{pmatrix} 0_{m_1} \\ \mathsf{Mom}^{m_2} \\ 0_{m_3+\cdots+m_\ell} \end{pmatrix} \sqcup \cdots \sqcup \begin{pmatrix} 0_{m_1+\cdots+m_{\ell-1}} \\ \mathsf{Mom}^{m_\ell} \end{pmatrix}$$

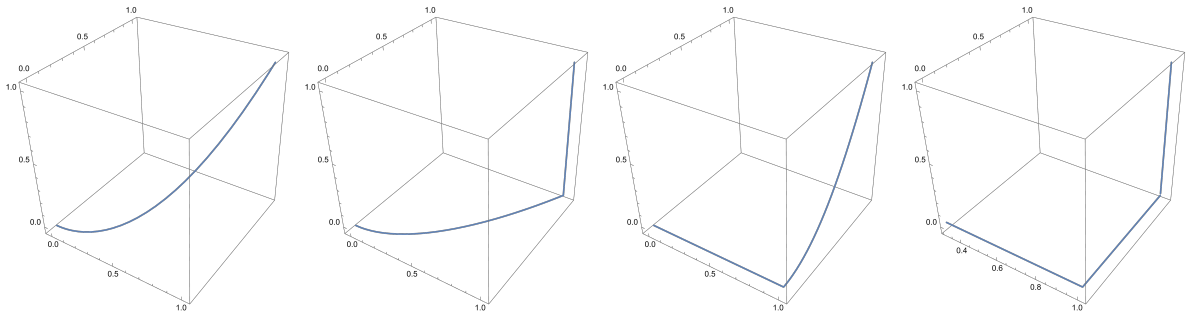
通过嵌入矩曲线的路径复合

$$\begin{pmatrix} 0_{m_1+\cdots+m_{i-1}} \\ \mathsf{Mom}^{m_i} \\ 0_{m_{i+1}+\cdots+m_\ell} \end{pmatrix} : [0,1] \to \mathbb{R}^M \tag{6}$$

进入M维空间，其中 $1 \le i \le \ell$，并经线性重参数化成为一条路径

$$\mathsf{PwMom}^m : [0,1] \to \mathbb{R}^M.$$

图 2 展示了根据定理 4.2 得到的几种分段单项式路径。这扩展了用于分段线性路径$m = (1, 1, 1)$ 和多项式路径$m = (3)$的著名字典 [23]。



$m = (3)$　　$* = (2, 1)$　　$* = (1, 2)$　　$* = (1, 1, 1)$

图 2：PwMom^m 的图像，适用于$m \in \mathrm{Comp}(3)$

引理 4.3。 设 $m \in \mathrm{Comp}(M)$。路径 PwMom^m 构成正则性 0 的 m-样条字典。证明。 我们看到，正则性为 0 的m-样条X 恰好是 ℓ 多项式路径的拼接

hs

$$X^{[1]} \sqcup \cdots \sqcup X^{[\ell]}$$

使得 $X^{[i]}$ 的次数为 m_i。特别地，$X^{[i]} = A^{[i]} \circ \mathsf{Mom}^{m_i}$。于是很容易看出

$$X = \begin{pmatrix} A^{[1]} & \ldots & A^{[\ell]} \end{pmatrix} \circ \mathsf{PwMom}^m. \qquad \square$$

定理 4.4. 对于每个 $d,k \geq 2$ 和 $m \in \mathrm{Comp}(M)$ 簇 $\mathcal{S}^0_{d,\leq k,m}$ 由核心张量（序列）描述

$$C := \sigma^{\leq k}(\mathsf{PwMom}^m) \subseteq T^{\leq k}(\mathbb{R}^M),$$

也就是说，$\mathcal{S}^0_{d,\ \leq k,\ m} = \overline{\{A * C \mid A \in \mathbb{C}^{d\times M}\}}$。

证明。 根据定理 4.3，我们知道 PwMom^m 是正则性 0 的m-样条的一个字典，因此每个样条 X: $[0,1] \to \mathbb{R}^d$ 都可以写成 $X = A * \mathrm{PwMom}^m$，其中 $A \in \mathbb{R}^{d\times M}$。根据等变性 (5)，我们看到 $\sigma^{\leq k}$ 的像由 $\mathbb{R}^{d\times M} * C$给出，因此对C取扎里斯基闭包即可得到所述结论。 □

取 $\mathrm{m} = (\mathrm{m}_1, \ldots, \mathrm{m}_l) \in \mathrm{Comp(M)}$，并将相关的划分记为 $\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_\ell = [\mathrm{M}]$。下面给出核心签名 $\sigma^{\leq}\mathrm{k(PwMom}^m)$ 的闭式描述。如果一个字 w 可以写成 $\mathrm{w} = \mathrm{w}_1 \ldots \mathrm{w}_\ell$，且对每个 i，$\mathrm{w}_i$ 都是字母表 $[\alpha_i]$ 中的一个字，那么就称 w 与 m 适配。这里也允许空字。注意，这种分解是唯一的。从 w_i的所有字母中减去 $\sum^{i-1} \mathrm{j}{=}1\mathrm{m}j$后，w 就确定了对每个 $1 \leq \mathrm{i} \leq \ell$而言，字母表 $[\mathrm{m}_i]$ 上的字 v_i。记 $\mathrm{v}_i = \mathrm{v}_{i1} \ldots \mathrm{v}^{is}{}_i$，其中 v^{ij} 是 v_i的各个字母。

命题 4.5. 设 w 是一个字。若 w 不适配于 m，则 $\sigma(\mathsf{PwMom}^m)_w = 0$。否则，我们有 e

$$\sigma(\mathsf{PwMom}^m)_w = \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{j=1}^{s_i} \frac{v_{ij}}{\sum_{u=1}^{j} v_{iu}}$$

其中 v^{ij} 如上所定义。

证明。 这由陈恒等式和 [2,例 2.2]得出。 □

例 4.6。 对于截断 $k = 3$ 和 $m = (2,1) \in \mathrm{Comp}(3)$，我们展示定理 4.4 给出的核心张量 $C = 1 \oplus C(1) \oplus C(2) \oplus C(3)$，其形式如下:

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C^{(2)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

以及 3-张量

$$C^{(3)} = \frac{1}{60} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 10 & 10 & 0 & 15 & 16 & 0 & 30 & 40 & 30 \\ 5 & 6 & 0 & 8 & 10 & 0 & 20 & 30 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right)$$

在第一次矩阵-张量折叠中。

让我们验证上面关于$C(2)$各项的闭式公式。对于$m = (2,1)$，不适配m 的字恰好是 31 和 32，这说明了$C(2)_{31} = C(2)_{32} = 0$。对于其他所有双字母字 ij，我们需要根据定理 4.5 找出v_1 和v_2。共有三种可能：或者$i,j \leq 2$，或者$i \leq 2$ 和$j = 3$，或者$i,j = 3$。在第一种情况下，v_2 是空字；在第二种情况下，$v_2 = 1$；在第三种情况下，$v_2 = 11$。由第一种情况，我们得到

$$C^{(2)}_{11} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}, \qquad C^{(2)}_{12} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3},$$
$$C^{(2)}_{21} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3}, \qquad C^{(2)}_{22} = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{4}.$$

由第二种情况，我们得到$C(2)_{13} = C(2)_{23} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}$。最后，由第三种情况得到$C(2)_{33} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}$。

定理 *2.3* 的证明。 对于固定的张量 C 和矩阵 A，张量 $A * C$ 的各项是关于A各项的多项式；因此由定理 4.4 可得所述结论。 □

接下来的自然问题是，能否为正则性为$r > 0$的几何样条和参数m-样条找到核心张量。注意，对于固定的$\rho_{i,r}$，(2) 是对参数矩阵各列的线性约束。这使我们能够为满足 (2) 且采用这一特定$\rho_{i,j}$选择的几何样条推导出一个字典，尤其是为参数样条的若干类推导字典。为了描述几何样条，我们在 [23] 中引入字典的一种推广。

定义 4.7。设$\mathcal{X}$是$\mathbb{R}^d$中某类路径。$\mathcal{X}$的参数化字典是一个路径族

$$(\Psi_\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^N)_{\rho \in \mathbb{R}^K}$$

对于某个N，$K \in \mathbb{N}$，使得$\mathcal{X}$中的路径恰好是路径$A\Psi_\rho$，其中$A \in \mathbb{R}^{d\times N}$，且$\rho$属于$\mathbb{R}^K$的一个扎里斯基稠密子集。我们称这样的字典为代数参数化的，若对于所有k，映射$\rho \mapsto \sigma^{\leq k}(\Psi_\rho)$均由多项式给出。

代数参数化字典定义的不是一个核心张量，而是一个核心张量族；这个族的扎里斯基闭包构成一个核心簇。签名簇则是核心簇的矩阵轨道的闭包。

设r、$M \in \mathbb{N}$，其中$M \geq r$，并设$m \in \mathrm{Comp}_{\geq r}(M)$。现在可以陈述本节的主要结果。

定理 4.8。正则性为r的几何m-样条类存在一个代数参数化字典。

为了构造这个字典，我们将式 (2) 重新解释为一个矩阵方程。这样，我们将得到一个矩阵B_ρ，使得$B_\rho \circ \mathrm{PwMom}^m$就是所需的参数化字典。

记$m = (m_1, \ldots, m_l)$。令A为一个$d \times M$矩阵。我们引入以下记号表示它的各列：

$$\begin{pmatrix} A_1^{[1]} & \ldots & A_{m_1}^{[1]} & \ldots & A_1^{[\ell]} & \ldots & A_{m_\ell}^{[\ell]} \end{pmatrix} := A$$

现在考虑路径$A \circ \mathrm{PwMom}^m$。将其代入方程 (2)，可知它几何连续，当且仅当满足

$$A_s^{[i+1]} = \rho_{i,j} \sum_{j=s}^{m_i} \binom{j}{s} A_j^{[i]} \tag{7}$$

对于所有i和$s \leq r$。特别地，当$s \leq r$时，各列$A_s^{[i+1]}$完全由矩阵$A^{[i]}$确定。对于$i \geq 2$，定义$\hat{A}^{[i]}$为从$A^{[i]}$中移除前r列后得到的$d \times (m_i - r)$矩阵。令

$$\hat{A} := \begin{pmatrix} \hat{A}^{[1]} & \ldots & \hat{A}^{[\ell]} \end{pmatrix}.$$

这是一个$d \times \kappa$矩阵，其中$\kappa := M - (\ell - 1) \cdot r$。

接下来，我们递归地定义$\kappa \times m_i$个矩阵$B_\rho^{[i]}$，其中$1 \leq i \leq \ell$。令

$$B_\rho^{[1]} := \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{m_1} \\ 0_{(\kappa - m_1)\times m_1} \end{pmatrix}$$

这构成了递归的基本情况。对于$1 \leq i \leq \ell - 1$和$s \leq r$，我们随后按列定义

$$B_{\rho,s}^{(i+1)} := \rho_{i,s} B_\rho^{[i]} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \binom{s}{s} & \ldots & \binom{m_i}{s} \end{pmatrix}^\top$$

对于$r < s \leq m_i$，则定义为

$$B_{\rho,s}^{[i+1]} := e_{s_0+s}$$

其中$s_0 := \sum_{j=1}^{i} m^j - i \cdot r$。

定义 4.9。我们定义核心样条变换矩阵

$$B_\rho := \begin{pmatrix} B_\rho^{[1]} & \ldots & B_\rho^{[\ell]} \end{pmatrix}.$$

为了表示它对 r 和 m 的依赖关系，我们有时会在下文中将其写作 $B_\rho^{m\,r}$，而非 $B\rho$。由此，我们现在得到了所需的字典。

证明（定理 *4.8*）。我们声称，方程 (7) 等价于矩阵方程 $A = \hat{} A \cdot B\rho$。事实上，我们可以将 $\hat{} AB\rho$ 写成

$$\begin{pmatrix} \hat{A}B_\rho^{[1]} & \dots & \hat{A}B_\rho^{[\ell]} \end{pmatrix}$$

因此，$A = \hat{} AB\rho$ 当且仅当对所有i，都有 $A^{[i]} = \hat{} AB_\rho^{[\,]}{}_i$。假设 (7) 成立；那么我们可以用归纳法证明 $A^{[i]} = \hat{} AB_\rho^{[\,]}{}_i$。对于$i = 1$，无需验证。否则，我们有

$$\begin{aligned}
(\hat{A}B_\rho^{[i]})_s &= \hat{A}B_{\rho,s}^{[i]} \\
&= \rho_{i-1,s}\hat{A}B_{\rho,s}^{[i-1]} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \binom{s}{s} & \dots & \binom{m_{i-1}}{s} \end{pmatrix}^\top \\
&= \rho_{i-1,s}A^{[i-1]} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \binom{s}{s} & \dots & \binom{m_{i-1}}{s} \end{pmatrix}^\top \\
&= A_s^{[i]}
\end{aligned}$$

对于$s \le r$，第三个等式用到了归纳假设，最后一个等式则用到了 (7)。对于$s > r$，同样无需证明。最后，反向推导上述论证即可得到逆向蕴含。

由此可知，正则性为r 的m-样条恰好可表示为$(\hat{} AB\rho) \circ \mathrm{PwMom}^m$，其中有一个$d \times \kappa$阶矩阵 $\hat{} A$ 以及某个 $\rho > 0$，且 $\kappa = M - (s-1)r$。因此，根据结合律，$(B\rho \circ \mathrm{PwMom}^m)\rho$ 是这一类路径的参数化字典。由于 $B\rho$ 的各项都是 ρ 的多项式，签名的等变性意味着$(B\rho \circ \mathrm{PwMom}^m)\rho$ 确实是代数参数化字典。

□

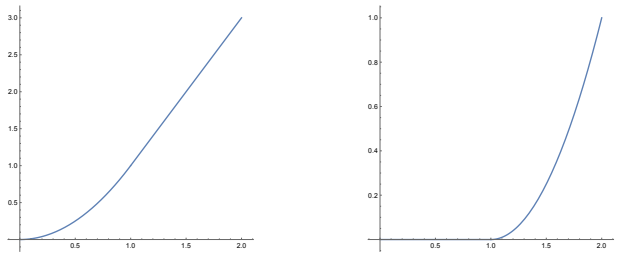
推论 4.10。 $B_1^{m\,r} \circ$, PwMom^m 是正则性为1的参数化 m-样条的字典。

推论 4.11。 令 C 为定理 *4.4* 中分段多项式路径对应的核心张量（序列）。

(i) 簇 $\mathcal{S}_{d,\,k,\,m}^r$ 由参数化核心张量 $B_\rho^{m\,r} *,\ C$ 描述。*(ii)* 簇 $\mathcal{P}_{d,\,k,\,m}^r$ 由核心张量 $B_1^{m\,r} *,\ C$ 描述。

证明。 这直接由定理 4.8 和签名的等变性 (5) 得出。 □

在图3中，我们根据定理4.10展示了两个正则性为m阶样条的参数化字典，$r = 1$。



(a) $m = (2, 1)$ (b) $m = (1, 2)$

图 3：用于 $\mathcal{P}_{2,\le k,m}^1$

例4.12。 我们来确定截断级别为2、几何$(2,1)$样条且正则性为1时的核心簇。相应的参数化字典为 $B_{(2,1)^\rho}$ $^\circ\mathrm{PwMom}^m$，它是路径类

$$X_\rho := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \sqcup \rho \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

我们有

$$\sigma^{(1)}(X_\rho) = \begin{pmatrix} 1+\rho \\ 1+2\rho \end{pmatrix}$$
$$\sigma^{(2)}(X_\rho) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho^2+\rho+\frac{1}{2} & \rho^2+2\rho+\frac{2}{3} \\ \rho^2+\rho+\frac{1}{3} & 2\rho^2+2\rho+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

这将三维空间 $\mathcal{G}^{\leq 2}(\mathbb{R}^2)$中的一条曲线参数化。使用 Lyndon 坐标 x_1,x_2,x_{12}，它是以下映射的 Zariski 像:

$$\rho \mapsto (1+\rho, 1+2\rho, \rho^2+2\rho+\frac{2}{3}).$$

使用 MACAULAY 2，我们看到该像是二次曲面 $3x_2^2+6x_2-12x_{12}=1$与仿射超平面 $2x_1-x_2=1$的交集。该簇在 $\mathcal{G}^{\leq 2}(\mathbb{R}^2)$ 上的 2×2- 矩阵作用下的轨道闭包是整个空间 $\mathcal{G}^{\leq 2}(\mathbb{R}^2)$。

5 样条簇的维数和次数

使用字典　　上一节构造的字典，我们现在研究维数、次数和生成元
样条簇　　中定义的。

5.1 矩阵簇

在 [2, 定理*3.*中已证明，次数为M 的多项式路径簇与含M 条线段的分段线性路径簇相同，即

$$\mathcal{M}_{d,M} := \mathcal{S}^0_{d,2,(M)} = \mathcal{S}^0_{d,2,m}$$

其中 $m = (1,\ldots,1) \in \mathrm{Comp}(M)$。我们将此结果推广到当前设定。

定理5.1。 对于 $m \in \mathrm{Comp}_{\geq r}(M)$，矩阵簇 $\mathcal{S}^r_{d,2,m}$ 与 $\mathcal{P}^r_{d,2,m}$ 相同，并且等于簇 $\mathcal{M}_{d,M-(\ell-1)r}$。

证明依赖于以下线性代数引理。

引理 5.2. 设 $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 是一个秩为 n 的矩阵，使得 A对称 矩阵的秩为1。设

$$\tau := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad and \quad \omega := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

那么，当 n 为奇数时，A 与$(1)\oplus \tau_{\frac{n-1}{2}} \oplus (0)^{\oplus d-1-\frac{n-1}{2}}$合同；当 n 为偶数时，A 与 $\omega \oplus \tau_{\frac{n-2}{2}} \oplus (0)^{\oplus d-1-\frac{n}{2}}$合同。

证明。 根据 [18, 定理 1], A 与块 $J_n(0)$、 Γ_n 和 $H_{2n}(\mu)$的直和合同。定义参见上述文献。在这些块中，只有 $H_2(-1) = \tau$ 是反对称的。此外，只有对块 $\Gamma_1 = (1)$ 和 $\Gamma_2 = \omega$ 而言，其对称部分的秩为 1。这三个块都满秩。综上可得所述结论。 □

现在我们可以证明该定理。

证明（定理*5.1*）。令 $\rho \in \mathbb{R}^{\ell-1,r}$ 并设

$$C := \sigma^{(2)}(B_\rho \mathsf{PwMom}^m) = B_\rho \sigma^{(2)}(\mathsf{PwMom}^m) B_\rho^\top.$$

由于C 是一个签名矩阵，其对称部分的秩为 1，见 [2, 第 21] 节。因此，定理 5.2 适用。矩阵 σ(2)(PwMom^m) 是满秩的：事实上，根据定理 4.5，该矩阵是上块三角矩阵，对角线上的每个块都具有 σ(2)(Mom^{m_i})的形式。由[2, 方程 (21)], 可知，这些块均为满秩，因此C 的秩就是$B\rho$的秩。但$(M - (\ell-1)r) \times M$-矩阵$B\rho$ 也满秩；事实上，根据构造，每个标准基向量$e_i \in \mathbb{R}^{M-(\ell-1)r}$ 都作为$B\rho$的一列出现。

令$n := M - (\ell-1)r$。由定理 4.11 可知，$\mathcal{S}^r_{d,2,m}$和$\mathcal{P}^r_{d,2,m}$均由$(1) \oplus \tau_{n-1} \underset{2}{\oplus} (0)^{\oplus d-1-\frac{n-1}{2}}$（当$n$为奇数时）或 $\omega \oplus \tau_{n-2} \underset{2}{\oplus} (0)^{\oplus d-1-\frac{n}{2}}$（当$n$为偶数时）的合同轨道给出。但它们恰好就是簇$\mathcal{M}_{d,M-(\ell-1)r}$。 □

推论 5.3。对所有 $m \in \mathrm{Comp}_{\geq r}(M)$,

$$\dim(\mathcal{M}_{d,m}) = Md - (\ell-1)dr - \binom{M-(\ell-1)r}{2}.$$

证明。 结合 [2, 定理 3.4]和定理5.1。 □

利用 [2, 定理 3,4], 中对$\mathcal{M}_{d,M}$ 的行列式描述，我们可以确定当M 为奇数时该簇的次数。

簇$\mathcal{M}_{d,1}$是二次 Veronese，因此我们得到 $\deg(\mathcal{M}_{d,1}) = 2^{d-1}$。更一般地，有如下结论。

定理 5.4。 如果 M 为奇数，则

$$\deg(\mathcal{M}_{d,M}) = 2^{M-1} \prod_{n=0}^{d-M-1} \frac{\binom{d+n}{d-M-n}}{\binom{2n+1}{n}}$$

证明。 对称部分秩为 1 的矩阵空间与斜对称部分秩为 $\leq M$ 的矩阵空间相交是横截的，因为对称部分和斜对称部分在矩阵空间上定义了相互独立的坐标。因此，$\mathcal{M}_{d,M}$ 的次数就是秩为 1 的对称矩阵簇的次数与秩为 $\leq M$的斜对称矩阵簇的次数之积。前者的次数为 $\deg(\mathcal{M}_{d,1}) = 2^{d-1}$，后者由 [17,命题 12]计算得出。

□

作为一个特例，我们得到 $\mathcal{M}_{d,3}$ 的次数，其公式已在 [2, 第 15] 页中得到观察。

推论 5.5。对于所有 $d \geq 3$,

$$\deg(\mathcal{M}_{d,3}) = \frac{2^{d-1}}{d-1}\binom{2d-4}{d-2}$$

证明。 根据定理 5.4，该命题可归结为

$$\frac{1}{d-1}\binom{2d-4}{d-2} = \frac{1}{2^{d-3}} \prod_{n=0}^{d-4} \frac{\binom{d+n}{d-3-n}}{\binom{2n+1}{n}}$$

这可以通过对 d 进行归纳法证明。对于 $d = 3$，两个表达式的值都是 1。从 $d-1$到 d，左边乘以 $\frac{d-2}{d-1} \cdot (2d-5)(2d-4) = 2\binom{2d-5}{d-1}(d-2)$，右边则乘以

$$\frac{\prod_{n=0}^{d-4} \frac{d+n}{d-1-n}}{2\binom{2(d-4)+1}{d-4}} = \frac{\binom{2d-4}{d-1}}{2\binom{2d-7}{d-4}}.$$

注意

$$\binom{2d-4}{d-1} = \frac{(2d-4)(2d-5)(2d-6)}{(d-1)(d-2)(d-3)} \cdot \binom{2d-7}{d-4} = 4\frac{2d-5}{d-1} \cdot \binom{2d-7}{d-4}.$$

因此，右侧也乘以 $2\binom{2d-5}{d-1}$，由此得出结论。 □

5.2 高阶张量簇

为了计算$k > 2$ 的签名簇，我们使用计算方法。

例 5.6. 我们来计算$\mathbf{m} \in \mathrm{Comp}(3)$的样条簇 $\mathcal{S}^0_{2,\leq 4,m}$。两个合成$(1,1,1)$ 和(3) 分别对应分段线性路径和多项式路径，其投影签名簇 $\mathcal{S}^0_{d,m,k}$ 已在 [2]中讨论。我们计算$(\mathbb{C}^d)$的坐标环中簇 $\mathcal{S}^0_{d,m,\leq k}$ 的理想，另见定理 3.2。

这三个簇的维数均为 6，即参数的数量。簇 $\mathcal{S}^0{}_{d,(1,1,1),\leq 4}$在 8 维环境空间 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$中的余维数为 2。它是一个八次多项式和一个十次多项式构成的完全交。该八次多项式如下所示，

$$\begin{aligned}
&x_1^2x_2^2x_{12}^2 + 6x_{12}^4 - 12x_2x_{12}^2x_{112} + 18x_2^2x_{112}^2 - 12x_1x_{12}^2x_{122} \\
&\quad - 36x_1x_2x_{112}x_{122} + 18x_1^2x_{122}^2 - 24x_2^2x_{12}x_{1112} \\
&\quad + 144x_2x_{122}x_{1112} - 6x_1^2x_2^2x_{1122} + 48x_1x_2x_{12}x_{1122} \\
&\quad - 72x_2x_{112}x_{1122} - 72x_1x_{122}x_{1122} + 72x_{1122}^2 \\
&\quad - 24x_1^2x_{12}x_{1222} + 144x_1x_{112}x_{1222} - 288x_{1112}x_{1222}.
\end{aligned}$$

请注意，变量按照定理 3.2 进行分级。

簇 $\mathcal{S}^0{}_{d,(3),\leq 4}$ 由三个多项式定义，其次数分别为 16、18 和 20。

最后，我们看到 $\mathcal{S}^0{}_{d,\leq 4,(2,1)}$ 由四个多项式定义，其中一个次数为 16，另一个次数为 20，其余两个次数为 18。

我们还可以计算在投影 $\mathcal{G}^{\leq 4}(\mathbb{R}^2) \to (\mathbb{R}^2)^{\otimes 4}$下得到的簇 $\mathcal{S}_{d,4,(2,1)}$ 的次数。我们看到，当 $m = (1,1,1)$ 和 $m = (3)$ 时，得到的次数分别为 64 和 $192 = 3 \cdot 64$，这在 [2, Table 3] 中已经观察到。有趣的是，簇 $\mathcal{S}_{2,4,(2,1)}$ 的次数 $128 = 2 \cdot 64$ 介于两者之间。

表1和表2总结了不同几何样条和参数样条签名簇的维数和次数。在这里，我们将签名簇视为嵌入截断张量空间$T^{\leq k}(\mathbb{C}^d)$中。

请注意，表1中所考虑的簇所在的环境空间 $\mathcal{G}^{\leq 4}(\mathbb{C}^2)$ 维数为8。随着变量数量的增加，符号计算变得难以进行，这一点在表1b中的问号有所体现。在这种情况下，我们使用 MACAULAY 2 软件包 NumericalImplicitization [8]来计算缺失的维数。我们无法通过数值方法确定缺失的次数。

在表2中，环境空间 $\mathcal{G}^{\leq 3}(\mathbb{C}^3)$ 的维数为14。我们再次使用 NumericalImplicitization 计算了维数。

$m \backslash r$	0	1	2
$(2,2)$	8	$7^{\mathcal{S}}, 6^{\mathcal{P}}$	$6^{\mathcal{S}}, 4^{\mathcal{P}}$
$(2,1,1)$	8	$5^{\mathcal{S}}, 4^{\mathcal{P}}$	-
$(2,1)$	6	$5^{\mathcal{S}}, 4^{\mathcal{P}}$	-
$(1,1,1)$	6	$2^{\mathcal{S}}, 2^{\mathcal{P}}$	-

(a) 维数

$m \backslash r$	0	1	2
$(2,2)$	1	?	?, $96^{\mathcal{P}}$
$(2,1,1)$	1	$414^{\mathcal{S}}, 96^{\mathcal{P}}$	-
$(2,1)$	?	$414^{\mathcal{S}}, 96^{\mathcal{P}}$	-
$(1,1,1)$	276	$16^{\mathcal{S}}, 16^{\mathcal{S}}$	-

(b) $T^{\leq 4}(\mathbb{C}^d)$ 的次数

表1：、、的维数和次数，以及$\mathcal{P}^r_{2,\leq 4,m}$

$m \backslash r$	0	1	2
$(3,2)$	14	$13^{\mathcal{S}}, 12^{\mathcal{P}}$	$11^{\mathcal{S}}, 9^{\mathcal{P}}$
$(3,1,1)$	14	$10^{\mathcal{S}}, 9^{\mathcal{P}}$	-
$(2,2)$	12	$10^{\mathcal{S}}, 9^{\mathcal{P}}$	$7^{\mathcal{S}}, 6^{\mathcal{P}}$
$(2,1,1)$	12	$7^{\mathcal{S}}, 6^{\mathcal{P}}$	-
$(2,1)$	9	$7^{\mathcal{S}}, 6^{\mathcal{P}}$	-

表2：维数 $\mathcal{S}^r_{3,\leq 3,m}$ 和 $\mathcal{P}^r_{3,\leq 3,m}$

注5.7。 表1和表2中的大多数簇，其维数要么等于环境空间的维数，要么等于参数的数量。这与 [2] 中的观察结果一致；参见其中的猜想6.10。不过，有一个显著的例外：簇 $\mathcal{S}^2_{3,3,(2,2)}$ 的维数为7，尽管参数数量为 $2 \cdot 3 + 2 = 8$。

6 样条恢复

粗糙分析中的一个重要逆问题，是从 Chen 的迭代积分签名中恢复路径；一般概述见 [20] 。这一任务也称为学习问题。具有影响力的工作 [23] 通过矩阵-张量合同下的群轨道将该问题形式化，并针对分段线性、多项式和一般路径建立了精确及数值上的可辨识性结果。对于截断级别$k = 3$ 以及含有 $M = d$ 条线段的分段线性路径，存在一种高效的路径恢复算法 [25, 定理1.1和算法 3。1]。在这种情况下，已知学习问题有唯一解；见 [23, 定理 6。2]。

我们研究样条的学习问题，即考察签名映射限制在几何或参数m-样条上的纤维，其中截断k固定。与上述情形相反，通常学习问题并不能（唯一地）求解。这引出了以下路径恢复度的概念。

定义6.1. 对于 d、k、$r \in \mathbb{N}$ 和 $m \in \mathrm{Comp}_{\geq r}(M)$，几何 m-样条的 恢复次数

$$\mathsf{PRdeg}(\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

等于 $\sigma^{\leq k}$ 在 $\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}$ 上的一般纤维中的（复）点数。类似地，我们定义参数化 m-样条的恢复次数，记作 $\mathsf{PRdeg}(\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m})$。

例 6.2。 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中正则性 1 的几何$(2,1)$样条类。根据定理 4.8，它由一个 2×2-矩阵 A 和一个标量 ρ 参数化。相应的映射

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R} &\to \mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^2) \\ (A, \rho) &\mapsto AB_\rho * \sigma^{\leq 3}(\mathrm{PwMom}^{(2,1)}) \end{aligned}$$

参数化 $\mathcal{S}^1_{2,\le 3,(2,1)}$ 的映射一般是有限多对一的。该映射的一般纤维包含两个点，即 $\mathrm{PRdeg}(\mathcal{S}^1_{2,\le 3,(2,1)}) = 2$。

我们尤其关注纤维中的实点，因为它们对应路径解。其中，只有满足 $\rho > 0$ 的点对应样条重建。

通过相对于消元序计算一般纤维理想的 Gr¨obner 基，我们发现纤维中的两个点对应于关于 ρ 的二次多项式 q 的两个解，由 $\rho^2 + c\rho + \frac{1}{6}c$ 给出，其中

$$c = \frac{-x_1^2x_2^2 + 24\,x_1x_{12}x_2 + 36\,x_{12}^2 - 60\,x_1x_{122} - 60\,x_{112}x_2}{30\,x_1x_{12}x_2 + 60\,x_{12}^2 - 90\,x_1x_{122} - 90\,x_{112}x_2}$$

其中，我们用 x_i 表示 $\mathcal{G}^{\le k}(\mathbb{R}^2)$ 上的坐标（见定理 3.2）。我们注意到，作为张量代数中的一个元素，分母可化简为

$$30(2\cdot e_1\otimes e_2\otimes e_1\otimes e_2 - 5\cdot e_1\otimes e_1\otimes e_2\otimes e_2).$$

可以验证，二次多项式 q 至多有一个正实数解。也就是说，截断签名 $\sigma^{\le 3}$ 能够唯一确定平面上的几何正则性 1 的$(2,1)$-样条。图 4 展示了签名映射某个特定纤维中的两个点：其中一个是样条，另一个是满足 $\rho < 0$ 的“尖点”解。

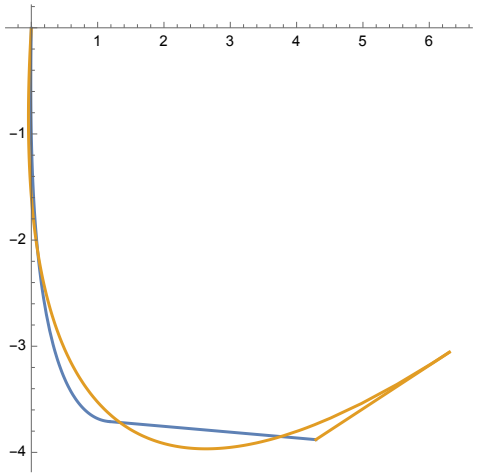


图 4：两条路径见证了 $\mathrm{PRdeg}\ (\mathcal{S}^r_{2,\le 3,(2,1)}) = 2$。

与 [23], 类似，我们通过确定一般纤维的理想来研究一般情况下的恢复度。随后，这些理想的次数可以与路径恢复度联系起来；参见方程 (8)。对于这一构造，我们按照定理 4.11 使用核心张量。

定义 6.3。令 C^ρ 为 $\mathcal{S}^r_{d,k,m}$ 的核心张量族。对于每个 $A \in \mathbb{R}^{d\times(M-rd)}, \eta \in \mathbb{R}^{r\times(\ell-1)}$，我们有

$$I_{A,\eta} := \left\langle (A * C_\eta - a * C_\rho)_w \mid w \right\rangle$$

其中 $a = (a_{i,j})_{1\le i\le d, 1\le j\le(M-rd)}$ 和 $\rho = (\rho_{i,j})_{1\le i\le r, 1\le j\le(\ell-1)}$ 是我们的 $d(M-rd)+r(\ell-1)$ 多项式环变量的矩阵。

设$I_{A,\eta}$ 为定理 6.3 中针对一般A 和 η得到的理想。若 $\dim I_{A,\eta} = 0$，则

$$\mathrm{PRdeg}(\mathcal{S}^r_{d,\le k,m}) = \deg(I_{A,\eta}). \tag{8}$$

类似地，若 $\dim(J_A) = 0$，则令$J_A := I_{A,1} + \langle \rho_{ij} - 1 \mid i,\ j\rangle$，并且有

$$\mathsf{PRdeg}(\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m}) = \deg(J_A).$$

最简单的情形同样是正则性 $r = 0$。此时，几何和参数 m-样条都是分段多项式路径，其线段的次数为 m_i。表 3 列出了当 $m \in \mathrm{Comp}(4)$ 且 $d = 2$ 和 $k = 4$ 时的所有恢复度。这是对 [2, 备注 6.13], 的细化；该备注列出了分段线性路径和多项式路径的恢复度，用我们的术语来说，它们分别对应于$(1, 1, 1, 1)$和 $(4) \in \mathrm{Comp}(4)$。我们按照式 (8) 使用 J_A 的构造，并计算其次数。

$m \in \mathrm{Comp}(4)$	$\mathsf{PRdeg}\ (\mathcal{S}^0_{2,\ \leq 4,\ m})$
$(1, 1, 1, 1)$	4
$(1, 2, 1)$	18
$(2, 1, 1), (1, 1, 2)$	14
$(2, 2)$	10
$(3, 1), (1, 3)$	40
(4)	48

表 3：$\mathcal{S}^0_{2}$、≤ 4、m 和$M = 4$的所有恢复度。

接下来我们讨论参数样条恢复。定理 6.3 中的消失理想是零维的，当且仅当参数个数等于 $\dim(\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m})$。在这种情况下，我们在计算过的所有例子中都观察到，如果 $\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m}$ 是$\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$的真子簇，那么 $\mathsf{PRdeg}(\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m}) = 1$。当 $\mathcal{P}^r_{d,\leq k,m} = \mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$ 时，路径恢复度会增大。表 4 列举了所有满足参数个数 $\mathrm{M} - \mathrm{r}(\ell - 1)$ 等于 $\dim(\mathcal{P}_{2,\leq 4,m}) = \dim(\mathcal{G}^{\leq 4}(\mathbb{R}^2)) = 8$ 的 m 和 r 的取值。我们计算了每种情况下的路径恢复度，并将所有 r 和 $\mathrm{m} \in \mathrm{Comp}_{\geq \mathrm{r}}(\mathrm{M})$ 中次数相同的情况归为一组。根据定理 3.7，我们可以省去所有基于逆序合成以及在 m 中插入 r 且正则性为 r 的冗余合成。我们使用 $\mathrm{I}_{A,\rho}$ 的构造。

$m \in \mathrm{Comp}(M)$	r	$\mathsf{PRdeg}(\mathcal{P}^r_{2,\leq 4,m})$
$(2, 2, 2)$、$(2, 1, 2, 1, 2)$ $(1, 2, 2, 2, 1), (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$	1	46
$(2, 2, 2, 1)$，$(2, 1, 2, 1, 2, 1)$	1	50
$(2, 2, 1, 2), (2, 2, 1, 2, 1)$ $(2, 1, 2, 2, 1), (1, 2, 2, 1, 2, 1)$	1	52
$(1, 4, 1)$	1	54
$(4, 1), (3, 2), (3, 2, 1), (3, 1, 2),$ $(2, 3, 1), (3, 1, 2, 1), (2, 1, 3, 1)$ $(1, 3, 2, 1), (1, 3, 1, 2, 1)$	1	56
$(3, 3), (3, 2, 3), (2, 4, 2)$ $(2, 3, 3, 2), (2, 3, 2, 3, 2)$	2	54
$(4, 2), (3, 3, 2), (3, 2, 3, 2)$	2	60
$(3, 4, 3)$	3	54
$(4, 3)$	3	60

表 4：从 4-截断签名恢复平面中的参数化m-样条的恢复度

同样，我们计算几何样条恢复的恢复度。同样，在$\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}$ 是真子簇 $\mathcal{G}^{\leq k}(\mathbb{R}^d)$的情况下，我们观察到$\mathsf{PRdeg}(\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}) = 1$。在$\mathcal{S}^r_{d,\leq k,m}$

达到最大维数但没有过度参数化时，表 5 和表 6 展示了平面和三维空间中不同 m-样条在不同 m 、r 及截断级别k下的恢复度。这里，我们的恢复计算很大程度上依赖于 msolve [6] 提供的 F4 实现。

$m \in \mathrm{Comp}(M)$	r	$\mathrm{PRdeg}(\mathcal{S}^r_{2,\leq 4,m})$
$(2,2,1)$ $(2,1,2)$	1	32
$(1,3,1)$	1	96
$(3,2)$	2	116

表 5：从 4-截断签名恢复平面上几何 m-样条的恢复度

$m \in \mathrm{Comp}(M)$	r	$\mathrm{PRdeg}(\mathcal{S}^r_{3,\leq 3,m})$
$(3,2,1)$	1	144
$(3,1,2)$	1	84
$(2,2,2)$	1	90
$(4,2)$	2	312
$(3,3)$	2	168

Table 6：几何m-样条在三维空间中从3-截断signatu得到的恢复度 re

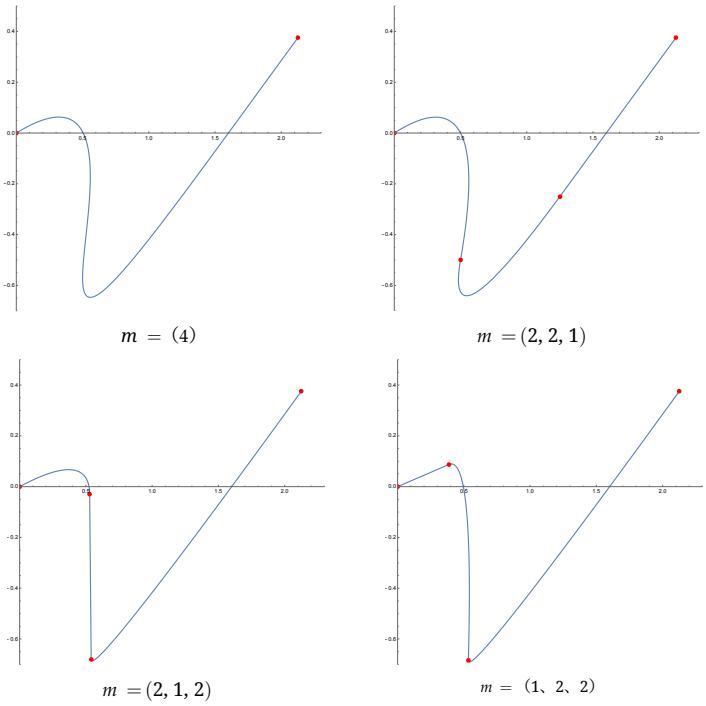


图 5：不同m对应的正则性 1 样条，其截至第 4 级的签名相同。控制点以红色标记。

使用 HomotopyContinuation.jl [7]，，我们计算了针对 $\mathcal{S}^1_{2、\leq 4、m}$ 的路径恢复问题的显式解，并考察了 m 的不同取值。根据表 5，每种情况下复数解的预期数量均为 32。几乎所有实数解都对应“尖点”路径（如图 4 所示）。事实上，样条解总是唯一的，只有 $m = (4)$ 这种情况除外，见图 5。

参考文献

[1] J Harold Ahlberg、Edwin Norman Nilson 和 Joseph Leonard Walsh。《样条理论及其应用：科学与工程中的数学：专著与教科书丛书》第 38 卷，第 38 卷。爱思唯尔，2016 年。[2] Carlos Am´endola、Peter Friz 和 Bernd Sturmfels。签名张量簇。载于《数学论坛：西格玛》第 7 卷，第 e10 页。剑桥大学出版社，2019 年。[3] Carlos Am´endola、Angelo El Saliby、Felix Lotter 和 Oriol Reig Fit´e。《在 Macaulay2 中计算路径签名簇》。arXiv:2506.01429，2025 年。[4]Carlos Am´endola 和 Leonard Schmitz。利用签名矩阵学习重心。arXiv:2509.07815，2025 年。[5] B.A. Barsky 和 T.D. DeRose。参数曲线的几何连续性：三种等价刻画。《IEEE计算机图形学与应用》，9(6):60–69，1989 年。[6] J´er´emy Berthomieu、Christian Eder 和 Mohab Safey El Din。msolve：用于求解多项式方程组的程序库。载于《2021 年国际符号与代数计算研讨会论文集》，ISSAC '21，第 51–58 页，美国纽约州纽约市，2021 年。计算机协会。[7] Paul Breiding 和 Sascha Timme。Homotopycontinuation.jl：用于 Julia 中同伦延拓的软件包。载于 James H. Davenport、Manuel Kauers、George Labahn 和 Josef Urban 编，《数学软件——ICMS 2018》，第 458–465 页，瑞士查姆，2018 年。Springer 国际出版公司。[8] Justin Chen 和 Joe Kileel。数值隐式化。《代数与几何软件杂志》，第 9 卷，2019 年。[9] Kuo-Tsai Chen。迭代积分与指数同态。《伦敦数学会会刊》，3(1):502–512，1954 年。[10] Ilya Chevyrev 和 Andrey Kormilitzin。《机器学习中的签名方法入门》，第 3–64 页。施普林格自然瑞士，瑞士查姆，2026 年。[11] Ilya Chevyrev、Vidit Nanda 和 Harald Oberhauser。拓扑数据分析中的持久性路径与签名特征。《IEEE模式分析与机器智能汇刊》，42(1):192–202，2018 年。[12] Laura Colmenarejo 和 Rosa Preiß。经多项式映射变换的路径签名。《代数与几何论文集》，61(4):695–717，2020 年。[13] Christa Cuchiero、Guido Gazzani、Janka M¨oller 和 Sara Svaluto-Ferro。《金融中的签名模型》，第 227–264 页。施普林格自然瑞士，瑞士查姆，2026 年。[14] Wolfram Decker、Christian Eder、Claus Fieker、Max Horn 和 Michael Joswig 编。《OSCAR 计算机代数系统：算法与示例》，《数学中的算法与计算》第 32 卷。Springer，第 1 版，2025 年。[15] Peter K Friz 和 Nicolas B Victoir。《作为粗糙路径的多维随机过程：理论与应用》，第 120 卷。剑桥大学出版社，2010 年。[16] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www2.macaulay2.com。

[17] Joe Harris 和 Loring W. Tu. 关于对称与反对称行列式簇. 拓扑学，23(1):71–84，1984.[18] Roger A. Horn 和 Vladimir V. Sergeichuk. 复矩阵合同与 *合同的典范形. *Linear Algebra and its Applications*，416(2):1010–1032，2006.[19] Terry J Lyons、Michael Caruana 和 Thierry L´evy. 粗糙路径驱动的微分方程：圣弗卢尔概率论暑期学校 *XXXIV-2004´´*. Springer，2007.[20] Terry J Lyons 和 Weijun Xu. 签名的双曲发展与反演. *Journal ofFunctional Analysis*，272(7):2933–2955，2017.[21] Gheorghe Micula 和 Sanda Micula. 样条手册，第 462 卷。Springer Science & Business Media，2012.[22] OSCAR – 开源计算机代数研究系统，版本 1.6.0，2025.[23] Max Pfeffer、Anna Seigal 和 Bernd Sturmfels. 从签名张量中学习路径. *SIAM* 矩阵分析与应用杂志，40(2):394–416，2019.[24] Gabriel Riffo 和 Leonard Schmitz. OSCAR 中的签名张量， 2026+. https://github.com/ leonardSchmitz/signature-tensors-in-OSCAR.[25] Leonard Schmitz. 一种高效的张量学习算法. *arXiv:2512.14218*，2025。