arXiv:2602.13018v1 [math.RT] 13 Feb 2026

从不动点子群提升 p-adic 类型的半单特征

`ADELE BOURGEOIS 和 MONICA NEVINS

ABSTRACT. 给定一个 p-adic 群 $G = \mathbf{G}(F)$ 以及一个有限群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}_F(\mathbf{G})$，使得不动点子群 $\mathbf{G}^\Gamma$ 是约化的，我们证明，对于 $G^\Gamma = \mathbf{G}^\Gamma(F)$ 的某个类型的每个半单特征（按照 Bushnell 和 Kutzko 的定义），都可以表示为 G 的某个类型的半单特征的限制。为此，我们将参数化 G^Γ 的半单特征的截断 Kim–Yu 数据（或特征数据）显式提升为参数化 G 的半单特征的特征数据。我们的证明本身也具有独立意义：它使用了最先进的技术，并且作为特殊情形，为 G^Γ 的极大环面上的特征的 Howe 分解定义了一个提升。

1. INTRODUCTION

对于一个 p-进群 G，类型理论将 G的光滑表示范畴的 Bernstein 分解实现为若干块：每个块中的不可约表示，都由其在限制后所含的类型（K, ρ）来刻画，其中K遍历某些紧开子群，而 ρ 是 K的特定表示。在许多情形下，这一理论已得到证明，所有类型也已构造出来，其中值得一提的有 [BK93、Ste08、Yu01、Kim07、KY17、Fin21a、Fin21c]。

对 p-进群 G 的正深度不可约表示，已知的类型构造包含两部分数据：零深度部分，采用 G的抛物型子群之约化商的尖点表示；以及正深度部分，它由 G的扭曲 Levi 子群的适当准特征构造而成。正深度部分的产物是一个准特征 ϑ，定义在一个 pro-p子群 K_+ 上；在 [BK93第 3]章中，这被称为 半单特征，它是 G的一个类型的特征。

现在设 G 是剩余特征为 p 的非阿基米德局部域 F 上的约化群，并设 Γ 是 G 的一个自同构有限群，其阶与 p 互素。于是，$\mathbf{G}^{[\Gamma]} := (\mathbf{G}^\Gamma)^\circ$ 是一个约化子群 [PY02]。先前的工作表明，存在一类适用于 $G = \mathbf{G}(F)$ 的类型的半单特征，称为 Γ-稳定的（见[LN23], ）、 [MS14] 中的自对偶特征以及 [Ste05], 中的斜特征；它们在 $G^{[\Gamma]} := \mathbf{G}^{[\Gamma]}(F)$ 上的限制是适用于 $G^{[\Gamma]}$ 的类型的半单特征。这是分类.....的关键一步

日期：2026年2月16日。2020年 数学主题分类。22E50。关键词与短语。 p-进群、类型理论、不动点子群。第二作者的研究获得了NSERC Discovery Grant RGPIN-2025-05630以及亨利·庞加莱研究所（UAR 839 CNRS-索邦大学）的ANR-10-LABX-59-01项目资助。

经典群的超尖点表示 [Ste05、Ste08、MS14] 以及适用于 G_2的 [BB12]。

本文证明，在对 p 施加温和限制的条件下（见第2节），对于在$\mathbf{G}$ 上分裂的任意连通约化群 F，对于 $G^{[\Gamma]}$ 的类型的每个半单特征，都存在一个 Γ-稳定的半单特征，它是 G上某个类型的特征，从而回答了 [LN23]中的一个未解决问题。事实上，我们的解答是对这种提升的显式构造，它源于对准特征序列提升问题的深入研究。

下面更详细地介绍我们的结果。当 p不整除$\mathbf{G}$ 的韦伊群的阶，且$\mathbf{G}$ 在 F上的温和分歧扩张中分裂时，Fintzen 证明了 G 的每个光滑不可约表示都包含一个*Kim–Yu* 类型 [Fin21c，定理 7。12]。Kim–Yu 类型的构造基于 Kim–Yu 数据 [KY17，§ 7]。省略 Kim–Yu 数据中的零深度部分，可得到一个特征数据，针对G （定义 2.10），它恰好是构造 Kim–Yu 类型的半单特征所需的输入。因此，对 Kim–Yu 类型的半单特征的研究，可以进一步归结为对 G的特征数据的研究。

我们的主定理可概述如下。

定理（定理 4.1）。设 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}_F(\mathbf{G})$ 的阶与 p 互素，且 $\mathbf{G}^{[\Gamma]} = (\mathbf{G}^\Gamma)^\circ$。设 Δ 是 $G^{[\Gamma]} = \mathbf{G}^{[\Gamma]}(F)$ 的特征数据，并将其对应的半单特征记为 $\vartheta(\Delta)$，它是紧开子群$K_+(\Delta) \subset G^{[\Gamma]}$上的一个特征。那么存在一个 Γ-稳定的特征数据 Σ，适用于 G，使得$K_+(\Sigma)^\Gamma = K_+(\Delta)$，且 $\vartheta(\Delta) = \vartheta(\Sigma)|_{K_+(\Delta)}$.

在证明该定理的过程中，我们稍微推广了 Γ-稳定特征数据的定义 [LN23]，以满足我们的需要。在 [LN23]中证明了，这样的特征数据 Σ 对于 $\mathbf{G}$定义了一个特征数据 Σ^Γ 对于 $\mathbf{G}^{[\Gamma]}$，使得相应的半单特征通过限制彼此相容。因此，为了证明定理 4.1，我们构造一个特征数据 Σ，使得 Σ^Γ 是重因式分解， Δ其含义见 [HM08]。

我们来概述这个完全构造性的证明。

特征数据 $G^{[\Gamma]}$ 包含一列一般准特征，它们属于 $\mathbf{G}^{[\Gamma]}$ 的扭曲 Levi 子群。在定理 4.5 中，我们说明如何将扭曲 Levi 子群 的单个 $G^{[\Gamma]}$-一般准特征 ξ 提升为一列一般准特征，它们属于扭曲 Levi 子群 $H' = \mathbf{H}'(F) \subset G^{[\Gamma]}$ 的 $\mathbf{G}$。该定理的证明大量依赖 [Fin21c]中的技术，以受控的方式构造特征和扭曲 Levi 子群（定理2.9 和命题 4.3）。

要提升特征数据 Δ，使其对应于 $G^{[\Gamma]}$，必须以兼容的方式提升其所有准特征，同时确保所得特征数据 Σ^Γ 对 Σ的限制 G 是 Δ的重因式分解。因此，我们不能简单地独立提升序列中的所有准特征，而是需要采用自顶向下方法的迭代构造。此论证占据了第 4.2 节的大部分内容。

我们通过贯穿全文的示例说明简单提升所面临的障碍，以此阐明这一技术上颇具挑战性的构造为何不可或缺。定理4.1 证明的各个步骤见图 1.1。

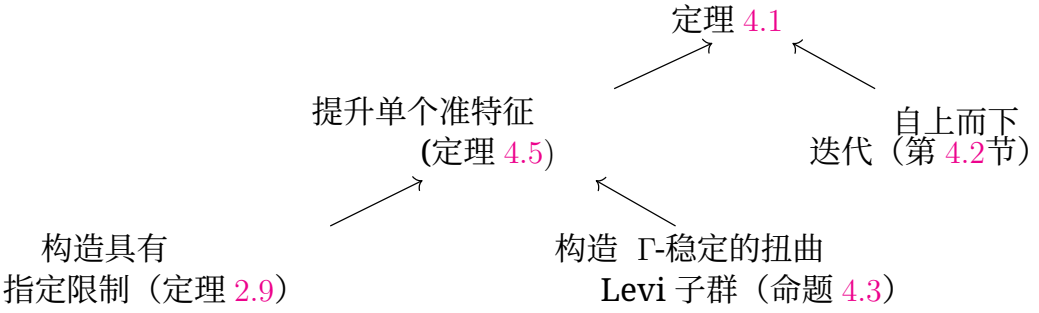

FIGURE 1.1. 证明定理4.1的路线图。

一个关于 $G^{[\Gamma]}$ 的特征数据将有许多提升为关于 G 的 Γ-稳定特征数据，而我们的构造会给出所有这些提升。粗略地说：在归纳构造的每一步中，都要选择一个元素 $X^\sharp \in \mathfrak{g}^{\Gamma,*}$，然后选择 $\mathrm{Cent}_G(X^\sharp)$ 的一个准特征 ϕ'，并满足特定性质；命题 4.3 和定理 2.9 分别证明了这些选择的存在性。在命题 4.7 和 4.10 中，我们证明：若 Σ是关于 G的 Γ-稳定特征数据，且 $\Delta = \Sigma^\Gamma$，那么存在一组选择 $(X_i^\sharp, \phi_i')_i$，使得 Σ 是 Δ的一个提升。

定理4.5略微推广了环面准特征的 Howe 分解概念，该概念针对 [Kal19，定义 3.6。2] 并将其推广到扭曲 Levi 子群的准特征，同时使 G因子分解 [Mur11，定义 51] 的构造变得明确。我们将在4.3节中更详细地探讨这些联系。

本文所研究的问题属于一个更大的图景。半单特征以及相关特征数据之间的紧密对应，也已对如下的对（$\mathbf{G}$，$\mathbf{H}$）建立，其中 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{G}$ 的子群，且包含 $\mathbf{G}_{\mathrm{der}}$，见于 [Bou21]。也就是说，可以为 H 构造特征数据，其来自 G 的特征数据，反之亦然，并通过限制将相应的半单特征联系起来。重要的是，这在朗兰兹对应的函子性中有直接应用 [BM25]。
同样，扭端oscopy 预言了 G 的半单特征与诸如 $H = G^{[\Gamma]}$ 之类的群之间的关系。然而，来自基变换的动机表明，半单特征 ϑ_G 不应由简单的限制来确定，而应通过对每个 Γ-轨道上的 ϑ_H 取平均来确定，其意义为 $\vartheta_H \circ \prod_{\gamma\in\Gamma} \gamma = \vartheta_G$。这是正在进行的工作的主题。

本文结构安排如下。第2 节介绍预备知识，首先说明记号与约定（第2.1节），接着概述有关泛型性的重要结果（第2.2节），最后根据 G 的特征数据，构造适用于 Kim–Yu 类型的半单特征（第2.3节）。第3节重新考察 [LN23]，中关于限制的结果，并引入其中主要结果的广义版本。我们在第4.1节证明主要定理（定理

4节，并通过示例展示主要步骤。第4.1节讨论单个准特征的提升，随后第4.2节综合本文的所有中间结果，说明如何通过迭代构造，将 $G^{[\Gamma]}$ 的特征数据提升为 G 的特征数据。我们在第4.3节讨论与相关构造的联系。

致谢。 作者感谢 Jeff Adler 和 Loren Spice 进行的许多启发性讨论。第二作者于2025年1月至4月参加 IHP（巴黎）主题季度项目表示论与非交换几何 期间，本工作的部分内容得以完成。

2. Preliminaries

2.1. 记号与约定。 给定非阿基米德局部域 F，记其标准化赋值为 $\mathrm{val}(\cdot)$，整数环为 $\mathfrak{o}_F$， $\mathfrak{o}_F$ 的唯一极大理想为 $\mathfrak{p}_F$，剩余域为 $\mathfrak{f}$，其剩余特征为素数 p。我们固定一个加性特征 $\psi\colon F \to \mathbb{C}^\times$，它在 $\mathfrak{p}_F$ 上平凡，在 $\mathfrak{o}_F$ 上非平凡。

除非另有说明，$\mathbf{G}$ 表示定义在 F 上的连通约化群。称$\mathbf{G}$ 的子群为扭曲 Levi 子群，是指该子群$\mathbf{G}$ 定义在F 上，且在 F 的某个有限扩张上是列维子群。记 $G = \mathbf{G}(F)$ 和 $\mathbf{G}_{\mathrm{der}} = [\mathbf{G},\mathbf{G}]$，为导出群。我们还记 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ 为 $\mathbf{G}$ 的李代数，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbf{G})(F)$，并记 $\mathfrak{g}^*$ 为 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间。对于$\mathbf{G}$ 的代数 F-子群$\mathbf{M}$，我们也采用类似的记号约定（例如， M、 $\mathfrak{m}$、 $\mathfrak{m}^*$），不再另行说明。
我们假设 $\mathbf{G}$ 在 F 的一个温和分歧扩张上分裂，并且 p 与 $\mathbf{G}$ 的（绝对）韦伊群的阶互素。此假设保证，$\mathbf{G}$ 中定义在 F 上的每个扭曲 Levi 子群都在温和分歧扩张 [Fin21c，§2]。

我们用 $\mathscr{B}(G)$（分别用 $\mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G)$）表示 G 的扩展（分别为约化）Bruhat–Tits 建筑。对每个 $x \in \mathscr{B}(G)$，我们令 $[x]$ 表示 x 在 $\mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G)$ 中的投影。对每个 $x \in \mathscr{B}(G)$ 及 $r > 0$, $G_{x,\,r}$ 表示抛物线子群 $G_{x,\,0}$所对应的 Moy–Prasad滤过子群。我们还设 $G_{x,\,r^+} = \bigcup_{t>r} G_{x,\,t}$，其中

所有 $r \geq 0$，并回顾一下，对每个 x，都存在一些值 $r' > r$，使得 $G_{x,\,r^+} = G_{x,\,r'}$。对于任意 $0 < t < r$，我们简记 $G_{x,\,t:r} = G_{x,\,t}/G_{x,\,r}$。
类似地，对于任意的 $r \in \mathbb{R}$ 和 $x \in \mathscr{B}(G)$，我们有一个由 $\mathfrak{o}_F$-格 $\mathfrak{g}_{x,r}$和 $\mathfrak{g}_{x,r^+}$ 给出的 $\mathfrak{g}$ 的滤子。这通过设定诱导出 $\mathfrak{g}^*$ 上相应的滤子

$$\mathfrak{g}^*_{x,-r} = \{X \in \mathfrak{g}^* : X(\mathfrak{g}_{x,r^+}) \subseteq \mathfrak{p}_F\}$$

和 $\mathfrak{g}^*_{x\,,(-r)^+} = \bigcup_{r'<r} \mathfrak{g}^*_{x,-r'}$. 对于任意 $0 < t < r \leq 2t$ 和 $x \in \mathscr{B}(G)$，令 $\mathfrak{g}_{x,t:r} = \mathfrak{g}_{x,t}/\mathfrak{g}_{x,r}$. 那么在我们的温和性假设下，有一个阿贝尔群 $e_{x,t:r}\colon \mathfrak{g}_{x,t:r} \to G_{x,t:r}$；参见 [KP23，定理 13.5。1]。
给定 $\mathbf{G}$ 的极大 F-环面，我们用 $\Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$ 表示相应的根系。对于每个 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$，我们用 $\mathbf{U}_\alpha$ 表示相应的根子群，并用 $H_\alpha = d\alpha^\vee(1)$ 表示相应的余根。给定 $X \in \mathfrak{t}^* = \mathrm{Lie}(\mathbf{T})(F)^*$，回忆

其中心化子 $\mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(X) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha : X(H_\alpha) = 0 \rangle$ 是 $\mathbf{G}$ [Yu01，命题 7.1 和 7.2]。

我们固定一个有限子群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}_F(\mathbf{G})$，其阶与 p 互素。给定 $\mathbf{G}$ 的一个 Γ-稳定子群 $\mathbf{H}$，我们用 $\mathbf{H}^{[\Gamma]} = (\mathbf{H}^\Gamma)^\circ$ 表示不动点子群的连通分支，并记作 $H^{[\Gamma]} = \mathbf{H}^{[\Gamma]}(F)$。根据 [PY02，定理 2.1]，$\mathbf{G}^{[\Gamma]}$ 是 $\mathbf{G}$ 的闭约化子群。此外，$\mathscr{B}(G^{[\Gamma]}) = \mathscr{B}(G)^\Gamma$ [PY02，命题 3.4]，因此 $\mathscr{B}(G^{[\Gamma]}) \hookrightarrow \mathscr{B}(G)$。不过请注意，当 $\mathbf{G}$ 的中心中的极大分裂环面 $^{[\Gamma]}$ 在 $\mathbf{G}$ 中并非中心时，$\mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G)^\Gamma = \mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G^{[\Gamma]})$ 就不成立。我们还有一个自然同一 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}^{[\Gamma]})^* = (\mathrm{Lie}(\mathbf{G})^*)^\Gamma$ [LN23，引理 3.4]。

最后，我们还假设$\mathbf{G}^{[\Gamma]}$ 在 F的一个温和分歧扩张上分裂，且 p 与$\mathbf{G}^{[\Gamma]}$的（绝对）韦伊群的阶互素。

2.2. **实现特征与一般性**。 构造半单特征需要满足一般性 [Yu01]的准特征。本节回顾这一概念及其若干等价刻画，这些刻画将在后续各节中用到。我们还运用 [Fin21c]中的技巧，证明关于存在满足指定限制条件的准特征的定理2.9。该定理将成为在第4.1节提升不动点子群准特征的关键要素。

回忆一下，ψ 是 F 的一个固定的非平凡加性特征，深度为零。本节余下部分中，令$\mathbf{G}'$ 表示$\mathbf{G}$ 的一个定义在 F上且包含极大 F-环面$\mathbf{T}$的扭曲 Levi 子群。根据假设，$\mathbf{T}$ 在 F的一个温和分歧扩张 E 上分裂。令 $\Phi = \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$和 $\Phi' = \Phi(\mathbf{G}', \mathbf{T})$分别为相应的绝对根系。

设 $\mathbf{Z}' = Z(\mathbf{G}')^\circ$ 和 $\mathfrak{z}' = \mathrm{Lie}(\mathbf{Z}')(F)$，则

$$\mathfrak{z}'^*_{-r} = \{X \in \mathfrak{z}'^* : X(\mathfrak{z}'_{r^+}) \subseteq \mathfrak{p}_F\}$$

并且 $\mathfrak{z}'^*{}_{(-r)^+} = \bigcup_{r'<r} \mathfrak{z}'^*_{-r'}$ 对所有 $r \in \mathbb{R}$ 均成立。通过在 $\mathfrak{g}'_{\mathrm{der}} = \mathrm{Lie}(\mathbf{G}'_{\mathrm{der}})(F)$ 上作平凡延拓，可以将 $\mathfrak{z}'^*$ 中的元素视为 $\mathfrak{t}^*$ 或 $\mathfrak{g}'^*$ 中的元素，参见 AR00，命题 3.1]。类似地，对于任意 $r \in \mathbb{R}$ 和 $x \in \mathscr{B}(G')$，$\mathfrak{z}'^*_{-r}$ 中的元素都可以视为 $\mathfrak{t}^*_{-r}$ 或$\mathfrak{g}'^*_x$ 中的元素，参见 AR00，命题 3.2]。我们也可以将标量扩张到 E，这意味着可以在 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}')(E)$ 上取 $\mathfrak{z}'^*$ 中元素的值。

设 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$ 和 $x \in \mathscr{B}(G')$，并令 $s \in (r/2, r]$。于是 X 通过 Moy–Prasad 同构按如下规则定义了 $G'_{x,s}/G'_{x,r^+}$ 的一个拟特征 $\eta_{s,X}$

$$\eta_{s,X}(e_{x,s:r^+}(Y)) = \psi(X(Y))$$

对任意 $Y \in \mathfrak{g}'_{x,s}$。我们类似地定义 $\eta_{s^+,X}$ 对于任意 $s \in [r/2, r)$ 。以下是对 [HM08引理 2 的一种变体。51]。

引理 2.1. 设 $x \in \mathscr{B}(G')$、$r > 0$和 $s \in [r/2, r)$。元素 X、$X' \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$在 G'_{x,s^+} 上满足 $\eta_{s^+,X} = \eta_{s^+,X'}$，当且仅当 $X \in X' + \mathfrak{z}'^*_{-s}$；等价地，当$X \in X' + \mathfrak{g}'^*_{x,-s}$时成立。特别地，$\eta_{s^+,X}|_{G'_{x,r}} = \eta_{r,X}$ 是平凡的，当且仅当 $X \in \mathfrak{z}'^*{}_{(-r)^+}$。

证明。我们有 $\eta_{s^+}、_X = \eta_{s^+}、_{X'}$，当且仅当对所有 $Y \in \mathfrak{g}'_x、_{s^+}$，$(X - X')(Y) \in \ker \psi$。沿用 [Bou20，命题 3.1.12], 的证明，线性性表明这等价于对所有 $Y \in \mathfrak{g}'_x、_{s^+}$，$(X - X')(Y) \in \mathfrak{p}_F$；等价地，$X - X' \in \mathfrak{g}'^*_x、_{-s}$。由于$X$、$X' \in \mathfrak{z}'$，第一个结论得证。对于第二个陈述，Moy–Prasad 同构的相容性 [Hak18，注 3.4.3] 保证对每个 $s \leq t < r$，都有 $\eta_{s^+}、_X|_{G'_x}、_{t^+} = \eta_{t^+}、_X$。选取 t 使得 $G_x、_{t^+} = G_x、_r$，我们有 $\mathfrak{g}'^*_x、_{-t} = \mathfrak{g}'^*_x$、$(-r)^+$以及 $\eta_r、_X = \eta_{t^+}、_X$。于是 $\eta_r、_X$ 是平凡的，当且仅当 $\eta_{t^+}、_X = \eta_{t^+}、0$。结论得证。□

定义 2.2. 设 ϕ 是 G' 的深度为 r的特征，$x \in \mathscr{B}(G')$，$X \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$ 且$s \in (r/2, r]$。我们称 ϕ 由 X 在$G'_{x,\ s}$上实现，如果$\phi|_{G'_{x,\ s}} = \eta_{s,\ X}$。

注记 2.3. 定义2.2 并不具有限制性（在我们的温和性假设下）。事实上，给定特征 ϕ，即 G' 的深度为 r 的特征，以及 $x \in \mathscr{B}(G')$，下列结论成立。

1) 根据 [Kal19，引理 3.5.2]，ϕ 由元素 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$ 在G'_x上实现，$r/2^+$。2) 由于对不同的 $s \in (r/2, r]$），Moy–Prasad 同构自然相容，见 [Hak18，注记 3.4.3], ：如果 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$ 实现 ϕ 于$G'_x、_s$，则 X 也实现 ϕ 于$G'_x、_r$。3) 根据 [Kal19，引理 3.5.2] 与 [Mur11，引理 4.7], ，如果 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$ 实现 ϕ 于$G'_x、_r$，则 X 实现 ϕ 于$G'_y、_r$，对所有 $y \in \mathscr{B}(G')$。

设 $r \in \mathbb{R}$ 和 $X \in \mathfrak{t}^*_{-r}$。对于任意 $\alpha \in \Phi$，我们有 $H_\alpha \in \mathfrak{t}(E)_0$，其中某个温和扩张$E$ 是 F 的扩张。因此，对于所有 $\alpha \in \Phi$，$\mathrm{val}(X(H_\alpha)) \geq -r$。特别地，这适用于 $\mathfrak{z}'^*_{-r}$中的元素。

定义 2.4。设 $r \in \mathbb{R}$ 和 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r} \setminus \mathfrak{z}'^{*\ (-r)^+}$。若对于所有 $\alpha \in \Phi \setminus \Phi'$，$\mathrm{val}(X(H_\alpha)) = -r$，则称 X 是深度为 $-r$的 G-泛型。

注 2.5。无需先指定 G′，也可以定义泛型性。若存在一个极大环面 T，使得 $X \in \mathfrak{t}^*_{-r} \setminus \mathfrak{t}^{*\ (-r)^+}$，则称元素 $X \in \mathfrak{g}^*$ 为深度为 $-r$ 的几乎稳定元素。接下来遵循 Fin21c 的定义 3.5] ，若对于所有 $\alpha \in \Phi(\mathrm{G}, \mathrm{T})$，满足 $X(H_\alpha) = 0$ 或 $\mathrm{val}(X(H_\alpha)) = -r$，则称这样的 X 是深度为 $-r$ 的G-泛型。在这种情况下，令 $\mathrm{G}' = \mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(X)$，可推知按照定义 2.4 的意义，$X$ 是深度为 $-r$ 的 G-泛型。作为 $\mathfrak{z}'^*$ 中元素的 X 的泛型性与 T 的选择无关（另见 AR00，第 5] 节）。此外，根据 Fin21c 的推论 3.8], ，这样的X 按照 Fin21c 定义 3.1]的意义是几乎强稳定的。

现在我们可以给出 G' 的准特征的泛型性定义。

定义 2.6. 设 ϕ 是 G' 的一个深度为 r 的非平凡准特征。若对于每个 $x \in \mathscr{B}(G')$，ϕ 都由 $G'_{x,r}$ 上的一个 G-一般元素 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$ 实现，则称 ϕ 是 G-泛型的。

我们注意到，当$\mathbf{G}' = \mathbf{G}$时，$X \in \mathfrak{z}^*$ 的泛型性仅仅是它具有深度 $-r$这一条件，因此 G' 的每个准特征都是 G-一般的。

注 2.7. 根据 [Mur11，注 6.4]，若 G' 的准特征 ϕ是深度为 r的 G-一般准特征，则 $\phi|_{G'_{x,r}}$ 不能作为 G的一个更大扭曲 Levi 子群的准特征的限制而得到。

引理 2.8. 设 ϕ 是 G' 上的一个深度为 r的准特征。那么，其泛型性与 $x \in \mathscr{B}(G')$ 的选取无关，并且对于任意 $s \in (r/2, r]$，都有在 $G_{x,s}$上实现 ϕ 的 G-泛型 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$。

证明.由定义 2.4 和引理 2.1 可知，$X \in \mathfrak{z}'^*_{-r} \setminus \mathfrak{z}'^*{}_{(-r)^+}$的泛型性是陪集 $X + \mathfrak{z}'^*{}_{(-r)^+}$的性质。由注记 2.7(3)可知，$X$与实现 ϕ时所选取的 $x \in \mathscr{B}(G')$ 无关。最后，若 $X' \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$ 在 $G_{x,s}$ 上实现了 ϕ，其中 $s \in (r/2, r]$，则由注记 2.7(2)可得 $X' \in X + \mathfrak{z}'^*{}_{(-r)^+}$。□

我们的最终结果适用于所有$\eta_{s,\ x}$ 如上所定义，且与 X的泛型性无关，表明它可以延拓为 ϕ上的特征 G'。这将是提升不动点子群的准特征（不一定是 G-一般的）的关键要素，见第4.1节。

定理 *2.9.* 设 G' 是 G 的一个扭曲 *Levi* 子群，且 $x \in \mathscr{B}(G')$。令 $\mathfrak{z}' = Lie(Z(G')^\circ)(F)$，并设 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r} \setminus \mathfrak{z}'^*{}_{(-r)^+}$，其中某个 $r > 0$。固定某个 $s \in (r/2, r]$，并令$\eta_{s,X}$ 为由 X实现的$G'_{x,s}/G'_{x,r^+}$ 的特征。于是存在 G' 上的一个准特征ϕ，其深度为 r，且其在 $G'_{x,s}$ 上的限制与 $\eta_{s,X}$ 一致。

证明. 设 $X \in \mathfrak{z}'^*_{-r} \setminus \mathfrak{z}'^*{}_{(-r)^+}$。设 T 为 G′ 的一个极大 F-分裂环面，其对应的仿射公寓 $\mathscr{A}$(G′, T F) 包含 x。回顾一下，我们已将 $\mathfrak{z}'^*$ 识别为 $\mathfrak{g}'^*$ 的子空间，该子空间由在 $\mathfrak{g}'_{\mathrm{der}}$ 上取零的线性泛函构成。由于 Moy–Prasad 同构保持分解 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{z}' \oplus \mathfrak{g}'_{\mathrm{der}}$ [AR00，命题 3.2], $\eta_{s,X}$ 在 $(G'_{\mathrm{der}})_{x,s}$ 上平凡。令 $\eta_{s,X}$ 为群的特征

$$T_s(T_{0^+} \cap G'_{\mathrm{der}}) = T_s(T \cap G'_{\mathrm{der}})_{0^+}$$

它平凡地将$\eta_{s,X}$ 的限制延拓到 T_s。也就是说，由于$\eta_{s,X}$ 在$(T \cap G'_{\mathrm{der}})_s$上平凡，我们可以在每个 $t \in T_s$ 上定义$\eta_{s,X}$，并令 $u \in (T \cap G'_{\mathrm{der}})_{0^+}$ 等于$\eta_{s,X}(tu) = \eta_{s,X}(t)$。

由于 T_{0^+} 是一个阿贝尔群，$\eta_{s,X}$ 可以延拓（不唯一地）为 T_{0^+} 的一个特征 φ，且它在$(T \cap G'_{\mathrm{der}})_{0^+}$上平凡。注意，按构造 φ 在 T_{r^+} 上平凡；但由于$\eta_{s,X}$ 的深度为 r，它在 T_r上并非平凡。

由于 p <style id='4'}不整除 G'_{der}的基本群的阶，因此[Fin21c，推论 7 的证明2] 中的论证可以应用，从而得到同构

$$(\mathbf{G}'/\mathbf{G}'_{\mathrm{der}})(F)_{0^+} \cong (\mathbf{T}/\mathbf{T} \cap \mathbf{G}'_{\mathrm{der}})(F)_{0^+} \cong T_{0^+}/(T \cap G'_{\mathrm{der}})_{0^+}. \tag{2.1}$$

通过这些同构将特征 φ 提升为 $(\mathbf{G}'/\mathbf{G}'_{\mathrm{der}})(F)_{0^+}$ 的特征 φ'。同样，由于代数群 $\mathbf{G}'/\mathbf{G}'_{\mathrm{der}}$ 是阿贝尔群，φ' 可以（非唯一地）延拓为 $(\mathbf{G}'/\mathbf{G}'_{\mathrm{der}})(F)$ 的特征 φ'。由于 G'/G'_{der} 嵌入 $(\mathbf{G}'/\mathbf{G}'_{\mathrm{der}})(F)$，将 φ' 限制到该像上，便得到 G' 的特征 ϕ。

根据 [Fin21c，推论 7 的证明。2], 我们有 $G'_{x,\,r^+}/(G'_{\mathrm{der}})_{x,\,r^+} \subseteq (\mathbf{G}'/\mathbf{G}'_{\mathrm{der}})(F)_{r+}$。根据 [Kal19，引理 3.1。3], (2.1) 在将滤子层级 0 替换为任意正实数时仍成立。因此我们可以推出，ϕ 的深度为 r，且由 X 在 $G'_{x,\,s}$ 上实现，证毕。□

由定理 ϕ 2.9 产生的准特征并非唯一；如果 $\mathbf{G}'$ 具有非紧中心，那么甚至会有无穷多个选择。

2.3. **半单特征**。本节回顾如何构造 Kim–Yu 型的半单特征。

定义 2.10。G 的特征数据是一个序列 $\Sigma = (\vec{\mathbf{G}}, y, \vec{r}, \vec{\phi})$，其中

CD1) $\vec{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}^0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^d \subseteq \mathbf{G}^{d+1} = \mathbf{G})$ 是扭曲 Levi 子群的序列，其中每个子群都定义在 F 上（并且在 F的某个温和分歧扩张上分裂）；CD2) y 是 $\mathscr{B}(G^0) \subset \mathscr{B}(G^1) \subset \cdots \subset \mathscr{B}(G)$ 中的一点，这里取定了建筑的嵌入；CD3) $\vec{r} = (r_0, \ldots, r_d)$ 是满足 $0 < r_0 < \cdots < r_{d-1} < r_d$ 的实数序列。对于所有 $0 \le i \le d$，我们还令 $s_i = r_i/2$；CD4) $\vec{\phi} = (\phi_0, \ldots, \phi_d)$ 是准特征序列，其中对于每个 $0 \le i \le d$，ϕ_i 是 G^i 的一个 G^{i+1}-一般准特征，其深度为 r_i，此处的含义见定义 2.6。

注 2.11. 对所有 $0 \le i \le d$，令 $\mathbf{Z}^i = Z(\mathbf{G}^i)^\circ$ 以及 $\mathfrak{z}^i = \mathrm{Lie}(\mathbf{Z}^i)(F)$。由引理 2.8，条件 (CD4) 等价于：对所有 $x \in \mathscr{B}(G^i)$，存在深度为 $-r_i$ 的 $X_i \in \mathfrak{z}^{i*}_{-r_i}$，$G^{i+1}$-一般元，它在 G^i_{x,s_i^+} 上实现 ϕ_i。如 [LN23 定义 2.1] 所定义，G 的截断数据是一个特征数据，连同相应的这样一列选择 X_i。在第 3 节中我们证明，更简单的特征数据概念已足够。

给定特征数据 $\Sigma = (\vec{\mathbf{G}}, y, \vec{r}, \vec{\phi})$，我们如下构造一个紧开子群$K_+(\Sigma) \subset G$ 及其上的特征 $\vartheta(\Sigma)$。我们令

$$K_+(\Sigma) = G^0_{y,0^+} G^1_{y,s_0^+} \cdots G^d_{y,s_{d-1}^+}.$$

对每个 $0 \le i \le d$，选取在 $G^i_{y,\,s_i^+}$ 上实现 ϕ_i 的 $X_i \in \mathfrak{z}^{i*}_{-r_i}$，并用它来定义 $G_{y,\,s_i^+}$ 的一个特征 $\eta_{s_i^+,\,X_i}$，如第 2.2 节所述。然后我们如下定义$G^i_y G_{y,\,s_i^+}$ 的一个准特征 $\widehat{\phi}_i$

$$\widehat{\phi}_i(gh) = \phi_i(g)\eta_{s_i^+, X_i}(h) \text{ for all } g \in G^i_y, h \in G_{y,s_i^+}.$$

最后，我们定义

$$\vartheta(\Sigma) = \prod_{i=0}^{d} \left(\widehat{\phi}_i|_{K_+(\Sigma)}\right).$$

˜一个特征数据 Σ 可以按照 Σ 的意义补全为一个数据 [KY17，第 7 节。2] 令 M表示与点 G相关联的列维子群 y，依据 [MP96，第 6 节。3] 并添加一个按照 [KY17，第 7 节。 1]的意义定义的零深度数据。

˜ ˜ ˜根据 Σ，Kim 和 Yu 构造了一个群 $K(\Sigma)$及其表示 $\kappa(\Sigma)$，并证明它是一个类型 [KY17]。于是， $K_+(\Sigma)$ 是一个 pro-p子群，且在 $K(\Sigma)$ 中正规，而 $\kappa(\Sigma)|_{K_+(\Sigma)}$ 是 $\vartheta(\Sigma)$-等型的。因此，我们将 ($K_+(\Sigma)$ $\vartheta(\Sigma)$) 称为与类型 ($K(\Sigma)$ $\kappa(\Sigma)$) 相关联的半单特征 。为简便起见，我们省略对类型的提及，称 ($K_+(\Sigma)$ $\vartheta(\Sigma)$) 是 G 的半单特征。

两份特征数据可能产生相同的半单特征。例如，我们可以选择另一个基点 y，使其在 $\mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G)$ 中的像相同。另一种更微妙的等价关系源自 重因式分解这一概念，该概念由 Hakim 和 Murnaghan 在 [HM08] 中引入。现在回顾这一重要概念，并稍作调整以便应用于特征数据。

定义 2.12（[HM08，定义 4.19(F1)]）。设 $\Sigma = (\vec{\mathbf{G}}\ y, \vec{r}, \vec{\phi})$ 和 $\Sigma' = (\vec{\mathbf{G}}\ y, \vec{r}, \vec{\phi}')$ 是 G 的两个特征数据。若对所有 $0 \le i \le d$，均有以下关系，则称 $\vec{\phi}'$ 是 $\vec{\phi}$ 的重因式分解（或称 Σ' 是 Σ 的重因式分解）：

$$\prod_{j=i}^{d} \phi_j \phi_j'^{-1}\Big|_{G^i_{y,r^+_{i-1}}} = 1.$$

引理 2.13。 设 $\Sigma = (\vec{\mathbf{G}}\ y, \vec{r}, \vec{\phi})$ 和 $\Sigma' = (\vec{\mathbf{G}}\ y', \vec{r}, \vec{\phi}')$ 是 G 的两个特征数据。若 $[y] = [y']$ 且 ϕ' 是 ϕ 的重因式分解，则 $K_+(\Sigma) = K_+(\Sigma')$ 以及 $\vartheta(\Sigma) = \vartheta(\Sigma')$。

证明。 群 $K_+(\Sigma)$ 仅取决于 Σ 的前三项（事实上仅取决于 y 在 $\mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G)$ 中的像），因此群相等显而易见。特征相等由 [HM08，引理 423]得出。 □

3. Restricting characters

本节中，我们定义一个 Γ-稳定的特征数据 Σ，用于 G，并概述如何由其得到一个特征数据 Σ^Γ，用于 $G^{[\Gamma]}$，使得相应的半单特征通过限制自然相关，具体方法遵循 [LN23]。

我们首先讨论 Γ-稳定性的概念。回顾一下， $[y] \in \mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G)$ 表示 $y \in \mathscr{B}(G)$ 的投影。

定义 3.1。 设 $\Sigma = (\vec{\mathbf{G}}\ y,\ \vec{r},\ \vec{\phi})$ 是 G 的特征数据。若 Σ 满足以下条件，则称其为 Γ-稳定的：

(1) $[y]$ 是 Γ-不变的，并且

(2) 对每个 $0 \le i \le d$，以及对每个在 G^i_y 上实现 的 s_i^+，陪集 $X_i + \mathfrak{z}^{i*}_{-s_i}$ 是 Γ-稳定的。

相比之下，在 [LN23 的定义 311], 中， y 以及 X_i 的特定选取都被视为由 Γ固定。注意，其中所考察的 X_i 按照注2.5 的含义是几乎强稳定的。接下来的两个引理将证明我们关于 Γ-稳定性的两种概念等价。

引理 3.2。 设 $x \in \mathscr{B}(G)$。以下条件等价。

1) 点 $[x] \in \mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G)$ 是 Γ-不动的。2) 存在 $\tilde{x} \in \mathscr{B}(G)^{\Gamma}$ ，使得 $[\tilde{x}] = [x]$。

证明。 由于 $\mathscr{B}(G) = \mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G) \times X_*(Z(\mathbf{G})^{\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，其中 Γ 分别作用于每个因子，因此 (2) 推出 (1)。反过来，假设 $[x]$ 是 Γ-不动的。那么， Γ 作用于 x 的轨道的重心 $\tilde{x} = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma \cdot x$ 仍将具有相同的投影$[x] \in \mathscr{B}^{\mathrm{red}}(G)$，并且根据构造，它是 Γ-不动的。□

引理 3.3。 设 $\mathbf{G}'$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个扭曲 *Levi* 子群，且 $y \in \mathscr{B}(G')$。设 ϕ 是 G' 的一个深度为 r的G-一般准特征。记 $\mathfrak{z}'^*$ 为 $\mathbf{G}'$ 的中心的李代数的对偶空间，并令 $s = r/2$。那么以下条件等价。

1) 对于任意在 G_y 上实现 的 s^+，陪集 $X + \mathfrak{z}'^*_{-s}$ 是 Γ-稳定的。

2) 存在一个 Γ-不变的几乎强稳定元素 $X \in \mathfrak{g}'^*$ ，它在G_y 上实现 s^+ ，并满足 $\mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(X) = \mathbf{G}'$。

证明。 假设 $X' \in \mathfrak{z}'^*_{-r}$ 在 G'_y 上实现 ϕ ，s^+。根据引理 2.1 ，这是陪集 $X' + \mathfrak{z}'^*_{-s}$ 的一个性质。如果该陪集是 Γ-稳定的，那么我们可以令

$$\check{X} = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma \cdot X' \quad \in \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma \cdot (X' + \mathfrak{z}'^*_{-s}) = X' + \mathfrak{z}'^*_{-s}$$

这里我们利用了 $\mathrm{val}(|\Gamma|) = 0$ 这一事实，以确保乘以该元素不会改变深度。于是 $\check{}X$ 是一个 Γ-不变元素，它在 G'_y 上实现 ϕ ，s^+。由于 ϕ 是 G-泛型的，$\check{}X$也如此；因此根据备注 2.5 ，它几乎强稳定。由于 $\check{}X \in \mathfrak{z}'^*$，其中心化子包含 $\mathbf{G}'$ ，而泛型性保证二者相等。

反之，若 $X \in \mathfrak{g}'^*$ 满足 $\mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(X) = \mathbf{G}'$ ，则由于我们的温和性假设意味着我们可以 G'-等变地将 $\mathfrak{g}'$ 与 $\mathfrak{g}'^*$等同，我们有 $X \in (\mathfrak{g}'^*)^{\mathbf{G}'} \cong \mathfrak{z}'^*$。因此，若 X 在G'_{y,s^+}上实现 ϕ ，则它位于 $\mathfrak{z}'^*_{-r}$ 中；并且若它是 Γ-不动的，则$\mathbf{G}'$ 与陪集 $X + \mathfrak{z}'^*_{-s}$ 都是 Γ-稳定的。□

有了这一准备，我们现在可以证明 [LN23，命题 3.12 与定理 4。4]在我们关于 Γ-稳定特征数据的概念下成立。

定理 3.4. 设 $\Sigma = (\vec{\mathbf{G}}, y, \vec{r}, \vec{\phi})$ 为 G 的一个特征数据，它是 Γ-稳定的（在定义 *3.1*的意义下）。定义 $\Sigma^{\Gamma} = (\vec{\mathbf{G}}^{[\Gamma]}, y, \vec{r}, \vec{\phi})$，其中

(i) $\vec{\mathbf{G}}^{[\Gamma]}$ 是$\mathbf{G}^{[\Gamma]}$ 中由以下群组成的扭曲 *Levi* 序列：$\mathbf{G}^{i,[\Gamma]} = (\mathbf{G}^i)^{[\Gamma]}$;

(ii) 每个准特征 ϕ_i 均通过限制视为$\mathbf{G}^i$的准特征，$^{[\Gamma]}$

对于每个 i，若存在 $k > 0$ 使得 $G^{i,[\Gamma]} = G^{i+k,[\Gamma]}$，则将子序列组 $((G^{i,[\Gamma]}, \dots, G^{i+k,[\Gamma]}), (r_i, \dots, r_{i+k}), (\phi_i, \dots, \phi_{i+k}))$ 替换为元组$(G^{i,[\Gamma]}, r_{i+k}, \prod \phi_{i+j})$。于是，所得元组 Σ^Γ 是 $G^{[\Gamma]}$ 的特征数据。此-$j=0$外， $K_+(\Sigma)^\Gamma = K_+(\Sigma^\Gamma)$ 且 $\vartheta(\Sigma^\Gamma) = \vartheta(\Sigma)|_{K_+(\Sigma)^\Gamma}$。

姑且这样说， Σ^Γ 是 Γ的 Σ不动点。我们在图3.4 中说明定理3.1。

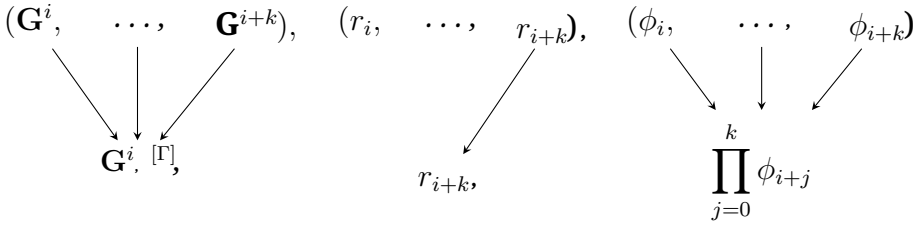

FIGURE 3.1. 根据定理 3.4，取 Γ-不动点时，特征数据的部分坍缩情况示意图。这里，$\mathbf{G}^{i,[\Gamma]} = \mathbf{G}^{i+1,[\Gamma]} = \cdots = \mathbf{G}^{i+k,[\Gamma]}$。

定理 3.4 的证明。给定一个 Γ-稳定的特征数据 $\Sigma = (\vec{\mathbf{G}}, y, \vec{r}, \vec{\phi})$，根据引理 2.13 和 3.2，我们不妨假设 y is Γ 是固定的。因此，我们有 $y \in \mathscr{B}(G)^\Gamma = \mathscr{B}(G^{[\Gamma]})$。由引理 3.3，存在一个 Γ-固定的$G^{i+1}$-泛型元素 $X_i \in \mathfrak{z}^{i*}_{-r_i}$，它在 G^i_{y,s_i^+} 上实现了 ϕ_i。令 T 为 $\mathbf{G}^i$ 的任意极大环面。由泛型性与 T 的选取无关（注 2.5），可得 $\mathsf{Cent}_{\mathbf{G}^{i+1}}(X_i) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha : X_i(H_\alpha) = 0 \rangle = \mathbf{G}^i$。因此， $\Sigma' = (\vec{\mathbf{G}}, y, \vec{r}, \vec{X}, \vec{\phi})$，其中 $\vec{X} = (X_0, \dots, X_d)$，是符合 [LN23 定义 2.1 和 3.11] 含义的 Γ-稳定截断数据。于是，结论由 [LN23 命题 3.12 和定理 4.4] 得出。□

4. LIFTING CHARACTERS VIA A LIFT OF DATA

本节的主要结果是显式构造 $G^{[\Gamma]}$的特征数据 Δ 的提升，具体如下述定理所述。

定理 4.1。设 Δ 是 $G^{[\Gamma]}$的特征数据。那么存在 G的特征数据 Σ，使得

1) Σ 在定义*3.1*的意义下是 Γ-稳定的，并且
2) Σ^Γ（如定理*3.4*所定义）是在定义*2.12*的意义下的重因式分解。

特别是， $K_+(\Delta) = K_+(\Sigma^\Gamma)$ 以及 $\vartheta(\Delta) = \vartheta(\Sigma)|_{K_+(\Delta)}$。

我们的证明将采用构造性方法。为说明这一点，我们先举一个简单的例子，展示直接方法为何行不通。设 $\mathbf{H} = \mathbf{G}^{[\Gamma]}$，并假设 $\Delta = (\vec{\mathbf{H}}, y, \vec{t}, \vec{\xi})$ 是 H的一个特征数据。作为第一步尝试，人们可能会直接选择$\mathbf{G}$ 的一个 Levi 序列，其不动点给出$\mathbf{H}$。

例 4.2。 令 $G = \mathrm{GL}(4, F)$ 且 $\Gamma = \{1, \gamma\}$ 使得 $H = G^{[\Gamma]} = \mathrm{GL}(2, F) \times \mathrm{GL}(2, F)$。考虑单一拟特征字符数据

$$\Delta = (\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}, y, t, \xi_0 = \chi_0 \circ \det \otimes \chi_1 \circ \det)$$

其中 χ_0、χ_1 是 $F^\times$ 的两个深度为 $t > 0$的特征。

$\mathbf{G}$ 有两个 Γ-稳定的列维子群，其 Γ-不动点为 $\mathbf{H}$：$\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$。取 $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}$ 时，存在一个将 ξ_0 提升为 $\mathbf{G}^0$ 的准特征的提升，当且仅当 $\chi_0 = \chi_1$。取 $\mathbf{G}^0 = \mathbf{H}$ 时，我们总可以将 ξ_0 视为 $\mathbf{G}^0$ 的准特征——但当 $\chi_0|_{F_t^\times} = \chi_1|_{F_t^\times}$时， ξ_0 将不再是 G-一般的（注 2.7）。因此一般而言，不存在将 Δ 直接提升为 G的单一拟特征字符数据的方式。□

这个简单的例子说明，在为 H 提升特征数据时，对 $\mathbf{G}$ 中出现的扭曲 Levi 子群的选择，会以微妙的方式取决于 Δ中出现的准特征。在下一小节中，我们将阐明这种依赖关系的核心。

4.1. **提升单个准特征**。 本节的主要结果（定理 4.5）为 $G^{[\Gamma]}$的特征数据中的单个准特征构造了一个提升。该定理的证明高度依赖于定理2.9，以及用于构造扭曲 Levi 子群的一种策略性方法（命题 4.3）。这种构造沿用了 [Fin21c] 中的技术，并运用了备注 2.5中讨论的更广义的泛型性概念。

命题 4.3。 设 $\mathbf{H}'$ 是 $\mathbf{H} = \mathbf{G}^{[\Gamma]}$ 的一个扭曲 *Levi* 子群，且$\mathbf{Z}' = Z(\mathbf{H}')^\circ$。设$\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 Γ-稳定扭曲 *Levi* 子群，包含$\mathbf{H}'$，并且 ξ是 H' 的一个深度为 $t > 0$的准特征。那么存在一个 M-一般元素$X^\sharp \in \mathfrak{z}'^*_{-t}$，它在 H'_x上实现了 ξ，$_t$对任意 $x \in \mathscr{B}(H')$均成立。此外，进一步假设以下任一条件成立：

(a) $\mathbf{M} = \mathbf{G}$ 且 ξ 是 H-一般的，或者

(b) $\mathbf{M}^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$,

那么 $\mathbf{M}' = \mathrm{Cent}_{\mathbf{M}}(X^\sharp)$ 是一个 Γ-不变的扭曲 *Levi* 子群，满足 $\mathbf{M}'^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$。

证明。 选取一个极大 F-环面 $\mathbf{S}$，它属于 $\mathbf{H}$ 且包含于 $\mathbf{H}'$，并令 $\mathbf{T} = \mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ 为 $\mathbf{G}$ [LN23，引理 3。1]。记 $\mathfrak{s}$ 和 $\mathfrak{t}$ 为其李代数的F-点，则存在唯一的 Γ-等变嵌入 $\mathfrak{s}^* \subset \mathfrak{t}^*$。我们还将 $\mathfrak{z}'^* \subset \mathfrak{s}^*$嵌入为在 $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}'_{der}$上取值为零的泛函。上述嵌入 $\mathfrak{z}'^* \subset \mathfrak{s}^* \subset \mathfrak{t}^*$ 保持深度。

设 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 Γ稳定的扭曲 Levi 子群，且包含 $\mathbf{H}'$。由于 $\mathbf{M}$ 是 Γ稳定的且包含 $\mathbf{S}$，因此它包含$\mathbf{T}$。注意，将 $\mathfrak{z}'^*$ 嵌入 $\mathfrak{m}^*$ 与 $\mathbf{S}$的选取无关；相对于此嵌入，$\mathfrak{z}'^*$ 中的一个元素可视为 M-一般元。

令 E 表示一个使 $\mathbf{T}$ 分裂的（温和）伽罗瓦扩张。于是，对于每个 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$，我们可以将 $H_\alpha = d\alpha^\vee(1)$ 视为 $\mathfrak{t}(E) := \mathrm{Lie}(\mathbf{T})(E)$ 中的元素。
现在令 ξ 为 H' 上深度为 $t > 0$的准特征。令 $x \in \mathscr{B}(H')$。根据注记 2.3，ξ 由 $X \in \mathfrak{z}'^*$ 中的一个深度为 $-t$ 的元素实现，该元素位于 $H'_{x\text{上};\ t/2+}$此外，X 在 $H'_{x\text{上实现}\xi}$，$_{t}$，并且对所有 $y \in \mathscr{B}(H')$，还实现 $H'_{y,\ t}$。
令 $\Phi_M = \Phi(\mathbf{M},\mathbf{T})$，并令

$$\Phi' = \{\alpha \in \Phi_M \mid X(H_\alpha) = 0 \text{ or } \mathrm{val}(X(H_\alpha)) > -t\}.$$

集合 Φ' 在 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 和 Γ 的作用下均保持不变，因为 X 如此。由于 X 的深度为 $-t$，可知对于所有 $\alpha \in \Phi_M \smallsetminus \Phi'$ (当 $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$时，该集合可能为空)，我们有 $\mathrm{val}(X(H_\alpha)) = -t$。沿用 [Fin21c 命题 3.12] 和 [Fin21b 定理 3.3]，中的论证，我们定义

$$\mathfrak{t}(E)^*_\sharp = \{X^\sharp \in \mathfrak{t}(E)^* \mid X^\sharp(H_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \Phi'\}$$

and

$$\mathfrak{t}(E)^*_\flat = \mathrm{span}\{d\alpha \mid \alpha \in \Phi'\}.$$

$\mathfrak{t}(E)^*$ 的这些子空间各自都是 Γ不变的，且定义在 F上。在我们对 $\mathfrak{t}^*$ 和 $\mathfrak{t}$的识别下，$\mathfrak{t}(E)^*_\flat$ 对应于 $\mathrm{span}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Phi'\}$，因此 $\mathfrak{t}(E)^* = \mathfrak{t}(E)^*_\sharp \oplus \mathfrak{t}(E)^*_\flat$。于是存在唯一的 $X^\sharp \in \mathfrak{t}(E)^*_\sharp$ 和 $X^\flat \in \mathfrak{t}(E)^*_\flat$，使得$X = X^\sharp + X^\flat$。按构造，$X^\flat$ 的深度严格大于 $-t$。

由于 X 同时被 $\mathrm{Gal}(E/F)$ 和 Γ固定，这两个空间各自的不变性意味着 $X^\sharp,\ X^\flat \in \mathfrak{s}^*$。鉴于 $X^\sharp \in \mathfrak{s}^*$，其中心化子 $\mathbf{M}' = \mathrm{Cent}_{\mathbf{M}}(X^\sharp)$ 是$\mathbf{M}$的一个扭曲 Levi 子群，因此也是 $\mathbf{G}$的扭曲 Levi 子群，并且在 Γ作用下稳定。我们断言，其根系为 Φ'，且 $X^\sharp$是深度为 $-t$的一般 M。由于 $X^\sharp \in X + \mathfrak{z}'^*{}_{(-t)+}$，这就完成了第一个结论的证明。

也就是说，如果 $\alpha \in \Phi'$那么根据 $\mathfrak{t}(E)^*_\sharp$的定义，$X^\sharp(H_\alpha) = 0$。如果 $\alpha \in \Phi_M \setminus \Phi'$，那么由于$X^\flat \in \mathfrak{z}'^*{}_{(-t)+}$，我们有

$$\mathrm{val}(X^\sharp(H_\alpha)) = \mathrm{val}(X(H_\alpha) - X^\flat(H_\alpha)) = \mathrm{val}(X(H_\alpha)) = -t,$$

如所要求。
剩下要证明的是：如果 (a) 或 (b) 成立，则 $\mathbf{M}'^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$。由 [LN23，引理 3.3] 可知，由于 $\mathbf{M}'$ 是 $\mathbf{M}$ 的扭曲 Levi 子群，且 $\Phi(\mathbf{M}',\ \mathbf{T}) = \Phi'$，这等价于证明

$$\{a \in \Phi(\mathbf{H},\mathbf{S}) : a = \alpha|_{\mathbf{S}} \text{ for some } \alpha \in \Phi'\} = \Phi(\mathbf{H}',\mathbf{S}).$$

在情形 (a) 中，我们假设 $\mathbf{M} = \mathbf{G}$，且 ξ 为 H-一般。因此，由引理 2.8，任何能实现 ξ 的元素X 都是 $\mathfrak{z}'^*$ 中的一个 H-一般元素，其深度为 $-t$。这意味着对于所有 $a \in \Phi(\mathbf{H}', \mathbf{S})$，$X(H_a) = 0$；并且对于所有 $a \in \Phi(\mathbf{H}, \mathbf{S}) \smallsetminus \Phi(\mathbf{H}', \mathbf{S})$，$\mathrm{val}(X(H_a)) = -t$。由于

X 是 Γ-不变的，对于每个限制到$\mathbf{H}$的根的根 $\alpha \in \Phi(\mathbf{G},\mathbf{T})$，$X(H_\alpha) = X(H_a)$。根据定义，$\alpha \in \Phi'$ 当且仅当 $X(H_\alpha) = 0$ 或 $\mathrm{val}(X(H_\alpha)) > -t$；因此，若$\alpha \in \Phi'$ 限制到 $\mathbf{H}$ 的一个根，那么必有 $X(H_\alpha) = X(H_a) = 0$。所以，每个限制到 $\mathbf{H}$ 的一个根的根 $\alpha \in \Phi'$，实际上都必须限制到$\mathbf{H}'$的一个根；此外，每个限制到 $\mathbf{H}$ 的一个根的 $\Phi_{\mathbf{M}} \smallsetminus \Phi'$ 中的根，都必须限制到 $\Phi(\mathbf{H},\mathbf{S}) \smallsetminus \Phi(\mathbf{H}',\mathbf{S})$中的一个元素。

在情形（b）中，我们假设 $\mathbf{M}^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$，但不假设 ξ（以及 X）是 H-一般的。这意味着

$$\{a \in \Phi(\mathbf{H},\mathbf{S}) : a = \alpha|_{\mathbf{S}} \text{ for some } \alpha \in \Phi_{\mathbf{M}}\} = \Phi(\mathbf{H}',\mathbf{S}).$$

特别地，每个 $\alpha \in \Phi' \subset \Phi_M$ 限制为 $\mathbf{H}$ 的一个根的根 $\alpha|_{\mathbf{S}} \in \Phi(\mathbf{H}',\mathbf{S})$都满足这一条件。反之，若 $\alpha \in \Phi_M$ 是一个可限制的根，则其限制是$a \in \Phi(\mathbf{H}',\mathbf{S})$中的一个元素。由于 $X \in \mathfrak{z}'^*$，我们有 $X(H_\alpha) = X(H_a) = 0$，由此得到 $\alpha \in \Phi'$。□

我们用一个例子来说明这一证明中的构造。

例 4.4。考虑 $G = \mathrm{GL}(4,F)$、Γ 和 $H = G^{[\Gamma]} = \mathrm{GL}(2,F) \times \mathrm{GL}(2,F)$，如例 4.2 所示。取 F 的一个二次扩张域 E，以及 GL(2) 的一个子群 $\mathbf{T} \cong \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m$，并令 $\mathbf{H}^0 = \mathbf{T} \times \mathbf{T}$。对于 $y \in \mathscr{B}(\mathbf{H}^0)$，考虑单一准特征的准特征标特征数据

$$\Delta = (\mathbf{H}^0 \subsetneq \mathbf{H}, y, t, \xi := \eta \otimes \eta'),$$

对于两个深度为 t 的 $\mathrm{GL}(2, F)$ 一般准特征 η, η'，它们属于 T。我们将命题 4.3 应用于 $\mathbf{H}' = \mathbf{H}^0, \mathbf{M} = \mathbf{G}$ 以及 H-一般特征 ξ。由于 H' 是阿贝尔群，$Z' = H'$。一个实现 $\xi|_{H'_{y,\,t}}$ 的元素 $X \in (\mathfrak{h}')^*_{-t}$ 具有形式 $X = (X_1, X_2)$，其中$X_i \in \mathfrak{t}^*_{-t}$。

先假设 $\eta|_{T_t} = \eta'|_{T_t}$，从而 $X_1 - X_2 \in \mathfrak{t}^*{}_{(-t)^+}$。命题 4.3 的证明将 X 分解为 $X = X^\sharp + X^\flat$，使得

$$X^\sharp = (Y, Y)$$

其中 $Y - X_i \in \mathfrak{t}^*{}_{(-t)^+}$ 以及 $X^\flat = (X_1 - Y,\ X_2 - Y) \in \mathfrak{t}^*{}_{(-t)^+}$。我们得到

$$\mathbf{M}' = \mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(X^\sharp) \cong \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}(2),$$

这是一个 Γ-不变的扭曲 Levi 子群，满足 $\mathbf{M}$，并且相对于它，$X^\sharp$ 是 M-一般元素。如果$\underline{\eta}|_{T_t} = (\eta')^{-1}|_{T_t}$，且 $X^\sharp = (Y,\ Y)$，则会出现类似情况，其中 Y 表示 Y 作为 E 中元素的伽罗瓦共轭。对于所有其他 $\eta,\ \eta'$，证明中出现的根系 Φ' 为空，因此 $\mathfrak{t}(E)^*_\flat = \{0\}$，从而得到 $\mathbf{M}' = \mathbf{T} \times \mathbf{T}$ 以及 G-一般元素 $X^\sharp = (X_1,\ X_2)$。□

我们的下一个结果将说明如何迭代地运用命题 4.3 中的构造，为任意一个关于 G 的单一拟特征字符数据构造一个到 H 的提升。

定理 *4.5*。设 H' 是 $H = G^{[\Gamma]}$ 的一个扭曲 *Levi* 子群，定义在 F 上，且 $x \in \mathscr{B}(H')$。假设 ξ 是 H-一般准特征，定义在 H' 上，深度为 $t > 0$。令$\Delta = (H' \subseteq H\ x, t, \xi)$。那么，对于任意 $0 \le s < t$，存在一个 Γ-稳定的特征数据 $\Sigma_0 = (\vec{G}\ x, \vec{r}, \vec{\phi})$，对应于 G，以及一个定义在 H' 上、深度至多为 s 的准特征 φ，使得 $\Sigma_0^\Gamma = (H' \subseteq H\ x, t, \varphi\xi)$。更确切地说，对于某个 $n \ge 0$，有：

1) $s < r_0 < r_1 < \cdots < r_n = t$;

2) $\mathbf{G}^0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^n \subseteq \mathbf{G}^{n+1} = \mathbf{G}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一列扭曲 *Levi* 子群，使得对所有 $0 \le i \le n$，都有 $(\mathbf{G}^i)^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$;

3) ϕ_i G^{i+1}-一般准特征，属于 G^i，深度为 r_i，对所有 $0 \le i \le n$ 均成立；并且

4) $\varphi\xi = \prod_{i=0}^{n} \phi_i|_{H'}$.

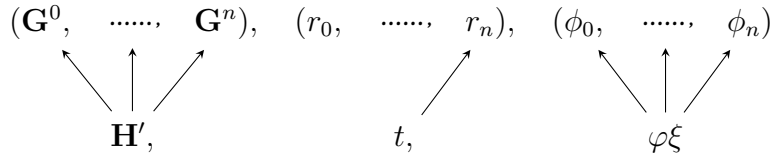

FIGURE 4.1. 由定理 4.5 得到的提升（上方），给定 H-一般准特征 ξ，属于 $\mathbf{H}'$，深度为 $t = r_n$（下方）。该 Γ-不动点提升为（$\mathbf{H}'$, t, $\varphi\xi$）。

定理 4.5 的证明。令 $\mathbf{Z}' = Z(\mathbf{H}')^\circ$ 并设 ξ 是 H' 的一个深度为 $t > 0$的 H-一般准特征。根据命题 4.3 的情形 (a)（取 $\mathbf{M} = \mathbf{G}$），存在一个 G-一般元素 $X^\sharp \in \mathfrak{z}'^*_{-t}$，它实现 $\xi|_{H'_{x,t}}$。此外，$\mathbf{M}_1 = \mathrm{Cent}_{\mathbf{G}}(X^\sharp)$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 Γ-不变列维子群，且满足 $\mathbf{M}_1^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$。根据定理 2.9，我们可以选取 M_1 的一个深度为 t 的准特征 ϕ'_1，它由 $(M_1)_{x,t/2^+}$ 上的 Γ-不动元素$X^\sharp$ 实现。

对于任意这样的 ϕ'_1选择，ξ 和 ϕ'_1 在$H'_{x,t}$上限制为同一个准特征。因此，准特征 $\tau_1 = \xi(\phi'_1)^{-1}|_{H'}$ 的深度为 $t_1 < t$。

若 $t_1 \le s$，则证明完毕。事实上，我们令 $n = 0, r_0 = t, \mathbf{G}^0 = \mathbf{M}1, \phi_0 = \phi'_1$ 和 $\varphi = \tau_1^{-1}$。根据构造，$\mathbf{G}^0$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个扭曲 Levi 子群，ϕ_0 若 G 是深度为 r_0 的一般特征，φ 是 H' 的深度为 $t_1 \le s < r_0$ 的准特征，且 $\varphi\xi = \phi_0|_{H'}$。此外，特征数据 $(\mathbf{G}^0 \subseteq \mathbf{G}\ x, r_0, \phi_0)$ 按定义 3.1 的意义是 Γ-稳定的，其 Γ-不动点等于 $(\mathbf{H}' \subseteq \mathbf{H}\ x, t, \varphi\xi)$。

若 $t_1 > s$，则令 $t_0 = t$ 和 $X_0^\sharp = X^\sharp$。我们的证明分为两个阶段。第一阶段是归纳构造元组 $(\mathbf{M}_i, \phi'_i, X_{i-1}^\sharp, \tau_i, t_i)$，其中 $i > 1$ 满足

- $\mathbf{M}_i^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$,
- ϕ'_i 是一个 M_{i-1}-一般特征 M_i，其深度为 t_{i-1}，在（M_i）上实现$_{x,\ (t_{i-1}/2)^+}$ 由元素 $X_{i-1}^\sharp \in \mathfrak{z}'^*_{-(t_{i-1})}$ 实现，该元素是（Γ-固定的），且其在$\mathbf{M}_{i-1}$ 中的中心化子为$\mathbf{M}_i$，并且
- τ_i 是 H' 的一个特征，深度为 $t_i < t_{i-1}$。

我们在 $t_i \le s$ 时停止。

假设已构造出 i 对应的元组。对深度为 $t = t_i$ 的 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_i$, $\xi = \tau_i$ 应用命题 4.3 的情形（b），可知我们可以选取一个 M_i-一般元素 $X_i^\sharp \in \mathfrak{z}'^*_{-t_i}$，使其实现 $\tau_i|_{H'_x,t_i}$；同时还可以选取 $\mathbf{M}_i$ 中一个 Γ-不变的扭曲 Levi 子群 $\mathbf{M}_{i+1} = \mathrm{Cent}_{\mathbf{M}_i}(X_i^\sharp)$，满足 $\mathbf{M}_{i+1}^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$。如上所述，定理 2.9 允许我们选取一个 M_{i+1} 的深度为 t_i 的准特征 ϕ'_{i+1}，它由 $X_i^\sharp$ 在 $(M_{i+1})_{x,t_i/2^+}$ 上实现。根据构造，$X_i^\sharp$ 是 Γ-固定的，而 ϕ'_{i+1} 是深度为 t_i 的 M_i- 一般元素。此外，ϕ'_{i+1} 和 τ_i 在 H'_{x,t_i} 上的限制相同。令 $\tau_{i+1} = \tau_i(\phi'_{i+1})^{-1}|_{H'}$，则 τ_{i+1} 是 H' 的深度为 $t_{i+1} < t_i$ 的准特征。

注意，由于$t_{i+1} < t_i$ 对所有 $i \geq 0$都成立，且每个 t_i 都对应于一个特征的深度，而深度取自离散集合，因此该过程保证会在有限步内终止。令 $m = i + 1$ 表示满足 $t_{i+1} \leq s$的第一个指标。

我们得到了一个嵌套序列，其中的扭曲 Levi 子群不一定彼此不同

$$\mathbf{M}_m \subseteq \mathbf{M}_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{M}_2 \subseteq \mathbf{M}_1.$$

第二阶段是将上述元组汇集成一个特征数据。

令 $n+1$ 为该序列中不同扭曲 Levi 子群的个数。将所得序列重新命名并重新编号如下

$$\mathbf{G}^0 \subsetneq \mathbf{G}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^n \subseteq \mathbf{G}^{n+1} = \mathbf{G}.$$

对于每个 $0 \leq k \leq n$，令 j_k 为满足 $\mathbf{M}_{j_k} = \mathbf{G}^k$ 的最大指标。于是 $j_0 = m > j_1 > \cdots > j_n \geq 1$，并且我们有

$$\mathbf{G}^k = \mathbf{M}_{j_k} = \cdots = \mathbf{M}_{j_{k+1}+1}.$$

根据构造，每个 $\mathbf{G}^k$ 都满足 $(\mathbf{G}^k)^{[\Gamma]} = \mathbf{H}'$。令

$$r_k := t_{j_{k+1}+1} \quad \text{and} \quad \phi_k = \prod_{i=j_k}^{j_{k+1}+1} \phi'_i.$$

由于准特征 ϕ'_i（其 $j_{k+1} + 1 < i \leq j_k$）的深度都严格小于r_k，因此 G^k 上的准特征 ϕ_k 的深度为 r_k。此外，$\phi_k|_{G^k_x,r_k}$ 与$\phi'_{j_{k+1}+1}|_{(M_{j_{k+1}+1})_{x,t_{j_{k+1}+1}}}$相一致，后者是 $M_{j_{k+1}} = G^{k+1}$-一般的；因此 ϕ_k 是深度为 r_k 的 G^{k+1}-一般的$_{j_{k+1}+1}$。进一步，ϕ_k 由作用在G^k_x上的 Γ-固定元素 $\sum X_{i-1}^\sharp$ 实现，$_{r_k/2+.i=j_k}$因此，根据引理 3.3，特征数据 $(\vec{\mathbf{G}}, x, \vec{r}, \vec{\phi})$ 是 Γ-稳定的。

根据我们对 m 的选择，有 $s < t_{m-1} \leq r_0 < r_1 < \cdots < r_n = t_0$。令 $\varphi = \tau_m^{-1}$。这是 $\mathbf{H}'$ 上一个深度为 $t_m \leq s$ 的准特征，并且我们有

$$\varphi\xi = \prod_{i=1}^{m} \phi'_i|_{H'} = \prod_{k=0}^{n} \phi_k|_{H'},$$

根据构造。 □

让我们继续使用这个贯穿始终的例子，以说明定理 4.5 的应用。

例 4.6。 设 Δ 如例 4.4 所述，并假设我们处于第一种（最有趣的）情形，从而得到 $X^\sharp = (Y, Y)$， $\mathbf{M}_1 = \mathrm{Res}_{E/F}\mathbf{GL}(2)$。我们将 $s = 0$ 设为目标深度。

按照定理 4.5 的证明，我们必须选择一个准特征 ϕ_1'，它由 $X^\sharp$ 在 $(M_1)_{x,t/2+}$ 上实现。这样的特征具有 $\zeta_1 \circ \det_E$ 的形式，其中 $\det_E\colon \mathbf{GL}(2,E) \to E^\times$ 是行列式映射，而 ζ_1 是 $E^\times$ 的一个深度为 t 的特征。这导致深度严格更低的$\tau_1 = \eta(\zeta_1^{-1}) \otimes \eta'(\zeta_1^{-1})$；设它由 (Y_1, Y_1') 实现，它不一定是 H-一般的。

现在，我们相对于 4.3，重复应用命题 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$。若 $Y_1 - Y_1' \in \mathfrak{t}^*_{x,(-t_1)+}$，则在命题 4.3 的证明中，我们有 $\Phi' = \Phi_M$，由此得到 $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1$；因此，在定理 4.5 的证明中，我们重复前一段的过程。
因此，假设经过 i 次迭代后，我们终于得到 $X^\sharp_{i-1} = (Y_i, Y_i')$，使得 $Y_i - Y_i' \notin \mathfrak{t}^*_{x,(-t_i)+}$。那么 Φ'为空，从而得到 $X_i^\sharp = X_{i-1}^\sharp$，$\mathbf{M}_{i+1} = \mathbf{T} \times \mathbf{T}$，且 $X_i^\sharp$ 是 M_1-一般的。由 $X_i^\sharp$ 实现的 $M_{i+1} = T \times T$ 的一个准特征 ϕ_{i+1}'，其深度为 $t' := t_{i+1} < t_i$。连续迭代将产生同一群 $M' := M_{i+1}$ 的特征（它们不必是 M_1-一般的），且深度不断降低，直到 $t_m = 0$。于是 $\Sigma_0 = (\mathbf{G}^0 = \mathbf{M}' \subsetneq \mathbf{G}^1 = \mathbf{M}_1 \subsetneq \mathbf{G}^2 = \mathbf{G},\ x, (t', t), (\phi_0, \zeta \circ \text{行列式}))$，其中 ϕ_0 和 ζ 分别是沿途构造的准特征的乘积。

那么，特别地，特征 ξ 可分解为（相差一个由τ_m给出的零深度扭曲）一个 M_1-一般特征 $\phi_0 \otimes \phi_0'$，它属于$\mathbf{M}_2 = \mathbf{H}'$，与一个 G-一般特征 $\zeta \circ \det_E$ 在$\mathbf{M}_1$上的限制之积。□

我们从定理 4.5 的证明中提取一个观察结果。

给定一个针对 $\Delta = (\mathbf{H}' \subseteq \mathbf{H},\ x, t, \xi)$ 的单一拟特征字符数据，对于 H，定理 4.5 的归纳证明在每一步都依赖于 $i \geq 0$ 选择两个元素（记号与证明中相同）：

- 一个 M_i-一般元素 $X_i^\sharp \in \mathfrak{z}^{\prime *}_{-t_i}$，它实现一个特征 $\tau_i|_{H'_{x,\ t_i}}$（其存在性通过命题中的一个示例构造得到证明4.3）；以及
- 一个准特征 ϕ_{i+1}'，属于 M_{i+1}，深度为 t_i，它由以下元素实现：$X_i^\sharp$ 作用于 $(M_{i+1})_{x,\ t_i/2+}$（其存在性由定理2.9保证）。

给定 s 以及这些输入，定理 4.5 的输出是一个特征数据 Σ_0，对应于 G，并附带一个准特征 φ，定义在 H' 上，深度至多为 s。令 $\mathbf{Lift}(\Delta)$ 表示通过改变 Σ_0、φ，以及 $0 \leq s < t$ 和 $X_i^\sharp$，并ϕ_{i+1}' 遍历所有有效选择而得到的有序对 (

命题 4.7。 令 Σ 为一个 Γ-稳定特征数据，对 G而言满足 Σ^Γ 是 H的单准特征特征数据。则 $(\Sigma, \mathbf{1}) \in \mathrm{Lift}(\Sigma^\Gamma)$。

证明。 设 $n+1$为特征数据 $\Sigma = (\vec{\mathbf{G}}\ y, \vec{r}, \vec{\phi})$。根据我们的假设，存在一个扭曲 Levi 子群 $\mathbf{H}' \subseteq \mathbf{H}$ 使得 $\mathbf{G}^{j,[\Gamma]} = \mathbf{H}'$ 对所有 $0 \leq j \leq n$。由引理 2.13 和 3.2 我们可以假设 $y \in \mathscr{B}(H')$。由于 Σ 是 Γ-稳定的，

对所有 $0 \leq j \leq n$，存在一个 Γ-不动元 $X_j \in \mathfrak{z}^{j*}_{-r_j}$，它是 G^{j+1}-一般的、深度为 $-r_j$，实现 ϕ_j 于 G^j_{y,s_j^+}，并且满足 $\mathbf{Cent}_{\mathbf{G}}(X_j) = \mathbf{G}^j$（引理 3.3）。则 Γ-不动点（即 Σ 的）是

$$\Sigma^\Gamma = (\mathbf{H}' \subseteq \mathbf{H}, y, r_n, \xi),$$

其中 $\xi = \prod_{j=0}^{n} \phi_j|_{H'}$ 是由 $\sum_{j=0}^{n} X_j$ 实现的深度为 r_n 的特征。

现在我们逐步证明定理 4.5，使用 $s = 0$，在每个阶段选取合适的（$X_i^\sharp$，ϕ'_{i+1}），从而得到这一对（Σ，$\mathbf{1}$）。

在 $i = 1$ 步骤，注意到由于 ξ 和 ϕ_n 在 $H'_{y,\, r_n}$ 上的限制相同，我们可以选取 $X_0^\sharp = X_n$。于是 $\mathbf{M}_1 = \mathbf{Cent}_{\mathbf{G}}(X_n) = \mathbf{G}^n$，并且我们可以选取 $\phi'_1 = \phi_n$，因为这是 M_1 上一个深度为 r_n 的准特征，它由元素 $X_0^\sharp \in \mathfrak{z}'^*_{-r_n}$ 在 $(M_1)_{y,\, r_n/2^+}$ 上实现。于是 $\tau_1 = \xi(\phi'_1)^{-1}|_{H'} = \prod_{j=0}^{n-1} \phi_j|_{H'}$，这是一个深度为 $r_{n-1} < r_n$ 的准特征。由此我们得到了这个元组

$$\left(\mathbf{M}_1 = \mathbf{G}^n,\, \phi'_1 = \phi_n,\, X_0^\sharp = X_n,\, \tau_1 = \prod_{j=0}^{n-1} \phi_j,\, t_1 = r_{n-1}\right).$$

假设在某一步 $1 \leq i \leq n$ 我们已经构造出了元组

$$\left(\mathbf{M}_i = \mathbf{G}^{n-i+1},\, \phi'_i = \phi_{n-i+1},\, X_{i-1}^\sharp = X_{n-i+1},\, \tau_i = \prod_{j=0}^{n-i} \phi_j,\, t_i = r_{n-i}\right).$$

由于 τ_i 和 ϕ_{n-i} 在 $H'_{y\text{上相同},\, t_i}$，而它由 X_{n-i}实现，因此我们可以选取 $X_i^\sharp = X_{n-i}$；它在 $\mathbf{M}_i = \mathbf{G}^{n-i+1}$ 中的中心化子为 $\mathbf{M}_{i+1} = \mathbf{G}^{n-i}$，并且如上所述，我们可以选取 $\phi'_{i+1} = \phi_{n-i+1}$。于是 $\tau_{i+1} = \tau_i(\phi'_{i+1})^{-1}|'_H = \prod_{j=0}^{n-i-1} \phi_j$，这是一个深度为$t_{i+1} = r_{n-i-1}$的准特征。

算法在 $i = n+1$ 处终止，因为此时 $\tau_{n+1} = \mathbf{1}$，其深度为零。相应的输出是 $\Sigma_0 = \Sigma$ 和 $\varphi = \tau_{n+1}^{-1} = \mathbf{1}$，这正是我们想要证明的。□

命题 4.7将是推导定理4.1能产生所有 Γ- 稳定特征数据（适用于 G （命题 4.10）。

4.2. **依次提升特征数据**。有了定理 4.5 之后，我们现在可以证明定理4.1，这是本文的主要结果。

设 $\mathbf{H} = \mathbf{G}^{[\Gamma]}$，并设 $\Delta = (\vec{\mathbf{H}}\, y, \vec{t}, \vec{\xi})$ 是 H 的一个特征数据。也就是说，我们有一列扭曲 Levi 子群

$$\mathbf{H}^0 \subsetneq \mathbf{H}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{H}^n \subseteq \mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{H}$$

以及对于 $0 \leq i \leq n$，H^i 上深度为 t_i 的 H^{i+1}-一般准特征 ξ_i。

为了构造一个适用于 G 的特征数据 Σ，使其对应的半单特征限制到 $\vartheta(\Delta)$，注意我们不能像图 4.2 所示那样，独立地将定理 4.5 应用于所有单准特征特征数据 $(\mathbf{H}^i \subseteq \mathbf{H}^{i+1}, y, t_i, \xi_i)$ $0 \leq i \leq n$。这样做可能会产生彼此不相容的 Levi 序列（也就是说，按图中的记号，对于某个$0 \leq j \leq n-1$，$\mathbf{G}^{j,d_j} \not\subset \mathbf{G}^{j+1,0}$），如例 4.8 所示。这种简单的提升也可能产生深度并非严格递增的准特征序列。此外，即使这两种障碍都没有出现，这种提升的不动点数据（其准特征序列为 $(\varphi_0\xi_0, \ldots, \varphi_n\xi_n)$）也不太可能产生一个半单特征，使其限制到 $K_+(\Delta)$ 后与 $\vartheta(\Delta)$ 一致，因为修正因子 φ_i 通常具有正深度。

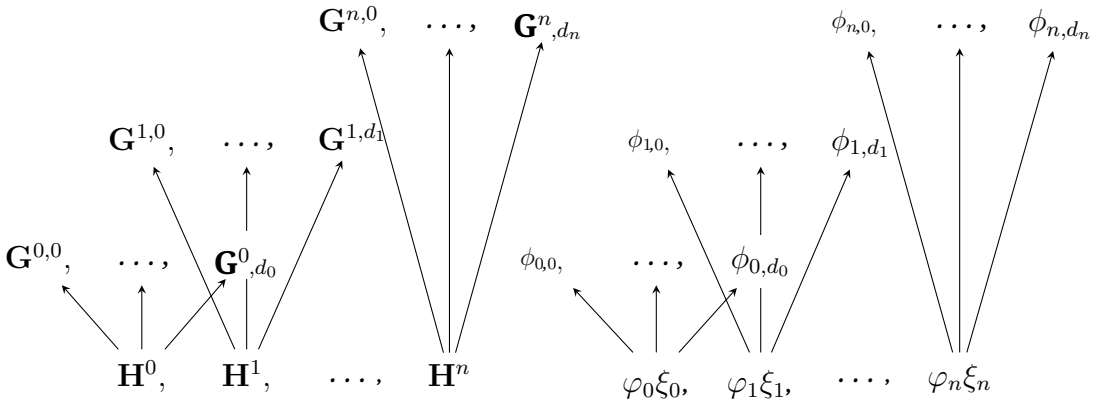

FIGURE 4.2. 将定理4.5直接应用于单个准特征特征数据（$\mathbf{H}^i \subseteq \mathbf{H}^{i+1}$, y, t_i, ξ_i），$0 \leq i \leq n$。

例 4.8。设 $G = \mathrm{GL}(4, F)$，$H = G^{[\Gamma]} = \mathrm{GL}(2, F) \times \mathrm{GL}(2, F)$ 和 $\mathbf{H}^0 = \mathbf{T} \times \mathbf{T}$如例4.4中所示。考虑由以下给出的 H 特征数据

$$\Delta = (\mathbf{H}^0 \subsetneq \mathbf{H}^1 = \mathbf{H}^2 = \mathbf{H}, y, (t_0, t_1), (\xi_0 := \eta \otimes \eta, \xi_1 := (\chi_+ \circ \det) \otimes (\chi_- \circ \det))),$$

其中，η是 $T \cong E^\times$ 上深度为 $t_0 > 0$ 的 $\mathrm{GL}(2, F)$-一般准特征，而 $\chi_\pm$ 是 $F^\times$ 上深度为 $t_1 > t_0$ 的准特征。

将定理 4.5 应用于 $(\mathbf{H}', \xi, s) = (\mathbf{H}^0, \xi_0, 0)$，得到与例 4.6 中相同的结果：扭曲 Levi 子群 $\mathbf{G}^{0,0} = \mathrm{Res}^{E/F}\mathrm{GL}(2)$，以及 $G^{0,0}$ 上深度为 t_0 的准特征 $\phi_0 = \eta \circ \det$。然而，若 $\chi_+|_{F_{t_1}^\times} \neq \chi_-|_{F_{t_1}^\times}$，则将定理 4.5 应用于 $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$，得到与例 4.2 中相同的结果：$\mathbf{G}^{1,0} = \mathbf{H}$，以及深度为$t_1$的 G-一般准特征 $\phi_1 = \xi_1$。（更一般地，只要 $\chi_+(\chi_-)^{-1}$ 的深度大于 t_0，就会出现这种情况。）这两个子群无法组合成 $\mathbf{G}$ 中的扭曲 Levi 序列，因为 $\mathbf{G}^{0,0}$ 和 $\mathbf{G}^{1,0}$ 之间不存在包含关系。□

获得有效提升的解决方法是从 Σ中深度最大的准特征开始，进行迭代构造。下面先概述思路，再给出详细证明。在定理 n 的证明中，这一步（称为步骤 4.1）首先将定理 4.5 应用于元组 $(\mathbf{H}^n \subseteq \mathbf{G}^{[\Gamma]}, y, t_n, \xi_n)$，其中 $s = t_{n-1}$。

这将产生 G 的扭曲 Levi 子群上的准特征，这些子群的 Γ-不动点为 $\mathbf{H}^n$ ，并且这些准特征在限制到 H^n 后的乘积，是 ξ_n 乘以一个修正因子的扭曲；该修正因子是 H^n 上深度至多为 t_{n-1} 的准特征 φ_n 。接着，我们将 ξ_{n-1} 扭曲以乘上该修正因子的逆 φ_n^{-1}，并将定理 4.5 应用于元组 $(\mathbf{H}^{n-1} \subseteq (\mathbf{G}^{n,0})^{[\Gamma]}, y, t_{n-1}, \varphi_n^{-1}\xi_{n-1})$，其中 $s = t_{n-2}$，以继续迭代构造。按照这种方式继续，也就是说，如图 4.3 所示，用前面的修正因子依次扭曲序列 ξ 中后续的准特征 $\vec{}$，我们便能够构造出相干提升 Σ，使得 Σ^Γ 是 Δ的重因式分解。

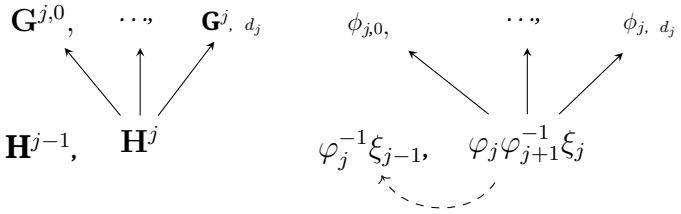

FIGURE 4.3. 定理 4.1 的证明中， $j = n$， $n-1$， $n-2$、.....、1，0 的步骤 j 示意图。竖直箭头表示将定理 4.5 应用于 $(\mathbf{H}^j \subseteq (\mathbf{G}^{j+1,\ 0})^{[\Gamma]},\ y,\ t_j,\ \varphi_{j+1}^{-1}\xi_j)$，其中 $s = t_{j-1}$ (设定$\varphi_{n+1} = \mathbf{1}$ 和 $t_{-1} = 0$)，由此产生修正因子 φ_j 。若 $j \geq 1$，则该修正因子的逆随后会并入 ξ_{j-1}，为步骤 $j-1$ 做准备，如虚线箭头所示。

定理 *4.1* 的证明。 设 $\mathbf{H} = \mathbf{G}^{[\Gamma]}$，并设 $\Delta = (\vec{\mathbf{H}}\ y,\ \vec{t},\ \vec{\xi})$ 是一个 H的特征数据，其中

$$\mathbf{H}^0 \subsetneq \mathbf{H}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{H}^n \subseteq \mathbf{H}^{n+1} = \mathbf{H}$$

是扭曲 Levi 子群的一个序列，并且对于 $0 \leq i \leq n$，H^i 上的准特征 ξ_i 是深度为 t_i的 H^{i+1}-一般准特征。

我们通过 j 个迭代步骤为 $n+1$ 中的 G 构造特征数据 Σ，步骤以 n 为起点递减至 0，具体如下。

初始步骤（$j = n$）：令 $\xi_n = \xi_n$。将定理 4.5 应用于 $\mathbf{G} = \mathbf{G}$、$\mathbf{H}' = \mathbf{H}^n$， $x = y$、$\xi = \xi_n$ 以及 $s = t_{n-1}$ ，从而得到一个 Γ-稳定的特征数据，适用于 G ，并伴有一个 φ_n ，定义在$\mathbf{H}^n$ 上且深度至多为 t_{n-1}的准特征。具体而言，我们有一个扭曲 Levi 序列

$$\mathbf{G}^{n,0} \subsetneq \mathbf{G}^{n,1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^{n,d_n} \subseteq \mathbf{G}^{n,d_n+1} = \mathbf{G}$$

使得对于所有 $0 \leq i \leq d_n$，均有 $(\mathbf{G}^{n,\ i})^{[\Gamma]} = \mathbf{H}^n$ ；此外，对于每个 $0 \leq i \leq d_n$，还有一个 $G^{n,\ i+1}$-一般准特征 $\phi_{n,\ i}$，定义在 $G^{n,\ i}$上，深度为 $r_{n,\ i}$，其中 $t_{n-1} < r_{n,\ 0} < \cdots < r_{n,\ d_n} = t_{n,\ d_n}$此外，$\varphi_n\tilde{\xi}_n = \prod \phi_{n,\ i}|_{H^n,i=0}$

步骤 j、$j = n-1$、$n-2$、.....、1、0：设 $\tilde{\xi}_j = (\varphi_{j+1}^{-1}|_{H^j})\xi_j$，它是$H^j$的一个准特征。由于 φ_{j+1} 是较大群 H^{j+1}的一个准特征，ξ_j 的泛型性意味着

$\tilde{\xi}_j$ 也是 H^{j+1}-泛型的，深度为 t_j。将定理 4.5 应用于 $\mathbf{G}=\mathbf{G}^{j+1,0}$、$\mathbf{H}'=\mathbf{H}^j$、$x=y$、$\xi=\xi_j$ 以及 $s=t_{j-1}$（令 $t_{-1}=0$），得到一个对 G^{j+1}稳定的特征数据，以及一个深度至多为 t_{j-1}的 H^j 的准特征 φ_j。也就是说，我们有一个扭曲 Levi 序列

$$\mathbf{G}^{j,0}\subsetneq\mathbf{G}^{j,1}\subsetneq\cdots\subsetneq\mathbf{G}^{j,d_j}\subseteq\mathbf{G}^{j,d_j+1}=\mathbf{G}^{j+1,0}$$

$\mathbf{G}^{j+1,0}$（因此也属于 $\mathbf{G}$）的，使得对于所有 $0\le i\le d_j$，$(\mathbf{G}^{j,i})^{[\Gamma]}=\mathbf{H}^j$。在此情形下，由于 $(\mathbf{G}^{j,d_j+1})^{[\Gamma]}=\mathbf{H}^{j+1}$，最后一个包含关系也是严格的。此外，对于每个$0\le i\le d_j$，我们有一个 $G^{j,i+1}$-一般准特征 $\phi_{j,i}$，它是 $G^{j,i}$ 的准特征，深度为$r_{j,i}$。这里，$t_{j-1}<r_{j,0}<\cdots<r_{j,d_j}=t_j$，这确保了 $r_{j,d_j}=t_j<r_{j+1,0}$。最后，我们有

$$\varphi_j\tilde{\xi}_j=\prod_{i=0}^{d_j}\phi_{j,i}|_{H^j}.$$

完成所有这些步骤后，我们得到：

$$\vec{\mathbf{G}}=(\mathbf{G}^{0,0},\dots,\mathbf{G}^{0,d_0};\mathbf{G}^{1,0},\dots,\mathbf{G}^{1,d_1};\dots;\mathbf{G}^{n,0},\dots,\mathbf{G}^{n,d_n}),$$

一列严格递增的$\mathbf{G}$的扭曲 Levi 子群；

$$\vec{r}=(r_{0,0},\dots,r_{0,d_0};r_{1,0},\dots,r_{1,d_1};\dots;r_{n,0},\dots,r_{n,d_n}),$$

一列严格递增的正实数，使得对于每个 $0\le j\le n$，我们有 $r_{j,d_j}=t_j$；以及

$$\vec{\phi}=(\phi_{0,0},\dots,\phi_{0,d_0};\phi_{1,0},\dots,\phi_{1,d_1};\dots;\phi_{n,0},\dots,\phi_{n,d_n}),$$

一列满足 (CD4) 的准特征。因此，$\Sigma=(\vec{\mathbf{G}},x,\vec{r},\vec{\phi})$ 是 G 的特征数据；由于每一步的特征数据都具有 Γ 稳定性，因此 Σ 也具有 Γ 稳定性。

剩下要证明的是 Σ^Γ 是 Δ的重因式分解，其含义见定义2.12。

我们有 $\Sigma^\Gamma=(\vec{\mathbf{H}},x,\vec{t},\vec{\xi}')$，其中 $\vec{\xi}'=(\xi'_0,\dots,\xi'_n)$，且 $\xi'_j=\prod_{i=0}^{d_j}\phi_{j,i}|_{H^j}=\varphi_j\tilde{\xi}_j$。由于

根据构造

$$\xi'_j=\varphi_j\tilde{\xi}_j=\begin{cases}\varphi_j\varphi_{j+1}^{-1}\xi_j & \text{if } 0\le j\le n-1,\\ \varphi_n\xi_n & \text{if } j=n,\end{cases}$$

由此可得，对所有 $0\le i\le n$，

$$\left(\prod_{j=i}^{n}\xi'_j\xi_j^{-1}\right)\Big|_{H^i_{t_{i-1}^+}}=\varphi_i|_{H^i_{t_{i-1}^+}}=1,$$

这正是所需的。由于 Σ^Γ 是 Δ的重因式分解，引理2.13 保证 $K_+(\Sigma^\Gamma)=K_+(\Delta)$ 和 $\vartheta(\Sigma^\Gamma)=\vartheta(\Delta)$，至此定理得证。□

我们通过构造该情形下的一个提升，来说明定理4.1在我们不断延续的例子中的应用。

例4.9。 设 $G = \mathrm{GL}(4,F)$, $H = G^{[\Gamma]} = \mathrm{GL}(2,F) \times \mathrm{GL}(2,F)$, 并且 Δ 如例 4.8, 其中 $\chi_+(\chi_-)^{-1}$ 的深度为 $r_{1,0}$ 满足 $t_0 < r_{1,0} < t_1$。这里 $n = 1$, 因此初始步骤 $j = 1$ 得出

$$\mathbf{G}^{1,0} = \mathbf{H} \subsetneq \mathbf{G}^{1,1} = \mathbf{G}^{1,2} = \mathbf{G},$$

其满足 $(\mathbf{G}^{1,i})^{[\Gamma]} = \mathbf{H}$, 以及准特征 $\phi_{1,0}$ 属于 H, $\phi_{1,1}$ 属于 G, 且 φ_1 属于 H, 使得 $\varphi_1\xi_1 = \phi_{1,0}(\phi_{1,1}|_H)$。

在步骤 $j = 0$, 我们从准特征 $\tilde{\xi}_0 = \varphi_1^{-1}|_{T\times T}(\eta \otimes \eta)$ 开始, 它仍然是深度为 t_0 的~H-一般。将定理 4.5 应用于 $(\mathbf{G} = \mathbf{H}, \mathbf{H}' = \mathbf{T} \times \mathbf{T}\ \xi = \xi_0, s = 0)\tilde{}$, 因此只需得出 $\mathbf{G}^0, {}^0 = \mathbf{H}^0$ 以及一个特征 $\phi_{0,0}$, 它与 ξ_0 相差一个零深度扭曲 φ_0。

因此, 我们的结果是序列 $\mathbf{T} \times \mathbf{T} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ 及上述特征。更一般地, 对于 $\mathbf{T} \times \mathbf{T}, \mathbf{H}$, $\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}(2), \mathbf{G}$ 中的某些准特征 ξ_0, ξ_1, 所有有效的扭曲 Levi 序列都能出现。□

现在我们可以证明, 每个 Γ-稳定的、定义于 G 上的特征数据, 都是某个定义于 $G^{[\Gamma]}$上的特征数据的提升。我们从定理4.1的证明中提取出这一观察, 并结合命题4.7得到此结论。

设 Δ 是定义于 H 上、长度为 $n+1$ 的特征数据。为了枚举定理 4.1 所产生的许多定义于 G 上的特征数据, 我们遵循 $n+1$ 个迭代步骤, 这些步骤以 j 为索引, 索引值从 n 递减至 0。第 n 步包括选择 $(\Sigma_n, \varphi_n) \in \mathrm{Lift}(\Delta_n)$, 其中 $\Delta_n = (\mathbf{H}^n \subseteq \mathbf{H}\ y, t_n, \xi_n)$。对于 $0 \le j \le n-1$, 之后的每一步 j 都包括选择 $(\Sigma_j, \varphi_j) \in \mathrm{Lift}(\Delta_j)$, 其中 $\Delta_j = (\mathbf{H}^j \subseteq \mathbf{H}^{j+1}, y, t_j, \varphi_{j+1}^{-1}\xi_j)$。由此得到的定义于 G 上的特征数据 Σ, 即为 Σ_j 与 $0 \le j \le n$ 的串接。令 $\mathrm{Lift}(\Delta)$ 表示通过改变元素 $(\Sigma_j, \varphi_j) \in \mathrm{Lift}(\Delta_j)$ $0 \le j \le n$ 而得到的定义于 G 上的特征数据集合, 则有以下命题, 它保证了我们的特征数据提升与 Γ-不动点限制相容。

命题 4.10。 设 Σ 是 G 的一个 Γ-稳定特征数据。则 $\Sigma \in$提升(Σ^Γ)。特别地, G 的每个 Γ- 稳定特征数据都是 H 的一个特征数据的提升。

该命题的证明在上述构造的每一步应用命题4.7即可完成。

4.3. **与其他构造的关系**。 我们在本节末讨论本文中的构造与文献中的其他标准构造之间的联系, 例如 Howe 分解 [Kal19, 第 3 节。6]以及 G-因子分解[Mur11, 第 5] 节。

回想一下, 证明我们的主要提升定理的关键要素之一, 是构造一个特征数据, 用以提升单个准特征（定理 4.5）。下面描述当我们针对 $s = 0$ 取特定的 $\mathbf{H}' \subseteq \mathbf{H}$ 时, 定理 4.5 的输出:

1）令 H′ = S 为 H 的一个极大环面。由于 $\mathrm{Cent}_G(S) = T \subseteq G^0$，对于 S 的任意准特征 ξ，定理 4.5 的输出是 S 的一个零深度准特征 φ，以及 T 的一个准特征 $\phi = \prod_{i=0}^{n} \phi_i|_T$，使得 $\phi|_S = \varphi\xi$。这实质上是 Kal19，定义 3.6 意义下，某个 ξ 到 T 的扩张的 Howe 分解 [2] 。事实上，将 φ 扩张为 T 的一个深度为 $\tilde{}$ 的零深度准特征 $\tilde{\varphi}$ 后，准特征 $\xi = \tilde{\varphi}^{-1}\phi$ 就是 ξ 的扩张。必要时，使用 Kal19，引理 3.72] 对 $(\phi_0, \ldots, \phi_n)$ 进行规范化后，$(\tilde{\varphi}^{-1}, \phi_0, \ldots, \phi_n)^{\tilde{}}$ 便是 (T, ξ) 的 Howe 分解。

2) 设 H′ =H，定理 4.5 断言，对于 H 的任意准特征 ξ（默认是H-一般的），存在 G^0 的一个准特征 $\phi = \prod_{i=0}^{n} \phi_i|_{G^0}$，其中 G^0 是 G 的一个扭曲 Levi 子群，以及 H 的一个零深度准特征 φ，使得 $\varphi\xi = \phi|_H$。因此，更一般地，给定 H′ ⊆ H，定理 4.5 的输出是某个零深度扭曲 ξ 到 G^0 的扩张的一个 G-因子分解，其含义参见 Mur11 的定义 5.1], 。

将其推广到 H 的特征数据后，我们可以如下将定理 4.1 的输出与 Howe 分解联系起来。

命题 *4.11.* 设 S 是 $H = G^{[\Gamma]}$ 的一个定义在 F 上的极大环面，并令 $T = \mathrm{Cent}_G(S)$。设 $\Delta = (\vec{H}, y, \vec{t}, \vec{\xi})$ 是 H 的一个特征数据，满足 $S \subset H^0$ 且 $\vec{} y \in \mathscr{B}(S)$。设 $\Sigma = (G, y, \vec{r}, \phi)$ 是通过定理 *4.1* 得到的、到 G 的对应提升。则存在 T 的特征 χ，θ，其中 χ 的深度为零，使得 $(\chi, \vec{\phi})$ 是 (T, θ) 的 *Howe* 分解（的重因式分解）。

证明。令 $n+1$ 和 $d+1$ 分别为特征数据 Δ 和 Σ 的长度。分别定义 S 和 T 上的两个特征 θ_S 和 θ_T 如下:

$$\theta_S = \prod_{i=0}^{n} \xi_i|_S \text{ and } \theta_T = \prod_{i=0}^{d} \phi_i|_T.$$

如有必要，对序列 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\phi}$ 进行归一化后，根据 [Kal19，引理 3.7。2], 我们有 $\vec{}(\xi_{-1} = 1, \xi)$ 和 $(\phi_{-1} = 1, \phi)$ 分别是 (S, θ_S) 和 (T, θ_T) 的 Howe 分解。此外，θ_T 和 θ_S 在 S_{0+} 上一致，因为 $\vartheta(\Delta) = \vartheta(\Sigma)|_{K_+(\Delta)}$ 且 $S_{0+} \subset K_+(\Delta)$。将零深度特征 $\theta_S\theta_T^{-1}|_S$ 平凡地扩张到 T_{0+} 上，并选择其到 T 上的零深度准特征 χ 扩张。于是 $\theta = \chi\theta_T$ 是 θ_S 到 T 的扩张，而 $(\chi, \vec{\phi})$ 是 (T, θ) 的 Howe 分解。□

前一个命题提出了另一种方法，可以从 H 的特征数据构造 G 的特征数据。事实上，从一个长度为 $n+1$ 的 H 的特征数据 $\Delta = (\vec{H}, y, \vec{t}, \vec{\xi})$ 开始，令 $\theta = \prod_{i=0}^{n} \xi_i|_S$。将 θ_S 扩张为 T 的特征 θ_T。按照 [Kal19，第 3.6] 节，将对 (T, θ_T) 展开为 G 中的一个扭曲 $\vec{}$ Levi 序列 G，并构造出 (T, θ_T) 的 Howe 分解 (ϕ_{-1}, ϕ)，其对应的深度序列为 $(0, \vec{r})$。于是所得的元组 $\Sigma = (\vec{G}, y, \vec{r}, \vec{\phi})$ 便是 G 的特征数据。该构造总结于图 4.4 中。

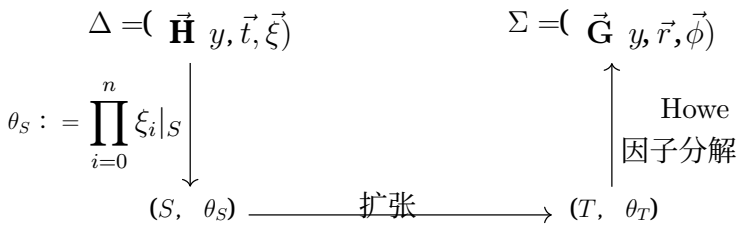

FIGURE 4.4.使用 Howe 分解从 H 的特征数据构造 G 的特征数据。

然而，并非对 θ_S 的每一种扩张 θ_T 都会得到一个 Γ-稳定的特征数据 Σ，如下例所示。也就是说，对于这样的 θ_T 选择，相应的半单特征 $\vartheta(\Delta)$ 和 $\vartheta(\Sigma)$ 是不相容的。

例4.12。设 $G = \mathbf{GL}(4, F)$， $p \neq 2$。选择 $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$；令 $\gamma(g) = {}^tJ({}^tg^{-1})J$并令 $\Gamma = \{1, \gamma\}$。于是我们有 $H = G^{[\Gamma]} = \mathbf{Sp}(4, F)$。设 E/F为二次扩张，并令 $\mathbf{T}_0 = \mathbf{Res}_{E/F}\mathbf{G}_m$。于是我们可以选择 H 的极大环面 S $\cong \mathbf{T}_0$，将其嵌入为一对分块对角矩阵 $\mathbf{diag}(a, {}^ta^{-1})$，其中 $a \in \mathbf{T}_0$, 的中心化子在 G 中为 T $= \{\mathbf{diag}(a, b) \mid a,\ {}^tb \in \mathbf{T}_0\} \cong \mathbf{T}_0 \times \mathbf{T}_0$。
令 $r > 0$，并选取深度为 r 的 $F^\times$ 的准特征 η 和 T_0 的 ϕ，使得由 $\theta_S(a,\ {}^ta^{-1}) = \phi(a)\eta(\mathrm{Nm}_{E/F}(a))^{-1}$ 定义的 S 的准特征 θ_S 是深度为 r 的 H-一般准特征。该准特征

$$\theta_T = (\phi, \eta \circ \mathrm{Nm}_{E/F}) : T_0 \times T_0 \to \mathbb{C}^\times$$

是 θ_S 到 T 的扩张。它不是 G-一般的，但根据构造，θ_T 是 T 上的 G-一般准特征 $(\phi, \eta \circ \det)$ 的限制，其中该准特征属于 $E^\times \times GL(2, F)$。因此，与 θ_T 的任何 Howe 分解相对应的扭曲 Levi 序列都将包含群$\mathbf{T}_0 \times \mathbf{GL}(2)$，而该群不是 Γ-稳定的。

相比之下，将定理 4.5 应用于相应的单拟特征标数据$\Delta = (\mathbf{S} \subset \mathbf{H}\ x,\ r,\ \theta_S)$，得到 $\Sigma = (\mathbf{T} \subset \mathbf{G}\ x,\ r,\ \zeta)$，其中 ζ 是 T 的一个准特征，由 $\mathfrak{s}^*_{-r}$ 中的一个元素实现。也就是说，$\zeta = (\xi,\ \xi^{-1})$，其中 ξ 是 $E^\times$ 的一个准特征，并且还满足 $\xi^2|_{E_0^\times} = \phi \otimes \eta^{-1} \circ \mathrm{Nm}_{E/F}|_{E_0^\times}$。
□

这个例子所揭示的障碍在于，任意选取θ_T 时无法加以控制：包含 $\mathfrak{t}^*$ 中实现 Howe 分解中的准特征的元素的子空间 θ_T 不受 θ_S约束。在定理4.1的构造中，则通过定理2.9对 Howe 分解的每个因子施加这种控制。

REFERENCES

[AR00] JeffreyD. Adler 和Alan Roche，关于 p-进群的交织结果，《加拿大数学杂志》**52**(2000)，第3期，449–467页。[BB12] Laure Blasco 和 Corinne Blondel，局部非阿基米德 `域上 $G_2(F)$的半单特征， F《高等师范学校科学年刊》´(第四辑)，第**45**卷(2012)，第6期，985–1025页(2013)。

[BK93] Colin J. Bushnell 和 Philip C. Kutzko，《通过紧开子群研究 GL(N) 的容许对偶》，《数学年刊研究》，第129卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993年。[BM25] Ad`ele Bourgeois 和 Paul Mezo，《超尖点表示 $L$-包的函子性》，《太平洋数学杂志》339 (2025年)，第1期，73–131页。MR 4954965[Bou20]Ad`ele Bourgeois，《超尖点表示的限制：对数据的深入探究》，博士论文，渥太华大学，http://hdl.handle.net/10393/40901，2020年。[Bou21] , 通过限制数据限制超尖点表示，《太平洋数学杂志》312 (2021年)，第1期，1–39页。[Fin21a] Jessica Fintzen，《驯 ramified 超尖点表示的构造》，《组合数学》157 (2021年)，第12期，2733–2746页。[Fin21b] ， p-进群中的驯 ramified 环面与良好半单元，《国际数学研究通讯》(2021年)，第19期，14882–14904页。[Fin21c] , 驯 ramified p-进群的类型，《数学年刊》(第二辑)193 (2021年)，第1期，303–346页。[Hak18] Jeffrey Hakim，《构造驯 ramified 超尖点表示》，《表示论》22 (2018)，45–86页。[HM08] Jeffrey Hakim 和 Fiona Murnaghan，《区分驯 ramified 超尖点表示》，《国际数学研究论文》(2008年)，第2期，文章编号 rpn005，共166页。[Kal19] Tasho Kaletha，《正则超尖点表示》，《美国数学会杂志》32 (2019)，第4期，1071–1170页。[Kim07] Ju-Lee Kim，《超尖点表示：一个穷尽定理》，《美国数学会杂志》20 (2007)，第2期，273–320页(电子版)。[KP23] Tasho Kaletha 和 Gopal Prasad，《布鲁哈-蒂茨理论——一种新方法》，《新数学专著》，第44卷，剑桥大学出版社，剑桥，2023年。MR 4520154[KY17] Ju-Lee Kim 和 Jiu-Kang Yu，《驯 ramified 类型的构造》，载于《表示论、数论与不变量理论》，《数学进展》，第323卷，Birkhäuser/Springer，查姆，2017年，第337–357页。[LN23] Peter Latham 和 Monica Nevins，《将容许表示限制到不动点子群》，《代数通讯》51 (2023)，第9期，3834–3847页。[MP96] Allen Moy 和 Gopal Prasad，《雅各布函子与未精化的最小 K-类型》，《赫尔维数学评论》71 (1996)，第1期，98–121页。[MS14] Michitaka Miyauchi 和 Shaun Stevens，《 p-进经典群的半单类型》，《数学年刊》358 (2014)，第1–2期，257–288页。[Mur11] Fiona Murnaghan，《驯 ramified 超尖点表示的参数化》，载于《论某些 L-函数》，《克莱数学论文集》，第13卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年，第439–469页。[PY02] Gopal Prasad 和 Jiu-Kang Yu，《有限群在约化群与建筑上的作用》，《数学创刊》147 (2002)，第3期，545–560页。[Ste05] Shaun Stevens，《 p-进经典群的半单特征》，《杜克数学杂志》127 (2005)，第1期，123–173页。[Ste08] ，《 p-进经典群的超尖点表示》，《数学创刊》172 (2008)，第2期，289–352页。[Yu01] Jiu-Kang Yu，《驯 ramified 超尖点表示的构造》，《美国数学会杂志》14 (2001)，第3期，579–622页(电子版)。

School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Canada
电子邮箱地址：abour115@uottawa.ca

Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, Ottawa, Canada
电子邮箱地址：mnevins@uottawa.ca