arXiv:2602.13037v1 [math.CO] 13 Feb 2026

平面图的正规着色与平方着色之间：困难性与极值图

Thomas Del´epine

LIRMM，蒙彼利埃大学，法国国家科学研究中心，法国蒙彼利埃

摘要

$(1^a,\ 2^b)$-COLORING 是将一个图的顶点集划分为 a个独立集和 b 2-独立集的问题。该问题最近由 Choi 和 Liu 提出。我们研究 $(1^a,\ 2^b)$-COLORING 的计算复杂性和极值性质。我们证明，即使限制在某些平面图类中，该问题仍是 NP-完全的；此外，我们还研究了当 a固定时 b 的极值，以及某些 $(a+1)$-可着色图类中的极值。特别地，我们证明 k-退化图是 $(1^k,\ 2^{O(\sqrt{n})})$-可着色的，三角形自由平面图是 $(1_2,\ \underline{2}^{O(\sqrt{n})})$-可着色的，而平面图是 $(1_3,\ 2^{O(\sqrt{n})})$-可着色的。所得的所有上界在常数因子意义下都是紧的。

1 引言

图 G的色数记作 $\chi(G)$，是满足以下条件的最小整数 k： G 的顶点集可以划分为 k 个独立集。计算图的色数是图论中历史最悠久、研究最广泛的问题之一，既可以从算法角度研究，也可以从结构角度研究。这两个视角带来了许多著名成果，例如，即使在 $k=3$ 且对于平面图 [15], 的情况下， k-着色 [19] 也是 NP-完全的；又如四色定理 [2, 3, 25]指出，每个平面图的色数至多为 4。然而，由于需要研究的情形数量众多，关于后一个结果，目前已知的证明都需要计算机辅助；尚无无需计算机辅助即可验证的四色定理组合证明。近年来，人们开始关注四色定理的变体，更确切地说，是五色定理的加强形式。例如，文献 [18] 证明，对于阶为 n 的任意平面图，都可以进行 5-着色，使得至少有一个颜色类的大小至多为 $n/6$；这优于鸽巢原理给出的 $n/5$下界。尽管这一结论远弱于四色定理，其证明并不需要计算机辅助。

四色定理还给出了平面图中最大独立集大小的最佳可能下界 G，其阶为 $\alpha(G) \geq n/4$；当图为 K_4的不交并时，该下界可以达到。目前尚无独立于四色定理的该下界证明；已知的独立于四色定理的最佳下界是文献 [10]给出的 $\alpha(G) \geq 3n/13$。

色数的一种变体是 2-距离色数，记作 $\chi_2(G)$。该概念由 Kramer 和 Kramer 于 1969年在 [20], 中提出，并定义为满足以下条件的最小整数 k：图 G的顶点集可以划分为 k个二独立集。对于给定的图 G，判定$\chi_2(G) \leq k$ 是否成立的问题称为 2-DISTANCE k-COLORING。已证明，对 [26]中的每个 $k \geq 4$，该问题都是 NP-完全的。事实上，[26]中给出了一个更一般的结果，涉及 d-DISTANCE k-COLORING：当 $k > \lfloor 3d/2 \rfloor$ 时，该问题是 NP-完全的；当 $k \leq \lfloor 3d/2 \rfloor$时，则是多项式时间可解的。Wegner 于 1977年在 [29] 中提出的一个关于平面图中 χ_2 取值的猜想引起了广泛关注：

猜想 1 (Wegner [29], 1977)。对于每个平面图 G,

- $\chi_2(G) \leq 7$ *if* $\Delta(G) = 3$,
- $\chi_2(G) \leq \Delta(G) + 5$ *if* $4 \leq \Delta(G) \leq 7$,
- $\chi_2(G) \leq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor + 1$ *otherwise.*

注意，如果这个猜想成立，那么它是紧的。此后，[1] 和 [17] 证明，对于每个最大度为 Δ的图 G，当 Δ 趋于无穷时，$\chi_2(G) \leq (1 + o(1))3\Delta/2$。其他结果关注的是在最大平均度有界的平面图中对 χ_2 的界，而不是在最大度有界的平面图中对它的界。对于每个图G，$\chi_2(G) \geq \Delta(G)+1$是 χ_2 的一个简单下界。自 Wang 和 Lih 于2003年在 [28]中提出一个猜想以来，人们一直对该下界何时取等十分关注：

猜想 2 (Wang 和 Lih [28], 2003**).** 对于每个整数 $k \geq 5$，存在一个整数 $M(k)$，使得任何围长至少为 k 且最大度至少为 $M(k)$ 的平面图都满足 $\chi_2(G) = \Delta(G) + 1$。

这一猜想已在 $k \geq 7$ 中针对 [6, 7, 12, 13] 得到验证，并已被证明在 $k = 5$ 和 $k = 6$的情形下不成立，不过围长至少为 5 的平面图可以用至多 $\Delta + 2$ 种颜色进行 2-距离着色 [4]。关于距离为 2 的着色的最新综述，请参阅[9]。

鉴于 χ 和 χ_2都备受关注且十分重要，研究介于正常着色与2-距离着色之间的参数是很自然的。最近，Choi 和 Liu 在 [8] 中引入了$(1^a, 2^b)$-着色的概念，旨在将一个图划分为至多 a 个独立集和至多 b 2-独立集。换言之，$(1^a, 2^b)$-着色旨在用 a 个距离-*1*颜色（彼此距离为1的两个顶点不能使用相同的距离-1颜色）和 b 个距离-*2*颜色（彼此距离至多为2的两个顶点不能使用相同的距离-2颜色）为图着色。当 $b = 0$时，这一概念恰好就是a-着色；当 a等于0时，这一概念恰好就是2-距离 b-着色。在他们的研究中，Choi 和 Liu 聚焦于稀疏图的$(1^a, 2^b)$-着色（以及列表着色

版本的$(1^a,\ 2^b)$-着色），并针对固定的 a，给出了最大平均度有界或亏格有界的图要成为$(1^a,\ 2^b)$-可着色图时 b的取值界。他们还证明了其他结果，其中包括:

定理3 (Choi 和 Liu [8], 2025)。 对于每个平面图 G,

- 若 G 的围长至少为7，则 G 是$(1_2,2_{12})$-可着色的，并且
- 若 G 的围长至少为8，则 G 是$(1_2,2_2)$-可着色的，并且
- 若 G 的围长至少为10，则 G 是$(1_2,2_1)$-可着色的。

他们还构造了一个围长为 7 且不能（$1^2, 2^1$）-着色的平面图，以及围长为 6、对每个 k 都不能 $(1_2, 2^k)$-着色的平面图。

在他们工作的基础上，我们继续研究（$1^a, 2^b$）-着色。在第 2 节中，我们证明（$1^a, 2^b$）-COLORING（判定给定图是否（$1^a, 2^b$）-可着色的问题），即使限制在平面图的各种子类中，也属于 NP-完全。更确切地说，我们的困难性结果分为三类。我们给出经典的 NP 困难性证明，表明对于某些 a 和 b 的取值，（$1^a, 2^b$）-COLORING 是 NP-完全的。我们还给出条件式 NP-完全性陈述，表明对于某些 a 和 b 的取值，（$1^a, 2^b$）-COLORING 在某些受限图类中是 NP-完全的，当且仅当存在一个满足某些结构约束且不能（$1^a, 2^b$）-着色的图。最后，在可能的情况下，我们给出间隙陈述。设 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 为两个集合，使得 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$，并且判定某个元素 e 是否属于 $\mathcal{S}$ 的问题是 NP-完全的。若即使额外知道 $e \in \mathcal{S}$ 或 $e \notin \mathcal{S}'$，判定某个元素 e 是否属于 $\mathcal{S}$ 的问题仍是 NP-完全的，则称 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{S}'$ 之间存在间隙。请注意，这种陈述比仅仅说判定某个元素 e 是否属于 $\mathcal{S}'$ 是 NP- 完全的更强。更确切地说，我们的结果如下:

- 对于每个 $k \in \{2,3\}$ 和 $g \geq 3$，即使限制为最大度为 $k+1$ 且围长至少为 g 的二分平面图，$(1_1,\ 2^k)$-COLORING 仍是 NP-完全问题（定理5和定理6），并且
- 对于每个 $k \geq 4$，即使限制为最大度为 $k+1$ 的二分平面图，$(1_1,\ 2^k)$-COLORING 仍是 NP-完全问题（定理8），并且
- 对于每个 $k \geq 1$，以及每个包含 P_2、P_5 和 P_8 的不交并的类 $\mathcal{C}$，判定一个平面图的顶点集能否划分为一个诱导出属于 $\mathcal{C}$ 的图的集合和 k 2 个独立集，或者该图是否不可 $(1_2,\ 2^k)$-着色，是 NP-完全问题（推论 10），并且
- 对于每个 $k \geq 1$和 $g \in \{3,4,5,6\}$，都存在一个由围长至少为 g 的二分平面图组成的有限集 $\mathcal{S}$，使得对于每个包含 $\mathcal{S}$中图的不交并的图类 $\mathcal{C}$，判定围长至少为 g 的平面图的顶点集能否划分为一个诱导出来自 $\mathcal{C}$ 的图的顶点集以及 k 2-独立集的问题是 NP-完全的（推论12）；判定该图是否不是 $(1_2,\ 2^k)$-可着色的问题也是 NP-完全的，并且

- 判定平面图是否为 3-可着色，或是否不是 $(1_3, 2_1)$-可着色，是 NP-完全的（定理14）；并且
- 对于每个 $k \geq 1$，即使限制为最大度为 $3k+4$ 的平面图，$(1_3, 2^k)$ -COLORING 仍是 NP-完全问题（定理 15）。

接着，在第 3 节中，我们研究 $(1^a, 2^b)$-着色的极值。对于某些图类 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathrm{ex}^a_{\mathcal{C}}(n)$ 记为最小整数 b，使得 $\mathcal{C}$ 中每个阶为 n 的图都是 $(1^a, 2^b)$-可着色的；我们尝试为满足 $\mathrm{ex}^a_{\mathcal{C}}(n)$ 次线性的 $(a+1)$-可着色图图类 $\mathcal{C}$，求出 $\mathrm{ex}^a_{\mathcal{C}}(n)$ 的上下界。我们成功证明了：

- 每个 k-退化图都是 $(1^k, 2^{O(\sqrt{n})})$-可着色的（定理21），并且
- 每个围长至少为 4 的平面图都是 $(1_2, 2^{O(\sqrt{n})})$-可着色的（定理 29），并且
- 每个平面图都是 $(1_3, 2^{O(\sqrt{n})})$-可着色的（定理31）。此外，该证明不依赖四色定理。

此外，所有先前的界在常数因子范围内都是紧的。

2 NP-完全性

设 $(1^a, 2^b)$-COLORING 是将图的顶点集划分为 a 个独立集和 b 2 个独立集的问题。本节将证明 $(1^a, 2^b)$-COLORING 的若干变体的困难性结果。将颜色分配给每个顶点的映射具有多项式规模，而验证过程是一个简单的算法，用于检查每个顶点是否着色正确，因此其时间复杂度为多项式时间。因此，对于任意整数 a 和 b，$(1^a, 2^b)$-COLORING 属于 NP（无论 a 和 b 是否作为输入的一部分）。因此，接下来在每个 NP-完全性证明中，只需证明其为 NP-困难。通过归约，我们使用以下定义的不同 NP-完全问题：

- 3-COLORING：给定一个图 G，它是否可 G 3着色?
- （Δ_1，Δ_1）-COLORING：给定一个图 G，能否将其 G 染成两种颜色，使得每个颜色类诱导出的图的最大度为 1?
- RESTRICTED PLANAR 3-SAT：给定一个 3-CNF SAT公式 φ，满足– 每个子句的大小为 2 或 3，– 每个变量恰好以正文字出现两次、以负文字出现一次，– 变量-子句关联图是平面图。φ 该公式是否可满足？i

定理4。 以下算法问题是 *NP*-完全的：

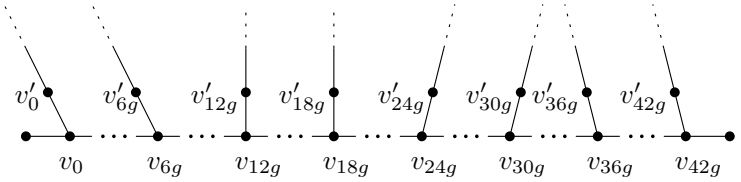


图1：定理5证明中使用的顶点构件。

- 3-COLORING，即使限定在最大度为4的平面图中也是如此（见 *[15]*）。

- （Δ_1, Δ_1）-COLORING，即使将范围限制为最大度为4 的无三角形平面图（见 *[23]*）。
- RESTRICTED PLANAR 3-SAT （见 *[11]*）。

可用$(1^2, 2^0)$着色的图构成二部图集合，可用$(1^1, 2^1)$着色的图构成星图的不交并集合，可用$(1^0, 2^2)$着色的图构成 K_1 和 K_2 的不交并集合，而可用$(1^0, 2^3)$着色的图构成路径和圈的不交并集合。因此，在所有这些情况下，$(1^a,\ 2^b)$-COLORING 属于P。另一方面，对于 $k \geq 4$，已知$(1_0,\ 2^k)$-COLORING 是NP-困难的（见 [14]）。在接下来的小节中，我们将证明，对于a 和 b 的其余取值，当 $a \leq 3$ 属于平面图的某些受限子类时，$(1^a,\ 2^b)$-COLORING 是NP-完全的。

2.1 $(1^1, 2^2)$-COLORING 大围长平面图中的

下文中，当我们添加 $k-1$ 个新顶点 $s_1, \ldots, s_{k-1}$，以及对于每个 $i < k-1$ 添加边 us_1、$s_{k-1}v$ 和 $s_i s_{i+1}$ 时，我们称之为用长度为 k 的路径连接两个顶点 u 和 v。

定理5。对于每个 $g \geq 3$，$(1^1, 2^2)$-COLORING 即使限制在最大度为 3 且围长至少为 g 的二分平面图上，仍然是 *NP*-完全的。

证明。根据定理4，我们将 (Δ_1, Δ_1)-COLORING归约为一个问题；已知该问题在最大度为4的无三角形平面图上是 NP-完全的。设 G 为一个最大度为4的无三角形平面图。我们通过对每个顶点 $v \in V(G)$ 添加一个路径图 $v_0, \ldots, v_{42g}$，由 G构造图 G'。然后，对于每个 $uv \in E(G)$，我们选择 i、$j \in \{0, 1, 2, 3\}$，使得能够分别用两条长度为9的路径将 u_{12ig}和$u_{(12i+6)g}$ 连接到 v_{12jg} 和 $v_{(12j+6)g}$，并以此方式保证整个过程结束时 G' 仍为平面图。最后，对于每个顶点$v \in V(G)$和每个整数 $i \in \{0, \ldots, 14g\}$，如果 v_{3i} 的度为2，则向其添加一条悬挂边。因此，对于每个顶点 $v \in V(G)$，v 在 G'中由图1中的图表示。注意，G' 是平面、二分的，最大度为3，且围长至少为 $12g + 18$。

- 如果 G 是（Δ_1，Δ_1）-可着色的，那么我们固定 G 的一个（Δ_1，Δ_1）-着色，并且对于每个顶点 $v \in V$（G），我们将 v 在（Δ_1，Δ_1）-着色中的颜色复制到

G 中为 v_0、v_3、……、v_{42g} 着色，并将所使用的两种颜色视为距离-2颜色。我们声称，G' 的这个部分 $(1^0, 2^2)$-着色可以扩展为 G'的一个 $(1^1, 2^2)$-着色。事实上，对于每个顶点 $v \in V(G)$，若 v 在 G中的邻点没有一个也被着为 c，那么我们可以将 G' 中每个度为 1 的顶点着为距离-1颜色，将 v_1、v_4、……、v_{42g-2} 着为距离-1颜色，将 v_2、v_5、……、v_{42g-1} 着为另一种距离-2颜色，并将 v'_0、v'_{6g}、……、v'_{42g} 着为距离-1颜色。否则，令 u 为 v 在 G 中唯一一个同样被着为 c的邻点，并且不失一般性地假设 u_{12ig} 与 v_{12jg} 相连，且 $u_{12i'g}$ 与 $v_{12j'g}$ 相连，其中 i、j、i'、j'为某些顶点。在这种情况下，我们可以将 u'_{12ig}和 $v'_{12j'g}$ 着为距离-1颜色，并将 v'_{12jg} $u'_{12i'g}$ 着为另一种距离-2颜色。其余顶点可以很容易地着色，从而得到 G'的一个 $(1^1, 2^2)$-着色。

- 如果 G' 是 (11, 22)-可着色的，那么固定一个 (11, 22)-着色。注意，对于每个顶点 $v \in V(G)$ 以及每个 i，$j \in \{0, 3, \ldots, 42g\}$ v_i 和 v_j 必须具有相同的距离 -2 颜色。此外，v'_0、v'_{6g}、……、v'_{42g}中至多有一个可以具有另一种距离-2颜色，因为一旦 v'_{6gi}（对于某个 i）被赋予一种距离-2颜色，就会迫使每个 $j \neq i$的 v'_{6gj} 具有相应的颜色。令$uv \in E(G)$，并令 i、j、i'、j' 满足：u_{12ig} 和 $u_{12i'g}$ 分别与 v_{12jg} 和 $v_{12j'g}$ 相连。那么，如果 u_0 和 v_0 具有相同的距离-2颜色，则 u'_{12ig} 和 $u'_{12i'g}$ 中必有一个具有另一种距离-2颜色；对于 v'_{12jg} 和 $v'_{12j'g}$，结论也类似，因为如果长度为 9 的路径的两个端点预先着上相同的距离-2颜色，且每个端点的邻点都预先着上距离-1颜色，那么这条路径就不是 (11, 22)-着色的。

  因此，对于每个满足 $u \neq w$ 的 $u, w \in N_G(v)$，如果 u_0 和 v_0 具有相同的距离-2颜色，那么 w_0 和 v_0 必须具有不同的距离-2颜色，因此 u_0 和 w_0 具有不同的距离-2颜色。所以，我们可以通过复制 G 中每个顶点 $v \in V(G)$ 的 v_0 的颜色，将 G 进行 (Δ_1, Δ_1)-着色。

因此，当且仅当 G' 可 $(1^1, 2^2)$-着色时，G 才可 (Δ_1, Δ_1)-着色。所以，即使将 $(1^1, 2^2)$-COLORING 限制为最大度为 3、围长至少为 g 的二分平面图，它仍然是 NP-完全的，其中每个 $g \geq 3$ 均满足此条件。 □

2.2 $(1^1, 2^3)$-COLORING 在大围长平面图中的情形

定理6。 *对于每个整数 $g \geq 3$，在最大度为 4 且围长至少为 g 的二分平面图上，$(1^1, 2^3)$-COLORING 是 NP-完全的。*

证明。 根据定理4，我们将已知即使在最大度为 4 的平面图上仍为 NP-完全的问题 3-COLORING 归约到此问题。设 G 为最大度为 4 的平面图。我们从 G 构造图 G'：对每个顶点 $v \in V(G)$，添加一条路径图 $v_0 \ldots v_{18g}$。然后，对于每条边 $uv \in E(G)$，我们选择 i、$j \in \{0, 1, 2, 3\}$，使得可以用一条长度为 2 的路径连接 u_{6i} 和 v_{6j}，并确保该过程结束时 G' 仍为平面图。最后，对于每个 $v \in V(G)$以及每个 $i \in \{0, \ldots, 18g\}$，如果 v_i 在 G' 中的度小于 4，我们就添加悬挂边，使 v_i 在 G' 中的度为 4。注意，G' 是平面二分图，最大度为 4，且围长至少为 $18g + 6$。

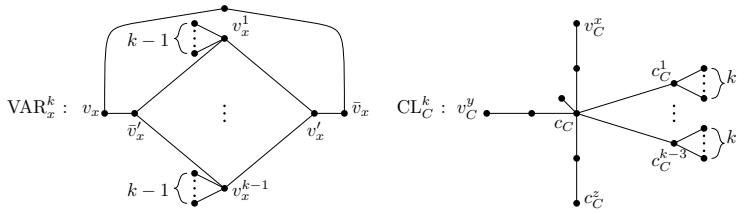


图2：证明定理8中使用的两个图。VAR_v^k 是 $(1_1,\ 2^k)$-可着色的，并且当且仅当 $\bar{v}$ 被赋予距离-1颜色时，v 才被赋予距离-1颜色；CL_C^k 是 $(1_1,\ 2^k)$-可着色的，并且 v_C^x、v_C^y、v_C^z 中至少有一个必须被赋予距离-2颜色。

- 如果 G 是 3-可着色的，那么设三种颜色为 1、2 和 3，并固定 G 的一个 3-着色。现在，对于每个颜色为 c 的 $v \in V(G)$，以及每个 $i \in \{0,\ldots,18g\}$，我们用距离-2颜色（$c+i$）模 3 对 v_i 着色。最后，我们用距离-1颜色对 G' 中其余尚未着色的顶点着色；这样得到的着色是 G' 的一个合法的 $(1_1,2_3)$-着色。

- 如果 G' 是 $(1_1,\ 2_3)$-可着色的，那么对于每个 $v \in V(G)$ 以及每个 $i \in \{0,\ldots,18g\}$的度为4，因此必须被赋予距离-2颜色。此外，对于每个 i，$j \in \{0, 6g, 12g, 18g\}$、$v_i$和 v_j必须具有相同的距离-2颜色。因此，对于每条边 $uv \in E(G)$，假设 u_{6i} 与 v_{6j} 之间存在一条长度为2的路径，则 u_{6i} 和 v_{6j} 不能被赋予相同的距离-2颜色。因此，将每个顶点$v \in V(G)$赋予 v_0 的颜色，即可得到 G的正常 3-着色。

因此，G 是3-可着色的，当且仅当 G' 是$(1^1, 2^3)$-可着色的，所以$(1^1, 2^3)$-COLORING 是NP-完全的，即使将其限制在最大度为4、围长至少为 g（对每个 $g \geq 3$）的二分平面图中也是如此。 □

2.3 $(1_1, 2^k)$-COLORING 平面图中的着色

引理7。 设 $k \geq 4$，并考虑图*2*中的图VAR_x^k 和CL_C^k。那么这两个图都是$(1_1, 2^k)$-可着色的，并且

1. 在VAR_x^k中，v_x 被赋予距离-*1*颜色，当且仅当 $\bar{v}_x$ 被赋予距离-*2*颜色；*2.* 在CL_C^k中，v_C^x、v_C^y 或 v_C^z 中至少有一个必须被赋予距离-*2*颜色。

证明。 容易看出，这两个图都是$(1_1, 2^k)$-可着色的。

1. 假设在 VAR 的一个 $(1_1, 2^k)$-着色中，^k_x、v_x 和 $\bar{v}_x$ 被赋予距离-1颜色，那么 v_x' 和 $\bar{v}_x'$ 必须被赋予距离-2颜色。此外，v_x^1，.....，v_x^{k-1}的度为 $k+1$，因此它们必须被赋予距离-2颜色。因此，我们有 $k+1$ 个彼此距离为 2 的顶点

，且它们必须被赋予距离-2颜色，这就产生了矛盾。另一方面，假设在 VAR 的一个 $(1_1,\ 2^k)$-着色中，^k_x、v 和 $\bar{v}_x$ 被赋予距离-2颜色。由于它们有一个公共邻点，因此它们必须使用不同的距离-2颜色。然而，它们的距离-2邻域中都有 $N(v'_x)$、$\cup N(\bar{v}'_x)$、$-v_x-\bar{v}_x$。因此，v_x 和 $\bar{v}_x$ 都只有一种可用的距离-2颜色，这就产生了矛盾。

2. 假设 CL^k_C 是可用 v^x_C、v^y_C 和 v^z_C 作为距离-1颜色进行$(1_1, 2^k)$-着色的。那么，v^x_C、v^y_C 和 v^z_C 的邻点必须使用距离-2颜色着色。由于 c_C 的度为 $k+1$，它必须使用距离-2颜色着色，$c^1_C, \ldots, c^{k-3}_C$ 也同样如此。但这样一来，$k+1$ 个彼此距离为2的顶点必须使用距离-2颜色着色，这就产生了矛盾。

□

定理8. 对于每个整数 $k \geq 4$，即使将范围限制为最大度为 $k+1$的二分平面图，$(1_1, 2^k)$-COLORING 仍然是*NP*-完全的。

证明。我们对 RESTRICTED PLANAR 3-SAT进行归约；根据定理4，已知它是NP-完全的。设 φ 是 RESTRICTED PLANAR 3-SAT的一个实例，G_φ是 φ的平面变量-子句关联图，也就是说，对于 φ的每个变量 x，G_φ 中都有一个顶点 v_x；对于 φ的每个子句 C，G_φ 中都有一个顶点v_C。此外，对于 φ 的每个子句 C 以及出现在 C中的变量 x，G_φ 都包含边 $v_x v_C$。令 G 为由 φ 和 G_φ 构成的图：对每个顶点 $v_x \in V(G_\varphi)$，取一份图2中的 VAR^k_x 副本；对每个顶点 $v_C \in V(G_\varphi)$，取一份图2中的 CL^k_C 副本；并且，对于 φ 的每个子句 C 以及出现在 C中的变量 x，若 x 在 C 中正向出现，则将 VAR^k_x 中的顶点 v_x 与 CL^k_C中的顶点 v^x_C 合并。否则，x 在 C 中负向出现，此时将 VAR^k_x 中的顶点 $\bar{v}_x$ 与 CL^k_C中的顶点 v^x_C 合并。由于φ 是 RESTRICTED PLANAR 3-SAT的一个实例，每个变量 x 正向出现两次、负向出现一次。注意，G 的最大度为 $k+1$；又由于 G_φ 是二分平面图，G也如此。

- 如果 φ 可满足，那么我们固定一个使φ成立的真值赋值。令 a 为距离-1颜色，令$1, \ldots, k$ 为 k 距离-2颜色。我们首先用 a给 G 中所有度为 1 的顶点着色。然后，对于 φ的每个子句C，我们用 $k-2$给 c_C着色；对于每个 $i \in \{1, \ldots, k-3\}$，我们用 i给c^i_C 着色。接着，如果变量 x 被赋值为 $false$，那么我们用 a给 v_x 和v'_x 着色。否则，我们用 a给 $\bar{v}_x$ 和 $\bar{v}'_x$ 着色；对于每个包含 x的子句 C，我们用 a给 CL^k_C 中与 v_x 相邻的度为 2 的顶点着色。现在考虑 $G[\cup_{C\in\varphi} V(\mathrm{CL}^k_C)]$, ，我们将给这个诱导子图中尚未着色的顶点着色。注意，对于 $G[\cup_{C\in\varphi} V(\mathrm{CL}^k_C)]$, 中每个未着色的顶点 v，其在 $G[\cup_{C\in\varphi} V(\mathrm{CL}^k_C)]$ 中的每个邻点都已着为距离-1颜色。因此，只需给 G^2着色即可；该图由 $G[\cup_{C\in\varphi} V(\mathrm{CL}^k_C)]$中所有尚未着色的顶点构造而成

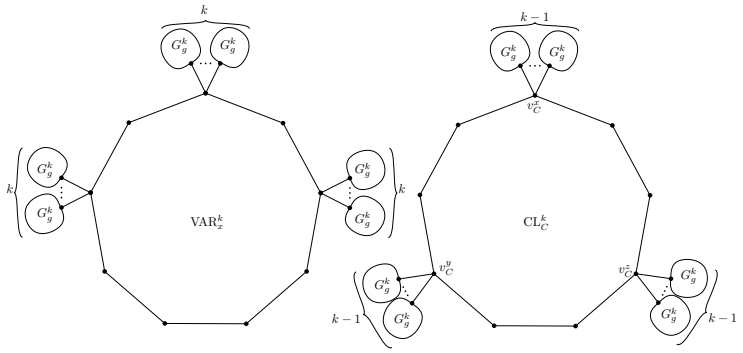


图 3：证明定理 9 中使用的变量构件和子句构件。

使得 uv 是一条边，当且仅当 u 和 v 在 $G[\cup_{C\in\varphi}V(\mathrm{CL}_C^k)]$中的距离为 2。考虑 G中的 v_x 。如果 x 被赋值为$false$，那么 G^2 中与 v_x 相邻的顶点尚未着色，并且只属于偶圈。事实上， $G[\cup_{C\in\varphi}V(\mathrm{CL}_C^k)]$ 中的每个圈的长度都模 4 同余于 0，因为 $G[\cup_{C\in\varphi}V(\mathrm{CL}_C^k)]$ 中的每个圈都是 G_φ 中某个圈的细分，而 G_φ 是二分图；此外，G^2 中与满足 x 被赋值为 $false$ 的顶点 v_x 相邻的顶点，正是这些细分中的顶点。因此，我们可以用两种距离-2颜色 $k-1$ 和 k给它们着色。最后，唯一尚未着色的顶点属于 VAR_x^k的副本。对于 φ中的每个变量 x ，若 x 被赋值为 $true$ ，则我们用颜色 1 给 v_x 和 v'_x 着色；否则，我们用颜色 1 给 $\bar{v}_x$ 和 $\bar{v}'_x$ 着色。然后，对于每个 $i \in \{1,\dots,k-1\}$，我们用 $i+1$给 v_x^i着色。最后，我们用颜色 2 给 v_x 和 $\bar{v}_x$ 的公共邻点着色。可以验证这种着色是有效的，因此我们如愿以偿地对 G 进行了$(11, 2^k)$-着色。

- 如果 G 是 $(1_1, 2^k)$-可着色的，那么我们固定 G的一个 $(1_1, 2^k)$-着色。对于 φ中的每个变量 x ，当且仅当 v_x 使用距离-2颜色着色时，我们将 x 设为真。假设这个真值赋值不满足 φ。那么存在一个只包含假文字的子句 C 。但是，这样一来， v_C^x、 v_C^y 和 v_C^z 都使用距离-1颜色着色，因此根据引理 13，CL_C^k 不是 $(1_1, 2^k)$，这就产生了矛盾。

因此， φ 可满足，当且仅当 G 是 $(1_1, 2^k)$-可着色的。由于 RESTRICTED PLANAR 3-SAT 是 NP-困难的，所以对于每个 $k \geq 4$，$(1_1, 2^k)$-COLORING 也是 NP-困难的，即使将范围限制为最大度为 $k+1$的平面图。 □

2.4 $(1_2, 2^k)$-COLORING 平面图中的

定理 9. 对于每个整数 $k \geq 1$、 $g \geq 3$，以及每个图类 $\mathcal{C}$，满足

- $\mathcal{C}$ 包含 P_2、 P_5 和 P_8，且

- $\mathcal{C}$ 中的每个图都是平面二分图，且
- $\mathcal{C}$ 在不交并下稳定，

如果存在一个围长至少为 g 的平面图 $H^{k,\mathcal{C}^g}$，它有一个顶点 s 使得

- 在 $H^{k,\mathcal{C}^g}$ 的任意$(1_2, 2^k)$-着色中， s 都使用距离-2颜色着色，并且
- $V(G^{k,\mathcal{C}^g})$ 可以划分为一个顶点集（其诱导子图属于 $\mathcal{C}$）和 k 2-独立集，

那么，判定一个围长至少为 g 的平面图 G 的顶点集能否划分为一个顶点集（其诱导子图属于 $\mathcal{C}$）和 k 2-独立集，或者该图是否不可$(1_2, 2^k)$-着色，是*NP*-完全的。

证明。我们将 RESTRICTED PLANAR 3-SAT归约到此问题；根据定理4，该问题已知为NP-完全。令 φ 为 RESTRICTED PLANAR 3-SAT 的一个实例，并令 G_φ为 φ 的平面变量-子句关联图。也就是说，对于 φ的每个变量 x， G_φ 都包含一个顶点 v_x；对于 φ的每个子句 C， G_φ 都包含一个顶点v_C。此外，对于 φ 的每个子句 C 以及出现在 C中的变量 x， G_φ 都包含边 $v_x v_C$。令 H^{k}、$_{\mathcal{C}^g}$ 为一个图，使得 H^k存在一种$(12, 2^k)$-着色$_{\mathcal{C}^g}$，且 H^k中使用距离-1颜色着色的顶点$_{\mathcal{C}^g}$ 诱导出一个属于 $\mathcal{C}$的图；并且存在一个顶点 $s \in V(H^{k},_{\mathcal{C}^g})$，使得对于 H^k的每一种$(12, 2^k)$-着色$_{\mathcal{C}^g}$， s 都使用距离-2颜色着色。我们由 G_φ 和 H^k构造图 G 如下：

- 对于 φ 的每个变量 x，我们添加一个图 VAR_x^k 的副本，如图 3 所示，并且
- 对于每个包含变量 x、 y 和 z 的子句 C，我们添加图 3 中的构件 CL_C^k，并且
- 对于仅包含两个文字的每个子句，例如 x 和 y，我们添加图 3 中 CL_C^k 的一个副本、 $H^{k,\mathcal{C}^g}$ 的一个副本，并用一条边 v_C^z 将其连接到 $H^{k,\mathcal{C}^g}$ 的副本中的顶点 s。
- 最后，对于每个子句 C 和其中出现的每个顶点 x，如果 x 在 C 中以正文字出现，则我们用一条边将顶点 v_x 连接到顶点 v_x^C；否则，我们用一条边将顶点 $\bar{v}_x$ 连接到顶点 v_x^C。

注意到，由于 H^{k}、$_{\mathcal{C}^g}$、VAR_x^k 和 CL_C^k 都是平面图，且 G_φ 是 φ的变量-子句关联图，而 φ是 RESTRICTED PLANAR 3-SAT的一个实例，因此G 是一个平面图。根据定理3，每个围长至少为10的平面图都是（$1^2, 2^1$）-可着色的，因此我们可以假设 $g \leq 9$，于是 VAR_x^k 和 CL_C^k 可以包含长度为9的圈，所以 G 的围长也至少为 g。此外，注意到 VAR_x^k 和 CL_C^k 都是（1_2、2^k）-可着色的，并且在 VAR_x^k 的任意（1_2、2^k）-着色中， v_x 被着为距离-1颜色当且仅当 $\bar{v}_x$ 被着为距离-2颜色，因此我们可以对 VAR_x^k 进行（1_2、2^k）-着色，使得被着为距离-1颜色的顶点所诱导出的

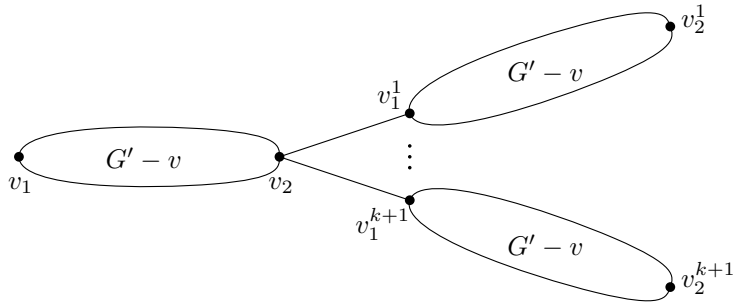
图是一个 P_8。类似地，在 CL_C^k的任意（1_2、2^k）-着色中，v_C^x、v_C^y 或 v_C^z 中至少有一个被着为距离-2颜色，因此我们可以对 CL_C^k 进行（1_2、2^k）-着色，使得被着为距离-1颜色的顶点所诱导出的图是不交并 P_2、P_5 和 P_8。

- 若 φ 可满足，那么固定 φ中变量的一个满足真值赋值。对于每个变量 x，若将 x 赋值为真，则用距离-1颜色为v_x 着色，并用距离-2颜色为 $\bar{v}_x$ 着色。否则，用距离-2颜色为 v_x 着色，并用距离-1颜色为 $\bar{v}_x$ 着色。接着，我们可以轻松扩展这个部分着色：交替使用两种距离-1颜色为长度为 9 的圈中的未着色顶点着色，从而得到一个 P_8，其使用两种距离-1颜色着色；然后为 $H^{k,\mathcal{C}\,g}$ 的副本着色，使得由距离-1颜色着色的顶点诱导出一个来自 $\mathcal{C}$的图。由于每个子句都可满足，因此每个子句必定有一个值为真的文字。若该文字是 x，则顶点 v_C^x 与v_x 之间有一条边相连，而v_x 本身已经着有距离-1颜色。因此，有一种可用的距离-2颜色可用于为 v_C^x着色。同理，若该文字是 $\neg x$，则 v_C^x 与 $\bar{v}_x$ 之间有一条边相连，而 $\bar{v}_x$ 本身已经着有距离-1颜色。因此，有一种可用的距离-2颜色可用于为v_C^x着色。因此，在 CL_C^k的每个副本中，v_C^x、v_C^y 或 v_C^z 中至少有一个着有距离-2颜色，所以我们可以轻松扩展当前的部分 $(12, 2^k)$-着色，为 CL_C^k 的每个副本着色，因为长度为 9 的圈中尚未着色的顶点所诱导的图是不交并，其中的各部分为 P_2、P_5 或 P_8。最后，对于每个仅含两个文字的子句，我们需要为 $H^{k,\mathcal{C}\,g}$ 的副本着色，该副本从 s 到 v_C^z 相连；这是可行的，因为有一种距离-2颜色可用于为 s着色。因此，G 是 $(12, 2^k)$-可着色的，而两种距离-1颜色所诱导的图是不交并，其中各部分为 P_2、P_5、P_8 以及来自 $\mathcal{C}$的图。

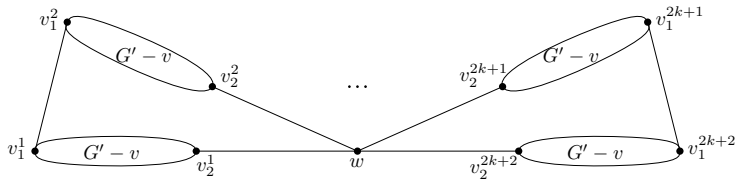
- 如果 G 是 $(1_2, 2^k)$-可着色的，那么我们固定 G的一个 $(1_2, 2^k)$-着色。于是，对 φ的每个变量 x，当且仅当 v_x 被赋予一个距离-1颜色时，我们就将 x 设为真。根据先前的观察，对于每个子句 C，以及 G的任意一个 $(1_2, 2^k)$-着色，都存在一个出现在 C 中的变量 x，使得 v_C^x 被赋予一个距离-2颜色。如果 x 在 C中正向出现，那么 v_C^x 与 v_x 之间有一条边相连，此时 v_x 必须被赋予一个距离-1颜色，因此 C 得到满足。否则，v_C^x 与 $\bar{v}_x$之间有一条边相连，因此 $\bar{v}_x$ 必须被赋予一个距离-1颜色。因此，v_x 必须被赋予一个距离-2颜色，而 x 被赋为假。由于 x 在 C中负向出现，C 得到满足。因此，φ 的每个子句都得到满足，φ也因此得到满足。

因此，φ 可满足，当且仅当 G 是$(1_2,\ 2^k)$-可着色的。因此，判定围长至少为 g 的平面图的顶点集能否划分为一个诱导出来自 $\mathcal{C}$ 的图的顶点集和 k 2-独立集，或者是否不是$(1_2,\ 2^k)$-可着色的，是 NP-完全的。

□



(a) 对于命题的证明中.....的情况，由 $k+2$ $G'-v$ $\mathcal{S}=\{c,[1,\ldots,k]\times [1,\ldots,k]\}$ 11 1^2 2^k v_2 个.....副本构造的图。在该图的任何(，)-着色中，必须用距离-1颜色着色；因此，如果我们给 v_1 和v_2添加一个公共邻点，就归结为 $\mathcal{S}=\{[1,\ldots,k]\times[1,\ldots,k]\}$的情况。



(b) 对于 $c\in\mathcal{S}$ 的情形，由 $2k+2$ 个 $G'-v$ 副本构造的图，且存在 $(S,\ S')\in\mathcal{S}$，其中包含 $|S'|<k$；见命题 11 的证明。在该图的任意 $(1_2,\ 2^k)$-着色中，w 必须着为距离-2颜色。

图 4：由 $G'-v$ 的副本构造并用于命题 11 证明中的两个图。

推论 10。对于每个整数 $k\geq 1$，判断一个平面图的顶点集是否可以划分为一个诱导子图为 P_2 不交并的顶点集，以及 P_5 和 P_8 个 k 2-独立集，或者该图是否不可 (2^k)-着色，这是 *NP* 完全问题。

证明。考虑一个由 $k+1$ 个 K_3 副本和一个特殊顶点 s 构成的图 G，其中 s 已与每个 K_3 中恰好一个顶点合并。通过为 s 选择任意一种距离-2颜色，并对其余顶点进行 2-着色，可以对该图进行 $(1^2,2^1)$-着色，因此，着为距离-1颜色的顶点诱导出 P_2 的不交并。现在假设 s 着为距离-1颜色。那么，每个 $k+1$ 三角形都必须包含一个不同于 s 且着为距离-2颜色的顶点。由于该图的直径为 2，因此得到矛盾。因此，我们可以将定理 9 应用于 $g=3$ 和 $\mathcal{C}=\{P_2,P_5,P_8\}$，从而得出结论。□

下面的命题给出了定理 9 适用的一个等价条件。

命题 11。 对于任意整数 $k \geq 1$ 和 $g \geq 3$，存在一个围长至少为 g 的$(1_2, 2^k)$-可着色图 G，其中有一个顶点 s，使得在 G的任何$(1_2, 2^k)$-着色中，s 必须使用一种距离-2颜色，当且仅当存在一个围长至少为 g 且不可$(1_2, 2^k)$-着色的图 G'。

证明。 一方面，设 G 是一个围长为 g 的 $(1_2, 2^k)$-可着色图，并且有一个特殊顶点 s，使得在 G 的任意 $(1_2, 2^k)$- 着色中，s 都必须着成一个距离 -2 颜色。我们从 $k+1$ 个 G的副本出发构造图 G'，将它们的特殊顶点分别重命名为 $s_1, \ldots, s_{k+1}$，然后添加一个与 $s_1, \ldots, s_{k+1}$相邻的顶点 v。顶点 $s_1, \ldots, s_{k+1}$ 都必须着成距离-2颜色，但它们彼此之间的距离均为 2，因此 G' 不是 $(1_2, 2^k)$-可着色的。

另一方面，若 $g \leq 6$，则考虑取自 [8]的图2的图 $F_3(u; k)$。该图的围长为 6，是 $(12, 2^k)$-可着色的，并且在 $F_3(u; k)$的每一种 $(12, 2^k)$-着色中，u 都必须着成一个距离-2颜色。否则，假设 $g \geq 7$，那么设 G' 是一个围长为 7、不可 $(12, 2^k)$-着色的平面图，且满足每个 G' 的真子图都是 $(12, 2^k)$-可着色的。由于 G' 的围长为 7，它是 2-退化的。注意，由极小性可知，G' 的最小度为 2，因此令 $v, v_1, v_2 \in V(G')$ 满足 $N_{G'}(v) = \{v_1, v_2\}$。为了使 G'不可 $(12, 2^k)$-着色，$G' - v$ 的任何 $(12, 2^k)$-着色都必须产生以下某种障碍，从而阻止将其扩展为 G' 的 $(12, 2^k)$-着色。下文中，我们称 $1, \ldots, k$ 为 k 距离-2颜色。

- (B_c)：v 的两个邻点被着成相同的距离-2颜色。
- $(B_{S_1,\ S_2})$，$S_1,\ S_2 \subseteq [1, \ldots, k]$ 与 $|S_1 \cup S_2| = k$：v_1 和 v_2 被着成不同的距离-1颜色，而 S_1（分别是 S_2）恰好是用于着色 v_1（分别是 v_2）的邻点的距离-2颜色集合。

设 $\mathcal{S} \subseteq$ {c}∪{$(S_1,\ S_2)$: $S_1,\ S_2 \subseteq [1, \ldots, k]$ 和 $|S_1 \cup S_2| = k$}。我们将事件（B_c是 G' 的$(1_2,\ 2^k)$-着色的一个障碍）记作（$B_{\mathcal{S}}$），当且仅当 $e \in \mathcal{S}$。因此，我们需要证明，对于 $\mathcal{S}$的每个可能取值，G 都存在。

- 若 $\mathcal{S} = \{c\}$，那么在每个 $(1_2, 2^k)$-着色中，$G' - v$、v_1 和 v_2 必须使用距离-2颜色着色，因此我们可以取 $G = G' - v$ 和 $s = v_1$ 或$s = v_2$。

- 若 $\mathcal{S} = \{[1, \ldots, k] \times [1, \ldots, k]\}$，那么我们通过取 $G' - v$的一个副本，并添加顶点 v_1' 及边 v_1v_1'、v_2' 及边 v_2v_2'，以及s 及边 $v_1's$ 和 $v_2's$，来构造 G。将 $G' - v$的任意 $(1_2, 2^k)$-着色扩展为 G的一个 $(1_2, 2^k)$-着色很容易。此外，对于 $G' - v$的任意 $(1_2, 2^k)$-着色，v_1 和 v_2 使用不同的距离-1颜色着色，因此在 G 的任意 $(1_2, 2^k)$-着色中，v_1' 和 v_2' 也使用不同的距离-1颜色着色，所以 s 必须使用距离-2颜色着色。

- 若 $c \notin \mathcal{S}$，则我们可以假设 $\mathcal{S} - ([1, \ldots, k],\ [1, \ldots, k]) \neq \emptyset$ 否则我们就处于前一种情形。无损一般性地，假设存在

$(S_1,\ S_2) \in \mathcal{S}$ 满足 $|S_2| < k$。我们用 $G' - v$ 的两个副本构造图 G。接着，在 v_1 的两个副本之间添加一条边，并加入一个新顶点 s，使其与 v_2 的两个副本相邻。由于 $c \notin \mathcal{S}$，v_1 的两个副本和 v_2 的两个副本都必须用距离-1颜色着色。但由于 v_1 的两个副本彼此相邻，它们必须使用不同的距离-1颜色。因此，v_2 的两个副本也必须使用不同的距离-2颜色，所以在 G 的任意 $(1_2,\ 2^k)$-着色中，s 必须具有一种距离-2颜色。注意，容易对 $G-s$ 进行 $(1_2,\ 2^k)$- 着色。此外，由于我们假设 $|S_2| < k$，使用相同的一组距离 -2颜色为 $G'-v$ 的两个副本着色时，至少有一种距离-2颜色可用于给 s 着色；并且对于 $G - s$ 的任意 $(1_2,\ 2^k)$-着色，情况也是如此。

- 如果 $\mathcal{S} = \{c, [1,\ldots,k] \times [1,\ldots,k]\}$，那么考虑图 4a 中的图：该图由 $k+2$ 个 $G' - v$ 的副本构造而成（并将 $k+1$ 个 v_1和 v_2 重命名为 v_1^1、.....、v_1^{k+1}和 v_2^1、.....、v_2^{k+1}），然后对每个 i 于 $\{1,\ldots,k+1\}$添加边 $v_2v_1^i$。由于我们可以使用事件（$B_{[1,\ldots,k]\times[1,\ldots,k]}$）的 $(12, 2^k)$-着色为每个 $G' - v$的副本着色，因此该图是 $(12, 2^k)$-可着色的。现在，对于该图的任意 $(12, 2^k)$-着色，必然存在$i \in \{1,\ldots,k+1\}$，使得 v_1^i 被赋予距离-1颜色。但这样一来，它的邻域中必须包含其副本 $G' - v$内出现的全部距离-2颜色。因此，v_2 必须被赋予距离-1颜色，v_1 也同样如此。此外，在这个新图的每个 $(12, 2^k)$-着色中，v_1 和 v_2 的邻域必须包含全部 k 距离-2颜色。因此，我们可以像在 $\mathcal{S} = \{[1,\ldots,k] \times [1,\ldots,k]\}$ 情形中那样继续操作：添加路径 $v_1v_1'sv_2'v_2$，其中 v_1'、s 和 v_2' 是新顶点，并且 s必须被赋予距离-2颜色。

- 最后，$c \in \mathcal{S}$ 并且存在（$S_1,\ S_2$）$\in \mathcal{S}$，满足 $|S_1| < k$ 或$|S_2| < k$。不妨设存在（$S_1,\ S_2$）$\in \mathcal{S}$，满足 $|S_2| < k$，并考虑图 G：该图由图 4b 中的 $2k+2$ 个 $G' - v$ 副本构成（在第 i个副本中，v_1 和 v_2 已分别重命名为v_1^i 和 v_2^i），再添加一个新顶点 s 以及对每个$i \in \{1,\ldots,2k+2\}$添加边 sv_2^i。最后，对于每个 $i \in \{1,\ldots,k+1\}$，我们在 v_1^{2i-1}和 v_1^{2i}之间添加一条边。通过对除 $i \in \{1,\ldots,k+1\}$以外的每个 $G' - v$ 副本复制情形（$B_{S_1},\ S_2$）的（$12,\ 2^k$）-着色，并在 $i \in \{1,\ldots,k+1\}$时，将$2i-1$个 $G - v$ 副本的（$12,\ 2^k$）-着色和$2i$个 $G - v$副本的（$12,\ 2^k$）-着色中的两个距离-1颜色的作用互换，G 是（$12,\ 2^k$）-可着色的。于是，由于我们假设 $|S_2| < k$，s必然存在一种可用的距离-2颜色。现在，对于 G的任意（$12,\ 2^k$）-着色，必然存在 $i \in \{1,\ldots,k+1\}$，使得 v_2^{2i-1}和 v_2^{2i}都具有距离-1颜色；在这种情况下，v_1^{2i-1}和 v_1^{2i}也都具有距离-1颜色，并且由于 G中 v_1^{2i-1}和 v_1^{2i}之间存在一条边，它们的颜色必然不同。因此，v_2^{2i-1}和 v_2^{2i}具有不同的距离-1颜色，所以 s 必须使用距离-2颜色着色。

注意，在前面的所有情形中，由于 G' 的围长至少为 g，因此 $G' - v$ 中 v_1 与 v_2 之间的距离至少为 $g - 2$。因此，在每种情形下，

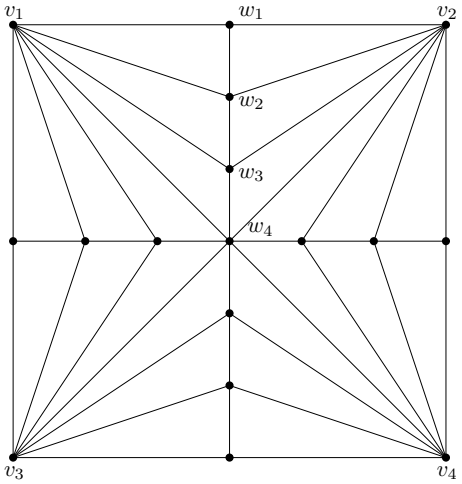


图 5：在定理14的证明中用于表示顶点 v 的顶点构件。

构造出的图 G 的围长也至少为 g。因此，对于 $\mathcal{S}$ 的每个可能取值，都存在一个具有所需性质的图 G。 □

推论12。 对于任意整数 $k \geq 1$, $g \in \{3,4,5,6\}$，存在一个由围长至少为 g 的二分平面图组成的有限集$\mathcal{S}$（$\mathcal{S}$ 的大小以及 $\mathcal{S}$ 中元素的大小仅取决于 k 和 g），使得判定围长至少为 g 的平面图的顶点集能否划分为一个顶点集（其诱导子图是 $\mathcal{S}$ 中的图的不交并）和 k 2-独立集，或者该图是否不可$(1_2, 2^k)$-着色的问题是 *NP*-完全。

证明。 在 [8], 的图2中给出了一个围长为 6、对于每个 $k \geq 0$均不可 $(1_2, 2^k)$-着色的图的构造，因此我们可以应用命题 11 和定理 9 得出结论。 □

如定理3所述，每个围长至少为7的平面图都是（$1^2, 2^{12}$）-可着色的，每个围长至少为8的平面图都是（$1^2, 2^2$）-可着色的，而每个围长至少为10的平面图都是（$1^2, 2^1$）-可着色的。因此，我们可以给出一个类似于推论12的陈述，其中包含 $g = 7$ 和某个 $k \leq 11$，或者 $k = 2$ 和某个 $g \in \{8, 9\}$，但这些值的确切取值尚未确定。

2.5 （$1^3, 2^1$）-COLORING 平面图中的着色

引理 13. 令 G 为图 *5*中的图。那么 G 是（$1^3, 2^0$）-可着色的，并且在 G的每一种（$1^3, 2^1$）-着色中，v_1、v_2、v_3 和 v_4 要么具有相同的距离-*1*颜色，要么其中三个具有相同的距离-*1*颜色，而第四个具有距离*2*顶点。

证明。 注意，在 v_1、v_2、v_3 和 v_4中，至多一个顶点可以使用距离-2颜色。假设 G的两个相邻角使用了

不同的距离-1颜色，那么不失一般性地，设v_1 和 v_2 使用了不同的距离-1颜色。于是 w_1w_2、 w_2w_3 或w_3w_4 中至少有一个，其两个端点都使用了距离-1颜色，此时便会出现一条单色边。因此，在图 5 所示的图的$(1_3, 2^k)$-着色中，这种情况不可能发生。剩下的情况是 G的两个相对角使用了不同的距离-1颜色，此时不失一般性地，设 v_1 和 v_3使用了不同的距离-1颜色。那么 v_2 和 v_4 中至多一个使用距离-2颜色，因此 v_2 或 v_4 中至少有一个使用了与 v_1 或 v_3 的距离-1颜色不同的距离-1颜色，所以我们必然处于前一种情况。

□

定理14。 给定一个平面图 G，它要么是 *3*-可着色的，要么不是$(1^3, 2^1)$-可着色的，判定 G 是否为 *3*-可着色是 *NP*-完全的。

证明。 我们将 3-COLORING 归约到此问题；根据定理4，已知该问题在最大度为 4 的平面图上是 NP-完全的。设 G 是一个最大度为 4 的平面图。我们由 G 构造图 G'： 对于每个顶点 $v \in V$ （G），复制图 5 中的图，并将其角顶点标记为 v_1、 v_2、 v_3 和 v_4；对于每条边 $uv \in E$（G），从 v 的顶点构件中选取一个 v_iv_{i+1} 面，从 u 的顶点构件中选取一个 u_ju_{j+1} 面，并将边 v_iu_{j+1}、 $v_{i+1}u_j$ 和 v_iu_j 添加到 G'。注意，由于 G 是平面图，在每一步操作中，都可以选择 i 和 j，使得 G' 也是平面图。

- 如果 G 是 3-可着色的，那么对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们将 v_1、 v_2、 v_3 和v_4 染成与 v相同的颜色。剩余的图可以仅用距离-1颜色唯一着色。

- 另一方面，如果 G' 是 $(1_3,2_1)$-可着色的，那么根据引理 13，对于每个顶点 $v \in V(G)$， v_1、 v_2、 v_3 和 v_4 中至多有一个顶点被染成距离-2颜色，其余顶点则具有相同的距离-1颜色。此外，对于每条边 $uv \in E(G)$，设 i、 j 满足 v_iu_{j+1}、 $v_{i+1}u_j$ 和 v_iu_j 是G'中的边。那么 v_i、 v_{i+1}、 u_j 和 u_{j+1} 中至多有一个顶点被染成距离-2颜色。因此，用于给 v 的顶点构件的角顶点着色的距离-1颜色，必须不同于用于给 u的顶点构件的角顶点着色的距离-1颜色。因此，复制这些颜色即可得到 G的一个正常 3-着色。

最后，如果 G' 是（$1^3, 2^1$）-可着色的，那么可以观察到，G' 的每个顶点在其邻域中都无法看到 3 种不同的距离-1颜色，因此每个被距离-2颜色着色的顶点都可以重新着成距离-1颜色，所以 G'是（$1^3, 2^1$）-可着色的，当且仅当它是 3-可着色的。

□

2.6 平面图中的（$\mathbf{1}(1_3, 2^k)$-COLORING

定理 15. 对于每个整数 $k \geq 1$，$(1_3, 2^k)$-COLORING 即使限制为最大度为 $3k + 4$ 的平面图，仍然是 *NP*-完全。

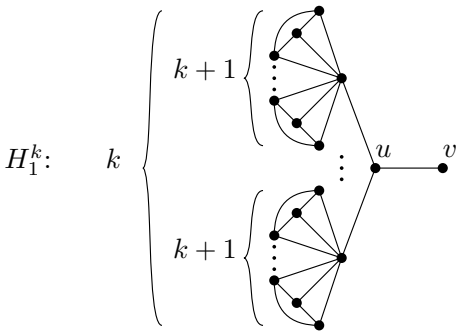


图 6：定理 15 证明中使用的小工具。在 H_1^k 两者 u 和 v都必须使用距离-1颜色着色。

证明. 根据定理4，我们将一个已知即使限制为最大度为 4 的平面图仍为 NP-完全的问题归约到 3-COLORING。考虑图 H_1^k（见图 6），那么在任何 $(1_3, 2^k)$-着色中，u 和 v 都必须着成距离-1颜色。事实上，可以观察到，$N(u)$ 中的任意顶点都必须着成距离-2颜色，而 $|N(u)$ 也是如此，因此 u 和 v没有可用的距离-2颜色。令 G 为一个最大度为 4 的平面图。我们从 G 的一个副本出发构造图 G'，并对每个顶点 $w \in V(G)$，添加一个 H_1^k的副本，并将 w 与 v合并。注意，G' 是一个最大度为 $3k+4$ 的平面图。

- 如果 G 是 3-可着色的，那么对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们将 v 在 G' 中使用相同的距离-1颜色着色。根据前面的观察，对 G' 的这种预着色可以扩展为 $(1_3, 2^k)$-着色。
- 如果 G' 是 $(1_3, 2^k)$-可着色的，那么根据前面的观察，G' 中对应于 G 中某个顶点的每个顶点都使用了距离-1颜色着色。因此，G' 的 $(1_3, 2^k)$-着色诱导出 G的 3-着色。

因此，G 是 3-可着色的，当且仅当 G' 是 $(1_3, 2^k)$-可着色的；所以，即使限制在最大度为 $3k+4$ 的平面图上，$(1_3, 2^k)$-COLORING仍是 NP-完全的。 □

请注意，由于以下著名的 Gr¨otszch 定理，我们无需考虑围长较大的平面图。

定理 16 (Gr¨otszch [16, 27], 1959)。 每个无三角形平面图都是3可着色的。

3 所需距离-2颜色数量的极值

在本节中，对于固定的 a，我们关注将阶为 n 、满足某些

结构约束的图染成 ($n \in \mathbb{N}$ ， 2^c)-颜色（1^k）-可着色图所需的 $\frac{k}{\mathcal{C}}$ 的最大值。更准确地说，设 $\mathcal{C}$ 为任意图类。我们将 $\mathsf{ex}_{\mathcal{C}}^{k}$ 记为这样一个函数：它将每个 $n \in \mathbb{N}$ 对应到最小的整数 c ，使得 $\mathcal{C}$ 中所有阶为 n 的图都是 (1^k， 2^c)-可着色的。因此，我们关注当 $\mathcal{C}$ 为 $(a+1)$-可着色图类时，确定 $\mathsf{ex}_{\mathcal{C}}^{a}(n)$ 的值。例如，定理3指出，若 $\mathcal{P}_g$ 是围长为 g 的平面图类，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathsf{ex}_{\mathcal{P}_7}^{2}(n) \leq 12$，$\mathsf{ex}_{\mathcal{P}_8}^{2}(n) \leq 2$ ，且 $\mathsf{ex}_{\mathcal{P}_{10}}^{2}(n) = 1$。

3.1 k退化图的极值

（$k+1$）-可着色图中最简单的类别之一是 k退化图。本节将看到，每个 k退化图都是（$1^k, 2^{O(\sqrt{n})}$）-可着色的。所需距离-2颜色数量的大多数上界，都是根据下一条注释中的思路得出的。

注17。设 G 是一个图，且 $S \subseteq V(G)$。如果 $\chi_2(G-S) \leq c$ 和$G[N_G[S]]$ 是（$1^a, 2^b$)-可着色的，并且 $N_G(S)$ 中没有两个顶点具有相同的距离-2颜色，那么 G 是（$1^a, 2^{b+c}$)-可着色的。

事实上，可以先对 $G-S$ 进行2-距离 c着色，然后对 $G[N_G[S]]$进行（$1^a, 2^b$）-着色，使得 N_G（S）中的任意两个顶点都具有不同的距离-2颜色。这样做时，由于 $G-S$ 的2-距离 c着色是有效的，因此它在 $G-N_G[S]$中仍然有效。此外， N_G（S）中使用的每种距离-2颜色只出现一次，因此不会产生冲突，着色也就有效。

引理 18。设 G 是一个 k-退化图，且有一个大小为 N 的支配集 S 。那么存在一个包含 S 且大小至多为 $(k+1) \times N$ 的集合 T，使得$G-T$ 是 k-可着色的。

证明。我们将按照 V（G）上的k-退化序，同时对 $G-T$ 进行 k-着色并构造 T。设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 G 顶点的一个排序，并设 $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ 满足：对所有 $i \geq 1$, v_i 在 G_i中的度至多为k 。若 $i = 1$，则若 $v_1 \in S$ ，我们将 v_1 加入 T。否则， v_1 可以使用任意颜色，因此 G_1 是 k-可着色的。若 $i \geq 2$，则若 $v_i \in S$ ，我们将其加入 T。否则，若 G_i 中 v_i 的至多 k 个邻点中有一个顶点属于 T，则 v_i 至多有 $k-1$ 个邻点已着色，因此 v_i至少有一种可用颜色，我们就用该颜色给 v_i 着色。最后，若G_i 中 v_i 没有邻点属于 T，则我们将 v_i 加入 T。该过程结束时， $S \subseteq T$。此外，$|T-S| \leq k \times N$。事实上，由于 G的支配集是 S ，$T-S$ 中的每个顶点 v_i 都已被加入 T ，因为对于每个支配 v_i的 $v_j \in S$ ，我们都有$i < j$ ；在这种情况下，我们称 v_j 对于 v_i来说是较晚的。由于 G 是 k-退化的， S中的每个顶点至多可以是 k个顶点的较晚顶点，因此 $|T-S| \leq k \times |S| = k \times N$，所以 $|T| \leq$ （$k+1$） $\times N$，如所求。 □

如果一个 k-退化图 G 有一个大小为 N 的支配集，那么我们可以根据引理 18 构造出 T ，为 T 中的每个顶点赋予一个独特的距离-2颜色，然后对 $G-T$ 进行 k-着色。由此得到以下引理 18 的推论。

推论19. 对于每个阶为 n 、具有大小为 N 的支配集 S 的 k-退化图 G， G 都是 $(1^k, 2^{(k+1)\times N})$-可着色的。此外，每种距离-2颜色最多可以使用一次。

我们进一步要求给出 k-退化图的二距离色数界。下述定理给出了关于最大度的线性上界。

定理20 (Krumke、Marathe 和 Ravi [21], 2001)。 设 G 是一个最大度为 Δ的 k-退化图，则 $\chi_2(G) \leq (2k-1)\Delta + 1$。

因此，我们可以结合注17中的思路、推论19和定理20，得到以下上界。

定理21。 设 $\mathcal{D}_k$ 为 k-退化图类。则 $\mathrm{ex}^k_{\mathcal{D}_k}(n) \leq 4k\sqrt{k+1}\sqrt{n}$。

证明。 设 G 是一个阶为 n 的 k-退化图，并设 S 为 G中度至少为 N 的顶点集，N 稍后确定。特别地，由于 G 是k-退化图， G 至多有 kn 条边，因此特别有 $|S| \leq 2kn/N$。由于 S 是 $N_G[S]$的支配集，根据推论19， $N_G[S]$ 是 $(1^k, 2^{(k+1)2kn/N})$-可着色的，并且每种距离-2颜色至多使用一次。此外， $G - S$的最大度为 $N-1$ ，因此根据定理20， $\chi_2(G-S) \leq (2k-1)(N-1)+1$，且 $(2k-1)(N-1)+1 \leq 2kN$。因此，根据注17， G是 $(1^k, 2^{2kN+(k+1)2kn/N})$-可着色的。取 $N = \sqrt{k+1}\sqrt{n}$，我们至多使用 $4k\sqrt{k+1}\sqrt{n}$ 种距离-2颜色，符合要求。 □

关于 $\mathrm{ex}^k_{\mathcal{D}_k}(n)$ 的下界，考虑图 G （见图 7）。它是一棵部分 k-树，阶为 $kl^2 + (1+2k)l + k + 2$。此外，它不是 $(1^k, 2^l)$-可着色的。事实上，由于 c 在 G 中的度为 $l+1$， u_1，……， u_{l+1} 中必有一个顶点被赋予距离-1颜色，设为 u_i。因此，与 u_i 相连的每个大小为 $k+1$ 的团中，至少有一个顶点必须被赋予距离-2颜色，这就矛盾了。这给出了下界

$$\mathrm{ex}^k_{\mathcal{D}_k}(n) \geq \sqrt{n-1}/\sqrt{k}.$$

众所周知，树宽2的图是平面图。更精确地说，树宽2的图是其2-连通分支为串并联图的子图的那些图。该类特别包含外平面图。由于树宽2的图是2-退化的，定理21给出了上界$\mathrm{ex}^2_{\mathcal{T}_2}(n) \leq 8\sqrt{3}\sqrt{n}$，其中 $\mathcal{T}_2$ 是树宽至多为2的图类。该上界在常数因子意义下是紧的，即使限制到仙人掌图类——即其2-连通分支为圈或 K_2 的图——也是如此，因为当$k=2$时，图 7中的图是仙人掌图。因此，若 $\mathcal{O}_1$ 是外平面图类（从而 $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{T}_2$），则$\mathrm{ex}^2_{\mathcal{O}_1}(n) \geq \sqrt{n}/\sqrt{2}$。然而，在图 7的构造中，对于 $k=2$，该图包含许多三角形。事实上，仙人掌图必须包含三角形，才能需要许多距离-2颜色。

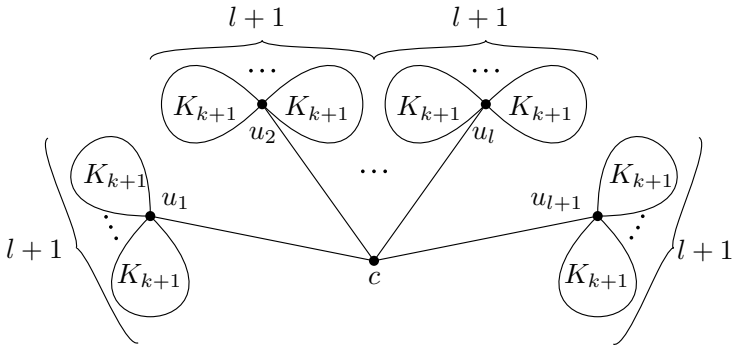


图 7：一个阶为 $kl^2+(1+2k)l+k+2$ 且不可（$1^k,\ 2^l$）着色的部分 k-树。

命题 22. 每个围长至少为4 的仙人掌图是$(1^2,2^1)$-可着色。

证明。设 G 是围长至少为 4、阶为 n 的仙人掌图，并且不失一般性地假设 G 是连通的。我们对图的 2-连通分量数量进行归纳。如果 G 只有一个连通分量，那么它就是一个圈，因此 G 是（$1^2,2^1$）-可着色的。否则，考虑 G 的一个恰好包含一个割点的 2-连通分量 C（称为叶块 C）。设属于 C 的割点为 u。如果 C 在 G 中诱导出一个 K_2，那么令 $C-u$ 中的顶点为 v。由于 v 的度为 1，我们可以用归纳法对 $G-v$ 进行（$1^2,2^1$）-着色，随后至少有一种距离-1颜色可供 v 使用。否则，令 C 中距 u 至少为 2 的一个顶点为 v。由于 G 的围长为 4，C 是一个长度至少为 4 的圈，因此 v 存在。我们用归纳法对 $G-C+u$ 进行（$1^2,2^1$）-着色。如果 u 用距离-2颜色着色，那么我们只能用距离-1颜色给 $C-u$ 着色。否则，我们可以用距离-2颜色给 v 着色，并用距离-1颜色给 $C-u-v$ 着色。 □

3.2 平面图的极值

本节研究：当有 a 个距离-1颜色可用时，为给（$a+1$）-可着色平面图着色所需的距离-2颜色的最大数量。

3.2.1 关于 $\mathrm{ex}^1_{\mathcal{G}}$ 的界

在 $a=1$ 的情况下，图 8 中的图的阶为 $4k$，且不可 $(1_1,\ 2^k)$-着色。事实上，反设该图可以 $(1_1,\ 2^k)$-着色。由于 $\deg(s)=\deg(t)>k$，s 和 t 必须着距离-2颜色。因此，s 的至少k 个邻点必须着距离-1颜色；对于 t，情况也类似。因此，存在 i，使得边 u_iv_i 是单色的，这就产生了矛盾。注意，图 8 中的图是 2-外平面二分图，且树宽为 2。因此，即使$\mathcal{C}$ 是树宽至多为 2 的 2-外平面二分图类，这种构造也给出了 $\mathrm{ex}^1_{\mathcal{C}}(n)\geq n/4$ 的下界。这里，

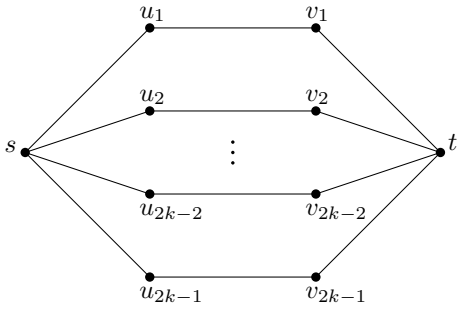


图 8：一个围长为 6、阶为 $4k$ 且不可用 $(1_1, 2^k)$-颜色着色的二部平面图。

$\mathcal{C}$ 在这个意义上是极小的：如果我们考虑 $\mathcal{C}$ 的子类，很快就能得到可 $(1_1, 2^{o(n)})$-着色的图。

为了上界化仅有一种距离-1颜色可用时为无三角形外平面图着色所需的距离-2颜色数，我们首先需要上界化无三角形外平面图的最小顶点覆盖的大小。为此，我们将证明任何此类图都同态于 C_5。从 G 到 H 的一个图同态 是一个函数 f：$V(G) \to V(H)$，满足：如果 $uv \in E(G)$，那么 $f(u)f(v) \in E(H)$；在这种情况下，我们称 G 同态于 H。

引理 23 （Pinlou和Sopena [24], 2006）。 每个围长为g 且最小度至少为2 的外平面图 G 都包含一个大小为 $l \geq g$ 的面，其中至少有$l-2$ 个连续顶点的度为2。

命题24。 设 $g = 2k$ 或 $g = 2k+1$。每个围长至少为 g 的外平面图都同态映射到 C_{2k+1}。

证明。设 k 使得 $g = 2k$ 属于 $g = 2k+1$。为导出矛盾，假设前述命题不成立，并设 G 是一个极小反例。若 G 含有割点 v，则设 H_1、.....、H_c 为 $G - v$ 的连通分量。由 G 的极小性可知， $H_1 + v$、.....、$H_c + v$ 都与 C_{2k+1} 同态，因此 G 与 C_{2k+1} 同态，这就产生了矛盾。所以可以假设 G 是 2- 连通的，因此其最小度至少为 2（否则 G 是 P_1 或 P_2，此时 G 与 C_{2k+1} 同态，产生矛盾）。由引理 23， G 含有一个大小为 $l \geq g$ 的面 F，其中至少有 $l-2$ 个连续的度为 2 的顶点。设这些连续顶点为 P，并设 u、 v 为 $F - P$ 的顶点。由 G 的极小性， $G - P$ 与 C_{2k+1} 同态，因此设 f 是从 $G - P$ 到 C_{2k+1} 的一个同态。由于 $uv \in E$（G）、 f（u）、 $\neq f$（v），所以存在 P_o、 P_e，即在 C_{2k+1} 中从 f（u）到 f（v）的两条路径，使得 P_o 的长度为奇数， P_e 的长度为偶数。若 P 的长度为奇数，则 F 与 P_o 同态；若 P 的长度为偶数，则 F 与 P_e 同态。因此， G 与 C_{2k+1} 同态，这就产生了矛盾，所以极小反例不存在，命题

得证。 □

推论 25. 设 G是一个围长为 g 、阶为 n的外平面图，则G 有一个阶至多为 $n(k+1)/(2k+1)$ 的顶点覆盖，其中 k 满足$g=2k$ 或 $g=2k+1$。

证明. 由命题24， G 与 C_{2k+1}同态。对于 C_{2k+1}的每个独立集 S ， $f^{-1}(S)$是 G的一个独立集。令 $\mathcal{S}_k$ 为 C_{2k+1}中大小为 k 的独立集的集合，我们有

$$\sum_{S\in\mathcal{S}_k}|f^{-1}(S)|=\sum_{v\in V(G)}|\{S\in\mathcal{S}_k:v\in S\}|=nk$$

因为 C_{2k+1} 的每个顶点恰好属于C_{2k+1}的 k 个最大独立集。此外，$|\mathcal{S}_k|=2k+1$ ，因此根据鸽巢原理，存在$S\in\mathcal{S}_k$ 使得 $|f^{-1}(S)|\geq nk/(2k+1)$，从而 G 有一个大小至多为 $n(k+1)/(2k+1)$的顶点覆盖。 □

注意到推论 25 是紧的，因为不交并 n C_{2k+1} 的最小顶点覆盖恰好是 $(k+1)n$。现在我们可以证明以下命题，它给出了在有一个距离-1颜色可用时，森林和无三角形外平面图所需的距离-2颜色数的上界。

命题 26. 森林是$(1_1,\overline{2^{4\sqrt{2}\sqrt{n}}})$-可着色的，而无三角形外平面图是$(1_1,\overline{2^{4\sqrt{34/5}\sqrt{n}-1}})$-可着色的。

证明。 森林是 1-退化的，因此我们可以应用定理21，将每个森林进行 $(1_1,\overline{2^{4\sqrt{2}\sqrt{n}}})$-着色。设 G为一个无三角形外平面图，并设 S 为度至少为 $\alpha\sqrt{n}$的顶点集合，其中 $\alpha\sqrt{n}$是一个之后再优化的实数。由于 G 是外平面图，它是 2-退化的，因此 G至多有 $2n$ 条边，从而 $|S|\leq 4\sqrt{n}/\alpha$。

为了给 G 着色，我们的首要目标是构造一个集合 $S'\subseteq N_G[S]$ ，使得 $S\subseteq S'$，$|S'|=\Theta(|S|)$，并且 $N_G[S]-S'$ 是独立集。如果 $|S|=1$，那么由于 G 无三角形，$N_G[S]-S'$ 是独立集。否则，我们断言，如果 $|S|\geq 2$，那么 $|N_G[S]|\leq 5|S|-4$。事实上，我们对 κ_2（ $G[N_G[S]]$的 2-连通分量数）使用归纳法。如果 $\kappa_2=1$，那么 $G[N_G[S]]$ 的外面是一个圈，并且由于 S 是 $G[N_G[S]]$和 $|S|\geq 2$ 的支配集，我们有 $|N_G[S]|\leq 3|S|\leq 5|S|-4$。现在假设 $\kappa_2\geq 2$，并令 B 为 $G[N_G[S]]$的一个叶块，也就是说，它是 $G[N_G[S]]$的一个恰有一个割点 v 的 2-连通分量。令 $m=|S\cap B|$，于是我们有，

$$|G[N_G[S]]|=|G[N_G[S]-(B-v)]|+|G[B]|-1$$

因为 $G[N_G[S]-(B-v)]$ 和 $G[B]$ 只关注 v。因此，根据归纳假设，

$$|G[N_G[S]]|\leq 5(|S|-(m-1))-4+5m-4-1=5|S|-4$$

正如所需。现在考虑集合

$$V'=\{v|\exists svv's' \text{ a path of } G \text{ with } s,s'\in S \text{ and } v,v'\in N_G[S]-S\}$$

由前面的断言可知，并且由于 $V' \subseteq N_G[S] - S$, $|V'| \leq 4|S| - 4 \leq 4|S|$，因此特别地，存在一个集合 $C \subseteq V'$，它是 $G[V']$ 的顶点覆盖，大小至多为 $12|S|/5$ ；因为根据推论 25，每个阶为 n 的外平面图都有大小至多为 $3n/5$ 的顶点覆盖。因此，我们定义 S' 为 $S \cup C$，使得 $|S'| \leq 17|S|/5$。假设 $N_G[S] - S'$ 不是独立集。那么存在 u, $v \in N_G[S] - S'$，使得 uv 是 $G[N_G[S]]$ 的一条边。由于 S 是 $N_G[S]$ 的支配集，且 G 是无三角形的，因此必定存在 $s, s' \in S$，使得 $suvs'$ 是 $G[N_G[S]]$ 中的一条路径。但是 u 和 v 属于 V'，而 uv 未被 C 覆盖，这就产生了矛盾。

现在我们可以给 G着色。首先构造一个 2-树 T，它是 G 的超图，也是我们将要着色的图。由于 G 是外平面图，其树宽至多为 2，因此 T 存在。我们先为 S' 中的每个顶点分别指定一个不同的距离-2颜色，最多需要 $|S'| \leq 17|S|/5 \leq 68\sqrt{n}/(5\alpha)$个距离-2颜色。然后，为 $N_G(S) - S'$ 中的每个顶点指定一个距离-1颜色。对 T 的这次预着色可能不合法，但将其缩减至 G 后就合法了，因为如前所述， $N_G(S) - S'$ 是 G 中的一个独立集，而且每个距离-2颜色只使用一次。接下来，按照构造该 2-树时得到的 2-退化序，为 T中剩余的顶点着色。设 v_1、……、 v_n 是这些顶点的一个排序，并设 T_i 是 T由 $\{v_1, \ldots, v_i\}$ 诱导的子图，使得对每个 i，$\deg_{T_i}(v_i) = 2$。根据 2-树的定义，v_i 的两个邻点彼此相邻。设 A 是一个距离-2颜色集合，其中的颜色不同于用于给 S' 中的顶点着色的距离-2颜色；该集合的大小稍后确定。如果 $v_1 \notin N_G[S]$ 已经预着色，则不重新为其着色。否则，可以用 A中的任意一个距离-2颜色为其着色。接着，假设 $i \geq 2$ ，并且我们已经在遵循预着色的前提下为 T_{i-1} 着色。因此，我们需要为 v_i 着色，以便将着色扩展到 T_i。如前所述，v_i 在 G_i 中的两个邻点彼此相邻，因此它们颜色不同。因此，将 v_i 加入 T_{i-1} 不会造成冲突。如果 v_i 已经预着色，则不重新为其着色。否则， v_i的邻点在 G_{i-1}中的度至多为$\alpha\sqrt{n} - 1$，因此至多有 $2\alpha\sqrt{n} - 2$个距离-2颜色不能用于 v_i。所以，如果$|A| \geq 2\alpha\sqrt{n} - 1$，我们就可以为 T 着色，且不会产生涉及距离-2颜色的冲突。将这种着色缩减至 G时，仍然不会产生涉及距离-2颜色的冲突，因为 G 是 T 的子图；也不会产生涉及距离-1颜色的冲突，因为被指定为距离-1颜色的顶点构成一个独立集。总共至多使用了$|S'| + |A| \leq 68\sqrt{n}/(5\alpha) + 2\alpha\sqrt{n} - 1$ 个距离-2颜色，并且当 $\alpha = \sqrt{34/5}$ 时该数量达到最小；在这种情况下，我们成功地按要求对 G 进行了 $(11, 2^{4\sqrt{34/5}\sqrt{n}-1})$-着色。

□

命题 26 在常数因子范围内是紧的，因为例如，图 7 中的图 G 加上 $k = 1$ 是一棵阶为 $1 + (l+1)^2$ 的树，并且不可 $(11, 2^l)$-着色。这给出了下界 $\mathrm{ex}^1_{\mathcal{C}}(n) \geq \sqrt{n} - 1$，无论 $\mathcal{C}$ 是树类还是无三角形外平面图类。

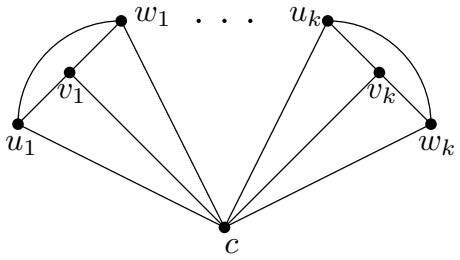


图9：一个阶为 $3k+1$ 且无法进行$(1_2,\ 2^k)$-着色的2-外平面图。

3.2.2 $\mathbf{ex}_{\mathcal{G}}^2$的界

如果我们考虑平面图类 $\mathcal{P}$，那么图9给出了 $\mathsf{ex}_{\mathcal{P}}^2$的线性下界。事实上，设 G 为图9中的图，并假设 G 是 $(1_2, 2^k)$-可着色的。如果 c 被赋予距离-2颜色，那么由于 $G-c$ 中的每个三角形都必须包含一个被赋予距离-2颜色的顶点，至少有 $k+1$ 个顶点被赋予距离-2颜色。 G 的直径为 2，因此产生矛盾。否则， c 被赋予距离-1颜色，但此时在 $G-c$的每个三角形中，至少两个顶点必须被赋予距离-2颜色。因此，总共至少有 $2k$ 个顶点必须被赋予距离-2颜色；而由于 G 的直径为 2，且 $k \geq 1$，我们同样得出矛盾。由于 G 的阶为 $3k+1$，且不可 $(1_2, 2^k)$- 着色，我们得到下界 $\mathsf{ex}_{\mathcal{P}}^2(n) \geq (n-1)/3$。

在图染色问题或图划分问题中，研究无三角形图或围长较大的图是经典课题。令 $\mathcal{P}_g$ 表示围长至少为 g的平面图类；如下文所示，$\mathsf{ex}_{\mathcal{P}_4}^2$是次线性的。为了用 $O(\sqrt{n})$种距离-2颜色给这类图着色，我们需要以下两个引理。

对于图 G， G 的奇环横截集是一个集合 $S \subseteq V(G)$，使得对于 G 的每个奇长度圈 C， $C \cap S \neq \emptyset$。我们用$\mathsf{oct}(G)$表示满足存在一个大小为 k的 G 奇环横截集的最小整数 k 。注意，对于 G的任意奇环横截集 S， $G-S$ 都是二可着色的。

引理 27. 设 G 是一个无三角形平面图，且令 D 为 G的连通支配集。那么 $\mathrm{oct}(G-D) \leq 5|D|/3$。

证明。 设 C 是 $G-D$的一个2-连通分量。由于 D 是一个支配集， C 中的每个顶点都必须在 D中有一个邻点。此外，由于 D 是连通的，支配 C 的 D 的顶点必须属于 $G[D]$的同一个面 f 。因此，设 P 是 $G[D]$ 中沿 f 的、包含 D中所有支配 C的顶点的最小路径。于是我们说， P 的边被 C 囚禁，并且 C 至少囚禁 $|C|-1$ 条边。由 G的平面性， $G[D]$ 的每条边至多可被囚禁两次。设 $\mathcal{B}$ 是 $G-D$ 中规模至少为5的极大2-连通分支的集合。于是我们有

$$4|\mathcal{B}| \leq \sum_{C \in \mathcal{B}} |C| - 1 \leq 2|\{e \in E(G[D]), e \text{ is jailed}\}| \leq 2|E(G[D])|$$

因此，特别地，

$$\sum_{C\in\mathcal{B}}|C| = |\mathcal{B}| + \sum_{C\in\mathcal{B}}|C| - 1 \le 5|E(G[D])|/2$$

因此， $G-D$ 中属于包含奇圈的 $G-D$ 的某个 2-连通分支的顶点数至多为 $5|E($ $G[D])|/2$。根据定理 16，每个无三角形平面图都是 3-可着色的，因此，特别是

$$\begin{aligned}\mathrm{oct}(G-D) &\le |\bigcup_{C\in\mathcal{B}} C|/3 \\ &\le 5|E(G[D])|/6 \text{ by the previous observation} \\ &\le 5|D|/3 \text{ since } G \text{ is triangle-free}\end{aligned}$$

正如所需。 □

令 $f_g(\Delta)$ 表示满足以下条件的最小整数 k： 每个围长至少为 g 且最大度为 Δ 的平面图都是 2-距离 k-可着色的。正如在 [1] 和 [17] 中证明的， $f_3(\Delta) \le 3(1+o(1))$ $\Delta/2$； 而正如在 [4] 中证明的， $f_5(\Delta) \le \Delta + 2$。

引理 28。 令 G 为一个图，并令 $S \in V$（G）。存在 $S' \in V$（G） 以及$S_1, \ldots, S_k$，其中某个 $k \le |S|$ 使得它们构成 S' 的一个划分，满足

- $S \subseteq S'$，并且
- 对于每个 i， S_i 都是 $G[S']$ 的一个连通分量的顶点集，并且
- 对于每个 i， j，距离$_G(S_i, S_j) \ge 4$，并且
- $|S'| \le 3|S|$。

证明。 令 $I = \{1, \ldots k\}$，并令 $\{S_i, i \in I\}$ 为 S 的一个划分，使得对于每个 $i \in I$， $|S_i| = 1$。我们将重复以下操作，直到达到不动点：如果存在 i、 j，使得 dist$_G(S_i$， $S_j) \le 3$，那么令 P 为 G 中一条长度至多为 3 的路径，其一个端点在 S_i 中，另一个端点在 S_j 中。然后，我们重新定义 S_i 为 $S_i \cup S_j \cup P$，删除 S_j，并从 I 中移除 j。在该过程的每一步，集合的数量减少 1，而剩余集合的并集大小至多增加 2，因此该过程必定终止。过程结束时， $\sum_{i\in I}|S_i| \le 3|S|$，我们只需令 S' 为 $\bigcup_{i\in I} S_i$ □

定理29. 设 $\mathcal{P}_4$ 为围长为4的平面图类。则 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_4}(n) \le 8\sqrt{3(1+o(1))n}$.

证明。 令 S 为 G中度至少为 N 的顶点集合， N 将在后文确定。由于 G 是围长至少为 4 的平面图， $|S| \le 4n/N$。我们从 S出发，按照引理 28 构造集合 S'和 S_1， $\ldots, S_k$。由引理 27，对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$, oct($G[N_G(S_i)]$) $\le 5|S_i|/3$，因此 $G[N_G[S_i]]$ 是 ($1_2, 2^{8|S_i|/3}$)-可着色的：给 S_i 中的每个顶点赋予一个唯一的距离-2颜色，给 的最小奇圈横截集中的每个顶点也赋予一个唯一的距离-2颜色，并对其余顶点进行 2-着色。此外，对于每个 S， N G，dist N (G , S_1) ，因此我们可以对每个 S_i进行 (12,$G[N_G$)-着色，从而得到 的有效 (12,)-着色，因为 。

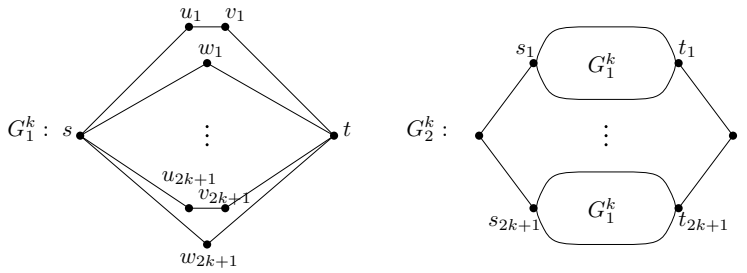


图10：一个围长为4、阶为 $12k^2+16k+7$ 的平面图，不是$(1_2, 2^k)$-可着色的。

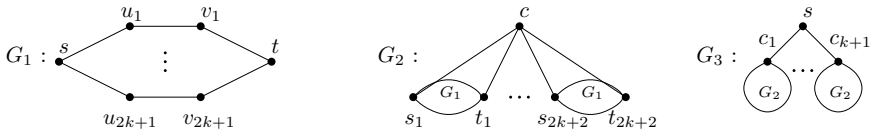


图11：一个围长为5、阶为 $8k^3+24k^2+25k+10$ 的平面图，不是$(1_2, 2^k)$-可着色的。

因此，由注17可知，并且由于 $G-N_G[S]$ 的最大度至多为$N-1$， G 是 $(1_2, 2^{f_4(N-1)^{+8|S|}})$-可着色的。我们可以将 $f_4(N-1)+8|S|$上界估计为 $3(1+o(1))N/2+32n/N$，并取 $N=8/\sqrt{3}(1+o(1))\sqrt{n}$，于是我们使用$8\sqrt{3}(1+o(1))\sqrt{n}$ 个距离-2颜色，达到所需结果。

□

定理29给出的界在常数因子范围内是紧的，因为图10中的图 G_2^k的阶为 $12k^2+16k+7$，且不是$(1_2, 2^k)$-可着色的。事实上，反设并非如此，并考虑图10中的图 G_1^k 。若 s 和t被赋予距离-1颜色，那么它们要么被赋予相同的距离-1颜色；但由于它们的度均为 $4k+2$，此时必定存在 i ，使得 u_i 和 v_i 也被赋予距离-1颜色，于是必然出现一条单色边。否则， s 和 t 被赋予不同的距离-1颜色，但同样的论证可得存在 i ，使得 w_i 被赋予距离-1颜色，因此又必然出现一条单色边。因此，在 G_1^k的任何$(1_2, 2^k)$-着色中， s 和 t 不可能都被赋予距离-1颜色。然而，在 G_2^k中，必定存在 i，使得 s_i 和 t_i 被赋予距离-1颜色，这就产生了矛盾。这给出了下界 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_4}(n)\geq\sqrt{3n-5/6}-1$。

对于围长更大的平面图，同样的论证给出界 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_g}(n)=O(\sqrt{n})$。注意，图11给出了下界 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_5}(n)=\Omega(n^{1/3})$； [8] 中的图2构造给出了下界 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_6}(n)=\Omega(n^{1/4})$；定理3指出 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_7}(n)\leq 12$ ，而该构造——

[8] 中的图 3 构造给出了下界 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_7}(n) \geq 2$。

3.2.3 $\mathrm{ex}^3_{\mathcal{P}}$的界

本节将给出一个上界：当有 3 种距离-1颜色可用时，对阶为 n 的每个平面图进行着色所需的距离-2颜色数量。

注30。 设 G 是一个平面图，且 $v \in V$, $G[N(v)]$ 是一个外平面图。

定理31。 设 $\mathcal{P}$ 为平面图类。那么$\mathrm{ex}^3_{\mathcal{P}}(n) \leq 6\sqrt{3}(1+o(1))\sqrt{n}$。

证明。设 S 是 G 中度至少为 N的顶点集合， N 将在稍后确定。我们首先按照引理 28，从S 构造集合 S'和 $S_1, \ldots, S_k$。由于对每个 i, j, $\mathrm{dist}_G(S_i, S_j) \geq 4$，因此对每个$i$, j，$\mathrm{dist}_G(N_G[S_i], N_G[S_j]) \geq 2$ ，所以 $G[N_G(S')]$ 是一个外平面图，因而是3-可着色的。由于我们可以对 $G - S$进行2-距离 $f_3(N-1)$-着色，并对 $G[N_G[S']]$ 进行$(13, 2^{|S'|})$-着色，使得 $N_G(S')$中的顶点仅用距离-1颜色着色，根据注17， G 是$(13, 2^{f_3(N-1)+|S'|})$-可着色的。根据引理 28，$|S'| \leq 3|S|$ ，且由于 G 是平面图， $|S| \leq 6n/N$。因此，我们可以将 $f_3(N-1) + |S'|$上界为$3(1+o(1))N/2 + 18n/N$；取$N = 6\sqrt{n}/\sqrt{3}(1+o(1))$后，便可如所需使用至多 $6\sqrt{3}(1+o(1))\sqrt{n}$种距离-2颜色。 □

定理31给出的 $\mathrm{ex}^3_{\mathcal{P}}(n) \leq 6\sqrt{3}(1+o(1))\sqrt{n}$ 的界在常数因子内是紧的，因为图 7 中的图配上 $k=3$ 给出了下界 $\mathrm{ex}^3_{\mathcal{P}}(n) \geq (\sqrt{12n-11}-7)/6$。

4 进一步讨论和开放问题

间隙陈述。 在定理14中，我们证明了判定一个图是否为 $(1^3, 2^1)$-可着色图或 3-可着色图是 NP-完全的，即使将范围限制在平面图时也是如此。对于一般图，我们可以证明一个类似的结论，且间隙可以任意大。

命题32。 对于任意整数 $c \geq 3$, $k \geq 1$，给定一个图 G ，已知它要么是 c-可着色的，要么不是 $(1^c, 2^k)$-可着色的，判定G 是否 c-可着色是 *NP*-完全的。

证明。 令 G' 为由 G 构造得到的图：对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们将 $k+1$ 个 v 的副本 $v_1, \ldots, v_{k+1}$ 添加到 G' ；对于每条边 $uv \in E(G)$，对于每个 $i, j \in \{1, \ldots, k+1\}$，我们都添加边 $u_i v_j$ 到 G'。也就是说，我们将 G 的每条边替换为 K_{k+1} 的一个副本。

- 如果 G 是 c-可着色的，那么 G' 也是如此，因为对于 G的每个正常 c-着色，我们都可以将每个 v_i 着成 v 的颜色，而这就是 G'的一个正常 c-着色。

- 如果 G' 是（1^c，2^k）-可着色的，那么令 $uv \in E(G)$。必然存在 i、$j \in \{1, k+1\}$，使得 u_i 和 v_j 分别使用距离-1颜色着色。由于$u_iv_j \in E(G')$，这些距离-1颜色彼此不同。因此，我们可以将 u 的每个副本重新着成 u_i 的颜色，并将 v 的每个副本重新着成v_j的颜色。重复此操作，我们可以将G' 的（1^c，2^k）-着色转换为 G' 的一个正常 c-着色，其中 v 的每个副本都使用相同的颜色；并且，我们可以很容易地从这个 G'的正常c-着色中恢复出 G 的一个正常 c-着色。

因此，G 是 c-可着色的，当且仅当 G' 是（1^c，2^k）-可着色的；当且仅当 G' 是c-可着色的。由 c-COLORING 在$c \geq 3$时的 NP-完全性可得该结果。

□

问题33。对于平面图，是否也存在类似的结果？

极值。正如在定理29之后所观察到的，图11给出了下界 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_5}(n) = \Omega(n^{1/3})$。此外，由[8] 构造的图2给出了下界 $\mathrm{ex}^2_{\mathcal{P}_6}(n) = \Omega(n^{1/4})$。

问题34。这些界是紧的吗？

在我们的大多数界中，我们证明阶为 n 的图 G 是（$1^{\chi(G)-1}$，$2^{O(\sqrt{n})}$）-可着色的。一般而言，这并不成立；例如，图8中的图是二可着色的，但不是（1_1，$2^{o(n)}$）-可着色的。另一个反例是图G，它是一个完全 k部图，各部的大小为 n。G 是 k-可着色的，但不是（1^{k-1}，2^n）-可着色的。

问题 35。图 G 在什么条件下是阶为 n （$1^{\chi(G)-1}$，$2^{O(\sqrt{n})}$）-可着色的？

致谢

我衷心感谢 Pascal Ochem 鼓励我研究这一主题，并在整个研究过程中给予我指导和宝贵建议。

参考文献

[1] Omid Amini、Louis Esperet 和 Jan Van Den Heuvel。曲面上图的距离-二着色的统一方法。《组合数学》，33(3):253– 296，2013年。[2] Kenneth Appel 和 Wolfgang Haken。每个平面地图都可四色着色。1976年。[3] Kenneth Appel、Wolfgang Haken 和 John Koch。每个平面地图都可四色着色。第二部分：可约性。《伊利诺伊数学杂志》，21(3):491– 567，1977年。

[4] Marthe Bonamy、Daniel W. Cranston 和 Luke Postle。围长至少为五的平面图是平方（$\Delta + 2$）-可选着色的。Journal of Combinatorial Theory, Series B，134:218–238，2019年。[5] Marthe Bonamy、Benjamin L´evˆeque 和 Alexandre Pinlou。稀疏图的2-距离着色。Journal of Graph Theory，77(3):190–218，2014年。[6] O.V. Borodin、Aleksey Glebov、A.O. Ivanova、T.K. Neustroeva 和 V.A. Tashkinov。平面图可进行2-距离（$\Delta + 1$）-着色的充分条件。Sibirskie ` Elektronnye Matematicheskie Izvestiya [（仅电子版）],1，2004年1月。[7] O.V. Borodin、A.O. Ivanova 和 T.K. Neustroeva。稀疏平面图的2-距离着色。Sibirskie Ehlektronnye Matematicheskie Izvestiya[（仅电子版）], 1:76–90，2004年。[8] Ilkyoo Choi 和 Xujun Liu。稀疏图的正常着色与平方着色之间。 *arXiv:2509.03080*，2025年。[9] Daniel Cranston。图的平方图的着色、列表着色与平方涂色（以及其他相关问题）。Electron. J. Comb.，1000(DS25)，2023年4月。[10] Daniel W Cranston 和 Landon Rabern。平面图的独立比至少为3/13。Electron. J. Comb.，23(3)，2016年9月。[11] Elias Dahlhaus、David S. Johnson、Christos H. Papadimitriou、Paul D. Seymour 和 Mihalis Yannakakis。多终端割的复杂性。SIAM J. Comput.，23(4):864–894，1994年。[12] Zdenˇek Dvoˇr´ak、Daniel Kr´al’、Pavel Nejedl´y 和 Riste ˇSkrekovski。围长为六的平面图的平方图着色。欧洲组合学杂志，29(4):838–849，2008年。《同态：结构与亮点》。[13] Zdenˇek Dvoˇr´ak、Daniel Kr´al’、Pavel Nejedl´y 和 Riste ˇSkrekovski。无短圈平面图的距离约束标号。离散应用数学，157(12):2634–2645，2009年。《第二届图类、优化与宽度参数研讨会》。[14] Tom´as Feder、Pavol Hell 和 Carlos Subi。Barnette图的距离-二着色。欧洲组合学杂志，91:103210，2021年。《语境中的着色与结构图论》（献给 Xuding Zhu 的致敬文集）。[15] M.R. Garey、D.S. Johnson 和 L. Stockmeyer。一些简化的 NP 完全图问题。理论计算机科学，1(3):237–267，1976年。[16] Branko Gr¨unbaum。Gr¨otzsch 关于3-着色的定理。《密歇根数学杂志》，10(3):303–310，1963年。

[17] Fr´ed´eric Havet、Jan van den Heuvel、Colin McDiarmid 和 Bruce Reed。《平面图平方的列表染色》。Electronic Notes in Discrete Mathematics，29：515–519，2007年。欧洲组合学、图论及应用会议。[18] Yuta Inoue、Ken-ichi Kawarabayashi 和 Atsuyuki Miyashita。对平面图进行5-着色，且一个颜色类的阶至多为 $|v|/6$。 *arXiv:2510.15407*，2025年。[19] Richard M. Karp。《组合问题之间的可约性》，第85–103页。Springer US，波士顿，MA，1972年。[20] Florica Kramer 和 Horst Kramer。《图顶点着色问题》。CR Acad. Sci. Paris A，268(7)：46–48，1969年。[21] Sven O Krumke、Madhav V Marathe 和 SS Ravi。无线网络信道分配的模型与近似算法。《无线网络》，7(6)：575–584，2001年。[22] Hoang La 和 Mickael Montassier。围长至少为21的平面次三次图的2-距离4-着色。《离散数学与理论计算机科学》，26（图论），2025年。[23] M Montassier 和 P Ochem。近似着色：不可着色图与NP-完全性。Electron. J. Comb.，22(1)，2015年3月。[24] Alexandre Pinlou 和 ´Eric Sopena。外平面图的定向顶点着色与弧着色。《Information Processing Letters》，100(3)：97–104，2006年。[25] Neil Robertson、Daniel Sanders、Paul Seymour 和 Robin Thomas。四色定理。Journal of Combinatorial Theory, Series B，70(1)：2–44，1997年。[26] Alexa Sharp。距离着色。载于《欧洲算法研讨会》，第510–521页。Springer，2007年。[27] Carsten Thomassen。格勒茨奇定理的简短列表着色证明。Journal of Combinatorial Theory, Series B，88(1)：189–192，2003年。[28] Wei-Fan Wang 和 Ko-Wei Lih。满足围长和距离二条件的平面图标号。SIAM Journal on Discrete Mathematics，17(2)：264–275，2003年。[29] Gerd Wegner。具有给定直径的图与一个着色问题。1977年。