arXiv:2602.13027v1 [math.GR] 13 Feb 2026

$\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 的分裂扩张的表示ζ函数

J. Moritz Petschick 和 Margherita Piccolo

摘要。我们研究 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 的分裂扩张的表示增长。我们证明，相应的表示ζ函数可分解为 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 的表示ζ函数与该扩张所关联的相对表示ζ函数的乘积。我们运用这一结果，显式计算了 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 的两个无限分裂扩张族的ζ函数。在此过程中，我们还计算了 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 的一大类子群的表示ζ函数。

1. 引言

设 G 是一个拓扑群，并设 $r_n(G)$ 表示 G的 n维连续复表示的同构类集合的基数。若对每个 n，G)均为有限值，则称群G 表示刚性。在有限生成有限拟群中，表示刚性可由通常称为“FAb”的性质刻画：若一个群的每个开子群的阿贝尔化均有限，则该群具有此性质；更多细节见 [5, 命题 2] 。若群 G具有多项式表示增长，即函数 $N \mapsto R_N(G) = \sum_{n=1}^{N} r_n(G)$ 有多项式上界，则定义 G 的表示ζ函数为狄利克雷生成函数

$$\zeta_G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(G) n^{-s}$$

定义在某个左半平面上，使其收敛横坐标 $\alpha(G)$ 与序列 $(R_N(G))_{N\in\mathbb{N}}$ 的多项式增长次数相一致。这些ζ函数及其变体已针对许多不同类别的群进行了研究，参见例如 [4, 24, 25, 37, 31, 39] 及其中的参考文献。

FAb 紧致 p-adic 解析群的表示ζ函数“几乎”是有理函数。正如 J aikin-Zapirain [18]所证明的，对奇素数，存在正整数 $n_1, \dots, n_r$ 和有理函数 $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{Q}(t)$，使得$\zeta_G(s) = \sum_{i=1}^{r} n_i^{-s} f_i(p^{-s})$。Stasinski 和 Zordan [38]将这一结论推广到了素数 2。最近，Kionke 和 Klopsch [20] 研究了一个更一般的问题：计数群 G 的并非所有 不可约表示，而是所有

日期：2026年2月16日。2010 数学主题分类。主要分类 22E50，11M41；次要分类 20F69，20C15。关键词和短语。表示增长， p-进解析群， $\mathfrak{p}$-进积分，Dirich-let卷积。第一作者获得了德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）的资助，项目编号为380258175和SFB-TRR 358/1 2023 – 491392403。第二作者部分获得了DFG研究培训组GRK2240“代数、算术与拓扑中的代数几何方法”的资助，同时是GNSAGA（INdAM）的成员，并谨此感谢其支持。

表示 G 中的不可约成分 φ，并按其重数计数；由此得到与相关联的 ζ函数 φ。在对 φ 施加一些自然限制的条件下，表示ζ函数理论中的大部分内容都可以自然推广到这一更灵活的框架中。本文通篇大量运用了他们的结果。

尽管上述结果所依据的技术——Kirillov轨道方法、 p-进积分和相对克利福德理论——为计算表示ζ函数提供了“配方”，但要得到显式公式仍颇具挑战；目前已知的仅有少数几个案例，而且都涉及维数较小、可解根平凡的群；参见 [3, 4, 18, 41]。即使是确定收敛横坐标，一般而言仍是一个悬而未决的问题，不过已有一些界，参见 [1, 3, 6, 25]。

与先前的例子不同，我们考虑维数任意大且可解根无限的紧致 p-进解析群。具体而言，我们考虑特征零紧离散赋值环上二阶特殊线性群的主合同子群的分裂扩张。我们陈述主要结果，并将其中一些技术术语的精确定义留待后文给出。

定理 1.1. 设 $\mathcal{O}$ 是特征为0 且剩余特征为 p的紧离散赋值环。设 $\mathfrak{k}$ 是一个3维单 $\mathcal{O}$李格，且 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{k}$的一个开 $\mathcal{O}$李子格。设 m 适当可容许， $H = \exp \mathfrak{h}$，并设 $\sigma\colon H \to \mathrm{GL}_n^m(\mathcal{O})$ 是 H的一个忠实有限维 $\mathcal{O}$表示。此外，假设半直积 $G = H \ltimes_\sigma \mathcal{O}^n$ 是 *FAb* 群。那么 G的表示ζ函数满足

$$\zeta_G(s) = \zeta_H(s) \cdot \zeta_H^G(s-1),$$

其中， $\zeta_H^G(s)$是与表示$\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{1}_H)$相关联的ζ函数。

这种乘积分解使我们能够为强幂零子群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ 的无穷多个分裂扩张计算显式公式。然而，我们的例子表明，在更一般的情形下，并非总能期待这种分解，这说明这种行为并非普遍现象。

紧 p进解析群和复李群的表示ζ函数，作为局部因子，出现在与具有合同子群性质的（S-）算术群相关联的表示ζ函数的欧拉乘积分解中，参见 [25]。代数数域 $\mathcal{K}$ 的整数环上的特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ 不具有合同子群性质；然而，对于非空有限集合 S（它包含阿基米德赋值以及至少一个非阿基米德赋值）——该集合取自具有整数环 $\mathcal{O}$ 的数域 $\mathcal{K}$ 的赋值集合——相应的 S算术群 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_S)$ 具有合同子群性质，参见 [32, § 9.5]。特别地，对于这样的 S，我们有

$$\zeta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_S)}(s) = \zeta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(s) \times \prod_{p \notin S} \zeta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}(s).$$

群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的每个次数都恰有一个不可约有理表示，其表示ζ函数（在此语境下也称为维滕ζ函数）与黎曼ζ函数一致。事实上，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的每个不可约有理表示都同构于标准表示的对称幂 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$；例如参见 [11, Chapter 11]。受复李群情形的启发，我们考察 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 的二维和三维表示，其中 $\mathcal{O}$ 是一个紧致

特征零离散赋值环，它们分别由在 $\mathcal{O}^2$ 上的自然作用及其对称平方给出。

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的分裂扩张的整数类比本身就相当值得关注。（整数）特殊仿射群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^2$ 是 Kazhdan 证明 $\mathrm{SL}_3(K)$ 对局部域 K 具有性质 (T) 时的关键组成部分，参见 [19, 7, 8]。最近，Zhang [40] 证明，对于一类非常一般的环（包括全局数环），所有形如 $\mathrm{SL}_2(R) \ltimes R^n$ 的群都具有相对性质 (T)；其中，$\mathrm{SL}_2(R)$ 对 R^n 的作用是通过 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的不可约表示定义的。这类分裂扩张也曾用于构造扩展图，参见[30, 27]。

我们的研究目标之一是给出 p-进解析群的显式例子，使其表示增长的次数可以任意大。为此，我们不仅考虑 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ 的自然表示及其对称平方，还考虑这些表示的直积幂。

定理 1.2。设 $\mathcal{O}$ 是特征为 0、剩余特征为奇素数 p且剩余域基数为 q 的紧离散赋值环。对于所有对 $\mathfrak{sl}_2(\mathcal{O})$ 而言适当可容许的 $m \in \mathbb{N}$，以及所有 $n \in \mathbb{N}_+$，主合同子群 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 与 $\mathcal{O}^{2n}$ 关于自然作用的 n^{th} 次幂所构成的半直积的表示ζ函数为

$$\zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})\ltimes\mathcal{O}^{2n}}(s) = \zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}(s) \cdot q^{2nm} \frac{(1+q^{-s})f(q,q^{-s})}{(1-q^{n+1-2s})(1-q^{2n-3s})},$$

其中

$$f(q,t) = 1 - t + (q^{n-1}-1)qt^2 + (1+t)q^{n+1}t^3.$$

表示ζ函数 $\zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}(s)$ 已在 [2, 定理 1.2]中显式计算。注意，定理 1.2 中各群的收敛横坐标取决于分母中两个一致变化因子中的哪一个占主导地位，而这会随 n变化。对于较小的值（$n \leqslant 3$），横坐标等于 $\frac{n+1}{2}$，因此对于 1、3/2和 2，其对应的具体值分别为 $n = 1$、2、3。相比之下，对于较大的值（$n \geqslant 3$），横坐标为 $\frac{2n}{3}$。

一个显著特点是，随着 n 增大，收敛横坐标也会无限增大。这些群与后续定理中出现的群一起，构成了首批已知的具有无界多项式表示增长的 p-进解析群族。

定理 1.3. 设 $\mathcal{O}$、p 和 q 如上。对于所有可容许于 $\mathfrak{sl}_2(\mathcal{O})$ 的适当可容许的 $m \in \mathbb{N}$，以及所有 $n \in \mathbb{N}_+$，主合同子群 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 与 $\mathcal{O}^{3n}$ 的半直积关于自然作用的对称平方的 n^{th} 次直积幂的表示ζ函数为

$$\zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})\ltimes(\mathrm{Sym}^2(\mathcal{O}^2))^n}(s) = \zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}(s) \cdot q^{3nm} \frac{(1-q^{-s})(q+q^{-s})f(q,q^{-s})}{(1-q^{n+2-2s})(1-q^{3(n-s)})}$$

其中

$$f(q,t) = (1+q^nt^2)(1+qt) + t(1+q^{n+1}t).$$

若 $p = 2$、$\mathcal{O} = \mathbb{Z}_2$ 和 $n = 1$，则有

$$\zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathbb{Z}_2)\ltimes\mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z}_2^2)}(s) = 2^{3m+1}\frac{(1-2^{-s})(2^{3-s}+(1-2^{-s}))}{1-2^{3-2s}} \cdot \zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathbb{Z}_2)}(s).$$

特别地，

$$\zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})\ltimes \mathrm{Sym}^2(\mathcal{O}^2)}(s) = \zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}(s)\cdot q^{3m}\frac{(1-q^{-s})^2(q+q^{-s})}{(1-q^{3-2s})(1-q^{1-s})}.$$

同样，群 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})\ltimes(\mathrm{Sym}^2(\mathcal{O}^2))^n$ 在 n变化时的横坐标可能同时由分母中的两个因子支配，并且是无界的：当 $n=1$时它为 $3/2$，否则为 n 。

为了得到定理 1.1，我们需要对$\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})$的子群的表示ζ函数有充分的理解。我们称两个群为$thetyspectral$，如果它们的表示ζ函数相差一个常数因子。为了得到定理 1.1，我们证明——见定理 3.3——$\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 的所有开 potent 子群，在 m 可容许时均为 thetyspectral。事实上，我们研究了一种更一般的情形，见定理 3.2，其中使用了李格同构的一个“弱”类似物。一般而言，如何刻画 thetyspectral 子群尚不清楚。我们给出$\mathrm{SL}_3(\mathcal{O})$ 的一类具有所需性质的子群，见定理 3.4；该方法自然可推广，以涵盖其他半单紧致 p-进解析群。

另一方面，我们通过显式计算某个子群的表示ζ函数，证明并非所有 $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})\ltimes\mathcal{O}^2$ 的开 potent 子群都是 thetyspectral。

定理 1.4。设 p 是一个奇素数，且 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 的一个非分歧扩张。对于 $k\in\mathbb{N}$，考虑群 $H_k = S_k\ltimes\mathcal{O}^2$，其中

$$S_k = \left\{ M\in \mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O}) \mid M \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1\end{pmatrix} \bmod p^{k+1}\right\}.$$

群 $\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})\ltimes\mathcal{O}^2$ 和 H_k 都不是 *thetyspectral*。特别地，

$$\zeta_{H_k}(s) = p^{2k+2}\frac{(1-p^{-s})((1-(p^{1-s})^{k+1})+p^{1-2s}(1-p^{(1-s)(k-1)})}{(1-p^{1-s})^2(1+p^{1-s})}\cdot\zeta_{\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})}(s).$$

致谢。本文的一些研究成果已在作者各自的博士论文中发表，这两篇论文均由 Benjamin Klopsch 指导。作者感谢他提出研究课题、给予指导，并对早期稿件提出意见。

2. 预备知识

2.1. **一般记号**。我们用 $\mathbb{N}$ 表示正整数集，并令 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$。集合 $\{1,\dots,n\}$ 记作 $[n]$。

2.2. 表示论。本节讨论的所有群都是有限群。对于群 G，记 $\mathrm{Irr}(G)$ 为有限维不可约连续复表示的同构类集合；对于任意 $n\in\mathbb{N}$，记 $\mathrm{Irr}_n(G)$ 为维数为 n 的表示子集。G 的不可约表示的同构类与其不可约复特征之间存在一一对应。平凡表示记为 $\mathbb{1}_G$。表示 $\sigma\colon G\to\mathrm{GL}(V)$ 称为光滑表示，如果映射 $G\times V\to V$ 连续，其中 W 赋予离散拓扑。每个光滑表示都可分解为光滑不可约表示的直和，而 G 的光滑不可约表示恰好是 G 的有限维不可约连续表示，参见例如 [20, 引理 2.1] 及其中的参考文献。下文中，所有表示都是有限维且光滑的。

给定 G 的两个表示 $\sigma\colon G\to \mathrm{GL}(V)$ 和 $\varphi\colon G\to \mathrm{GL}(W)$，张量积 $\sigma\otimes\varphi$ 是 G 在 $V\otimes_{\mathbb{C}} W$ 上满足 $((\sigma\otimes\varphi)(g))(v\otimes w) = \sigma(g).v\otimes\varphi(g).w$ 的表示，其中对所有 $g\in G$，$v\in V$ 和 $w\in W$ 均成立。表示 $\sigma\colon G\to\mathrm{GL}(V)$ 的对称平方 $\mathrm{Sym}^2(\sigma)\colon G\to \mathrm{GL}(\mathrm{Sym}^2(V))$ 是张量积 $\sigma\otimes\sigma$ 在对称张量子空间上的限制。

令 $\mathcal{C}^\infty(G,V)$ 表示从 G 到一个带有离散拓扑的 $\mathbb{C}$-向量空间 V 的连续函数空间。给定闭子群 $H\le G$ 和 H 的一个表示 σ，定义 $V_\sigma = \{f\in\mathcal{C}^\infty(G,V) \mid \forall h\in H,\ \forall x\in G\colon\ f(hx) = \sigma(h).f(x)\}$。$\sigma$ 在 G 上的诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)\colon G\to\mathrm{GL}(V_\sigma)$ 定义为右平移 $(\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)(g))(f)(x) = f(xg)$。遵循 Kionke 和 Klopsch [20,Section 2.3], 的用法，我们称该表示为“诱导”表示，而非“余诱导”表示；后者是 Serre 在 [36, Section I 2.5] 中使用的术语。

给定群 H、同态 $f\colon G\to H$ 以及 H 的一个表示 σ，沿 f 将 σ 膨胀得到的表示是 $\mathrm{Inf}_H^{G\,f}{}_,(\sigma) = f\sigma$，它是 G 的表示。如果从上下文中可以明确形态的选择，我们将省略相应的上标。对于诱导表示或膨胀表示的特征，我们使用相同的记号。

设 $H\le G$ 为一个闭子群，设 σ 为 H 的一个表示。如果存在 G 的一个表示 $\tilde\sigma$，使得 $\tilde\sigma|_H$ 等于 σ，则称 σ 是 可扩张的。

在本节余下部分，设 $H\le G$ 为一个闭子群，使得 G（连续地）分解为半直积 $G = H\ltimes V$，其中 V 是闭的阿贝尔群。我们利用 Mackey [29] 对一般半直积的经典描述，根据 V 的不可约表示来描述 G 的不可约表示。

在这一设定下，子群 H 通过对自变量施加共轭作用于 $\mathrm{Irr}(V)$。记 $\mathrm{Stab}_H(\sigma)$ 为在该作用下 $\sigma\in\mathrm{Irr}(V)$ 的点稳定子。于是，σ 可扩张到子群 $H_\sigma = \mathrm{Stab}_H(\sigma)\ltimes V$ of G，其见证表示为 $\mathrm{Ext}_V^{H_\sigma}(\sigma)(hv) = \sigma(v)$。使用这一术语，$G$ 的不可约表示的结构形式可描述如下，参见 [35,命题 25]。

命题 2.1。设 G 是半直积 $H\ltimes V$。设 $\mathcal{X}$ 是 H 在 $\mathrm{Irr}(V)$ 上的作用所产生的轨道的一组代表。对每个 $\chi\in\mathcal{X}$，令 S_χ 为它在 H 中的点稳定子。若对所有 $\chi\in\mathcal{X}$ 都有 $|H\colon S_\chi|<\infty$，且集合 $\mathcal{X}$ 可数，则 G 的每个不可约表示都具有如下形式

$$\mathrm{Ind}_{S_\chi\ltimes V}^G\left(\mathrm{Inf}_{S_\chi}^{S_\chi\ltimes V}(\tau)\otimes\mathrm{Ext}_V^{S_\chi\ltimes V}(\chi)\right),$$

其中 $\chi\in\mathcal{X}$ 取某个值，且 $\tau\in$ 属于 $\mathrm{Irr}(S_\chi)$。这种形式的两个表示等价，当且仅当它们由同一对 χ、τ 给出。

对于概形群（或更一般地，紧致群），有限群的不可约表示所对应的特征标集合上的通常内积推广为$\langle\chi,\ \theta\rangle_G = \int_G\chi(g)\theta(g)\mathrm{d}\mu(g)$，其中 χ，θ 表示不可约特征标，而 μ 表示 G 的归一化（左）哈尔测度。与有限群的情形一样，给定 χ 的一个不可约分量 θ，$\langle\chi,\ \theta\rangle_G$ 的值等于 χ 的分解中 θ 出现的重数。以下等式对我们将有用。

命题 2.2。沿用前一命题中的术语，设 $\chi\in\mathcal{X}$ 和 τ是 S_χ的一个不可约表示。分别用 θ_τ 和$\theta_{\tau,\chi}$ 表示与 τ及表示 $\mathrm{Inf}_{S_\chi}^{S_\chi\ltimes V}(\tau)\otimes\mathrm{Ext}_V^{S_\chi\ltimes V}(\chi)$对应的特征标。那么

$$\langle\mathrm{Ind}_{S_\chi\ltimes V}^G(\theta_{\tau,\chi}),\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{1}_H)\rangle_G = \langle\mathrm{Ind}_{S_\chi}^H(\theta_\tau),\mathbb{1}_H\rangle_H.$$

证明。设 $\mathcal{R}_{S_\chi}$ 是 S_χ 在 H中的一组陪集代表元，同时也是 $S_\chi \ltimes V$在 G中的一组陪集代表元。对于 $x \in \mathcal{R}_{S_\chi}$和 $h \in H$，共轭子群 h^x包含于 $S_\chi \ltimes V$当且仅当它包含于 S_χ。由于 H 是闭的，根据 [10,定理 6。10], Frobenius互反律给出

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Ind}_{S_\chi \ltimes V}^G(\theta_{\tau,\chi}), \mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{1}_H)\rangle_G &= \langle \mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_{S_\chi \ltimes V}^G(\theta_{\tau,\chi}), \mathbb{1}_H\rangle_H \\ &= \int_H \sum_{\substack{x\in\mathcal{R}_{S_\chi} \\ (h)^x \in S_\chi \ltimes V}} \theta_{\tau,\chi}(h^x)\mathrm{d}\mu(h) \\ &= \int_H \sum_{\substack{x\in\mathcal{R}_{S_\chi} \\ h^x \in S_\chi}} \theta_\tau(h^x)\cdot\chi(1)\mathrm{d}\mu(h) \\ &= \int_H \mathrm{Ind}_{S_\chi}^H(\theta_\tau)(h)\cdot\mathbb{1}_H(h)\,\mathrm{d}\mu(h) = \langle \mathrm{Ind}_{S_\chi}^H(\theta_\tau), \mathbb{1}_H\rangle_H. \square\end{aligned}$$

2.3. 表示ζ函数。设 G 是一个抽象群，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $|\mathrm{Irr}_n(G)|$ 都是有限集。G 的表示ζ函数是狄利克雷生成函数

$$\zeta_G(s) = \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(G)} \dim(\varphi)^{-s} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathrm{Irr}_n(G)| n^{-s}.$$

换个角度来看，Kionke 和 Klopsch [20]引入了一种更一般的ζ函数，它可以与群的任何“足够温和”的无限维表示相关联。

如果有限拟群 G 的光滑表示 σ 分解为不可约成分 $\sigma = \bigoplus_{\varphi\in\mathrm{Irr}(G)} m(\sigma,\varphi)\varphi$ 满足以下条件，则称其为强可容许的

$$\sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}_n(G)} m(\sigma,\varphi) < \infty$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$。对于 G 的强可容许表示 σ，可以关联形式狄利克雷生成函数

$$\zeta_\sigma(s) = \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(G)} m(\sigma,\varphi)\dim(\varphi)^{-s},$$

这称为 σ 关联的ζ函数。

对于正则表示 $\rho = \mathrm{Ind}_1^G(\mathbb{1})$，它以重数 $\dim(\varphi)$ 包含每个 $\varphi \in \mathrm{Irr}(G)$，可得

$$\zeta_\rho(s) = \sum_{\varphi\in\mathrm{Irr}(G)} \dim(\varphi)^{1-s} = \zeta_G(s-1),$$

若 ρ是强可容许的；如此一来，强可容许表示的 ζ函数推广了群的表示ζ函数，见 [20, 例 2.5]。

设 G 是一个有限生成有限拟群， $H \le G$ 是一个闭子群。我们关注形如 $\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{1}_H)$ 的表示；为简化记号，令

$$\zeta_H^G(s) = \zeta_{\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{1}_H)}(s)$$

并将这个ζ函数称为相对于 H 的 G 表示ζ函数。根据 [20,Theorem A]，，表示 $\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{1}_H)$ 强可容许，当且仅当

群 G 相对于 H 是 FAb，也就是说，对于 G 的每个开子群 K，商群 $K/(H\cap K)$ $[K,K]$ 都是有限的。

2.4. 可饱和群与一致 potent 的 pro-p 群。若 p 是奇素数，则 pro-p 群 G 称为 potent 群，当其下中心列 $\gamma_{p-1}(G)$ 的第 $(p-1)^{\text{st}}$ 项包含于由 p^{th} 次幂生成的子群 G^p 中。对于 $p=2$，若群 G 满足 $[G,G]\le G^4$，则称其为 potent 群。若 $[G,G]\le G^p$（奇素数情形）或 $[G,G]\le G^4$（$p=2$ 情形），则群 G 称为强力群。显然，每个强力群都是 potent 群。有限生成、potent（分别为强力）且无挠的 pro-p 群称为一致 potent（分别为一致强力）群；根据 Lazard 的定义，这类群是可饱和的，参见 [12, 23, 26]。

设 R 是一个交换环。R-李格是一个有限秩自由 R-模，并配有李括号。对于一致 potent 的 pro-p 群 G，可以关联一个 potent 的 $\mathbb{Z}_p$-李格 $\mathfrak{g}=\log(G)$，它与 G 作为拓扑空间相同。关于 G 与 $\mathfrak{g}$ 之间的李对应，参见 [15] 。在此，若 $\gamma_{p-1}(\mathfrak{g})\subseteq p\,\mathfrak{g}$（奇素数 p 时）或 $\gamma_2(\mathfrak{g})\subseteq 4\,\mathfrak{g}$（$p=2$ 情形），则称 $\mathbb{Z}_p$-李格 $\mathfrak{g}$ 为 potent。

设 $\mathcal{O}$ 是特征零的紧离散赋值环，剩余特征为 p，赋值理想为 $\mathfrak{p}$；设 K 是 $\mathcal{O}$的分式域，它是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张。给定一个 $\mathbb{Z}_p$-李格 $\mathfrak{g}$，记 $\mathfrak{g}_{\mathfrak{p}}$ 为张量积 $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}$。若 $\mathfrak{g}$ 是强势的，则 $\mathfrak{g}_{\mathfrak{p}}$也是强势的。对于 $m\in\mathbb{N}_0$，其主同余子格为$\mathfrak{g}_{\mathfrak{p},\,m}=\pi^m\cdot\mathfrak{g}_{\mathfrak{p}}$。若 $\mathcal{O}$-李格$\mathfrak{g}_{\mathfrak{p},\,m}$ 作为 $\mathbb{Z}_p$-李格是强势的，则称其为强势的。豪斯多夫级数在$\mathfrak{g}_{\mathfrak{p},\,m}$ 上定义了群乘法，从而可以定义群 $\exp(\mathfrak{g}_{\mathfrak{p},m})$。对于所有充分大的正整数 m，李格$\mathfrak{g}_{\mathfrak{p},\,m}$ 都是强势的，因此$G_{\mathfrak{p},\,m}=\exp(\mathfrak{g}_{\mathfrak{p},m})$是一个一致 potent 的 pro-$p$ 群。我们称这样的正整数 m 对 $\mathfrak{g}$是可容许的，参见 [4, 定义 2.2]。对于给定的 $\mathcal{O}$-格 $\mathfrak{g}$，几乎所有正整数都是可容许的。事实上，记 $e=e(\mathcal{O},\mathbb{Z}_p)$为 $\mathcal{O}$的绝对分歧指数。那么，对于奇素数，每个 $m\geqslant e/(p-2)$都是可容许的；对于 $p=2$，每个 $m\geqslant 2e$ 都是可容许的，参见 [4, 命题 2.3]。特别地，若 $\mathcal{O}$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 上非分歧且 p 为奇数，则每个 $m\in\mathbb{N}$ 对每个 $\mathcal{O}$-李格 $\mathfrak{g}$都是可容许的，参见 [4, 第 2.1]节。

为了处理半直积，也就是说，为了确保 $\mathcal{O}$-李格 $\mathfrak{g}_{\mathfrak{p},m}$ 是强势的，我们需要施加以下更强的条件。

定义 2.3。设 $\mathcal{O}$ 是特征零的紧离散赋值环，其赋值理想为 $\mathfrak{p}$，并设 $\mathfrak{h}$ 是一个 $\mathcal{O}$-李格。若对每个忠实的 $\mathcal{O}$-李格同态 $\sigma\colon \mathfrak{p}^m\mathfrak{h}\to\mathfrak{p}^m\mathfrak{gl}_n(\mathcal{O})$（其中 $n\in\mathbb{N}_0$），相应的半直和 $\mathfrak{p}^m(\mathfrak{h}\oplus\mathcal{O}^n)$ 都是强势的，则称 $m\in\mathbb{N}_0$ 适当可容许于 $\mathfrak{h}$。

显然，若 m适当可容许于 $\mathfrak{h}$，则它必然也是可容许的。现在我们证明，对于每个 $\mathcal{O}$-李格 $\mathfrak{h}$，每个充分大的 $m\in\mathbb{N}$ 都适当可容许。

引理 2.4。设 $\mathcal{O}$ 是剩余特征为 p 的特征零 紧离散赋值环，设 $e=e(\mathcal{O},\mathbb{Z}_p)$ 为绝对分歧指数，并设 $\mathfrak{h}$ 是一个$\mathcal{O}$-李格。若 p 为奇数，则每个 $m\geq e$ 都适当可容许。若 p 为 2，则每个 $m\geq 2e$ 都适当可容许。特别地，对于每个忠实的 $\mathcal{O}$- 李格同态 σ: $\mathfrak{p}^m\mathfrak{h}\to\mathfrak{p}^m\mathfrak{gl}_n(\mathcal{O})$，群 $\exp(\mathfrak{p}^m(\mathfrak{h}\oplus\mathcal{O}^n))$ 是一致 *potent*。

此外，若对于满足上述条件的某个整数 m，$\exp(\mathfrak{p}^m\mathfrak{h})$ 是一致强群，则群 $\exp(\mathfrak{p}^m(\mathfrak{h}\oplus\mathcal{O}^n))$ 也一致强。

证明。 注意，在给定的关于 m的假设下，根据 [4]， $\mathfrak{h}$ 是可容许的。这里我们用到，对于 $p=2$，该整数至少为 $2e$。

设 $\sigma\colon \mathfrak{p}^m\mathfrak{h} \to \mathfrak{p}^m\mathfrak{gl}_n(\mathcal{O})$ 是一个忠实的李格同态，并将相应的半直和记为 $\mathfrak{h}\oplus\mathcal{O}^n$ $\mathfrak{g}$。假设 p 为奇数。 $\mathfrak{p}^m\mathfrak{g}$ 的下中心列的第 $(p-1)^{\text{st}}$ 项由 $\gamma_{p-1}(\mathfrak{p}^m\mathfrak{h})$ 和 $[\mathfrak{p}^m\,\mathcal{O}^n, \mathfrak{p}^m\mathfrak{h}, \dots, \mathfrak{p}^m\mathfrak{h}]$ 生成，因为 $[\mathfrak{p}^m\,\mathcal{O}^n, \mathfrak{p}^m\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{p}^m\,\mathcal{O}^n$，它是阿贝尔的。由于 m 对 $\mathfrak{h}$ 是可容许的，我们得到 $\gamma_{p-1}(\mathfrak{p}^m\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{p}^{m+1}\mathfrak{h}$。令 $h \in \mathfrak{p}^m\mathfrak{h}$ 和 $v \in \mathfrak{p}^m\,\mathcal{O}^n$。于是

$$[v,h] = \sigma(h)(v) \in v\cdot\mathfrak{p}^m\mathfrak{gl}_n(\mathcal{O}),$$

由此 $\gamma_{p-1}(\mathfrak{p}^m\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{p}^{2m}\,\mathcal{O}^n$ 的子集。由于 $m \geq e$，同样有 $\mathfrak{p}^{2m}\,\mathcal{O} \subseteq (\mathfrak{p}^m\,\mathcal{O})^p$，且 $\mathfrak{p}^m\mathfrak{g}$ 是强势的。情形 $p=2$ 以及关于一致强群的结论可用相同方式证明。□

在有限生成有限拟群的领域中，表示刚性群在代数上可由 FAb 性质刻画：若一个拓扑群的每个开子群 H 都具有有限阿贝尔化 $H/[H,H]$，则称其为 FAb，参见 [5, 命题 2]。对于一个 p-进解析群 G，借助可饱和 pro-p群与可饱和 $\mathbb{Z}_p$-李格之间的 Lazard对应，这一刻画可推广到其 p-进李代数，参见 [26, 15]。特别地，一个 p-进解析群 G是 FAb，因而是表示刚性的，当且仅当它具有一个开 FAb 可饱和 pro-p 子群 U；而可饱和 pro-p 子群 U 是 FAb，当且仅当 $\mathbb{Z}_p$-李格 log(U) 是 FAb。此外，后一条件成立，当且仅当 $\mathbb{Q}_p$-李代数 log(U) $\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ 是完美的，参见 [4, 命题 2.1]。

2.5. ***p*进积分形式**。 利用 Kirillov轨道方法， [13],Klopsch 和 Kionke [20, 第 4]节描述了一致 potent pro-p群及其强幂零子群的相对表示ζ函数，方法如下：使用一个 p-进积分。

设 $\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathcal{O}$-李格，其 $\mathcal{O}$-基为 $\mathfrak{Z}$，并令 $\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$ 为 $\mathfrak{Z}$的（有序）子集。记 $g \mapsto g^*$ 为从 $\mathfrak{g}$ 到其对偶 $\mathfrak{g}^*$ 的映射，该映射由将 $\mathfrak{Z}$ 映到其对偶基所诱导。关于 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 的 $\mathfrak{g}$ 交换子矩阵是一个 $|\mathfrak{X}|\times|\mathfrak{Y}|$ 矩阵 Com($\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$)，其元素为 $\mathcal{O}$- 线性形式；当 x 遍历 $\mathfrak{X}$ 且 y遍历 $\mathfrak{Y}$时，各项为 $[x,y]^*$。若 $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}$，该矩阵为斜对称矩阵。记 Com($\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$)($g$)为将交换子矩阵的各项作用于元素 $g \in \mathfrak{g}$所得的矩阵。

限制在 $n\times n$ 斜对称矩阵集合上的行列式，是***Pfaff***行列式的平方（作为多项式），参见例如 [17, 第 9 章5]。斜对称矩阵的***Pfaff***子式 是一个主子矩阵的 Pfaff行列式。我们用 Pfaff(T) 表示斜对称矩阵 T 的所有 Pfaff 子式组成的集合，用 Minor(A) 表示矩阵 A 的所有（不一定是主子式）子式组成的集合。

令 $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ 表示 K 上的 $\mathfrak{p}$-进范数。对于子集 $S \subseteq K$，定义

$$\|S\|_{\mathfrak{p}} = \max\{|s|_{\mathfrak{p}} \mid s \in S\}.$$

定理 2.5。 [20, 命题C和命题4。6] 设 $\mathcal{O}$ 是一个特征为0、剩余特征为 p且剩余域基数为 q的紧离散赋值环。设 $\mathfrak{p}$ 为赋值理想， π 为一致化元， K 为 $\mathcal{O}$的分式域， $\mathfrak{g}$ 为一个 $\mathcal{O}$-李格，并设 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $G = \exp(\pi^m\mathfrak{g})$是一个一致 ***potent*** 的 ***pro-p*** 群；再设 $\mathfrak{h}$ 为与强幂零子群 $H = \exp(\pi^m\mathfrak{h}) \leqslant_c G$ 相对应的 $\mathcal{O}$-李格的一个直和项，且 G 相对于 $m \in \mathbb{N}$ 是***FAb***的

。记 $d =$ 维数$_{\mathcal{O}}\,\mathfrak{g} -$ 维数$_{\mathcal{O}}\,\mathfrak{h}$。设 $\mathfrak{Y}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组基，并设 $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$ 是其扩充为 $\mathfrak{g}$的一个 $\mathcal{O}$-基。则

$$\zeta_H^G(s) = q^{md} \int_{K\mathfrak{X}} \|\mathrm{Pfaff}(\mathrm{Com}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})(w))\|_{\mathfrak{p}}^{-1-s} \mathrm{d}\mu(w),$$

其中， μ 表示相对于 $\mathfrak{g}$归一化的 $K\mathfrak{X}$ 哈尔测度。

请注意，与 [20], 相比，我们的公式是“对偶化”的。在 [20], 中，交换子矩阵的元素属于 $\mathfrak{g}$ ，积分区域则是 $K\mathfrak{X}$的对偶。

回忆一下，适当群 G 的表示ζ函数满足方程$\zeta_G(s) = \zeta_1^G(s+1)$。由此，上述定理推广了 [4, 18]中类似的公式。

由于我们关注的特殊情形是 G 为某个群 H 与一个阿贝尔群的半直积，因此可以对上述公式作些简化。

命题 2.6。沿用定理 *2.5*中的记号，假设 $\mathfrak{g}$ 是关于 $\mathfrak{h} \oplus \mathcal{O}^n$ 的半直和，并且存在忠实的 $\mathcal{O}$-李格同态σ： $\mathfrak{p}^m\mathfrak{h} \to \mathfrak{p}^m\mathfrak{gl}_n(\mathcal{O})$ ，其中 m 对于 $\mathfrak{h}$是适当可容许的，并假设 $\mathfrak{X}$ 生成 $\mathcal{O}^n$。那么， $G = \exp(\mathfrak{p}^m\mathfrak{g}) \cong H \ltimes \mathcal{O}^n$ 相对于 $H = \exp(\mathfrak{p}^m\mathfrak{h})$ 的表示ζ函数满足

$$\zeta_H^G(s) = q^{mn} \int_{K\mathfrak{X}} \|\mathrm{Minor}(\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})(w))\|_{\mathfrak{p}}^{-1-s} \mathrm{d}\mu(w),$$

其中 μ 表示相对于 $\mathfrak{g}$归一化的 $K\mathfrak{X}$的哈尔测度。

证明。根据 定理 2.5，考虑交换子矩阵 $\mathrm{Com}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})$。由于 V是阿贝尔的， $\mathfrak{v}$ 也同样是阿贝尔的，因此交换子矩阵具有分块形式

$$\mathrm{Com}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) \\ \mathrm{Com}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X}) & \mathrm{Com}(\mathfrak{Y},\mathfrak{Y}) \end{pmatrix}.$$

自然地，$\mathrm{Com}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X}) = -\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})^{\intercal}$。由于 $\mathfrak{h}$ 对李括号封闭，$\mathrm{Com}(\mathfrak{Y},\mathfrak{Y})$ 的各项都是 $\mathfrak{h}$ 的函数，且 $K\mathfrak{X}$ 包含于它们的核中，因此对于任意 $w \in K\mathfrak{X}$，矩阵 $\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})(w)$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})(w) \\ -\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})^{\intercal}(w) & 0 \end{pmatrix}.$$

其主子矩阵仍具有 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ -A^{\intercal} & 0 \end{smallmatrix}\right)$的形式，其中 A 是 $\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})(w)$ 的一个（通常是非主）子矩阵。

这种分块矩阵的行列式等于 $\det(A)^2$, ，因此 $\mathrm{Pfaff}(\mathrm{Com}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})(w))$ 等于 $\mathrm{Minor}(\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})(w))$。回顾积分公式，我们已经证明了所需结论。□

3. 子群与半直积的ζ函数

3.1. **Thetyspectral 群**。在研究与群相关的某类ζ函数（即特定计数问题）时，一个常见主题是考察两个非同构群何时会产生相同的ζ函数。这样的两个群称为等谱；例如，参见 [28]。对于表示ζ函数，同一个一致 potent pro-p 群的不同同余子群表现出类似但通常有所不同的行为：所得ζ函数并不相等，只相差一个常数因子；这一点可从定理 2.5

以及 [14, 命题 6]。为便于讨论这一现象，我们回顾先前引入的术语。

定义 3.1。设 G 是一个群，H 是 G的一个子群，且 $\lambda \in \mathbb{N}$是一个常数。我们称 H 为具有因子 λ 的 thetyspectral，当且仅当 $\zeta_H(s) = \lambda\zeta_G(s)$。

我们通过将表示ζ函数描述为 p-进积分，并利用李对应（它指出群及其有限指数子群对应于维数相同的格），建立了一个用于识别某些 thetyspectral 子群的条件。因此，与分式域取张量积后，可得到同构结构。

定理 3.2。设 $\mathcal{O}$ 是一个特征0的紧离散赋值环，其剩余特征为 p，剩余域的基数为 q。设 $\mathfrak{p}$ 为赋值理想，π 为一致化元，K 为 $\mathcal{O}$的分式域，$\mathfrak{g}$ 为一个 $\mathcal{O}$-李格，且 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $G = \exp(\pi^m\mathfrak{g})$ 是一个一致 *potent* 的 *pro-*p 群。设 $\mathfrak{h}$为 $\mathfrak{g}$的一个开 *potent* 子-$\mathcal{O}$-李格，对应于一个 *potent* 子群 $H = \exp(\pi^m\mathfrak{h}) \leqslant_c G$。

记 $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}} K$ 和 $\mathfrak{h}_K = \mathfrak{h} \otimes_{\mathcal{O}} K$，并令 $\beta\colon\ \mathfrak{g}_K \wedge \mathfrak{g}_K \to \mathfrak{g}_K$ 为由 $\mathfrak{g}$的李括号诱导的线性映射。固定一个 K-线性同构 $\xi\colon\ \mathfrak{g}_K \to \mathfrak{h}_K$，其限制在 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$上为一个 $\mathcal{O}$-线性映射。

若存在一个 K-线性映射 $\psi\colon\ \mathfrak{g}_K \to \mathfrak{h}_K$，使得

$$\beta(\xi \wedge \xi) = \psi\beta,$$

则 H 是 *thetyspectral*，因子为 $|\det(\psi\xi^{-1})|_{\mathfrak{p}}^{-1}$。

证明。我们使用前面引入的积分形式体系，因此

$$\zeta_G(s) = q^{m\dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{g}} \int_{K\mathfrak{X}} \|\mathrm{Pfaff}(\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})(w))\|_{\mathfrak{p}}^{-2-s}\mathrm{d}\mu(w),$$

其中 $\mathfrak{X}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个 $\mathcal{O}$-基。自然地，$\xi(\mathfrak{X})$是 $\mathfrak{h}$的一个 $\mathcal{O}$-基，并且 $\mathrm{Com}(\xi(\mathfrak{X})\ \xi(\mathfrak{X}))$ 的各项具有如下形式

$$\mathrm{d}^{\xi(\mathfrak{X})}([\xi(x),\xi(x')]) = \mathrm{d}^{\xi(\mathfrak{X})}(\beta(\xi\wedge\xi)(x\wedge x')) = \mathrm{d}^{\xi(\mathfrak{X})}(\psi\beta(x\wedge x')) = \mathrm{d}^{\xi(\mathfrak{X})}(\psi[x,x'])$$

对于 $x,\ x' \in \mathfrak{X}$，因此对于 $w \in K\mathfrak{X}$，我们有

$$\mathrm{d}^{\xi(\mathfrak{X})}([\xi(x),\xi(x')])(w) = \mathrm{d}^{\mathfrak{X}}([x,x'])(\psi^*\xi^{-1}(w)).$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\zeta_H(s) &= q^{m\dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{h}} \int_{\xi(K\mathfrak{X})} \|\mathrm{Pfaff}(\mathrm{Com}(\xi(\mathfrak{X}),\xi(\mathfrak{X}))(w))\|_{\mathfrak{p}}^{-2-s}\mathrm{d}\mu(w)\\ &= q^{m\dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{g}} \int_{K\mathfrak{X}} \|\mathrm{Pfaff}(\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})(\psi^*\xi^{-1}(w)))\|_{\mathfrak{p}}^{-2-s}\mathrm{d}\mu(w),\end{aligned}$$

利用 $\dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{h} = \dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{g}$ 和 $\xi(K\mathfrak{X}) = K\mathfrak{X}$。现在进行简单的变量替换 $w \mapsto \psi^*\xi^{-1}(w)$，得到

$$\zeta_H(s) = |\det(\psi^*\xi^{-1})|_{\mathfrak{p}}^{-1}\zeta_G(s). \qquad \square$$

推论 3.3. 设 $\mathcal{O}$ 是特征为0 、剩余特征为 p的紧离散赋值环，其一致化元为 π。设 $\mathfrak{g}$ 是一个3维单 $\mathcal{O}$-李格，且 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$的一个开 $\mathcal{O}$-李子格。设 m 满足：$G = \exp(\pi^m\mathfrak{g})$是一个一致 *potent* 的 *pro-*$p$ 群，且其开强势子群为 $H = \exp(\pi^m\mathfrak{h})$。那么

$$\zeta_H(s) = |G : H| \cdot \zeta_G(s).$$

证明。写作 $\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g} \otimes_{\mathcal{O}} K$，其中 K 表示 $\mathcal{O}$的分式域。由于由 $\mathfrak{g}$ 的李括号诱导的线性映射 $\beta\colon \mathfrak{g}_K \wedge \mathfrak{g}_K \to \mathfrak{g}_K$ 是非退化的，$\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ 的像在 $\mathfrak{g}$中的指数有限。由于 $\dim_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}) = 3$，外平方 $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$的维数也为 3。因此，作为一个 K-线性映射，β可逆。记 $\xi\colon \mathfrak{g}_K \to \mathfrak{h}_K$为一个 K-线性同构，其限制在 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$上是一个 $\mathcal{O}$-线性双射。显然，由共轭定义的 K-线性映射 $\psi\colon \mathfrak{g}_K \to \mathfrak{h}_K$

$$\psi = \beta(\xi \wedge \xi)\beta^{-1}$$

满足定理 3.2的条件。其行列式满足

$$\det(\psi) = \det(\xi \wedge \xi) = \det(\xi)^{\dim_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g})-1} = \det(\xi)^2,$$

因此 $\det(\psi\xi^{-1}) = \det(\xi)$，并且我们有 $|\det(\psi\xi^{-1})|_{\mathfrak{p}}^{-1} = |\pi^m\mathfrak{g} :\ \pi^m\mathfrak{h}| = |G :\ H|$。 □

注意，存在两个单的3维 $\mathbb{Z}_p$-李代数：熟知的 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}_p)$，以及约化迹为零的元素所成的代数 $\mathfrak{sl}_1(\Delta_p)$，位于 p-进四元数代数 $\mathbb{D}_p$ 中，并具有极大 $\mathbb{Z}_p$-序 Δ_p，参见 [22, 33, 21]。相应的这两族 p-进解析群的表示ζ函数已在 [3]中计算得到。

定理 3.2为如下事实给出了另一种解释：在定理 2.5中，同余水平 m 仅作为常数因子的一个幂出现。注意，该事实最早在 [18], 中被描述，此后得到了卓有成效的运用，例如 [14] 中的主要结果便大量使用了它。用前一定理的语言来说，对应于$(m+k)^{\text{th}}$主合同子群的格，是$(\pi^k)^{\text{th}}$次幂，作用于对应于 m^{th} 主合同子群 $\mathfrak{g}$的格。映射 ξ 因而由乘以 π^k 的标量乘法给出，并且

$$(v \wedge w)(\xi \wedge \xi)\beta = [\pi^k v, \pi^k w] = \pi^{2k}[v, w] = (v, w)\beta\xi^2, \quad \text{for } v, w \in \mathfrak{g}.$$

因此，我们可以选择 ξ^2 作为我们的 ψ。显然，$\det(\psi\xi^{-1}) = \pi^{dk}$，且 $|\det(\xi)|_{\mathfrak{p}}^{-1} = q^{dk}$。

尽管 定理 3.3 对我们最有用，定理 3.2 也可用于计算许多维数大于 3 的群的表示ζ函数。下文将进行一些计算，以便描述 $G = \mathrm{SL}_3^m(\mathcal{O})$ 的一些 thetyspectral 子群，其中可容许 m 适用于 $\mathfrak{sl}_3(\mathcal{O})$。不过，该方法并不局限于这个群，也可在更一般的情形下使用。群 G 对应于 $\mathcal{O}$-李格 $\mathfrak{g} = \pi^m\mathfrak{sl}_3(\mathcal{O})$，它由迹为零的 矩阵组成，具有 3×3-基 $\mathcal{O}$，其中，对于所述的数对 $\mathfrak{X} = \{h_{12}, h_{23}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, f_{21}, f_{31}, f_{32}\}$，$i$如上所述，$j$

$$h_{ij} = E_{i,i} - E_{j,j}, \qquad e_{ij} = E_{i,j}, \qquad f_{ji} = E_{j,i},$$

其中 $E_{i,j}$ 表示一个 3×3矩阵，其位置 (i, j) 处的元素为 π^m，其余位置均为零。

我们考虑由以下元素生成的 $\mathfrak{g}$ 子格

$$\{\pi^{k_1}h_{12}, \pi^{k_2}h_{23}, \pi^{k_3}e_{12}, \pi^{k_4}e_{13}, \pi^{k_5}e_{23}, \pi^{k_6}f_{21}, \pi^{k_7}f_{31}, \pi^{k_8}f_{32}\},$$

即映射 ξ 由形式为 $\mathrm{diag}(\pi^{k_1}, \dots, \pi^{k_8})$ 的对角矩阵给出的情形，其中 $k_1, \dots, k_8 \in \mathbb{N}_0$。容易看出，$\xi \wedge \xi$可表示为

$$\mathrm{diag}(\pi^{k_1+k_2}, \pi^{k_1+k_3}, \dots, \pi^{k_7+k_8}),$$

使用由 $\mathfrak{X}$ 外平方诱导的基的标准排序。比较括号 β 的矩阵表示与扰动的（$\xi \wedge \xi$）β，我们得到

that

$$[\xi(e_{12}),\xi(f_{21})]=\pi^{k_3+k_6}h_{12}=\psi(h_{12})=\psi([e_{12},f_{21}])$$

必须对任意 ψ 如 定理 3.2中所述的 $[e_{12},f_{21}]=h_{12}$成立。同时，$[e_{13},f_{31}]=h_{12}$，由此 $\psi(h_{12})=\pi^{k_4+k_7}h_{12}$ 以及 $k_3+k_6=k_3+k_7$。逐一考察交换子矩阵中每个变量的每次出现，我们得到关于整数 k_i （$i\in[8]$）的线性方程组，该方程组可最简地描述为

$$\begin{aligned} k_1=k_2=k_6-k_7+k_8,\quad k_3=2k_1-k_6,\\ k_4=2k_1-k_7,\qquad k_5=2k_1-k_8. \end{aligned} \tag{3.1}$$

现在，此外，我们还需要 $\xi(\mathfrak{g})$ 实际上是一个子格，即在括号运算下封闭，这转化为整数 k_i 满足 $i\in[8]$ 的一组不等式。结合 (3.1)，它们归结为唯一的不等式 $k_1\geq 0$，根据 $k_1\in\mathbb{N}_0$ 的选取，该不等式显然成立。

命题 3.4. 设 p 是一个奇素数， $\mathcal{O}$ 是一个特征0 的紧离散赋值环，其剩余域的基数为 q，即 p 的幂，赋值理想为 $\mathfrak{p}$，并选取一个一致化元 π。记 $G=\mathrm{SL}_3^m(\mathcal{O})$，其中 $m\in\mathbb{N}$ 是可容许的；设 H是 G 的子群，对应于由以下元素张成的 $\mathcal{O}$-李子格

$$\pi^{k_1}h_{12},\pi^{k_2}h_{23},\pi^{k_3}e_{12},\pi^{k_4}e_{13},\pi^{k_5}e_{23},\pi^{k_6}f_{21},\pi^{k_7}f_{31},\pi^{k_8}f_{32},$$

其中元素 $k_i\in\mathbb{N}_0$ 当 $i\in\{1,\dots,8\}$ 时表示满足 (3.1) 的非负整数。则 H 具有因子 $|G$ 的 thetyspectral 性质： $H|$。

注意，以这种方式出现的所有子群——即满足上述条件的子群——其指数均为 $q^{\dim_{\mathcal{O}}\mathrm{SL}_3(\mathcal{O})^n}$ 中的 $\mathrm{SL}_3^m(\mathcal{O})$ 的指数，其中 $n\in\mathbb{N}$ 为某个正整数。同时，该命题只涉及一种非常特殊的子群。

问题 3.5。 找出 $\mathrm{SL}_3^m(\mathcal{O})$ 的一个非 thetyspectral 开子群。

显然，上述方法可用于尝试在其他一致 potent pro-p 群中获得 thetyspectral 子群。一个非 thety-spectral 子群的例子见于 $\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})\ltimes\mathcal{O}^2$，具体见 第 5 节。

3.2。 **关于 potent 性的引理**。 为了证明 定理 1.1，我们需要证明 potent pro-p 群的某些子群仍然是 potent，从而可以使用定理 3.2。

引理 3.6。 设 G 是一个一致 *potent pro-p* 群。设 H 和 $K\leq G$ 是两个闭 *potent* 子群。那么 $H\cap K$ 是 *potent*。

证明。 一般而言， $\gamma_{p-1}(H\cap K)\leq\gamma_{p-1}(H)\cap\gamma_{p-1}(K)$。由于 H 和 K都是强势的，这意味着 $\gamma_{p-1}(H\cap K)\leq H^p\cap K^p$。强势的 pro-$p$群具有唯一的 p^{th}次根，因此 $H^p\cap K^p=(H\cap K)^p$。证明至此结束。□

引理 3.7。 设 $\mathfrak{g}$是一个 $\mathcal{O}$-李格， m 对 $\mathfrak{g}$适当可容许，且 $\sigma\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{p}^m\mathfrak{gl}_n$ 是一个忠实的 $\mathcal{O}$-李同态。设 χ 是群 $\mathcal{O}^n$ 的一个不可约复表示，且 $G=\exp\mathfrak{p}^m\mathfrak{g}$。在 G 通过 $\exp\circ\sigma\circ\log$ 作用于 不可约表示集$(\mathcal{O}^n)$ 时， χ 的稳定子 $\mathrm{Stab}_G(\chi)$是一致 *potent* 的。

证明。 令 $S=\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n^m(\mathcal{O})}(\chi)$。我们将证明 S 是一致强力的，因此特别是一致 potent；由此根据 定理 3.6 ，$\mathrm{Stab}_G(\chi)=S\cap G$ 也是一致 potent。

群 Irr($\mathcal{O}^n$) 同构于所有 p-幂阶单位根构成的 Prüfer群的 n^{th} 直积幂 $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$，并且每个 GL$_n(\mathcal{O})$-轨道都包含形如 $(z,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)$ 的元素，其中 $z \in \mathbb{C}_{p^\infty}$。如有必要，将 σ 替换为 $g \mapsto (g^\sigma)^h$，并将稳定子替换为它在某个 $h \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ 下由 h 共轭得到的子群，我们可以假设 χ等价于给定形式的一个元素。令 $p^k = q$ 为 z的阶。显然， k^{th} 主合同子群稳定 $(z,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)$；因此 S是一个有限指数子群。此外，在 $k < m$ 的情况下， $S = \mathrm{GL}_n^m(\mathcal{O})$ 是强势的。否则，简单计算可得， S 是 $\mathrm{GL}_n^m(\mathcal{O})$ 中形如以下形式的元素集合

$$s = \begin{pmatrix} 1+\pi^k a & \pi^k x \\ \pi^m y^\intercal & M, \end{pmatrix},$$

对于 $a \in \mathcal{O}$, x， $y \in \mathcal{O}^{n-1}$ 和 $M \in \mathrm{GL}_{n-1}^m(\mathcal{O})$。可以看出

$$S = \mathrm{GA}_{n-1}^m(\mathcal{O}) \cdot T^k.$$

这里，一般仿射群 $\mathrm{GA}_{n-1}^m(\mathcal{O})$ $=\mathrm{GL}_{n-1}^m(\mathcal{O}) \ltimes \pi^m \mathcal{O}^{n-1}$ 的主合同子群由以下形式的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^m y^\intercal & M \end{pmatrix},$$

其中 $y \in \mathcal{O}^{n-1}$ 且 $\mathrm{GL}_{n-1}^m(\mathcal{O})$，而 T^k 表示由以下形式的矩阵构成的阿贝尔群

$$\begin{pmatrix} 1+\pi^k\,\mathcal{O} & \pi^k x \\ 0 & \mathrm{Id}_{(n-1)\times(n-1)} \end{pmatrix},$$

其中 $x \in \mathcal{O}^{n-1}$。 m^{th} 一般仿射群的主合同子群是一个强力群与一个阿贝尔正规子群的半直积，因此根据 定理 2.4它是强力群。设 g， $h \in \mathrm{GA}_{n-1}^m(\mathcal{O})$ 且 a， $b \in T_k$，则

$$[ga, hb] = [g,b]^a [g,h]^a [a,h]^b.$$

考虑奇素数 p 的情形。由于 $\mathrm{GA}_{n-1}^m(\mathcal{O})$ 是强力群，中间项包含于 $\mathrm{GA}_{n-1}^m(\mathcal{O})^p \le S^p$。另外两项包含于 $[\mathrm{GL}_n^m(\mathcal{O}),\ \mathrm{GL}_n^k(\mathcal{O})] \le \mathrm{GL}_n^{k+m}(\mathcal{O})$，而后者包含于 $\mathrm{GL}_n^{k+1}(\mathcal{O}) = \mathrm{GL}_n^k(\mathcal{O})^p \le S^p$。因此， S 中的每个换位子都包含于 S^p，且 S 是强力群。对于 $p = 2$，证明类似。□

3.3. **半直积的表示ζ函数的乘积公式**。 现在我们能够证明主要结果。

定理 *1.1* 的证明。 设 $\mathcal{X}$ 是 H-轨道 $\mathrm{Irr}(\mathcal{O}^n)$的代表元集合。根据 定理 2.1， G 的所有不可约表示都由代表元 $\chi \in \mathcal{X}$ 以及稳定子群 S_χ 的不可约表示参数化：$= \mathrm{Stab}_H(\chi)$的不可约表示，其中 $\chi \in \mathcal{X}$，且它们具有如下形式

$$\mathrm{Ind}_{S_\chi \ltimes V}^G(\mathrm{Inf}_{S_\chi}^{S_\chi \ltimes V}(\tau) \otimes \mathrm{Ext}_V^{S_\chi \ltimes V}(\chi))$$

对于某个 τ ∈不可约表示集(S_χ)。此类表示的维数由乘积 $|H\colon S_\chi| \cdot \dim(\tau)$ 给出。因此

$$r_n(G) = |\operatorname{Irr}_n(G)| = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N} \\ ab=n}} \sum_{\substack{\chi\in\mathcal{X} \\ |H:S_\chi|=a}} r_b(S_\chi).$$

根据 定理 3.7 群 S_χ 是一致 potent 原p 群，因此 定理 3.3推出 $r_b(S_\chi) = |H : S_\chi| \cdot r_b(H)$。

现在，对于每个 $\chi \in \mathcal{X}$，我们可以关联 $|H : S_\chi|$维表示$\mathrm{Ind}_{S_\chi \ltimes \mathcal{O}^n}^{G}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}^n}^{S_\chi \ltimes \mathcal{O}^n}(\chi))$。根据 定理 2.2，这些恰好是 $|H : S_\chi|$维不可约成分$\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{1}_H)$ 的，因此

$$r_n(G) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ ab=n}} \sum_{\substack{\chi\in\mathcal{X}\\ |H:S_\chi|=a}} a \cdot r_b(H) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\ ab=n}} r_a(G,H) \cdot a \cdot r_b(H).$$

我们看到，数列 $r_n(G)$ 是由算术数列 $a\cdot r_a(G,H)$ 与 $a \in \mathbb{N}$，以及 $r_b(H)$ 与 $b \in \mathbb{N}$ 的狄利克雷卷积得到的。因子 a 对应于数列 $r_a(G,H)$ 的狄利克雷生成函数中的平移，即 $\sum_{a\in\mathbb{N}} r_a(G,H)\cdot a \cdot a^{-s} = \zeta_H^G(s-1)$。由于狄利克雷卷积的生成函数是相应生成函数的乘积，证明至此完成。□

4. 表示增长较大的一致 potent pro-P 群

总体策略。基于定理 1.1，我们现在着手证明定理 1.2 和定理 1.3。设 m 对 $\mathfrak{sl}_2(\mathcal{O})$ 适当可容许，并设 $\varphi\colon \mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O}) \to \mathrm{GL}_n^m(\mathcal{O})$ 是 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 的忠实 $\mathcal{O}$ 表示，使得半直积 $G = \mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O}) \ltimes V \cong \mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O}) \ltimes_\varphi \mathcal{O}^n$ 是 FAb，其中 V 是由 φ 定义的 $\mathcal{O}$-模。我们需要计算形如 $\zeta^G_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}(s)$ 的相对表示ζ函数。设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ 为 $\mathcal{O}$-李格，使得如定理 2.5 所述，$G = \exp(\mathfrak{p}^m\mathfrak{g})$，其中 $V = \exp(\mathfrak{p}^m\mathfrak{v})$ 且 $H = \mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O}) = \exp(\mathfrak{p}^m\mathfrak{h})$。使用定理 2.6 中的术语，我们选取 $\mathfrak{v}$ 的一组基 $\mathfrak{X}$，以及 $\mathfrak{h}$的一组基 $\mathfrak{Y}$。此外，令 $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y}$。给定 $n \in \mathbb{N}$和 i、$j \in [n]$，将 $\mathcal{O}$ 上仅在位置 (i,j) 处有一个非零元素 1 的 $n\times n$ 矩阵记作 $E_{i,j}^n$。本节中我们将始终采用这些记号约定，并按需作具体化处理。

由于计算时需要明确选取一组基，我们将群 G 表示如下。作为 $\mathfrak{sl}_2(\mathcal{O})$的一组基，我们固定以下元素

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

并令 $h = h^\varphi$，$e = e^\varphi$ 和 $f = f^\varphi$。

定理 1.2 和定理 1.3的证明。

定理 1.2 的证明。这里，$n \in \mathbb{N}$和 $\mathfrak{v} = \mathcal{O}^{2n}$。半直积 G_n 源自 $\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$ 自然作用的对角线，该作用自然地扩展为 $\mathfrak{h}$在 $\mathfrak{v}$ 上的作用，通过对所有 $x \in \mathfrak{h}$，$x^\varphi = \mathrm{diag}(x,\dots,x)$，且 m 对于 $\mathfrak{sl}_2(\mathcal{O})$是适当可容许的。$\mathfrak{v}$ 的自然基由 $\mathfrak{X} = \{u_i \mid i \in [n]\} \cup \{v_i \mid i \in [n]\}$ 给出，其中 $u_i = E_{2i-1,2n+1}^{2n+1}$ 和$v_i = E_{2i,2n+1}^{2n+1}$ 适用于 $i \in [n]$。容易验证，$\mathcal{O}^2 = \langle u_1, v_1\rangle$ 上的自然作用由 $h.u_1 = u_1, h.v_1 = -v_1, e.u_1 = 0, e.v_1 = u_1, f.u_1 = v_1, f.v_1 = 0$给出，因此我们需要考虑矩阵的子式

$$\mathrm{Com}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) = \begin{pmatrix} u_1 & -v_1 & u_2 & -v_2 & \cdots & u_n & -v_n \\ v_1 & 0 & v_2 & 0 & \cdots & v_n & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & v_2 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}^{\mathsf{T}},$$

这些子式在相差一个符号的意义下由下式给出

$$\{1\} \cup \{a \mid a \in \mathfrak{X}\} \cup \{ab \mid a, b \in \mathfrak{X}\} \cup \{\det(i,j) \mid i,j \in [n]\}$$
$$\cup \{a \det(i,j) \mid a \in \mathfrak{X}, i,j \in [n]\},$$

其中我们置 $\det(i,\ j) = u_i v_j - u_j v_i$。给定元素的最大范数从不会唯一地在某个一次单项式处取得。同样，只需考虑二次的非混合单项式，以及形如 $a\det(i,\ j)$ 的子式。因此，置

$$P_1 = \{x^2 \mid x \in \mathfrak{X}\}, \quad P_2 = \{a \det(i,j) \mid a \in \mathfrak{X}, i,j \in [n], i < j\};$$

然而，下面的集合稍后也会派上用场，

$$P_2' = \{\det(i,j) \mid i,j \in [n], i < j\}.$$

现在，我们将积分区域划分为若干适当的部分。首先注意到，最大值 $||\{1\} \cup P_1 \cup P_2||_{\mathfrak{p}}$ 恰好仅在 $\mathcal{O}^{2n}$ 上由 $|1|_{\mathfrak{p}}$ 取得，因此

$$\zeta^{G_n}_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}(s) = q^{2mn}\left(\int_{\mathcal{O}^{2n}\mathfrak{X}} |1|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w) + \int_{K^{2n}\mathfrak{X} \smallsetminus \mathcal{O}^{2n}\mathfrak{X}} \|(P_1 \cup P_2)(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w)\right).$$

根据我们的归一化选择，左侧积分的值为 1，而右侧积分的积分区域还可以进一步分解为集合 $F_j = \pi^{-j}(\mathcal{O}^{2n}\mathfrak{X} \smallsetminus \pi\mathcal{O}^{2n}\mathfrak{X})$，其中 $j \in \mathbb{N}$。在此，变量的最小赋值为常数，且等于 j，因此我们可以通过变量替换 $w \mapsto \pi^j w$进行归一化，从而得到

$$\int_{F_j} \|(P_1 \cup P_2)(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w) = |\pi^{2nj}|_{\mathfrak{p}} \int_{F_0} \|\pi^{-2j}(P_1 \cup \pi^{-j}P_2)(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w)$$
$$= (q^{n-1}t)^{2j} A(j),$$

其中

$$A(j) = \int_{F_0} \|(P_1 \cup \pi^{-j}P_2)(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w) = \int_{F_0} \|\{1\} \cup \pi^{-j}P_2'(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1}\, \mathrm{d}\mu(w).$$

这里，第二个等式源于以下事实：在 F_0 上至少有一个可逆变量 x，因此在集合 P_1 上取得的最大值始终等于 $|x|_{\mathfrak{p}} = |1|_{\mathfrak{p}}$；并且根据 $|a\det(i,j)|_{\mathfrak{p}} \leq |x\det(i,j)|_{\mathfrak{p}} = |\det(i,j)|_{\mathfrak{p}}$，$P_2$ 上的最大值等于 P_2' 上的最大值。

我们进一步将积分区域划分如下。令

$$I_k = \pi\,\mathcal{O}^{k-1}\mathfrak{X} \times \mathcal{O}\mathfrak{X} \setminus \pi\,\mathcal{O}\mathfrak{X} \times \mathcal{O}^{2n-k}\mathfrak{X}$$

对 $k \in [2n]$。显然，F_0 是所有 I_k（遍历 $k \in [2n]$）的并集。假设 $k = 2i-1$ 为奇数。在 I_k 上，将 u_i 替换为 $z_i = \det(i,j)$，其中 $j \in [n] \smallsetminus \{i\}$。为方便起见，令 $z_i = u_i$；关于在 p-进积分中的替换，参见 [17, 命题 7.4。1]。显然，相应雅可比矩阵的行列式的范数为 1。此外，集合 I_k 在该变换下保持不变。对于 l、$j \in [n] \smallsetminus \{i\}$ 且 $l \neq j$ 的情形，多项式 $\det(l,j)$ 可改写为

$$\det(l,j) = u_l v_j - u_j v_l = u_i^{-1}(z_j v_j - z_i v_l).$$

由于对于所有 $j \in [n]$ 都有 $v_j \in \mathcal{O}$，我们得到

$$|\det(l,j)|_{\mathfrak{p}} \leq \|\{z_l, z_j\}\|_{\mathfrak{p}}.$$

令 $\mathfrak{Z} = \{z_j \mid j \in [n] \smallsetminus \{i\}\}$ 和 $\mathfrak{X}' = \mathfrak{Z} \cup \{z_i\} \cup \{v_j \mid j \in [n]\}$。偶数 k 的情形可通过对变量 u_j 等进行变换，以类似方式处理。剩下的就是对每个 $k \in [2n]$ 求 I_k 上的积分，即

$$\mu(\pi\,\mathcal{O}^{\lfloor k/2 \rfloor} \times \mathcal{O} \smallsetminus \pi\,\mathcal{O}) \int_{(\pi\,\mathcal{O}^{\lceil k/2 \rceil - 1} \times \mathcal{O}^{n - \lceil k/2 \rceil})\mathfrak{Z}} \|\{1\} \cup \pi^{-j}\mathfrak{Z}(w)\|_{\mathfrak{p}} \mathrm{d}\mu(w).$$

对于奇数 k，我们看到第二个积分等于 $k+1$ 对应的积分，因此我们可以专注于

$$B_n(j,i) := \int_{(\pi\,\mathcal{O}^{i-1} \times \mathcal{O}^{n-i})\mathfrak{Z}} \|\{1\} \cup \pi^{-j}\mathfrak{Z}(w)\|_{\mathfrak{p}} \mathrm{d}\mu(w)$$

$i \in [n]$，因为

$$A(j) = \sum_{i=1}^{n} (1 - q^{-1})(q^{-i} + q^{1-i}) B_n(j,i) = \sum_{i=1}^{n} (1 - q^{-2}) q^{1-i} B_n(j,i).$$

为计算 $B_n(j,i)$，我们分别在 $\mathcal{O}^{n-1}\,\mathfrak{Z}$ 以及 $(\pi\,\mathcal{O}^{i-1} \times \mathcal{O}^{n-i}\,\mathfrak{Z})$ 的补集上对 $\|\{1\} \cup \pi^{-j}\mathfrak{Z}(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1}$ 进行积分，并取二者之差；得到

$$\begin{aligned}
\int_{\pi^j\,\mathcal{O}^{n-1}\,\mathfrak{Z}} \|1\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1}\,\mathrm{d}\mu(w) + \sum_{r=0}^{j-1} \int_{\pi^r(\mathcal{O}^{n-1} \smallsetminus \pi\,\mathcal{O}^{n-1})\mathfrak{Z}} \|\pi^{-j}\mathfrak{Z}(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1}\,\mathrm{d}\mu(w) \\
&= q^{-j(n-1)} + \left(1 - q^{-(n-1)}\right)(q^{-1}t)^j \sum_{r=0}^{j-1} (q^{(2-n)}t^{-1})^r \\
&= q^{-j(n-1)} \left(1 + \left(1 - q^{-(n-1)}\right) \frac{1 - (q^{(n-2)}t)^j}{1 - q^{(n-2)}t} q^{n-2}t\right),
\end{aligned}$$

并且，更直接地，

$$\int_{((\mathcal{O}^{i-1} \smallsetminus \pi\,\mathcal{O}^{i-1}) \times \mathcal{O}^{n-i})\mathfrak{Z}} \|\{1\} \cup \pi^{-j}\mathfrak{Z}(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1}\,\mathrm{d}\mu(w) = (1 - q^{1-i})(q^{-1}t)^j.$$

因此我们有

$$B_n(j,i) = q^{-j(n-1)} \left(1 + \left(1 - q^{-(n-1)}\right) \frac{1 - q^{j(n-2)}t^j}{1 - q^{(n-2)}t} q^{n-2}t\right) - (1 - q^{1-i})(q^{-1}t)^j.$$

综上，我们得到

$$\begin{aligned}
A(j) = q^{-j(n-1)} &\left(\frac{(1 - q^{-n})(1 - q^{-2})}{1 - q^{n-2}t}\right) \\
&- (q^{-1}t)^j \left(q^{-1} \frac{(1 - q^{-n})(1 - q^{1-n})(1 + q^{n-1}t)}{1 - q^{n-2}t}\right).
\end{aligned}$$

回到关于 $K^{2n} \smallsetminus \mathcal{O}^{2n}$ 的积分，我们得到其值为

$$\sum_{j=1}^{\infty} (q^{(n-1)}t)^{2j} A(j) = (1 - q^{-n}) \frac{q^2 + q^3 + (q^{n+1} - q^2)t - (1 + q^n)q^n t^3}{(1 - q^{(n-1)}t^2)(1 - q^{(2n-3)}t^3)} q^{n-4}t^2.$$

因此， G_n 的完整表示ζ函数等于

$$\zeta_{G_n}(s) = q^{2nm} \frac{(1 - (1 + q - q^n)t^2 - (1 - q^{n-1} + q^n)qt^3 + q^{n+1}t^5)}{(1 - q^{(n+1)}t^2)(1 - q^{2n}t^3)} \zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})(s)}. \qquad \square$$

定理 1.3 的证明。我们采用与前一个证明类似的方法，因此对计算过程作更简洁的描述。在本例中， $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{p}^m\,\mathcal{O}^2)^n \cong \mathcal{O}^{3n}$, $G_n = \mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O}) \ltimes V_n$， 且 m 对于 $\mathfrak{sl}_2(\mathcal{O})$是适当可容许的。$\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})$在对称平方上的作用，使分块对角矩阵$h = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_1)$ $e = \mathrm{diag}(e_1, \ldots, e_1)$以及表示 $\mathfrak{h}$的 $f = \mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_1)$具有以下分块，

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

将 $u_i = E_{3i-2,\ 3n+1}^{3n+1}$, $v_i = E_{3i-1,\ 3n+1}^{3n+1}$ 和 $w_i = E_{3i,\ 3n+1}^{3n+1}$记作 $i \in [n]$, 表示 $\mathfrak{X}$ 的 $3n$ 元素，这样做很有用。我们计算分块行矩阵

$$\mathrm{Com}(\mathfrak{g}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 0 & -2w_1 & \cdots & 2u_n & 0 & -2w_n \\ 2v_1 & w_1 & 0 & \cdots & 2v_n & w_n & 0 \\ 0 & u_1 & 2v_1 & \cdots & 0 & u_n & 2v_n \end{pmatrix}^{\intercal}.$$

忽略符号和 2 的幂次（由于假设 p 为奇数，它们不影响范数），子式集合为

$$\{ab \mid a, b \in \mathfrak{X} \cup \{1\}\} \cup \{u_i v_j w_l - u_l v_i w_j \mid i, j, k \in [n]\}$$
$$\cup \{a \det(i, j; r, s) \mid a \in \mathfrak{X} \cup \{1\}, i, j \in [n], r, s \in \{u, v, w\}\},$$

其中 $\det(i,\ j;\ r,\ s) = r_i s_j - r_j s_i$。与前面的证明完全相同，一次单项式、混合单项式，以及不带因子的形如 $\det(i,\ j; r,\ s)$ 的多项式，在表示ζ函数的计算中都不起作用。记 P 为上述子式集合，但不包括未混合的二次单项式。将 K^{3n} 划分为

$$K^{3n} = \mathcal{O}^{3n} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \pi^{-j}(\mathcal{O}^{3n})^{\times},$$

并将后几部分乘以 π^j 进行变换，我们得到

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}^{G_n}(s) &= q^{3mn} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\pi^{-j}(\mathcal{O}^{3n})^{\times} \mathfrak{X}} \|(\{x^2 \mid x \in \mathfrak{X}\} \cup P)(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w) \right) \\ &= q^{3mn} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} q^{j(3n-2)} t^{2j} C(j) \right), \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} C(j) &= \int_{(\mathcal{O}^{3n})^{\times} \mathfrak{X}} \|(\mathfrak{X}^2 \cup \pi^{-j} P)(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w) \\ &= \int_{(\mathcal{O}^{3n})^{\times} \mathfrak{X}} \|\{1\} \cup \pi^{-j} P(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w). \end{aligned}$$

我们进一步将积分域划分为 n 部分，方法是分离出变量的第一组三元组（u_k、 v_k、 w_k），其中 $k \in [n]$ 包含一个可逆元素，即划分为

$$I_k = (\pi\,\mathcal{O}^{3(k-1)} \times (\mathcal{O}^3)^{\times} \times \mathcal{O}^{3(n-k)}) \mathfrak{X}$$

对于 $k \in [n]$。考虑关于 I_k 的积分，并且不失一般性地假设 u_k可逆。对于每个 $a \in \mathfrak{X}$、每个满足 $i \neq j$的 i、$j \in [n]$，以及每个满足 $i \neq j$的 r、$s \in \{u, v, w\}$，对所有 $w \in I_k$，我们有

$$|a \det(i, j; r, s)(w)|_{\mathfrak{p}} \leq |\det(i, j; r, s)(w)|_{\mathfrak{p}}.$$

进行（线性）变量替换 $r_i \mapsto \tilde{r}_i = \det(k, i; u, r)$，其中 $i \in [n] \smallsetminus \{k\}$ 和$r \in \{v, w\}$。积分区域不变，且雅可比矩阵的行列式可逆。改写被积函数后，我们发现它是以下函数的范数的最小值

$$\begin{aligned}&\tilde{v}_i, \tilde{w}_i, \det(v_k, \tilde{w}_j), \det(u_i, \tilde{v}_j), \det(u_i, \tilde{w}_j), \det(\tilde{v}_i, \tilde{w}_j),\\ &u_i\tilde{v}_j\tilde{w}_l - u_l\tilde{v}_i\tilde{w}_j + u_iu_j \det(v_k, \tilde{w}_l) - u_iu_l \det(v_k, \tilde{w}_j),\end{aligned}$$

其中 $i, j, l \in [n] \setminus \{k\}$ 两两不同。比较范数可知，唯一相关的多项式是单项式 $\tilde{v}_i$ 和 $\tilde{w}_i$，其中 $i \in [n]\setminus\{k\}$。因此，我们可以考虑一组新的变量 $\mathfrak{Z} = \{z_1, \ldots, z_{2(n-1)}\}$，从而得到

$$\begin{aligned}C(j) &= (1 - \frac{1}{q^3}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^{k-1}} \int_{(\pi \mathcal{O}^{2(k-1)} \times \mathcal{O}^{2(n-k)})\,\mathfrak{Z}} \|\{1\} \cup \pi^{-j}\mathfrak{Z}(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-s-1} \mathrm{d}\mu(w)\\ &= (1 - \frac{1}{q^3}) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} B_{2n-1}(j, 2k+1),\end{aligned}$$

其中 $B_n(j, i)$ 是定理 1.2 的证明中定义并计算的表达式定理 1.2。因此，通过常规计算可得

$$\begin{aligned}C(j) =& q^{-2j(n-1)} \frac{(1 - q^{-3})(1 - q^{-n})(1 - q^{-1}t)}{(1 - q^{-1})(1 - q^{2n-3}t)}\\ &- q^{-j}t^j(1 - q^{-n})(1 - q^{1-n}) \left(q^{-1} \frac{(1 + q^{-1} + q^{-n}) + (1 + q + q^n)q^{n-2}t}{1 - q^{2n-3}t}\right),\end{aligned}$$

从而得到

$$\zeta^{G_n}_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}(s) = q^{3nm-2} \frac{(q - t)(1 - t)(t + q^n t^2 + q(1 + t)(1 + q^{n-2}t^2))}{(1 - q^{3n-3}t^3)(1 - q^n t^2)},$$

以及所述完整表示ζ函数的表达式。

最后，我们考察 $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$下半直积 $G = \mathrm{SL}_2^m(\mathbb{Z}_2) \ltimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z}_2^2)$的表示ζ函数。仿照奇数情形中的计算，计算过程之所以复杂，是因为必须追踪整除子式的 2 的幂次

$$\begin{pmatrix} 2u & 0 & -2w \\ 2v & w & 0 \\ 0 & u & 2v \end{pmatrix};$$

（相关）子式为 $\{1, 2u^2, 4v^2, 2w^2\}$，这里用到了以下事实：$||1,\ u,\ 2u^2||_2 = |1,\ 2u^2|_2$。变换 $v \mapsto 2v$ 得到积分

$$\begin{aligned}\zeta^G_{\mathrm{SL}_2^m(\mathbb{Z}_2)}(s) &= 2^{3m+1}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{-j}(\mathbb{Z}_2^3)^\times \mathfrak{x}} \|(\{1, 2u^2, v^2, 2w^2\})(w)\|_2^{-s-1}\mathrm{d}\mu(w)\right)\\ &= 2^{3m+1}\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{3j}(1-2^{-2})2^{(2j-1)(-1-s)} + (1-2^{-1})2^{2j(-1-s)-2}\right)\\ &= 2^{3m-1}\frac{(2-t)(2^3t + (2-t))}{1-2t^2},\end{aligned}$$

因此，G 的ζ函数由所述有理函数给出。

奇数情形与偶数情形之间的差异，源于所研究的李格的结构常数中包含素数 2。更一般地，对于李格，结构常数只涉及有限多个整数，因此差异只会出现在有限多个素数处。□

进一步讨论结果。

(1) 容易看出，计算不可约情形 $n = 1$ （见最后两个定理）无需使用 $\mathbb{Q}_p^d$的标准分解以外的任何论证，因为矩阵 3×3不存在非平凡的 A子式。 *(2)* 对于任何能够导出良定义且具有一致性（即仅以素数 p的多项式方式为变量）的ζ函数 $\zeta(s) = W(p,\ p^{-s})$，都可以考虑其约化泽塔函数 $\zeta^{\mathrm{red}}(s) := W(1,\ T)$，参见 [9]。由我们的公式可推出

$$\zeta^{\mathrm{red}}_G(s) = \zeta^{\mathrm{red}}_{\mathrm{SL}_2^m(\mathcal{O})}(s) = 1$$

对于 $G = \mathsf{SL}_2^m(\mathcal{O}) \ltimes \mathcal{O}^{2n}$ 和 $G = \mathsf{SL}_2^m(\mathcal{O}) \ltimes \mathsf{Sym}^2(\mathcal{O}^2)^n$，对任意 n。

(3) 与我们的例子相关的拓扑ζ函数，其定义见 [34]，为

$$\zeta^{\mathrm{top}}_G(s) = \frac{s(s+2)(6s-3n-1)}{(s-1)(2s-n-1)(3s-2n)}$$

对于 $G = \mathsf{SL}_2^m(\mathcal{O}) \ltimes \mathcal{O}^{2n}$ 和

$$\zeta^{\mathrm{top}}_G(s) = \frac{s(s+2)(3s-n-1)}{(2s-n-2)(s-n)}$$

对于 $G = \mathsf{SL}_2^m(\mathcal{O}) \ltimes \mathsf{Sym}^2(\mathcal{O}^2)^n$。

(4) 在这两种情况下，由 $\mathbb{F}_q$ 上的三阶子式定义的代数簇都可以证明在奇异原点之外是光滑的。因此，可以通过确定零点集的大小来进行另一种计算，并运用 Igusa 驻相公式，参见 [16]。

(5) 这些计算相对简单，但这具有迷惑性：即便是接下来最自然的例子 $\mathsf{Sym}^3(\mathcal{O}^2)$，计算起来也极为困难，这反映出零点集处处奇异。同样，混合表示 $\mathsf{Sym}^2(\mathcal{O}^2) \times \mathcal{O}^2$ 也需要复杂得多的计算，因为奇异轨迹并非平凡。

5. 一个非 thetyspectral 子群

最后，作为定理 3.3 和定理 3.4 的对应结果，我们构造了 $G = \mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O}) \ltimes \mathcal{O}^2$ 的一个非 thetyspectral 子群。为求简便，我们令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{Z}_p$ 的非分歧扩张，且其剩余类域的基数为 q，其中 q 是奇素数 p的幂。在一般情形下（但仍假设 p为奇数，否则还需考虑结构常数），我们可以通过引入额外参数 m 进行类似计算，以确保 $\mathcal{O}$-李格确实具有许可性。令 χ_k 为 $\mathcal{O}^2 = \langle u, v\rangle$ 的不可约表示，它将 u 映到一个本原 $p^{k\text{th}}$ 次单位根，其中 $k \in \mathbb{N}$，并将 v映到 1。根据定理 3.7，稳定子 $S_k = \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})}(\chi_k)$ 是 $\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})$ 的一致强幂子群。令 $H_k = S_k \ltimes \mathcal{O}^2$，根据定理 2.4，它是一个一致强幂群。

考虑上一节中由元素 $h, e, f, u,$和 v生成的 $\mathcal{O}$-李格 $\mathfrak{g}$；使得 $G = \exp(p\mathfrak{g})$。令 $\mathfrak{s}_k$ 为由元素 $p^k h, e$和 $p^k f$ 生成的 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathcal{O}$- 李子格，并令 $\mathfrak{h}_k$ 由元素 $p^k h, e, p^k f, u$ 和 v生成。则 $S_k = \exp(p\mathfrak{s}_k)$ 且 $H_k = \exp(p\mathfrak{h}_k)$。为简单起见，我们假设 p 为奇数。

命题 5.1. 对于每个 $k \neq 0$，有限指数子群 $H_k \leq \mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O}) \ltimes \mathcal{O}^2$ 都不是 *thetyspectral*，其表示ζ函数为

$$\zeta_{H_k}(s) = q^{2k+2} \frac{(1-t)((1-(qt)^{k+1}) + qt^2(1-(qt)^{k-1})}{(1-qt)^2(1+qt)} \cdot \zeta_{\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})}(s).$$

证明。 根据 定理 1.1 和 定理 3.3，我们得到

$$\zeta_{H_k}(s) = \zeta_{S_k}^{H_k}(s-1) \cdot \zeta_{S_k}(s) = |\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O}) : H_k| \cdot \zeta_{S_k}^{H_k}(s-1) \cdot \zeta_{\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})}(s).$$

根据其李格的描述，很容易看出 S_k 在 $\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})$ 中的指数为 q^k。接下来只需按照上一节所述的步骤计算 $\zeta_{S_k}^{H_k}$。部分交换子矩阵为

$$\begin{pmatrix} p^k u & -p^k v \\ v & 0 \\ 0 & p^k u \end{pmatrix}$$

子式的集合（相差一个符号）为

$$\mathrm{Min}(A) = \left\{1, p^k u, v, p^k v, p^k uv, p^{2k}u^2, p^k v^2\right\}.$$

经过变换 $u \mapsto p^k u$后，描述 $\zeta_{S_k}^{H_k}$的积分为

$$\zeta_{S_k}^{H_k}(s) = q^{k+2} \int_{\mathbb{Q}_p^2 \mathfrak{x}} \|(\{1, u, v, uv, u^2, p^k v^2\})(w)\|_{\mathfrak{p}}^{-1-s} \mathrm{d}\mu(w).$$

多项式 u无关紧要。比较其余多项式的赋值后，我们确定，范数在区域 $\mathcal{O}^2$内由 1 取得最大值，在 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} p^{-m}\mathcal{O}^\times \times p^{-m}\mathcal{O}$内由 u^2取得最大值，在 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} p^{-m}\mathcal{O}^\times \times p^{-m-k}\mathcal{O} \smallsetminus p^{-m+1}\mathcal{O}$内由 uv 取得最大值，在 $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} p^{-m}\mathcal{O} \times p^{-m-k}\mathcal{O}^\times$内由 $p^k v^2$ 取得最大值，而在区域 $\mathcal{O} \times (p^{-k}\mathcal{O} \smallsetminus p\mathcal{O})$内由 v 取得最大值。

这些区域彼此重叠。我们将 K^2 划分为若干区域，在每个区域上，某个固定多项式取得最大范数，参见图 1进行对比，使得完整积分等于各部分积分之和。

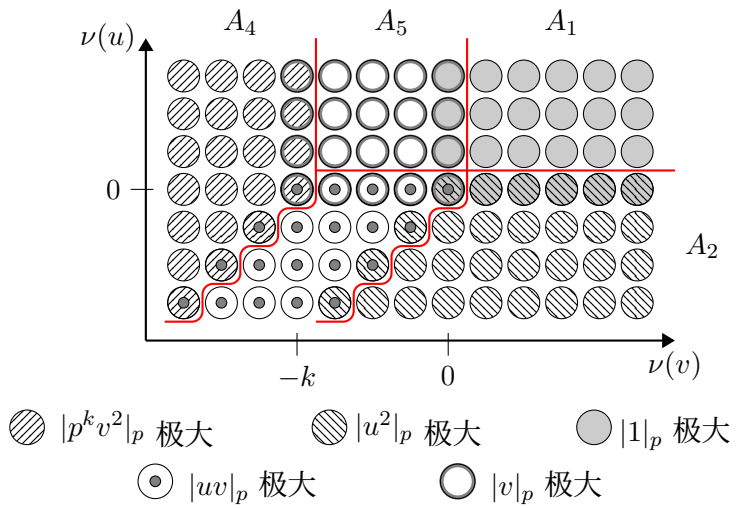

图1. 用于划分 K^2 的示意图，该划分用于证明定理 5.1，展示了 $k=4$的情形。每个圆表示一个赋值向量固定的集合，即形如 $p^a\,\mathcal{O}^\times \times p^b\,\mathcal{O}^\times$ 的 K^2。

区域 A_1，其中 $|1|_p$ 取最大值，定义为 $p\,\mathcal{O}^2$，因此

$$\int_{A_1} |1|_p^{-1-s}\mathrm{d}\mu(w) = q^{-2}.$$

区域 A_2 定义为 $\bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} p^{-j}\,\mathcal{O}^\times \times p^{-j+1}\,\mathcal{O}$，使得

$$\begin{aligned}\int_{A_2} |(u^2)(w)|_p^{-1-s}\mathrm{d}\mu(w) &= \sum_{j=0}^{\infty}\int_{p^{-j}\,\mathcal{O}^\times \times p^{-j+1}\,\mathcal{O}} |u^2(w)|_p^{-1-s}\mathrm{d}\mu(w)\\ &= q^{-1}\frac{(1-q^{-1})}{1-t^2}.\end{aligned}$$

令

$$A_3 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} p^{-j}(\mathcal{O}^\times \times p(p^{-k}\,\mathcal{O}\smallsetminus\mathcal{O})),$$

并得到

$$\int_{A_3} |uv(w)|_p^{-1-s}\mathrm{d}\mu(w) = \sum_{j=0}^{\infty}(1-q^{-1})t^j\sum_{l=0}^{k-1}\int_{p^{-j-l}\,\mathcal{O}^\times} |v(w)|_p^{-1-s}\mathrm{d}\mu(v)$$

通过变量分离法。计算剩余求和得到

$$\sum_{l=0}^{k-1}(1-q^{-1})t^{j+l} = (1-q^{-1})t^j\frac{1-t^k}{1-t}.$$

因此，对 A_3 的积分计算结果为

$$(1-q^{-1})^2\frac{1-t^k}{(1-t)(1-t^2)}.$$

第四个区域由 $A_4 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} p^{-j}(\mathcal{O}\times p^{-k}\,\mathcal{O}^\times)$ 定义，我们计算得

$$\int_{A_4} |(p^k v^2)(w)|_p^{-1-s}\mathrm{d}\mu(w) = \frac{(1-q^{-1})t^k}{1-t^2}.$$

最后，最后一个区域 $A_5 = p(\mathcal{O}\times(p^{-k}\,\mathcal{O}\smallsetminus\mathcal{O}))$ 的贡献为

$$\int_{A_5} |(v)(w)|_p^{-1-s}\mathrm{d}\mu(w) = q^{-1}\sum_{l=0}^{k-1}\int_{p^{-l}\,\mathcal{O}^\times} |(v)(w)|_p^{-1-s}\mathrm{d}\mu(w) = q^{-1}(1-q^{-1})\,\frac{1-t^k}{1-t}.$$

上述计算得到的五个积分之和可因式分解为

$$\zeta_{S_k}^{H_k}(s) = q^k\frac{(q-t)(q(1-t^{k+1})+t^2(1-t^{k-1})}{(1-t)^2(1+t)},$$

综上，我们有

$$\zeta_{H_k}(s) = q^{2k+2}\frac{(1-t)((1-(qt)^{k+1})+qt^2(1-(qt)^{k-1})}{(1-qt)^2(1+qt)}\cdot\zeta_{\mathrm{SL}_2^1(\mathcal{O})}(s).$$

注意，取决于 k 模 2，分子分别可被 $(1-qt)$ 和 $(1-(qt)^2)$整除。对于 $k=0$，我们得到在 $n=1$ 情形下计算出的相对表示ζ函数，见 定理 1.2。

因此， H_k 的子群 G 不是 thetyspectral。事实上，相应ζ函数的商为

$$\frac{\zeta_{H_k}(s)}{\zeta_G(s)} = q^{2k}\frac{((1-(qt)^{k+1})+qt^2(1-(qt)^{k-1})}{(1+t)(1-qt)}.$$

同样，分子实际上可被 $(1-qt)$ 整除。 □

参考文献

[1] Avraham Aizenbud 和 Nir Avni。《模空间中局部系统的表示增长与有理奇点》。《数学新进展》，204(1):245–316，2016年。（引自第2页）。[2] Nir Avni、Benjamin Klopsch、Uri Onn 和 Christopher Voll。《关于群的表示ζ函数及 Larsen–Lubotzky 猜想》。《数学报告》，348 367，2010 7 8 363 3 (-): – 。（引自第 页）。[3] Nir Avni、Benjamin Klopsch、Uri Onn 和 Christopher Voll。《某些紧致 p-进解析群的表示ζ函数》。载于 Antonio Campillo、Gabriel Cardona、Alejandro Melle- Hernández、Wim Veys 和 Wilson Zúñiga-Galindo 编，《当代数学》第566卷，第295–330页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2012年。（引自第2、11页）。[4] Nir Avni、Benjamin Klopsch、Uri Onn 和 Christopher Voll。《紧致 p-进解析群与算术群的表示ζ函数》。《杜克数学杂志》，162(1):111–197，2013年。（引自第1、2、7、8、9页）。[5] Hyman Bass、Alexander Lubotzky、Andy R. Magid 和 Shahar Mozes。《刚性群的代数闭包》。《几何学献刊》，95(1):19–58，2002年。（引自第1、8页）。[6] Nero Budur。《有理奇点、箭图矩映射与曲面群表示》。《国际数学研究通告》，2021(15):11782–11817，2021年。（引自第2页）。[7] Marc Burger。《S L$_3(\mathbb{Z})$ 的 Kazhdan 常数》。《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal），1991(413):36–67，1991年。（引自第3页）。[8] P. de la Harpe 和 A. Valette。《局部紧群的性质 (T)》。《Astérisque》，175，1989年。（引自第3页）。[9] Anton Evseev。《李代数的约化ζ函数》。《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal），633:197–211，2009年。（引自第19页）。[10] Gerald B. Folland。《抽象调和分析教程》。《高等数学研究》。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，1995年。（引自第6页）。

[11] William Fulton 和 Joe Harris。《表示论》，数学研究生教材第129卷。Springer New York，纽约，纽约州，1991年。（引自第2页）。[12] Jon González-Sánchez。《关于 p-可饱和群》。《代数学杂志》，315(2):809–823，2007年。（引自第7页）。[13] Jon González-Sánchez。《 p-群与 pro-p 群的 Kirillov轨道方法》。《代数通讯》，37(12):4476–4488，2009年。（引自第8页）。[14] Jon González-Sánchez、Andrei Jaikin-Zapirain 和 Benjamin Klopsch。《FAb 紧致 p-进李群的表示ζ函数在 -2 处为零》。《伦敦数学学会通报》，46(2):239–244，2014年。（引自第10、11页）。[15] Jon González-Sánchez 和 Benjamin Klopsch。《小维数解析 pro-p 群》。《群论杂志》，12(5)，2009年。（引自第7、8页）。[16] Jun-Ichi Igusa。《 p–进积分的驻相位公式及其应用》。载于《代数几何及其应用》（西拉法叶，），第175–194页。Springer，纽约，1994年。（引自第19页）。[17] Jun-Ichi Igusa。《局部ζ函数理论导论》，AMS/IP高等数学研究第14卷。美国数学会，International Press，普罗维登斯，罗得岛： [剑桥，马萨诸塞州], 2000。（引自第8、15页）。[18] Andrei Jaikin-Zapirain。《紧致 p-进解析群的表示ζ函数》。《美国数学会杂志》，19(1):91–118，2005年。（引自第1、2、9、11页）。[19] D. A. Kazhdan。《群的对偶空间与其闭子群结构的联系》。《泛函分析及其应用》，1(1):63–65，1967年。（引自第3页）。[20] Steffen Kionke 和 Benjamin Klopsch。《与紧致 p-进李群的容许表示相关的ζ函数》。《美国数学学会汇刊》，372(11):7677–7733，2019年。（引自第1、4、5、6、8、9页）。[21] Gundel Klaas、Charles R. Leedham-Green 和 Wilhelm Plesken。《有限宽度线性 Pro-p 群》，数学讲义第1674卷。Springer 柏林-海德堡，柏林，海德堡，1997年。（引自第11页）。[22] Benjamin Klopsch。《具有线性子群增长的 Pro-p 群》。《数学杂志》，245(2):335–370，2003年。（引自第11页）。[23] Benjamin Klopsch。《 p-进解析群的李理论》。《数学杂志》，249(4):713–730，2005年。（引自第7页）。[24] Benjamin Klopsch。《群的表示增长与表示ζ函数》。《数学笔记》，33(1):107–120，2013年。（引自第1页）。[25] Michael Larsen 和 Alexander Lubotzky。《线性群的表示增长》。《欧洲数学学会杂志》，第351–390页，2008年。（引自第1、2页）。[26] Michel Lazard。《 p-进解析群》。《高等科学研究院数学出版物》，26(26):389–603，1965年。（引自第7、8页）。[27] Alexander Lubotzky。《离散群、扩张图与不变测度》，数学进展第125卷。Birkhäuser Basel，巴塞尔，1994年。（引自第3页）。[28] Alexander Lubotzky 和 Dan Segal。《子群增长》。Birkhäuser Basel，巴塞尔，2003年。（引自第9页）。[29] George W. Mackey。《群扩张的酉表示。一》。《数学学报》，99(0):265–311，1958年。（引自第5页）。[30] Grigoriĭ Aleksandrovich Margulis。《扩展子图的显式构造》。《信息传输问题》，9(4):71–80，1973年。（引自第3页）。[31] Uri Onn、Amritanshu Prasad 和 Pooja Singla。《正特征下型A_2 群的表示ζ函数》。《国际数学研究通告》，2025(2):论文编号 rnae270，30，2025年。（引自第1页）。[32] Vladimir Platonov 和 Andrei Rapinchuk。《代数群与数论》。由 Rachel Rowen 从1991年俄文原版翻译，纯粹数学与应用数学第139卷。Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，波士顿，1994年。（引自第2页）。[33] Carl Riehm。《 p-进除环的范数1群》。《美国数学杂志》，92(2):499–523，1970年。（引自第11页）。[34] Tobias Rossmann。《群、代数与模的拓扑ζ函数计算，I》。《伦敦数学学会会刊》，110(5):1099–1134，2015年。（引自第19页）。[35] Jean-Pierre Serre。《有限群的线性表示》。数学研究生教材第42号。Springer，纽约，纽约州，柏林-海德堡，1996年。（引自第5页）。

[36] Jean-Pierre Serre。 伽罗瓦上同调。Springer 数学专著。Springer，柏林-海德堡，2002年。（引用见第 5 页）。[37] A. Stasinski 和 C. Voll。幂零群的表示ζ函数与 B 型魏尔群的生成函数。《美国数学杂志》，136(2)：501–550，2014年。（引用见第 1 页）。[38] Alexander Stasinski 和 Michele Zordan。紧致 p-进解析群的表示ζ函数的有理性，2020年。 arXiv.2007.10694。（引用见第 1 页）。[39] Edward Witten。论二维量子规范理论。《数学物理通讯》，141(1)：153–209，1991年。（引用见第 1 页）。[40] Zezhou Zhang。 SL_2 639 281 326, 表示 2024 3 与相对性质 (T)。《代数学杂志》，：–。（引用见第 页）。[41] Michele Zordan。李格的庞加莱级数与算术群的表示ζ函数，2017年。 arXiv.1704.04165。（引用见第 2页）。

J. Moritz Petschick：数学系，比勒费尔德大学，D-33501 比勒-费尔德，德国电子邮箱地址：jpetschick@math.uni-bielefeld.de

Margherita Piccolo：数学研究所，哈根远程大学，58097 哈-根，德国电子邮箱地址：margherita.piccolo@fernuni-hagen.de